

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENERGIA NUCLEAR

PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM TECNOLOGIAS
ENERGÉTICAS E NUCLEARES

APLICAÇÕES DE MÉTODOS PERTURBATIVOS PARA
ANÁLISE DE SENSIBILIDADE EM ESCOAMENTOS
BIFÁSICOS

LÁZARA SILVEIRA CASTRILLO

RECIFE - PERNAMBUCO - BRASIL

Dezembro – 2003

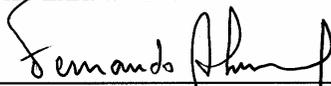
**APLICAÇÕES DE MÉTODOS PERTURBATIVOS PARA
ANÁLISE DE SENSIBILIDADE EM ESCOAMENTOS
BIFÁSICOS**

Lázara Silveira Castrillo

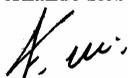
APROVADA EM: 23.12.2003

**ORIENTADORES: Prof. Dr. Fernando Roberto de Andrade Lima
Prof. Dr. Jorge Luis Balino**

COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. Dr. Fernando Roberto de Andrade Lima - CRCN/CNEN



Prof. Dr. Fernando Carvalho da Silva - PEN-COPPE/UFRJ



Prof. Dr. César Augusto Moraes de Abreu - DEQ/UFPE



Profa. Dra. Rita de Cássia Fernandes de Lima - DEMEC/UFPE



Prof. Dr. Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira - DEN/UFPE

Visto e permitida a impressão



Coordenador do PROTEN/DEN/UFPE

LÁZARA SILVEIRA CASTRILLO

**APLICAÇÕES DE MÉTODOS PERTURBATIVOS PARA
ANÁLISE DE SENSIBILIDADE EM ESCOAMENTOS
BIFÁSICOS**

TESE DE DOUTORADO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Tecnologias Energéticas e Nucleares, do
Departamento de Energia Nuclear da Universidade
Federal de Pernambuco.

ORIENTADORES: Prof. Dr. FERNANDO ROBERTO DE ANDRADE LIMA
Prof. Dr. JORGE LUIS BALIÑO

**APLICAÇÕES DE MÉTODOS PERTURBATIVOS PARA
ANÁLISE DE SENSIBILIDADE EM ESCOAMENTOS
BIFÁSICOS**

SUMÁRIO

	<i>PÁGINA</i>
<i>Lista de Figuras</i>	<i>vi</i>
<i>Lista de Tabelas</i>	<i>x</i>
<i>Lista de Símbolos</i>	<i>xii</i>
<i>Resumo</i>	<i>xiv</i>
<i>Abstract</i>	<i>xv</i>
<i>1. INTRODUÇÃO</i>	<i>1</i>
<i>1.1. O problema</i>	<i>1</i>
<i>1.2. Objetivos</i>	<i>3</i>
<i>2. REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA</i>	<i>4</i>
<i>2.1. Escoamento bifásico</i>	<i>4</i>
<i>2.2. Cálculo de sensibilidade</i>	<i>7</i>
<i>3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA TEORIA DE PERTURBAÇÃO</i>	<i>10</i>
<i>3.1. Formalismo diferencial</i>	<i>13</i>
<i>4. MODELO MATEMÁTICO</i>	<i>15</i>
<i>4.1. Equações de conservação</i>	<i>15</i>
<i>4.2. Equações constitutivas</i>	<i>15</i>
<i>4.3. Solução numérica do sistema direto</i>	<i>17</i>
<i>5. CASOS - PROBLEMAS ANALISADOS</i>	<i>22</i>
<i>5.1. Problema direto: Caso 1</i>	<i>22</i>
<i>5.2. Problema direto: Caso 2</i>	<i>23</i>
<i>6. APLICAÇÃO AO MODELO DO FORMALISMO DIFERENCIAL</i>	<i>26</i>
<i>6.1. Sistema de equações direto</i>	<i>26</i>
<i>6.2. Sistema de equações derivadas</i>	<i>27</i>

6.3.	<i>Sistema de equações adjuntas.....</i>	30
6.4.	<i>Concomitante bilinear.....</i>	32
6.5.	<i>Descrição dos funcionais de resposta analisados.....</i>	33
6.6.	<i>Solução numérica do sistema adjunto.....</i>	37
6.7.	<i>Descrição dos coeficientes de sensibilidade analisados.....</i>	39
7.	<i>RESULTADOS E DISCUSÕES.....</i>	45
7.1.	<i>Escoamento anular.....</i>	45
7.1.1.	<i>Resultados do estado estacionário direto.....</i>	45
7.1.2.	<i>Problema adjunto estacionário.....</i>	47
7.1.2.1.	<i>Resultados das funções adjuntas para a resposta: $\bar{\alpha}$.....</i>	47
7.1.2.2.	<i>Resultados das funções adjuntas: $\alpha(x = L / 2)$.....</i>	50
7.1.2.3.	<i>Resultados das funções adjuntas: $\alpha(x = L)$.....</i>	52
7.1.2.4.	<i>Resultados das funções adjuntas para a resposta: \bar{v}_g.....</i>	54
7.1.2.5.	<i>Resultados das funções adjuntas para a respostas: $v_g(x = L/2)$ e $v_g(x = L)$.....</i>	55
7.1.2.6.	<i>Resultados das funções adjuntas para a resposta: \bar{v}_l.....</i>	56
7.1.2.7.	<i>Resultados das funções adjuntas para a resposta: $v_l(x = L / 2)$.....</i>	58
7.1.2.8.	<i>Resultados das funções adjuntas para a resposta: $v_l(x = L)$.....</i>	60
7.1.2.9.	<i>Resultados das funções adjuntas para a resposta: \bar{P}.....</i>	62
7.1.2.10.	<i>Resultados das funções adjuntas para a resposta: $P(x = L / 2)$.....</i>	64
7.1.2.11.	<i>Resultados das funções adjuntas para a resposta: $P(x = L)$.....</i>	66
7.1.3.	<i>Análises de sensibilidade.....</i>	68
7.1.4.	<i>Resultados do estado transitório direto.....</i>	72
7.1.5.	<i>Análises de sensibilidade.....</i>	78
7.2.	<i>Escoamento em bolhas.....</i>	80
7.2.1.	<i>Resultados do estado estacionário direto.....</i>	80
7.2.2.	<i>Problema adjunto estacionário.....</i>	82
7.2.2.1.	<i>Resultados das funções adjuntas para a resposta: $\bar{\alpha}$.....</i>	83
7.2.2.2.	<i>Resultados das funções adjuntas para a resposta: $\alpha(x = 0,015m)$.....</i>	85
7.2.2.3.	<i>Resultados das funções adjuntas para a resposta: $\alpha(x = L)$.....</i>	88

7.2.2.4.	Resultados das funções adjuntas para a resposta: \bar{v}_g	90
7.2.2.5.	Resultados das funções adjuntas para a resposta: $v_g(x = 0,015m)$	93
7.2.2.6.	Resultados das funções adjuntas para a resposta: $v_g(x = L)$	95
7.2.2.7.	Resultados das funções adjuntas para a resposta: \bar{v}_l	97
7.2.2.8.	Resultados das funções adjuntas para a resposta: $v_l(x = 0,015m)$	100
7.2.2.9.	Resultados das funções adjuntas para a resposta: $v_l(x = L)$	103
7.2.2.10.	Resultados das funções adjuntas para a resposta: \bar{P}	105
7.2.2.11.	Resultados das funções adjuntas para a resposta: $P(x = 0,015m)$	108
7.2.2.12.	Resultados das funções adjuntas para a resposta: $P(x = L)$	110
7.2.3.	Análises de sensibilidade.....	113
7.2.4.	Resultados do estado transitório direto.....	118
7.2.5.	Análises de sensibilidade.....	120
8.	CONCLUSÕES.....	123
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	125
	APÊNDICE 1. DESENVOLVIMENTO DO OPERADOR H E O SISTEMA DERIVADO.....	128
	APÊNDICE 2. DESENVOLVIMENTO DO OPERADOR H^* E O SISTEMA ADJUNTO.....	135
	APÊNDICE 3: DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O ESCOAMENTO ANULAR.....	145

LISTA DE FIGURAS

FIGURA	PÁGINA
1. <i>Padrões de escoamento bifásico não adiabático num tubo vertical.....</i>	5
2. <i>Malha nodal do sistema direto.....</i>	18
3. <i>Diagrama de bloco do programa DIRETO.....</i>	21
4. <i>Escoamento anular.....</i>	22
5. <i>Escoamento em bolhas.....</i>	24
6. <i>Malha nodal do sistema adjunto.....</i>	37
7. <i>Diagrama de blocos do programa ADJUNTO.....</i>	39
8. <i>Fração de vazio, estado estacionário.....</i>	46
9. <i>Velocidade do líquido, estado estacionário.....</i>	46
10. <i>Queda de pressão, estado estacionário.....</i>	47
11. <i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta $\bar{\alpha}$.....</i>	49
12. <i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $\bar{\alpha}$.....</i>	49
13. <i>Função adjunta da pressão para a resposta $\bar{\alpha}$.....</i>	50
14. <i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta $\alpha(x = L/2)$.....</i>	51
15. <i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $\alpha(x = L/2)$.....</i>	51
16. <i>Função adjunta da pressão para a resposta $\alpha(x = L/2)$.....</i>	52
17. <i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta $\alpha(x = L)$.....</i>	53
18. <i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $\alpha(x = L)$.....</i>	53
19. <i>Função adjunta da pressão para a resposta $\alpha(x = L)$.....</i>	54
20. <i>Função adjunta da velocidade do gás para a resposta \bar{v}_g.....</i>	55
21. <i>Função adjunta da velocidade do gás para a resposta $v_g(x = L/2)$.....</i>	56
22. <i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta \bar{v}_1.....</i>	57
23. <i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta \bar{v}_1.....</i>	57
24. <i>Função adjunta da pressão para a resposta \bar{v}_1.....</i>	58
25. <i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta $v_1(x = L/2)$.....</i>	59
26. <i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $v_1(x = L/2)$.....</i>	59

27.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta $v_1(x = L/2)$.....</i>	60
28.	<i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta $v_1(x = L)$.....</i>	61
29.	<i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $v_1(x = L)$.....</i>	61
30.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta $v_1(x = L)$.....</i>	62
31.	<i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta \bar{P}</i>	63
32.	<i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta \bar{P}</i>	63
33.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta \bar{P}</i>	64
34.	<i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta $P(x = L/2)$.....</i>	65
35.	<i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $P(x = L/2)$.....</i>	65
36.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta $P(x = L/2)$.....</i>	66
37.	<i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta $P(x = L)$.....</i>	67
38.	<i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $P(x = L)$.....</i>	67
39.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta $P(x = L)$.....</i>	68
40.	<i>Fração de vazio. $t = 0,5 s$</i>	73
41.	<i>Velocidade do líquido, $t = 0,5 s$</i>	74
42.	<i>Velocidade do gás, $t = 0,5 s$</i>	75
43.	<i>Queda de pressão, $t = 0,5 s$</i>	75
44.	<i>Fração de vazio, 3D.</i>	76
45.	<i>Velocidade do gás, 3D.</i>	77
46.	<i>Velocidade do líquido, 3D.</i>	77
47.	<i>Fração de vazio, estado estacionário.....</i>	81
48.	<i>Velocidade do gás, estado estacionário.....</i>	81
49.	<i>Velocidade do Líquido, estado estacionário.....</i>	82
50.	<i>Queda de pressão, estado estacionário.....</i>	82
51.	<i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta $\bar{\alpha}$.....</i>	83
52.	<i>Função adjunta da velocidade do gás para a resposta $\bar{\alpha}$.....</i>	84
53.	<i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $\bar{\alpha}$.....</i>	84
54.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta $\bar{\alpha}$.....</i>	85
55.	<i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta $\alpha(x = 0,015 m)$.....</i>	86
56.	<i>Função adjunta da velocidade do gás para a resposta $\alpha(x = 0,015 m)$.....</i>	86

57.	<i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $\alpha(x=0,015m)$.....</i>	87
58.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta $\alpha(x=0,015m)$.....</i>	87
59.	<i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta $\alpha(x=L)$.....</i>	88
60.	<i>Função adjunta da velocidade do gás para a resposta $\alpha(x=L)$.....</i>	89
61.	<i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $\alpha(x=L)$.....</i>	89
62.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta $\alpha(x=L)$.....</i>	90
63.	<i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta \bar{v}_g.....</i>	91
64.	<i>Função adjunta da velocidade do gás para a resposta \bar{v}_g.....</i>	91
65.	<i>Velocidade do líquido adjunta para a resposta \bar{v}_g.....</i>	92
66.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta \bar{v}_g.....</i>	92
67.	<i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta $v_g(x=0,015m)$.....</i>	93
68.	<i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $v_g(x=0,015m)$.....</i>	94
69.	<i>Velocidade do líquido adjunta para a resposta $v_g(x=0,015m)$.....</i>	94
70.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta $v_g(x=0,015m)$.....</i>	95
71.	<i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta $v_g(x=L)$.....</i>	96
72.	<i>Função adjunta da velocidade do gás para a resposta $v_g(x=L)$.....</i>	96
73.	<i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $v_g(x=L)$.....</i>	97
74.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta $v_g(x=L)$.....</i>	97
75.	<i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta \bar{v}_l.....</i>	98
76.	<i>Função adjunta da velocidade do gás para a resposta \bar{v}_l.....</i>	99
77.	<i>Velocidade do líquido adjunta para a resposta \bar{v}_l.....</i>	99
78.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta \bar{v}_l.....</i>	100
89.	<i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta $v_l(x=0,015m)$.....</i>	101
80.	<i>Função adjunta da velocidade do gás para a resposta $v_l(x=0,015m)$.....</i>	101
81.	<i>Velocidade líquido adjunta para a resposta $v_l(x=0,015m)$.....</i>	102
82.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta $v_l(x=0,015m)$.....</i>	102
83.	<i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta $v_l(x=L)$.....</i>	103

84.	<i>Função adjunta da velocidade do gás para a resposta $v_1(x=L)$</i>	104
85.	<i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $v_1(x=L)$</i>	104
86.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta $v_1(x=L)$</i>	105
87.	<i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta \bar{P}</i>	106
88.	<i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta \bar{P}</i>	106
89.	<i>Função adjunta da velocidade do gás para a resposta \bar{P}</i>	107
90.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta \bar{P}</i>	107
91.	<i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta $P(x=0,015m)$</i>	108
92.	<i>Velocidade do gás adjunta para a resposta $P(x=0,015m)$</i>	109
93.	<i>Velocidade do líquido adjunta para a resposta $P(x=0,015m)$</i>	109
94.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta $P(x=0,015m)$</i>	110
95.	<i>Função adjunta da fração de vazio para a resposta $P(x=L)$</i>	111
96.	<i>Função adjunta da velocidade do gás para a resposta $P(x=L)$</i>	111
97.	<i>Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $P(x=L)$</i>	112
98.	<i>Função adjunta da pressão para a resposta $P(x=L)$</i>	112
99.	<i>Fração de vazio, transitório direto, 3D.</i>	118
100.	<i>Velocidade do líquido, transitório direto, 3D.</i>	119
101.	<i>Queda de pressão, transitório direto, 3D.</i>	119

LISTA DE TABELAS

TABELA	PÁGINA
1. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\bar{\alpha}$	69
2. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\alpha(x = L/2)$	70
3. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\alpha(x = L)$	70
4. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta \bar{v}_1	70
5. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $v_1(x = L/2)$	71
6. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $v_1(x = L)$	71
7. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta \bar{P}	71
8. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $P(x = L/2)$	72
9. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $P(x = L)$	72
10. Coeficientes de sensibilidade relativos do funcional - resposta $\bar{\alpha}(x,t)$	78
11. Coeficientes de sensibilidade relativos do funcional - resposta $\bar{v}_g(x,t)$	79
12. Coeficientes de sensibilidade relativos do funcional - resposta $\bar{v}_1(x,t)$	79
13. Coeficientes de sensibilidade relativos do funcional - resposta $\bar{P}(x,t)$	79
14. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\bar{\alpha}$	113
15. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\alpha(x = 0,015m)$	113
16. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\alpha(x = L)$	114
17. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta \bar{v}_g	114
18. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $v_g(x = 0,015m)$	115
19. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $v_g(x = L)$	115
20. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta \bar{v}_1	116
21. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $v_1(x = 0,015m)$	116
22. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $v_1(x = L)$	116

23.	<i>Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta \bar{P}</i>	117
24.	<i>Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $P(x = 0,015m)$.....</i>	117
25.	<i>Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $P(x = L)$.....</i>	117
26	<i>Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\bar{\alpha}(x,t)$.....</i>	120
27.	<i>Coeficientes de sensibilidade relativos do funcional - resposta $\bar{v}_g(x,t)$.....</i>	121
28.	<i>Coeficientes de sensibilidade relativos do funcional - resposta $\bar{v}_i(x,t)$.....</i>	121
29.	<i>Coeficientes de sensibilidade relativos do funcional - resposta $\bar{P}(x,t)$.....</i>	122

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Latinas

A e B	Matrizes quadradas do sistema de equações direto
C_d	Coefficiente adimensional de arraste
C_p	Coefficiente semi-empírico de pressão.
C_r	Coefficiente semi-empírico de tensor de tensão de Reynolds
C_{vm}	Coefficiente semi-empírico do termo de massa virtual
$C(f)$	Condições de contorno
$CB(f_{\bar{r}_i}, f^*)$	Concomitante bilinear
f	Vetor de estado
f^*	Vetor adjunto de f
$f_{ p_i}$	Vetor derivado
g	Aceleração da gravidade
$H_{\bar{r}_i}$	Operador matricial definido pela derivada de Frèchet
H^*	Operador adjunto
m	Sistema de equações acopladas
M_{ki}	Forças interfaciais por unidade de volume devido aos efeitos da massa virtual e às forças de arraste,
P_k	Pressão da fase k
p	Vetor de parâmetros de entrada
ΔP_{ki}	Pressão da fase k na interface
r	Vetor de posição generalizado
R	Funcional resposta
R_b	Raio equivalente da bolha
R_e	Número de Reynolds
T	Tempo final de integração
S	Termo de fonte da equação adjunta
v_k	Velocidade da fase
v_r	Velocidade relativa
x	Vetor unitário

Letras Gregas

α_k	<i>Fração volumétrica da fase</i>
α_0	<i>Fração volumétrica da fase gasosa na entrada, condição de contorno</i>
α_{in}	<i>Fração volumétrica da fase gasosa no início do transitório, condição inicial</i>
Δx	<i>Passo espacial</i>
Δt	<i>Passo temporal</i>
ρ_k	<i>Massa específica da fase k</i>
τ_{ki}^{Re}	<i>Tensor de tensões para a fase k</i>
τ_{gw}	<i>Força devida ao atrito do fluido com a parede</i>
Ψ	<i>Representação genérica das variáveis diretas dependentes</i>
Ψ^*	<i>Representação genérica das funções adjuntas dependentes</i>
δ	<i>Função delta de Dirac</i>
ξ	<i>Infinitesimal espacial</i>
τ	<i>Infinitesimal temporal</i>
μ_m	<i>Viscosidade média</i>

Índices

f	<i>Fase líquida</i>
g	<i>Fase vapor</i>
T	<i>Transposta</i>

Símbolos Operacionais

$\bar{\partial}$	<i>Derivada de Frèchet</i>
$\langle \rangle$	<i>Integral definida no espaço de fase</i>

APLICAÇÕES DE MÉTODOS PERTURBATIVOS PARA ANÁLISE DE SENSIBILIDADE EM ESCOAMENTOS BIFÁSICOS

Autora: Lázara Silveira Castrillo

Orientadores: Prof. Dr. Fernando Roberto de Andrade Lima
Prof. Dr. Jorge Luis Baliño

RESUMO

Escoamentos bifásicos são encontrados em processos industriais, naturais ou biológicos. Além de ser importante prever o comportamento do escoamento através da solução das equações que descrevem o fenômeno físico, conhecer como os parâmetros do sistema influenciam no comportamento deste escoamento pode melhorar o conhecimento do mesmo. O conhecimento prévio dos parâmetros que mais influenciam no comportamento de sistemas físicos pode depender de uma boa análise de sensibilidade realizada a priori. O objetivo deste trabalho é simular numericamente transitórios de escoamentos bifásicos e realizar estudos de sensibilidade no modelo matemático usando o formalismo de perturbação diferencial. O modelo matemático considera o escoamento bifásico, unidimensional, incompressível e adiabático, mas sem mudança de fase. A transferência de quantidade de movimento na interface inclui os termos interfaciais de massa virtual, arraste, tensão turbulenta de Reynolds e de diferença de pressão interfacial. Para obter a solução do sistema de equações diferenciais é usado um esquema implícito de diferenças finitas. Os resultados das simulações mostram as distribuições temporal e espacial da fração de vazio, velocidades do líquido e do gás e pressão para os vetores de estado e adjunto. Os coeficientes de sensibilidade calculados através do método perturbativo diferencial são comparados com aqueles calculados através dos métodos analítico e direto. Dois casos-problema foram considerados neste trabalho: um escoamento anular e um escoamento de bolhas. Para cada caso, foram estudados dois tipos de respostas: valores médios e locais para as grandezas fração de vazio, velocidades das fases e pressão. Os parâmetros estudados são aqueles que definem as propriedades físicas das fases (por exemplo, a densidade), as condições de contorno e inicial do problema (por exemplo, a fração de vazio na entrada do tubo) e os coeficientes de interação interfacial (por exemplo, o termo de arraste). Os resultados obtidos para os coeficientes de sensibilidade calculados através dos métodos perturbativos mostram excelente concordância com aqueles obtidos através da solução direta do problema ou, quando possível, através da solução analítica do mesmo.

APPLICATIONS OF PERTURBATIVE METHODS FOR SENSITIVITY ANALYSIS OF TWO PHASE FLOWS

Author: Lázara Silveira Castrillo

Advisors: Prof. Dr. Fernando Roberto de Andrade Lima
Prof. Dr. Jorge Luis Baliño

ABSTRACT

Two-phase flows are found in industrial, natural or biological processes. Besides being important to predict the behavior of the flow through the solution of the equations that describe the physical phenomenon, knowing how the system parameters influence flow behavior can improve its knowledge. The previous knowledge of the parameters that have more influence in the behavior of physical systems depends on a good sensitivity analysis accomplished a priori. The objective of this work is to numerically simulate, transient two-phase flows and to accomplish sensitivity studies in the mathematical model using the differential perturbative method. The mathematical model considers one-dimensional, incompressible and adiabatic two-phase flow without phase change. The transfer of momentum at the interface includes the interfacial terms of virtual mass, drag, Reynolds turbulent stress and the difference of interfacial pressure. To obtain the solution of the system of differential equations, a differences finite implicit approach is used. The results of the simulations show the distributions as a function of time and position of: void fraction, liquid and gas velocities and pressure for the state and adjoint vectors. The sensitivity coefficients, calculated through the differential perturbative method, are compared with those calculated through the analytic and direct methods. Two case-problems were considered in this work: an annular flow and a bubbly flow. For each case, there studied two kind of answers: mean and local values for the following variables: void fraction, phase velocities and pressure. The parameters studied are those that define the physical properties of the phases (for instance, the density), the boundary and initial conditions of the problem (for instance, the void fraction at the entrance of the tube) and the coefficients of interfacial interaction (for instance, the drag term). The results obtained for the sensitivity coefficients calculated through perturbative methods agree very well with those obtained through the direct solution of the problem or, when possible, through the analytic solution.

AGRADECIMENTOS

A conclusão deste trabalho é o resultado da contribuição, compreensão e apoio de inúmeras pessoas. Recebam meu especial agradecimento:

Professores Fernando Roberto de Andrade Lima e Jorge Luis Baliño pela orientação, sugestões e esclarecimentos.

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa concedida que em muito colaborou para a realização deste trabalho.

Ao IPEN pela disponibilidade da infra-estrutura oferecida em estadas de trabalho

Professores Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira, Elias Silva Filho e Rita de Cássia Fernandes de Lima, membros do Comitê de Acompanhamento, que colaboraram, com suas valiosas sugestões, para o aprimoramento do presente trabalho.

1. INTRODUÇÃO

1.1. O problema

A importância do estudo dos escoamentos multifásicos, especificamente o escoamento bifásico, tem-se tornado, cada vez mais, objeto de estudo por pesquisadores numa ampla variedade de sistemas de engenharia. A otimização no projeto de equipamentos e sistemas e a análise da segurança têm sido objetos fundamentais de pesquisa os quais não se limitam à tecnologia industrial como também a um extenso número de problemas ambientais e biológicos.

Além de ser importante prever o comportamento do escoamento para seu estudo através da solução das equações que descrevem o fenômeno físico, a obtenção de bons parâmetros que influenciam no processo e a sua melhora pode depender de uma boa análise de sensibilidade realizada a priori. Em geral, os estudos de sensibilidade dos parâmetros do sistema são realizados construindo-se as chamadas superfícies de resposta. A teoria da perturbação, entretanto, tem-se mostrado eficiente para se efetuar estudos de sensibilidade. Esta eficiência, amplamente mostrada na área de física dos reatores por GANDINI (1987), tem motivado a aplicação de métodos perturbativos para análise de sensibilidade em outras áreas, incluindo problemas não lineares envolvendo as equações de conservação. O fato que tem motivado o uso dos métodos perturbativos baseia-se em que com apenas uma execução do código obtêm-se as sensibilidades desejadas com respeito às variações dos parâmetros. Porém, muitas das aplicações têm sido limitadas a estudos de modelos monofásicos. Neste trabalho, os cálculos dos coeficientes de sensibilidade foram realizados utilizando-se três métodos diferentes: o analítico, o direto e o perturbativo diferencial.

No método analítico, o coeficiente de sensibilidade é calculado pela derivação da solução analítica, quando existir, em relação ao parâmetro de interesse.

No método direto executa-se o código (programa computacional da solução numérica do sistema que descreve o comportamento do sistema), tantas vezes quantas são as perturbações dos parâmetros a serem analisadas. Nesta formulação, o parâmetro p é

perturbado no mínimo duas vezes e duas respostas $R(p + \Delta p)$ e $R(p - \Delta p)$ são calculadas. O coeficiente de sensibilidade é dado pela relação:

$$\frac{\Delta R}{\Delta p} = \frac{R(p + \Delta p) - R(p - \Delta p)}{2\Delta p} \quad (1.1)$$

que corresponde ao cálculo da tangente no ponto p quando Δp tende a zero. Esta expressão aproxima-se da derivada quando:

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta p} \quad (1.2)$$

O método perturbativo diferencial baseia-se nas seguintes etapas:

- Formulação de um sistema de equações diretas, que fornecerá a solução espacial e temporal das variáveis de estado;
- Formulação de um sistema de equações derivadas e seu correspondente sistema de equações adjuntas. Este último fornecerá a solução espacial e temporal das funções adjuntas;
- Obtenção dos coeficientes de sensibilidade, $\frac{\partial R}{\partial p_i}$, por meio de operações envolvendo a solução de problema direto e adjunto.

Um importante requisito em estudos de sensibilidade é a identificação dos parâmetros que influem no comportamento do sistema. O problema direto a ser considerado será representado pelas equações de conservação da massa e do momento para um escoamento bifásico. A análise de sensibilidade será aplicada a dois casos com escoamentos bifásicos: um com escoamento anular e outro com escoamento de bolhas. Estes casos servirão para determinar o efeito de cada parâmetro do sistema numa resposta particular. Ambas configurações têm amplas aplicações teórica e experimental nas áreas da petroquímica, em sistemas de engenharias e em problemas ambientais.

Como as possibilidades de obtenção de soluções analíticas são remotas, exceto para o caso em que sejam feitas muitas simplificações, as soluções das equações diretas e adjuntas são obtidas numericamente, usando para isto o método de diferenças finitas.

1.2. Objetivos

Os objetivos deste trabalho são:

- Simular a hidrodinâmica da fração de vazio, das velocidades das fases em função do espaço e do tempo dos casos-problema, assim como a sua validação com os resultados experimentais documentados;
- Aplicar a teoria da perturbação ao modelo de escoamento bifásico, para os estados estacionário e transitório com o qual seja possível realizar estudos de sensibilidade dos parâmetros de interesse;
- Determinar os coeficientes de sensibilidade para funcionais contínuos e discretos, via cálculo direto e via formalismo de perturbação diferencial.

O trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 são realizados levantamentos bibliográficos sobre escoamento bifásico e sobre estudos de sensibilidade correlatos. A teoria do formalismo diferencial é apresentada no Capítulo 3. O Capítulo 4 descreve o modelo matemático usado para a simulação do escoamento bifásico. Os casos-problema tratados: escoamentos anular e de bolhas são descritos no Capítulo 5. A aplicação da teoria, incluindo as expressões dos sistemas derivado e adjunto e dos coeficientes de sensibilidade para várias respostas, é apresentada no Capítulo 6. Os resultados numéricos obtidos para as sensibilidades são discutidos no Capítulo 7. Finalmente, as conclusões deste trabalho são apresentadas no Capítulo 8.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Foi realizado um levantamento bibliográfico envolvendo o escoamento bifásico e outro envolvendo o método perturbativo. Poucas aplicações dos métodos perturbativos são encontradas na literatura envolvendo escoamentos bifásicos. Nos artigos encontrados são realizados estudos de sensibilidade com escoamento bifásico através da construção de superfícies de reposta a partir de resultados de estudos experimentais.

2.1. Escoamento bifásico.

Uma forma de classificar o escoamento bifásico em condições não adiabáticas é segundo a sua estrutura de escoamento [LAHEY, (1992)], isto é:

- Escoamento disperso: quando uma fase é uniformemente distribuída em outra. Um exemplo é a mistura de bolhas de gás dispersas numa fase líquida;
- Escoamento separado: quando as fases do escoamento se apresentam separadas.

Em tubos verticais podem ser encontrados quatro padrões de escoamentos (Figura 1):

- Bolhas: ocorre a baixas velocidades do gás. O gás encontra-se em pequenas bolhas esféricas, de dimensões muito menores que o diâmetro do tubo. As bolhas distribuem-se espacialmente no tubo segundo as condições iniciais do escoamento;
- *Churn*: ocorre quando a velocidade do gás aumenta. Caracteriza-se por ter altas taxas de coalizão e ruptura das bolhas;
- *Slug*: ocorre para velocidades do gás onde predomina a coalizão das bolhas em vez das rupturas, formando-se bolhas de grandes dimensões próximas das do diâmetro do tubo;

- Anular: ocorre quando a velocidade do gás é tal que circula no meio do canal e o líquido é deslocado para os lados do tubo, ficando em contato com as paredes.

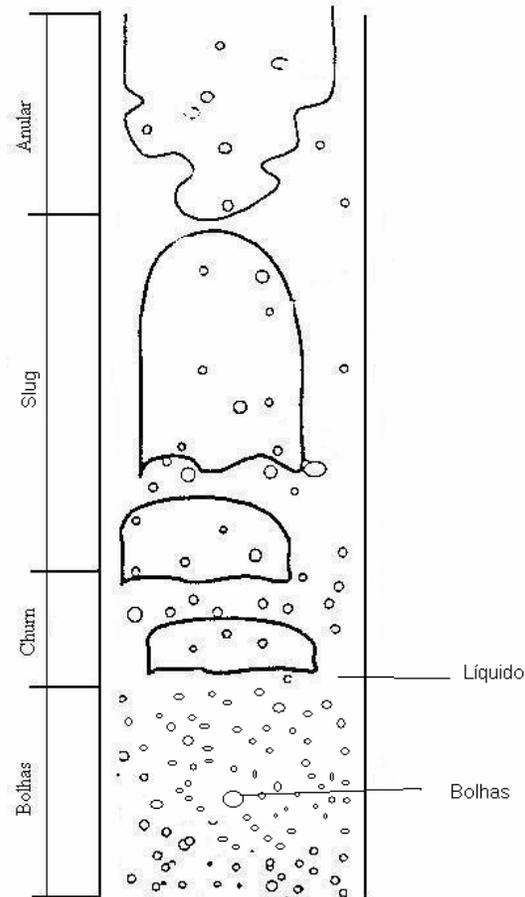


Figura 1. Padrões de escoamento bifásico não adiabático num tubo vertical.

É importante o conhecimento do padrão de escoamento para se conhecer a distribuição das fases e como os termos de transferência interfacial influem no escoamento.

A medição de parâmetros tais como: a fração de vazio da fase gasosa, as velocidades do líquido e do gás, assim como os efeitos da variação de parâmetros geométricos e físicos sobre as grandezas anteriormente mencionadas são o objeto principal do estudo na maioria das pesquisas experimentais. MISHIMA e ISHII (1984) estudaram o escoamento

bifásico formado por água-ar em tubos verticais de pequenos diâmetros. O efeito sobre o tipo de regime de escoamento, a fração de vazio e a queda de pressão foram medidos experimentalmente variando o diâmetro.

IDE et al (1997) publicaram padrões de escoamento em função da queda de pressão numa mistura bifásica gás-líquido em canais verticais com seção transversal retangular. Os comprimentos do lado maior foram considerados iguais a: 1,0 m, 2,0 m e 5,0 m, respectivamente, enquanto que o comprimento do lado menor foi mantido constante e igual a 1,0 m. O efeito das dimensões do canal sobre a velocidade característica, sobre o regime de escoamento, e sobre a queda de pressão foi examinado.

COLEMAN e GARIMELLA (1999) estudaram o efeito do diâmetro do tubo e a forma do regime em tubos de diâmetros pequenos e variáveis para uma mistura de ar-água. As velocidades do gás e do líquido variaram no intervalo de $0,01\text{ m/s}$ a 10 m/s .

O escoamento bifásico é encontrado numa ampla variedade de aplicações. É difícil encontrar um sistema de engenharia ou da natureza onde escoamento bifásico não esteja presente. Alguns exemplos entre uma serie são listados a seguir [ISHII, (1975)].

- Em sistemas de potências: reatores a água leve pressurizada, de ebulição, reatores rápidos, plantas de potência convencionais, plantas de energia geotérmica, propulsores bifásicos;
- Em sistemas de transferência de calor: trocadores de calor, evaporadores, refrigeradores;
- Em sistemas de processos: unidades de destilação e extração, leitos fluidizados, reatores químicos, sistemas de dessalinização, separadores de fases, atomizadores;
- Em sistemas de transportes: ejetores, transporte de gás em tubulações, pulverizadores de partículas sólidas;
- Em sistemas de lubrificação: lubrificação por fluido bifásico;

- Em controle ambiental: ar condicionados, coletores de pó;
- Em sistemas biológicos: corrente sanguínea, leite, transporte capilar.

2.2. Cálculo de sensibilidade

A razão principal do recente número de aplicações dos métodos perturbativos para estudos de sensibilidade reside na possibilidade de realizar uma análise extensiva de vários parâmetros do sistema que se quer estudar, de uma forma simplificada em termos de esforço e de tempo de computação, no cálculo de variações de determinados funcionais ou respostas após uma perturbação introduzida no sistema por algum parâmetro [ANDRADE LIMA, (1990)].

As primeiras aplicações na área de termoidráulica foram limitadas a modelos simplificados de uma barra de combustível associado a um canal de refrigerante. Um dos pioneiros em calcular sensibilidades em problemas termoidráulicos foi OBLOW (1976), que desenvolveu uma teoria dirigida aos cálculos térmicos. OBLOW (1978) aplicou a teoria de perturbação a um transitório simplificado no núcleo de um reator obtendo as expressões para o cálculo do coeficiente de sensibilidade de respostas tais como: a temperatura máxima atingida no centro do combustível e na vareta que o reveste, quando parâmetros tais como: temperatura do refrigerante na entrada e a capacidade calorífica do refrigerante variam. Em seguida, o método adjunto é comparado com a técnica tradicional de sensibilidade através das superfícies de resposta. Este trabalho abriu o caminho para que outros pesquisadores e usuários aplicassem a metodologia da Teoria da Perturbação aos códigos termoidráulicos ou a simplificações destes, reduzindo desta forma o custo computacional.

Outras aplicações de análises de sensibilidade através do uso de métodos perturbativos envolvendo problemas de transferência de calor num canal refrigerante de um núcleo de reator são encontradas em WEBER e OBLOW (1979), OBLOW e CACUCI (1979).

A primeira aplicação do formalismo diferencial aplicada a um código de termoidráulica foi realizada por MAUDLIN et al (1981). O código termoidráulico MELT IIIB resolve as equações de conservação acopladas às equações da neutrônica para um escoamento

monofásico. Análises de sensibilidade aplicadas a sistemas não-lineares com respostas definidas em pontos críticos como: pontos máximos e mínimos do escoamento de calor e da temperatura são discutidos.

Publicações com aplicações do formalismo diferencial podem ser encontradas em SANDER et al (1987) que aplicaram métodos perturbativos a um gerador de vapor com tubos em U de uma central nuclear PWR. Os autores desenvolveram um programa que simula a distribuição da temperatura dentro do gerador, assim como sua função importância associada, utilizando um modelo com escoamento homogêneo e estacionário.

O formalismo GPT aplicado no campo da termoidráulica só foi usado pela primeira vez por ANDRADE LIMA (1986, 1990). Neste último trabalho o autor aplicou o formalismo diferencial e a teoria de perturbação generalizada a um problema termoidráulico relacionado com núcleo de reatores refrigerados à água leve, baseado no modelo matemático do COBRA-IV-I. Foi desenvolvido um programa chamado CSTPG que, acoplado ao COBRA-IV-I, fornece os valores da função importância e do coeficiente de sensibilidade para dois problemas típicos: um primeiro consistindo de um canal refrigerante com uma vareta combustível e um segundo consistindo de dois canais refrigerantes com duas varetas combustíveis. Os resultados obtidos usando métodos perturbativos comparados com aqueles obtidos diretamente com o COBRA-IV-I mostraram excelentes concordâncias.

MACIEL (1995) aplicou o formalismo matricial a um modelo simplificado de um canal quente de um reator PWR. O autor desenvolveu o programa computacional TERMHIDR que calcula coeficientes de sensibilidade para funcionais tais como: a pressão média e a entalpia média do canal, quando são perturbados o diâmetro hidráulico, a velocidade do fluido e a densidade na entrada do canal. Neste trabalho realiza-se uma comparação com as variações calculadas diretamente pelo programa sem aplicar o formalismo. Os resultados evidenciaram que o formalismo matricial é uma ótima ferramenta para análises de sensibilidade em sistemas já discretizados.

A mais complexa aplicação do formalismo diferencial foi aplicada por CACUCI (2000) ao código RELAP5/MOD3.2. O RELAP5/MOD3.2 é um dos mais avançados códigos que simula características termoidráulicas para reatores de água leve (LWR) usando um modelo de escoamento bifásico não-homogêneo e de não equilíbrio entre as fases e inclui a

simulação de gases não condensáveis e a injeção de boro. Neste trabalho, CACUCI apresenta os principais aspectos da implementação do formalismo, a validação e os resultados para escoamentos monofásico e bifásico. O caso – problema que foi usado para a aplicação é o conhecido problema “Eduard Pipe”. Os resultados obtidos para todos os casos apresentam uma boa concordância quando comparados aos cálculos realizados diretamente com o código RELAP5/MOD3.2. Este trabalho representa a generalização de uma outra aplicação simplificada apresentada por CACUCI (1982) de um modelo de escoamento bifásico unidimensional e homogêneo.

BALIÑO et. al. (2001), com o intuito de agilizar a obtenção dos coeficientes de sensibilidade que dependem de vários parâmetros, usaram o formalismo perturbativo diferencial no estudo de problemas de propagação de pressão em redes hidráulicas (golpe de aríete). Os transitórios de ondas de pressão podem ocasionar tensões nos tubos acima dos limites permissíveis podendo ocasionar a destruição de componentes do sistema. Os autores compararam as soluções direta e adjunta, obtendo uma boa concordância entre os resultados.

Dentre os exemplos atuais que mostram a tendência de aplicação do formalismo de perturbação [MARCHUK et al., (1996)] destacam-se:

- Problemas de propagação de ondas como o estudo do tráfego no trânsito;
- Problemas de transporte de produtos químicos no solo, como o estudo da influência do comportamento de herbicidas sobre a ecologia e na migração pelo solo;
- Problemas de difusão como o transporte de poluentes na atmosfera;
- Problemas de variação do clima em várias regiões do mundo; processamento da informação, imunologia, entre outros.

3. FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PERTURBAÇÃO

Neste capítulo são discutidos, brevemente, os fundamentos da teoria da perturbação que, posteriormente, serão aplicados ao modelo matemático de escoamentos bifásicos.

Considere um sistema físico definido por K equações não-lineares acopladas [ANDRADE LIMA, (1986)]:

$$m[f(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \mathbf{p}] = \begin{bmatrix} m_1[f(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \mathbf{p}] \\ m_2[f(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \mathbf{p}] \\ \cdot \\ \cdot \\ m_K[f(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \mathbf{p}] \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

onde m inclui, em geral, operações com relação às variáveis do espaço de fase. O vetor de estado, que descreve o comportamento das variáveis de estado do sistema é função do vetor do espaço de fase e pode ser escrito como:

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \begin{Bmatrix} f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \\ f_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \\ \dots \\ f_K(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

O vetor de espaço de fase pode ser escrito como:

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_R \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

O vetor \mathbf{r} define as variáveis independentes, geralmente representadas pela posição e o tempo.

As componentes m_k , $k = 1, 2, \dots, K$ são funções não lineares de f e do vetor dos parâmetros de entrada, representados pelo vetor:

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_p \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

O vetor \mathbf{p} geralmente é função da posição x e do tempo t .

As condições de contorno da Eq. (3.1) são escritas formalmente como:

$$C(f(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \mathbf{p}) = 0 \quad (3.5)$$

em que \mathbf{r} define um ponto na superfície de contorno do espaço de fase.

Um funcional - resposta $R[f(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \mathbf{p}]$ pode ser definido da seguinte forma:

$$R[f(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \mathbf{p}] = \langle S^+(\mathbf{r}) \cdot f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle \quad (3.6)$$

em que S^+ é uma função conhecida dada por:

$$\mathbf{S}^+(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} S_1^+(\mathbf{r}) \\ S_2^+(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ S_K^+(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

e o símbolo $\langle \rangle$ da Eq. (3.6) representa a integração em todo o espaço de fase.

O principal objetivo da análise de sensibilidade é avaliar a variação do funcional - resposta δR resultante de uma perturbação δp_i num parâmetro p_i sistema. A variação de R na Eq. (3.6), para pequenas perturbações no sistema, é representada pela seguinte equação:

$$\frac{\delta R}{\delta p} = \sum_{i=1}^l [\langle S_{/pi}^+ f \rangle + \langle S^+ f_{/pi} \rangle], \quad (3.8)$$

onde

$$S_{/pi}^+ \equiv \frac{\partial S^+}{\partial p_i} \quad (3.9)$$

$$f_{/pi} \equiv \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad (3.10)$$

O termo $\frac{\delta R}{\delta p}$ da Eq. (3.8) representa a expressão do coeficiente de sensibilidade para uma perturbação de primeira ordem e o termo $S_{/pi}^+$ é facilmente calculável visto que, como foi dito anteriormente, S^+ é uma função conhecida. O termo $f_{/pi}$ é obtido a partir da expansão da equação perturbada $m'(f, p) = 0$ em torno de uma solução de referência f até a primeira ordem. Do exposto temos:

$$\delta m = m'(f, p) - m(f, p) = \sum_{i=1}^l \delta p_i \left\{ \frac{\partial m}{\partial p_i} + H \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\} = 0 \quad (3.11)$$

onde H é um operador matricial definido pela derivada de “Frèchet” como:

$$H \equiv \frac{\bar{\partial} m}{\bar{\partial} f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial f_1} & \frac{\partial m_1}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial m_1}{\partial f_K} \\ \frac{\partial m_2}{\partial f_1} & \frac{\partial m_2}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial m_2}{\partial f_K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial m_k}{\partial f_1} & \frac{\partial m_k}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial m_k}{\partial f_K} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Como os parâmetros p_i são independentes, da Eq. (3.11) resulta:

$$\mathbf{H} f_{/ p_i} = \mathbf{S}(p_i) \quad (3.13)$$

em que:

$$\mathbf{S}(p_i) \equiv -\frac{\partial m}{\partial p_i} \quad (3.14)$$

O sistema formado pela Eq. (3.13) é chamado de sistema de equações derivadas e a sua condição de contorno é obtida a partir da derivação das condições de contorno do problema direto. Em particular, para cada parâmetro do sistema, é definido um coeficiente de sensibilidade que assume a forma:

$$\frac{\partial R}{\partial p_i} = \langle \mathbf{S}_{/ p_i}^+, \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{S}^+, \mathbf{f}_{/ p_i} \rangle \quad (3.15)$$

A Eq. (3.13) é uma equação linear, visto que a matriz dos coeficientes e o vetor dos termos independentes não são funções do vetor de estado derivado. Entretanto, teremos de resolver uma nova equação derivada para cada parâmetro p_i . Em outras palavras, para um dado funcional, será necessário resolver tantas equações derivadas quanto são os parâmetros de interesse. Isto não apresentaria grandes problemas para um número de parâmetros pequeno. Quando o número de parâmetros cresce, este procedimento é oneroso do ponto de vista computacional. Recorre-se então ao formalismo de perturbação.

3.1. Formalismo diferencial

O operador adjunto H^* de H pode ser obtido através da expressão:

$$\langle \mathbf{f}_{/ p_i} \mathbf{H}^* \mathbf{f}^* \rangle = \langle \mathbf{f}^* \mathbf{H} \mathbf{f}_{/ p_i} \rangle + CB(\mathbf{f}^*, \mathbf{f}_{/ p_i}) \quad (3.16)$$

sendo f^* o vetor adjunto de $f_{/pi}$ e $CB(f^*, f_{/pi})$ o concomitante bilinear avaliado no contorno do sistema.

O sistema adjunto é escrito como:

$$H^* f^* = S^+, \quad (3.17)$$

com condições de contorno representadas por:

$$C^*(f^*) = 0 \quad (3.18)$$

Uma escolha adequada das condições no contorno permitirá calcular o concomitante bilinear a partir de termos conhecidos de $f_{/pi}$ avaliados no limite do sistema.

O termo $\langle S^+ \cdot f_{/pi} \rangle$ da Eq. (3.8) é evitado fazendo o vetor de termos independentes do sistema adjunto, o qual é inicialmente arbitrário, ser igual ao vetor de fonte da definição do funcional - resposta. A Eq. (3.17) pode ser reescrita como:

$$\langle S^+ \cdot f_{/pi} \rangle = \langle f^* S(pi) \rangle + CB(f^*, f_{/pi}) \quad (3.19)$$

Substituindo a Eq. (3.19) na Eq. (3.17) obtém-se uma nova expressão para o coeficiente de sensibilidade, desta vez sem o termo que contém a derivada do vetor de estado em relação ao parâmetro, isto é:

$$\frac{\partial R}{\partial pi} = \langle S_{/pi}^+ \cdot f \rangle + \langle f^* S(pi) \rangle + CB(f^*, f_{/pi}) \quad (3.20)$$

4. MODELO MATEMÁTICO

4.1. Equações de conservação

Foi utilizado um modelo unidimensional para um escoamento bifásico e adiabático em um sistema formado por água e ar, considerado incompressível. O conjunto de equações diretas é representado pelos balanços de massa e de momento para cada fase [DREW e PASSMAN, (1999)].

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_k v_k) = 0 \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \rho_k \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k v_k) + \rho_k \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_k v_k^2) + \alpha_k \frac{\partial P_k}{\partial x} - \Delta P_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{ki}^{Re} \alpha_k) + \\ + \alpha_k \rho_k g \cos \theta - M_{ki} + 4 \frac{\tau_{gk}}{D_h} \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde t ($0 \leq t \leq T$) é o tempo e x ($0 \leq x \leq L$) a posição axial; ρ_k , P_k , ΔP_{ki} e τ_{ki}^{Re} são, respectivamente, a massa específica, a pressão, a diferença de pressão com a interface e o tensor de tensões turbulentas de Reynolds para a fase k ($k = l, g$ para as fases líquida e gasosa, respectivamente). O termo M_{ki} representa as forças interfaciais por unidade de volume devido ao contato entre as fases gasosa e líquida. As principais forças interfaciais são as forças de massa virtual e as forças de arraste. A aceleração da gravidade e o ângulo de inclinação com a vertical são g e θ , respectivamente.

4.2. Equações constitutivas

Esta seção é dedicada à descrição dos termos interfaciais usados no modelo matemático. Estes termos representam as forças devido ao contato entre as fases [DREW e PASSMAN, (1999)]. Todas as formulações apresentadas são realizadas considerando as bolhas com uma geometria esférica.

A diferença de pressão da fase líquida com a interface é representada pelo termo:

$$\Delta P_{li} = -C_p \rho_l v_r^2 \quad (4.3)$$

onde $v_r = v_g - v_l$ é a velocidade relativa das fases e C_p é um coeficiente semi-empírico de pressão que varia na faixa [0,25; 1,0]. A diferença de pressão da fase gasosa com a interface, no escoamento em bolhas, é considerada nula. Portanto:

$$\Delta P_{gi} = 0 \quad (4.4)$$

As bolhas de gás induzem na fase líquida uma turbulência representada pelas tensões de Reynolds e é dada por:

$$\tau_l^{\text{Re}} = -C_r \rho_l \alpha v_r^2 \quad (4.5)$$

onde $C_r = 0,2$ é um coeficiente semi-empírico de tensão de Reynolds. As tensões turbulentas de Reynolds na fase gasosa são consideradas desprezíveis, isto é:

$$\tau_g^{\text{Re}} = 0 \quad (4.6)$$

Por último, a força interfacial M_{ki} é representada pela soma das forças associadas com a massa virtual e o arraste.

O termo de massa virtual representa a força exercida pelo fluido circundante sobre uma bolha acelerada imersa nele. Na passagem da bolha parte do fluido que se encontra ao redor é acelerado, resultando na seguinte força de interação entre ambas fases:

$$F_{vm} = \rho_l C_{vm} a_{vm} \quad (4.7)$$

onde o parâmetro semi-empírico $C_{vm} = 0,5$ é o coeficiente de massa virtual. Para um escoamento unidimensional, a aceleração da massa virtual a_{vm} é dada por:

$$a_{vm} = \left(\frac{\partial v_g}{\partial t} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_l \frac{\partial v_l}{\partial x} \right) \quad (4.8)$$

O termo de arraste representa a força que experimenta um objeto movendo-se num fluido com velocidade relativa constante e é dada por:

$$F_d = \frac{3}{8} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha v_r |v_r| \quad (4.9)$$

onde R_b é o raio da bolha e C_d é o coeficiente de arraste. Para escoamentos em bolhas o coeficiente C_d é dado por:

$$C_d = \frac{24}{R_e} (1 + 0,1 R_e^{0,75}) \quad (4.10)$$

sendo,

$$R_e = \frac{2R_b \rho_l |v_r|}{\mu_m} \quad (4.11)$$

e

$$\mu_m = \mu_l (1 - \alpha)^{-2,5} \frac{\mu_g + 0,4\mu_l}{\mu_g + \mu_l} \quad (4.12)$$

Por simplicidade, neste trabalho o coeficiente de arraste é considerado constante. O atrito entre a parede e cada fase foi considerado desprezível.

4.3. Solução numérica do sistema direto

O sistema de equações diferenciais foi discretizado através do seguinte esquema de diferenças finitas:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} [\psi_j^{k+1} - \psi_j^k] \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} [\psi_j^{k+1} - \psi_{j-1}^{k+1}] \quad (4.14)$$

sendo $(j-1)\Delta x < x < j\Delta x$ e $k\Delta t < t < (k+1)\Delta t$. A variável ψ é a representação genérica da variável dependente, os subscritos indicam os passos espaciais e os superescritos o passo temporal. A malha espacial e temporal é constante e possui dimensões: $\Delta x = \frac{L}{NZETA - 1}$ e $\Delta t = \frac{T}{NTEMPO - 1}$, respectivamente. $NZETA$ representa o número de passos espaciais e $NTEMPO$ representa o número de passos temporais. O limite de Courant $\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq a$ é respeitado, onde a é velocidade característica. A representação gráfica deste esquema é mostrada na Figura 2.

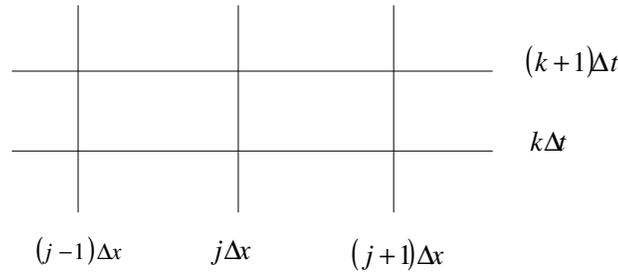


Figura 2. Malha nodal do sistema direto.

O sistema direto quando discretizado possui a seguinte forma:

$$\mathbf{A}\psi_j^{k+1} = \mathbf{B}(\psi_j^k, \psi_{j-1}^{k+1}) \quad (4.15)$$

Na solução do mesmo foram obtidas as distribuições discretas no espaço e no tempo da fração de vazio para a fase gasosa, das velocidades para cada fase e da pressão do sistema. As matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} do sistema de equações direto são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} + v_1 & 0 & -(1-\alpha) & 0 \\ \frac{\Delta x}{\Delta t} + v_g & \alpha & 0 & 0 \\ -\rho_l v_l \frac{\Delta x}{\Delta t} + b_2 & a_5 \frac{\Delta x}{\Delta t} + b_3 & b_4 \frac{\Delta x}{\Delta t} + b_{51} & (1-\alpha) \\ \rho_g v_g \frac{\Delta x}{\Delta t} + \rho_g v_g^2 & a_3 \frac{\Delta x}{\Delta t} + a_{41} & a_5 \frac{\Delta x}{\Delta t} + a_{51} & \alpha \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \alpha_j^k + v_1 \alpha_{j-1}^{k+1} - (1-\alpha) v_{l,j-1}^{k+1} \\ \frac{\Delta x}{\Delta t} \alpha_j^k + v_g \alpha_{j-1}^{k+1} + \alpha v_{g,j-1}^{k+1} \\ -\Delta x [(1-\alpha) \rho_l g - \Delta x F_D] - \rho_l v_l \frac{\Delta x}{\Delta t} \alpha_j^k + b_2 \alpha_{j-1}^{k+1} + a_5 \frac{\Delta x}{\Delta t} v_{g,j}^k + b_3 v_{g,j-1}^{k+1} + b_4 \frac{\Delta x}{\Delta t} v_{l,j}^k + b_{51} v_{l,j-1}^{k+1} + (1-\alpha) P_{j-1}^{k+1} \\ -[\Delta x \alpha \rho_g g + \Delta x F_D] + \rho_g v_g \frac{\Delta x}{\Delta t} \alpha_j^k + \rho_g v_g^2 \alpha_{j-1}^{k+1} + a_3 \frac{\Delta x}{\Delta t} v_{g,j}^k + a_{41} v_{g,j-1}^{k+1} + a_5 \frac{\Delta x}{\Delta t} v_{l,j}^k + a_{51} v_{l,j-1}^{k+1} + \alpha P_{j-1}^{k+1} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

onde,

$$\begin{aligned} a_3 &= \rho_g \alpha + C_{vm} \alpha \rho_l \\ a_5 &= -C_{vm} \alpha \rho_l \\ a_{51} &= 2\alpha C_p \rho_l v_r - C_{vm} \alpha \rho_l v_l \\ a_{41} &= 2\rho_g v_g \alpha + C_{vm} \alpha \rho_l v_g - 2\alpha C_p \rho_l v_r \\ b_2 &= -[\rho_l v_l^2 + C_p \rho_l v_r^2 + C_r \rho_l v_r^2 \alpha - C_r \rho_l v_r^2 \alpha_l] \\ b_3 &= 2C_r \rho_l v_r \alpha \alpha_l - C_{vm} \alpha \rho_l v_g \\ b_4 &= \rho_l \alpha_l + C_{vm} \alpha \rho_l \\ b_{51} &= -2C_r \rho_l v_r \alpha \alpha_l + 2\rho_l v_l \alpha_l + C_{vm} \alpha \rho_l v_l \\ F_D &= \frac{3}{8} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| v_r \end{aligned} \quad (4.18)$$

As distribuições dos vetores de estado e adjunto foram obtidas usando um esquema implícito de diferenças finitas. O método LU [PRESS et al, (2001)] foi usado para a inversão das matrizes resultantes. Os termos não lineares do sistema direto foram tratados usando um método preditor-corretor, até que a convergência fosse atingida para um número finito de iterações.

A Figura 3 mostra o diagrama de blocos usado no programa, chamado DIRETO, desenvolvido em linguagem FORTRAN, o qual simula os estados estacionário e transitório de escoamentos bifásicos e adiabáticos. O programa fornece um arquivo de saída com os valores das variáveis diretas. As condições iniciais e de contorno, assim como os parâmetros geométricos e as constantes das relações constitutivas são fornecidos pelo usuário através de um arquivo de entrada de dados.

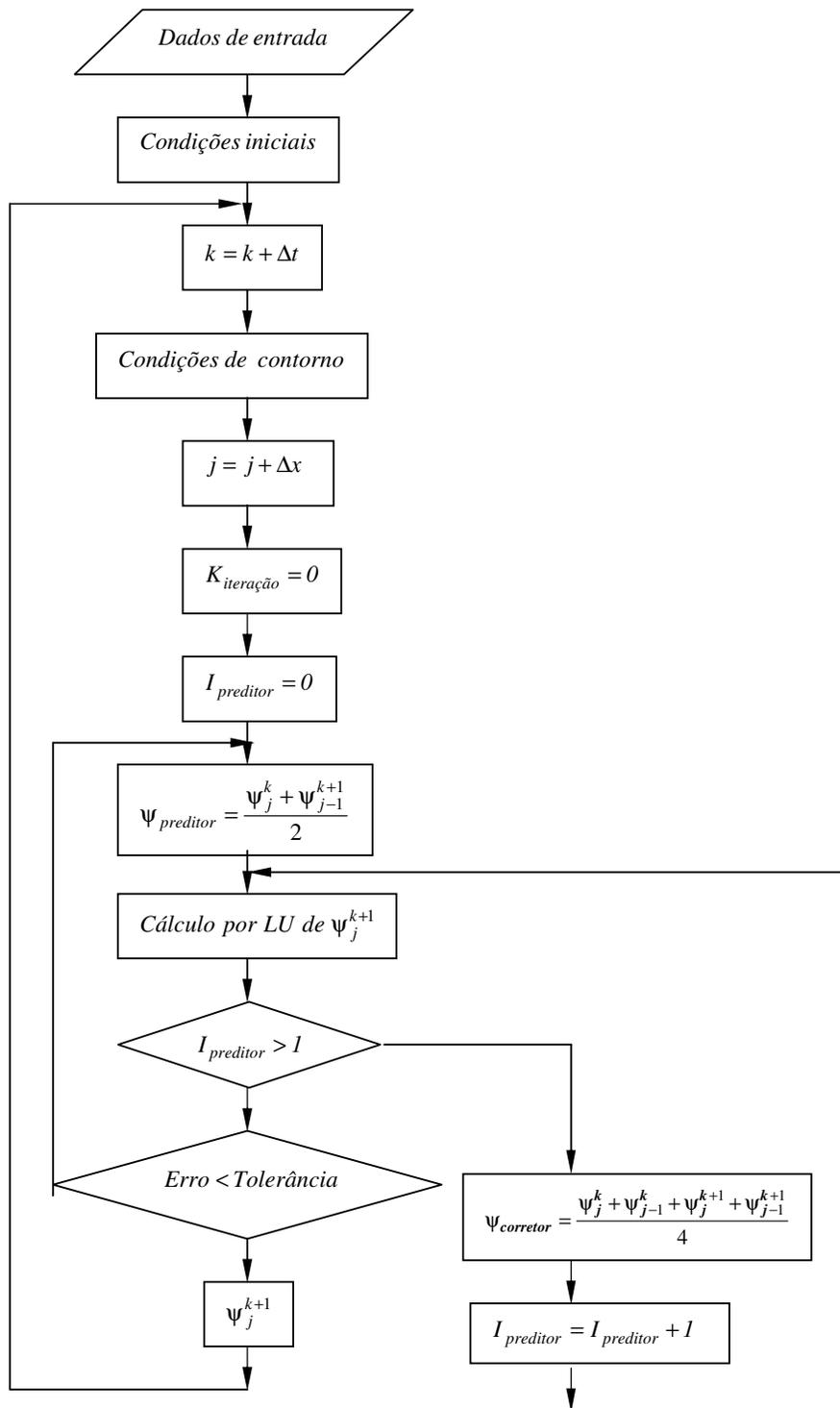


Figura 3. Diagrama de blocos do programa DIRETO.

5. CASOS - PROBLEMA ANALISADOS.

Este capítulo mostra os dois casos-problemas que envolvem escoamentos bifásicos adiabáticos, usados para a validação da solução numérica.

5.1. Caso-problema 1

Este problema, proposto em RANSOM (1991), consiste em um escoamento anular num tubo vertical de comprimento $L = 12\text{ m}$, como é mostrado na Figura 4.

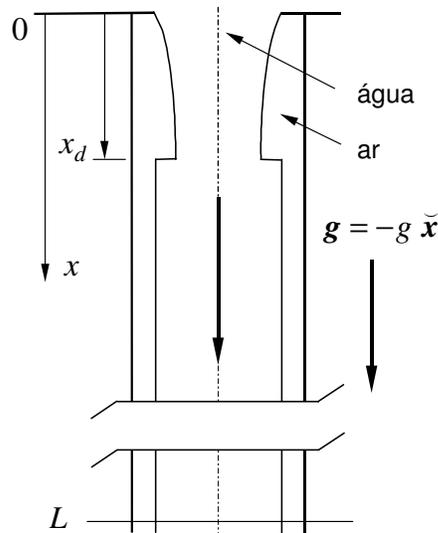


Figura 4. Escoamento anular.

O gás, acumulado próximo das paredes, inicialmente está imóvel, isto é, $v_g(x, 0) = v_{gin} = 0$, com uma fração de vazão $\alpha(x, 0) = \alpha_{in} = 0,2$, enquanto o líquido, que ocupa a parte central, entra pelo topo com uma velocidade uniforme e condição inicial $v_l(x, 0) = v_{lin} = 10\text{ m s}^{-1}$. As condições de contorno são: $\alpha(0, t) = \alpha_0 = 0,2$, $v_l(0, t) = v_{l0} = 10\text{ m s}^{-1}$ e $v_g(0, t) = 0$. A pressão no topo é $P(0, t) = P_0 = 1,013 \cdot 10^5\text{ Pa}$ (pressão atmosférica).

Para se obter a solução analítica e comparar com a solução numérica alguns termos, não muito importantes, são desprezados para a representação deste problema. São

eles: os termos de massa virtual, de pressão interfacial, as turbulências de Reynolds e o termo de arraste. Com estas simplificações, a solução analítica é dada por:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1 - \alpha_0}{\sqrt{1 - \frac{2 g x}{v_{l0}^2} \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_l}\right)}} & \text{se } x < x_d \\ \alpha_{in} & \text{se } x > x_d \end{cases} \quad (5.1)$$

$$v_g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_d \\ \left[1 - \frac{\alpha(x_d^-)}{\alpha_0}\right] v_l(x_d) & \text{se } x > x_d \end{cases} \quad (5.2)$$

$$v_l(x) = \begin{cases} \sqrt{v_{l0}^2 - 2 \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_l}\right) g x} & \text{se } x < x_d \\ \sqrt{v_{l0}^2 - 2 \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_l}\right) g x_d} & \text{se } x > x_d \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta P(x) &= P(x) - P_0 \\ &= -\rho_g \left[\frac{1}{2} v_g^2 - \frac{\partial v_g}{\partial t} x_d + \left(g + \frac{\partial v_g}{\partial t} \right) x \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

A posição da descontinuidade é dada por:

$$x_d(t) = v_{l0} t - \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_l}\right) \frac{g t^2}{2} \quad (5.4)$$

e x_d^- é o valor de x_d calculado num ponto anterior e muito próximo à posição de descontinuidade.

O líquido vai se acelerando em queda livre ao longo do tubo; atrás da descontinuidade, a velocidade do líquido aumenta com a posição, enquanto na frente é constante na posição e aumenta uniformemente com o tempo.

A fração de vazio atrás da descontinuidade aumenta, enquanto na frente permanece constante com o valor original α_{in} . A velocidade do gás é nula atrás da descontinuidade, enquanto na frente é constante na posição e aumenta uniformemente seu módulo com o tempo, de maneira de ocupar o volume que se cria à medida que a descontinuidade se desloca.

A pressão atrás da descontinuidade aumenta levemente devido à coluna de ar, enquanto na frente aumenta com uma inclinação diferente, função do tempo, devido aos efeitos transitórios. O estado estacionário é atingido quando a descontinuidade alcança o comprimento do tubo.

5.2. Caso-problema 2.

O experimento típico para simular este tipo de escoamento consiste de coluna cilíndrica cheia de água onde o gás é injetado através de placas distribuidoras. O problema estudado consiste de um escoamento em bolhas num tubo vertical de comprimento $L = 1\text{ m}$. Numa fase líquida contínua, encontra-se gás discretamente distribuído em pequenas bolhas (Figura 5).

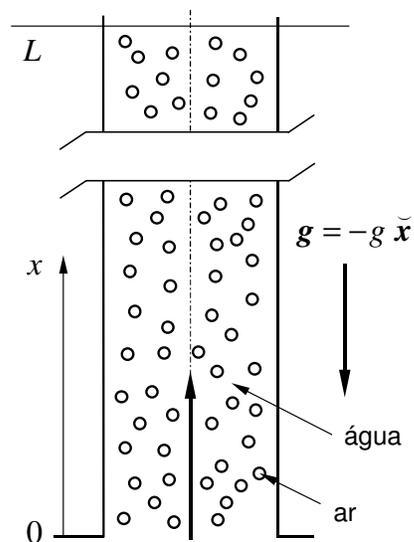


Figura 5. Escoamento em bolhas.

O estado estacionário foi simulado com as condições de contorno: $\alpha(0,t) = \alpha_0 = 0,25$, $v_l(0,t) = v_{l0} = 0,5 m s^{-1}$ e $v_g(0,t) = 0,2 m s^{-1}$. A simulação do estado transitório foi obtida com as seguintes condições iniciais: $\alpha_{in} = 0,25$, $v_{gin} = 0,6806 m s^{-1}$, $v_{lin} = 0,5 m s^{-1}$. Para $(x=0, t>0)$ a velocidade do gás foi perturbada para o valor $v_{g0} = 0,8 m s^{-1}$, enquanto as demais variáveis permaneceram com os valores da condição de contorno no estado estacionário. A pressão na entrada é $P(0,t) = P_0 = 1,013 \cdot 10^5 Pa$ (pressão atmosférica).

O problema estacionário admite (para $C_D \neq 0$) uma solução onde todas as variáveis atingem valores constantes dados por:

$$\alpha_{\infty} v_{g\infty} = \alpha_0 v_{g0} \quad (5.5)$$

$$(1 - \alpha_{\infty}) v_{l\infty} = (1 - \alpha_0) v_{l0} \quad (5.6)$$

$$\frac{3 C_d}{8 R_b} \rho_l v_{r\infty} |v_{r\infty}| = (1 - \alpha_{\infty}) (\rho_l - \rho_g) g \quad (5.7)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{\infty} = -[\alpha \rho_g + (1 - \alpha) \rho_l] g \quad (5.8)$$

6. APLICAÇÃO DO FORMALISMO DIFERENCIAL DE PERTURBAÇÃO AO MODELO DE ESCOAMENTO BIFÁSICO

Este capítulo descreve a aplicação do formalismo diferencial de perturbação ao modelo matemático proposto para descrever o comportamento físico do escoamento bifásico.

6.1. Sistema de equações direto.

Usando os conceitos vistos na Seção 4.1 tem-se:

$$\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3, m_4]^T \quad (6.1)$$

onde:

$$m_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial t} - (1 - \alpha) \frac{\partial v_l}{\partial x} + v_l \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \quad (6.2)$$

$$m_2 = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + v_g \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v_g}{\partial x} = 0 \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} m_3 = & -\rho_l v_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} + [\rho_l (1 - \alpha) + C_{vm} \alpha \rho_l] \frac{\partial v_l}{\partial t} - C_{vm} \alpha \rho_l \frac{\partial v_g}{\partial t} - \\ & - [\rho_l v_l^2 + C_p \rho_l v_r^2 + C_r \rho_l v_r^2 \alpha - C_r \rho_l v_r^2 (1 - \alpha)] \frac{\partial \alpha}{\partial x} + [2C_r \rho_l v_r \alpha (1 - \alpha) - C_{vm} \alpha \rho_l v_g] \frac{\partial v_g}{\partial x} + \\ & + [-2C_r \rho_l v_r \alpha (1 - \alpha) + 2\rho_l v_l (1 - \alpha) + C_{vm} \alpha \rho_l v_l] \frac{\partial v_l}{\partial x} + (1 - \alpha) \frac{\partial P}{\partial x} + \\ & + (1 - \alpha) \rho_l g \cos \theta - \frac{3}{8} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| v_r = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned}
m_4 = & \rho_g v_g \frac{\partial \alpha}{\partial t} + [\rho_g \alpha + C_{vm} \alpha \rho_l] \frac{\partial v_g}{\partial t} - C_{vm} \alpha \rho_l \frac{\partial v_l}{\partial t} + \\
& + \rho_g v_g^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + [2\rho_g v_g \alpha + C_{vm} \alpha \rho_l v_g - 2\alpha C_P \rho_l v_r] \frac{\partial v_g}{\partial x} + \\
& + [2\alpha C_P \rho_l v_r - C_{vm} \alpha \rho_l v_l] \frac{\partial v_l}{\partial x} + \alpha \frac{\partial P}{\partial x} - \alpha \rho_g g \cos \theta + \frac{3}{8} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| v_r = 0
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Neste caso, o vetor de estado é dado por:

$$f = [\alpha, v_g, v_l, P]^T \tag{6.6}$$

enquanto o vetor adjunto é dado por:

$$f^* = [\alpha^*, v_g^*, v_l^*, P^*]^T \tag{6.7}$$

As condições de contorno do sistema direto resultam do caso-problema a analisar envolvendo os escoamentos bifásicos.

6.2. Sistema de equações derivadas

No Apêndice 1 é apresentado o desenvolvimento do sistema de equações derivadas, o qual resulta nas seguintes equações:

$$\frac{\partial \alpha_{/pi}}{\partial t} + v_l \frac{\partial \alpha_{/pi}}{\partial x} - (1 - \alpha) \frac{\partial v_{l/pi}}{\partial x} + \alpha_{/pi} \frac{\partial v_l}{\partial x} + v_{l/pi} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = S_\alpha(pi) \tag{6.8}$$

$$\frac{\partial \alpha_{/pi}}{\partial t} + v_g \frac{\partial \alpha_{/pi}}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v_{g/pi}}{\partial x} + \alpha_{/pi} \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_{g/pi} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = S_{v_g}(pi) \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho_l v_l \frac{\partial \alpha_{/pi}}{\partial t} - [\rho_l v_l^2 + (C_p \rho_l + C_r \rho_l \alpha - C_r \rho_l (1 - \alpha)) v_r^2] \frac{\partial \alpha_{/pi}}{\partial x} + \\
& + \alpha_{/pi} \left\{ (-\rho_l + C_{vm} \rho_l) \frac{\partial v_l}{\partial t} - C_{vm} \rho_l \frac{\partial v_g}{\partial t} - (C_r + C_r) \rho_l v_r^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \right. \\
& + [2C_r \rho_l v_r (1 - 2\alpha) - C_{vm} \rho_l v_g] \frac{\partial v_g}{\partial x} + [-2C_r \rho_l v_r (1 - 2\alpha) - 2\rho_l v_l + C_{vm} \rho_l v_l] \frac{\partial v_l}{\partial x} - \\
& - \frac{\partial P}{\partial x} - \rho_l g - \frac{3 C_d}{8 R_b} \rho_l |v_r| v_r \left. \right\} - C_{vm} \alpha \rho_l \frac{\partial v_{g/pi}}{\partial t} + \\
& + [2C_r \rho_l v_r \alpha (1 - \alpha) - C_{vm} \alpha \rho_l v_g] \frac{\partial v_{g/pi}}{\partial x} + \\
& + v_{g/pi} \left\{ -[C_p \rho_l + C_r \rho_l \alpha - C_r \rho_l (1 - \alpha)] 2(v_g - v_l) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \right. \\
& + [2C_r \rho_l \alpha_g (1 - \alpha) - C_{vm} \alpha \rho_l] \frac{\partial v_g}{\partial x} + \\
& + [-2C_r \rho_l \alpha (1 - \alpha)] \frac{\partial v_l}{\partial x} - \frac{3 C_d}{4 R_b} \rho_l \alpha |v_r| - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} \left. \right\} + [\rho_l (1 - \alpha) + C_{vm} \alpha \rho_l] \frac{\partial v_{l/pi}}{\partial t} + \\
& + [-2C_r \rho_l v_r \alpha (1 - \alpha) + 2\rho_l v_l (1 - \alpha) + C_{vm} \alpha \rho_l v_l] \frac{\partial v_{l/pi}}{\partial x} - \\
& - v_{l/pi} \left\{ -[2\rho_l v_l + (C_p \rho_l + C_r \rho_l \alpha - C_r \rho_l (1 - \alpha))] 2(v_l - v_g) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \right. \\
& + [-2C_r \rho_l \alpha (1 - \alpha)] \frac{\partial v_g}{\partial x} + [2C_r \rho_l \alpha (1 - \alpha) + 2\rho_l (1 - \alpha) + C_{vm} \alpha \rho_l] \frac{\partial v_l}{\partial x} + \\
& + \frac{3 C_d}{4 R_b} \rho_l \alpha |v_r| + (1 - \alpha) \frac{\partial P_{/pi}}{\partial x} = S_{v_l}(pi)
\end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_g v_g \frac{\partial \alpha_{/pi}}{\partial t} + \rho_g v_g^2 \frac{\partial \alpha_{/pi}}{\partial x} + \alpha_{/pi} \left[(\rho_g + C_{vm} \rho_l) \frac{\partial v_g}{\partial t} - C_{vm} \rho_l \frac{\partial v_l}{\partial t} + \right. \\
& + (2\rho_g v_g + C_{vm} \rho_l v_g - 2C_p \rho_l v_r) \frac{\partial v_g}{\partial x} + (2C_p \rho_l v_r - C_{vm} \rho_l v_l) \frac{\partial v_l}{\partial x} + \\
& + \frac{\partial P}{\partial x} + \rho_g g + \frac{3 C_d}{8 R_b} \rho_l |v_r| |v_r| \left. \right] + (\rho_g \alpha + C_{vm} \alpha \rho_l) \frac{\partial v_{g/pi}}{\partial t} + \\
& + (2\rho_g v_g \alpha + C_{vm} \alpha \rho_l v_g - 2\alpha C_p \rho_l v_r) \frac{\partial v_{g/pi}}{\partial x} + v_{g/pi} \left[\rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \right. \\
& + 2\rho_g v_g \frac{\partial \alpha}{\partial x} + (2\rho_g \alpha + C_{vm} \alpha \rho_l - 2\alpha C_p \rho_l) \frac{\partial v_g}{\partial x} + 2\alpha C_p \rho_l \frac{\partial v_l}{\partial x} + \\
& + \frac{3 C_d}{4 R_b} \rho_l \alpha |v_r| \left. \right] - C_{vm} \alpha \rho_l \frac{\partial v_{l/pi}}{\partial t} + (2\alpha C_p \rho_l v_r - C_{vm} \alpha \rho_l v_l) \frac{\partial v_{l/pi}}{\partial x} + \\
& + v_{l/pi} \left[2\alpha C_p \rho_l \frac{\partial v_g}{\partial x} + (-2\alpha C_p \rho_l - C_{vm} \alpha \rho_l) \frac{\partial v_l}{\partial x} - \frac{3 C_d}{4 R_b} \rho_l \alpha |v_r| \right] + \\
& + \alpha \frac{\partial P_{/pi}}{\partial x} = S_p(pi)
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Em que;

$$S_\alpha(pi) = -\frac{\partial m_1}{\partial pi} \tag{6.12}$$

$$S_{v_g}(pi) = -\frac{\partial m_2}{\partial pi} \tag{6.13}$$

$$S_{v_l}(pi) = -\frac{\partial m_3}{\partial pi} \tag{6.14}$$

$$S_P(pi) = -\frac{\partial m_4}{\partial pi} \tag{6.15}$$

O vetor derivado é:

$$f_{/pi} = \left[\alpha_{pi}, v_{g/pi}, v_{l/pi}, P_{/pi} \right]^T \quad (6.16)$$

As condições de contorno do sistema derivado são obtidas através da derivação das condições de contorno do sistema direto com relação ao parâmetro pi a ser analisado. Então, as condições de contorno do sistema derivado resultam:

$$f_{/pi}(0, t) = 0 \quad (6.17)$$

$$f_{/pi}(x, 0) = 0$$

$f_{/pi}$ é avaliado apenas na condição inicial.

Para obter a solução do sistema derivado é necessário conhecer a priori o parâmetro pi a ser perturbado. Para um vetor de parâmetros formado por n componentes, seria necessário resolver igual número de sistemas derivados. Uma maneira rápida de se obter os coeficientes de sensibilidade sem o conhecimento prévio do parâmetro a ser perturbado, é a questão a ser enfrentada, via solução do sistema de equações adjuntas.

6.3. Sistema de equações adjuntas

No Apêndice 2 é mostrado o desenvolvimento do sistema de equações adjuntas, do qual resulta nas seguintes equações:

$$-\frac{\partial \alpha^*}{\partial t} - \frac{\partial v_g^*}{\partial t} + \rho_l v_l \frac{\partial v_l^*}{\partial t} - \rho_g v_g \frac{\partial P^*}{\partial t} - v_l \frac{\partial \alpha^*}{\partial x} - v_g \frac{\partial v_g^*}{\partial x} - \rho_g v_g^2 \frac{\partial P^*}{\partial x} - b_2 \frac{\partial v_l^*}{\partial x} = d_1 \quad (6.18)$$

$$-a_5 \frac{\partial v_l^*}{\partial t} - a_3 \frac{\partial P^*}{\partial t} - \alpha \frac{\partial v_g^*}{\partial x} - b_3 \frac{\partial v_l^*}{\partial x} - a_{41} \frac{\partial P^*}{\partial x} = d_2 \quad (6.19)$$

$$-b_4 \frac{\partial v_l^*}{\partial t} - a_5 \frac{\partial P^*}{\partial t} + (1-\alpha) \frac{\partial \alpha^*}{\partial x} - b_{51} \frac{\partial v_l^*}{\partial x} - a_{51} \frac{\partial P^*}{\partial x} = d_3 \quad (6.20)$$

$$-(1-\alpha) \frac{\partial v_l^*}{\partial x} - \alpha \frac{\partial P^*}{\partial x} = d_4 \quad (6.21)$$

sendo

$$\begin{aligned} d_1 = & S_\alpha^+ + \\ & + v_l^* \left[C_{vm} \rho_l \frac{\partial v_r}{\partial t} - 2C_p \rho_l v_r \frac{\partial v_r}{\partial x} + \rho_l g + \frac{3 C_d}{8 R_b} \rho_l |v_r| v_r + C_{vm} \rho_l \left(v_g \frac{\partial v_g}{\partial x} - v_l \frac{\partial v_l}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} \right] \\ & + P^* \left[-C_{vm} \rho_l \frac{\partial v_r}{\partial t} + 2C_p \rho_l v_r \frac{\partial v_r}{\partial x} - \rho_g g - \frac{3 C_d}{8 R_b} \rho_l |v_r| v_r - C_{vm} \rho_l \left(v_g \frac{\partial v_g}{\partial x} - v_l \frac{\partial v_l}{\partial x} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} d_2 = & S_{v_g}^+ + \\ & + v_l^* \left[-C_{vm} \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (2v_r C_p \rho_l - C_{vm} \rho_l v_g) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{3 C_d}{4 R_b} \rho_l \alpha |v_r| \right] + \\ & + P^* \left[C_{vm} \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (C_{vm} \rho_l v_g - 2v_r C_p \rho_l) \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{3 C_d}{4 R_b} \rho_l \alpha |v_r| \right] \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned}
d_3 = & S_{v_l}^+ + \\
& + v_l^* \left[C_{vm} \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (C_{vm} \rho_l v_l - 2C_P \rho_l v_r) \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{3}{4} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| \right] + \\
& + P^* \left[-C_{vm} \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (2C_P \rho_l v_r - C_{vm} \rho_l v_l) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{3}{4} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| \right]
\end{aligned} \tag{6.24}$$

$$d_4 = S_P^+ - v_l^* \frac{\partial \alpha}{\partial x} + P^* \frac{\partial \alpha}{\partial x} \tag{6.25}$$

Para obter a solução do sistema adjunto não é necessário conhecer a priori o parâmetro pi a se perturbar. Este sistema é facilmente calculado visto que é linear em relação às funções adjuntas. Entretanto sua solução dependerá do vetor de função peso $S^+ = [S_\alpha^+, S_{v_g}^+, S_{v_l}^+, S_P^+]$, que por sua vez depende do funcional - resposta escolhido.

6.4. Concomitante bilinear e condições de contorno

O termo CB , é função de f^* e a derivada do vetor de estado em relação ao parâmetro $f_{/pi}$ avaliados nos limites de integração. A forma particular do concomitante bilinear é determinada para cada problema particular considerando que $f_{/pi}$ é avaliado apenas na condição inicial, onde é conhecido. A expressão do concomitante bilinear é desenvolvida no Apêndice 2. A expressão geral para o concomitante bilinear é dada por:

$$CB = CB_1 + CB_2 + CB_3 + CB_4 \tag{6.26}$$

onde,

$$\begin{aligned}
CB_1 = & - \int_0^L \alpha_{/pi} \left(\alpha^* + v_g^* - \rho_1 v_l v_l^* + \rho_g v_g P^* \right) \Big|_0^T dx - \\
& - \int_0^T \alpha_{/pi} \left(v_l \alpha_g^* + v_g v_g^* + b_2 v_l^* + \rho_g v_g^2 P^* \right) \Big|_0^L dt
\end{aligned} \tag{6.27}$$

$$CB_2 = -\int_0^L v_{g/pi} \left(a_5 v_l^* + a_3 P^* \right) \Big|_0^T dx - \int_0^T v_{g/pi} \left(\alpha \alpha^* + b_3 v_g^* + a_{41} P^* \right) \Big|_0^L dt \quad (6.28)$$

$$CB_3 = -\int_0^L v_{l/pi} \left(b_4 v_l^* + a_5 P^* \right) \Big|_0^T dx - \int_0^T v_{l/pi} \left(-(1-\alpha) \alpha^* + b_{51} v_l^* + a_{51} P^* \right) \Big|_0^L dt \quad (6.29)$$

$$CB_4 = -\int_0^T P_{/pi} \left((1-\alpha) v_l^* + \alpha P^* \right) \Big|_0^L dt \quad (6.30)$$

As condições de contorno do sistema adjunto são selecionadas a partir da expressão do concomitante bilinear de forma que se evitem os termos do vetor derivado, $f_{/pi}$, em pontos nos quais são desconhecidos. Desta forma, as condições de contorno do sistema adjunto resultam:

$$\begin{aligned} f^*(L, t) &= 0 \\ f^*(x, T) &= 0 \end{aligned} \quad (6.31)$$

os quais, por estarem avaliados em $x = L$ e $t = T$, são condições finais.

6.5. Descrição dos funcionais de respostas analisados

Para resolver o sistema de equações adjuntas é necessário conhecer o vetor de função peso, o qual depende da resposta a ser analisada. Existem dois tipos de respostas: as contínuas e as discretas.

A resposta contínua é caracterizada por valores médios no espaço de fase. Por exemplo, para a componente j do vetor de estado, o valor médio na posição e no tempo \bar{f}_j é:

$$\bar{f}_j = \frac{1}{LT} \int_0^L \int_0^T f_j dx dt \quad (6.32)$$

Tendo em vista a definição de resposta dada pela Eq. (3.6), a expressão para o vetor de função peso resulta:

$$\mathbf{S}^+ = \left[0, \dots, \frac{1}{LT}, \dots, 0 \right]^T \quad (6.33)$$

isto é, todas as componentes do vetor são nulas exceto a j .

A resposta discreta é caracterizada por valores locais da mesma em algum ponto do espaço de fase (posição, tempo ou ambos). Este tipo de resposta pode ser representado pelas funções delta de Dirac. Em problemas físicos a função delta de Dirac é frequentemente usada em conceitos abstratos tal como a força concentrada num ponto ou a força impulsiva que atua instantaneamente. A função delta de Dirac possui a seguinte cuja propriedade [KANWAL, (1998)]:

$$\int_a^b \delta(x-\xi)dx = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi \in (a,b) \\ 0 & \text{se } \xi \notin (a,b) \\ 1/2 & \text{se } \xi = a \text{ ou } \xi = b \end{cases} \quad (6.34)$$

Por exemplo, para a componente j do vetor de estado, o valor no ponto (x_0, T) , $f_j(x_0, T)$ com $x_0 \in [0, L]$, é dado por:

$$f_j(x_0, t_0) = \int_0^L \int_0^T f_j \delta(t-T) \delta(x-x_0) dt dx \quad (6.35)$$

Considerando as Eqs. (6.34) e (6.35), a forma o vetor de função peso resulta em:

$$\mathbf{S}^+ = [0, \dots, 4\delta(t-t_0)\delta(x-x_0), \dots, 0]^T \quad (6.36)$$

onde, novamente, todas as componentes do vetor são nulas exceto a j -ésima.

O tratamento das funções do tipo delta de Dirac deve ser realizado de maneira cuidadosa, já que no ponto onde estas atuam haverá uma descontinuidade. O tratamento escolhido consistiu em resolver o problema adjunto excluindo os pontos onde atuam as funções deltas e levando em conta seu efeito através da modificação das condições de contorno.

Para eliminar das equações a função delta, é necessário integrar a equação adjunta num intervalo infinitesimal onde elas atuam [BALIÑO et al, (2001)].

O sistema adjunto para uma resposta do tipo da Eq. (6.35) será resolvido, considerando que:

- 1- Em $x > x_0$ e $t > T$, o sistema adjunto é homogêneo com condições finais nulas;
- 2- Em $x = x_0$ e $t = T$ o sistema adjunto tem um termo independente não nulo que consiste na função delta atuando em (x_0, t_0) . A solução deste sistema, isto é, as funções adjuntas em (x_0, t_0) , contêm os valores das descontinuidades da função delta. Estas descontinuidades irão se propagar para $x < x_0$ e para $t < t_0$;
- 3- Em $x < x_0$ e para $t < t_0$ o sistema adjunto é homogêneo e as condições de contorno são as descontinuidades da função delta.

Para determinar os valores das funções adjuntas em torno do ponto (x_0, T) , sendo $x_0 \in (0, L)$; o sistema adjunto é integrado no intervalo infinitesimal espacial $[x_0 + \xi, x_0 - \xi]$ e no intervalo infinitesimal temporal $[T - \tau, T]$. Os valores das funções adjuntas no contorno serão as novas condições de contorno para um problema adjunto que não possui função delta, portanto, não possui termo de fonte. O transitório evolui desde (x_0, T) até $t = 0$.

Brevemente será apresentado o cálculo do valor das funções adjuntas em (x_0, T) , com $x_0 \in (0, L)$ para a resposta da fração de vazão local no instante T , $R = \alpha(x_0, T)$, que corresponde a um vetor de função peso:

$$\mathbf{S}^+ = [2\delta(t - T)\delta(x - x_0), 0, 0, 0]^T \quad (6.37)$$

Integrando o sistema adjunto Eq. (6.18) a Eq. (6.21) e calculando o limite para $\xi \rightarrow 0$ e para $\tau \rightarrow 0$, obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\frac{1}{2} \left(1 + v_l \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \alpha^* + \frac{1}{2} \left(1 + v_g \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) v_g^* - \frac{1}{2} \left(1 + v_l \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \rho_l v_l v_l^* + \frac{1}{2} \left(1 + v_g \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \rho_g v_g P^* = \frac{k_1}{\Delta x} \quad (6.38)$$

$$\frac{\alpha}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} v_g^* + \frac{1}{2} \left(1 + 2v_g \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \alpha \rho_g P^* = 0 \quad (6.39)$$

$$-\frac{(1-\alpha)}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \alpha^* + \frac{1}{2} \left(1 + 2v_l \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + v_l \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (1-\alpha) \rho_l v_l^* = 0 \quad (6.40)$$

$$\frac{(1-\alpha)}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} v_l^* + \frac{\alpha}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} P^* = 0 \quad (6.41)$$

cuja solução é dada por:

$$\alpha^* = \frac{\alpha^2 (1-\alpha)}{8\Delta x} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \rho_l \left(1 + 2v_l \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \quad (6.42)$$

$$v_g^* = \frac{\alpha(1-\alpha)^2}{8\Delta x} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \rho_g \left(1 + 2v_g \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \quad (6.43)$$

$$v_l^* = \frac{\alpha^2(1-\alpha)}{8\Delta x} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^3 \quad (6.44)$$

$$P^* = \frac{\alpha(1-\alpha)^2}{8\Delta x} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^3 \quad (6.45)$$

Os valores das funções adjuntas correspondem à posição x_0^- e tempo T^- . Os valores das funções adjuntas em x_0^+ são nulos pela condição de contorno da função adjunta.

No estado estacionário, para o funcional - resposta dado por $R = \alpha(x_0)$, o vetor de funções de peso possui a forma $S^+ = [\delta(x - x_0), 0, 0, 0]^T$. A solução é dada, então, por:

$$\alpha^* = \frac{\alpha(a_{51} + 1 - \alpha + b_{51}\alpha)}{\Delta} \quad (6.46)$$

$$v_g^* = \frac{(1 - \alpha)[a_{41}(1 - \alpha) - b_3\alpha]}{\Delta} \quad (6.47)$$

$$v_l^* = -\frac{(1 - \alpha)\alpha}{\Delta} \quad (6.48)$$

$$P^* = -\frac{(1 - \alpha)^2\alpha}{\Delta} \quad (6.49)$$

Sendo

$$\begin{aligned} \Delta = & a_{41}(1 - \alpha)^2 v_g - a_{51}(1 - \alpha)\alpha v_l - \rho_g v_g (1 - \alpha)^2 \alpha - \\ & - b_3(1 - \alpha)\alpha v_l + b_{51}\alpha^2 v_l + b_2(1 - \alpha)\alpha^2 \end{aligned} \quad (6.50)$$

Os valores das discontinuidades nas funções adjuntas dependerão da solução do sistema direto e do funcional-resposta escolhido para calcular o coeficiente de sensibilidade.

6.6. Solução numérica para solução do sistema adjunto.

O sistema adjunto mantém a mesma discretização; porém, por possuir condições finais, evolui desde o tempo $t = T$ até $t = 0$ e desde $x = L$ até $x = 0$. Este sistema de equações é linear e pode ser resolvido sem o uso de iterações.

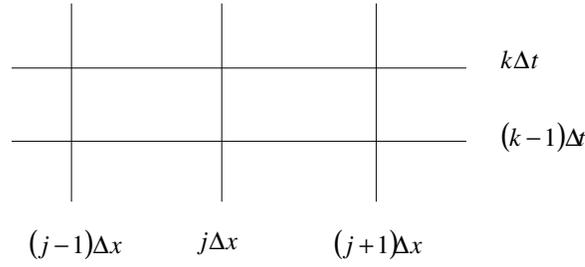


Figura 6. Malha nodal do sistema adjunto

Então,

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \left[\psi_{j-1}^{*k-1} - \psi_j^{*k-1} \right] \quad (6.51)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \left[\psi_{j-1}^{*k} - \psi_{j-1}^{*k-1} \right] \quad (6.52)$$

sendo $(j-1)\Delta x < x < j\Delta x$ e $k\Delta t < t < (k+1)\Delta t$. A variável ψ^* é a representação genérica da função adjunta.

Como no problema direto, o sistema discretizado possui a seguinte forma:

$$\mathbf{A}^* \psi_{j-1}^{*k-1} = \mathbf{B}^* \left(\psi_j^{*k-1}, \psi_{j-1}^{*k} \right) \quad (6.53)$$

As matrizes \mathbf{A}^* e \mathbf{B}^* são dadas por:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} + v_1 & \frac{\Delta x}{\Delta t} + v_g & -\rho_1 v_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + b_2 & \rho_g v_g \frac{\Delta x}{\Delta t} + \rho_1 v_g^2 \\ 0 & \alpha & a_5 \frac{\Delta x}{\Delta t} + b_3 & a_3 \frac{\Delta x}{\Delta t} + a_{41} \\ -c_2 & 0 & b_4 \frac{\Delta x}{\Delta t} + b_{51} & a_5 \frac{\Delta x}{\Delta t} + a_{51} \\ 0 & 0 & (1-\alpha) & \alpha \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix}
 \Delta x S_{\alpha}^+ + \Delta x (d_1)_{j-1}^k + \frac{\Delta x}{\Delta t} \left(\alpha_{j-1}^{*k} + v_g^{*k} - \rho_1 v_l v_l^* + \rho_g v_g P_{j-1}^{*k} \right) + v_l \alpha_j^{*k-1} + v_g v_g^{*k-1} + b_2 v_l^* + \rho_g v_g^2 P_j^{*k-1} \\
 \Delta x S_{v_g}^+ + \Delta x (d_2)_{j-1}^k + \frac{\Delta x}{\Delta t} \left(a_5 v_l^* + a_3 P_{j-1}^{*k} \right) + \alpha v_g^{*k-1} + b_3 v_l^* + a_4 P_j^{*k-1} \\
 \Delta x S_{v_l}^+ + \Delta x (d_3)_{j-1}^k + \frac{\Delta x}{\Delta t} \left(b_4 v_l^* + a_5 P_{j-1}^{*k} \right) - (1-\alpha) \alpha_j^{*k-1} + b_5 v_l^* + a_5 P_j^{*k-1} \\
 S_P^+ \Delta x + \Delta x (d_4)_{j-1}^k + (1-\alpha) v_l^* + \alpha P_j^{*k-1}
 \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

A Figura 7 mostra o diagrama de blocos usado no programa, ADJUNTO, desenvolvido em linguagem FORTRAN e simula o modo estacionário e transitório para o sistema adjunto. A solução do sistema adjunto depende da solução do problema direto; por esta razão o programa ADJUNTO tem de ler o arquivo de saída do programa DIRETO o qual possui os valores das variáveis diretas já calculadas. O programa fornece um arquivo de saída com os valores das funções adjuntas.

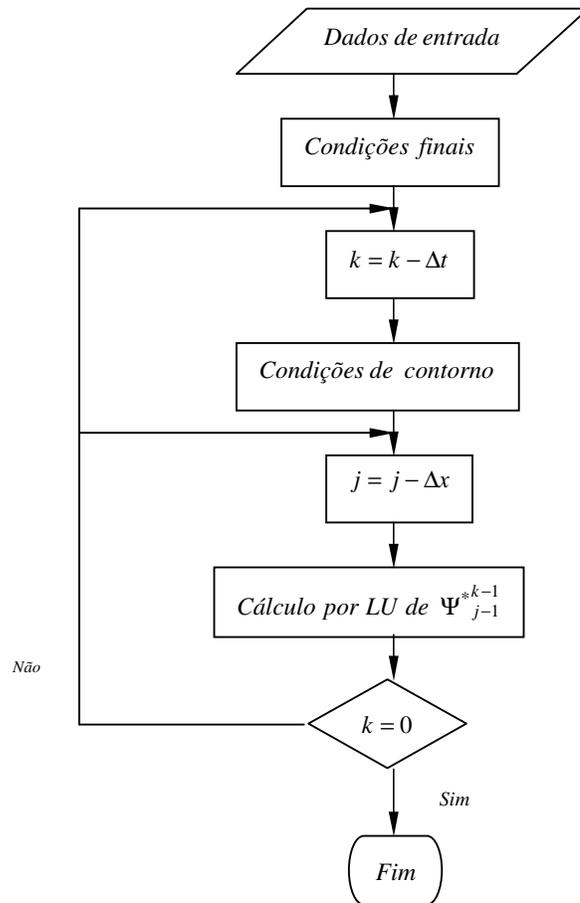


Figura 7. Diagrama de blocos do programa ADJUNTO.

6.7. Descrição dos coeficientes de sensibilidade analisados

Uma vez determinada a solução do sistema de equações adjuntas e a solução do sistema de equações diretas, o coeficiente de sensibilidade pode ser obtido a partir da Eq. (3.21).

Foram calculados os coeficientes de sensibilidade considerando o vetor de parâmetros constituído por constantes físicas, valores constantes das variáveis diretas no início do transitório e na entrada do tubo e por parâmetros assumidos constantes que influem nos termos interfacial do modelo. Assim, o vetor dos parâmetros é dado por:

$$\mathbf{p} = [\rho_g, \rho_l, g, \alpha_0, v_{g0}, v_{l0}, \alpha_{in}, v_{gin}, v_{lin}, C_d / R_b, C_{vm}, C_r, C_p]^T \quad (6.55)$$

Os funcionais-respostas calculados no estado estacionário são:

Contínuos:

$$\bar{\alpha}, \bar{v}_g, \bar{v}_l \text{ e } \bar{P}$$

Discretos:

$$\alpha(x=L), v_g(x=L), v_l(x=L) \text{ e } P(x=L)$$

$$\alpha(x=L/2), v_g(x=L/2), v_l(x=L/2) \text{ e } P(x=L/2)$$

Os funcionais-resposta calculados no estado transitório são:

Contínuos:

$$\bar{\alpha}(T), \bar{v}_g(T), \bar{v}_l(T) e \bar{P}(T)$$

A título de exemplo, é mostrado a seguir como se obtém o coeficiente de sensibilidade relativo ao parâmetro densidade do líquido para um funcional-resposta.

De Eq. (3.21) tem-se a expressão do coeficiente de sensibilidade;

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \langle S_{/pi}^+ f \rangle + \langle f^* S(pi) \rangle + CB(f^*, f_{/pi}) \quad (6.56)$$

sendo,

$$\langle \quad \rangle = \int_0^T \int_0^L dx dt \quad (6.57)$$

Considerando, separadamente, os termos da expressão do coeficiente de sensibilidade em função de ρ_l , tem-se:

- Em $\langle S_{/pi}^+, f \rangle$, tem-se $S_{/pi}^+ = 0$, tendo em vista que as expressões dadas pela Eq. (6.33) ou pela Eq. (6.36) não dependem deste parâmetro.
- Em $CB(f^*, f_{/pi})$, tem-se $CB(f^*, f_{/pi}) = 0$, tendo em vista que a expressão dada pela Eq. (6.26) não depende deste parâmetro.
- Em $\langle f^*, S(pi) \rangle$, o vetor $S(pi) = [S_\alpha(pi), S_{v_g}(pi), S_{v_l}(pi), S_p(pi)]$ possui as seguintes componentes:

$$S_\alpha(\rho_l) = -\frac{\partial m_1}{\partial \rho_l} = 0 \quad (6.58)$$

$$S_{v_g}(\rho_l) = -\frac{\partial m_2}{\partial \rho_l} = 0 \quad (6.59)$$

$$S_{v_l}(\rho_l) = -\frac{\partial m_3}{\partial \rho_l} \neq 0 \quad (6.60)$$

$$S_P(\rho_l) = -\frac{\partial m_4}{\partial \rho_l} \neq 0 \quad (6.61)$$

Portanto, $S(\rho_l) \neq 0$. A expressão do coeficiente de sensibilidade resulta, então, em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \rho_l} = & -\int_0^T \int_0^L v_l^* \left\{ -v_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} + [(1-\alpha) + C_{vm}\alpha] \frac{\partial v_l}{\partial t} - C_{vm}\alpha \frac{\partial v_g}{\partial t} - \right. \\ & - \left. \left[v_l^2 + [C_p + C_r(2\alpha-1)]v_r^2 \right] \frac{\partial \alpha}{\partial x} + [2C_r v_r \alpha(1-\alpha) - C_{vm}\alpha v_g] \frac{\partial v_g}{\partial x} + \right. \\ & + \left. [-2C_r v_r \alpha(1-\alpha) + 2v_l(1-\alpha) + C_{vm}\alpha v_l] \frac{\partial v_l}{\partial x} + (1-\alpha)g - \frac{3}{8} \frac{C_d}{R_b} \alpha |v_r|v_r \right\} dxdt \\ & - \int_0^T \int_0^L P^* \left\{ C_{vm}\alpha \left(\frac{\partial v_g}{\partial t} - \frac{\partial v_l}{\partial t} \right) + (C_{vm}\alpha v_g - 2\alpha C_p v_r) \frac{\partial v_g}{\partial x} + \right. \\ & + \left. (2\alpha C_p v_r - C_{vm}\alpha v_l) \frac{\partial v_l}{\partial x} + \frac{3}{8} \frac{C_d}{R_b} \alpha |v_r|v_r \right\} dxdt \end{aligned} \quad (6.62)$$

De forma similar são obtidas as expressões dos demais coeficientes de sensibilidade relativos aos demais parâmetros, isto é:

$$\frac{\partial R}{\partial \rho_g} = -\int_0^T \int_0^L P^* \left[v_g \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha \frac{\partial v_g}{\partial t} + v_g^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + 2v_g \alpha \frac{\partial v_g}{\partial x} + \alpha g \right] dxdt \quad (6.63)$$

$$\frac{\partial R}{\partial g} = \int_0^T \int_0^L [-v_l^* (1-\alpha)\rho_l - P^* \alpha \rho_g] dxdt \quad (6.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial C_{vm}} = & -\int_0^T \int_0^L v_l^* \left(\frac{\partial v_l}{\partial t} - \frac{\partial v_g}{\partial t} - v_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_l \frac{\partial v_l}{\partial x} \right) \rho_l \alpha dx dt - \\ & - \int_0^T \int_0^L P^* \left(\frac{\partial v_g}{\partial t} - \frac{\partial v_l}{\partial t} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial x} - v_l \frac{\partial v_l}{\partial x} \right) \rho_l \alpha dx dt \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$\frac{\partial R}{\partial C_d / R_b} = \int_0^T \int_0^L \left(v_l^* \frac{3}{8} \rho_l \alpha |v_r| v_r - P^* \frac{3}{8} \rho_l \alpha |v_r| v_r \right) dx dt \quad (6.66)$$

$$\frac{\partial R}{\partial C_p} = \int_0^T \int_0^L \left[v_l^* \rho_l v_r^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} - 2P^* \left(\frac{\partial v_l}{\partial x} - \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) \alpha \rho_l v_r \right] dx dt \quad (6.67)$$

$$\frac{\partial R}{\partial C_r} = -\int_0^T \int_0^L v_l^* \left\{ -\rho_l (2\alpha - 1) v_r^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + 2\rho_l v_r \alpha (1 - \alpha) \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial v_l}{\partial x} \right) \right\} dx dt \quad (6.68)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_0} = \int_0^T \left[v_l \alpha^* (0, t) + \alpha v_g^* (0, t) + \rho_g v_g^2 a_2 P^* (0, t) + b_2 v_l^* (0, t) \right] dt \quad (6.69)$$

$$\frac{\partial R}{\partial v_{g0}} = \int_0^T \left[\alpha v_g^* (0, t) + b_3 v_l^* (0, t) + a_{41} P^* (0, t) \right] dt \quad (6.70)$$

$$\frac{\partial R}{\partial v_{l0}} = \int_0^T \left[-(1 - \alpha) \alpha^* (0, t) + b_{51} v_l^* (0, t) + a_{51} P^* (0, t) \right] dt \quad (6.71)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_m} = \int_0^L \left[\alpha^* (x, 0) + v_g^* (x, 0) - \rho_l v_l v_l^* (x, 0) + \rho_g v_g P^* (x, 0) \right] dx \quad (6.73)$$

$$\frac{\partial R}{\partial v_{gin}} = \int_0^L \left[a_5 v_l^* (x, 0) + a_3 P^* (x, 0) \right] dx \quad (6.73)$$

$$\frac{\partial R}{\partial v_{lin}} = \int_0^L [b_4 v_l^*(x,0) + a_5 P^*(x,0)] dx \quad (6.74)$$

A obtenção do coeficiente de sensibilidade é possível conhecendo-se os valores das variáveis diretas e as funções adjuntas. Os valores dos coeficientes de sensibilidade são calculados com o programa SENSIBILIDADES, o qual lê os arquivos de saída fornecidos pelos programas DIRETO e ADJUNTO e resolve as integrais das expressões dos coeficientes de sensibilidade.

As integrações nas expressões dos coeficientes são realizadas usando a regra de integração do ponto médio dada pelas seguintes equações:

$$\int_0^L f(x,t) dx = \sum_x \frac{f(x_i, t^k) + f(x_{i+1}, t^k)}{2} \Delta x \quad (6.76)$$

$$\int_0^T f(x,t) dt = \sum_t \frac{f(x_i, t^k) + f(x_i, t^{k+1})}{2} \Delta t \quad (6.77)$$

ou

$$\int_0^T \int_0^L f(x,t) dx dt = \sum_t \sum_x \frac{f(x_i, t^k) + f(x_{i+1}, t^k) + f(x_i, t^{k+1}) + f(x_{i+1}, t^{k+1})}{4} \Delta x \Delta t \quad (6.78)$$

7. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os casos-problema serviram como ponto de partida para a aplicação dos métodos perturbativos no cálculo dos coeficientes de sensibilidade. A seguir são apresentadas as distribuições, espacial e temporal, do vetor de estado do problema direto, do vetor adjunto do problema adjunto e os respectivos coeficientes de sensibilidade para vários parâmetros nos estados: estacionário e transitório.

A simulação numérica do problema direto foi realizada com a execução do programa DIRETO. A simulação numérica do problema adjunto foi realizada com o programa ADJUNTO. Por último, o cálculo dos coeficientes de sensibilidades foi realizado com o programa SENSIBILIDADES. Os resultados são mostrados em duas seções: na primeira, são apresentados os resultados para o caso-problema 1, isto é, o escoamento anular, em seguida, são apresentados os resultados do caso-problema 2, isto é, o escoamento de bolhas. Adotaram-se para as densidades da água e do ar os valores $\rho_l = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ e $\rho_g = 1 \text{ kg m}^{-3}$, respectivamente.

7.1. Escoamento anular

Neste problema os seguintes parâmetros: C_{vm} , C_p , C_r e C_d/R_b são considerados nulos. Esta simplificação permitiu obter uma solução analítica para as comparações entre os respectivos coeficientes de sensibilidades. Para a simulação numérica adotou-se $L = 12 \text{ m}$. Depois de testados vários passos espaciais, adotou-se um passo espacial de $\Delta x = 1.10^{-4} \text{ m}$.

7.1.1. Resultados do estado estacionário direto

As Figuras 8 a 10 apresentam a distribuição espacial das variáveis diretas: fração de vazio, velocidade do líquido e queda de pressão.

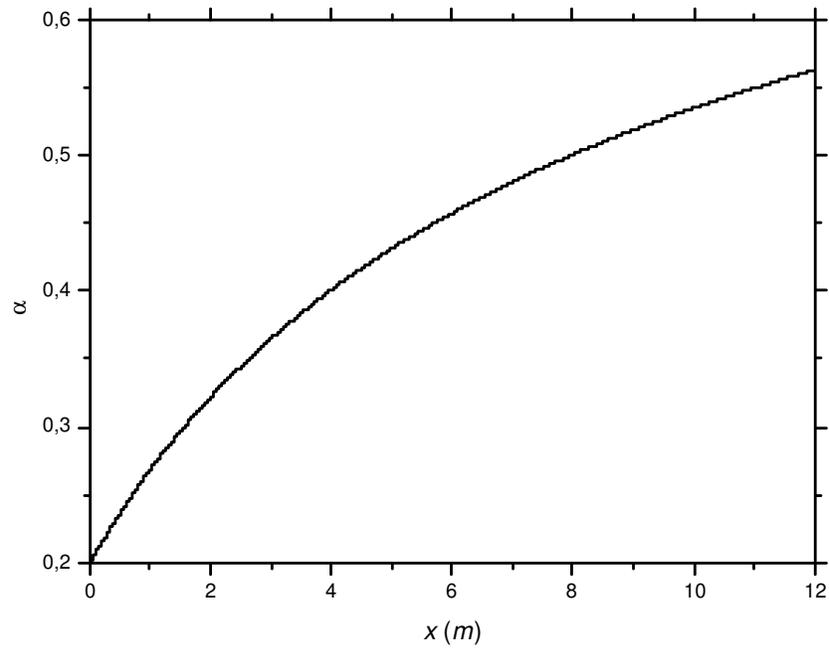


Figura 8. Fração de vazio, estado estacionário.

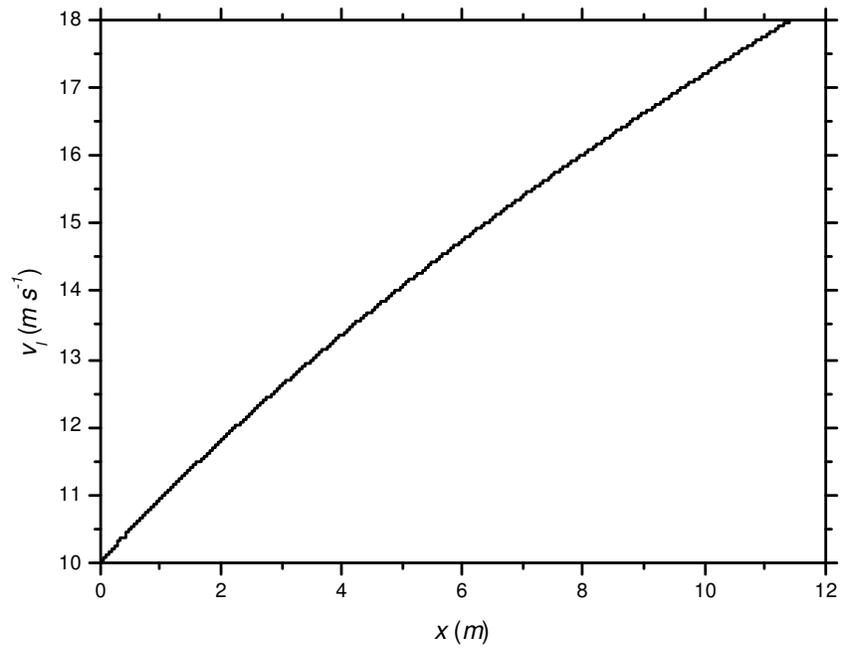


Figura 9. Velocidade do líquido, estado estacionário.

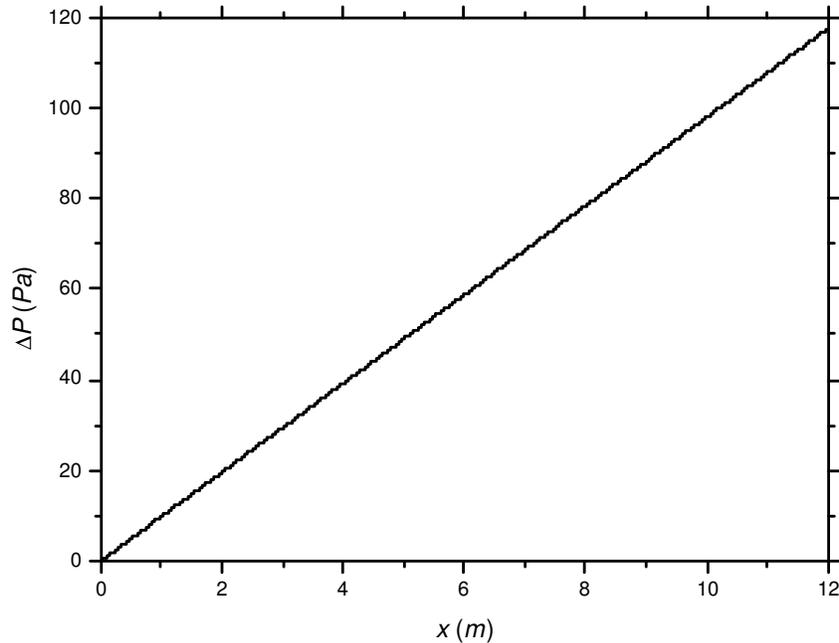


Figura 10. Queda de pressão, estado estacionário.

As três componentes do vetor de estado apresentam um aumento gradual, desde a entrada até a saída do tubo. A fração de vazio e a velocidade do líquido atingem o valor máximo na saída. O leve aumento na diferença de pressão ΔP entre a posição ao longo do tubo e a entrada do tubo deve-se à coluna de gás.

7.1.2. Problema adjunto estacionário

Neste trabalho, as funções adjuntas $f^* = [\alpha^*, v_g^*, v_l^*, P^*]$ são adotadas para o cálculo do coeficiente de sensibilidade das respostas analisadas. Os perfis das funções adjuntas no estado estacionário são apresentados para diferentes respostas contínuas e discretas.

7.1.2.1. Resultados das funções adjuntas para a resposta: $\bar{\alpha}$

A partir da análise dimensional das expressões dos coeficientes de sensibilidades, apresentada na Seção 6.5, é possível se conhecer as unidades das funções adjuntas. A seguir, como exemplo, é considerado o coeficiente de sensibilidade para a resposta $\bar{\alpha}$ em função do parâmetro α_0 .

Da Eq. (6.44), tem-se:

$$\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \alpha_0} = \int_0^T \left[v_l \alpha^* (0, t) + v_g v_g^* (0, t) + \rho_g v_g^2 P^* (0, t) - \rho_l v_l^2 v_l^* (0, t) \right] dt \quad (7.1)$$

Como resultado, obtém-se um coeficiente de sensibilidade adimensional. Pode-se, então, concluir que as funções adjuntas α^* e v_g^* têm que possuir unidades de medidas idênticas, mas as funções adjuntas v_l^* e P^* também devem possuir iguais unidades de medidas. Quando o funcional-resposta está relacionado com variável α , as funções adjuntas α^* e v_g^* têm as unidades dadas por $[m^{-1}s]$; todavia as funções adjuntas v_l^* e P^* têm unidades dadas por $[ms^2kg^{-1}]$; no estado estacionário não é realizada a integração temporal. No estado transitório, levando em conta a integração temporal as funções adjuntas α^* e v_g^* têm unidades dadas por $[m^{-1}]$ e as funções adjuntas v_l^* e P^* têm unidades dadas por $[mskg^{-1}]$

As funções adjuntas foram obtidas resolvendo o sistema adjunto, Eq. (6.18) a Eq.(6.21), no qual apenas o termo de fonte muda em função da resposta a se analisar. O programa ADJUNTO resolve o mesmo sistema adjunto distinguindo apenas o vetor de fonte. Neste caso o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por: $s^+ = \left[\frac{1}{L}, 0, 0, 0 \right]$ que corresponde à resposta $\bar{\alpha}$.

Nas Figuras 11 a 13, são apresentadas as distribuições espaciais das funções adjuntas para o funcional-resposta contínuo $\bar{\alpha}$. A função adjunta v_g^* é nula para todas as respostas relacionadas com a fração de vazio. Observa-se um comportamento contínuo das funções adjuntas. A análise da Figura 11 revela que, para esta resposta, o peso dos valores da função adjunta α^* e de v_l^* resulta numa maior contribuição na entrada do tubo do que na saída; o mesmo ocorre com a contribuição de P^* (Figuras 12 e 13, respectivamente). A função adjunta v_g^* não contribui para o cálculo desta resposta.

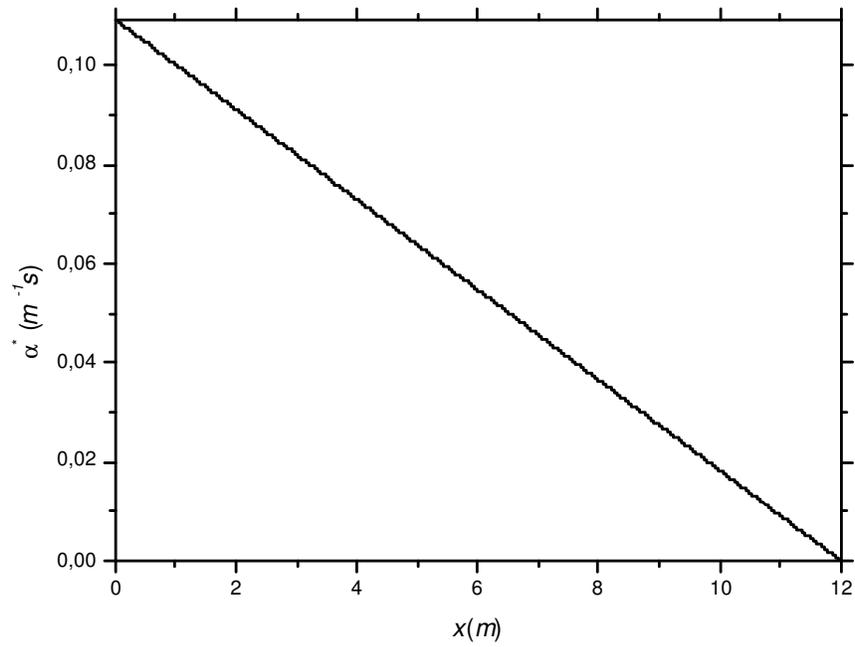


Figura 11. Função adjunta da fração de vazio para a resposta $\bar{\alpha}$.

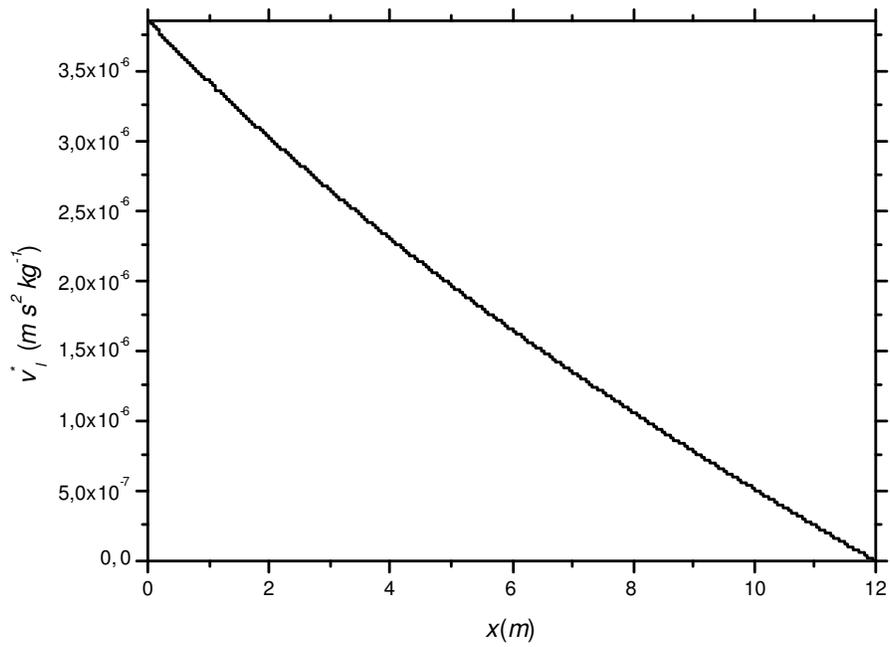


Figura 12. Velocidade do Líquido adjunta para a resposta $\bar{\alpha}$.

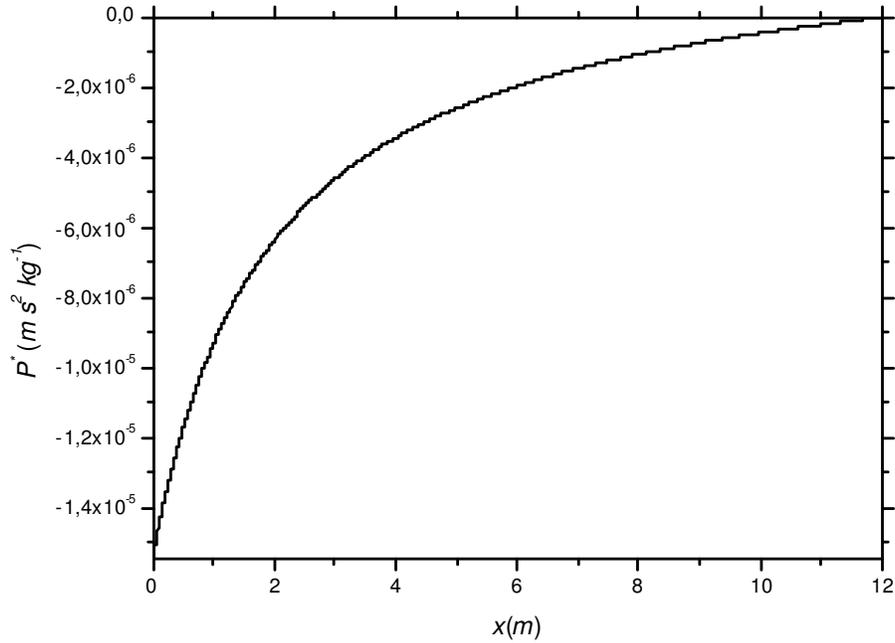


Figura 13. Função adjunta da pressão para a resposta $\bar{\alpha}$.

7.1.2.2. Resultados das funções adjuntas: $\alpha(x = L/2)$.

Foram escolhidos os valores de α em dois pontos, $\alpha(x = L/2)$ e $\alpha(x = L)$, para o estudo do comportamento das funções adjuntas discretas.

Nas Figuras 14 a 16 são mostradas as distribuições das funções adjuntas para o funcional-resposta discreto $\alpha(x = L/2)$. Neste caso o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por $S^+ = \left[\delta\left(x - \frac{L}{2}\right), 0, 0, 0 \right]$. Para este funcional-resposta as funções adjuntas possuem valores $\alpha^*(x > L/2) = 0$, $v_i^*(x > L/2) = 0$ e $P^*(x > L/2) = 0$, isto porque a função delta atua no ponto $x = L/2$ onde atinge o valor da descontinuidade. Para os pontos $x > L/2$ o sistema adjunto é um sistema homogêneo cujas condições de contorno são nulas e, portanto, a solução é nula. Para $x < L/2$, o sistema adjunto também é homogêneo, mais tem condições de contorno não nulas.

As funções adjuntas α^* e v_i^* para $x < L/2$, decrescem até a entrada do tubo, contribuindo desta forma para o cálculo do coeficiente de sensibilidade (Figuras 14 e 15). A função adjunta P^* decresce gradualmente até a entrada (Figura 16).

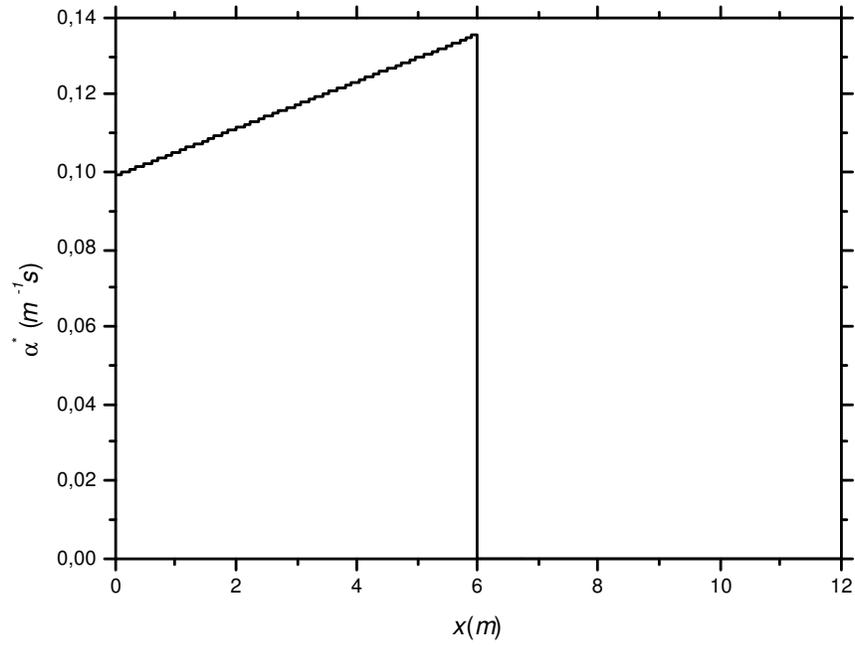


Figura 14. Função adjunta da fração de vazio para a resposta $\alpha(x=L/2)$.

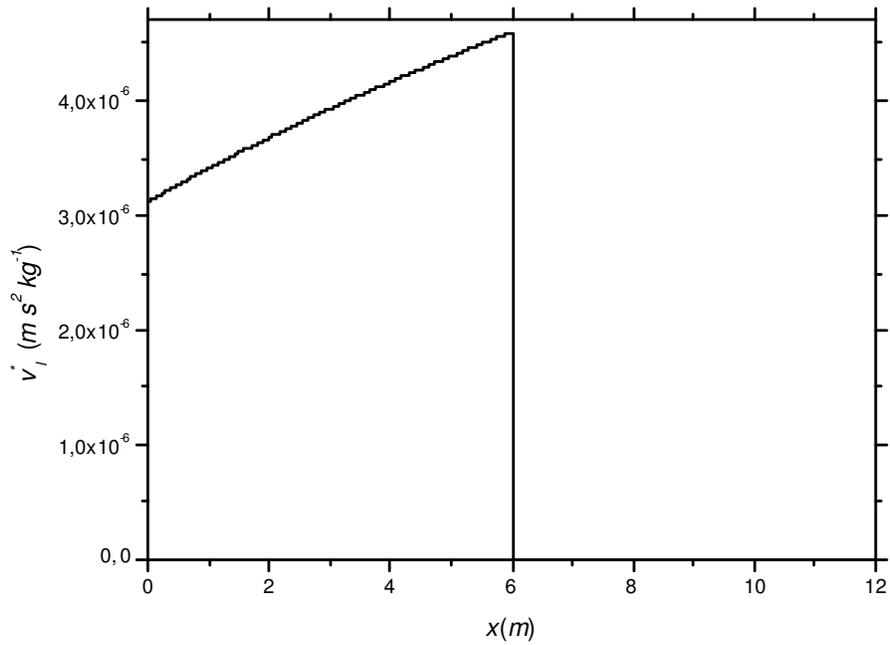


Figura 15. Velocidade do Líquido adjunta para a resposta $\alpha(x=L/2)$.

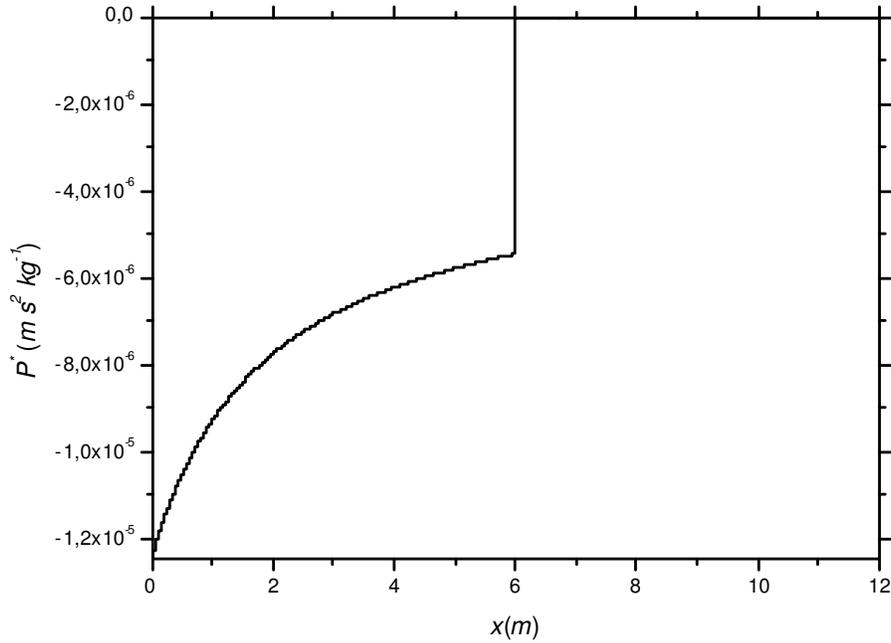


Figura 16. Função adjunta da pressão para a resposta $\alpha(x=L/2)$.

7.1.2.3. Resultados das funções adjuntas: $\alpha(x=L)$.

Nas Figuras 17 a 19 são mostradas as distribuições das funções adjuntas para o funcional-resposta discreto $\alpha(x=L)$. Neste caso o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por $S^+ = [2\delta(x-L), 0, 0, 0]$. Para este funcional-resposta as funções adjuntas assumem valores $\alpha^*(x>L)=0$, $v_i^*(x>L)=0$ e $P^*(x>L)=0$, isto é, para $x>L$ o sistema adjunto é um sistema homogêneo cujas condições de contorno são nulas e portanto a única solução é a nula. Para pontos $x<L$ o sistema a ser resolvido inclui o efeito da função deltiforme.

A posição da função delta, é deslocada para a saída do tubo; entretanto, são semelhantes os comportamentos das funções adjuntas quando comparados com os comportamentos das funções adjuntas quando da delta está localizada em $x=L/2$.

Os valores da funções adjuntas α^* e v_i^* para $x<L$ tomam valores que decrescem da saída até a entrada do tubo, contribuindo mais na saída do que na entrada do mesmo para esta resposta (Figuras 17 e 18). A função adjunta P^* também contribui mais na saída do que na entrada do tubo; entretanto o seu decréscimo é mais gradual (Figura 19).

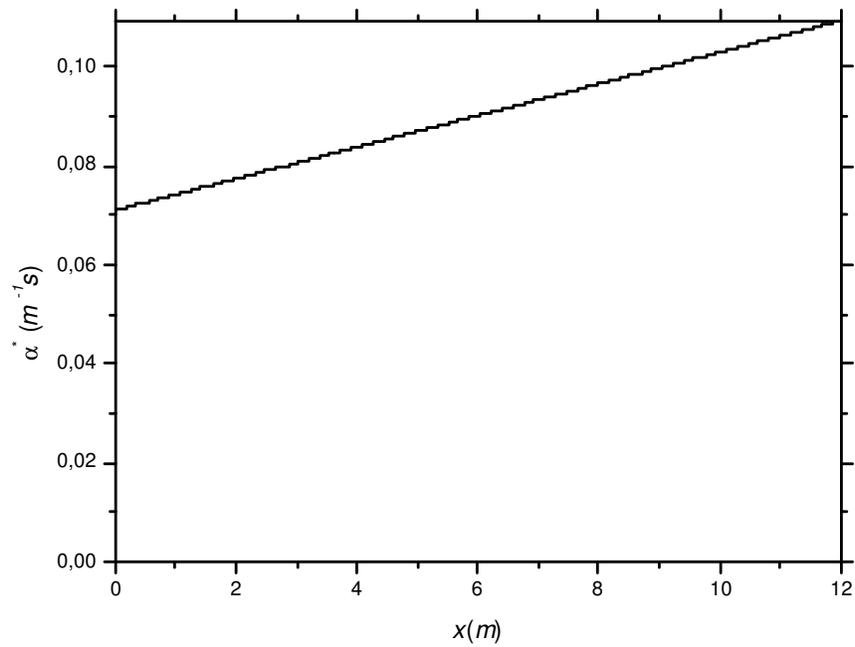


Figura 17. Função adjunta da fração de vazio para a resposta $\alpha(x = L)$.

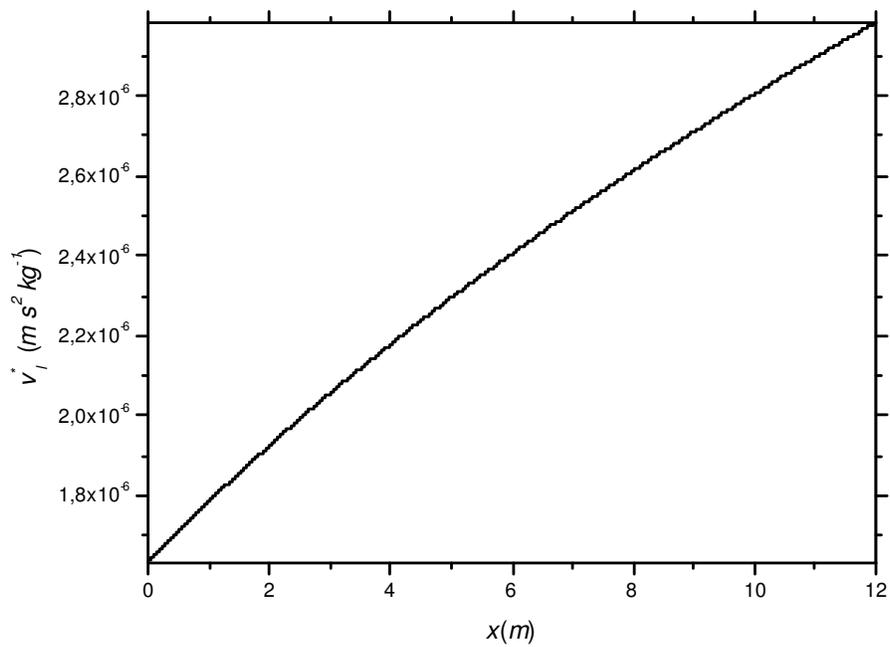


Figura 18. Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $\alpha(x = L)$

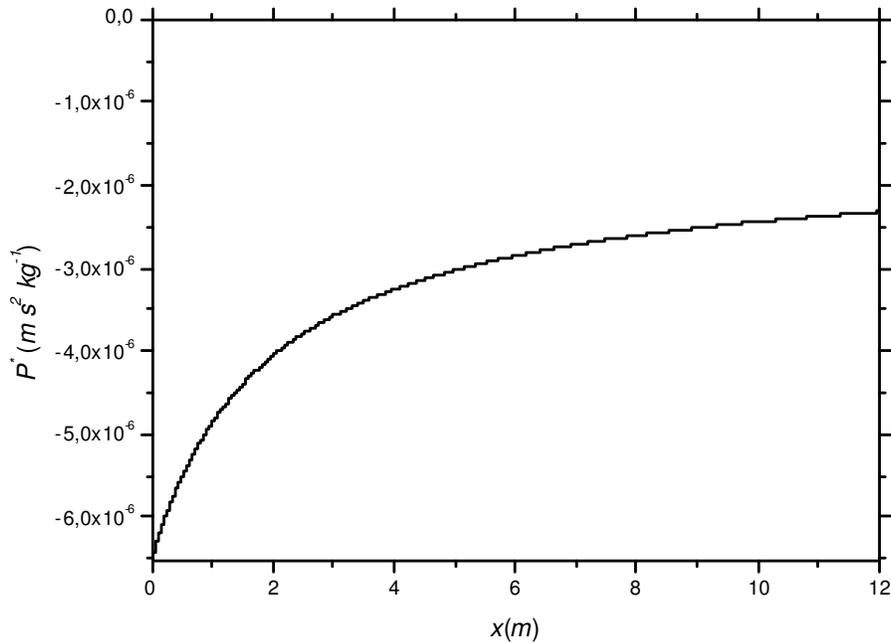


Figura 19. Função adjunta da pressão para a resposta $\alpha(x=L)$

7.1.2.4. Resultados das funções adjuntas para a resposta: \bar{v}_g

As funções adjuntas α^* e v_g^* correspondentes às respostas relacionadas com o funcional \bar{v}_g no estado estacionário são adimensionais mas, as funções adjuntas v_l^* e P^* têm unidades dadas por $[m^2 s kg^{-1}]$. No estado transitório as funções adjuntas α^* e v_g^* têm as unidades, $[s^{-1}]$, e as funções adjuntas v_l^* e P^* têm unidades $[m^2 kg^{-1}]$

Na Figura 20 é apresentada a distribuição da função adjunta v_g^* para o funcional - resposta continuo \bar{v}_g . Neste caso o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por $\mathbf{S}^+ = \left[0, \frac{1}{L}, 0, 0\right]$. Apenas a função adjunta v_g^* contribui nesta resposta de forma continua ao longo do tubo. A análise dos resultados revela que o peso de v_g^* resulta numa maior contribuição na saída do tubo do que na entrada. As funções adjuntas α^* , v_l^* e P^* ao longo do tubo são nulas e portanto não têm contribuição para esta resposta; este resultado implica em coeficientes de sensibilidade nulos para este funcional.

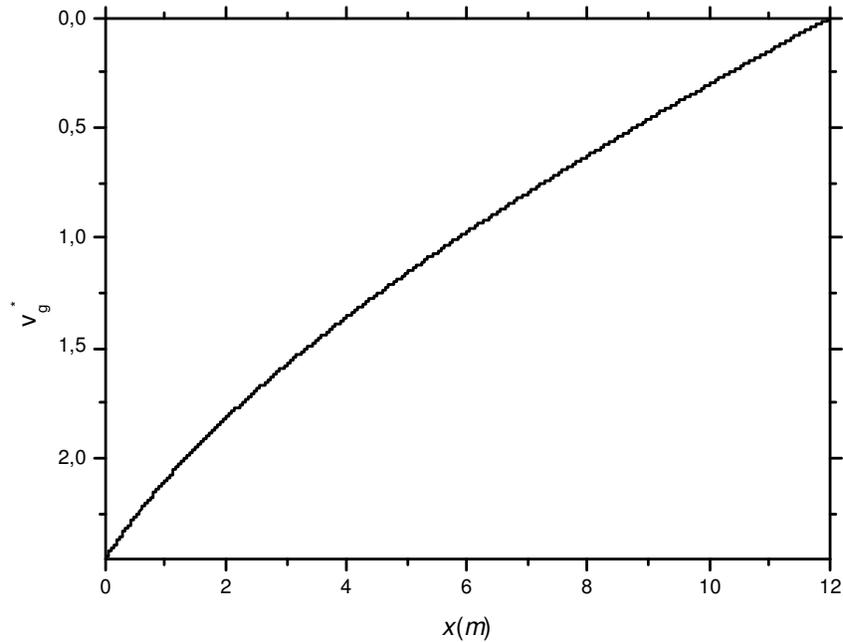


Figura 20. Função adjunta da velocidade do gás para a resposta \bar{v}_g .

7.1.2.5. Resultados das funções adjuntas para a Respostas: $v_g(x=L/2)$ e $v_g(x=L)$

Na Figura 21 é apresentada a distribuição da função adjunta v_g^* para o funcional - resposta $v_g(x=L/2)$. Neste caso o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por $\mathbf{S}^+ = \left[0, \delta\left(x - \frac{L}{2}\right), 0, 0 \right]$. Conforme explicado na Seção 7.1.2.2, a função adjunta v_g^* não contribui para valores de $x > L/2$. Para $x < L/2$ a função adjunta v_g^* contribui com valores constantes desde a posição da descontinuidade, em $x = L/2$, até a entrada do tubo. Ao longo do tubo as funções adjuntas α^* , v_l^* e P^* são nulas e, portanto, com contribuição nula para esta resposta.

Para o funcional-resposta $v_g(x=L)$ a função adjunta v_g^* assume valores constantes desde a descontinuidade, em $x = L$, até a entrada do tubo.

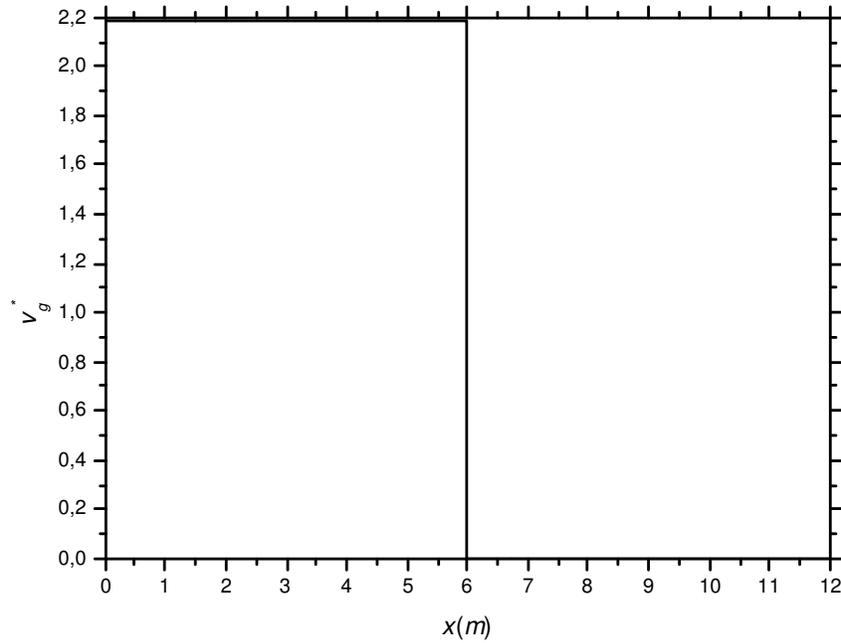


Figura 21. Função adjunta da velocidade do gás para a resposta $v_g(x = L/2)$.

7.1.2.6. Resultados das funções adjuntas para a resposta: \bar{v}_l

As unidades de medidas das variáveis para as respostas relacionadas com a variável v_l são análogas às já vistas para os funcionais-respostas relacionados com a variável v_g .

Nas Figuras 22 a 24, são apresentadas as distribuições espaciais das funções adjuntas para o funcional-resposta contínuo \bar{v}_l . Neste caso, o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por $S^+ = \left[0, 0, \frac{1}{L}, 0 \right]$. A função adjunta v_g^* é nula para todas as respostas relacionadas com a velocidade. Observa-se um comportamento contínuo das funções adjuntas. A análise dos resultados revela que, para esta resposta, o peso dos valores da função adjunta α^* resulta numa maior contribuição em torno ao ponto $x = 2m$ (Figura 22). Os valores das funções adjuntas v_l^* e P^* resultam numa maior contribuição na saída do tubo do que na entrada (Figuras 23 e 24).

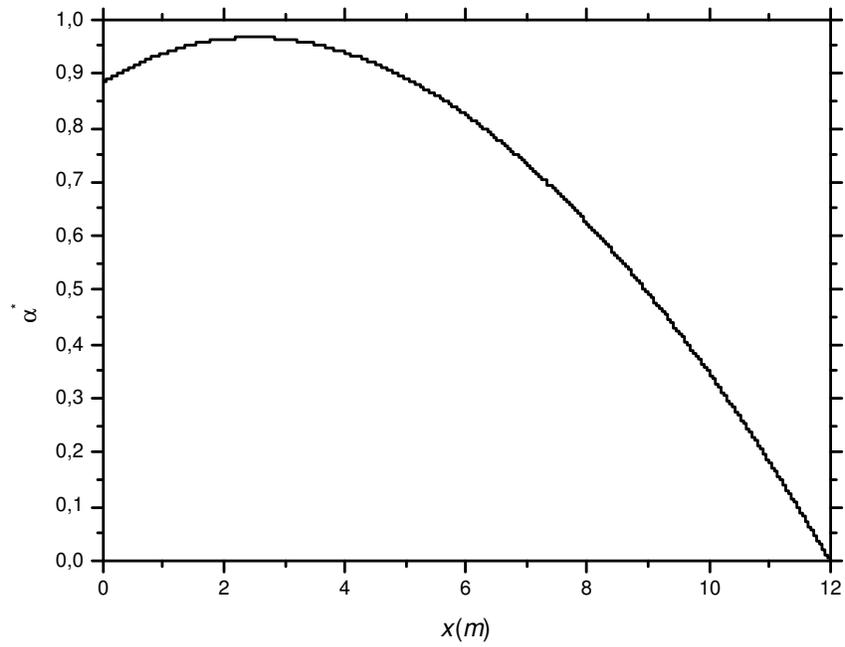


Figura 22. Função adjunta da fração de vazio para a resposta \bar{v}_l .

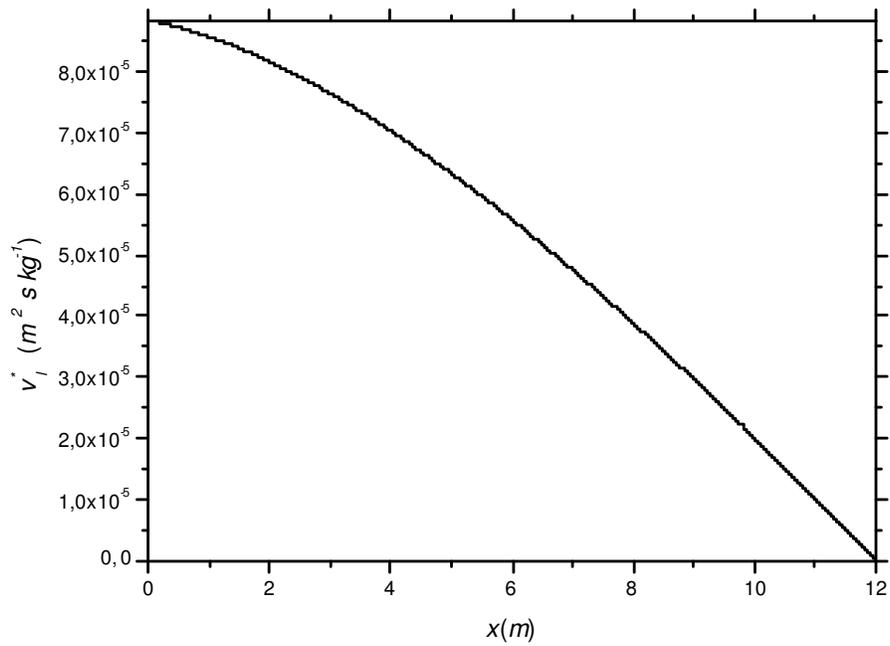


Figura 23. Velocidade do líquido adjunta para a resposta \bar{v}_l .

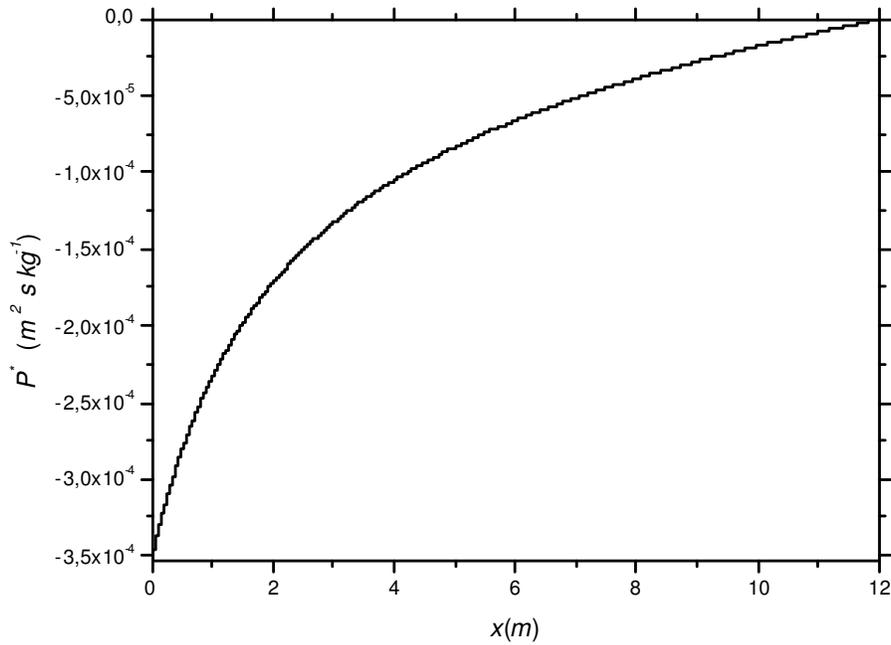


Figura 24. Função adjunta da pressão para a resposta \bar{v}_l .

7.1.2.7. Resultados das funções adjuntas para a resposta: $v_l(x = L/2)$

Nas Figuras 25 a 27 são mostradas as distribuições das funções adjuntas para o funcional-resposta discreto $v_l(x = L/2)$. Neste caso, o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por $\mathcal{S}^+ = \left[0, 0, \delta\left(x - \frac{L}{2}\right), 0 \right]$. Para $x < L/2$ as funções adjuntas α^* , v_l^* e P^* contribuem para esta resposta com valores que diminuem desde a posição da descontinuidade até a entrada do tubo.

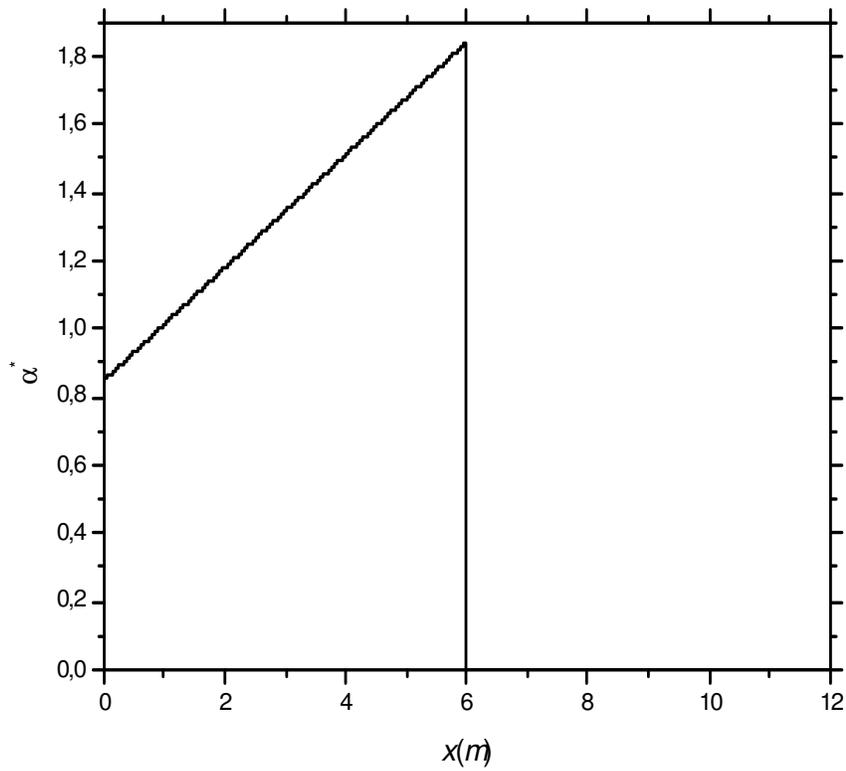


Figura 25. Função adjunta da fração de vazio para a resposta $v_l(x = L/2)$

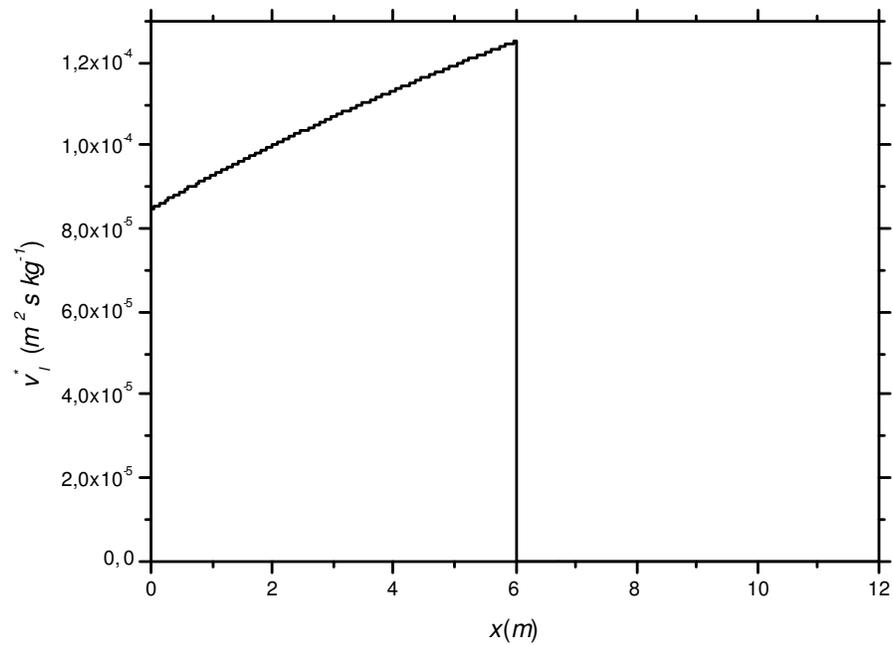


Figura 26. Velocidade do Líquido adjunta para a resposta $v_l(x = L/2)$.

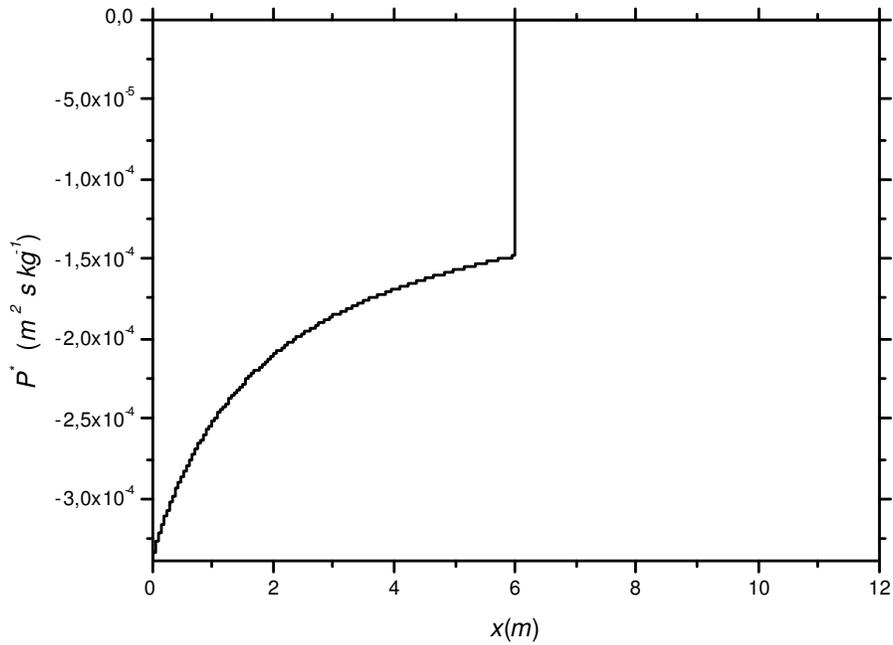


Figura 27. Função adjunta da pressão para a resposta $v_l(x = L/2)$.

7.1.2.8. Resultados das funções adjuntas para a resposta: $v_l(x = L)$

Nas Figuras 28 a 30 são mostradas as distribuições das funções adjuntas para o funcional-resposta discreto $v_l(x = L)$. Neste caso o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por $S^+ = [0, 0, 2\delta(x - L), 0]$.

A posição da descontinuidade, isto é da função delta, é deslocada para a saída; entretanto, são novamente iguais os comportamentos das funções adjuntas quando comparado com os comportamentos das funções adjuntas quando a delta está localizada em $x = L/2$. Os valores da funções adjuntas α^* e v_l^* para $x < L$ assumem valores que decrescem da saída até a entrada do tubo, contribuindo mais na saída do que na entrada para esta resposta (Figuras 28 e 29). A função adjunta P^* também contribui mais na saída do que na entrada; entretanto, o seu decréscimo é mais gradual (Figura 30).

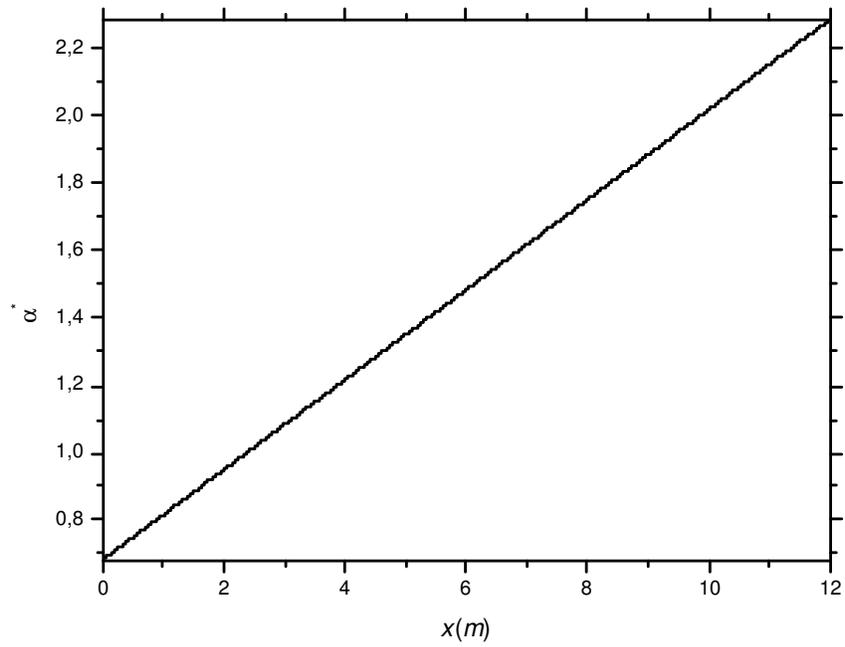


Figura 28. Função adjunta da fração de vazio para a resposta $v_l(x = L)$.

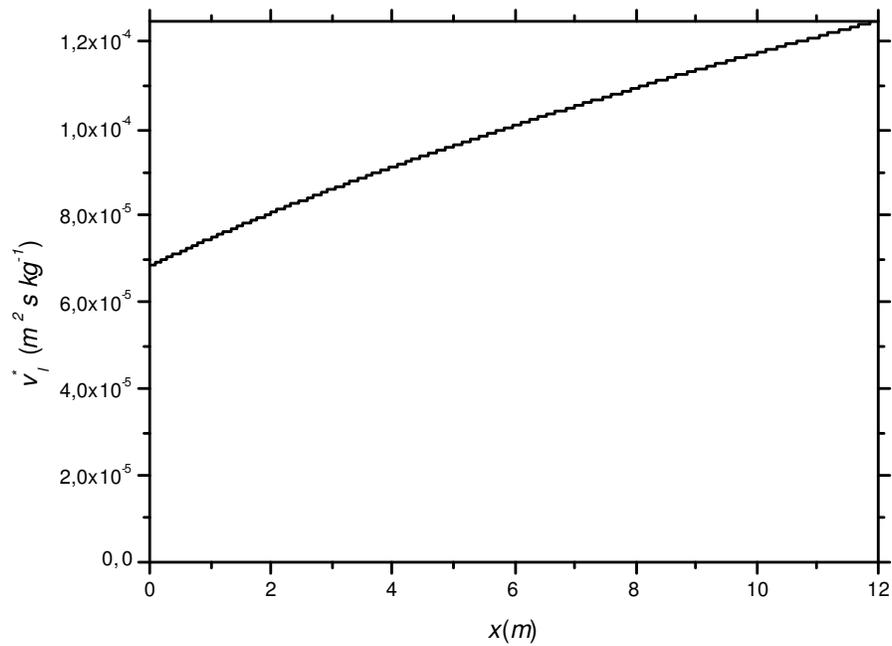


Figura 29. Velocidade do Líquido adjunta para a resposta $v_l(x = L)$.

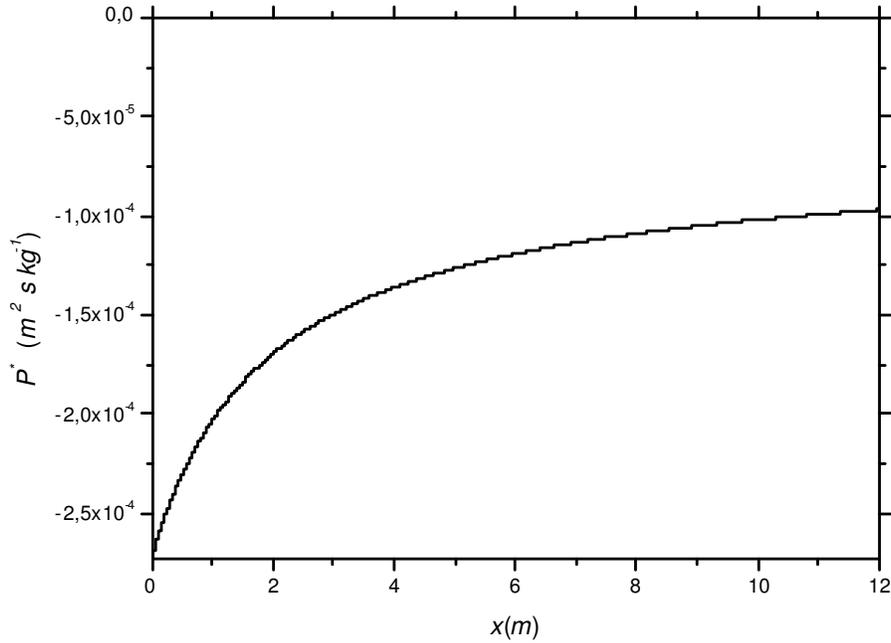


Figura 30. Função adjunta da pressão para a resposta $v_l(x=L)$.

7.1.2.9. Resultados das funções adjuntas para a resposta: \bar{P}

Para as funções adjuntas associadas às respostas relacionadas à variável P no estado estacionário, as funções adjuntas α^* e v_g^* têm unidades iguais a $[Pa\ s\ m^{-1}]$ e as funções adjuntas v_l^* e P^* têm unidades dadas por $[Pa\ m\ s^{-2}\ kg^{-1}]$. No estado transitório as funções adjuntas α^* e v_g^* têm unidades dadas por $[Pa\ m^{-1}]$ e as funções adjuntas v_l^* e P^* têm unidades dadas por $[Pa\ m\ s\ kg^{-1}]$.

Nas Figuras 31 a 33 são mostradas as distribuições das funções adjuntas para o funcional-resposta contínuo \bar{P} . Neste caso o sistema adjunto é resolvido, com o vetor fonte dado por $S^+ = \left[0, 0, 0, \frac{1}{L}\right]$. A função adjunta v_g^* é nula para todas as respostas relacionadas com a Pressão. As funções adjuntas para esta resposta mostram que as funções α^* e v_l^* possuem valores muito pequenos que podem ser considerados zeros do ponto de vista numérico. Observa-se um comportamento contínuo da função adjunta P^* . Ao longo do tubo as funções adjuntas α^* , v_l^* e v_g^* têm contribuições praticamente nula para esta resposta (Figuras 31 e 32). A função adjunta P^* possui maior contribuição na saída do tubo do que na

entrada. Os coeficientes de sensibilidade deverão ser nulos visto que três funções adjuntas possuem valores praticamente nulos.

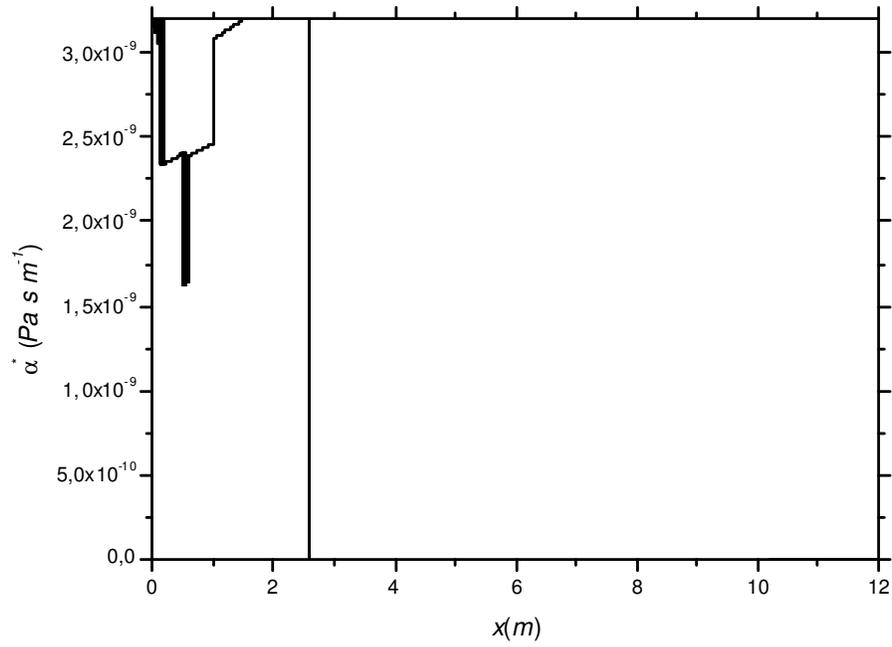


Figura 31. Função adjunta da fração de vazio para a resposta \bar{P} .

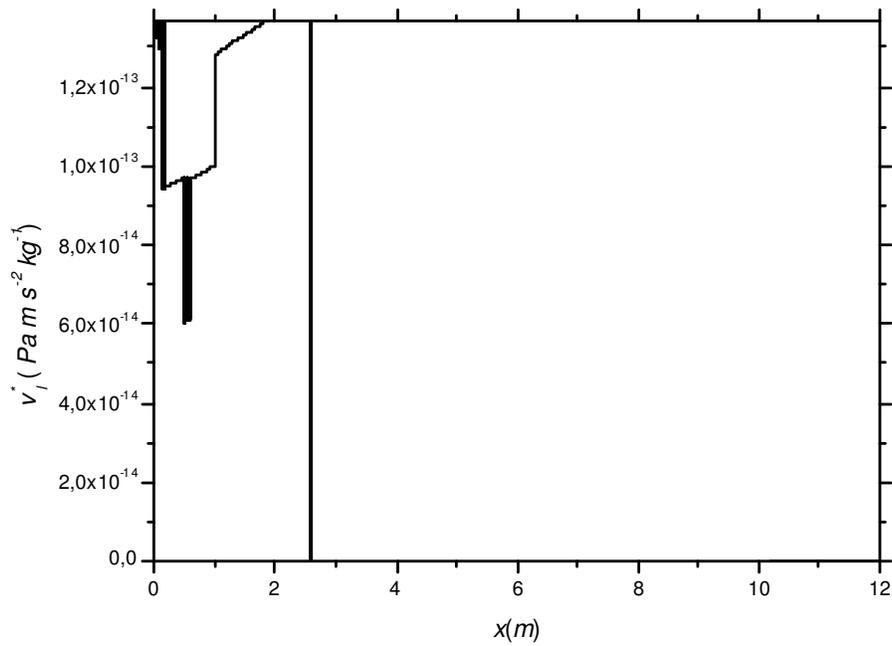


Figura 32. Velocidade do Líquido adjunta para a resposta \bar{P} .

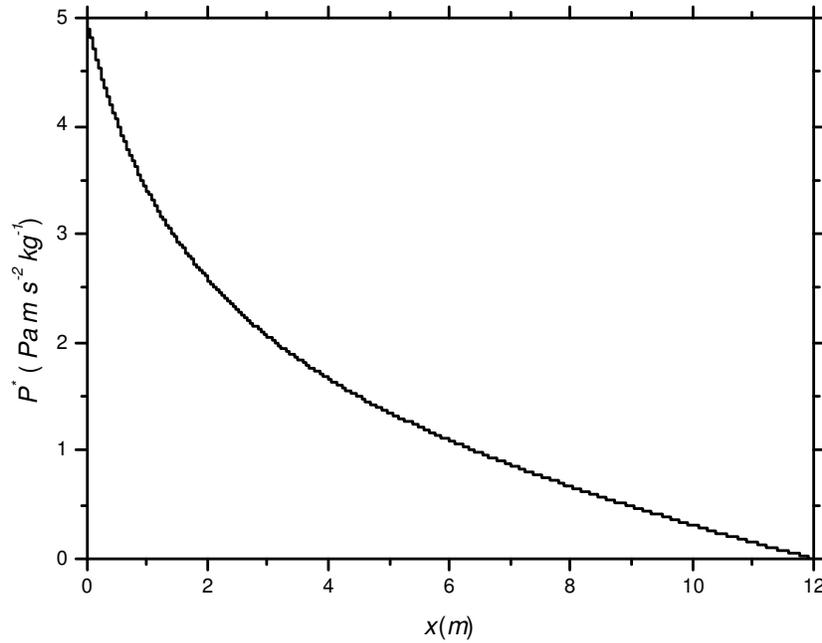


Figura 33. Função adjunta da pressão para a resposta \bar{P} .

7.1.2.10. Resultados das funções adjuntas para a resposta: $P(x = L/2)$

Nas Figuras 34 a 36 são mostradas as distribuições das funções adjuntas para o funcional-resposta discreto $P(x = L/2)$. Neste caso o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por $S^+ = \left[0, 0, 0, \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) \right]$. Ao longo do tubo, as funções adjuntas α^* , v_l^* e v_g^* possuem valores nulos ou muito próximos de zero, conforme será visto na Seção 7.1.3. A função adjunta P^* apresenta uma maior contribuição na entrada do que na saída.

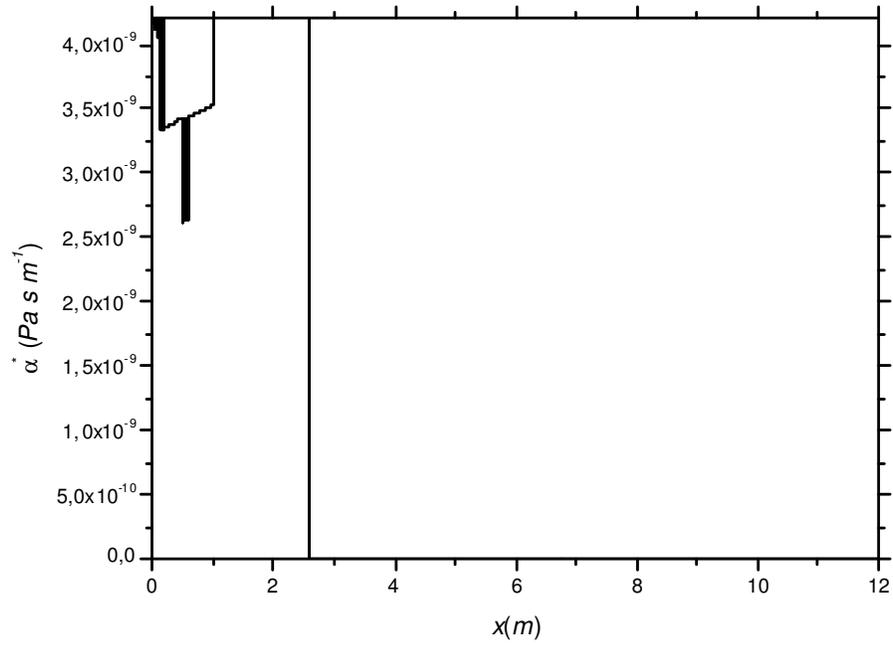


Figura 34. Função adjunta da fração de vazio para a resposta $P(x = L/2)$.

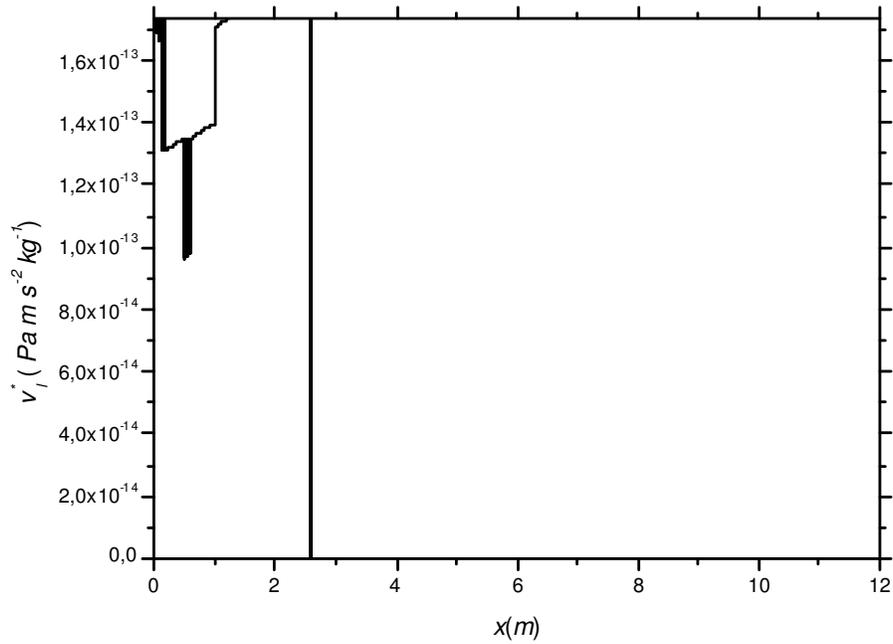


Figura 35. Velocidade do Líquido adjunta para a resposta $P(x = L/2)$.

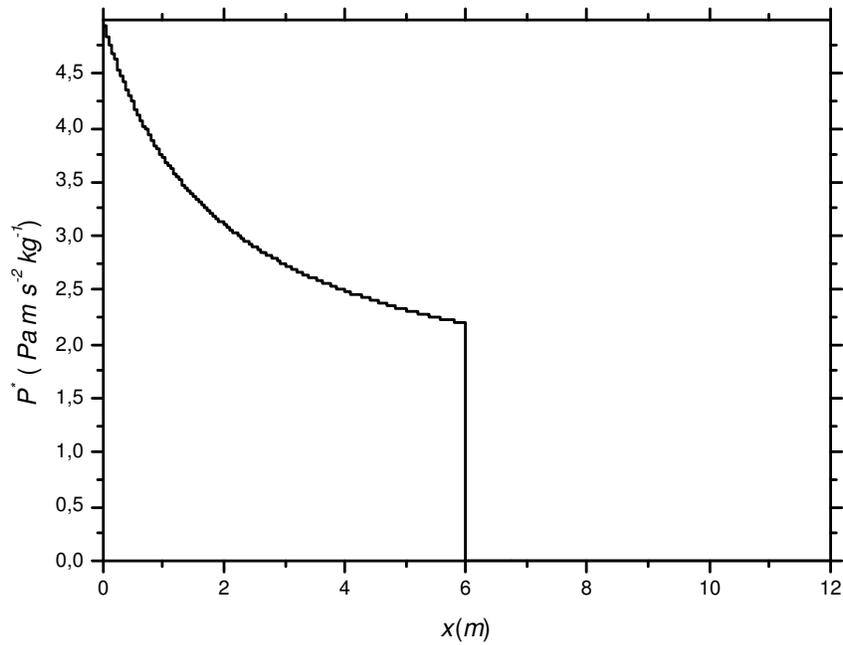


Figura 36. Função adjunta da pressão para a resposta $P(x = L/2)$.

7.1.2.11. Resultados das funções adjuntas para a resposta: $P(x = L)$

Nas Figuras 37 a 39 são mostradas as distribuições das funções adjuntas para o funcional-resposta discreto $P(x = L)$. Neste caso o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por $S^+ = [0, 0, 0, 2\delta(x - L)]$. O comportamento das funções adjuntas para esta resposta é semelhante ao da seção anterior.

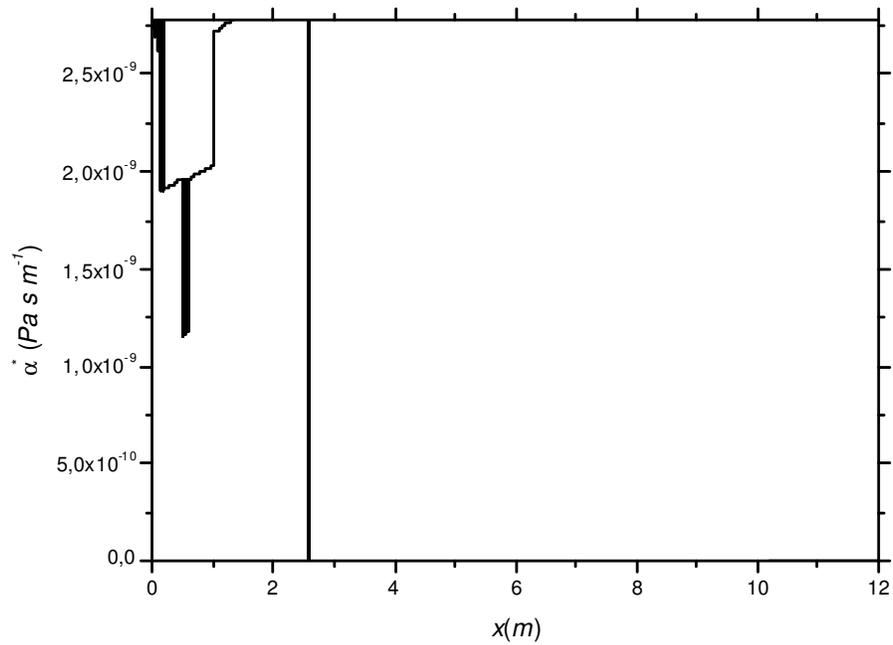


Figura 37. Função adjunta da fração de vazio para a resposta $P(x = L)$.

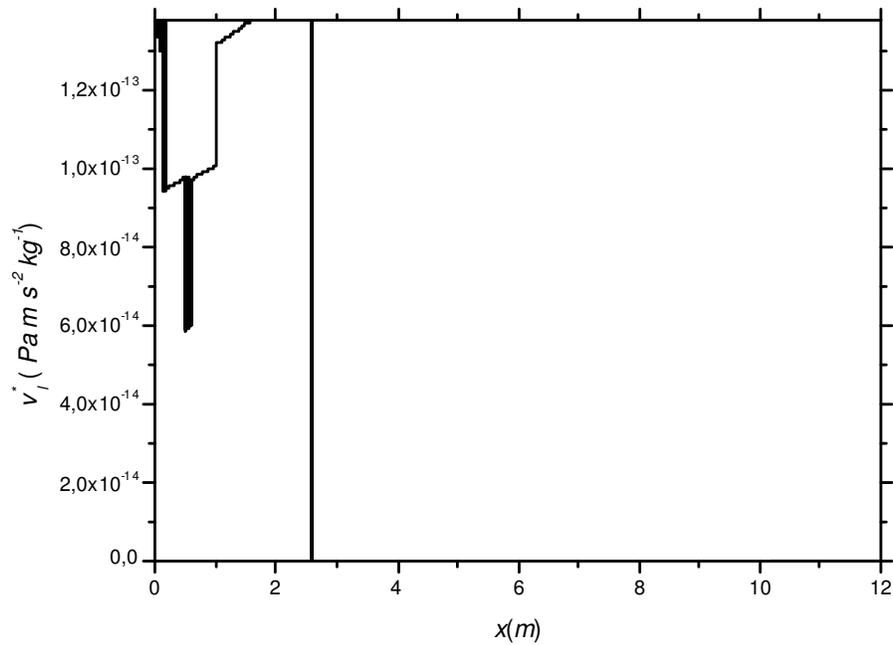


Figura 38. Velocidade do Líquido adjunta para a resposta $P(x = L)$.

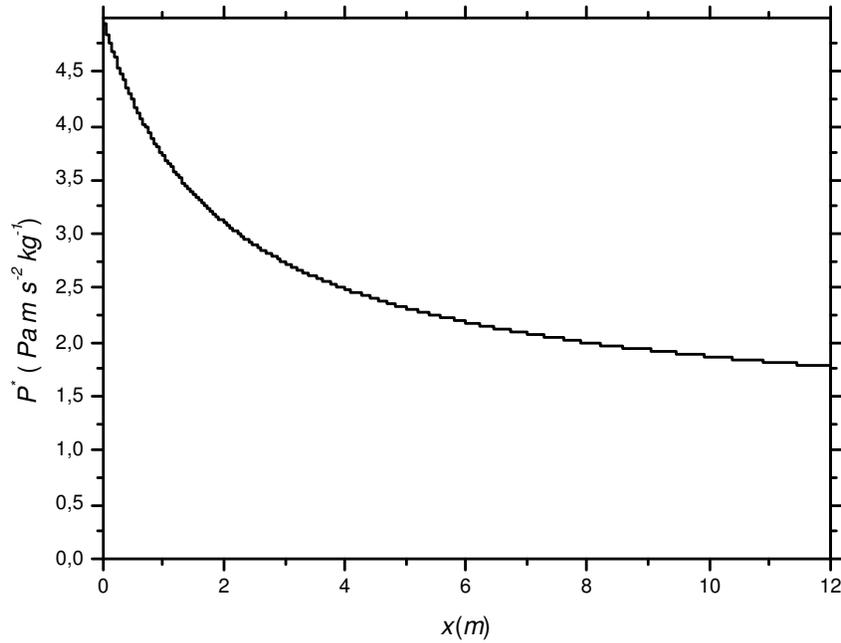


Figura 39. Função adjunta da pressão para a resposta $P(x=L)$.

7.1.3. Análises de sensibilidade.

Nesta seção serão apresentados os resultados dos coeficientes de sensibilidade relativos àqueles parâmetros que influem no sistema.

O coeficiente de sensibilidade relativo é dado pela seguinte expressão:

$$S_{R, p_i} = \frac{\partial R}{\partial p_i} \frac{p_i}{R} \quad (7.1)$$

onde R e p_i representam a resposta não perturbada e o valor nominal do parâmetro, respectivamente. onde R e p_i representam a resposta não perturbada e o valor nominal do parâmetro respectivamente. Desta maneira, o coeficiente de sensibilidade relativo permite comparar a influencia de perturbações percentuais em diferentes parâmetros na perturbação percentual da resposta. O coeficiente de sensibilidade relativo foi calculado para o vetor de parâmetros dado na Eq. (6.55). Para o cálculo pelo método direto, os parâmetros foram perturbados em 1% e 10% do seu valor nominal. Os resultados apresentados serão para perturbações de 1%.

Excepcionalmente, para este caso-problema, com as simplificações realizadas no modelo, foi possível calcular o coeficiente de sensibilidade relativo de forma analítica, o qual permite comparar os coeficientes de sensibilidade exatos com os resultados obtidos pelos métodos perturbativo e direto. No Apêndice 3, são deduzidas as expressões dos coeficientes de sensibilidade analíticos.

O cálculo do erro é realizado através da seguinte expressão:

$$Erro = \left| \frac{R_{Direto} - R_{Perturbativo}}{R_{Direto}} \right| \quad (7.2)$$

sendo R_{Direto} a resposta obtida pela via direta, $R_{Perturbativo}$ a resposta obtida pelo formalismo diferencial.

As Tabelas 1 a 3 mostram os coeficientes de sensibilidade relativos para os funcionais-respostas $\bar{\alpha}$, $\alpha(x = L/2)$ e $\alpha(x = L)$ obtidos pelos três métodos. Das Tabelas, observa-se que os parâmetros α_0 , v_{l0} e g são os mais significativos nas variações das respostas. Parâmetros poucos significativos foram ρ_g e ρ_l . As respostas analisadas são insensíveis a v_{g0} .

Tabela 1. Coeficientes de sensibilidade relativo para o funcional - resposta $\bar{\alpha}$.

p_i	Direto	Perturbativo	Analítico	Erro
ρ_g	$-2,97 \cdot 10^{-04}$	$-2,95 \cdot 10^{-04}$	$-2,95 \cdot 10^{-04}$	$8,93 \cdot 10^{-03}$
ρ_l	$2,97 \cdot 10^{-04}$	$2,95 \cdot 10^{-04}$	$2,94 \cdot 10^{-04}$	$5,85 \cdot 10^{-03}$
α_0	$3,24 \cdot 10^{-01}$	$3,24 \cdot 10^{-01}$	$3,25 \cdot 10^{-01}$	$1,91 \cdot 10^{-03}$
v_{g0}	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
v_{l0}	$-5,94 \cdot 10^{-01}$	$-5,89 \cdot 10^{-01}$	$-5,90 \cdot 10^{-01}$	$8,96 \cdot 10^{-03}$
g	$-2,97 \cdot 10^{-02}$	$-2,94 \cdot 10^{-02}$	$-2,95 \cdot 10^{-02}$	$8,95 \cdot 10^{-03}$

Tabela 2. Coeficientes de sensibilidade relativo para o funcional - resposta $\alpha(x = L/2)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Analítico	Erro
ρ_g	$-3,22 \cdot 10^{-04}$	$-3,18 \cdot 10^{-04}$	$-3,21 \cdot 10^{-04}$	$1,17 \cdot 10^{-02}$
ρ_l	$3,22 \cdot 10^{-04}$	$3,19 \cdot 10^{-04}$	$3,21 \cdot 10^{-04}$	$8,55 \cdot 10^{-03}$
α_0	$2,92 \cdot 10^{-01}$	$2,94 \cdot 10^{-01}$	$2,96 \cdot 10^{-01}$	$6,73 \cdot 10^{-03}$
v_{g0}	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
v_{l0}	$-6,43 \cdot 10^{-01}$	$-6,35 \cdot 10^{-01}$	$-6,40 \cdot 10^{-01}$	$1,17 \cdot 10^{-02}$
g	$-3,21 \cdot 10^{-02}$	$-3,18 \cdot 10^{-02}$	$-3,20 \cdot 10^{-02}$	$1,17 \cdot 10^{-02}$

Tabela 3. Coeficientes de sensibilidade relativo para o funcional - resposta $\alpha(x = L)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Analítico	Erro
ρ_g	$-2,74 \cdot 10^{-04}$	$-2,72 \cdot 10^{-04}$	$-2,73 \cdot 10^{-04}$	$6,33 \cdot 10^{-03}$
ρ_l	$2,74 \cdot 10^{-04}$	$2,73 \cdot 10^{-04}$	$2,73 \cdot 10^{-04}$	$3,91 \cdot 10^{-03}$
α_0	$1,93 \cdot 10^{-01}$	$1,94 \cdot 10^{-01}$	$1,94 \cdot 10^{-01}$	$2,53 \cdot 10^{-03}$
v_{g0}	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
v_{l0}	$-5,47 \cdot 10^{-01}$	$-5,43 \cdot 10^{-01}$	$-5,45 \cdot 10^{-01}$	$6,31 \cdot 10^{-03}$
g	$-2,73 \cdot 10^{-02}$	$-2,72 \cdot 10^{-02}$	$-2,72 \cdot 10^{-02}$	$6,34 \cdot 10^{-03}$

As Tabelas 4 a 6 apresentam, respectivamente, os resultados dos coeficientes de sensibilidade relativos para os funcionais-respostas \bar{v}_l , $v_l(x = L/2)$ e $v_l(x = L)$. Observa-se que para as três respostas, v_{l0} e g são os parâmetros mais significativos para estas respostas. Parâmetros considerados pouco significativos são ρ_g e ρ_l . Por outro lado, estas respostas são insensíveis a α_0 e v_{g0} .

Tabela 4. Coeficientes de sensibilidade relativo para o funcional - resposta \bar{v}_l .

p_i	Direto	Perturbativo	Analítico	Erro
ρ_g	$-2,58 \cdot 10^{-04}$	$-2,57 \cdot 10^{-04}$	$-2,58 \cdot 10^{-04}$	$4,32 \cdot 10^{-03}$
ρ_l	$2,58 \cdot 10^{-04}$	$2,58 \cdot 10^{-04}$	$2,58 \cdot 10^{-04}$	$1,36 \cdot 10^{-03}$
α_0	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$5,94 \cdot 10^{-07}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
v_{g0}	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
v_{l0}	$4,84 \cdot 10^{-01}$	$4,85 \cdot 10^{-01}$	$4,85 \cdot 10^{-01}$	$2,98 \cdot 10^{-03}$
g	$-2,58 \cdot 10^{-02}$	$-2,57 \cdot 10^{-02}$	$-2,57 \cdot 10^{-02}$	$4,32 \cdot 10^{-03}$

Tabela 5. Coeficientes de sensibilidade relativo para o funcional - resposta $v_l(x = L/2)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Analítico	Erro
ρ_g	$-2,73 \cdot 10^{-04}$	$-2,69 \cdot 10^{-04}$	$-2,71 \cdot 10^{-04}$	$1,66 \cdot 10^{-02}$
ρ_l	$2,73 \cdot 10^{-04}$	$2,70 \cdot 10^{-04}$	$2,70 \cdot 10^{-04}$	$1,34 \cdot 10^{-02}$
α_0	$\approx 0,00 \cdot 10^{+00}$	$1,68 \cdot 10^{-6}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
v_{g0}	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
v_{l0}	$4,54 \cdot 10^{-01}$	$4,57 \cdot 10^{-01}$	$4,60 \cdot 10^{-01}$	$8,11 \cdot 10^{-03}$
g	$-2,73 \cdot 10^{-02}$	$-2,69 \cdot 10^{-02}$	$-2,70 \cdot 10^{-02}$	$1,65 \cdot 10^{-02}$

Tabela 6. Coeficientes de sensibilidade relativo para o funcional - resposta $v_l(x = L)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Analítico	Erro
ρ_g	$-3,52 \cdot 10^{-04}$	$-3,51 \cdot 10^{-04}$	$-3,51 \cdot 10^{-04}$	$3,13 \cdot 10^{-03}$
ρ_l	$3,52 \cdot 10^{-04}$	$3,52 \cdot 10^{-04}$	$3,51 \cdot 10^{-04}$	$6,99 \cdot 10^{-04}$
α_0	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$1,09 \cdot 10^{-06}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
v_{g0}	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
v_{l0}	$2,97 \cdot 10^{-01}$	$2,98 \cdot 10^{-01}$	$2,99 \cdot 10^{-01}$	$4,38 \cdot 10^{-03}$
g	$-3,52 \cdot 10^{-02}$	$-3,50 \cdot 10^{-02}$	$-3,51 \cdot 10^{-02}$	$3,11 \cdot 10^{-03}$

As Tabelas 7 a 9 apresentam, respectivamente, os resultados dos coeficientes de sensibilidade relativos para os funcionais-respostas \bar{P} , $P(x = L/2)$ e $P(x = L)$. Das Tabelas, observa-se que para as três respostas apenas o parâmetro ρ_g influencia na resposta; os demais parâmetros possuem influência desprezíveis nas respostas analisadas.

Tabela 7. Coeficientes de sensibilidade relativo para o funcional - resposta \bar{P} .

p_i	Direto	Perturbativo	Analítico	Erro
ρ_g	$5,80 \cdot 10^{-04}$	$5,80 \cdot 10^{-04}$	$5,80 \cdot 10^{-04}$	$0,00 \cdot 10^{-00}$
ρ_l	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$\approx 0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
α_0	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$\approx 0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
v_{g0}	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
v_{l0}	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$\approx 0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
g	$-5,80 \cdot 10^{-05}$	$-5,80 \cdot 10^{-05}$	$-5,80 \cdot 10^{-05}$	$0,00 \cdot 10^{-00}$

Tabela 8. Coeficientes de sensibilidade relativo para o funcional - resposta $P(x = L/2)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Analítico	Erro
ρ_g	$5,90 \cdot 10^{-04}$	$5,80 \cdot 10^{-04}$	$5,80 \cdot 10^{-04}$	$1,64 \cdot 10^{-02}$
ρ_l	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$\approx 0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
α_0	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$\approx 0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
P_0	$9,99 \cdot 10^{-01}$	$9,99 \cdot 10^{-01}$	$1,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{-00}$
v_{g0}	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
v_{l0}	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$\approx 0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
g	$-5,90 \cdot 10^{-05}$	$-5,80 \cdot 10^{-05}$	$-5,80 \cdot 10^{-05}$	$1,64 \cdot 10^{-02}$

Tabela 9. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $P(x = L)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Analítico	Erro
ρ_g	$1,16 \cdot 10^{-03}$	$1,16 \cdot 10^{-03}$	$1,16 \cdot 10^{-03}$	$2,97 \cdot 10^{-05}$
ρ_l	$\approx 0,00 \cdot 10^{+00}$	$\approx 0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
α_0	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$3,94 \cdot 10^{-10}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
v_{g0}	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
v_{l0}	$0,00 \cdot 10^{+00}$	$\approx 0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$	-
g	$-1,16 \cdot 10^{-04}$	$-1,16 \cdot 10^{-04}$	$-1,16 \cdot 10^{-04}$	$2,95 \cdot 10^{-05}$

Foram necessárias doze execuções para a construção de cada Tabela referente ao cálculo dos coeficientes de sensibilidade pelo método direto. A comparação entre os coeficientes de sensibilidade mostra que o método perturbativo reproduz os resultados analíticos e diretos com excelente aproximação, o que implica num método mais rápido e pratico do ponto de vista computacional. Para realizar a mesma função, isto é, para o cálculo dos coeficientes de sensibilidade usando o método perturbativo apenas foi necessário realizar uma única execução de cada um dos programas DIRETO, ADJUNTO e SENSIBILIDADES.

7.1.4. Resultados do estado transitório direto

Para resolver as equações transitórias, adotou-se um passo temporal de $\Delta t = 0,001s$, pois este satisfaz a condição de Courant e proporciona resultados numéricos aceitáveis. O transitório das variáveis diretas parte das condições iniciais do problema e evolui até atingir o estado estacionário.

Nas Figuras 40 a 43 são mostrados os resultados do vetor de estado para o instante de tempo $t = 0,5 s$. Uma comparação entre os resultados obtidos na simulação deste trabalho, a simulação obtida em RANSOM, (1991) e a solução analítica para a fração de vazio e a velocidade do líquido é apresentada nas Figuras 40 e 41.

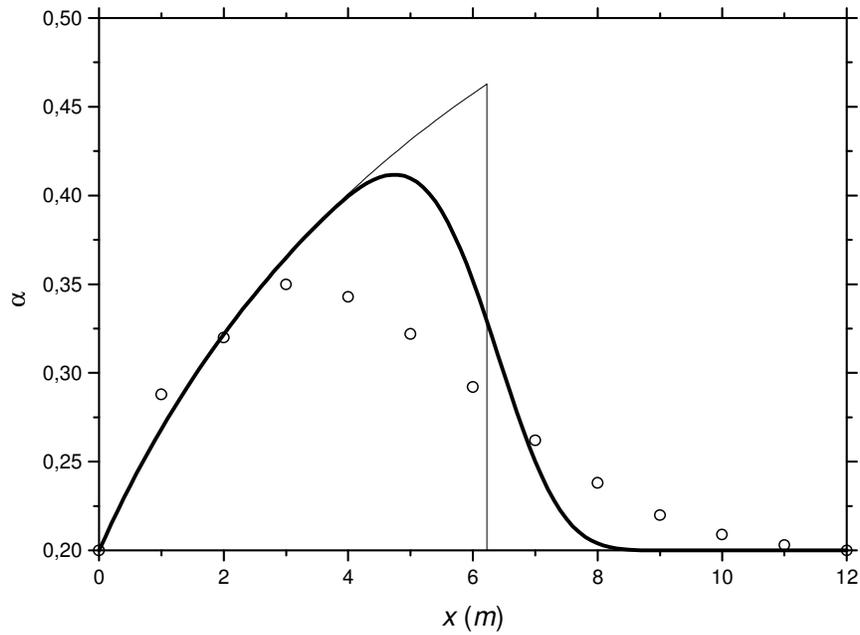


Figura 40. Fração de vazio. $t = 0,5 s$.

[Simulação deste trabalho —, Simulação obtida por RANSOM, (1991) oooooo e Solução analítica - -.]

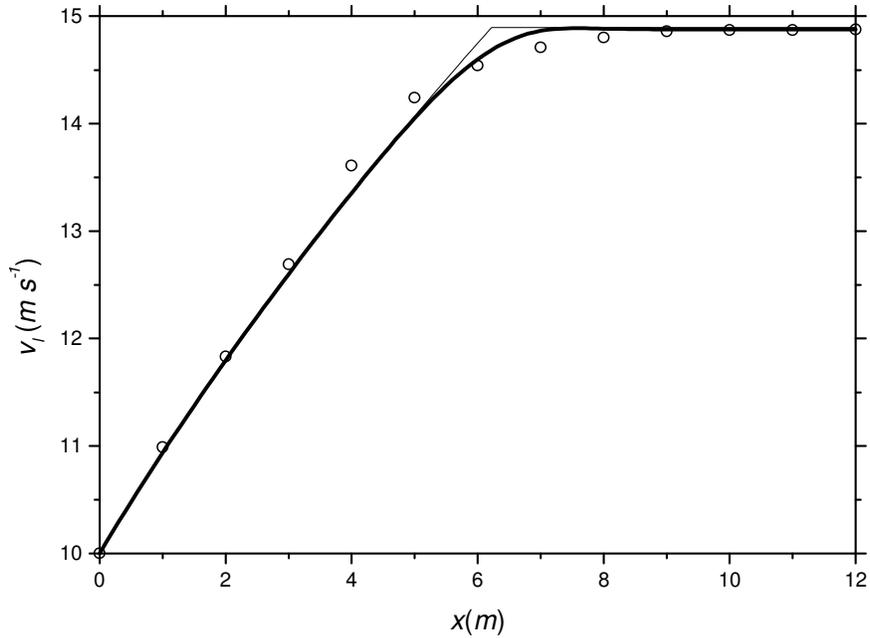


Figura 41. Velocidade do líquido, $t = 0,5s$.

[Simulação deste trabalho —, Simulação obtida por RANSOM, (1991) ○○○○○○
e Solução analítica - -.]

Uma comparação entre os resultados obtidos na simulação deste trabalho e a solução analítica é apresentada nas Figuras 42 e 43 para as variáveis: velocidade do gás e pressão, respectivamente. Observa-se que os resultados numéricos não conseguem representar com precisão a descontinuidade, exibindo difusão numérica. Porém, os resultados obtidos neste trabalho são menos difusivos que aqueles obtidos em RANSOM, (1991) quando comparados com a solução analítica. A difusão numérica suaviza a curva de descontinuidade, alarga a faixa espacial ao redor de x_d , ver Figura 42.

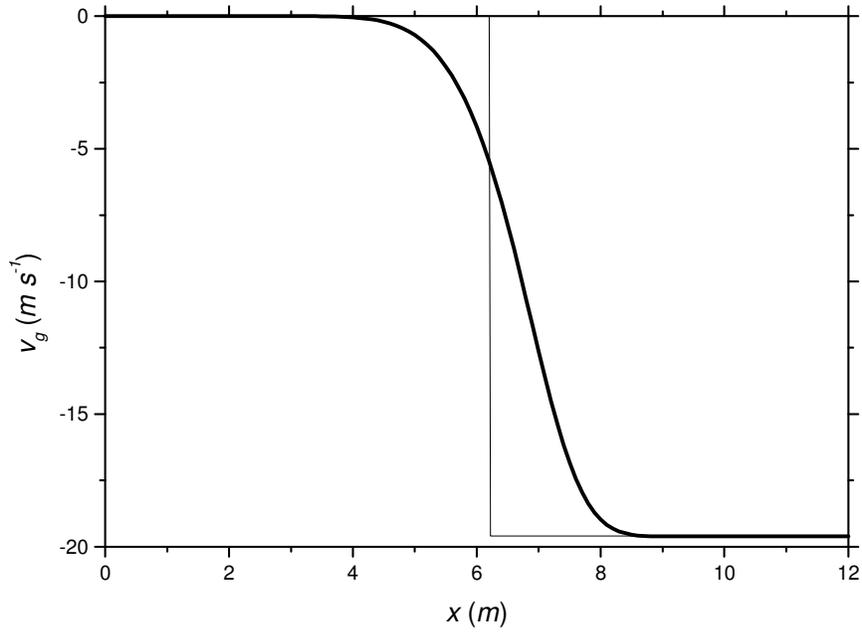


Figura 42. Velocidade do gás, $t = 0,5 \text{ s}$.

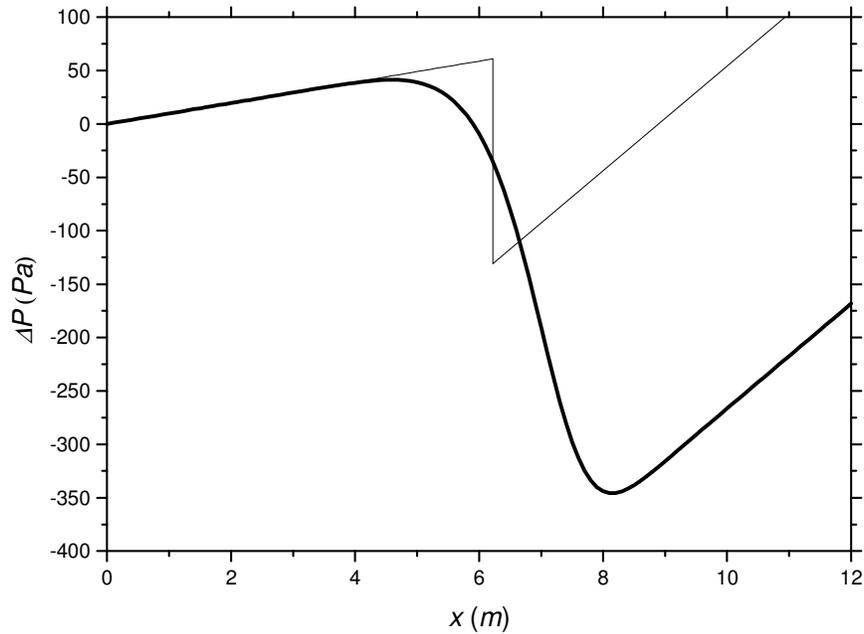


Figura 43. Queda de Pressão, $t = 0,5 \text{ s}$.

A discretização considerada neste problema não permitiu avaliar com precisão a variação de pressão, quando comparada com a solução analítica, após $x = 6\text{m}$.

As distribuições espacial-temporal das componentes das variáveis diretas são apresentadas nas Figuras 44 a 46.

No início do transitório, a fração de vazio aumenta a partir da entrada do canal (Figura 44), atinge um máximo e decresce retornando ao valor constante α_{in} . À medida que o transitório evolui, o máximo de α se desloca na direção da saída do tubo. Finalmente, após $1s$ o valor de α cresce a partir da condição de contorno α_0 , até o estado estacionário.

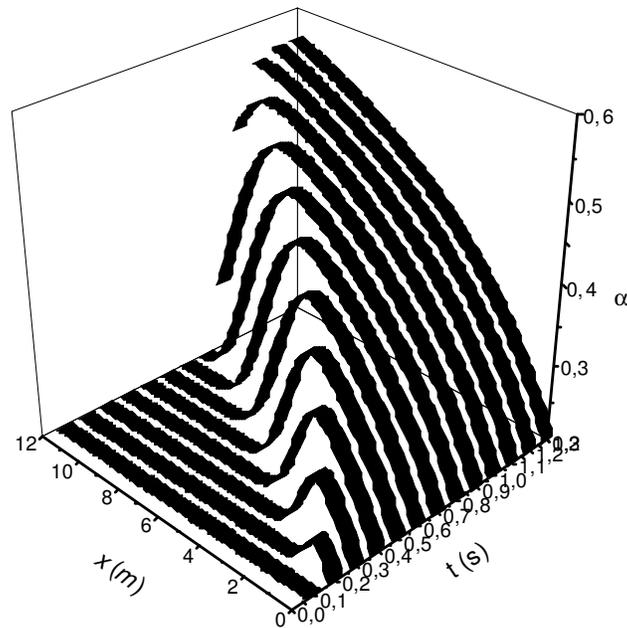


Figura 44. Fração de vazio, 3D.

O gás começa o transitório imóvel; nos primeiros instantes acelera-se rapidamente na direção da saída do tubo (Figura 45) e logo atinge um valor constante até a saída. À medida que o transitório evolui, o líquido (Figura 46) vai se acelerando em queda livre em direção a saída enquanto que o gás tende a permanecer imóvel ao longo do tubo. Em todas as variáveis, o estado estacionário foi atingido com valores similares aos apresentados na Seção 7.1.1 (Figuras 7 a 9). Isto é, na saída do tubo, $\alpha = 0,56$, $v_g = 0ms^{-1}$ e $v_l = 18ms^{-1}$

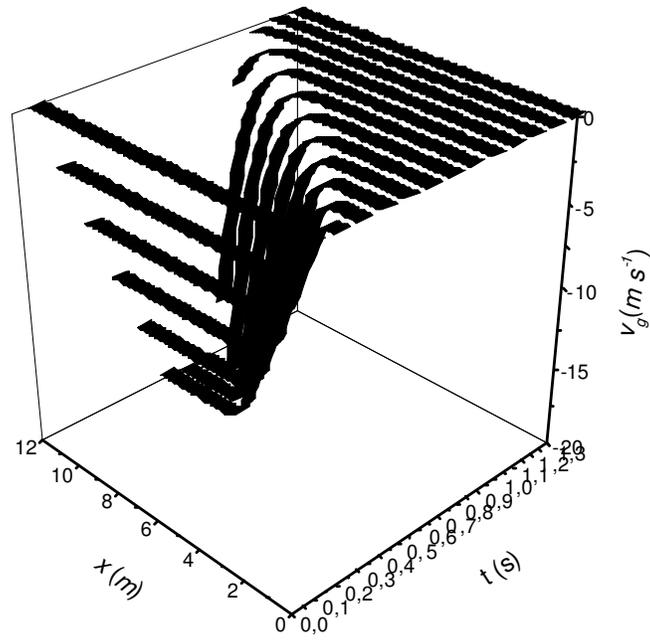


Figura 45. Velocidade do gás, 3D.

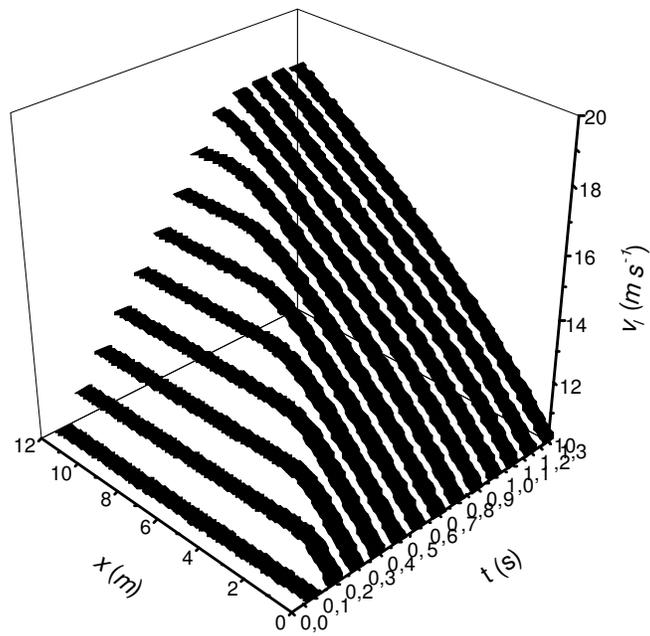


Figura 46. Velocidade do líquido, 3D.

7.1.5. Análises de sensibilidade

No estado transitório, novos parâmetros são introduzidos, sendo eles os parâmetros provenientes das condições iniciais do problema.

A Tabela 10 apresenta os resultados dos coeficientes de sensibilidade relativos do funcional-resposta $\bar{\alpha}(T)$. Da Tabela, observa-se que $\bar{\alpha}(T)$ é muito sensível às mudanças dos parâmetros α_0 , α_{in} e v_{lin} .

Tabela 10. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\bar{\alpha}(T)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$-2,43 \cdot 10^{-04}$	$-2,52 \cdot 10^{-04}$	$3,48 \cdot 10^{-02}$
ρ_l	$2,43 \cdot 10^{-04}$	$6,80 \cdot 10^{-04}$	$1,80 \cdot 10^{-00}$
α_0	$2,89 \cdot 10^{-01}$	$2,88 \cdot 10^{-01}$	$3,15 \cdot 10^{-03}$
v_{g0}	$0,00 \cdot 10^{-00}$	$0,00 \cdot 10^{-00}$	-
v_{l0}	$-8,21 \cdot 10^{-01}$	$-8,27 \cdot 10^{-01}$	$8,00 \cdot 10^{-03}$
α_{in}	$2,19 \cdot 10^{-01}$	$2,16 \cdot 10^{-01}$	$1,10 \cdot 10^{-02}$
v_{gin}	$0,00 \cdot 10^{-00}$	$0,00 \cdot 10^{-00}$	-
v_{lin}	$5,62 \cdot 10^{-01}$	$5,58 \cdot 10^{-01}$	$7,63 \cdot 10^{-03}$
g	$-2,87 \cdot 10^{-02}$	$-2,89 \cdot 10^{-02}$	$6,88 \cdot 10^{-03}$

A Tabela 11 apresenta os resultados dos coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional-resposta $\bar{v}_g(T)$. Da Tabela, observa-se que esta resposta é muito sensível à mudança dos parâmetros α_0 e α_{in} .

A Tabela 12 apresenta os resultados dos coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional-resposta $\bar{v}_l(T)$. Da Tabela, observa-se que esta resposta é muito sensível à mudança do parâmetro v_{lin} quando comparado as sensibilidades com os outros parâmetros.

A Tabela 13 apresenta os resultados dos coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional-resposta $\bar{P}(T)$. Os parâmetros α_0 e ρ_g alteraram mais esta resposta do que os demais parâmetros da Tabela.

Tabela 11. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\bar{v}_g(T)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$6,77 \cdot 10^{-03}$	$6,28 \cdot 10^{-03}$	$7,15 \cdot 10^{-02}$
ρ_l	$-6,77 \cdot 10^{-03}$	$3,53 \cdot 10^{-02}$	$6,21 \cdot 10^{-00}$
α_0	$8,70 \cdot 10^{-01}$	$8,67 \cdot 10^{-01}$	$3,15 \cdot 10^{-03}$
v_{g0}	$0,00 \cdot 10^{-00}$	$0,00 \cdot 10^{-00}$	-
v_{l0}	$-1,19 \cdot 10^{-00}$	$-1,27 \cdot 10^{-03}$	$6,73 \cdot 10^{-02}$
α_{in}	$-2,05 \cdot 10^{+00}$	$-2,03 \cdot 10^{+00}$	$1,49 \cdot 10^{-02}$
v_{gin}	$0,00 \cdot 10^{-00}$	$0,00 \cdot 10^{-00}$	-
v_{lin}	$2,89 \cdot 10^{-03}$	$1,56 \cdot 10^{-02}$	$4,41 \cdot 10^{-00}$
g	$-5,92 \cdot 10^{-02}$	$-5,80 \cdot 10^{-02}$	$2,02 \cdot 10^{-02}$

Tabela 12. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\bar{v}_l(T)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$-1,35 \cdot 10^{-04}$	$-1,42 \cdot 10^{-04}$	$5,32 \cdot 10^{-02}$
ρ_l	$1,35 \cdot 10^{-04}$	$-1,08 \cdot 10^{-04}$	$1,80 \cdot 10^{-00}$
α_0	$1,19 \cdot 10^{-04}$	$2,64 \cdot 10^{-05}$	$7,79 \cdot 10^{-01}$
v_{g0}	$0,00 \cdot 10^{-00}$	$0,00 \cdot 10^{-00}$	-
v_{l0}	$3,53 \cdot 10^{-01}$	$3,52 \cdot 10^{-01}$	$8,08 \cdot 10^{-04}$
α_{in}	$-3,88 \cdot 10^{-04}$	$-6,20 \cdot 10^{-04}$	$6,00 \cdot 10^{-01}$
v_{gin}	$0,00 \cdot 10^{-00}$	$0,00 \cdot 10^{-00}$	-
v_{lin}	$2,68 \cdot 10^{-01}$	$2,64 \cdot 10^{-01}$	$1,30 \cdot 10^{-02}$
g	$-2,29 \cdot 10^{-02}$	$-2,30 \cdot 10^{-02}$	$3,26 \cdot 10^{-03}$

Tabela 13. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\bar{P}(T)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$3,01 \cdot 10^{-04}$	$3,18 \cdot 10^{-04}$	$5,77 \cdot 10^{-02}$
ρ_l	$7,54 \cdot 10^{-06}$	$-3,61 \cdot 10^{-05}$	$5,79 \cdot 10^{-00}$
α_0	$-3,42 \cdot 10^{-04}$	$-3,14 \cdot 10^{-04}$	$8,32 \cdot 10^{-02}$
v_{g0}	$0,00 \cdot 10^{-00}$	$0,00 \cdot 10^{-00}$	-
v_{l0}	$4,86 \cdot 10^{-04}$	$4,45 \cdot 10^{-04}$	$8,55 \cdot 10^{-02}$
α_{in}	$1,01 \cdot 10^{-03}$	$9,70 \cdot 10^{-04}$	$4,80 \cdot 10^{-02}$
v_{gin}	$0,00 \cdot 10^{-00}$	$0,00 \cdot 10^{-00}$	-
v_{lin}	$-2,24 \cdot 10^{-06}$	$7,31 \cdot 10^{-05}$	$3,36 \cdot 10^{01}$
g	$-2,03 \cdot 10^{-05}$	$-2,43 \cdot 10^{-05}$	$1,98 \cdot 10^{-01}$

Foram necessárias realizar dezoito execuções para a construção de cada Tabela para o cálculo dos coeficientes de sensibilidade pelo método direto. A comparação entre os coeficientes de sensibilidade relativos calculados pelos métodos: direto e perturbativo, mostra bom acordo. Algumas discrepâncias ocorridas nestes resultados, como por exemplo no caso do parâmetro ρ_l , podem requerer cálculos de sensibilidade de ordens superiores. No entanto, se calcularmos os valores dos funcionais perturbados com relação a ρ_l , para ambos os métodos, utilizando a Eq. (7.1), encontraremos:

$$\bar{\alpha}_{p,DIRETO} = \bar{\alpha}_{np} \left(1 + S_{R,p} \frac{\Delta \rho_l}{\rho_l} \right) = 0,330022(1 + 2,43 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}) = 0,330022802$$

$$\bar{\alpha}_{p,PERTURBATIVO} = \bar{\alpha}_{np} \left(1 + S_{R,p} \frac{\Delta \rho_l}{\rho_l} \right) = 0,330022(1 + 6,84 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}) = 0,330024257$$

O mesmo argumento explica as discrepâncias observadas nos cálculos relativos a outros funcionais com relação a este mesmo parâmetro.

7.2. Escoamento em bolhas.

Neste problema adicionam-se os seguintes parâmetros: C_{vm} , C_p , C_r e C_d e R_b . Por simplicidade, todos estes coeficientes são considerados constantes. Para a simulação numérica adotou-se $L = 1m$, $C_d/R_b = 600$. Adotou-ser um passo espacial de $\Delta x = 1,0 \cdot 10^{-5} m$, valor para o qual se alcançou a convergência numérica.

7.2.1. Resultados do estado estacionário direto

Nas Figuras 47 a 50 são mostradas as distribuições das variáveis diretas na região próxima da entrada do tubo. Observa-se que estas variáveis atingem os valores constantes numa distância muito pequena comparada com o comprimento total do tubo $L = 1m$, justificando-se a necessidade de um passo espacial muito reduzido para atingir precisão na região de entrada.

Os perfis da variável de estado α e v_l apresentam um decrescimento gradual, desde a entrada até a saída. A velocidade do gás cresce e rapidamente atinge valores

constantes. A queda de pressão, como se mostra na Figura 50, decresce desde a entrada até a saída.

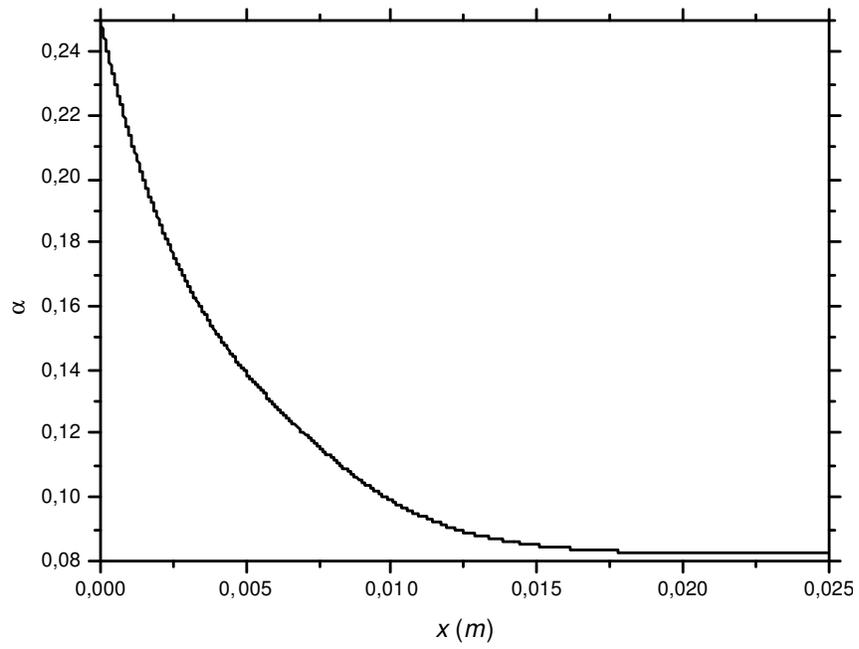


Figura 47. Fração de vazio, estado estacionário.

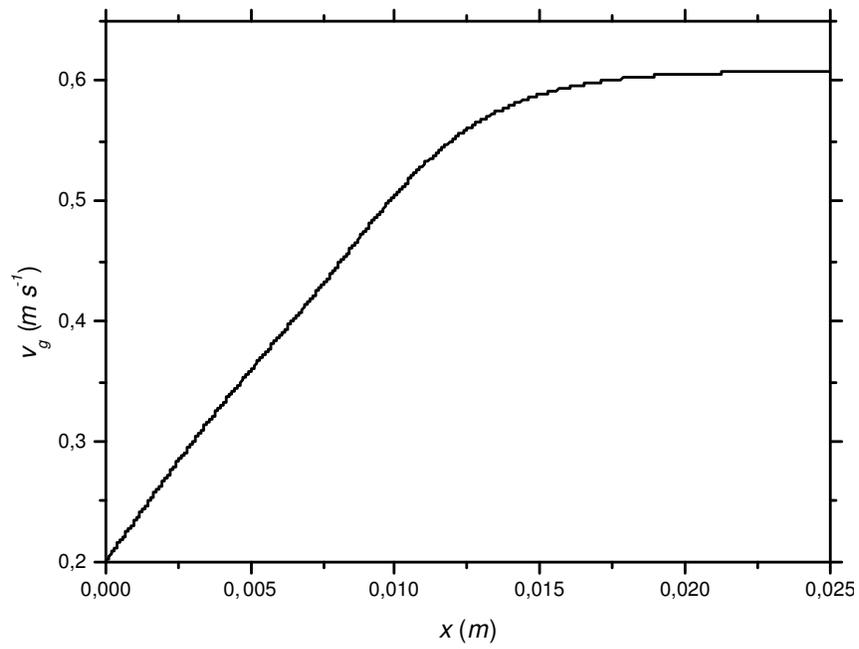


Figura 48. Velocidade do gás, estado estacionário.

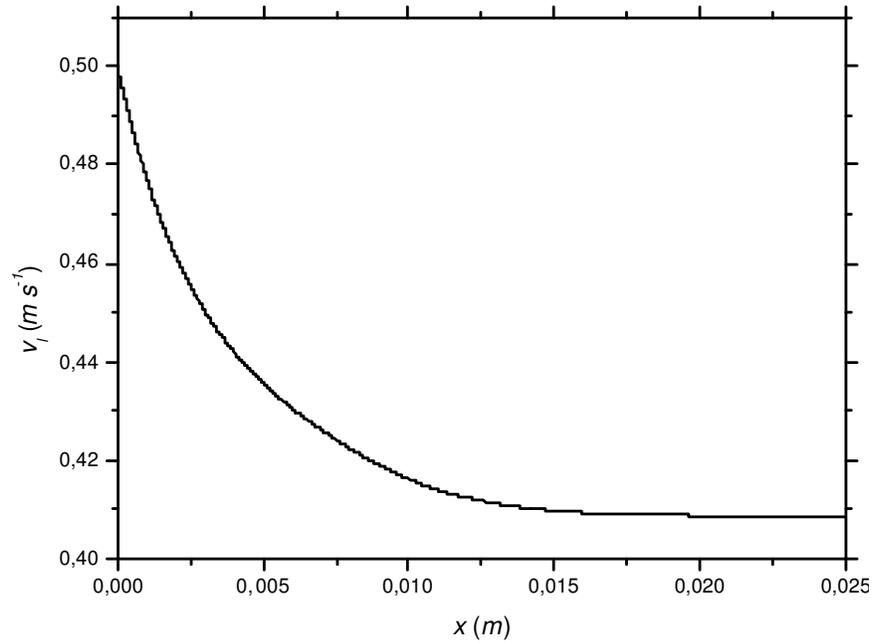


Figura 49. Velocidade do Líquido, estado estacionário.

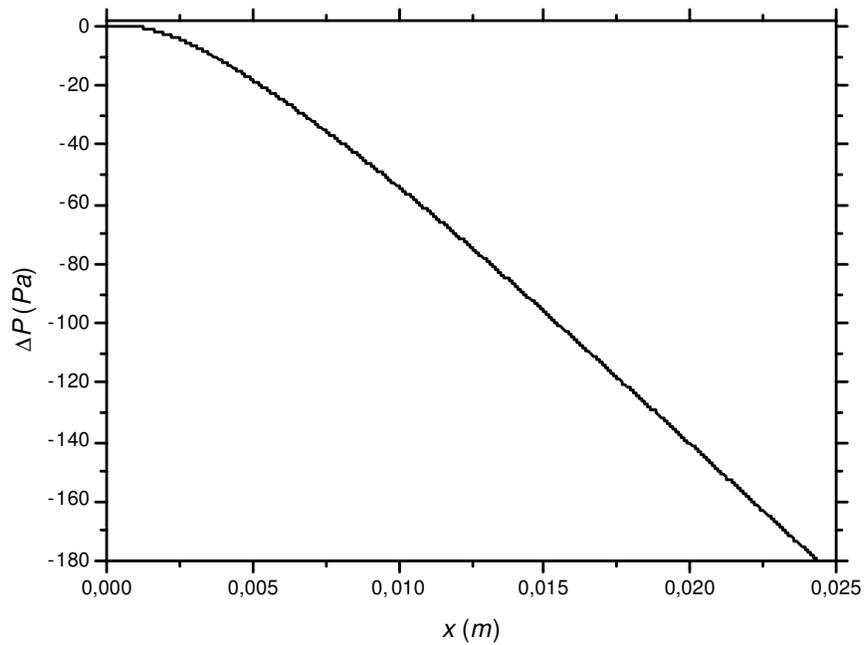


Figura 50. Queda de pressão, estado estacionário.

7.2.2. Problema adjunto estacionário

Os perfis das funções adjuntas no estado estacionário são apresentados para diferentes respostas contínuas e discretas. As funções adjuntas apresentam unidades de

medidas equivalentes àsquelas vistas no problema de escoamento anular que se corresponde com a resposta a ser analisada.

7.2.2.1. Resultados das funções adjuntas para a resposta: $\bar{\alpha}$

A solução das funções adjuntas para o funcional – resposta $\bar{\alpha}$ é mostrada nas Figuras 51 a 54. . Neste caso o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por:

$$\mathbf{S}^+ = \left[\frac{1}{L}, 0, 0, 0 \right].$$

Observa-se um comportamento contínuo das funções adjuntas. Das Figuras 51 e 52, observa-se que as funções adjuntas α^* e v_g^* contribuem mais na entrada do tubo que na saída. A contribuição da função adjunta v_l^* é mais significativa em torno do ponto $x = 0,025 m$, (ver Figura 53). A contribuição da função adjunta P^* torna-se mínima em torno do ponto $x = 0,005 m$, (ver Figura 54).

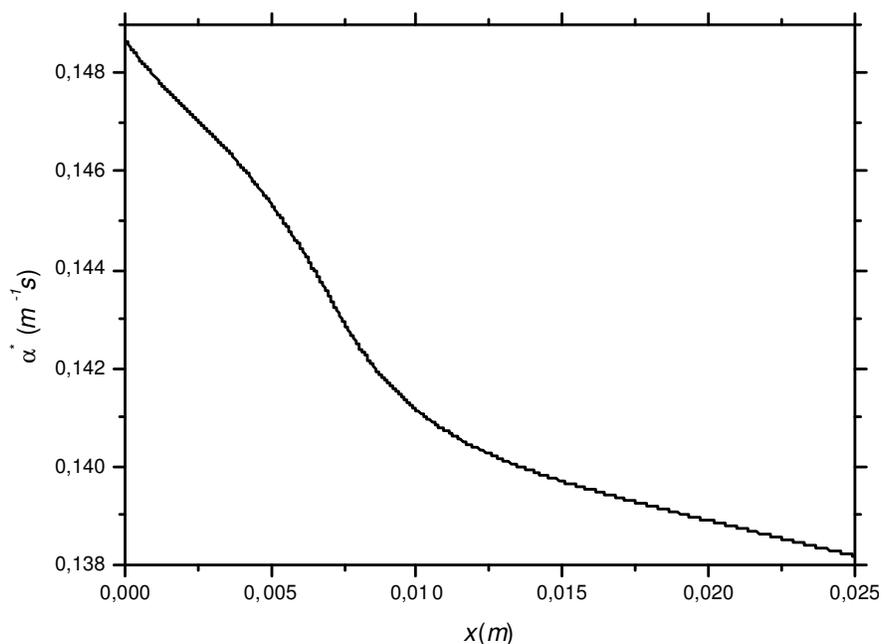


Figura 51. Função adjunta da fração de vazio para a resposta $\bar{\alpha}$.

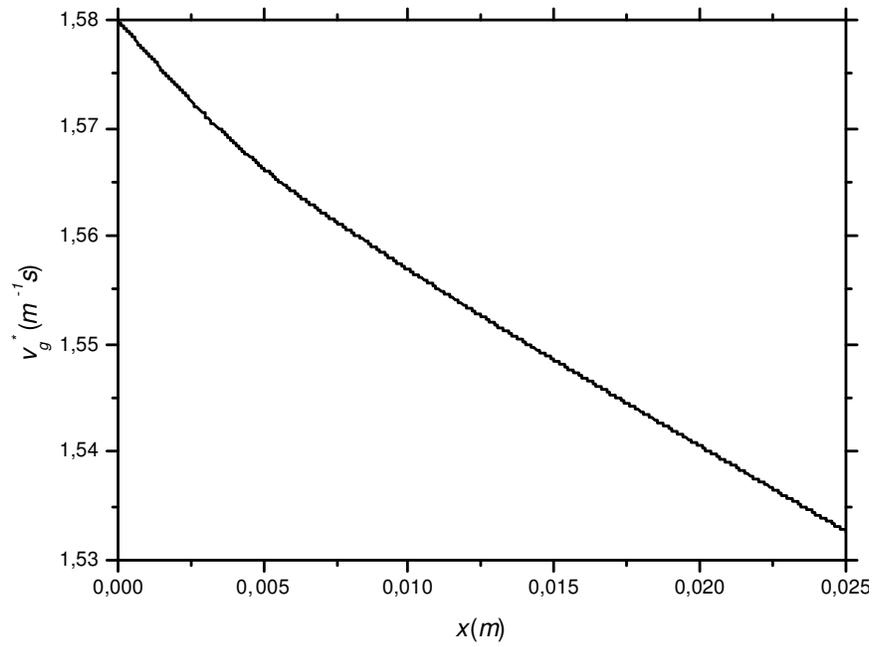


Figura 52. Função adjunta da velocidade do gás para a resposta $\bar{\alpha}$.

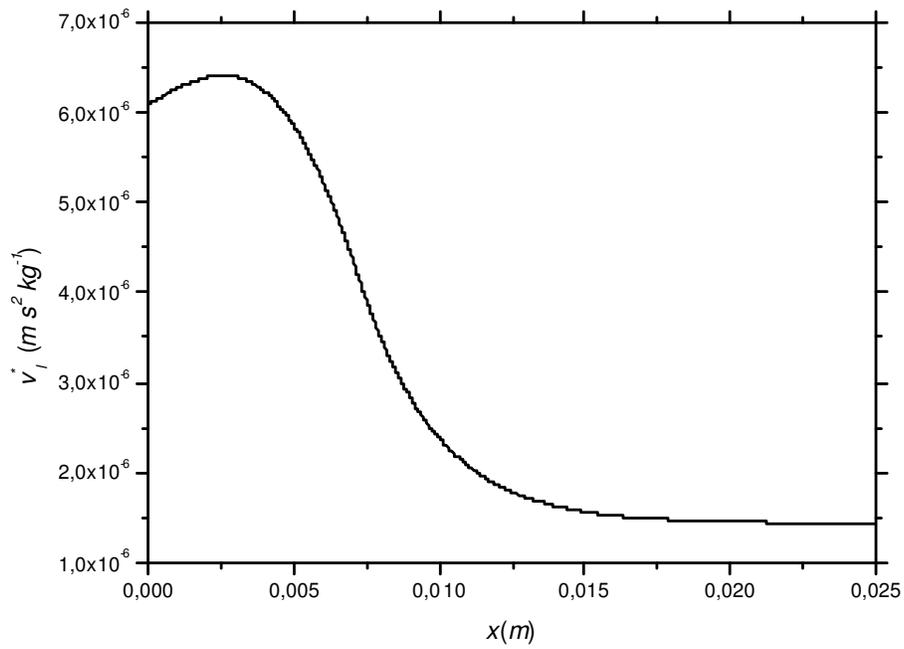


Figura 53. Velocidade do líquido adjunta para a resposta $\bar{\alpha}$.

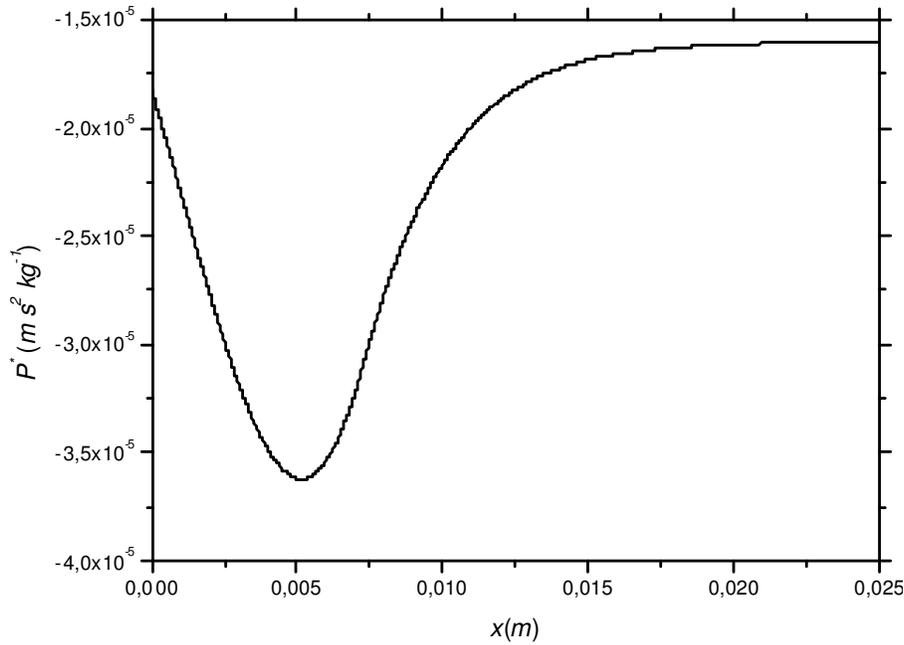


Figura 54. Função adjunta da pressão para a resposta $\bar{\alpha}$.

7.2.2.2. Resultados das funções adjuntas para resposta: $\alpha(x = 0,015 m)$

Foram escolhidos os valores de α em dois pontos, $x = 0,015$ e $x = L$, para representar as funções adjuntas discretas. O ponto $x = L/2$ não foi escolhido por se atingir o estado estacionário a partir de $x = 0,025 m$.

Nas Figuras 55 a 58 são mostradas as distribuições das funções adjuntas para o funcional - resposta discreto $\alpha(x = 0,015 m)$. Neste caso o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por: $S^+ = [\delta(x - 0,015 m), 0, 0, 0]$. As funções adjuntas tomam valores $\alpha^*(x > 0,015 m) = 0$, $v_l^*(x > 0,015 m) = 0$ e $P^*(x > 0,015 m) = 0$, visto que para pontos em $x > 0,015 m$ o sistema adjunto é um sistema homogêneo cujas condições de contorno são nulas e portanto a solução é nula. Em $x = 0,015 m$ a solução do sistema adjunto tem uma descontinuidade, visto que a função delta atua neste ponto. Para $x < 0,015 m$ o sistema adjunto também é homogêneo. Inicia-se o transitório com a da condição imposta pela descontinuidade da delta que se propaga até a entrada do tubo. A contribuição para o cálculo desta resposta das funções adjuntas α^* e v_l^* depois da descontinuidade, $x < 0,015 m$, decresce até a entrada do tubo, entretanto que a contribuição da função adjunta v_g^* aumenta, (ver Figuras 55, 56, e 57).

A função adjunta P^* na descontinuidade tem uma contribuição mínima que logo cresce até a entrada do tubo, (ver Figura 58).

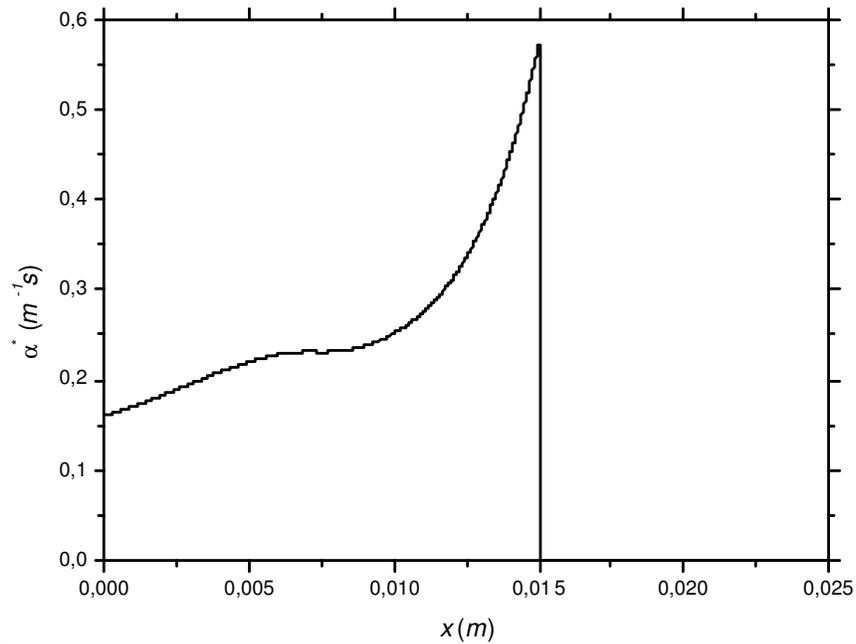


Figura 55. Função adjunta da fração de vazio para a resposta $\alpha(x=0,015m)$.

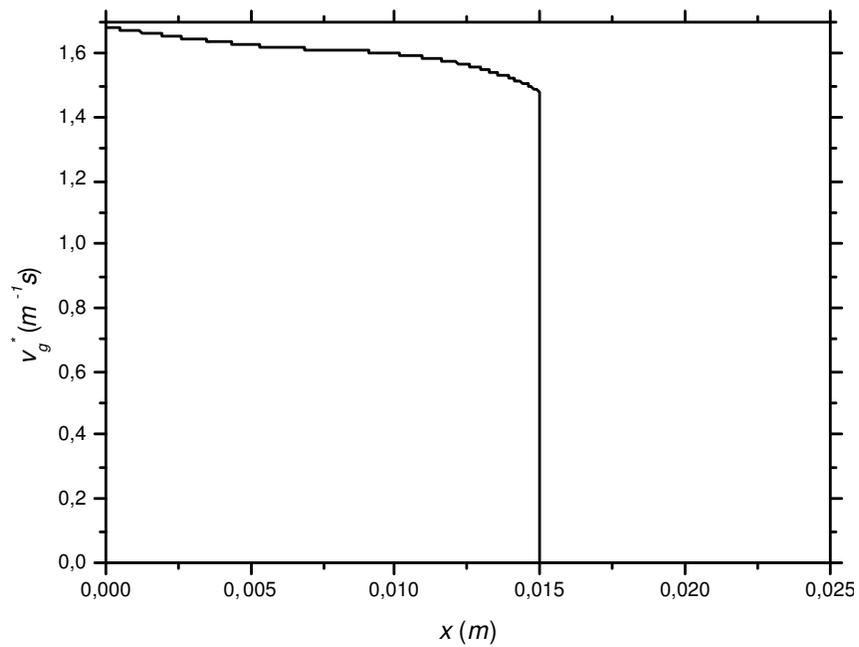


Figura 56. Função adjunta da velocidade do gás para a resposta $\alpha(x=0,015m)$.

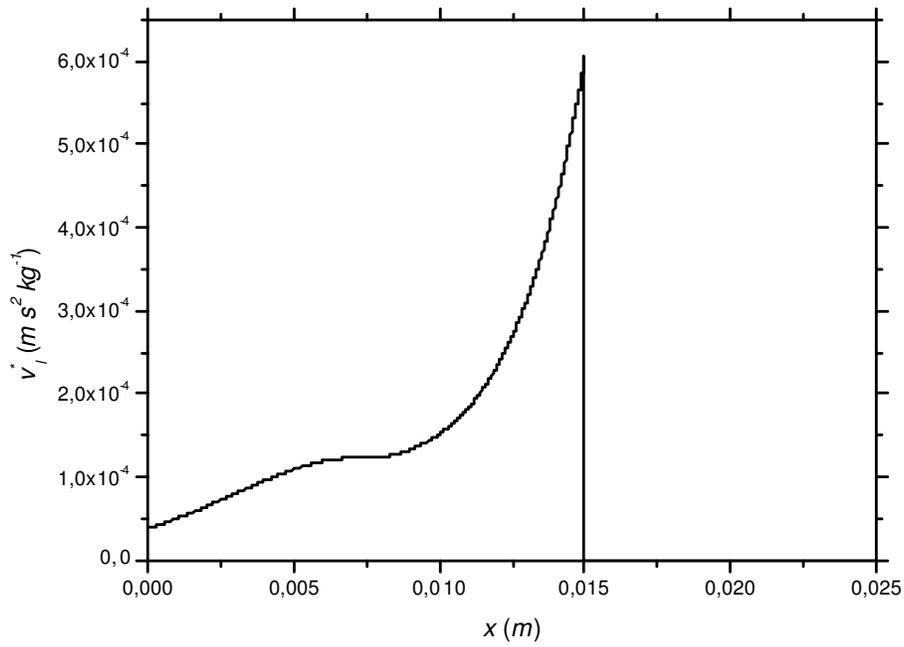


Figura 57. Velocidade do Líquido adjunta para a resposta $\alpha(x = 0,015 \text{ m})$.

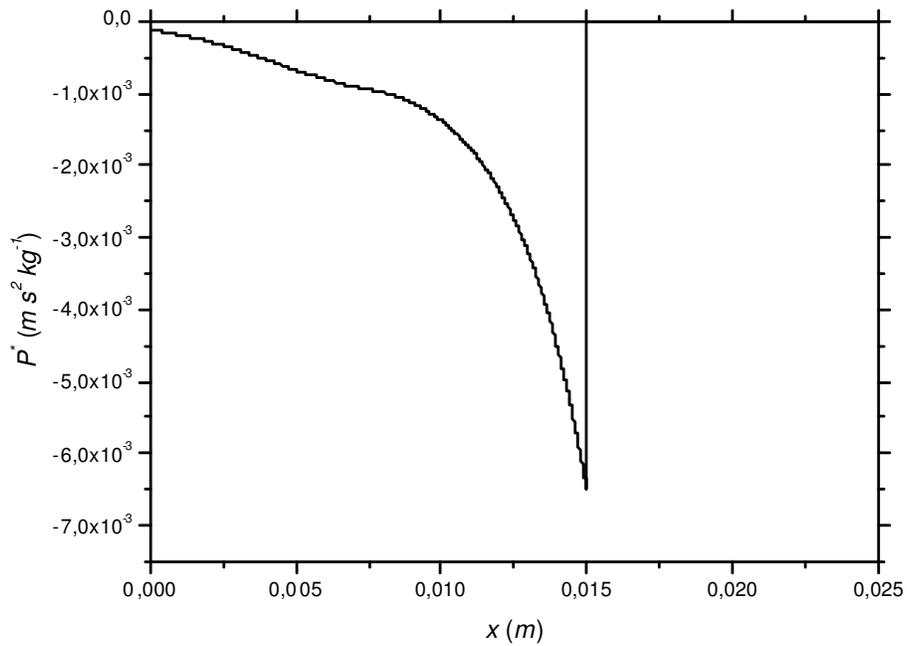


Figura 58. Função adjunta da pressão para a resposta $\alpha(x = 0,015 \text{ m})$.

7.2.2.3. Resultados das funções adjuntas para resposta: $\alpha(x=L)$

A solução do funções adjuntas para o funcional $\alpha(x=L)$ é mostrada nas Figuras 59 a 62. Neste caso o sistema adjunto é resolvido, com o vetor fonte dado por: $S^+ = [2\delta(x-L), 0, 0, 0]$. Observa-se uma descontinuidade em L nas funções adjuntas. A posição da descontinuidade, isto é, da função delta, é deslocada para a saída; entretanto, o valor da descontinuidade permanece idêntico quando comparado com o valor da descontinuidade quando a função delta é localizada em $x=0,015m$. Também são semelhantes os comportamentos das funções adjuntas, entretanto em todas as variáveis se atingem valores constantes rapidamente até a entrada do tubo, (compare as Figuras 59 e 55, as Figuras 60 e 56, as Figuras 61 e 57 e as Figuras 62 e 58).

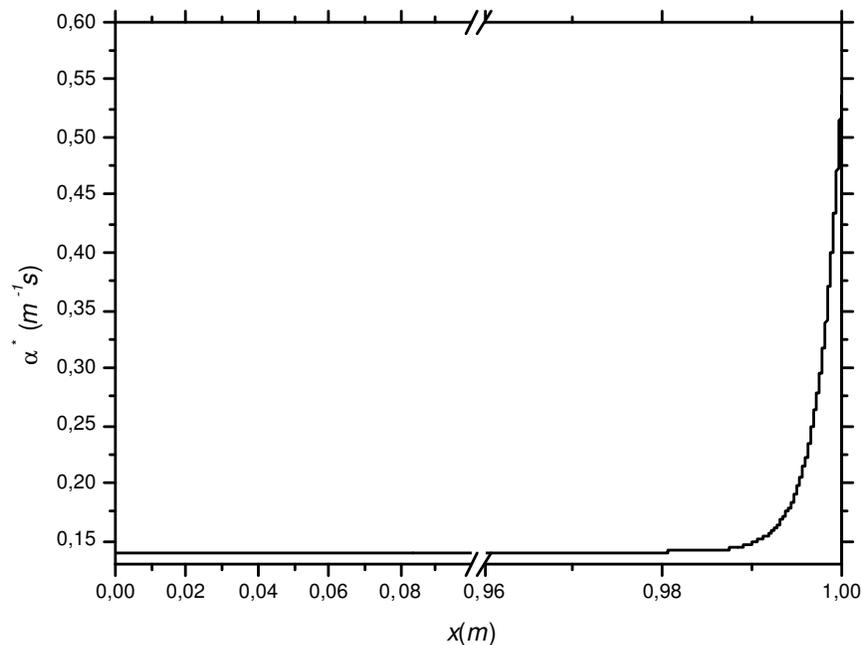


Figura 59. Função adjunta da fração de vazio para a resposta $\alpha(x=L)$.

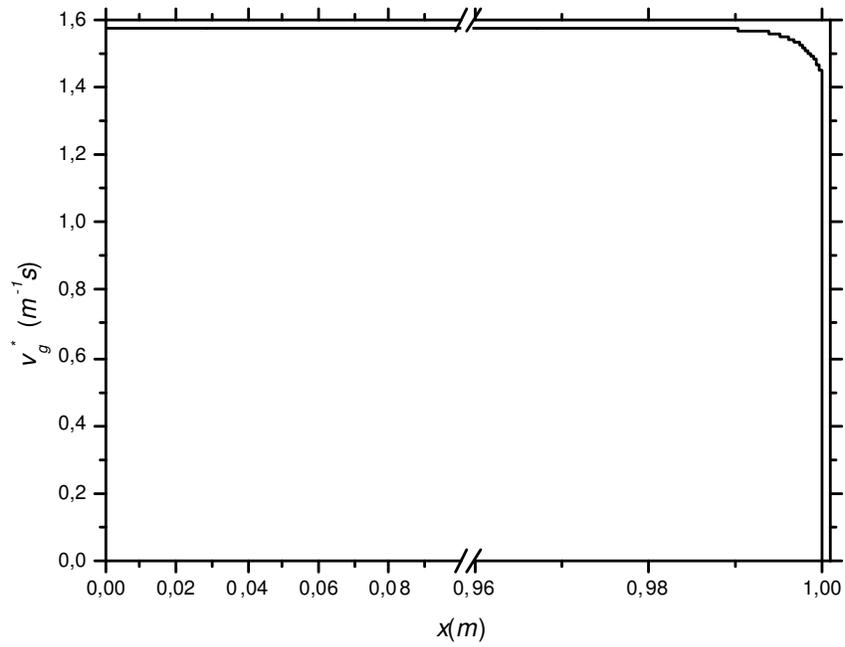


Figura 60. Função adjunta da velocidade do gás para a resposta $\alpha(x = L)$.

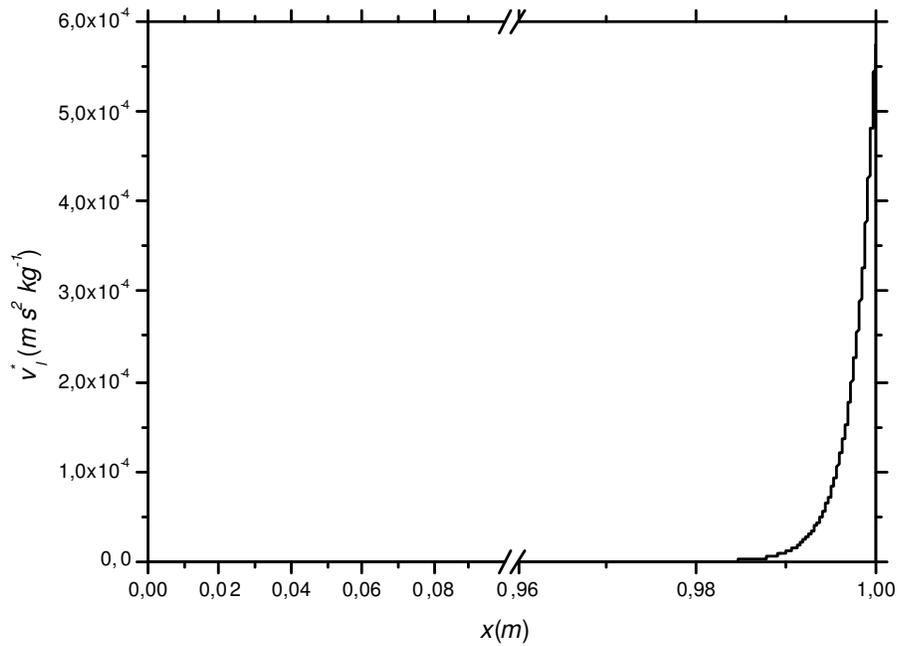


Figura 61. Velocidade do Líquido adjunta para a resposta $\alpha(x = L)$.

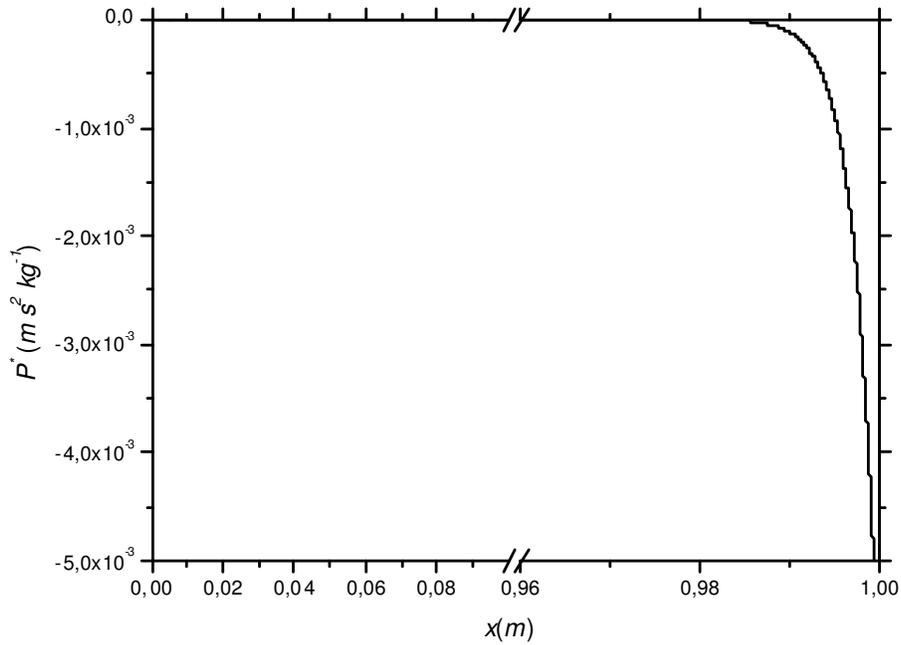


Figura 62. Função adjunta da pressão para a resposta $\alpha(x = L)$.

7.2.2.4. Resultados das funções adjuntas para resposta: \bar{v}_g

A solução das funções adjuntas para o funcional - resposta \bar{v}_g é mostrada nas Figuras 63 a 66. Neste caso, o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por:

$$\mathbf{S}^+ = \left[0, \frac{1}{L}, 0, 0 \right].$$

Observa-se um comportamento contínuo das funções adjuntas. Da Figura 63, observa-se que a função adjunta α^* para esta resposta contribui mais na saída do tubo que na entrada. A contribuição da função adjunta v_g^* é menos significativa na saída, mas atinge um mínimo de contribuição em torno do ponto $x = 0,04 m$, (ver Figura 64). A contribuição da função adjunta v_l^* é mais significativa na entrada, entretanto em torno do ponto $x = 0,025 m$ possui uma contribuição mínima, (ver Figura 65). A contribuição da função adjunta P^* torna-se máxima em torno do ponto $x = 0,005 m$ e mínima na entrada do tubo, (ver Figura 66).

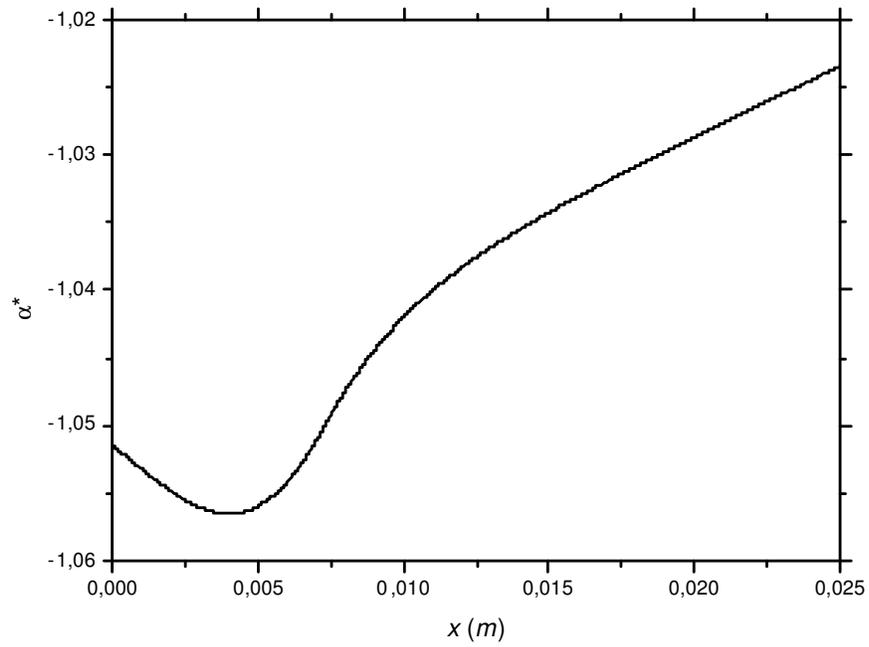


Figura 63. Função adjunta da fração de vazio para a resposta \bar{v}_g .

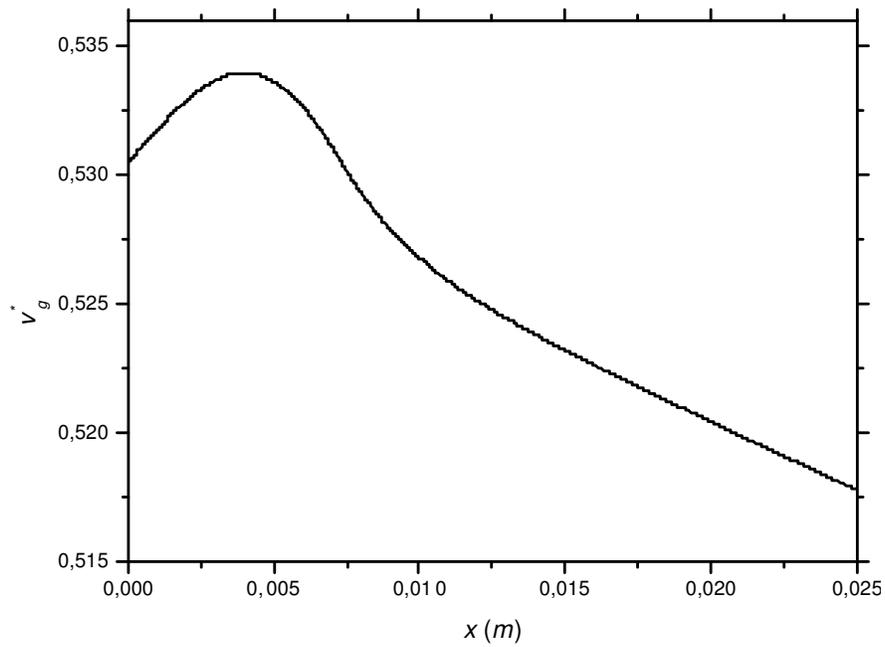


Figura 64. Função adjunta da velocidade do gás para a resposta \bar{v}_g .

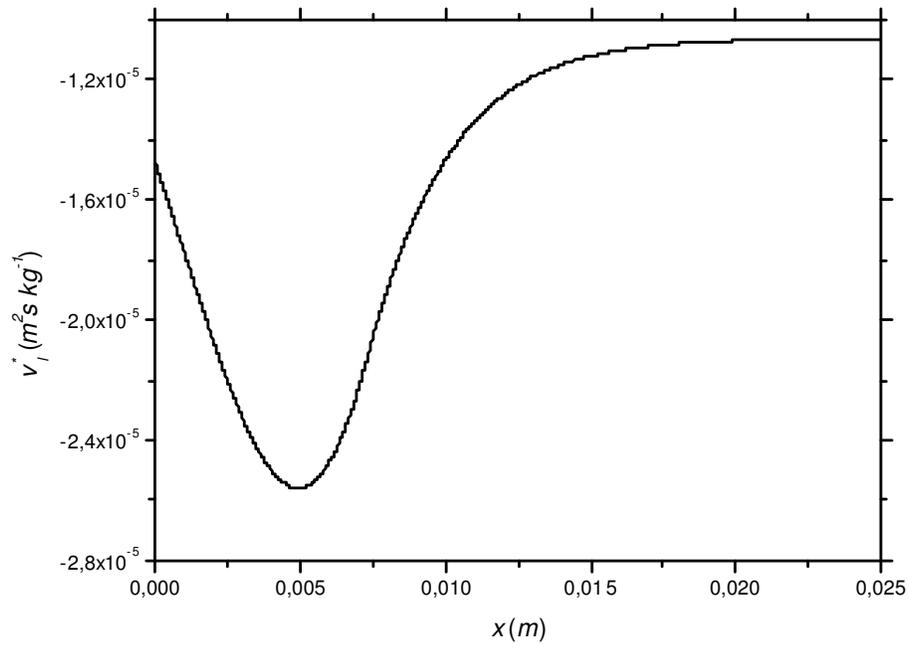


Figura 65. Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta \bar{v}_g .

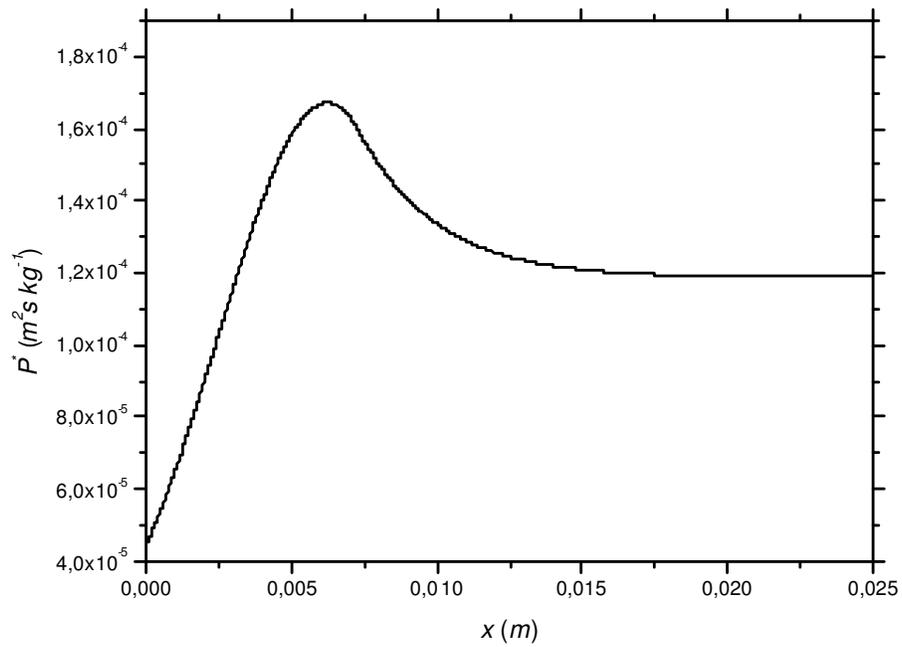


Figura 66. Função adjunta da pressão para a resposta \bar{v}_g .

7.2.2.5. Resultados das funções adjuntas para resposta: $v_g(x=0,015m)$

A solução do funções adjuntas para o funcional $v_g^*(x=0,015m)$ é mostrada nas Figuras 67 a 70. Neste caso o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por: $S^+ = [0, \delta(x-0,015m), 0, 0]$. As funções adjuntas α^* e v_l^* para $x < 0,015m$, crescem até a entrada do tubo, (ver Figuras 67 e 68), enquanto as funções adjuntas v_g^* e P^* decrescem depois da descontinuidade, (ver Figuras 69 e 70).

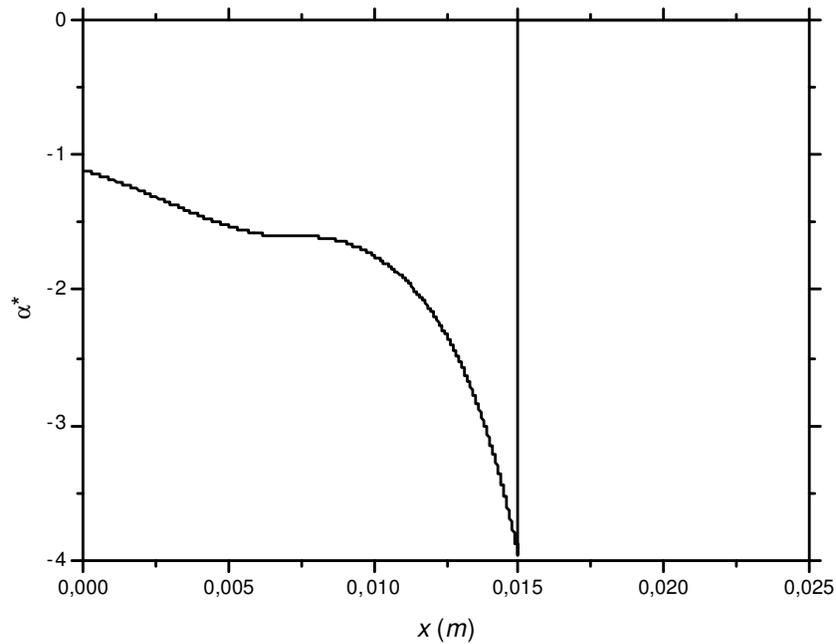


Figura 67. Função adjunta da fração de vazio para a resposta $v_g(x=0,015m)$.

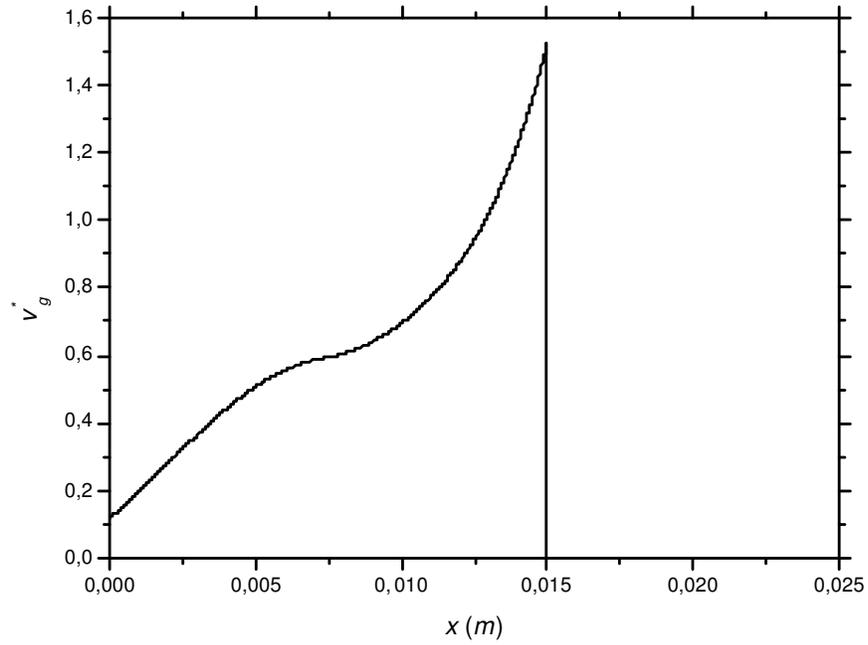


Figura 68. Velocidade do líquido adjunta para a resposta $v_g(x = 0,015 m)$.

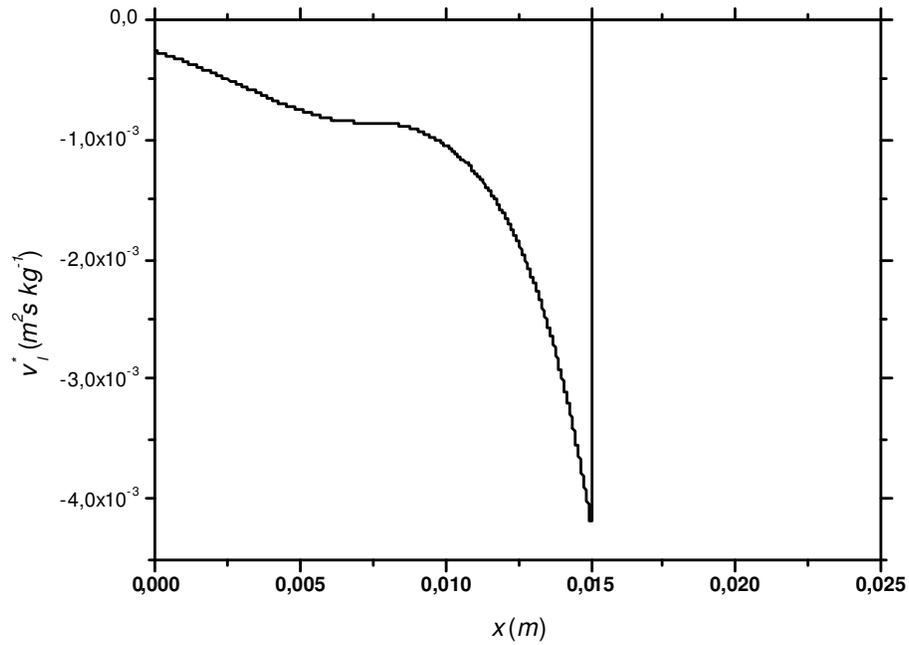


Figura 69. Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $v_g(x = 0,015 m)$.

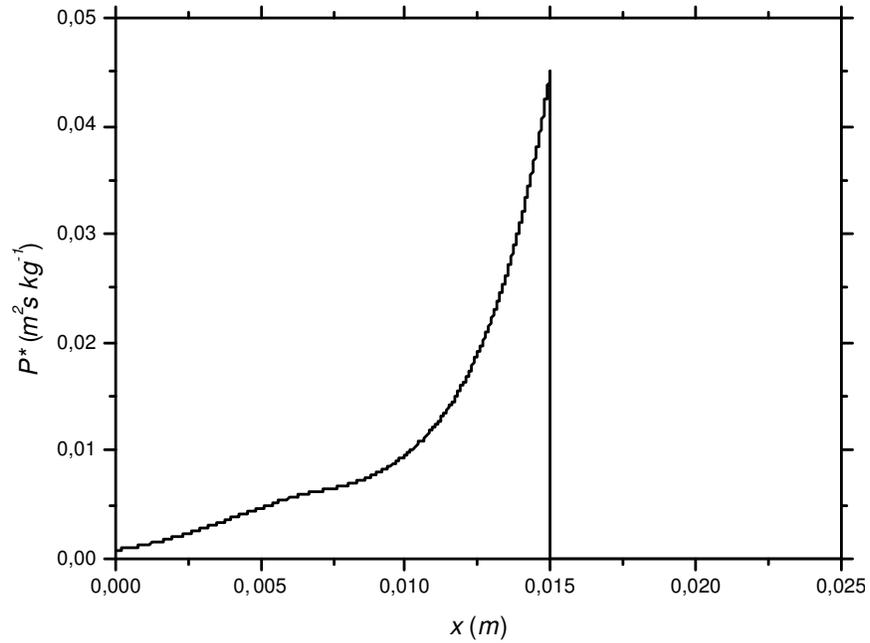


Figura 70. Função adjunta da pressão para a resposta $v_g(x = 0,015\text{ m})$.

7.2.2.6. Resultados das funções adjuntas para resposta: $v_g(x = L)$

A solução das funções adjuntas para o funcional $v_g^*(x = L)$ é mostrada nas Figuras 71 a 74. Neste caso o sistema adjunto é resolvido, com o vetor fonte dado por: $S^+ = [0,2\delta(x - L), 0, 0]$. Observa-se uma descontinuidade em L nas funções adjuntas. A análise e discussão deste caso são semelhantes ao caso já considerado do funcional - resposta em que a delta esta localizada no ponto $x = 0,015\text{ m}$ (compare as Figuras 71 e 67, as Figuras 72 e 68, as Figuras 73 e 69 e as Figuras 74 e 70).

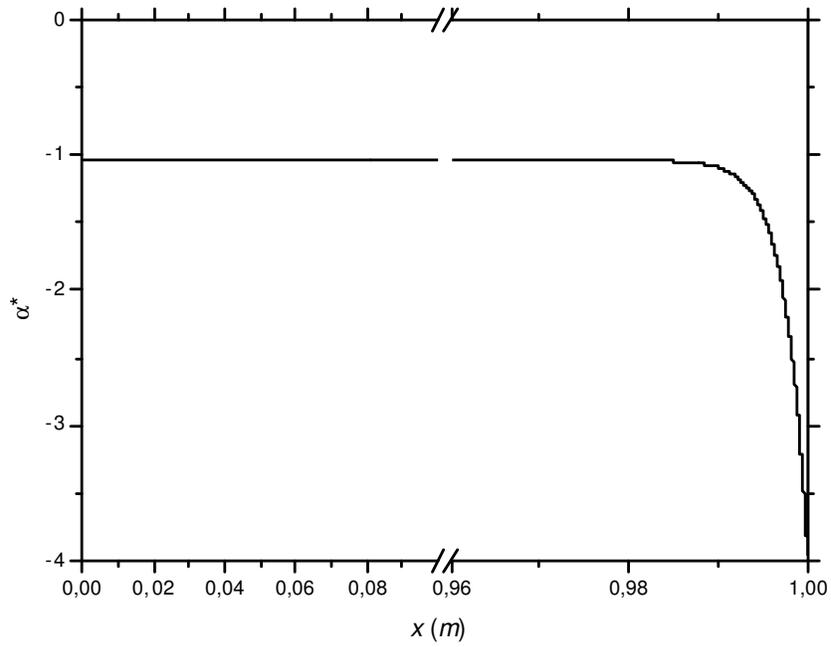


Figura 71. Função adjunta da fração de vazio para a resposta $v_g(x=L)$.

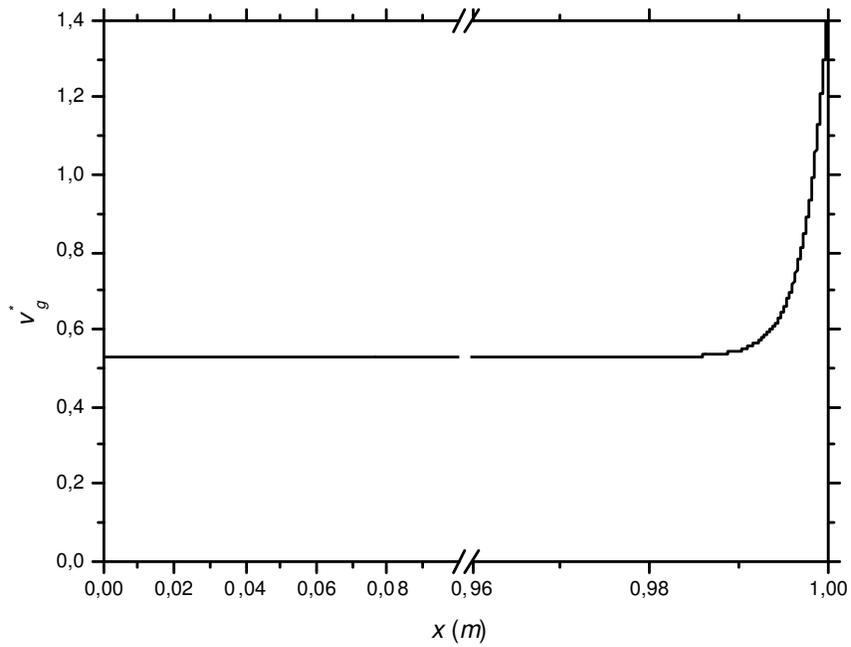


Figura 72. Função adjunta da velocidade do gás para a resposta $v_g(x=L)$.

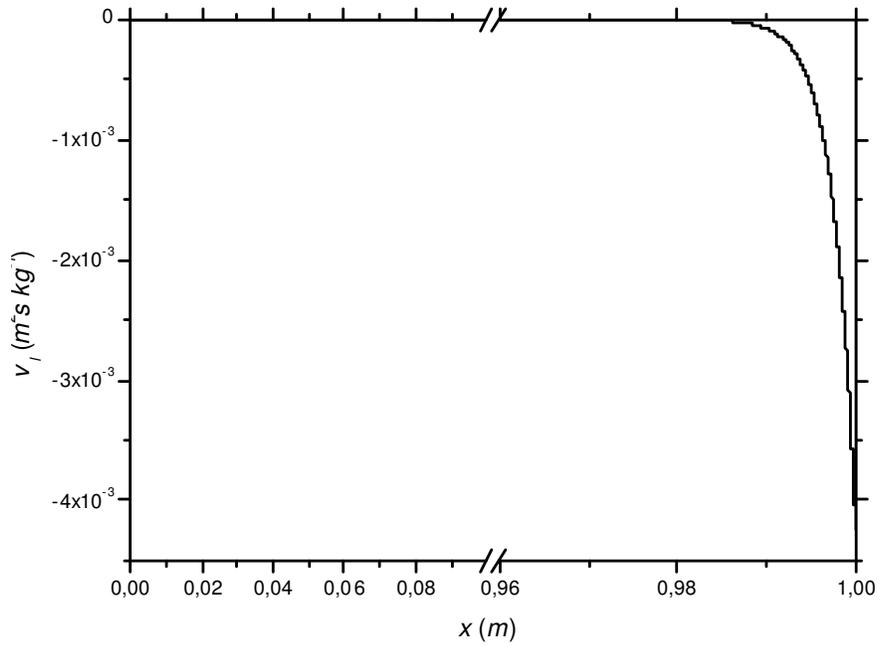


Figura 73. Velocidade do líquido adjunta para a resposta $v_g(x=L)$.

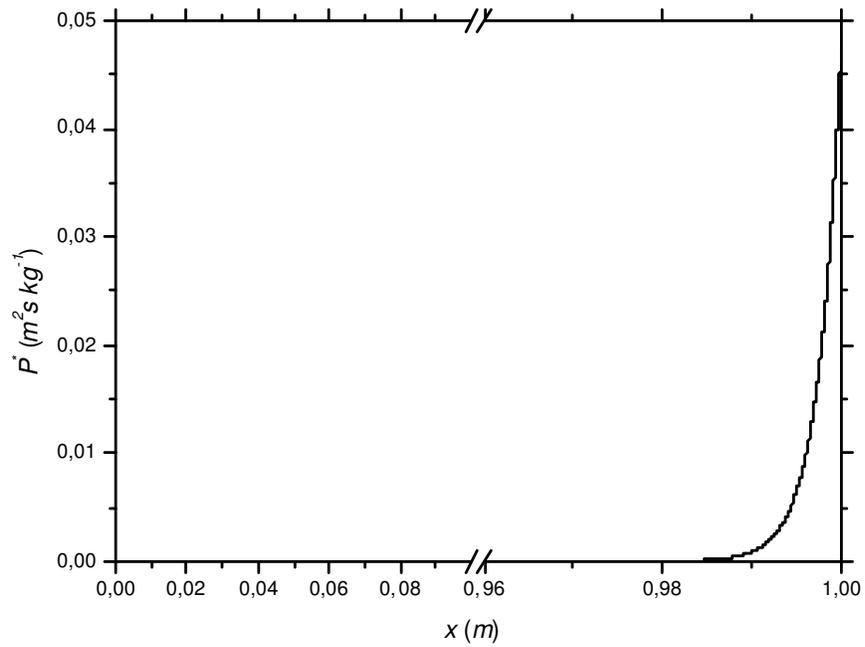


Figura 74. Função adjunta da Função adjunta da pressão para a resposta $v_g(x=L)$.

7.2.2.7. Resultados das funções adjuntas para resposta: \bar{v}_l

A solução do funções adjuntas para o funcional \bar{v}_l é mostrada nas Figuras 75 a 78. Neste caso o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por: $S^+ = \left[0, 0, \frac{1}{L}, 0\right]$. Observa-se um comportamento contínuo das funções adjuntas. Da Figura 75, observa-se que a contribuição da função adjunta α^* vai diminuindo da saída até a entrada do tubo, o contrario acontece com as funções adjuntas v_g^* e v_l^* , (ver Figura 76 e 77). A contribuição da função adjunta P^* torna-se mínima em torno do ponto $x = 0,005 m$, (ver Figura 78).

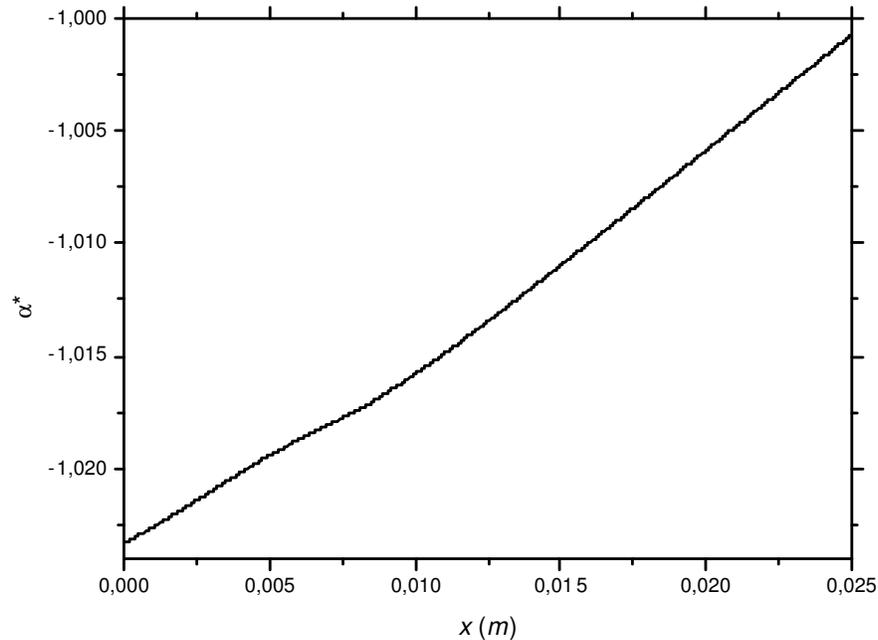


Figura 75. Função adjunta da fração de vazio para a resposta \bar{v}_l .

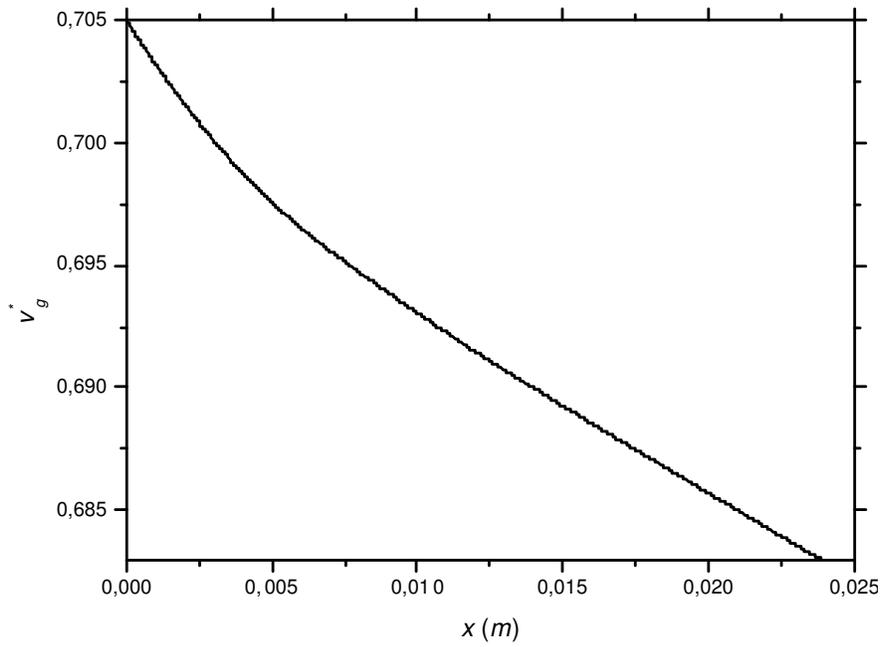


Figura 76. Função adjunta da velocidade do gás para a resposta \bar{v}_l

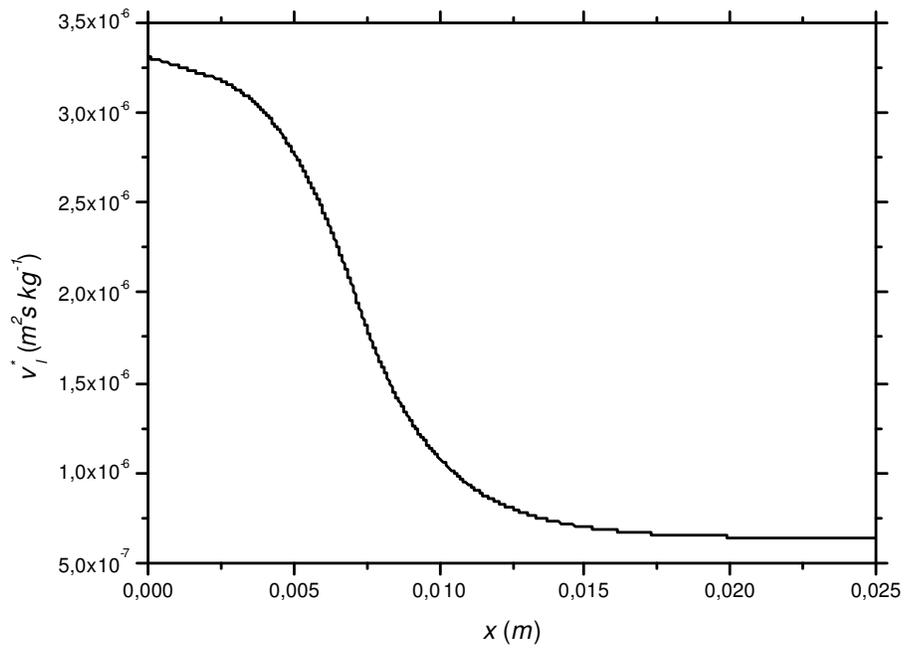


Figura 77. Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta \bar{v}_l .

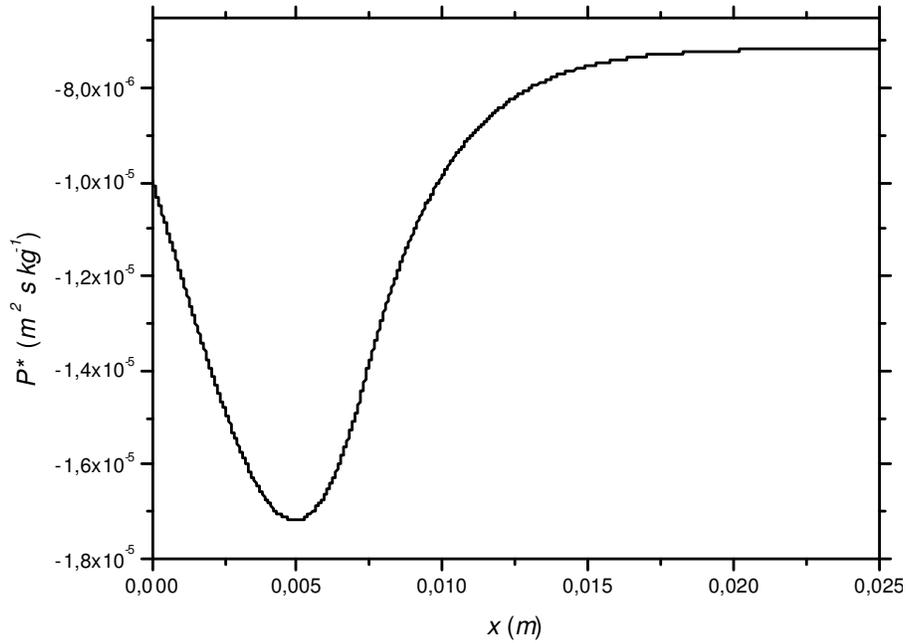


Figura 78. Função adjunta da Função adjunta da pressão para a resposta \bar{v}_l

7.2.2.8. Resultados das funções adjuntas para resposta: $v_l(x=0,015m)$

A solução do funções adjuntas para o funcional $v_l^*(x=0,015m)$ é mostrada nas Figuras 79 a 82. Neste caso o sistema adjunto é resolvido, com o vetor fonte dado por: $S^+ = [0,0,(x-0,015m),0]$. As funções adjuntas α^* e v_l^* decrescem até a entrada do tubo, (ver Figuras 79 e 80), entretanto a contribuição da função adjunta v_g^* e P^* aumenta, (ver Figuras 81 e 82).

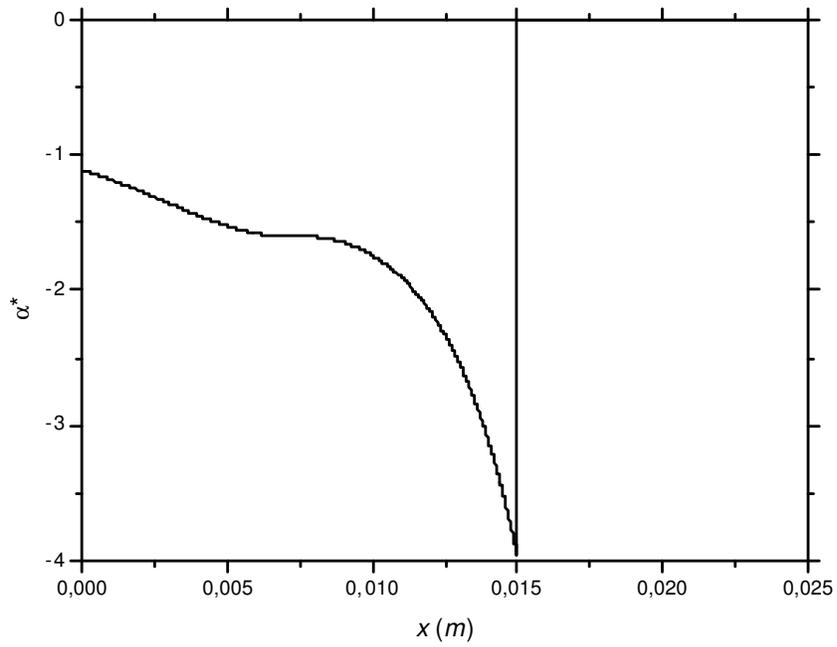


Figura 79. Função adjunta da fração de vazio para a resposta $v_l(x = 0,015m)$.

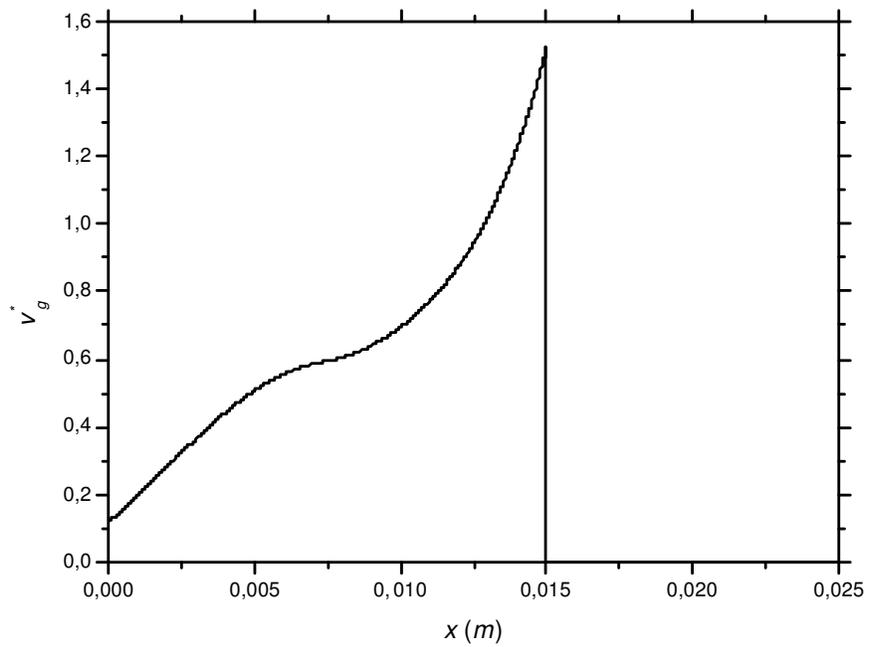


Figura 80. Função adjunta da velocidade do gás para a resposta $v_l(x = 0,015m)$.

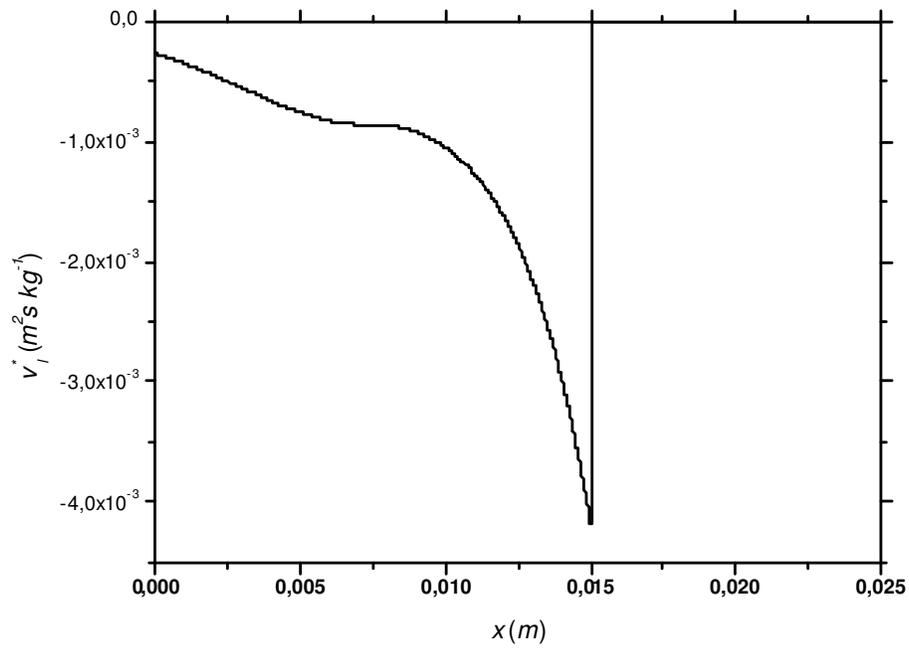


Figura 81. Velocidade líquido adjunta para a resposta $v_l(x = 0,015 m)$.

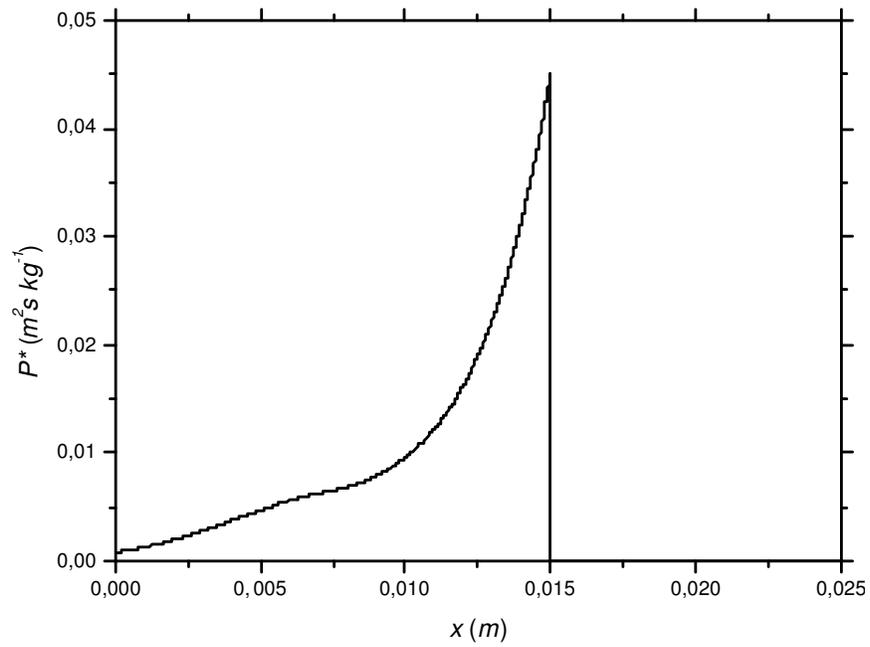


Figura 82. Função adjunta da pressão para a resposta $v_l(x = 0,015 m)$.

7.2.2.9. Resultados das funções adjuntas para resposta: $v_l(x=L)$

A solução do funções adjuntas para o funcional $v_l^*(x=L)$ é mostrada nas Figuras 83 a 86. Neste caso o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por: $S^+ = [0, 0, 2\delta(x-L), 0]$. A análise e discussão deste caso são semelhantes ao caso já considerado do funcional - resposta em que a delta esta localizada no ponto $x=0,015m$ (compare as Figuras 83 e 79, as Figuras 84 e 80, as Figuras 85 e 81 e as Figuras 86 e 82).

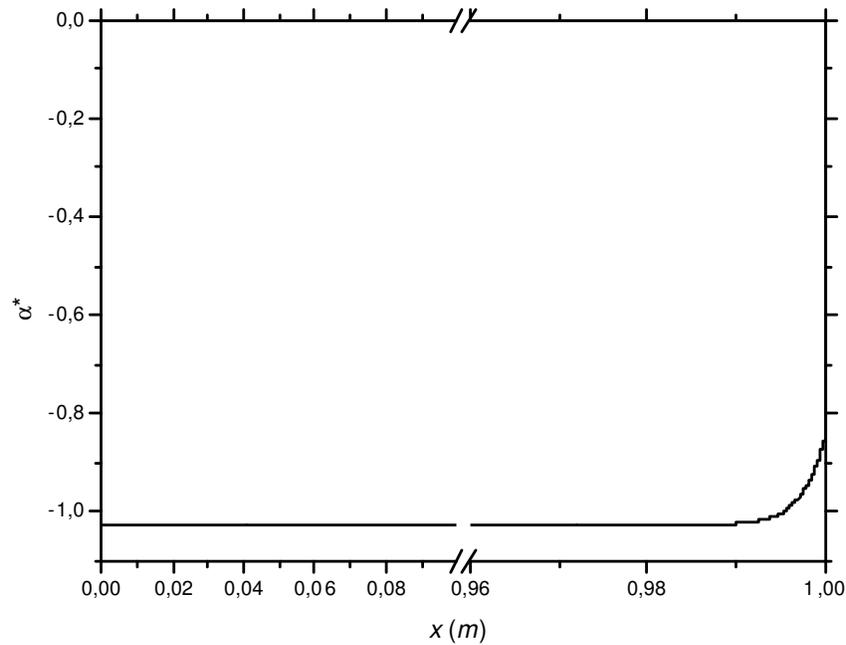


Figura 83. Função adjunta da fração de vazio para a resposta $v_l(x=L)$.

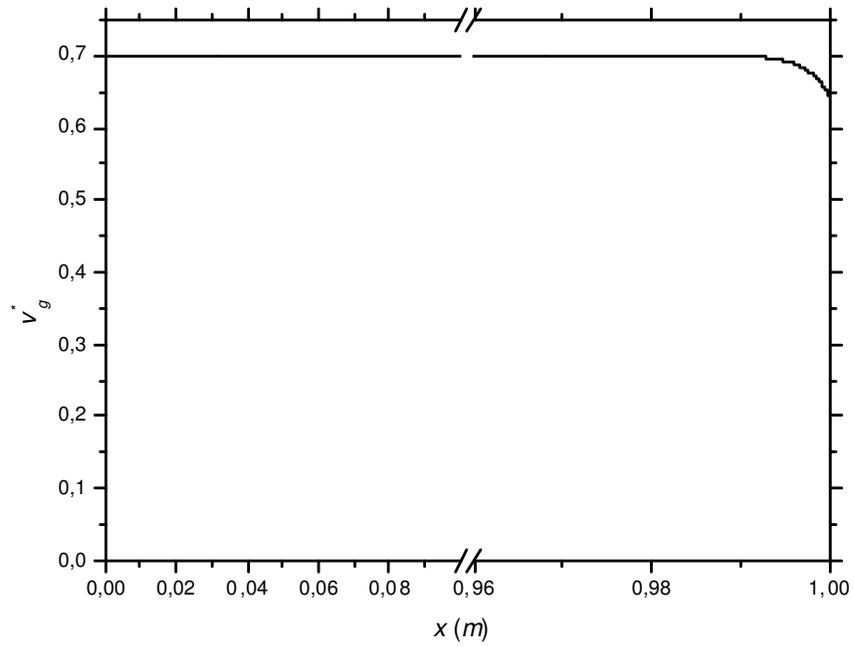


Figura 84. Função adjunta da velocidade do gás para a resposta $v_l(x = L)$.

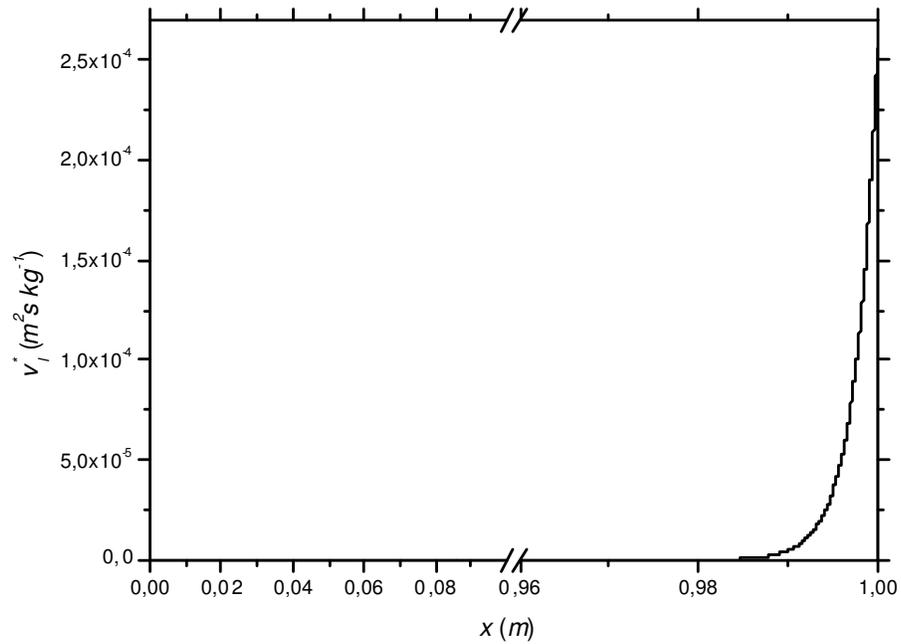


Figura 85. Velocidade do Líquido adjunta para a resposta $v_l(x = L)$.

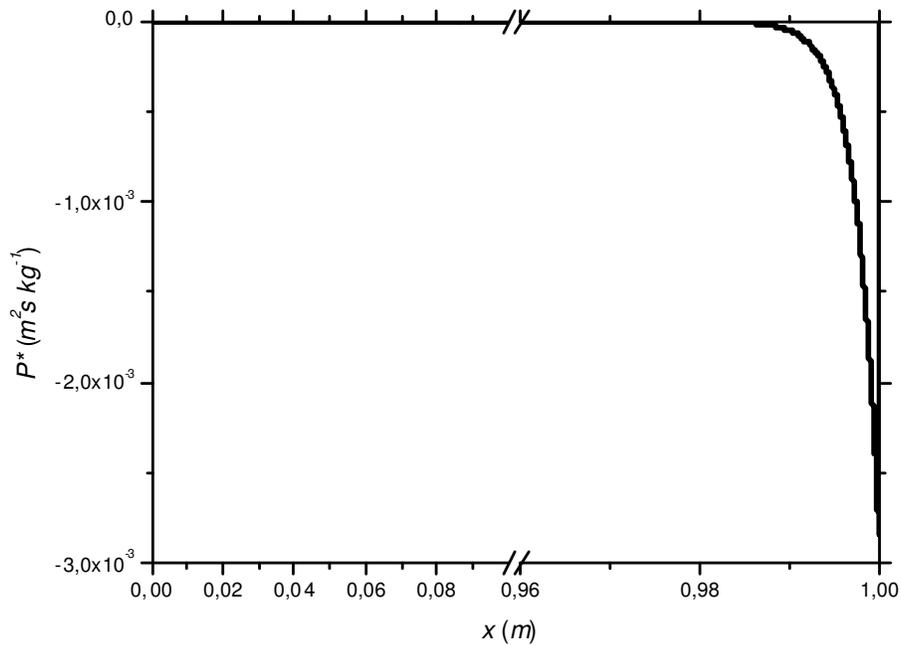


Figura 86. Função adjunta da pressão para a resposta $v_l(x=L)$

7.2.2.10. Resultados das funções adjuntas para resposta: \bar{P}

A solução do funções adjuntas para o funcional \bar{P} é mostrada nas Figuras 87 a 90.

Neste caso o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por: $S^+ = \left[0, 0, 0, \frac{1}{L} \right]$.

Observa-se a natureza contínua das funções adjuntas. Observa-se a funções adjuntas α^* , v_g^* e v_l^* para esta resposta contribuem mais na entrada do tubo que na saída, (ver Figuras 87, 88 e 89). A contribuição da função adjunta P^* torna-se mínima em torno do ponto, (ver Figura 90).

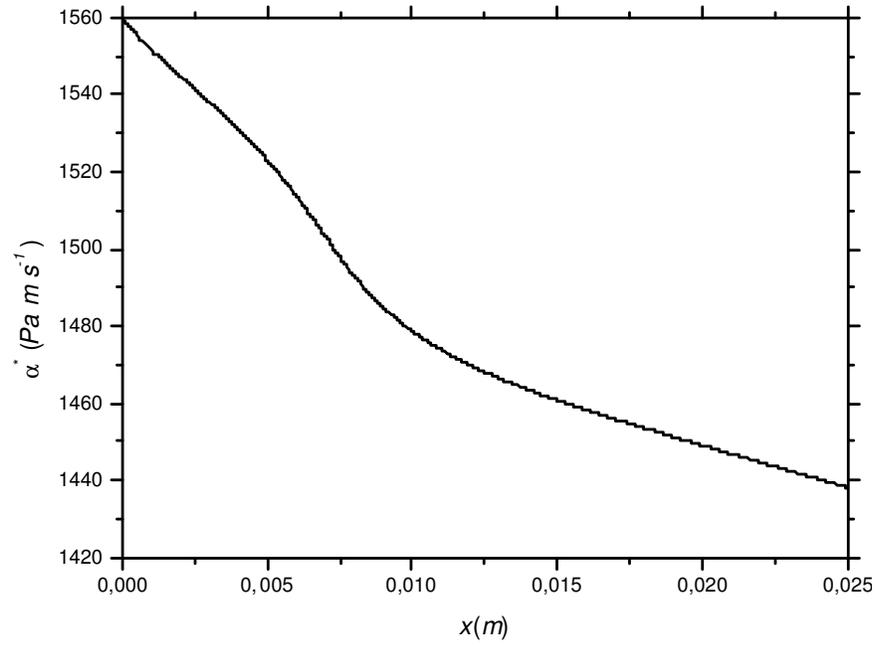


Figura 87. Função adjunta da fração de vazio para a resposta \bar{P} .

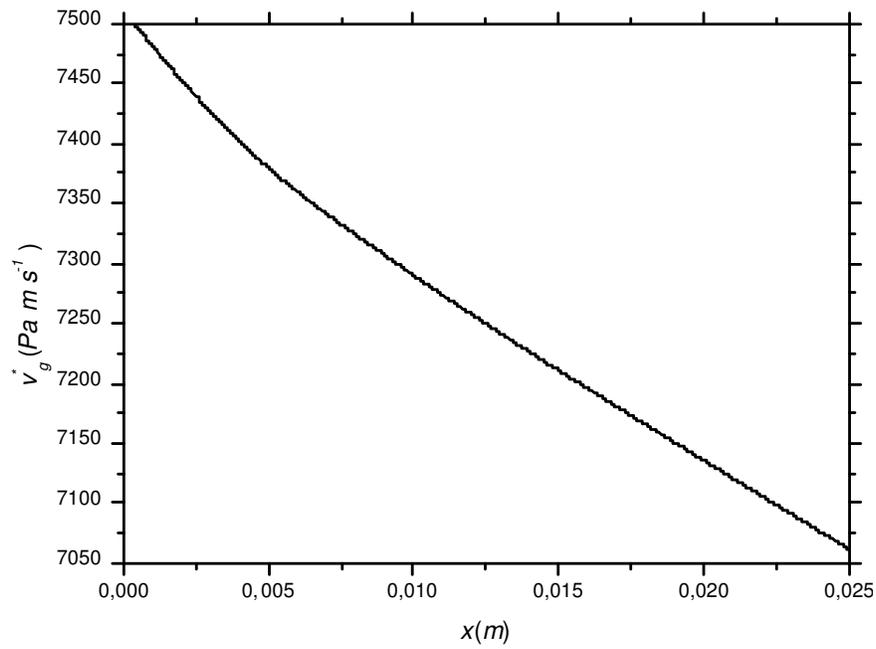


Figura 88. Função adjunta da velocidade do gás para a resposta \bar{P} .

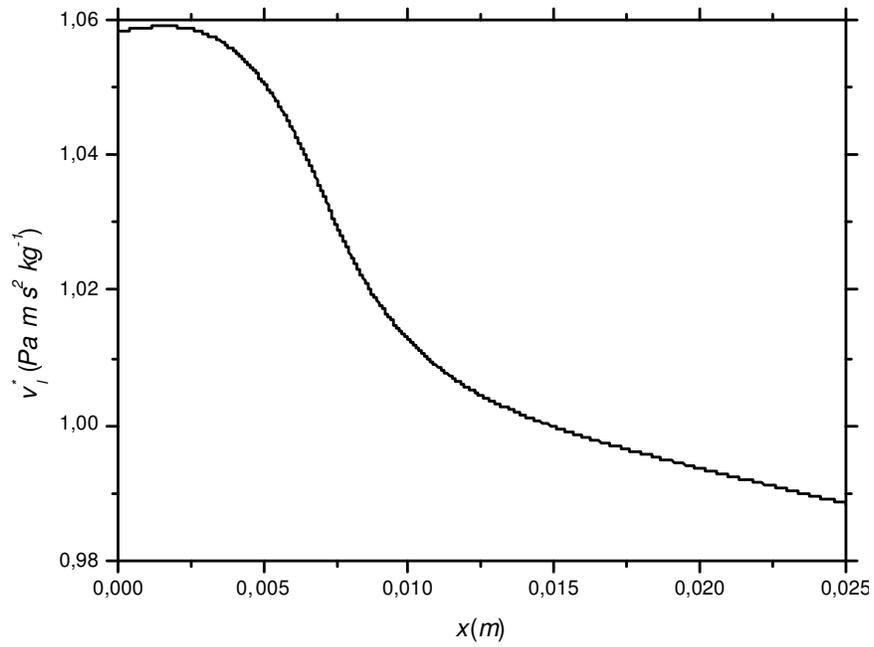


Figura 89. Velocidade do líquido adjunta para a resposta \bar{P} .

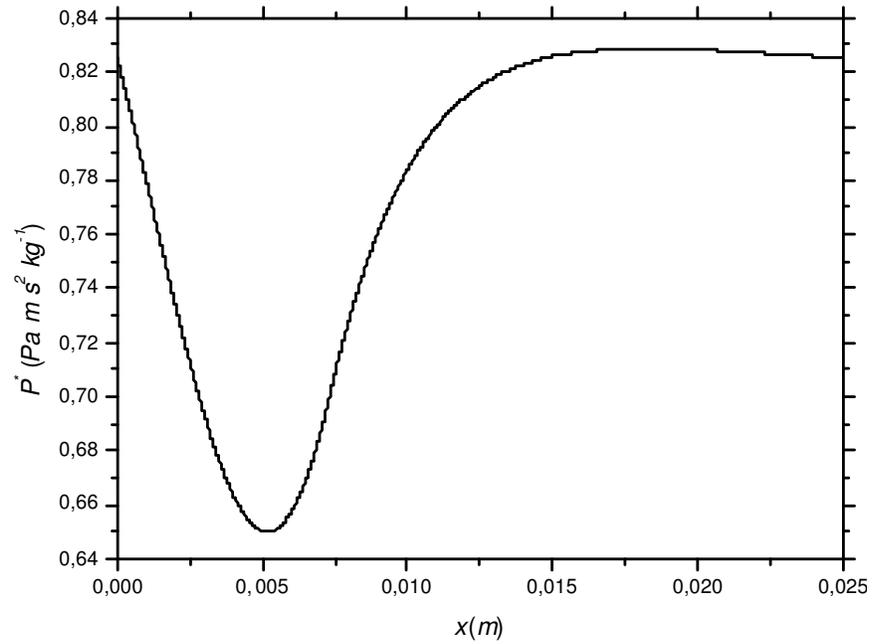


Figura 90. Função adjunta da pressão para a resposta \bar{P} .

7.2.2.11. Resultados das funções adjuntas para resposta: $P(x = 0,015 m)$

A solução do funções adjuntas para o funcional $P^*(x = 0,015 m)$ é mostrada nas Figuras 91 a 94. Neste caso o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por: $S^+ = [0,0,0,\delta(x-0,015m)]$. As funções adjuntas α^* , v_g^* e v_l^* depois da descontinuidade, $x < 0,015 m$, crescem até a entrada do tubo, (ver Figuras 91, 92, e 93). O resultado contrario mostrado pela função adjunta P^* , (ver Figura 94).

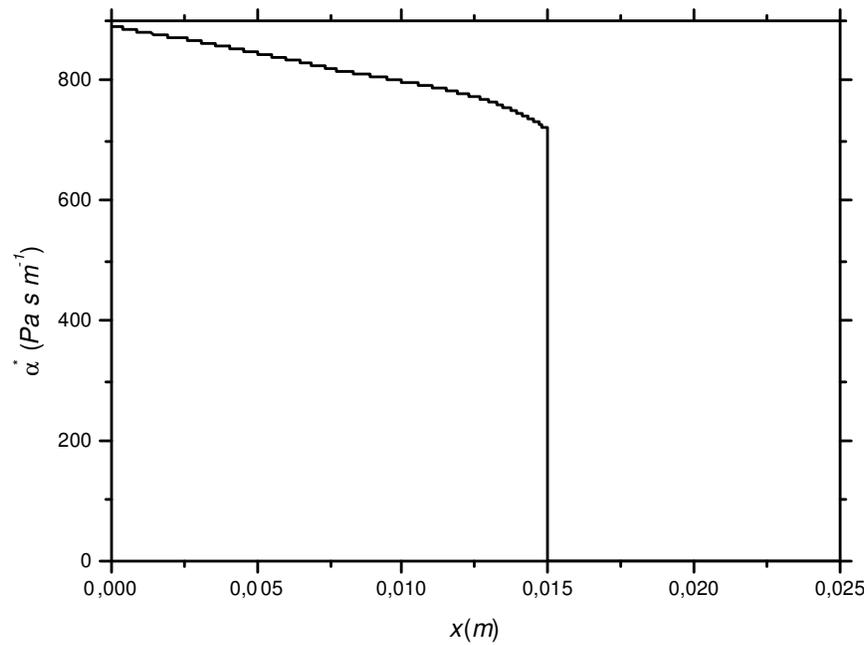


Figura 91. Função adjunta da fração de vazio para a resposta $P(x = 0,015 m)$.

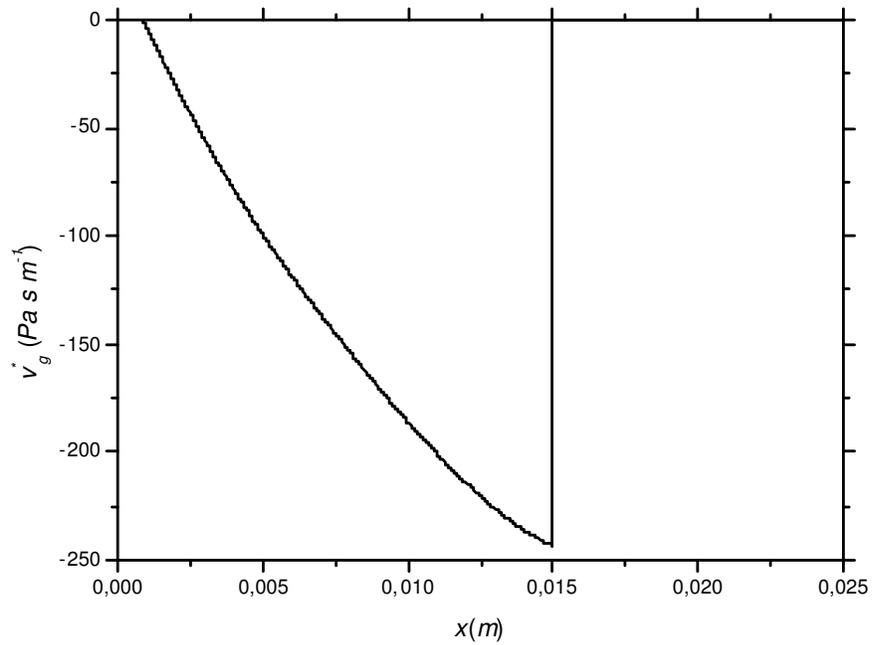


Figura 92. Velocidade do gás adjunta para a resposta $P(x = 0,015m)$.

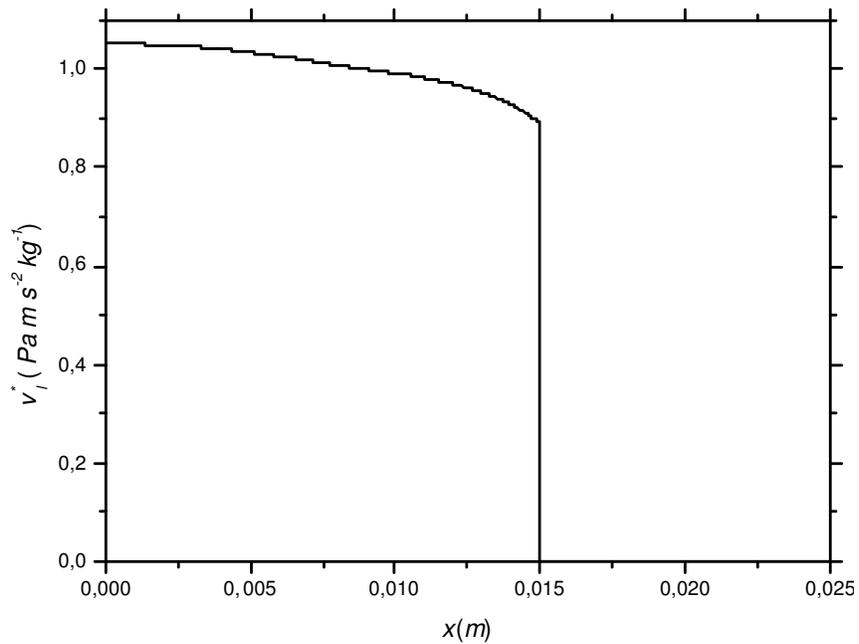


Figura 93. Função adjunta da velocidade do líquido para a resposta $P(x = 0,015m)$.

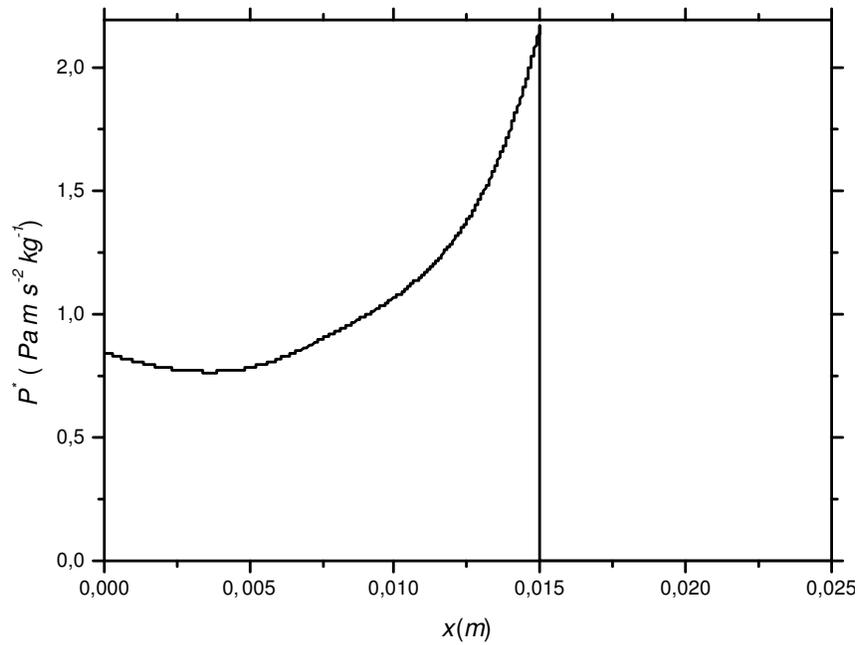


Figura 94. Função adjunta da pressão para a resposta $P(x = 0,015 m)$.

7.2.2.12. Resultados das funções adjuntas para resposta: $P(x = L)$

A solução das funções adjuntas para o funcional $P(x = L)$ é mostrada nas Figuras 95 a 98. Neste caso o sistema adjunto é resolvido com o vetor fonte dado por: $S^+ = [0, 0, 0, 2\delta(x - L)]$. As variáveis adjunta α^* e v_g^* atrás da descontinuidade em $x < L$ toma valores que crescem da saída até a entrada, (ver Figura 95 e 96).

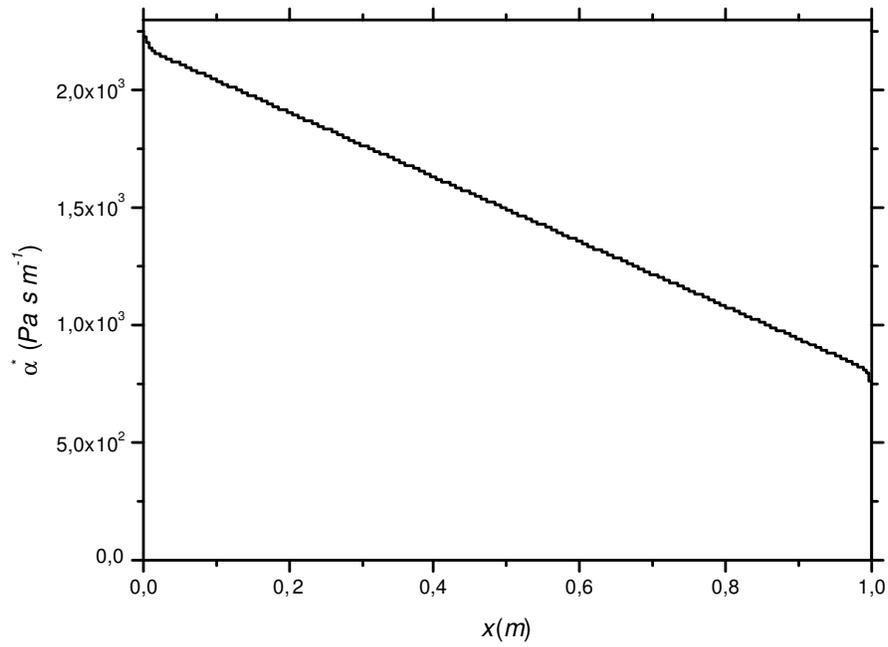


Figura 95. Função adjunta da fração de vazio para a resposta $P(x = L)$.

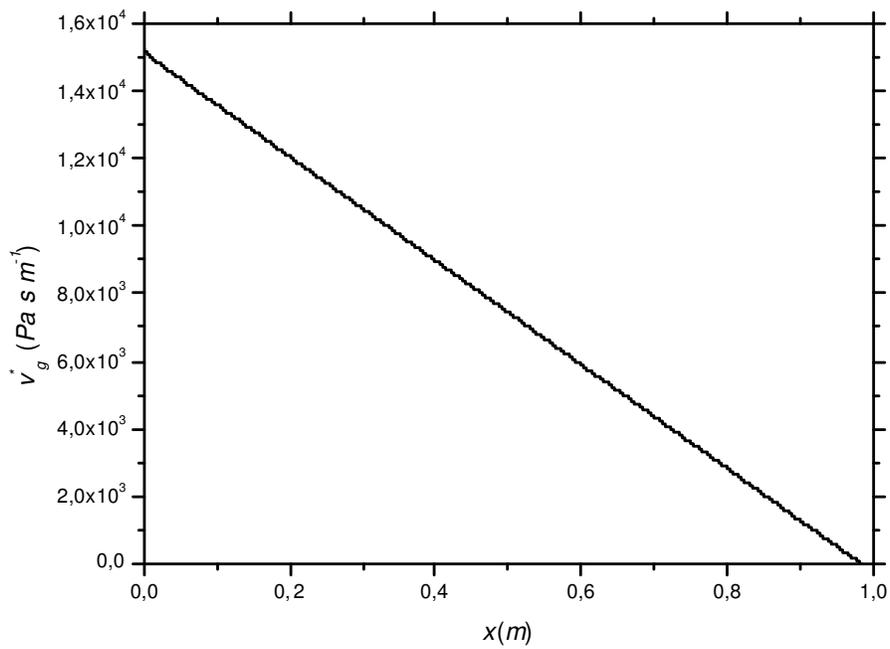


Figura 96. Função adjunta da velocidade do gás para a resposta $P(x = L)$.

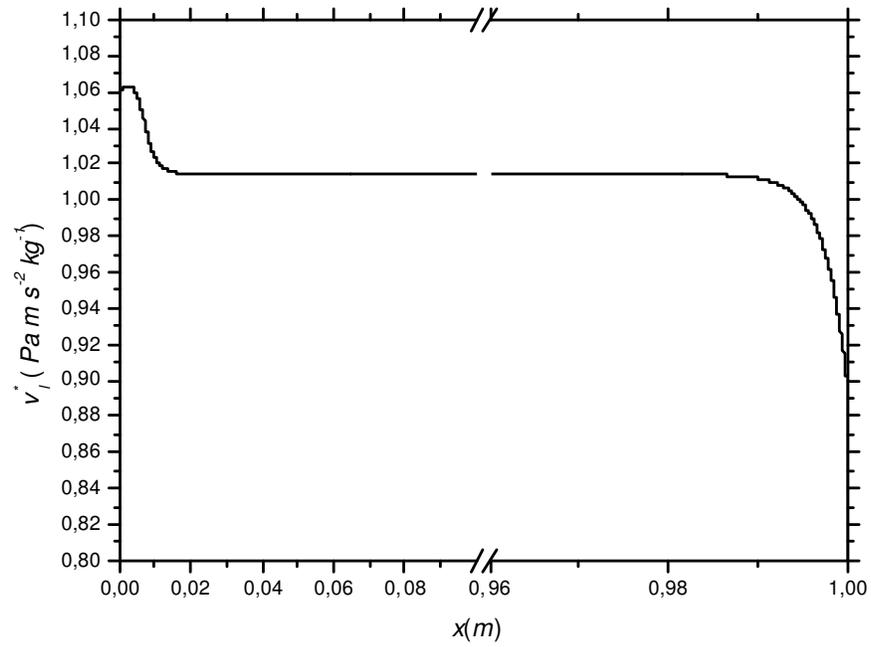


Figura 97. Velocidade do Líquido adjunta para a resposta $P(x=L)$.

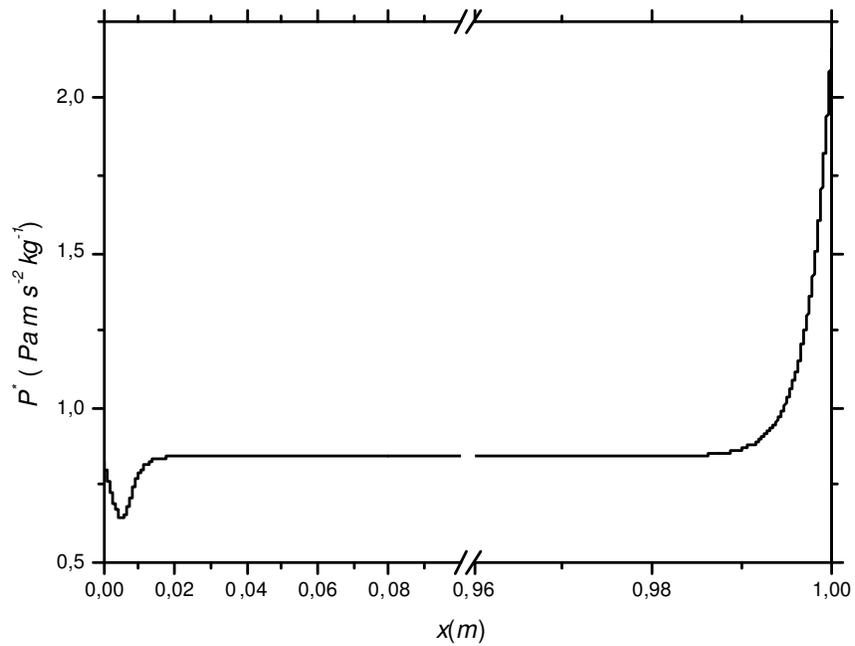


Figura 98 Função adjunta da pressão para a resposta $P(x=L)$.

7.2.3. Análises de sensibilidade.

Nas Tabelas 14, 15 e 16, mostradas a seguir, apresentam-se os resultados dos coeficientes de sensibilidade relativos para funcionais de resposta $\bar{\alpha}$, $\alpha(x=0,015m)$ e $\alpha(x=L)$ obtidos pelos métodos perturbativo e direto. Das Tabelas, observa-se que as variações do parâmetro ρ_g alteram mais a resposta $\bar{\alpha}$ quando comparado aos outros parâmetros. As variações do parâmetro α_0 altera mais α em $x=0,015m$ e as variações do parâmetro v_{g0} altera mais α na saída do tubo, isto é em $x=L$.

Tabela 14. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\bar{\alpha}$.

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$1,66 \cdot 10^{-04}$	$1,66 \cdot 10^{-04}$	$3,76 \cdot 10^{-03}$
ρ_l	$-1,66 \cdot 10^{-04}$	$-1,58 \cdot 10^{-04}$	$5,41 \cdot 10^{-02}$
α_0	$6,76 \cdot 10^{-01}$	$6,77 \cdot 10^{-01}$	$9,92 \cdot 10^{-05}$
v_{g0}	$9,88 \cdot 10^{-01}$	$9,87 \cdot 10^{-01}$	$5,20 \cdot 10^{-04}$
v_{l0}	$-1,88 \cdot 10^{-02}$	$-1,88 \cdot 10^{-02}$	$5,48 \cdot 10^{-04}$
g	$-1,59 \cdot 10^{-02}$	$-1,59 \cdot 10^{-02}$	$2,53 \cdot 10^{-03}$
C_d/R_b	$1,50 \cdot 10^{-01}$	$1,50 \cdot 10^{-01}$	$9,32 \cdot 10^{-04}$

Tabela 15. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\alpha(x=0,015m)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$5,05 \cdot 10^{-04}$	$5,06 \cdot 10^{-04}$	$1,16 \cdot 10^{-03}$
ρ_l	$-5,05 \cdot 10^{-04}$	$-2,65 \cdot 10^{-04}$	$9,10 \cdot 10^{-01}$
α_0	$6,90 \cdot 10^{-01}$	$6,91 \cdot 10^{-01}$	$4,98 \cdot 10^{-04}$
v_{g0}	$1,01 \cdot 10^{+00}$	$1,01 \cdot 10^{+00}$	$5,87 \cdot 10^{-04}$
v_{l0}	$-1,35 \cdot 10^{-02}$	$-1,34 \cdot 10^{-02}$	$2,73 \cdot 10^{-03}$
g	$-2,59 \cdot 10^{-02}$	$-2,59 \cdot 10^{-02}$	$5,84 \cdot 10^{-04}$
C_d/R_b	$7,01 \cdot 10^{-02}$	$6,98 \cdot 10^{-02}$	$4,67 \cdot 10^{-03}$

Tabela 16. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\alpha(x=L)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$1,58 \cdot 10^{-04}$	$1,58 \cdot 10^{-04}$	$1,85 \cdot 10^{-03}$
ρ_l	$-1,58 \cdot 10^{-04}$	$-1,58 \cdot 10^{-04}$	$1,94 \cdot 10^{-03}$
α_0	$9,37 \cdot 10^{-01}$	$6,74 \cdot 10^{-01}$	$3,89 \cdot 10^{-01}$
v_{g0}	$9,95 \cdot 10^{-01}$	$9,93 \cdot 10^{-01}$	$1,88 \cdot 10^{-03}$
v_{l0}	$-1,92 \cdot 10^{-02}$	$-1,91 \cdot 10^{-02}$	$3,62 \cdot 10^{-03}$
g	$-1,57 \cdot 10^{-02}$	$-1,57 \cdot 10^{-02}$	$5,65 \cdot 10^{-05}$
C_d/R_b	$1,57 \cdot 10^{-01}$	$1,59 \cdot 10^{-01}$	$1,34 \cdot 10^{-02}$

Nas Tabelas 17, 18 e 19, mostradas a seguir, são apresentados os resultados dos coeficientes de sensibilidade relativos a funcionais de resposta \bar{v}_g , $v_g(x=0,015m)$ e $v_g(x=L)$. Das Tabelas, observa-se que as respostas \bar{v}_g e v_g em $x=0,015m$ são mais sensíveis as variações do parâmetro C_d/R_b do que as variações dos outros parâmetros, enquanto que a resposta v_g na saída do tubo é muito sensível às variações do parâmetro α_0 .

Tabela 17. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta \bar{v}_g .

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$-1,63 \cdot 10^{-04}$	$-1,64 \cdot 10^{-04}$	$5,70 \cdot 10^{-03}$
ρ_l	$1,63 \cdot 10^{-04}$	$1,60 \cdot 10^{-04}$	$1,82 \cdot 10^{-02}$
α_0	$-9,90 \cdot 10^{-02}$	$-9,91 \cdot 10^{-02}$	$8,21 \cdot 10^{-04}$
v_{g0}	$4,68 \cdot 10^{-02}$	$4,66 \cdot 10^{-02}$	$4,10 \cdot 10^{-03}$
v_{l0}	$1,90 \cdot 10^{-02}$	$1,90 \cdot 10^{-02}$	$3,54 \cdot 10^{-05}$
g	$1,59 \cdot 10^{-02}$	$1,60 \cdot 10^{-02}$	$5,47 \cdot 10^{-03}$
C_d/R_b	$-1,54 \cdot 10^{-01}$	$-1,57 \cdot 10^{-01}$	$1,51 \cdot 10^{-02}$

Tabela 18. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $v_g(x = 0,015m)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$-5,04 \cdot 10^{-04}$	$-5,06 \cdot 10^{-04}$	$2,19 \cdot 10^{-03}$
ρ_l	$5,04 \cdot 10^{-04}$	$2,64 \cdot 10^{-04}$	$9,08 \cdot 10^{-01}$
α_0	$-1,13 \cdot 10^{-01}$	$-1,13 \cdot 10^{-01}$	$1,01 \cdot 10^{-03}$
v_{g0}	$3,28 \cdot 10^{-02}$	$3,30 \cdot 10^{-02}$	$5,26 \cdot 10^{-03}$
v_{l0}	$1,34 \cdot 10^{-02}$	$1,34 \cdot 10^{-02}$	$2,73 \cdot 10^{-03}$
g	$2,59 \cdot 10^{-02}$	$2,59 \cdot 10^{-02}$	$4,77 \cdot 10^{-04}$
C_d/R_b	$-7,03 \cdot 10^{-02}$	$-6,98 \cdot 10^{-02}$	$7,38 \cdot 10^{-03}$

Tabela 19. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional – resposta $v_g(x = L)$

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$-1,57 \cdot 10^{-04}$	$-1,58 \cdot 10^{-04}$	$5,58 \cdot 10^{-03}$
ρ_l	$1,57 \cdot 10^{-04}$	$1,58 \cdot 10^{-04}$	$5,49 \cdot 10^{-03}$
α_0	$-9,85 \cdot 10^{-02}$	$-9,86 \cdot 10^{-02}$	$7,82 \cdot 10^{-04}$
v_{g0}	$4,52 \cdot 10^{-02}$	$4,50 \cdot 10^{-02}$	$4,51 \cdot 10^{-03}$
v_{l0}	$1,91 \cdot 10^{-02}$	$1,91 \cdot 10^{-02}$	$1,46 \cdot 10^{-04}$
g	$1,57 \cdot 10^{-02}$	$1,58 \cdot 10^{-02}$	$5,44 \cdot 10^{-03}$
C_d/R_b	$-1,57 \cdot 10^{-01}$	$-1,60 \cdot 10^{-01}$	$1,51 \cdot 10^{-02}$

Nas Tabelas 20 ,21 e 22, mostradas a seguir, apresentam-se os resultados dos coeficientes de sensibilidade relativos para os funcionais de resposta \bar{v}_l , $v_l(x = 0,015m)$ e $v_l(x = L)$. Das Tabelas, observa-se que \bar{v}_l varia mais quando o parâmetro v_{g0} é alterado. As variações do parâmetro α_0 provocam grande sensibilidade a v_l tanto no ponto $x = 0,015m$ quanto na saída do tubo.

Nas Tabelas 23, 24 e 25 mostradas a seguir, apresentam-se os resultados dos coeficientes de sensibilidade relativos para os funcionais de resposta \bar{P} , $P(x = 0,015m)$ e $P(x = L)$. Das Tabelas, observa-se que \bar{P} varia mais quando o parâmetro α_0 é alterado. As variações do parâmetro ρ_l provocam grande sensibilidade a P tanto no ponto $x = 0,015m$ quanto na saída do tubo.

Tabela 20. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta \bar{v}_l .

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$1,51 \cdot 10^{-05}$	$1,51 \cdot 10^{-05}$	$3,03 \cdot 10^{-03}$
ρ_l	$-1,51 \cdot 10^{-05}$	$-1,43 \cdot 10^{-05}$	$5,94 \cdot 10^{-02}$
α_0	$1,31 \cdot 10^{-01}$	$1,31 \cdot 10^{-01}$	$4,59 \cdot 10^{-04}$
v_{g0}	$8,93 \cdot 10^{-02}$	$8,91 \cdot 10^{-02}$	$2,64 \cdot 10^{-03}$
v_{l0}	$2,81 \cdot 10^{-02}$	$2,81 \cdot 10^{-02}$	$1,41 \cdot 10^{-04}$
g	$-1,44 \cdot 10^{-03}$	$-1,44 \cdot 10^{-03}$	$8,22 \cdot 10^{-04}$
C_d/R_b	$1,35 \cdot 10^{-02}$	$1,37 \cdot 10^{-02}$	$1,37 \cdot 10^{-02}$

Tabela 21. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $v_l(x = 0,015m)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$4,69 \cdot 10^{-05}$	$4,69 \cdot 10^{-05}$	$6,93 \cdot 10^{-04}$
ρ_l	$-4,69 \cdot 10^{-05}$	$-2,45 \cdot 10^{-05}$	$9,11 \cdot 10^{-01}$
α_0	$-1,28 \cdot 10^{-01}$	$-1,28 \cdot 10^{-01}$	$3,99 \cdot 10^{-04}$
v_{g0}	$9,35 \cdot 10^{-02}$	$4,27 \cdot 10^{-02}$	$1,19 \cdot 10^{-00}$
v_{l0}	$2,85 \cdot 10^{-02}$	$2,86 \cdot 10^{-02}$	$1,74 \cdot 10^{-04}$
g	$-2,40 \cdot 10^{-03}$	$-2,40 \cdot 10^{-03}$	$1,03 \cdot 10^{-03}$
C_d/R_b	$6,49 \cdot 10^{-03}$	$6,48 \cdot 10^{-03}$	$2,65 \cdot 10^{-03}$

Tabela 22. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional – resposta $v_l(x = L)$

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$1,42 \cdot 10^{-05}$	$1,40 \cdot 10^{-05}$	$1,25 \cdot 10^{-02}$
ρ_l	$-1,42 \cdot 10^{-05}$	$1,27 \cdot 10^{-04}$	$1,11 \cdot 10^{-00}$
α_0	$-1,32 \cdot 10^{-01}$	$-1,32 \cdot 10^{-01}$	$1,67 \cdot 10^{-04}$
v_{g0}	$8,91 \cdot 10^{-02}$	$8,90 \cdot 10^{-02}$	$1,21 \cdot 10^{-03}$
v_{l0}	$2,81 \cdot 10^{-02}$	$2,81 \cdot 10^{-02}$	$4,04 \cdot 10^{-05}$
g	$-1,41 \cdot 10^{-03}$	$-1,40 \cdot 10^{-03}$	$9,75 \cdot 10^{-03}$
C_d/R_b	$1,40 \cdot 10^{-02}$	$1,41 \cdot 10^{-02}$	$5,03 \cdot 10^{-03}$

Tabela 23. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta \bar{P} .

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$-3,73 \cdot 10^{-06}$	$-3,72 \cdot 10^{-06}$	$1,32 \cdot 10^{-03}$
ρ_l	$-4,60 \cdot 10^{-02}$	$-4,60 \cdot 10^{-02}$	$1,26 \cdot 10^{-04}$
α_0	$2,98 \cdot 10^{-03}$	$2,98 \cdot 10^{-03}$	$1,34 \cdot 10^{-03}$
v_{g0}	$4,03 \cdot 10^{-03}$	$4,03 \cdot 10^{-03}$	$1,48 \cdot 10^{-03}$
v_{l0}	$-5,68 \cdot 10^{-05}$	$-5,65 \cdot 10^{-05}$	$5,43 \cdot 10^{-03}$
g	$-4,70 \cdot 10^{-03}$	$-4,70 \cdot 10^{-03}$	$1,37 \cdot 10^{-04}$
C_d/R_b	$5,84 \cdot 10^{-04}$	$5,92 \cdot 10^{-04}$	$1,30 \cdot 10^{-02}$

Tabela 24. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $P(x = 0,015m)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$-3,68 \cdot 10^{-07}$	$-3,68 \cdot 10^{-07}$	$2,80 \cdot 10^{-04}$
ρ_l	$-9,51 \cdot 10^{-04}$	$-9,48 \cdot 10^{-04}$	$2,39 \cdot 10^{-03}$
α_0	$2,47 \cdot 10^{-04}$	$2,47 \cdot 10^{-04}$	$1,66 \cdot 10^{-03}$
v_{g0}	$1,83 \cdot 10^{-05}$	$1,78 \cdot 10^{-05}$	$2,40 \cdot 10^{-02}$
v_{l0}	$1,84 \cdot 10^{-05}$	$1,85 \cdot 10^{-05}$	$1,68 \cdot 10^{-03}$
g	$-1,27 \cdot 10^{-04}$	$-1,27 \cdot 10^{-04}$	$1,84 \cdot 10^{-03}$
C_d/R_b	$-3,25 \cdot 10^{-05}$	$-3,24 \cdot 10^{-05}$	$8,04 \cdot 10^{-04}$

Tabela 25. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $P(x = L)$

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$-7,58 \cdot 10^{-06}$	$-7,58 \cdot 10^{-06}$	$1,79 \cdot 10^{-04}$
ρ_l	$-9,70 \cdot 10^{-02}$	$-9,70 \cdot 10^{-02}$	$1,65 \cdot 10^{-05}$
α_0	$6,07 \cdot 10^{-03}$	$6,07 \cdot 10^{-03}$	$1,96 \cdot 10^{-04}$
v_{g0}	$8,56 \cdot 10^{-03}$	$8,56 \cdot 10^{-03}$	$4,70 \cdot 10^{-04}$
v_{l0}	$-1,43 \cdot 10^{-04}$	$-1,42 \cdot 10^{-04}$	$2,73 \cdot 10^{-03}$
g	$-9,87 \cdot 10^{-03}$	$-9,87 \cdot 10^{-03}$	$5,12 \cdot 10^{-06}$
C_d/R_b	$1,29 \cdot 10^{-03}$	$1,30 \cdot 10^{-03}$	$4,37 \cdot 10^{-03}$

A comparação entre os coeficientes de sensibilidade: direto e perturbativo mostra uma boa concordância entre os valores calculados. Foram necessárias realizar 16 execuções na construção de cada Tabela para o cálculo dos coeficientes de sensibilidades diretos.

7.2.4. Resultados do estado transitório direto

A evolução em 3D do vetor de estado no estado transitório é apresentada a continuação. Na Figura 99 observa-se que se forma uma frente de fração de vazio que se desloca na direção positiva nos primeiros instantes. O transitório evolui até se atingir o estado estacionário. As Figuras 100 e 101 mostram a evolução em 3D da velocidade do gás e do líquido, observa-se que o gás e o líquido mudam suas velocidades uniformemente até atingir os valores constantes de estado estacionário. A queda de pressão, como se mostra na Figura 102, não varia muito no transitório.

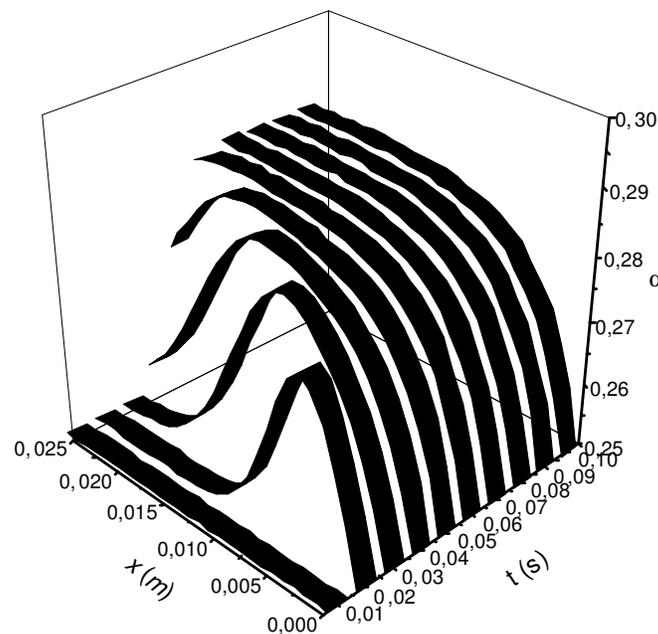


Figura 99. Fração de vazio, transitório direto, 3D.

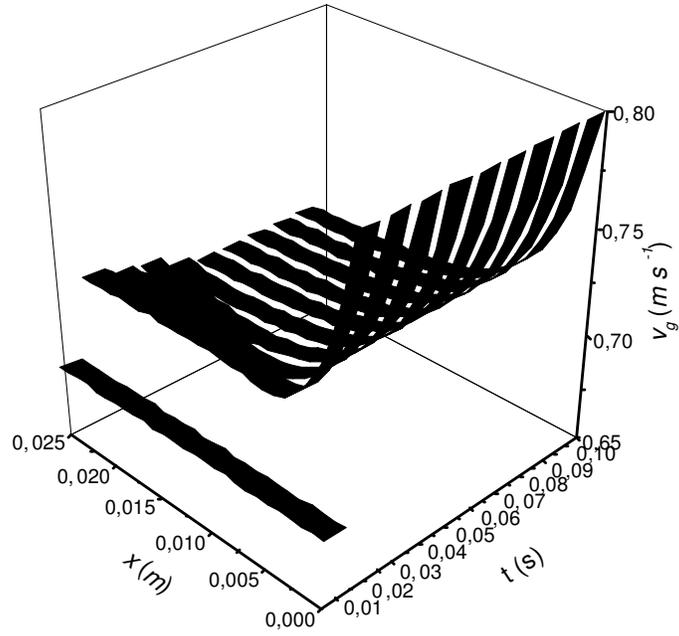


Figura 100. Velocidade do gás, transitório direto, 3D.

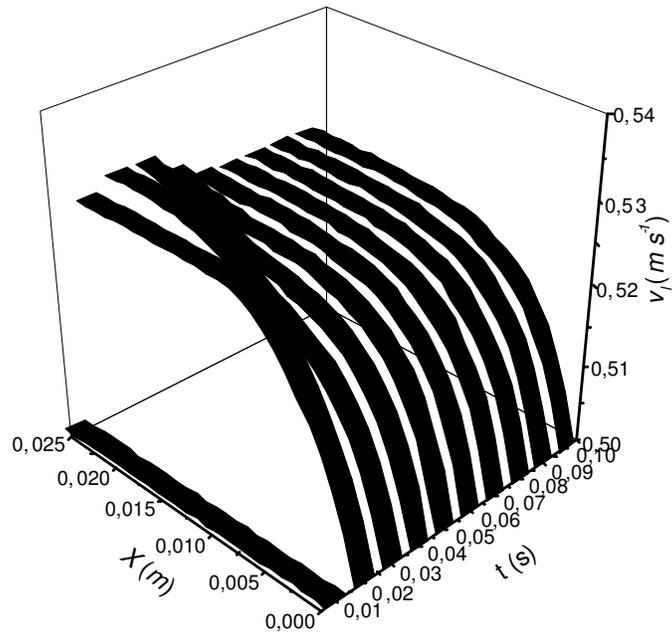


Figura 101. Velocidade do líquido, transitório direto, 3D.

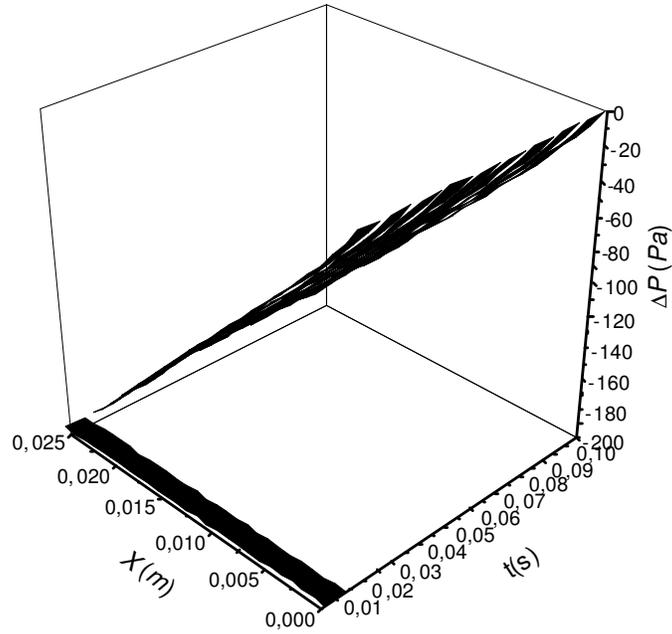


Figura 102. Pressão, transitório direto, 3D.

7.2.5. Análises de sensibilidade.

A Tabela 26 mostrada a seguir, apresenta os resultados do coeficiente de sensibilidade relativos ao funcional - resposta $\bar{\alpha}(T)$. Da Tabela, observa-se, que $\bar{\alpha}(T)$ é mais sensível às variações do parâmetro α_{in} que às variações dos outros parâmetros.

Tabela 26. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\bar{\alpha}(T)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$2,99 \cdot 10^{-06}$	$3,01 \cdot 10^{-06}$	$4,02 \cdot 10^{-03}$
ρ_l	$-2,99 \cdot 10^{-06}$	$-3,01 \cdot 10^{-06}$	$3,92 \cdot 10^{-03}$
α_0	$3,65 \cdot 10^{-02}$	$3,57 \cdot 10^{-02}$	$2,44 \cdot 10^{-02}$
v_{g0}	$2,86 \cdot 10^{-02}$	$2,87 \cdot 10^{-02}$	$2,95 \cdot 10^{-03}$
v_{l0}	$-2,08 \cdot 10^{-02}$	$-2,09 \cdot 10^{-02}$	$2,79 \cdot 10^{-03}$
α_{in}	$9,63 \cdot 10^{-01}$	$9,63 \cdot 10^{-01}$	$3,82 \cdot 10^{-04}$
v_{gin}	$-2,61 \cdot 10^{-03}$	$-2,64 \cdot 10^{-03}$	$1,13 \cdot 10^{-02}$
v_{lin}	$4,83 \cdot 10^{-03}$	$4,85 \cdot 10^{-03}$	$5,86 \cdot 10^{-03}$
g	$-2,81 \cdot 10^{-04}$	$-2,82 \cdot 10^{-04}$	$4,16 \cdot 10^{-03}$
C_d/R_b	$2,97 \cdot 10^{-03}$	$2,98 \cdot 10^{-03}$	$4,048 \cdot 10^{-03}$

As Tabelas 27 e 28 apresentam os resultados dos coeficientes de sensibilidade relativo para o funcional - resposta $\bar{v}_g(T)$ e $\bar{v}_l(T)$. Estas respostas são mais sensíveis às variações dos parâmetros α_0, v_{g0} e v_{l0} que às variações dos outros parâmetros.

Tabela 27. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\bar{v}_g(T)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$-8,82 \cdot 10^{-05}$	$-8,83 \cdot 10^{-05}$	$1,14 \cdot 10^{-03}$
ρ_l	$8,82 \cdot 10^{-05}$	$8,09 \cdot 10^{-05}$	$8,22 \cdot 10^{-02}$
α_0	$1,08 \cdot 10^{-01}$	$1,09 \cdot 10^{-01}$	$1,15 \cdot 10^{-03}$
v_{g0}	$2,98 \cdot 10^{-01}$	$2,98 \cdot 10^{-01}$	$5,50 \cdot 10^{-04}$
v_{l0}	$5,60 \cdot 10^{-01}$	$5,60 \cdot 10^{-01}$	$7,34 \cdot 10^{-04}$
α_{in}	$-9,47 \cdot 10^{-02}$	$-9,48 \cdot 10^{-02}$	$1,39 \cdot 10^{-03}$
v_{gin}	$4,12 \cdot 10^{-02}$	$4,06 \cdot 10^{-02}$	$1,60 \cdot 10^{-02}$
v_{lin}	$-7,43 \cdot 10^{-02}$	$-7,45 \cdot 10^{-02}$	$1,93 \cdot 10^{-03}$
g	$8,59 \cdot 10^{-03}$	$8,60 \cdot 10^{-03}$	$1,13 \cdot 10^{-03}$
C_d/R_b	$-8,90 \cdot 10^{-02}$	$-8,92 \cdot 10^{-02}$	$1,25 \cdot 10^{-03}$

Tabela 28. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\bar{v}_l(T)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$3,94 \cdot 10^{-05}$	$3,95 \cdot 10^{-05}$	$9,99 \cdot 10^{-04}$
ρ_l	$-3,94 \cdot 10^{-05}$	$-3,73 \cdot 10^{-05}$	$5,52 \cdot 10^{-02}$
α_0	$1,36 \cdot 10^{-01}$	$1,36 \cdot 10^{-01}$	$1,34 \cdot 10^{-03}$
v_{g0}	$3,66 \cdot 10^{-01}$	$3,67 \cdot 10^{-01}$	$7,78 \cdot 10^{-04}$
v_{l0}	$6,96 \cdot 10^{-01}$	$6,96 \cdot 10^{-01}$	$4,49 \cdot 10^{-04}$
α_{in}	$-6,90 \cdot 10^{-02}$	$-6,92 \cdot 10^{-02}$	$2,22 \cdot 10^{-03}$
v_{gin}	$-1,78 \cdot 10^{-02}$	$-1,79 \cdot 10^{-02}$	$7,85 \cdot 10^{-03}$
v_{lin}	$3,38 \cdot 10^{-02}$	$3,29 \cdot 10^{-02}$	$2,59 \cdot 10^{-02}$
g	$-3,85 \cdot 10^{-03}$	$-3,85 \cdot 10^{-03}$	$1,02 \cdot 10^{-03}$
C_d/R_b	$3,99 \cdot 10^{-02}$	$3,99 \cdot 10^{-02}$	$1,20 \cdot 10^{-03}$

A Tabela 29 apresenta os resultados dos coeficientes de sensibilidade relativo para o funcional - resposta $\bar{P}(T)$. Este funcional - resposta é mais sensível a variações do parâmetro α_{in} que as variações dos outros parâmetros.

Tabela 29. Coeficientes de sensibilidade relativos para o funcional - resposta $\bar{P}(T)$.

p_i	Direto	Perturbativo	Erro
ρ_g	$-1,37 \cdot 10^{-05}$	$-1,37 \cdot 10^{-05}$	$8,03 \cdot 10^{-04}$
ρ_l	$-3,88 \cdot 10^{-02}$	$-3,88 \cdot 10^{-02}$	$7,47 \cdot 10^{-04}$
α_0	$-2,07 \cdot 10^{-03}$	$-2,09 \cdot 10^{-03}$	$8,36 \cdot 10^{-03}$
v_{g0}	$-7,60 \cdot 10^{-03}$	$-7,60 \cdot 10^{-03}$	$2,75 \cdot 10^{-04}$
v_{l0}	$-1,44 \cdot 10^{-02}$	$-1,46 \cdot 10^{-02}$	$1,35 \cdot 10^{-02}$
α_{in}	$1,34 \cdot 10^{-02}$	$1,36 \cdot 10^{-02}$	$9,49 \cdot 10^{-03}$
v_{gin}	$-1,98 \cdot 10^{-05}$	$-2,28 \cdot 10^{-05}$	$1,51 \cdot 10^{-01}$
v_{lin}	$1,91 \cdot 10^{-02}$	$1,93 \cdot 10^{-02}$	$9,35 \cdot 10^{-03}$
g	$-3,67 \cdot 10^{-03}$	$-3,67 \cdot 10^{-03}$	$3,55 \cdot 10^{-04}$
C_d/R_b	$8,70 \cdot 10^{-04}$	$8,70 \cdot 10^{-04}$	$3,56 \cdot 10^{-03}$

8. CONCLUSÕES

A teoria de perturbação, via formalismo diferencial, foi aplicada a dois casos particulares envolvendo escoamento bifásico com excelentes resultados. Para o estudo de sensibilidades três códigos computacionais foram desenvolvidos: o código **DIRETO** para resolver as equações de diferenças que descrevem o comportamento do sistema, o código **ADJUNTO** para resolver as equações de diferenças adjuntas e o código **SENSIBILIDADES** para resolver as integrais relativas aos coeficientes de sensibilidade.

Dois tipos de respostas foram estudados: as médias ao longo do tubo e o valor de uma variável numa determinada posição do tubo. O sistema adjunto e as expressões dos coeficientes de sensibilidade relativos a diversos parâmetros são discutidos. Foram identificados os parâmetros de maior e de menor importância para as respostas analisadas. Alguns coeficientes de sensibilidade resultaram, praticamente, iguais a zero, donde se pode concluir que variações destes parâmetros pouco influem nas variáveis consideradas.

Os coeficientes de sensibilidade calculados pelo método perturbativo foram comparados com os resultados obtidos através do código **DIRETO** executando o mesmo seguidas vezes. De uma forma geral os resultados entre os dois métodos mostram boas concordâncias.

Foi demonstrado que o formalismo diferencial é uma ferramenta rápida e eficiente, do ponto de vista computacional, já que apenas uma execução dos códigos: **DIRETO**, **ADJUNTO** e **SENSIBILIDADES** é necessária para obtenção dos coeficientes de sensibilidade, sendo a resposta perturbada obtida através da expressão:

$$S_{R,p} = \frac{\Delta R}{\Delta p} \frac{p_{np}}{R_{np}} = \frac{R_p - R_{np}}{\Delta p} \frac{p_{np}}{R_{np}}$$

Os resultados obtidos estimulam a continuação deste trabalho em questões mais complexas, como por exemplo:

- Calcular os coeficientes de sensibilidade em relação ao parâmetro C_d o qual é função das variáveis diretas α , v_g e v_l . Neste trabalho ele foi considerado constante.

Obter coeficientes de sensibilidade para respostas mais realistas, como: variáveis de interesse no ponto (x_0, t_0) .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE LIMA, F. R., ALVIM, A.C. M. TEMPERA V2 – Um programa para análise de sensibilidade num canal refrigerante de reatores nucleares, Rio de Janeiro COPPE /UFRJ, 1986 81p. (Programa de Engenharia Nuclear, PEN-130)

ANDRADE LIMA, F. R., Aplicações de métodos perturbativos ao modelo multicanal cobra-iv-i para cálculos de sensibilidade em núcleos de reatores nucleares, Rio de Janeiro, (COPPE/UFRJ), Tese de doutorado, 1990.

ANTAL, S. P. LAHEY, R. T.e Jr. FLAHERTY J.E., Analysis of phase distribution in fully developed laminar bubbly two-phase flow, It. J. Multiphase Flow, 17, pp. 635-652, 1991.

BALIÑO, J. L.; LARRETEGUY, A.; LORENZO, A.; ANDRADE LIMA, F. R., The differential perturbative method applied to the sensitivity analysis for waterhammer problems in hydraulic networks, *Applied Mathematical Modelling*, 25, pp. 1117-1138, 2001.

CACUCI, D. G.; WACHOLDER, E.; Adjoint sensitivity analysis for transient two - phase flow, Nuclear Science and Engineering, Vol. 82, No. 4, pp. 461-468, 1982.

CACUCI, D. G.; BUJOR-IONESCU, M., Adjoint sensitivity analysis of the relap5/mod3.2 two – fluid thermal- hydraulic code system: theory, Nuclear Science and Engineering, Vol.136, pp. 59-84, 2000.

CELIK, I. and WANG, Y. Z., Numerical simulation of circulation in gas - liquid column reactor: isothermal bubbly, laminar flow, Vol. 30, 6, pp. 1053-1070, 1994.

COQUEL, F. et al., A numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows, Journal of Computational Physics, 136, 272-288, 1997.

DREW, A. D. and PASSMAN, L. S., Theory of multicomponent fluids, Springer-Verlag New York, Inc., 1999.

GANDINI, A., Generalized perturbation theory (GPT) methods a heuristic approach, Advances in Nuclear Science and Technology, pp. 205-380, 1987.

HANCOX, W. T.; FERCH, R. L.; LIU, W. S. and NIEMAN, R. E., One - dimensional models for transient gas-liquid flow in ducts, *International J. Multiphase Flow*, vol. 6, pp. 22-40, 1980.

IDE, H., MATSUMURA, H., TANAKA, Y. and FUKANO, T., Flow patterns and frictional pressure drop in gas-liquid two-phase flow in vertical capillary channels with rectangular cross-section, Trans. JSME 63, pp. 452-460, 1997.

ISHII, M., Thermo fluid dynamic theory of two- phase flow, Paris. Eyrolles, 1975.

KANWAL, R. P., Generalized Functions: Theory and Technique", Birkhäuser, ISBN 0-8176-4006-1, 1998.

LAHEY, R.T., Boiling heat transfer, Modern Developments Advances, Elsevier Science Publishers, 1992.

LAHEY, R. T, LOPEZ DE BERTODANO M., JONES O. C., Phase distribution in complex geometry ducts, Nucl. Eng. Design, p 177, 1993.

MACIEL, E. S. G., Análise de sensibilidade em um modelo simplificado do canal quente de reatores à água pressurizada, via formalismo diferencial, Dissertação de Mestrado em Tecnologias Energéticas Nucleares - Universidade Federal de Pernambuco, 1995.

MARCHUK, G. I., AGOSHKOV, V. I. and SHUTYAEV, V. P., Adjoint equations and perturbation algorithms in nonlinear problems, CRC Press, Inc, ISBN 0-8493-2871-3, 1996.

MAUDLIN, P. J.; PARKS, C. V. and WEBER C, F., ASME Paper N. 80-WA/HT-56. ORNL/CDS/TM-126, Oak Ridge National Laboratory, 1981.

MISHIMA, K. and ISHII, M., Flow regime transition criteria for upward two-phase flow in vertical tubes, Int. J. Heat Mass Transfer, 27, pp. 723-737, 1984.

BOISSON, N. and MALIN, M. R., Numerical prediction of two-phase flow in bubble columns, international journal for numerical methods in fluids, Vol. 23, pp. 1289-1310, 1996.

OBLOW, E. M., Sensitivity theory for reactor thermal-hydraulics problems, Nucl Sci. Eng., 68, pp.322, 1978.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P., Numerical recipes in FORTRAN 77. The art of scientific computing, 2a. Ed., Press Syndicate of the University of Cambridge (disponível on line em www.library.cornell.edu/nr/bookfpdf.html), 2001.

RANSOM, V. H., AND MOUSSEAU, V., Convergence and accuracy of the RELAP5 two-phase flow model, Proceedings of the ANS International Topical Meeting on Advances in Mathematics, Computations and Reactor Physics, Pittsburgh, Pennsylvania, 1991.

SANDER, R. M. G.; ANDRADE LIMA, F. R.; ALVIM, A. C. M, Aplicação da teoria da perturbação para a análises de sensibilidade em geradores de vapor de centrais nucleares PWR, In. Congresso Geral de Energia Nuclear, Vol. 2, Rio de Janeiro, pp 425-436, 1988.

WALLIS, G. B., On dimensional two-phase flow, McGraw-Hill Book Company.

WEBER, C. F. AND OBLOW, E. M., Sensitivity theory applied to a transient thermal - hydraulics problem; ORNL/TM 6900, 1979.

APÊNDICE 1. DESENVOLVIMENTO DO OPERADOR H E DO SISTEMA DERIVADO

Considerando a primeira equação diferencial direta dada por:

$$m_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial t} - (1 - \alpha) \frac{\partial v_l}{\partial x} + v_l \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \quad (\text{A1.1})$$

$$H_{11} = \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial [\bullet]}{\partial t} + v_l \frac{\partial [\bullet]}{\partial x} + [\bullet] \frac{\partial v_l}{\partial x} \quad (\text{A1.2})$$

$$H_{12} = \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial v_g} = 0 \quad (\text{A1.3})$$

$$H_{13} = \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial v_l} = -(1 - \alpha) \frac{\partial [\bullet]}{\partial x} + [\bullet] \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad (\text{A1.4})$$

$$H_{14} = \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial P} = 0 \quad (\text{A1.5})$$

Considerando a segunda equação diferencial direta como:

$$m_2 = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + v_g \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v_g}{\partial x} = 0 \quad (\text{A1.6})$$

$$H_{21} = \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial [\bullet]}{\partial t} + v_g \frac{\partial [\bullet]}{\partial x} + [\bullet] \frac{\partial v_g}{\partial x} \quad (\text{A1.7})$$

$$H_{22} = \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial v_g} = [\bullet] \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial [\bullet]}{\partial x} \quad (\text{A1.8})$$

$$H_{23} = \frac{\bar{\delta}m_2}{\partial v_l} = 0 \quad (\text{A1.9})$$

$$H_{24} = \frac{\bar{\delta}m_2}{\partial P} = 0 \quad (\text{A1.10})$$

Considerando a terceira equação diferencial direta dada como:

$$\begin{aligned} m_3 = & -\rho_l v_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} + [\rho_l(1-\alpha) + C_{vm}\alpha\rho_l] \frac{\partial v_l}{\partial t} - C_{vm}\alpha\rho_l \frac{\partial v_g}{\partial t} \\ & - \left[\rho_l v_l^2 + C_P \rho_l v_r^2 + C_r \rho_l v_r^2 \alpha - C_r \rho_l v_r^2 \alpha_l \right] \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \left[2C_r \rho_l v_r \alpha(1-\alpha) - C_{vm}\alpha\rho_l v_g \right] \frac{\partial v_g}{\partial x} + \\ & + \left[-2C_r \rho_l v_r \alpha(1-\alpha) + 2\rho_l v_l(1-\alpha) + C_{vm}\alpha\rho_l v_l \right] \frac{\partial v_l}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{\partial P}{\partial x} + \\ & - (1-\alpha)\rho_l g \cos \theta - \frac{3}{8} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| v_r = 0 \end{aligned} \quad (\text{A1.11})$$

$$\begin{aligned} H_{31} = \frac{\bar{\delta}m_3}{\partial \alpha} = & -\rho_l v_l \frac{\partial [\bullet]}{\partial t} + (-\rho_l + C_{vm}\rho_l) [\bullet] \frac{\partial v_l}{\partial t} - C_{vm}\rho_l [\bullet] \frac{\partial v_g}{\partial t} - (C_r + C_r)\rho_l v_r^2 [\bullet] \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \\ & - \left[\rho_l v_l^2 + (C_P \rho_l + C_r \rho_l \alpha - C_r \rho_l (1-\alpha)) v_r^2 \right] \frac{\partial [\bullet]}{\partial x} + \left[2C_r \rho_l v_r (1-2\alpha) - C_{vm}\rho_l v_g \right] [\bullet] \frac{\partial v_g}{\partial x} + \\ & + \left[-2C_r \rho_l v_r (1-2\alpha) - 2\rho_l v_l + C_{vm}\rho_l v_l \right] [\bullet] \frac{\partial v_l}{\partial x} - [\bullet] \frac{\partial P}{\partial x} - \rho_l g [\bullet] - \frac{3}{8} \frac{C_d}{R_b} \rho_l |v_r| v_r [\bullet] \end{aligned} \quad (\text{A1.12})$$

$$\begin{aligned}
H_{32} = \frac{\bar{\partial}m_3}{\partial v_g} = & -C_{vm}\alpha\rho_l \frac{\partial[\bullet]}{\partial t} - [C_P\rho_l + C_r\rho_l\alpha - C_r\rho_l(1-\alpha)]2(v_g - v_l)[\bullet] \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \\
& + [2C_r\rho_l\alpha(1-\alpha) - C_{vm}\alpha\rho_l][\bullet] \frac{\partial v_g}{\partial x} + [2C_r\rho_l v_r \alpha_g(1-\alpha) - C_{vm}\alpha\rho_l v_g] \frac{\partial[\bullet]}{\partial x} + \\
& + [-2C_r\rho_l\alpha(1-\alpha)][\bullet] \frac{\partial v_l}{\partial x} - \frac{3}{4} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| [\bullet]
\end{aligned} \tag{A1.13}$$

$$\begin{aligned}
H_{33} = \frac{\bar{\partial}m_3}{\partial v_l} = & -\rho_l[\bullet] \frac{\partial\alpha}{\partial t} + [\rho_l(1-\alpha) + C_{vm}\alpha\rho_l] \frac{\partial[\bullet]}{\partial t} \\
& - [2\rho_l v_l + (C_P\rho_l + C_r\rho_l\alpha - C_r\rho_l(1-\alpha))2(v_l - v_g)][\bullet] \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \\
& + [-2C_r\rho_l\alpha(1-\alpha)][\bullet] \frac{\partial v_g}{\partial x} + [2C_r\rho_l\alpha(1-\alpha) + 2\rho_l(1-\alpha) + C_{vm}\alpha\rho_l][\bullet] \frac{\partial v_l}{\partial x} + \\
& + [-2C_r\rho_l v_r \alpha(1-\alpha) + 2\rho_l v_l(1-\alpha) + C_{vm}\alpha\rho_l v_l] \frac{\partial[\bullet]}{\partial x} + \frac{3}{4} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| [\bullet]
\end{aligned} \tag{A1.14}$$

$$H_{34} = \frac{\bar{\partial}m_3}{\partial P} = (1-\alpha) \frac{\partial P_{/i}}{\partial x} \tag{A1.15}$$

Considerando a quarta equação diferencial direta como:

$$\begin{aligned}
m_4 = & \rho_g v_g \frac{\partial\alpha}{\partial t} + [\rho_g \alpha + C_{vm}\alpha\rho_l] \frac{\partial v_g}{\partial t} - C_{vm}\alpha\rho_l \frac{\partial v_l}{\partial t} + \rho_g v_g^2 \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \\
& + [2\rho_g v_g \alpha + C_{vm}\alpha\rho_l v_g - 2\alpha C_P \rho_l v_r] \frac{\partial v_g}{\partial x} + [2\alpha C_P \rho_l v_r - C_{vm}\alpha\rho_l v_l] \frac{\partial v_l}{\partial x} + \\
& + \alpha \frac{\partial P}{\partial x} - \alpha \rho_g g \cos \theta + \frac{3}{8} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| v_r = 0
\end{aligned} \tag{A1.16}$$

$$\begin{aligned}
H_{41} &= \frac{\bar{\partial}m_4}{\partial\alpha_g} = \rho_g v_g \frac{\partial[\bullet]}{\partial t} + (\rho_g + C_{vm}\rho_l)[\bullet] \frac{\partial v_g}{\partial t} - C_{vm}\rho_l[\bullet] \frac{\partial v_l}{\partial t} + \rho_g v_g^2 \frac{\partial[\bullet]}{\partial x} \\
&+ [2\rho_g v_g + C_{vm}\rho_l v_g - 2C_P\rho_l v_r][\bullet] \frac{\partial v_g}{\partial x} + [2C_P\rho_l v_r - C_{vm}\rho_l v_l][\bullet] \frac{\partial v_l}{\partial x} \\
&+ [\bullet] \frac{\partial P}{\partial x} + \rho_g g[\bullet] + \frac{3}{8} \frac{C_d}{R_b} \rho_l |v_r| v_r [\bullet]
\end{aligned} \tag{A1.17}$$

$$\begin{aligned}
H_{42} &= \frac{\partial m_4}{\partial v_g} = \rho_g [\bullet] \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (\rho_g \alpha + C_{vm}\alpha\rho_l) \frac{\partial[\bullet]}{\partial t} + 2\rho_g v_g \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\
&+ (2\rho_g \alpha + C_{vm}\alpha\rho_l - 2\alpha_g C_P\rho_l)[\bullet] \frac{\partial v_g}{\partial x} + (2\rho_g \alpha + C_{vm}\alpha\rho_l - 2\alpha C_P\rho_l) \frac{\partial[\bullet]}{\partial x} \\
&+ 2\alpha C_P\rho_l[\bullet] \frac{\partial v_l}{\partial x} + \frac{3}{4} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha_g |v_r|
\end{aligned} \tag{A1.18}$$

$$\begin{aligned}
H_{43} &= \frac{\bar{\partial}m_4}{\partial v_l} = -C_{vm}\alpha\rho_l \frac{\partial[\bullet]}{\partial t} + 2\alpha C_P\rho_l[\bullet] \frac{\partial v_g}{\partial x} + [-2\alpha C_P\rho_l - C_{vm}\alpha\rho_l][\bullet] \frac{\partial v_l}{\partial x} \\
&+ [2\alpha C_P\rho_l V_r - C_{vm}\alpha\rho_l v_l] \frac{\partial[\bullet]}{\partial x} - \frac{3}{4} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| [\bullet] \\
&= -C_{vm}\alpha\rho_l \frac{\partial v_{l/i}}{\partial t} + 2\alpha C_P\rho_l v_{l/i} \frac{\partial v_g}{\partial x} + (-2\alpha C_P\rho_l - C_{vm}\alpha\rho_l) v_{l/i} \frac{\partial v_l}{\partial x} \\
&+ (2\alpha C_P\rho_l V_r - C_{vm}\alpha\rho_l v_l) \frac{\partial v_{l/i}}{\partial x} - \frac{3}{4} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| v_{l/i}
\end{aligned} \tag{A1.19}$$

$$H_{44} = \frac{\bar{\partial}m_4}{\partial P} = \alpha \frac{\partial[\bullet]}{\partial x} \tag{A1.20}$$

O operador matricial definido segundo a Eq.(3.13), para este caso pode ser escrito como:

$$\mathbf{H} = \frac{\bar{\delta m}}{\bar{\delta f}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial m_1}{\partial v_g} & \frac{\partial m_1}{\partial v_l} & \frac{\partial m_1}{\partial P} \\ \frac{\partial m_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial m_2}{\partial v_g} & \frac{\partial m_2}{\partial v_l} & \frac{\partial m_2}{\partial P} \\ \frac{\partial m_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial m_3}{\partial v_g} & \frac{\partial m_3}{\partial v_l} & \frac{\partial m_3}{\partial P} \\ \frac{\partial m_4}{\partial \alpha} & \frac{\partial m_4}{\partial v_g} & \frac{\partial m_4}{\partial v_l} & \frac{\partial m_4}{\partial P} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.21})$$

Portanto o sistema de equações derivado pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{\partial \alpha_{/ pi}}{\partial t} + v_l \frac{\partial \alpha_{/ pi}}{\partial x} - \alpha_l \frac{\partial v_{l/ pi}}{\partial x} + \alpha_{/ pi} \frac{\partial v_l}{\partial x} - v_{l/ pi} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = S_\alpha(pi) \quad (\text{A1.22})$$

$$\frac{\partial \alpha_{/ pi}}{\partial t} + v_g \frac{\partial \alpha_{/ pi}}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v_{g/ pi}}{\partial x} + \alpha_{/ pi} \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_{g/ pi} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = S_{v_g}(pi) \quad (\text{A1.23})$$

$$\begin{aligned}
& -\rho_l v_l \frac{\partial \alpha_{/pi}}{\partial t} - [\rho_l v_l^2 + (C_p \rho_l + C_r \rho_l \alpha - C_r \rho_l (1 - \alpha)) v_r^2] \frac{\partial \alpha_{/pi}}{\partial x} + \\
& + \alpha_{/pi} \left\{ (-\rho_l + C_{vm} \rho_l) \frac{\partial v_l}{\partial t} - C_{vm} \rho_l \frac{\partial v_g}{\partial t} - (C_r + C_r) \rho_l v_r^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \right. \\
& + [2C_r \rho_l v_r (1 - 2\alpha) - C_{vm} \rho_l v_g] \frac{\partial v_g}{\partial x} + [-2C_r \rho_l v_r (1 - 2\alpha) - 2\rho_l v_l + C_{vm} \rho_l v_l] \frac{\partial v_l}{\partial x} - \\
& - \frac{\partial P}{\partial x} - \rho_l g - \frac{3 C_d}{8 R_b} \rho_l |v_r| v_r \left. \right\} - C_{vm} \alpha \rho_l \frac{\partial v_{g/pi}}{\partial t} + [2C_r \rho_l v_r \alpha (1 - \alpha) - C_{vm} \alpha \rho_l v_g] \frac{\partial v_{g/pi}}{\partial x} + \\
& v_{g/pi} \left\{ -[C_p \rho_l + C_r \rho_l \alpha - C_r \rho_l (1 - \alpha)] 2(v_g - v_l) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + [2C_r \rho_l \alpha_g (1 - \alpha) - C_{vm} \alpha \rho_l] \frac{\partial v_g}{\partial x} + \right. \\
& + [-2C_r \rho_l \alpha (1 - \alpha)] \frac{\partial v_l}{\partial x} - \frac{3 C_d}{4 R_b} \rho_l \alpha |v_r| - \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} \left. \right\} + [\rho_l (1 - \alpha) + C_{vm} \alpha \rho_l] \frac{\partial v_{l/pi}}{\partial t} + \\
& + [-2C_r \rho_l v_r \alpha (1 - \alpha) + 2\rho_l v_l (1 - \alpha) + C_{vm} \alpha \rho_l v_l] \frac{\partial v_{l/pi}}{\partial x} - \\
& - v_{l/pi} \left\{ -[2\rho_l v_l + (C_p \rho_l + C_r \rho_l \alpha - C_r \rho_l (1 - \alpha))] 2(v_l - v_g) \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \\
& + [-2C_r \rho_l \alpha (1 - \alpha)] \frac{\partial v_g}{\partial x} + [2C_r \rho_l \alpha (1 - \alpha) + 2\rho_l (1 - \alpha) + C_{vm} \alpha \rho_l] \frac{\partial v_l}{\partial x} + \\
& + \frac{3 C_d}{4 R_b} \rho_l \alpha |v_r| + (1 - \alpha) \frac{\partial P_{/pi}}{\partial x} = S_{v_l} (pi)
\end{aligned}$$

(A1.24)

$$\begin{aligned}
& \rho_g v_g \frac{\partial \alpha / pi}{\partial t} + \rho_g v_g^2 \frac{\partial \alpha / pi}{\partial x} + \alpha / pi \left[(\rho_g + C_{vm} \rho_l) \frac{\partial v_g}{\partial t} - C_{vm} \rho_l \frac{\partial v_l}{\partial t} \right. \\
& + (2\rho_g v_g + C_{vm} \rho_l v_g - 2C_P \rho_l v_r) \frac{\partial v_g}{\partial x} + (2C_P \rho_l v_r - C_{vm} \rho_l v_l) \frac{\partial v_l}{\partial x} \\
& + \left. \frac{\partial P}{\partial x} + \rho_g g + \frac{3}{8} \frac{C_d}{R_b} \rho_l |v_r| v_r \right] + (\rho_g \alpha + C_{vm} \alpha \rho_l) \frac{\partial v_g / pi}{\partial t} \\
& + (2\rho_g v_g \alpha + C_{vm} \alpha \rho_l v_g - 2\alpha C_P \rho_l V_r) \frac{\partial v_g / pi}{\partial x} + v_g / pi \left[\rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right. \\
& + 2\rho_g v_g \frac{\partial \alpha}{\partial x} + (2\rho_g \alpha + C_{vm} \alpha \rho_l - 2\alpha C_P \rho_l) \frac{\partial v_g}{\partial x} + 2\alpha C_P \rho_l \frac{\partial v_l}{\partial x} \\
& + \left. \frac{3}{4} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| \right] - C_{vm} \alpha \rho_l \frac{\partial v_l / pi}{\partial t} + (2\alpha C_P \rho_l V_r - C_{vm} \alpha \rho_l v_l) \frac{\partial v_l / pi}{\partial x} \\
& + v_l / pi \left[2\alpha C_P \rho_l \frac{\partial v_g}{\partial x} + (-2\alpha C_P \rho_l - C_{vm} \alpha \rho_l) \frac{\partial v_l}{\partial x} - \frac{3}{4} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| \right] \\
& + \alpha \frac{\partial P / pi}{\partial x} = S_P(pi)
\end{aligned} \tag{A1.25}$$

Em que;

$$S_\alpha(pi) = -\frac{\partial m_1}{\partial pi} \tag{A1.26}$$

$$S_{v_g}(pi) = -\frac{\partial m_2}{\partial pi} \tag{A1.27}$$

$$S_{v_l}(pi) = -\frac{\partial m_1}{\partial pi} \tag{A1.28}$$

$$S_P(pi) = -\frac{\partial m_1}{\partial pi} \tag{A1.29}$$

APÊNDICE 2. DESENVOLVIMENTO DO OPERADOR ADJUNTO H^* E DO SISTEMA ADJUNTO.

Multiplicando a equação derivada, Eq. (A1.22), pela função adjunta α^* e integrando cada termos por partes, quando necessário, tem-se:

$$\langle\langle \alpha^* \frac{\partial \alpha_{/pi}}{\partial t} \rangle\rangle = \int_0^L \alpha^* \alpha_{/pi} \Big|_0^T dx - \langle\langle \alpha_{/pi} \frac{\partial \alpha^*}{\partial t} \rangle\rangle \quad (A2.1)$$

$$\langle\langle \alpha^* v_l \frac{\partial \alpha_{/pi}}{\partial x} \rangle\rangle = \int_0^T \alpha^* v_l \alpha_{/pi} \Big|_0^x dt - \langle\langle \alpha_{/pi} v_l \frac{\partial \alpha^*}{\partial x} \rangle\rangle - \langle\langle \alpha_{/pi} \alpha^* \frac{\partial v_l}{\partial x} \rangle\rangle \quad (A2.2)$$

$$\langle\langle \alpha^* \alpha_{/pi} \frac{\partial v_l}{\partial x} \rangle\rangle \quad (A2.3)$$

$$-\langle\langle \alpha^* (1-\alpha_g) \frac{\partial v_{l/i}}{\partial x} \rangle\rangle = -\int_0^T \alpha^* \alpha_{l/i} v_{l/i} \Big|_0^x dt + \langle\langle v_{l/i} (1-\alpha_g) \frac{\partial \alpha^*}{\partial x} \rangle\rangle - \langle\langle v_{l/i} \alpha^* \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} \rangle\rangle \quad (A2.4)$$

$$\langle\langle \alpha^* v_{l/i} \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} \rangle\rangle \quad (A2.5)$$

Multiplicando a equação derivada, Eq. (A1.23), pela variável v_g^* adjunta e integrando cada termos por partes quando necessário, tem-se:

$$\langle\langle v_g^* \frac{\partial \alpha_{/pi}}{\partial t} \rangle\rangle = \int_0^L v_g^* \alpha_{/pi} \Big|_0^T dx - \langle\langle \alpha_{/pi} \frac{\partial v_g^*}{\partial t} \rangle\rangle \quad (A2.6)$$

$$\langle\langle v_g^* v_g \frac{\partial \alpha_{/pi}}{\partial x} \rangle\rangle = \int_0^T v_g^* v_g \alpha_{/pi} \Big|_0^x dt - \langle\langle \alpha_{/pi} v_g \frac{\partial v_g^*}{\partial x} \rangle\rangle - \langle\langle \alpha_{/pi} v_g^* \frac{\partial v_g}{\partial x} \rangle\rangle \quad (A2.7)$$

$$\langle\langle v_g^* \alpha_{/pi} \frac{\partial v_g}{\partial x} \rangle\rangle \quad (\text{A2.8})$$

$$\langle\langle v_g^* \alpha \frac{\partial v_{g/i}}{\partial x} \rangle\rangle = \int_0^T v_{g/i} v_g^* \alpha \Big|_0^x dt - \langle\langle v_{g/i} \alpha \frac{\partial v_g^*}{\partial x} \rangle\rangle - \langle\langle v_{g/i} v_g^* \frac{\partial \alpha}{\partial x} \rangle\rangle \quad (\text{A2.9})$$

$$\langle\langle v_g^* v_{g/i} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \rangle\rangle \quad (\text{A2.10})$$

Multiplicando a equação derivada, Eq. (A1.24), pela função adjunta v_l^* e integrando cada termo por partes quando necessário, tem-se:

$$\begin{aligned} & - \langle\langle v_l^* [\rho_l v_l^2 + (C_p \rho_l + C_r \rho_l \alpha - C_r \rho_l \alpha_l) v_r^2] \frac{\partial \alpha_{/pi}}{\partial x} \rangle\rangle = \\ & = v_l^* \int_0^x [\rho_l v_l^2 + (C_p \rho_l + C_r \rho_l \alpha - C_r \rho_l \alpha_l) v_r^2] \alpha_{/pi} \Big|_0^t dx \\ & + \langle\langle \alpha_{/pi} [\rho_l v_l^2 + (C_p \rho_l + C_r \rho_l \alpha - C_r \rho_l \alpha_l) v_r^2] \frac{\partial v_l^*}{\partial x} \rangle\rangle \\ & + \langle\langle \alpha_{/pi} v_l^* \left[2v_l \rho_l \frac{\partial v_l}{\partial x} + \langle 2v_r [C_p \rho_l + C_r \rho_l \alpha - C_r \rho_l \alpha_l] \frac{\partial v_r}{\partial x} + 2v_r^2 [C_r \rho_l + C_r \rho_l] \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right] \rangle\rangle \end{aligned} \quad (\text{A2.11})$$

$$\langle\langle \alpha_{/pi} (-\rho_l + C_{vm} \rho_l) \frac{\partial v_l}{\partial t} v_l^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.12})$$

$$- \langle\langle \alpha_{/pi} C_{vm} \rho_l \frac{\partial v_g}{\partial t} v_l^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.13})$$

$$- \langle\langle \alpha_{/pi} (C_r + C_r) \rho_l v_r^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} v_l^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.14})$$

$$\langle\langle \alpha_{/pi} \left[2C_r \rho_l v_r (1-2\alpha) - C_{vm} \rho_l v_g \right] \frac{\partial v_g}{\partial x} v_l^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.15})$$

$$\langle\langle \alpha_{/pi} \left[-2C_r \rho_l V_r (1-2\alpha) - 2\rho_l v_l + C_{vm} \rho_l v_l \right] \frac{\partial v_l}{\partial x} v_l^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.16})$$

$$- \langle\langle \alpha_{/pi} \frac{\partial P}{\partial x} v_l^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.17})$$

$$- \langle\langle \alpha_{/pi} \rho_l g v_l^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.18})$$

$$- \langle\langle \alpha_{/pi} \frac{3}{8} \frac{C_d}{R_b} \rho_l |v_r| v_r v_l^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.19})$$

$$- \langle\langle v_l^* C_{vm} \alpha \rho_l \frac{\partial v_{g/i}}{\partial t} \rangle\rangle = - \int_0^x v_{g/i} v_l^* C_{vm} \alpha \rho_l \Big|_0^t dx + \langle v_{g/i} C_{vm} \alpha \rho_l \frac{\partial v_l^*}{\partial t} \rangle \quad (\text{A2.20})$$

$$+ \langle\langle v_{g/i} v_l^* C_{vm} \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} \rangle\rangle$$

$$\langle\langle v_l^* \left[2C_r \rho_l v_r \alpha (1-\alpha) - C_{vm} \alpha \rho_l v_g \right] \frac{\partial v_{g/i}}{\partial x} \rangle\rangle =$$

$$= \int_0^x v_{g/i} v_l^* \left[2C_r \rho_l v_r \alpha (1-\alpha) - C_{vm} \alpha \rho_l v_g \right]_0^t dx$$

$$- \langle\langle v_{g/i} \left[2C_r \rho_l v_r \alpha (1-\alpha) - C_{vm} \alpha \rho_l v_g \right] \frac{\partial v_l^*}{\partial x} \rangle\rangle$$

$$- \langle\langle v_{g/i} v_l^* \left[2C_r \rho_l \alpha (1-\alpha) \frac{\partial v_r}{\partial x} + 2C_r \rho_l V_r (1-2\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x} - C_{vm} \rho_l v_g \frac{\partial \alpha}{\partial x} - C_{vm} \alpha \rho_l \frac{\partial v_g}{\partial x} \right] \rangle\rangle \quad (\text{A2.21})$$

$$- \langle\langle 2v_{g/i} \left[C_P \rho_l + C_r \rho_l \alpha_g - C_r \rho_l \alpha_l \right] (v_g - v_l) \frac{\partial \alpha}{\partial x} v_l^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.22})$$

$$\langle\langle v_{g/i} [2C_r \rho_l \alpha_g \alpha_l - C_{vm} \alpha_g \rho_l] \frac{\partial v_g}{\partial x} v_l^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.23})$$

$$- \langle\langle v_{g/i} [2C_r \rho_l \alpha_g \alpha_l] \frac{\partial v_l}{\partial x} v \rangle\rangle \quad (\text{A2.24})$$

$$- \langle\langle v_{g/i} \frac{3}{4} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha_g |v_r| v_l^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.25})$$

$$\begin{aligned} \langle\langle v_l^* [\rho_l (1-\alpha) + C_{vm} \alpha \rho_l] \frac{\partial v_{l/i}}{\partial t} \rangle\rangle &= \int_0^x v_l^* [\rho_l (1-\alpha) + C_{vm} \alpha \rho_l] v_{l/i} \Big|_0^t dx \\ - \langle\langle v_{l/i} [\rho_l (1-\alpha) + C_{vm} \alpha \rho_l] \frac{\partial v_l^*}{\partial t} \rangle\rangle &+ \langle\langle v_{l/i} v_l^* [\rho_l - C_{vm} \rho_l] \frac{\partial \alpha}{\partial t} \rangle\rangle \end{aligned} \quad (\text{A2.26})$$

$$\begin{aligned} &\langle\langle v_l^* [-2C_r \rho_l v_r \alpha (1-\alpha) + 2\rho_l v_l (1-\alpha) + C_{vm} \alpha \rho_l v_l] \frac{\partial v_{l/i}}{\partial x} \rangle\rangle \\ &= v_l^* \left[-2C_r \rho_l v_r \alpha (1-\alpha) + 2\rho_l v_l (1-\alpha) + C_{vm} \alpha \rho_l v_l \right] v_{l/i} \Big|_0^t dx \\ &- \langle\langle v_{l/i} \left[-2C_r \rho_l v_r \alpha (1-\alpha) + 2\rho_l v_l (1-\alpha) + C_{vm} \alpha \rho_l v_l \right] \frac{\partial v_l^*}{\partial x} \rangle\rangle \\ &- \langle\langle v_{l/i} v_l^* \left[-2C_r \rho_l v_r [1-2\alpha] \frac{\partial \alpha}{\partial x} - 2C_r \rho_l \alpha_g (1-\alpha) \frac{\partial v_r}{\partial x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\rho_l (1-\alpha) \frac{\partial v_l}{\partial x} - (2\rho_l v_l - C_{vm} \rho_l v_l) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + C_{vm} \alpha \rho_l \frac{\partial v_l}{\partial x} \right] \rangle\rangle \end{aligned} \quad (\text{A2.24})$$

$$- \langle\langle v_{l/i} v_l^* \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} v_l^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.26})$$

$$-\langle\langle v_{l/i} v_l^* [2\rho_l v_l + (C_p \rho_l + C_r \rho_l \alpha - C_r \rho_l \alpha_l) 2(v_l - v_g)] \frac{\partial \alpha}{\partial x} v_l^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.27})$$

$$-\langle\langle 2v_{l/i} v_l^* C_r \rho_l \alpha \alpha_l \frac{\partial v_g}{\partial x} v_l^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.28})$$

$$\langle\langle v_{l/i} v_l^* [2C_r \rho_l \alpha_g \alpha_l + 2\rho_l \alpha_l + C_{vm} \alpha_g \rho_l] \frac{\partial v_l}{\partial x} v_l^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.29})$$

$$-\langle\langle \frac{3}{4} v_{l/i} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| v_l^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.30})$$

$$\langle\langle v_l^* (1 - \alpha_g) \frac{\partial P_{li}}{\partial x} \rangle\rangle = \int_0^x v_l^* (1 - \alpha_g) P_{li} \Big|_0^t dx - \langle\langle P_{li} (1 - \alpha_g) \frac{\partial v_l^*}{\partial x} \rangle\rangle + \langle\langle P_{li} v_l^* \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} \rangle\rangle \quad (\text{A2.31})$$

Multiplicando a equação derivada, Eq. (A1.25), pela função adjunta e integrando cada termos por partes quando necessário, tem-se:

$$\langle\langle P^* \rho_g v_g \frac{\partial \alpha_{li}}{\partial t} \rangle\rangle = \int_0^x P^* \rho_g v_g \alpha_{li} \Big|_0^t dx - \alpha_{li} \left[\langle\langle \rho_g v_g \frac{\partial P^*}{\partial t} \rangle\rangle + \langle\langle \rho_g P^* \frac{\partial v_g}{\partial t} \rangle\rangle \right] \quad (\text{A2.32})$$

$$\langle\langle P^* \rho_g v_g^2 \frac{\partial \alpha_{li}}{\partial x} \rangle\rangle = \int_0^t P^* \rho_g v_g^2 \alpha_{li} \Big|_0^x dt - \alpha_{li} \left(\langle\langle \rho_g v_g^2 \frac{\partial P^*}{\partial x} + 2\rho_g v_g P^* \frac{\partial v_g}{\partial x} \rangle\rangle \right) \quad (\text{A2.33})$$

$$\langle\langle \alpha_{li} (\rho_g + C_{vm} \rho_l) \frac{\partial v_g}{\partial t} P^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.34})$$

$$\langle\langle \alpha_{li} (2\rho_g v_g - 2C_p \rho_l v_r + C_{vm} \rho_l v_g) P^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.35})$$

$$-\langle\langle \alpha_{li} C_{vm} \rho_l \frac{\partial v_l}{\partial t} P^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.36})$$

$$\langle\langle \alpha_{/ pi} (2C_p \rho_l v_r - C_{vm} \rho_l v_l) \frac{\partial v_l}{\partial x} P^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.37})$$

$$\langle\langle \alpha_{/ pi} \frac{\partial P}{\partial x} P^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.38})$$

$$\langle\langle \alpha_{/ pi} \rho_g g P^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.39})$$

$$\langle\langle \frac{3}{8} \alpha_{/ pi} \frac{C_d}{R_b} \rho_l |v_r| v_r P^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.40})$$

$$\begin{aligned} \langle\langle P^* [\rho_g \alpha + C_{vm} \alpha \rho_l] \frac{\partial v_{g/i}}{\partial t} \rangle\rangle &= \int_0^x P^* (\rho_g \alpha + C_{vm} \alpha \rho_l) v_{g/i} \Big|_0^t dx \\ &- v_{g/i} \left[\langle\langle (\rho_g \alpha + C_{vm} \alpha \rho_l) \frac{\partial P^*}{\partial t} \rangle\rangle + \langle\langle P^* (\rho_g + C_{vm} \rho_l) \frac{\partial \alpha}{\partial t} \rangle\rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.41})$$

$$\begin{aligned} \langle\langle P^* (2\rho_g \alpha v_g - 2\alpha C_p \rho_l v_r + C_{vm} \alpha \rho_l v_g) \frac{\partial v_{g/i}}{\partial x} \rangle\rangle &= \\ \int_0^t v_{g/i} P^* (2\rho_g \alpha v_g - 2\alpha C_p \rho_l v_r + C_{vm} \alpha \rho_l v_g) \Big|_0^x dt &- \\ - \langle\langle v_{g/i} (2\rho_g \alpha v_g - 2\alpha C_p \rho_l v_r + C_{vm} \alpha \rho_l v_g) \frac{\partial P^*}{\partial x} \rangle\rangle &- \\ - \langle\langle v_{g/i} P^* \left(2\rho_g v_g \frac{\partial \alpha}{\partial x} + C_{vm} \rho_l v_g \frac{\partial \alpha}{\partial x} + 2\rho_g \alpha \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) \rangle\rangle &+ \\ + \langle\langle v_{g/i} P^* \left(2C_p \rho_l v_r \frac{\partial \alpha}{\partial x} - 2C_p \rho_l \frac{\partial v_r}{\partial x} + C_{vm} \rho_l \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) \rangle\rangle & \end{aligned} \quad (\text{A2.42})$$

$$\langle\langle v_{g/i} P^* \rho_g \frac{\partial \alpha}{\partial t} \rangle\rangle \quad (\text{A2.43})$$

$$\langle\langle v_{g/i} 2P^* \rho_g v_g \frac{\partial \alpha}{\partial x} \rangle\rangle \quad (\text{A2.44})$$

$$\langle\langle v_{g/i} P^* [2\rho_g \alpha - 2\alpha C_p \rho_l + C_{vm} \alpha \rho_l] \frac{\partial v_g}{\partial x} \rangle\rangle \quad (\text{A2.45})$$

$$\langle\langle 2v_{g/i} P^* \alpha C_p \rho_l \frac{\partial v_l}{\partial x} \rangle\rangle \quad (\text{A2.46})$$

$$\langle\langle \frac{3}{4} v_{g/i} P^* \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| \rangle\rangle \quad (\text{A2.47})$$

$$-\langle\langle P^* C_{vm} \alpha \rho_l \frac{\partial v_{l/i}}{\partial t} \rangle\rangle = -\int_0^x P^* C_{vm} \alpha \rho_l v_{l/i} \Big|_0^x dx + v_{l/i} \left[\langle\langle C_{vm} \alpha \rho_l \frac{\partial P^*}{\partial t} \rangle\rangle + \langle\langle P^* C_{vm} \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} \rangle\rangle \right] \quad (\text{A2.48})$$

$$\begin{aligned} \langle\langle P^* (2\alpha C_p \rho_l v_r - C_{vm} \alpha \rho_l v_l) \frac{\partial v_{l/i}}{\partial x} \rangle\rangle &= \int_0^t P^* (2\alpha C_p \rho_l v_r - C_{vm} \alpha \rho_l v_l) v_{l/i} \Big|_0^x dt \\ &- \langle\langle v_{l/i} (2\alpha C_p \rho_l v_r - C_{vm} \alpha \rho_l v_l) \frac{\partial P^*}{\partial x} \rangle\rangle \\ &- \langle\langle v_{l/i} P^* \left(2C_p \rho_l v_r \frac{\partial \alpha}{\partial x} + 2\alpha C_p \rho_l \frac{\partial v_r}{\partial x} - C_{vm} \rho_l v_l \frac{\partial \alpha}{\partial x} - C_{vm} \alpha \rho_l \frac{\partial v_l}{\partial x} \right) \rangle\rangle \end{aligned} \quad (\text{A2.49})$$

$$\langle\langle 2v_{l/i} \alpha C_p \rho_l \frac{\partial v_g}{\partial x} P^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.50})$$

$$-\langle\langle v_{l/i} (2\alpha C_p \rho_l + C_{vm} \alpha \rho_l) \frac{\partial v_l}{\partial x} P^* \rangle\rangle \quad (\text{A2.51})$$

$$-\langle\langle\frac{3}{4}v_{l_i}\frac{C_d}{R_b}\rho_l\alpha|v_r|P^*\rangle\rangle \quad (\text{A2.52})$$

$$\langle\langle P^*\alpha\frac{\partial P_{/i}}{\partial x}\rangle\rangle = \int_0^l P^*\alpha P_{/i}|_0^x dt - \langle\langle P_{/i}\alpha\frac{\partial P^*}{\partial x}\rangle\rangle - \langle\langle P_{/i}P^*\frac{\partial\alpha}{\partial x}\rangle\rangle \quad (\text{A2.53})$$

Reagrupando os termos integrados obtém-se uma expressão para o concomitante bilinear e para o sistema de equações adjuntas que são dados por:

$$-\frac{\partial\alpha^*}{\partial t} - \frac{\partial v_g^*}{\partial t} + \rho_l v_l \frac{\partial v_l^*}{\partial t} - \rho_g v_g \frac{\partial P^*}{\partial t} - v_l \frac{\partial\alpha^*}{\partial x} - v_g \frac{\partial v_g^*}{\partial x} - \rho_g v_g^2 \frac{\partial P^*}{\partial x} - b_2 \frac{\partial v_l^*}{\partial x} = d_1 \quad (\text{A2.54})$$

$$-a_5 \frac{\partial v_l^*}{\partial t} - a_3 \frac{\partial P^*}{\partial t} - \alpha \frac{\partial v_g^*}{\partial x} - b_3 \frac{\partial v_l^*}{\partial x} - a_{41} \frac{\partial P^*}{\partial x} = d_2 \quad (\text{A2.55})$$

$$-b_4 \frac{\partial v_l^*}{\partial t} - a_5 \frac{\partial P^*}{\partial t} + (1-\alpha) \frac{\partial\alpha^*}{\partial x} - b_{51} \frac{\partial v_l^*}{\partial x} - a_{51} \frac{\partial P^*}{\partial x} = d_3 \quad (\text{A2.56})$$

$$-(1-\alpha) \frac{\partial v_l^*}{\partial x} - \alpha \frac{\partial P^*}{\partial x} = d_4 \quad (\text{A2.57})$$

sendo

$$d_1 = S_\alpha^+ +$$

$$+ v_l^* \left[C_{vm} \rho_l \frac{\partial v_r}{\partial t} - 2C_p \rho_l v_r \frac{\partial v_r}{\partial x} + \rho_l g + \frac{3C_d}{8R_b} \rho_l |v_r| v_r + C_{vm} \rho_l \left(v_g \frac{\partial v_g}{\partial x} - v_l \frac{\partial v_l}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} \right]$$

$$+ P^* \left[-C_{vm} \rho_l \frac{\partial v_r}{\partial t} + 2C_p \rho_l v_r \frac{\partial v_r}{\partial x} - \rho_g g - \frac{3C_d}{8R_b} \rho_l |v_r| v_r - C_{vm} \rho_l \left(v_g \frac{\partial v_g}{\partial x} - v_l \frac{\partial v_l}{\partial x} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} \right] \quad (\text{A2.58})$$

$$\begin{aligned}
d_2 &= S_{v_g}^+ + \\
&+ v_l^* \left[-C_{vm} \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (2v_r C_p \rho_l - C_{vm} \rho_l v_g) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{3}{4} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| \right] \\
&+ P^* \left[C_{vm} \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (C_{vm} \rho_l v_g - 2v_r C_p \rho_l) \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{3}{4} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| \right]
\end{aligned} \tag{A2.58}$$

$$\begin{aligned}
d_3 &= S_{v_l}^+ + \\
&+ v_l^* \left[C_{vm} \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (C_{vm} \rho_l v_l - 2C_p \rho_l v_r) \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{3}{4} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| \right] \\
&+ P^* \left[-C_{vm} \rho_l \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (2C_p \rho_l v_r - C_{vm} \rho_l v_l) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{3}{4} \frac{C_d}{R_b} \rho_l \alpha |v_r| \right]
\end{aligned} \tag{A2.59}$$

$$d_4 = S_P^+ - v_l^* \frac{\partial \alpha}{\partial x} + P^* \frac{\partial \alpha}{\partial x} \tag{A2.60}$$

e o concomitante bilinear é dado por:

$$CB = CB_1 + CB_2 + CB_3 + CB_4 \tag{A2.61}$$

$$\begin{aligned}
CB_1 &= - \int_0^L \alpha_{/pi} \left(\alpha^* + v_g^* - \rho_l v_l v_l^* + \rho_g v_g P^* \right) \Big|_0^L dx - \\
&- \int_0^T \alpha_{/pi} \left(v_l \alpha_g^* + v_g v_g^* + b_2 v_l^* + \rho_g v_g^2 P^* \right) \Big|_0^L dt
\end{aligned} \tag{A2.62}$$

$$CB_2 = -\int_0^L v_{g/l} p_i \left(a_5 v_l^* + a_3 P^* \right) \Big|_0^T dx - \int_0^T v_{g/l} p_i \left(\alpha \alpha^* + b_3 v_g^* + a_{41} P^* \right) \Big|_0^L dt \quad (\text{A2.63})$$

$$CB_3 = -\int_0^L v_{l/l} p_i \left(b_4 v_l^* + a_5 P^* \right) \Big|_0^T dx - \int_0^T v_{l/l} p_i \left(-(1-\alpha) \alpha^* + b_{51} v_l^* + a_{51} P^* \right) \Big|_0^L dt \quad (\text{A2.64})$$

$$CB_4 = -\int_0^T P_l p_i \left((1-\alpha) v_l^* + \alpha P^* \right) \Big|_0^L dt \quad (\text{A2.65})$$

APÊNDICE 3. DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O ESCOAMENTO ANULAR.

O modelo unidimensional para um escoamento bifásico e adiabático em um sistema formado por água e ar, considerados incompressíveis no estado estacionário, resulta:

$$m_1 = -(1-\alpha) \frac{\partial v_l}{\partial x} + v_l \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \quad (\text{A3.1})$$

$$m_2 = v_g \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v_g}{\partial x} = 0 \quad (\text{A3.2})$$

$$m_3 = -\rho_l v_l \left[v_l \frac{\partial \alpha}{\partial x} - (1-\alpha) \frac{\partial v_l}{\partial x} \right] + \rho_l v_l (1-\alpha) \frac{\partial v_l}{\partial x} + (1-\alpha) \frac{\partial P}{\partial x} - (1-\alpha) \rho_l g = 0 \quad (\text{A3.3})$$

$$m_4 = \rho_g v_g \left(v_g \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) + \rho_g v_g \alpha \frac{\partial v_g}{\partial x} + \alpha \frac{\partial P}{\partial x} - \alpha \rho_g g = 0 \quad (\text{A3.4})$$

Em que para simplificar o problema e para permitir uma comparação com uma solução analítica os termos de arraste, de tensões turbulentas, de diferença de pressão interfacial serão desprezados. A solução analítica é dada por:

$$\alpha(x) = 1 - \frac{1-\alpha_0}{\sqrt{1 - \frac{2g\rho^* x}{v_{l0}^2}}} \quad (\text{A3.5})$$

$$v_l(x) = \sqrt{v_{l0}^2 - 2g\rho^* x} \quad (\text{A3.6})$$

$$P(x) = -\rho_g \left[\frac{1}{2} v_g^2 - \frac{\partial v_g}{\partial t} x_d + \left(g + \frac{\partial v_g}{\partial t} \right) x \right] \quad (\text{A3.7})$$

$$\text{sendo } \rho^* = \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_l}\right)$$

Uma vez conhecida a solução do sistema, podemos determinar as respostas contínuas ou discretas. As respostas contínuas analíticas dadas pelas medias das variáveis são dadas por:

$$\bar{\alpha} = 1 - \frac{(1 - \alpha_0)}{L} \left[\frac{v_{l0}^2}{g\rho^*} + \frac{2gL\rho^* - v_{l0}^2}{g\rho^* \sqrt{1 - \frac{2gL\rho^*}{v_{l0}^2}}} \right] \quad (\text{A3.8})$$

A velocidade média do líquida é dada por:

$$\bar{v}_l = \frac{1}{3gL(\rho_l - \rho_g)} \left[\rho_l v_{l0}^3 + \sqrt{-2gL\rho^* + v_{l0}^2} (2gL(\rho_l - \rho_g) - \rho_l v_{l0}^2) \right] \quad (\text{A3.9})$$

A pressão média do líquida é dada por:

$$\bar{P}(x) = \frac{Lp_0 - 0.5gL^2\rho_g}{L} \quad (\text{A3.10})$$

O cálculo do coeficiente de sensibilidade é efetuado pela derivação da expressão analítica em função do parâmetro de interesse. A titulo de exemplo tomaremos as expressões dos coeficientes de sensibilidade analíticos em função de três componentes do vetor de parâmetros para o funcional - resposta contínuo $\bar{\alpha}(x)$. A derivada de (A3.8) em função dos parâmetros ρ_l , ρ_g e v_{l0} oferece os seguintes coeficientes de sensibilidade analíticos.

$$\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \rho_l} = -\frac{1-\alpha_0}{L} \frac{2L\rho_g}{\rho^* \rho_l^2 \sqrt{1-\frac{2gL\rho^*}{v_{l0}^2}}} - \frac{1-\alpha_0}{L} \left[\frac{\rho_g v_{l0}^2}{g\rho^{*2} \rho_l^2} - \frac{\rho_g (2gL\rho^* - v_{l0}^2)}{g\rho^{*2} \rho_l^2 \sqrt{1-\frac{2gL\rho^*}{v_{l0}^2}}} + \frac{L\rho_g (2gL\rho^* - v_{l0}^2)}{\rho^* \rho_l^2 v_{l0}^2 \left(1-\frac{2gL\rho^*}{v_{l0}^2}\right)^{3/2}} \right] \quad (\text{A3.11})$$

$$\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \rho_g} = \frac{1-\alpha_0}{L} \frac{2L}{\rho^* \rho_l \sqrt{1-\frac{2gL\rho^*}{v_{l0}^2}}} - \frac{1-\alpha_0}{L} \left[\frac{2L}{\rho^* \rho_l \sqrt{1-\frac{2gL\rho^*}{v_{l0}^2}}} + \frac{v_{l0}^2}{g\rho^{*2} \rho_l} + \frac{2gL\rho^* - v_{l0}^2}{g\rho^{*2} \rho_l \sqrt{1-\frac{2gL\rho^*}{v_{l0}^2}}} - \frac{L(2gL\rho^* - v_{l0}^2)}{\rho^* \rho_l v_{l0}^2 \left(1-\frac{2gL\rho^*}{v_{l0}^2}\right)^{3/2}} \right] \quad (\text{A3.12})$$

$$\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial v_{l0}} = -\frac{1-\alpha_0}{L} \left(\frac{2v_{l0}}{g\rho^*} - \frac{2v_{l0}}{g\rho^* \sqrt{1-\frac{2gL\rho^*}{v_{l0}^2}}} - \frac{2L(2gL\rho^* - v_{l0}^2)}{1-\frac{2gL\rho^*}{v_{l0}^2}} - \frac{2L(2gL\rho^* - v_{l0}^2)}{v_{l0}^3 \left(1-\frac{2gL\rho^*}{v_{l0}^2}\right)^{3/2}} \right) \quad (\text{A3.13})$$