

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA COGNITIVA

CRISTIANE KLÖPSCH

Campo Conceitual Algébrico: Análise das noções a serem aprendidas e dificuldades correlatas encontradas pelos estudantes ao final do ensino fundamental (8ª série – 9º ano)

Recife

2010

CRISTIANE KLÖPSCH

Campo Conceitual Algébrico: Análise das noções a serem aprendidas e dificuldades correlatas encontradas pelos estudantes ao final do ensino fundamental (8ª série – 9º ano)

Dissertação apresentada à banca do Programa de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva – UFPE, para obtenção do título de mestre em Psicologia Cognitiva.

Área de concentração: Educação Matemática e científica
Orientador: Prof. Dr. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão.

Recife, 2010

Klöpsch, Cristiane

Campo conceitual algébrico : análise das noções a serem aprendidas e dificuldades correlatas encontradas pelos estudantes ao final do ensino fundamental(8ª série – 9º ano) / Cristiane Klöpsch. - Recife: O Autor, 2010

173 folhas: Il., fig., Graf., tab., quadros.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CFCH. Psicologia cognitiva. 2010.

Inclui: bibliografia e anexos.

1. Psicologia Cognitiva. 2. Álgebra - Conceito. 3. Aprendizagem lenta. 4. Ensino fundamental - Dificuldades de aprendizagem. I. Título.

159.9

CDU (2. ed.)

UFPE

BCFCH2010/85

150

CDD (22. ed.)

FOLHA DE APROVAÇÃO

Cristiane Klöpsch

Campo Conceitual Algébrico: análise das noções a serem aprendidas e dificuldades correlatas encontradas pelos estudantes ao final do fundamental (8ª série - 9º ano)

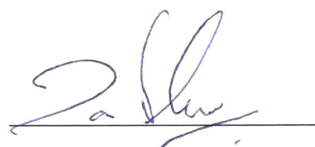
Dissertação apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em
Psicologia Cognitiva da
Universidade Federal de
Pernambuco para obtenção do
título de Mestre.
Área de Concentração: Psicologia
Cognitiva

Aprovado em: 09 de fevereiro de 2010

Banca Examinadora

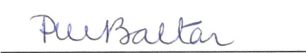
Prof. Dr. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão
Instituição: U.F.PE

Assinatura:



Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain
Instituição: U.F.PE

Assinatura:



Prof. Dr. Luciano Rogério de Lemos Meira
Instituição: U.F.PE

Assinatura:



AGRADECIMENTOS

A Deus pai, que me abençoou com a graça de fazer parte da minoria de brasileiros que conseguem fazer uma pós-graduação e que me mostrou que a providência é sempre maior que a previsão humana.

A esta universidade e a todo o grupo de professores e colegas da pós-graduação em Psicologia Cognitiva da UFPE, pessoas maravilhosas com quem pude muito aprender. Em especial gostaria de agradecer: as professoras e aos colegas do Núcleo de Pesquisa em Educação Matemática (Nuppem) dos quais recebi apoio e contribuições fundamentais à construção deste trabalho e com os quais espero ainda poder construir muitos trabalhos em conjunto; Aos meus colegas, amigos e também colaboradores diretos: Geovana Vargas, Ernani Santos, Laécio Macedo e Marisa Nóbrega que estarão sempre em minhas recordações; Ao professor Bruno Campello de Souza com o qual aprendi muito e de quem recebi auxílio sempre imediato;

A toda a minha família que é o alicerce de minha vida. As minhas irmãs que me deram lições de vida e me apoiaram sempre. Aos meus pais que se privaram de tantas coisas para me dar uma educação de qualidade, me amaram sempre, mostrando compreensão nos dias de estresse e reclusão. Ao Diego, amor da minha vida, sem o qual eu não teria chegado até aqui. Dele recebi apoio emocional incondicional e técnico (sempre urgente) para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos, que me deram carinho, atenção nas horas em que precisei, suporte emocional e também material. Não posso deixar de citar as minhas grandes amigas da pós-graduação Giselda Magalhães e Mônica Campello, que agüentaram horas ao telefone, me prestaram inúmeros favores sem nunca negar um pedido desesperado meu. Saibam que sem vocês eu não teria concluído este

trabalho e independente da distância que estejamos vocês sempre estarão em meus pensamentos e em meu coração. Aos amigos que fiz em Recife, que sempre me acolheram em todas as horas, que são minha segunda família e a quem sempre serei grata e espero poder compartilhar muitos outros momentos de alegria: Carol e Gilberto, Isabel e família, Jaqueline e Faria. Além destes não posso deixar de citar os amigos Cláudia e Domênico, sem os quais eu não teria iniciado esta etapa de minha vida, e que me deram incentivo, orientação e carinho. Aos meus grandes amigos e colaboradores de Porto Alegre que me acompanham desde a graduação (Anuar Daian de Moraes e César Cristaldo) ou desde a oitava série (Débora Mainardo de Souza).

Ao meu orientador Jorge Falcão. Confesso que é difícil resumir em poucas palavras o que aprendi com ele e agradecer por tudo que recebi. Mas, queria pontuar algumas coisas que jamais esquecerei: as reuniões inspiradoras que recebi (ele tem o dom de inspirar pessoas mesmo que em curto espaço de tempo); as orientações pontuais e diretas; as lições acadêmicas e de vida; o carinho e preocupação que sempre me dispensou; por fim, agradeço por ter me acompanhado e amparado nesses três últimos anos, apesar de todos os contratempos que tivemos. A você minha eterna gratidão e carinho.

Para concluir gostaria de pedir desculpas pela omissão ou por não poder agradecer da forma cada um merecia. Muitas são as pessoas que contribuíram de forma direta ou indireta e me mostraram que todas as etapas de nossas vidas podem ser percorridas de forma menos turbulenta, se tivermos ao nosso lado familiares e a amigos com quem pudermos contar. Muito obrigada!

RESUMO

Os resultados obtidos pelo SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica – MEC – INEP) apontam um baixo rendimento dos estudantes brasileiros em matemática, e especialmente nas habilidades relativas à álgebra. Tais dificuldades transformam-se em obstáculo na aprendizagem no Ensino Superior em disciplinas como o cálculo, e também podem comprometer o desenvolvimento da capacidade de abstração e generalização, objetos primordiais do saber algébrico. Baseando-se na Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Gérard Vergnaud, a pesquisa em questão tem como objetivos aprofundar a análise dos elementos algébricos a serem aprendidos e das dificuldades apresentadas por alunos da rede privada de ensino ao final do ensino fundamental (9º. ano). Para tanto, um instrumento de avaliação foi sistematizado com base em reflexão a priori acerca dos elementos constituintes do Campo Conceitual Algébrico. Tal instrumento tentou recobrir um conjunto relevante de atividades matemáticas algébricas consideradas representativas de competências e habilidades cognitivas relacionadas à construção dos conceitos algébricos essenciais a serem aprendidos pelos estudantes ao final do Ensino Fundamental. Os dados referentes às respostas dadas pela amostra de 70 alunos de ambos os sexos foram analisados de forma quantitativa unidimensional e multidimensional. Os resultados da pesquisa indicaram que as maiores dificuldades apresentadas pelos estudantes referem-se aos conceitos e situações abordados no 8º ano do Ensino Fundamental, em especial nas situações envolvendo conceitos como generalizações de padrões aritméticos, fatoração e inequações. Tais resultados sugerem que sejam realizadas novas pesquisas no sentido de compreender os obstáculos (didáticos e ou epistemológicos) que possam explicar a

origem de tais dificuldades e também estratégias didáticas que auxiliem na superação dos mesmos.

Palavras-chave: Campo Conceitual Algébrico, dificuldades de aprendizagem em álgebra; formação de conceitos algébricos.

ABSTRACT

The results of the Brazilian Basic Education System Evaluation (SAEB - MEC/INEP) indicate poor levels of math performance by Brazilian students, especially regarding algebra skills. Such difficulties become learning obstacles in higher education courses such as Calculus, and may also compromise the development of the ability to abstract and generalize, the primordial objects of algebraic knowledge. Based on the Conceptual Fields Theory proposed by Gerard Vergnaud, the present research aims to analyze the algebra contents to be learned by the end of the 9th year by students in private schools, as well as the difficulties experienced by them. For that purpose, an instrument was created based on a priori reflexions about the algebraic conceptual field. Such instrument attempted to cover a relevant set of math activities that may be considered representative of the cognitive skills and abilities linked to the construction of the essential concepts of algebra to be learned by the students. Data obtained from the application of the instrument to a sample of 70 students of both sexes was analyzed using unidimensional and multidimensional techniques, the results indicating that the greatest difficulties experienced by the students refer to 8th year concepts and situations, particularly those involving the generalization of arithmetic patterns, factorization, and inequations. Such findings suggest that new studies should be done in order to promote a better understanding of the didactic and epistemological obstacles that might explain the origins of such difficulties and help produce strategies that might help overcome them.

Key words: Algebraic Conceptual Field, Learning difficulties in Algebra; formation of algebraic concepts.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA.....	10
2 O CONCEITO EM PSICOLOGIA.....	15
3 APRENDIZAGEM EM PSICOLOGIA.....	24
4 APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS DO PONTO DE VISTA DA PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS COMO PROPOSTA DE ORGANIZAÇÃO PSICOLÓGICA E CANÔNICA DOS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS.....	28
5 ATIVIDADE ALGÉBRICA.....	38
6 OS OBSTÁCULOS PARA A APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA.....	45
6.1 Os obstáculos geram dificuldades.....	51
7 DELIMITANDO COMPETÊNCIAS, EM BUSCA DE ELEMENTOS DO CAMPO CONCEITUAL ALGÉBRICO.....	60
7.1.1 Aspectos Gerais da Matemática.....	60
7.1.2 Noções conceituais compartilhadas com a aritmética.....	63
7.1.3 Noções conceituais específicas da álgebra.....	64
8 OBJETIVOS.....	89
9 MÉTODO.....	91
10 RESULTADOS.....	95
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	142
REFERÊNCIAS.....	147
ANEXOS.....	155

1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

O ensino e a aprendizagem da álgebra no Ensino Fundamental é um dos momentos de particular dificuldade por parte dos professores e estudantes de matemática, tanto no Brasil (cf. BRITO MENEZES, 2006; DA ROCHA FALCÃO, 1996) quanto no exterior (cf. KIERAN, 1985; LINS E GIMENEZ, 1997). Segundo Da Rocha Falcão (2003b) tal dificuldade está associada à complexidade do fazer algébrico, que possui etapas interligadas com dificuldades específicas, que são caracterizadas pelo mapeamento do problema, a escrita algébrica em si, o procedimento de resolução e a retomada de sentido. Ou seja, além de transformar uma determinada situação em linguagem algébrica (o que por si já é uma tarefa cognitiva complexa), é preciso lidar com os aspectos sintáticos da mesma, dominando determinados procedimentos que são específicos e por fim voltar ao aspecto semântico de construção de sentido para aquela resposta. Para alguns pesquisadores (CARRAHER, 2000; DA ROCHA FALCÃO, 2003c) é possível que as dificuldades em álgebra sejam um reflexo da introdução tardia ao pensamento algébrico. A ênfase em uma educação aritmética anterior à inserção de elementos algébricos e de forma totalmente separada pode ser um dos fatores que justificam dificuldades e prolongamento das mesmas, enfatizando a má reputação da álgebra (CARRAHER, SCHLIEMANN e BRIZUELA, 2000).

A partir do 8º ano (7ª série) do ensino fundamental os conceitos algébricos que foram inicialmente inseridos na série anterior são formalizados e aprofundados, representando o ápice do pensamento algébrico-abstrato neste ciclo de ensino. É neste momento que conceitos como monômios, polinômios, produtos notáveis, fatoração e frações algébricas são aprendidos, e exigem além de todo potencial de abstração, a capacidade de compreendê-los como elementos que estão

completamente interligados. Nesta etapa do ensino fundamental a álgebra não é somente um “meio” (processo, ferramenta de resolução de determinada classe de problemas), mas também um “fim” (estrutura, corpo matemático com regras sintáticas próprias), isto é, passa a ser essencial não só como uma ferramenta para auxiliar na resolução de problemas matemáticos, mas também, por si só, é uma atividade que demanda considerável poder de abstração e generalização (SFARD; LINCHEVSKY, 1994 apud CARRAER; SCHLIEMANN; BRIZUELA, 2001, p.1). Da

Rocha Falcão (1994) define essa característica como uma dupla caracterização epistemológica do saber algébrico, o qual é um objeto de estudo em si mesmo (enquanto objeto matemático descontextualizado) e uma ferramenta a serviço de outros domínios do saber. Tal perspectiva é também utilizada na construção dos Parâmetros Curriculares Nacionais, no capítulo referente à matemática no quarto ciclo, e especificamente à álgebra:

O estudo da álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. (BRASIL, 1998, p. 115)

Embora alguns conceitos tão enfatizados nesta etapa acabem por serem pouco utilizados nas séries seguintes, os mesmos serão essenciais para a aprendizagem de elementos algébricos no Ensino Médio (funções, geometria analítica,...) e Superior (Cálculo). Desta maneira, as dificuldades em frações algébricas, fatoração e simplificação algébrica que não são superadas neste momento acabam por tornarem-se obstáculos no final do Ensino Médio (SAMORA e TANCREDI, 2004) e no Ensino Superior (CURY, 1990; CURY, 2003; CURY e KONZEN, 2006).

Tendo em vista a preocupação com a álgebra no ensino fundamental, em especial nas primeiras séries deste, inúmeras pesquisas fazem a descrição e análise

das dificuldades em álgebra. Conforme Schliemann et al (2003), as pesquisas sobre raciocínio algébrico destacaram dificuldades como:

- (1) Limitações sobre a interpretação do símbolo de igual;
- (2) Dificuldades de compreensão da utilização de letras como variáveis;
- (3) Recusa da aceitação de sentenças abertas tais como " $3a + 7$ " como resposta de um problema;
- (4) Dificuldades em resolver equações com variáveis nos dois lados do sinal de igual;

Mas de que forma essas dificuldades se relacionam? Será que os alunos cometem erros de simplificação porque possuem dificuldades em conceitos algébricos ou por que não compreendem o que é um inverso multiplicativo ou um elemento simétrico?

Ou ainda, os alunos têm dificuldade em fatoração por que não sabem fatorar ou por que não compreendem conceitos fundamentais como incógnitas, variáveis e operações aritméticas?

É importante ressaltar que estas dificuldades, podem ser reflexos dos obstáculos que emergem na transformação do saber matemático em saber a ser ensinado (cf. CHEVALLARD, 1985), visto que as concepções históricas e filosóficas da matemática marcaram não só o desenvolvimento como o próprio ensino deste domínio do conhecimento. O platonismo (determinando objetos matemáticos que seriam frutos de idéias puras, acabadas e independentes da humanidade) e o formalismo (construindo uma matemática baseada em axiomas, definições e teoremas) determinaram um saber matemático constituído de noções pretensamente objetivas, claras e gerais (PAIS, 2002). Essa concepção levada para o ensino da matemática acabou por abrir caminho para uma hegemonia sobre o

estudo do saber a ser ensinado (pólo epistemológico), deixando de lado o pólo pedagógico (professor) e o pólo psicológico (aluno), elementos constituintes do triângulo das situações didáticas (cf. BROUSSEAU, 1986). Concebendo uma situação didática partindo desses três pólos, e construída através de uma visão psicológica da construção do saber, a pesquisa em questão visa refletir sobre os conceitos essenciais a serem aprendidos ao final do ensino fundamental no domínio da álgebra e suas respectivas dificuldades. Assim, ao longo deste projeto serão realizadas discussões acerca dos conceitos essenciais a serem aprendidos ao longo do ensino fundamental, isto é, os elementos integrantes de um Campo Conceitual Algébrico e uma alternativa para avaliar o domínio, por parte dos estudantes, de tal campo. No momento em que é feita a proposta de análise de elementos constituintes do Campo Conceitual Algébrico, há também a preocupação de analisar, além de índices de acerto ou erro nos procedimentos matemáticos sugeridos, as diversas situações e representações que podem ter influenciado a utilização de determinada estratégia pelo aluno, e mais, a forma como eles se relacionam construindo novos obstáculos.

Inúmeras são as pesquisas que apontam dificuldades na aprendizagem escolar da álgebra, o que poderia vir a questionar a importância e ou originalidade deste projeto. Todavia, o projeto em questão vai além da determinação de dificuldades. Ele propõe a compreensão destas partindo de um Campo Conceitual razoavelmente detalhado, viabilizando assim reflexões no sentido de analisar as inter-relações entre estas dificuldades, mas também entre os conceitos a serem aprendidos. Nesse sentido, o esforço de pesquisa acima aludido pode servir de base à construção de seqüências didáticas que ensejem pesquisas voltadas para proposição e avaliação de contextos de ensino, levando em consideração que a

aprendizagem dos conceitos matemáticos precisa ser compreendida através da complexidade inerente a ela, e não através da reprodução de procedimentos e algoritmos. Nesse sentido a presente pesquisa justifica-se como um ampliador das discussões acerca dos conteúdos a serem ensinados e aprendidos pelos alunos, assim como propõe elementos de análise e reflexão dos mesmos ao final do Ensino Fundamental através do instrumento construído.

Tendo em vista as idéias acima apresentadas, consideramos pertinente apresentar, na próxima seção (seção 2) uma reflexão acerca do conceito em psicologia, seguida de uma breve revisão acerca dos processos de aprendizagem (seção 3) e aprendizagem de conceitos matemáticos (seção 4). Tal discussão se foca então na atividade algébrica (seção 5) e nas reflexões sobre as dificuldades para a aprendizagem da álgebra em contexto escolar (seção 6). Uma vez balizado o terreno em termos de tópicos cruciais acerca do ensino e aprendizagem de conceitos matemático-álgebricos, serão delimitados os elementos propostos para o Campo Conceitual Algébrico (seção 7), segue-se com a proposta de construção de um instrumento para avaliação dos mesmos (seção 8). Por fim são apresentados os objetivos de pesquisa (seção 9), os resultados obtidos (seção 10) e considerações finais (seção 11).

2 O CONCEITO EM PSICOLOGIA

[...] matemáticos normalmente tendem a ser precisos, completos e parcimoniosos quando escrevem definições escritas, enquanto psicólogos tentam entender como conceitos são progressivamente formados, por diferentes tipos de situações e competências e por diferentes tipos de representações e símbolos linguísticos. (VERGNAUD, 1997, p.5).

Afinal, o que é um conceito matemático? É o mesmo que sua definição? Talvez essa distinção não fique muito evidente ao observar algumas aulas de matemática, isto porque em matemática, do ponto de vista canônico,¹ um conceito parece se confundir com sua definição. Definição esta que tem a pretensão de circunscrever tal conceito, de forma completa, rigorosa, e sem “deslizes” de interpretação. Esta concepção, ou melhor, esta não-diferenciação entre definição formal e conceito pode ser uma das causas para a conhecida repulsa por parte dos estudantes em relação a esse domínio do conhecimento (ver, a esse respeito, BACQUET, 2001). Parece difícil, para muitos professores de matemática ou mesmo matemáticos, compreender que haja dificuldade no entendimento de objetos que são definidos de forma “precisa” e “clara” (pelo menos para eles).² A definição de incógnita pode ser tomada como exemplo nesta situação. Enquanto definição, uma incógnita é um objeto simbólico que representa um valor numérico desconhecido, geralmente representado por letras. Todavia, as mesmas letras utilizadas para

¹ A expressão “canônico” é usada aqui na acepção que usualmente lhe é dada por autores como Yves Chevallard (CHEVALLARD, 1985), para o qual haveria um domínio de conhecimento formal, de referência ou canônico, também denominado “saber sábio” (savoir-savant), em oposição ao conhecimento veiculado nos livros didáticos, com a mediação do professor, o “saber ensinado” (savoir-enseigné). O saber canônico em matemática, dessa forma, seria aquele saber de referência, institucionalizado e referendado pelas instâncias histórico-sociais de produção deste conhecimento.

² Terezinha Nunes comenta que, no percurso de formação do professor de matemática, muitos conceitos tornam-se parte de um campo conceitual mais amplo, ou seja, determinados conceitos tornam-se partes em um todo maior, o que pode vir a acontecer com este todo em momento posterior, e assim por diante. Cada conceito que é colocado em rede conceitual mais ampla é, por este processo, “comprimido”, e não se gasta mais energia com ele, pois ele agora é ferramenta para a compreensão de conceitos mais amplos. Esta autora chama a atenção para o fato de que cada professor de matemática deve ser capaz de “descomprimir” seus conceitos, ou seja, olhar tais conceitos a partir do ponto de vista de seus alunos, que ainda não atingiram o ponto de integração conceitual (e compressão) dele, professor (cf. NUNES, 1997).

determinar um valor desconhecido, surgem posteriormente nas expressões e então já não são mais valores desconhecidos, mas sim, variáveis. Essa mudança de situação evidencia que não podemos admitir que uma definição seja suficiente para a construção do conhecimento. Existem outros conceitos que permeiam as situações nas quais aparecem “letras” em matemática. Há, no caso da formação dos conceitos matemáticos, elementos muito mais complexos que definições, como será discutido a seguir.

Outro aspecto que não deve ser tomado como sinônimo à formação de conceitos é o “saber fazer”, ou seja, o domínio de algoritmos procedurais para a resolução de problemas; o domínio prático destes procedimentos. Para poder compreender os procedimentos é preciso que os conceitos subjacentes aos mesmos façam parte do domínio dos saberes dos estudantes. Ou seja, é possível utilizar um procedimento/algoritmo de duas formas distintas: levando em consideração a gama de conceitos envolvidos nestes procedimentos (mesmo que estes não sejam explicitados verbalmente) ou de forma automatizada, reprodutiva, onde não há possibilidade de uma retomada de significado para os elementos envolvidos neste processo. Há que se considerar ainda que a primeira utilização citada seja de notável importância para o ensino da matemática, visto que pode ser considerada como um alicerce para a aprendizagem de novos conceitos ou de conceitos mais complexos; em outras palavras, ao lidar com procedimentos compreendendo os conceitos que estão sendo utilizados é possível que o aluno esteja melhor preparado para enfrentar situações novas, o que pode ser um obstáculo quando ele está acostumado com situações padrões e exercícios similares aos exemplos dados pelo professor.

Mas de que forma esses procedimentos são ensinados e aprendidos nas salas de aula? Circunscrevendo estas reflexões às aulas de professores influenciados pela concepção formalista para a matemática e seu ensino, é bem comum ver aulas que são baseadas em definições que geram exemplos e estes, por sua vez, encaminham para uma série de repetições em “exercícios de aplicação” (ou de “fixação”). Tais aulas têm como pressuposto uma perspectiva reducionista ou ingênua do que é um conceito matemático, pois admitem que a construção deste esteja limitada a sua definição formal e ao adestramento procedural do aluno. Quando se concebe um conceito composto de diversas propriedades, que por sua vez demandam experiência prévia de construção cognitiva fica evidente que o mesmo não pode ser explicado unicamente pela sua definição, a ser devidamente memorizada e aplicada a situações prototípicas.³

Para Vergnaud (1997), os matemáticos tendem a achar que a definição por si só deve conter todas as propriedades de cada conceito, o que pode estar correto, mas apenas do ponto de vista matemático formal (canônico), e não do ponto de vista de um conceito enquanto construto cognitivo. Para este autor, a idéia de não poder reduzir um conceito matemático a sua definição matemática formal está vinculada ao fato de que existe um caminho psicológico de construção de significado para o conceito, o que remete à necessidade de compreensão de como estes conceitos

³ Aliás, tais “situações prototípicas” levam a outras situações interessantíssimas, narradas na literatura de pesquisa em didática da matemática, como é o caso bastante comentado na França, e conhecido como “o erro da idade do capitão”. Numa questão de exame anual de rendimento dos alunos franceses ao final do ensino fundamental (“cours élémentaire”), propôs-se problema criado originalmente pelo escritor francês Gustave Flaubert (1821-1880) como brincadeira numa carta que escreveu à sua irmã Caroline: neste problema, um capitão de navio percorria a costa francesa, recolhendo cargas de diferentes medidas de peso em cada porto, e ao final perguntava-se qual a idade do capitão, numa situação onde claramente não havia nexo entre os dados do problema (cargas) e a pergunta (idade do capitão). Para surpresa geral dos examinadores, uma parte percentualmente importante dos estudantes examinados não hesitou em somar as cargas recolhidas, chegando assim a um total que foi apresentado tranquilamente como resposta ao problema, ou seja, a idade do capitão... (para mais detalhes, ver http://www.recreomath.qc.ca/dict_capitaine_age.htm).

são formados, através dos diferentes tipos de situações e competências e pelos diferentes tipos de representações simbólicas. Assim, a formação de conceitos matemáticos do ponto de vista psicológico está intrinsecamente relacionada à construção do conhecimento de cada indivíduo. Do ponto de vista matemático, pressupor que um conceito é determinado por sua definição pode até fazer sentido, mas tal perspectiva é bastante simplória no âmbito da psicologia da educação matemática (cf. DA ROCHA FALCÃO, 2003c). Ou seja, pensar em conceitos matemáticos como mera definição formal implica em supor a possibilidade de limitá-los a uma classificação ou uma descrição, o que por sua vez remete a um tipo de concepção para a formação dos conceitos baseado na assimilação de características, como veremos a seguir.

Conforme Cassirer (1977, apud DA ROCHA FALCÃO, 2005), existem duas perspectivas para a abordagem de um conceito: a perspectiva *taxonômica* (ou clássica), que remonta a Aristóteles, e a perspectiva *funcional*. A perspectiva taxonômica baseia-se em uma ordenação do real, isto é, partindo de critérios (ou traços comuns a fenômenos) seria possível ordenar o real em classes de fenômenos. Assim, partindo-se do mundo empírico e extraindo traços comuns a um determinado conjunto de coisas seria possível construir uma forma conceitual condensada de tais coisas. Tal perspectiva encontrou forte apoio na abordagem psicológica dos conceitos, notadamente no processo desenvolvimental de formação de conceitos, conforme ilustrado por tarefas clássicas de exploração de desenvolvimento conceitual em crianças, propostas inicialmente por Edna Heidbreder (cf. HENLE, 1991):

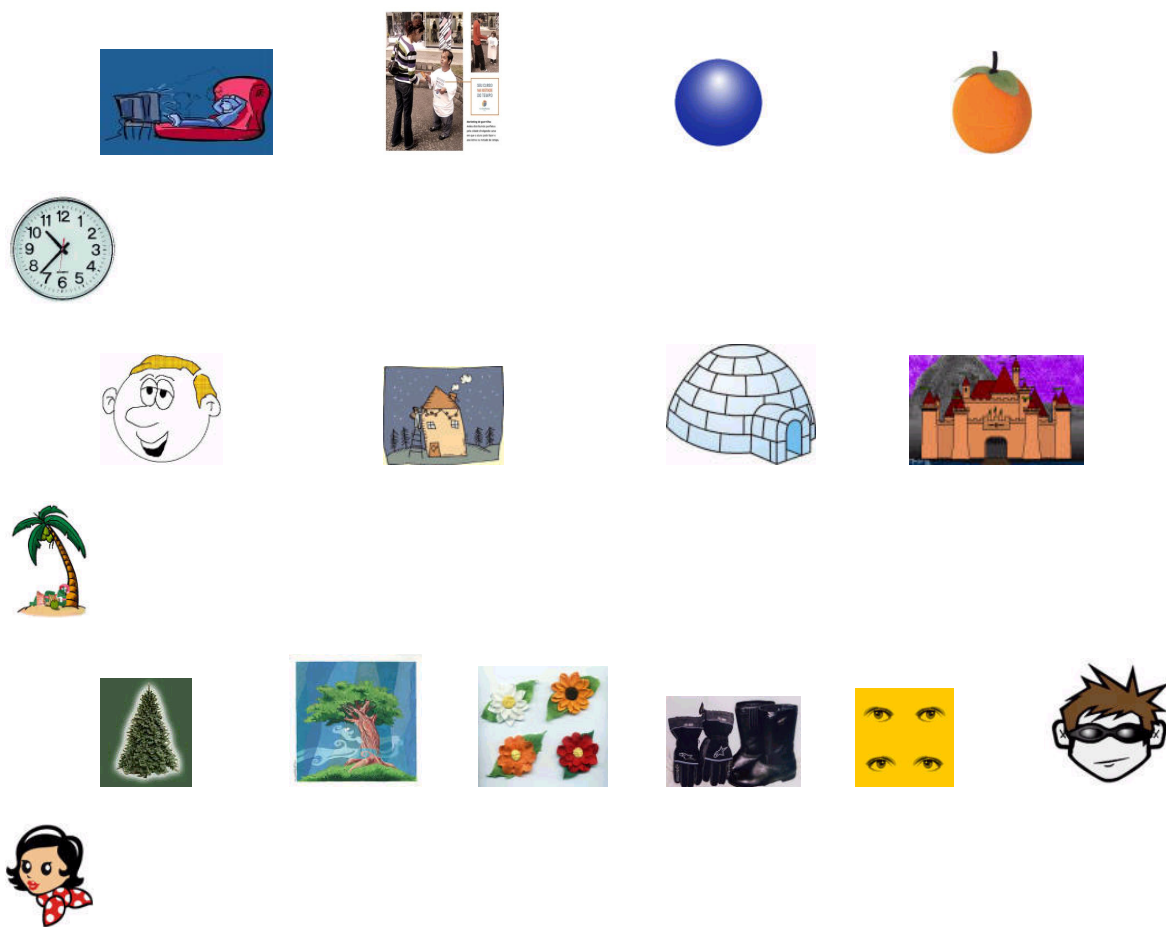


Figura 1: Ilustração representativa de proposta de atividade de pesquisa acerca do desenvolvimento da conceptualização segundo E. Heidbreder (tarefa de detecção de atributo comum). Instrução da tarefa aos sujeitos: “Vamos juntar as figurinhas fazendo *montinhos*. Nesses montinhos a gente coloca figurinhas que tenham *alguma coisa parecida*. Assim: o relógio podia ficar junto com o quê? Por quê? (cf. HENLE, 1991).

 LING	 RELK	
 FARD	 DILT	
 RELK	 FARD	
 DILT	 LING	

Figura 2: Ilustração representativa de proposta de atividade de pesquisa acerca do desenvolvimento da conceptualização segundo E. Heidbreder (tarefa de inferência de palavras-conceito sem sentido em linguagem corrente). Instrução da tarefa aos sujeitos: “Um menino fez uma brincadeira assim: ele disse que a laranja e a bola azul eram LING! O que seria um LING? E o que seria um RELK? [...] E como a gente poderia chamar as figuras que não têm nome, seguindo a brincadeira do menino?” (cf. HENLE, 1991).

É possível concluir que tal ordenação baseia-se em um conhecimento que pretende ser construído a partir de uma classificação baseada em hierarquias, uma pirâmide taxonômica (DA ROCHA FALCÃO, 2005). Tal concepção pode ser exemplificada através da classificação taxonômica dos seres vivos em *espécie*, *gênero*, *família*, *ordem*, *classe*, *filó* e *reino*. Assim, baseia-se em uma ordem de generalidade, fundamentada em uma posição inerente a cada um dos seres vivos em função de seus atributos. Por sua vez, o ensino da matemática ao vincular-se a esta perspectiva para a conceptualização pode viabilizar diversos obstáculos para a aprendizagem. Por exemplo, quando se apresentam os conjuntos numéricos, é

comum fazer a seguinte associação:

$$N \text{ (naturais)} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

$$Z \text{ (inteiros)} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$Q \text{ (rationais)} = \{a/b: a \text{ pertence a } Z, b \text{ pertence a } Z, b \neq 0\}$$

$$I = R - Q$$

$$R = N \cup Z \cup Q \cup I$$

Partindo dessa caracterização, no âmbito escolar o ensino dos conjuntos numéricos inicia-se com a apresentação do conjunto dos naturais, que estão presentes no processo empírico da contagem. Após, segue-se para as situações de falta, que seriam representadas pelos inteiros, para então trabalhar com o conceito de divisão de segmentos e por fim para os números infinitos não periódicos. Ao seguir a ordenação de naturais, inteiros, racionais, irracionais, há uma classificação na qual os conceitos subsequentes são “superiores”. Notemos que tal classificação prejudica o conceito das relações entre os conjuntos ou a falta de relação. Isto é, tal classificação dos números já teria sua limitação no conceito de números irracionais. A idéia de complementaridade dos conjuntos não fica evidente, o que leva o aluno a concluir que os números naturais são os positivos e os inteiros são os negativos, por exemplo. Ou pior, que os números inteiros não podem ser racionais. Fica evidente que neste caso a perspectiva taxonômica é inviável. Novamente surge um obstáculo à aprendizagem destes conceitos.

A segunda abordagem para a constituição de conceitos é chamada funcional. Embora tenha como base, assim como na perspectiva taxonômica, o mundo empírico, fundamenta-se na construção de uma atividade intelectual a partir das coisas para o estabelecimento de um sistema de relações, ou seja, um **modelo**. É considerando o papel destas relações que ela diferencia-se da perspectiva anterior,

afinal, o conceito passa a ser mais que um resumo de características comuns (como no caso da construção do conceito taxonômico de “gato” – cf. discutido por DA ROCHA FALCÃO, 2003a), atingindo o patamar de modelo funcional, que por sua vez guarda relação com outros modelos, no contexto de um campo conceitual (cf. DA ROCHA FALCÃO, 2005; VERGNAUD, 1990). Ao refletirmos sobre o exemplo dos conjuntos numéricos, do ponto de vista desta perspectiva, o conceito de número em cada um destes conjuntos é construído através das propriedades postuladas para o número em cada conjunto, bem como das relações entre eles. Ou seja, os inteiros não passam a ser apenas os números positivos e negativos, mas sim, um conjunto formado pelos elementos do conjunto dos números naturais e seus respectivos elementos simétricos.

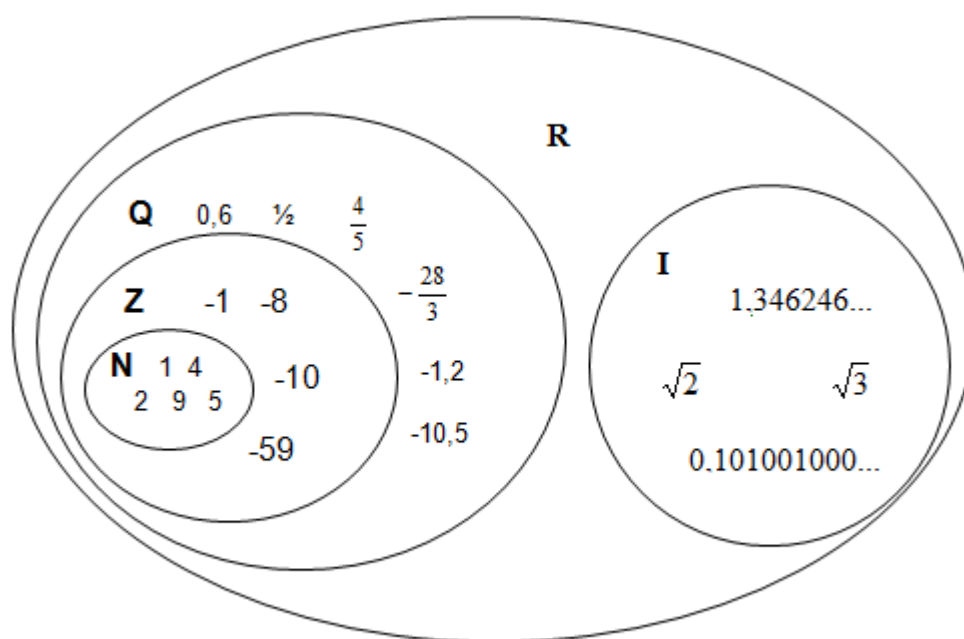


Figura 3: Conjunto dos números reais e seus subconjuntos.

Quando o conceito matemático é concebido como uma definição, que é o que comumente acontece no ensino da matemática, há uma forte aproximação com as perspectivas acima aludidas. Nestas perspectivas seria possível aceitar que a

matemática realizada pelos feirantes, marceneiros e meninos de rua é uma atividade matemática? Ela envolve conceitos que são previamente definidos? Será que os conceitos matemáticos nestas perspectivas não ficam aquém da riqueza e complexidade que possuem? Onde fica o papel das situações, das diversas representações de um mesmo conceito?

3 APRENDIZAGEM EM PSICOLOGIA

As explicações acima tiveram como objetivo evidenciar a importância de pensar em um processo de construção de conceitos que dê conta da complexidade dos saberes matemáticos. Todavia, há que se considerar que o processo de formação de conceitos é parte integrante da aprendizagem da matemática. Assim, a forma como os conceitos em álgebra são abordados reflete as concepções que a escola reproduz sobre aprendizagem matemática, a qual está vinculada a uma compreensão de como os conceitos são formados. Infelizmente, conforme comenta Wertheimer (1959) esta concepção é comumente associada a uma visão logicista da construção do conhecimento (com características operacionais bem definidas, como definições, análises, construção de proposições,...) ou associacionistas, o que corrobora uma visão taxonômica para a formação dos conceitos. Estas concepções vinculam-se a construção de conceitos com uma abordagem modeladora-behaviorista, para a qual a modelagem do comportamento é a chave da aprendizagem, ou do “saber-fazer”. Pode-se exemplificar essa visão ao observar a ênfase nos procedimentos e repetições e a precária reflexão sobre os conceitos envolvidos nos algoritmos matemáticos que são produzidos pelos livros didáticos e reproduzidos pelos professores. Esta tendência do ensino da matemática repercute nas formas de ensinar matemática e, conseqüentemente nos obstáculos que surgem ao longo da aprendizagem da matemática, visto que deixa de lado a complexidade do saber matemático e, em especial, dos saberes algébricos.

Wertheimer (1959) traz uma importante reflexão sobre o tipo de aprendizagem que a escola proporciona e a forma como ela deveria ser. Ele introduz o conceito de *aprendizagem produtiva*, a qual depende de um pensamento produtivo, que não se baseia na repetição, podendo ser encontrado em qualquer

momento de nossas vidas: “[...] o nascimento de uma idéia genuína, de um desenvolvimento produtivo, a transição de uma atitude cega para a compreensão, em um processo produtivo.” (p. 1, tradução nossa). Dentro desta concepção, as repetições ou justificativas do tipo “é assim porque o professor disse” que são comumente ouvidas em sala, podem ser um reflexo da falta da aprendizagem de um conceito, que por sua vez implica na impossibilidade de se ajustar a novas situações.

Historicamente, esta concepção de aprendizagem esteve no centro das premissas teóricas enfatizadas pelo projeto “Aprender Pensando”, desenvolvido pelo grupo de pesquisadores vinculados ao então mestrado de psicologia cognitiva da UFPE, nas décadas de setenta e oitenta do século passado (cf. CARRAHER, 1989). Tal programa de extensão e pesquisa propunha a abordagem do processo de ensino e aprendizagem baseada no entendimento do ponto de vista da criança, e na valorização da mesma para a construção de sua própria aprendizagem. Esta compreensão possibilitava propor questões que levassem as crianças a novas descobertas e soluções. Assim, esse projeto sugeria a necessidade do professor repensar sua tarefa de mediação a todo instante, criando situações para os alunos que lhes possibilitassem rever e ampliar conceitos.

A visão de aprendizagem produtiva proposta por Wertheimer pode ser comparada ao que Piaget chama de “aprendizagem no sentido amplo”. Isto é, para Piaget e Gréco (1974) podem-se distinguir dois tipos de aprendizagem, sendo a primeira vinculada à experiência tanto do tipo físico ou lógico-matemático ou de ambos, denominada “aprendizagem no sentido estrito”. Esta aprendizagem está presente nos primeiros estágios de desenvolvimento propostos por Piaget. Já a aprendizagem denominada “aprendizagem no sentido amplo”, está mais ligada ao

desenvolvimento e pode ser definida como o conjunto de aprendizagens e dos processos de equilibração. Nesse sentido, uma aprendizagem produtiva está fortemente associada a uma aprendizagem que viabiliza os processos de equilibração que permitem a construção de novos conhecimentos. Quando se concebe um ensino baseado na repetição de procedimentos matemáticos, sem significado, aproxima-se da aprendizagem no sentido estrito, o que a distancia da produção do conhecimento. Em especial em álgebra, é comum encontrar alunos que são excelentes na reprodução de algoritmos, o que pode até produzir um sucesso no desempenho escolar, mas não um sucesso em termos de desenvolvimento de novos esquemas, os quais viabilizam o desenvolvimento do conhecimento matemático. Ou seja, por trás dos algoritmos muitas vezes reproduzidos mecanicamente, há que se considerarem elementos conceituais importantes, os quais podem passar despercebidos.

Além dos elementos conceituais inerentes ao processo de aprendizagem, do ponto de vista de vista sócio-histórico, uma aprendizagem não pode desconsiderar o papel dos artefatos culturais. Eles atuam como mediadores culturais e estão presentes na aprendizagem da matemática, exercendo o papel de modificar as próprias funções psíquicas superiores (VYGOTSKY, 1981 apud MOYSES, 1997). Na matemática, a aprendizagem produtiva pode demandar recursos além do lápis, caderno e livro didático. A importância de elementos como calculadoras e *softwares* passam a serem fundamentais como “[...] amplificadores das aptidões do homem e implementadores da sua atividade” (BRUNNER, 1976, p. 84). No caso da álgebra, os próprios conceitos matemáticos aritméticos são amplificadores do raciocínio. Além destes, há que se considerar ainda, ferramentas tecnológicas como o Calcule!

(MEIRA, 2000) e ainda como o Aplusix,⁴ este último bastante utilizado em pesquisas na aprendizagem da álgebra (BITTAR e CHAACHOUA, 2004; BURIGATO; 2007). Tais ferramentas tecnológicas permitem amplificar as potencialidades cognitivas dos estudantes, diversificando representações conceituais e propondo situações-problema e atividades de difícil implementação fora de ambientes informatizados. Desta forma, quando se trata de uma aprendizagem produtiva, artefatos culturais não podem ser desconsiderados.

As discussões acima tinham como objetivo fazer uma breve reflexão sobre aspectos mais gerais relacionados à aprendizagem da matemática. Na seção seguinte tal reflexão continua, agora com foco sobre aspectos relacionados à aprendizagem de conteúdos matemáticos em contexto escolar.

⁴ Programa desenvolvido por Tec-Quest (ver: <http://www.tec-quest.com/aplusix.htm>).

4 APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS DO PONTO DE VISTA DA PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS COMO PROPOSTA DE ORGANIZAÇÃO PSICOLÓGICA E CANÔNICA DOS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS

Quando foram discutidas as perspectivas taxonômica e funcional para a construção dos conceitos, evidenciou-se que elas deixam lacunas para a aprendizagem dos conceitos matemáticos, o que pode, inclusive, corroborar o surgimento dos obstáculos encontrados pelos estudantes ao longo do ensino da matemática. Obstáculos que por vezes são facilmente observados quando os procedimentos e definições são evidenciados, deixando-se de lado o processo de aprendizagem e formação de conceitos que precisam ser analisados de forma cautelosa. A psicologia da educação matemática encontra na Teoria dos Campos Conceituais uma alternativa de suporte teórico para a análise da atividade psicológica de construção de significados em matemática. Tal atividade é considerada por esta perspectiva como atividade mental de um sujeito que é inserido em um contexto histórico-cultural, o qual está envolvido em diversas situações de aprendizagem (DA ROCHA FALCÃO, 2003b). No momento em que se volta para a ação de um sujeito com as características descritas, o caráter psicológico desta teoria encontra-se fortemente vinculado às noções de esquema, teoremas-em-ação (cf. VERGNAUD, 1990) e da noção de desenvolvimento (SPINILLO e LAUTERT, 2006).

O conceito de esquema, conforme dito anteriormente, é um dos alicerces da Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud (1990). Sendo discípulo de

Piaget, Vergnaud irá se apropriar deste e de outros conceitos propostos previamente por ele. Para Vergnaud (1996, p.206, tradução nossa):

Piaget colocou várias pedras angulares na investigação didática: as idéias de adaptação, desequilíbrio e reequilíbrio, um grande número de fatos relativos a conservação das quantidades, a representação do espaço e a formação dos conceitos matemáticos e físicos, etc.

Além disto, para ele, dentre toda a contribuição de Piaget, o conceito de esquema é essencial na construção da Teoria dos Campos Conceituais:

Um esquema é definido como uma organização invariante da ação para uma certa classe de situações. Esta totalidade dinâmica, introduzida por Piaget (depois de Kant), considerada tanto para as habilidades sensório motoras e habilidade intelectuais requer uma análise cautelosa e profunda se deseja compreender as relações entre competências e concepções. [...] Um esquema está finalizado; objetivos implicam em expectativas. Um esquema generaliza a ação; ele deve conter regras. Um esquema não é um estereótipo, como uma seqüência de ações depende dos parâmetros de uma situação [...] (VERGNAUD, 1994, p.53)

Além deste elemento, Vergnaud traz como herança de Piaget conceitos como invariantes, assimilação e acomodação:

Minha visão é de que o processo de aquisição consiste em construir invariantes relacionais, analisando suas propriedades, e construindo novos invariantes relacionais. Alguns invariantes quantitativos foram estudados por Piaget no contexto dos experimentos de conservação. (VERGNAUD, 1982, p. 57)

É uma idéia trivial considerar que as crianças (e estudantes) desenvolvem cada vez mais conceitos e competências complexos pela utilização de seu conhecimento anterior para fazer sentido às novas situações e tentar aprendê-las. Este processo pode ser visto como um processo geral de um comportamento de adaptação: assimilação e acomodação, como Piaget destacou. (VERGNAUD, 1994, p. 41)

Todavia, em alguns momentos Vergnaud discorda de Piaget, como no caso em que, segundo Vergnaud, Piaget propõe reduzir a complexidade da construção do conhecimento nas crianças a algum tipo de complexidade lógica:

Piaget demonstrou que conhecimento e inteligência são desenvolvidos num longo período de tempo, mas ele fez isso através da análise do desenvolvimento das crianças em termos de capacidades gerais da inteligência, principalmente lógicas, sem prestar atenção suficiente a conteúdos específicos do conhecimento. Esta é a necessidade de entender melhor a aquisição e desenvolvimento de conhecimentos e habilidades

específicas, em relação às situações e problemas, o que me levou a introduzir a estrutura dos campos conceituais. (VERGNAUD, 1983, p.127)

Após esse breve parêntese sobre as semelhanças entre Vergnaud e Piaget, voltemos para o conceito central de Esquema. Embora deva ser considerado como uma totalidade, ele é composto de diversos elementos: objetivos e expectativas, regras para lidar com as situações, invariantes operacionais e possibilidades de inferência. Dessa forma, concebe-se que “[...] um esquema não é um estereótipo, mas uma organização universal; é relevante para uma classe de situações e não para apenas uma situação” (VERGNAUD, p. 13, tradução nossa). Esquemas utilizados na resolução de equações, como a concepção de equilíbrio determinada pelo sinal de igual e a necessidade de “separar” incógnitas dos valores numéricos precisam ser adaptados quando utilizados nas expressões algébricas, por exemplo. Ao utilizar um mesmo esquema em diferentes situações é preciso que este venha a sofrer adequações. Se tal modificação não ocorre, é provável que, no exemplo citado, o aluno passe a conceber uma expressão como uma equação e até determine os valores das variáveis envolvidas.

A teoria dos campos conceituais concebe o processo cognitivo não como aquele que somente organiza as atividades e seu funcionamento em situação, mas considera o desenvolvimento de uma pessoa durante sua experiência e as formas inteligentes de organização da sua atividade. Estas atividades podem ser representadas, por exemplo, por gestos e competências científicas e técnicas (VERGNAUD, 2003). As atividades técnicas podem estar associadas à falta de formalização de um conceito, e neste sentido, relacionam-se às competências presentes na resolução de problemas (na escola e fora dela) que não são explicitáveis pelo sujeito e que parecem surgir de forma espontânea. Vergnaud (1987) chama este tipo de competências de *teoremas-em-ação*, que são formas de

aprendizagem que não são explicitadas formalmente, mas que estão presentes no fazer matemática, o que é diferente de um conceito-em-ação. De acordo com Vergnaud (1996) um teorema-em-ação é uma proposição considerada verdadeira sobre o real enquanto um conceito-em-ação é considerado uma categoria de pensamento considerada pertinente. Por exemplo, na simplificação de uma fração algébrica (conforme exemplo errôneo abaixo), o procedimento de simplificar ou “sair cortando” elementos algébricos similares sem respeitar as operações entre os termos é um teorema-em-ação, que só pode acontecer se o estudante utilizar o conceito-em-ação que indica que os termos iguais se cancelam:

$$\frac{x^2 - 9}{x(x + 3)} = \frac{x^2 \cancel{-9}}{x(\cancel{x+3})} = \frac{-9}{+3}$$

Desta forma, percebe-se que há elementos que vão além de uma definição formal, o que permite concluir que uma definição matemática não possibilitará, sozinha, a construção de conceitos matemáticos, retomando-se aqui a discussão iniciada na seção anterior. E mais, reduzir a aprendizagem da matemática ao treinamento ou condicionamento, utilizando-se de regras de ação como “corta o de cima com o de baixo” (o que pode até ser correto para frações numéricas) gera um distanciamento do processo de conceptualização, visto que produz uma aprendizagem reprodutiva. Desta forma, segundo Vergnaud (1998), um conceito só é conceito quando é operatório, ou seja, tem condições de enfrentar o *novo*, todavia, há que se considerar que a capacidade de enfrentar o *novo* depende dos aparatos cognitivos que o sujeito já possui, o que impõe certos limites ao grau de novidade das situações que determinado aparato conceitual pode enfrentar.⁵ É essa

⁵ Essa é uma postura teórica já presente na proposta piagetiana, quando se propõe que qualquer processo de acomodação (mudança das estruturas cognitivas diante de situações novas) implica

habilidade de enfrentar novas situações, partindo da adaptação das “velhas situações”, que permitirá o desenvolvimento e aprendizagem. Ainda segundo Vergnaud (2003) um campo conceitual é vasto e organizado a partir de um conjunto de situações, as quais dependem de um conjunto de esquemas com suas representações simbólicas. Para ele é também possível tomar campo conceitual como o conjunto de conceitos que permitem dar conta de uma situação ou de um conjunto de situações.

Assim, na construção do conceito de função, por exemplo, não basta que apenas esteja claro para os alunos, em termos de enunciado, que “uma função é uma relação entre variáveis”. As situações didáticas que possibilitam situações diferenciadas para a construção deste conceito são de suma importância por serem essenciais para que os alunos consigam compreender os elementos principais do campo conceitual em questão. Estas situações nem sempre estão representadas apenas no cotidiano escolar, visto que o conceito de função pode surgir em seu cotidiano extra-escolar através de telejornais e revistas. Existem características que podem, inclusive, serem expressas através de gestos. A idéia de continuidade de uma função pode ser expressa oralmente e através da escrita, mas também com o simples gesto de uma sinuosidade com o dedo indicador.

Outro exemplo que retoma a importância das situações e dos suportes de representação tem relação com o conceito de número. Para Vergnaud (2003) o conceito de número não pode se circunscrever ao cérebro, pois está fortemente associado à atividade corporal como um todo. Por exemplo, ao fazer uma adição é muito comum utilizarmos os dedos (e mesmo outras partes do corpo), o que vincula

necessariamente em algum grau de assimilação (utilização de estruturas cognitivas pré-existentes para a abordagem de situações-problema), do que resulta a conclusão piagetiana segundo a qual a abordagem de situações radicalmente novas ou inéditas não seria possível (cf. PIAGET, 1974).

o conceito de número a uma atividade corporal que não se circunscreve à esfera da cerebralidade, apesar de não se pretender negar aqui a importância da integridade desse aparato para a abordagem conceitual do número.

Assim, segundo a teoria dos campos conceituais, proposta por Vergnaud (2003), um conceito como uma entidade psicológica pode ser representado da seguinte forma:

$C \Rightarrow (S, I, R)$, onde:

S: conjunto de situações que torna o conceito culturalmente significativo (a referência).

I: conjunto de invariantes operatórios (esquemas mentais básicos que dão sustentação ao conceito, como por exemplo, transitividade, inclusão de classes, etc.).

R: conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, símbolos, gráficos ou gestos que ao mesmo tempo constituem e representam o conceito).

Fundamentando-se nesse tripé conceitual, um campo conceitual torna possível estudar a forma como as idéias são organizadas e interconectadas, a conceptualização e as representações (VERGNAUD, 1983). Dessa forma, a teoria proposta acima traz contribuições específicas para a construção dos conceitos matemáticos e conseqüentemente para o ensino da matemática. Ao conceber um conceito dependendo de um conjunto de situações, representações e invariantes, as dificuldades na construção dos conceitos matemáticos não ficam restritas apenas ao campo do saber matemático. Neste sentido, a Teoria dos Campos Conceituais vai além dos fatores exógenos e da atividade construtiva do sujeito sobre os objetos do mundo real para explicar a formação dos conceitos. Ela engloba o processo cognitivo da organização da atividade (percepção, representação e competências),

mas vai além, busca o processo cognitivo baseado no desenvolvimento de formas inteligentes que organizam a atividade durante a experiência (VERGNAUD, 2003).

No sentido do que foi proposto acima:

[...] psicólogos e pesquisadores em educação matemática devem fazer um esforço para classificar o maior número de situações para as quais [o qual] os conceitos e as operações podem ser úteis para os estudantes. Isto também significa que eles devem tentar identificar os diferentes invariantes envolvidos nos esquemas usados pelos indivíduos para dominar os diferentes aspectos dessas situações, mesmo que a maioria desses invariantes possa estar totalmente implícita. Finalmente uma definição compreensiva de um conceito não pode ignorar o papel crucial das palavras e símbolos no reconhecimento e seleção dos objetos matemáticos relevantes, de suas propriedades e relações, e na elaboração progressiva de concepções explícitas diferenciadas. (VERGNAUD, 1997, p.6, tradução nossa).

Conforme discutido acima, a didática da matemática encontra na Teoria dos Campos Conceituais uma forma de pensar os conceitos para além dos limites canônicos. Desta forma Vergnaud (1997; 2003) traz inúmeras considerações sobre os campos conceituais da aritmética (estruturas aditivas e multiplicativas), da geometria plana e topologia (simetria) e até mesmo de conceitos que não são matemáticos. Há, ainda, exemplos da aplicação da teoria dos campos conceituais em diversas áreas do conhecimento, como na reprodução vegetal e no contexto de conceitos morais (VERGNAUD, 2003). Em todos os casos e domínios do conhecimento um conceito pode ser desenvolvido, do ponto de vista da teoria de Vergnaud (1988), através das relações com outros conceitos, através de inúmeros tipos de problemas e formas representacionais diversas.

No domínio da matemática, Vergnaud propôs um estudo aprofundado dos campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas, os quais foram analisados a partir de problemas envolvendo operações aritméticas do tipo aditivo e multiplicativo. Além disso, tendo em vista que as estruturas multiplicativas podem ser analisadas através das frações, razões e números racionais, este autor enfatiza que os números racionais não são números apenas, mas abarcam noções de medidas e

relações (VERGNAUD, 1983). Fica evidente que há uma ênfase no processo de aprendizagem de conceitos de forma contínua e anterior aos momentos de sala de aula, isto porque, segundo Vergnaud (1998), a construção das estruturas aditivas e multiplicativas da aritmética ocorre num período mais longo que os programas escolares formais estabelecem. Tal construção, naturalmente, não é independente da vida quotidiana, se apoiando de modo indissociável nesta e favorecendo o desenvolvimento conceitual de noções oriundas desta.

Assim, em relação ao conceito de número, desde muito cedo as crianças aprendem a repetir uma série numérica, mas isso não garante que saibam contar objetos, pois para isto é necessário mais que repetir números numa seqüência padronizada, fazendo-se necessário basear tal atividade de nomeação em princípios conceituais como base numérica e sistema de valor de lugar. Assim, quando as crianças no ensino infantil ou início do fundamental verbalizam um número, no contexto de uma atividade de contagem de objetos discretos, é muito comum que utilizem gestos manuais e movimentos com os olhos, que evidenciam a associação da série numérica ao conjunto de objetos e a determinadas regras: cada objeto só deve ser contado uma vez (é preciso separar os objetos contados daqueles a contar), e ao último objeto contado corresponde um número da série numérica que será o cardinal do conjunto de objetos contados (essa última regra pode ser inferida do comportamento de crianças do início do ensino fundamental que, ao chegarem ao último objeto contado, enunciam o número que lhe corresponde, verificam que não há mais objetos a contar, e então repetem esse número, enfaticamente e agora olhando para o interlocutor: “um, dois, três, quatro, cinco... CINCO!”). Estas ações só passam a ser consideradas uma construção conceitual quando a noção de cardinalidade passa a ser compreendida. (VERGNAUD, 1991).

Outro Campo Conceitual discutido por Vergnaud (1997) é o da geometria plana, no contexto da qual assume especial importância a noção de simetria, a qual desde muito cedo está presente no cotidiano escolar. Ao completarem padrões de figuras (geométricas ou não), propriedades importantes da simetria são utilizadas, como o fato de que algumas figuras simétricas são similares enquanto outras são invertidas, assim como o fato dos pontos constituintes de figuras simétricas serem eqüidistantes do eixo de simetria. Mas além dessas propriedades existem diversas outras competências relacionadas aos gestos e percepção para completar os desenhos. Nesse sentido, o conceito de simetria não pode ser construído isoladamente, sem o concurso de diversos outros conceitos que devem ser explorados pelo professor, como ângulos, eixos, translação, rotação. A simetria é, portanto, uma noção conceitual operacional e complexa, pois os conceitos não podem ser derivados apenas de regularidades empíricas diretamente “visíveis”, apesar das representações pictóricas da simetria terem inegável interesse para sua conceptualização. Estas reflexões levam a necessidade de compreender o conceito de simetria de forma ampla, onde diversas situações e representações estão envolvidas, as quais demandam de uma série de outros conceitos (VERGNAUD, 1997).

Em relação ao foco desta pesquisa, é preciso refletir sobre o Campo Conceitual Algébrico, igualmente pesquisado por Vergnaud (cf. CORTES, VERGNAUD e KAVAFIAN, 1990; VERGNAUD, 1991; DA ROCHA FALCÃO, 1994; 2001; 2003b; 2003c) e sobre a atividade cognitiva deste campo. Segundo Da Rocha Falcão (1994) esta tarefa cognitiva abrange quatro aspectos:

1. Reconhecer determinadas funções da álgebra como modelizar, resolver problemas exclusivos da álgebra, demonstrar;

2. Transformar um problema em equação, isto é, formalizar um problema através da extração de parâmetros, variáveis e relações pertinentes do problema, além de dispor dos significantes necessários a tal recodificação;

3. Conhecer os objetos algébricos como funções, fórmulas, equações, variáveis e incógnitas;

4. Mobilizar determinado algoritmo respeitando determinada sintaxe, ou seja, conhecer a ação a ser realizada a partir de uma equação dada.

Partindo desses quatro aspectos, Da Rocha Falcão (1994; 2003b; 2003c) propõe que o saber algébrico e a atividade algébrica possuem quatro etapas interligadas, as quais possuem dificuldades diferenciadas: mapeamento do problema, escrita algébrica, procedimento de resolução e retomada do sentido. Apesar da importância de cada uma dessas etapas, a perspectiva pedagógica dominante em termos de ensino-aprendizagem da álgebra preconiza ênfase na etapa procedural. Antes de refletir sobre os elementos do CCA, que serão expostos na seção 7, serão feitas algumas considerações sobre a atividade algébrica.

5 ATIVIDADE ALGÉBRICA

Até o presente momento foi realizado um esforço no sentido de sistematizar brevemente perspectivas teóricas que permitam compreender a forma como os conceitos matemáticos são construídos, do ponto de vista matemático e também psicológico. Tendo em vista os objetivos desta pesquisa, focados na atividade algébrica, não se pode deixar de refletir sobre a natureza deste conteúdo matemático. Do ponto de vista sócio-histórico, quando se fala em atividade algébrica é indissociável o papel do sujeito que realiza esta atividade e do saber matemático. Desta forma, a concepção de atividade algébrica não é unificada no âmbito da pesquisa e teorização em educação matemática, visto que traz consigo as discussões sobre o que seja a álgebra, bem como sobre a origem do pensamento algébrico (LINS e GIMENEZ, 2006). No cotidiano escolar é comum associar atividade algébrica e álgebra à operação matemática envolvendo letras e números, ou ainda à resolução de problemas aritméticos complexos. Recorrendo ao dicionário encontra-se que a álgebra é “parte da matemática que estuda as leis e processos formais de operações com entidades abstratas” (HOUAISS, 2009). De certa forma tal definição corrobora a vinculação da álgebra à utilização de letras que representam as incógnitas e variáveis (entidades abstratas) de forma que a idéia central é mostrar que é possível através do desenvolvimento de notações algébricas traçar o desenvolvimento histórico da álgebra (LINS e GIMENEZ, 2006).

De acordo com Eves (2004), a álgebra é a chave mestra da matemática, reflexo de um espírito de generalização e abstração. É o principal elemento de trabalho do matemático, pois é o poder de generalizações e das operações simbólicas que permite a transformação de um saber particular em generalizável, que é o interesse do matemático. Todavia, quando se restringe a álgebra às

operações com variáveis, reduzindo a complexidade desse saber, evidenciando relações meramente procedurais, elimina-se o poder do pensamento algébrico. Afinal, a álgebra não lida apenas com letras (variáveis e incógnitas), mas sim com elementos simbólicos que constituem uma atividade cognitiva complexa. Esta diferenciação reflete principalmente em um posicionamento sobre o que é pensamento algébrico ou pensamento aritmético e quando começa um e acaba o outro.

Quando a atividade algébrica restringe-se a manipulação de letras (incógnitas), é possível que não haja discordância de que ao resolver a equação abaixo está sendo realizada uma atividade algébrica:

$$3x + 4 = x - 2$$

Mas, nas séries iniciais, ao resolverem problemas com termo desconhecido, como na situação abaixo, os alunos estão desenvolvendo uma atividade algébrica?

$$2 + \underline{\quad} = 15$$

No caso acima, a resolução do problema pode estar restrita a uma operação aritmética, a qual não é uma atividade algébrica. Tal situação pode também ser representada de forma diferenciada: *Somando duas unidades a um número desconhecido obtemos 15 unidades. Quem é esse número?* Este tipo de representação é bastante utilizado na iniciação do estudo da álgebra, mais comumente no 7º ano (6ª série), onde os alunos podem então resolver tal problema utilizando uma equação. Tendo em vista que uma equação é um elemento algébrico, então, o que não era uma atividade algébrica passa a ser assim considerada.

Para Linchevski (2001) muitas pessoas tendem a ver a álgebra em todo lugar e acreditam que “fazer álgebra” está associado ao uso das letras. Para outros, o pensamento algébrico é determinado pela estratégia de modelização e resolução de

um problema. Neste último caso o pensamento algébrico estaria relacionado à habilidade de perceber e utilizar as letras como se fossem números. Tal concepção de pensamento algébrico é útil para diferenciar as situações onde existe atividade algébrica, como em $x+2=3$, e onde tal atividade não pode ser caracterizada: $1+2=x$. Ou seja, no segundo exemplo uma operação aritmética é utilizada para chegar a um valor desconhecido, o qual não é utilizado para realizar as operações. O primeiro exemplo, entretanto, pode ser pensando de duas formas: utilizando a operação inversa da adição para resolvê-lo, teríamos um problema aritmético; caso haja uma operação com elementos simbólicos, isto é, com o valor desconhecido (seja pensando em um número que somado a dois seja três, ou somando (-2) nos dois lados da equação, ou ainda simplesmente “passando para o outro lado”) teríamos então uma atividade algébrica.

Outra possibilidade para determinar o início do pensamento algébrico ou o momento dessa *ruptura* entre aritmética e álgebra foi sugerida por Filloy e Rojano (1989), que defendem que esta ocorre quando o aluno passa a obter sucesso na resolução de problemas que são representados por equações do tipo $ax+b=cx$ ou $ax+b=cx+d$. Segundo estes autores, para resolver equações deste tipo é preciso mais do que utilizar as operações inversas da adição ou mesmo operações entre os coeficientes dos termos algébricos. Ou seja, equações do tipo $x+a=b$ ou $ax+b$ ou ainda $ax+b=c$ podem ser facilmente resolvidas com métodos aritméticos, o que é inviável nas equações propostas por eles.

Acreditando que a *ruptura* da aritmética para a álgebra ocorra anteriormente ao que foi proposto por Filloy e Rojano (1989), Usiskin (1995) defende que a atividade matemática tem como principais objetos as incógnitas e variáveis, os quais são a base para a generalização e representação de fenômenos através das

sentenças e equações. Desta forma, é através delas que a generalização de padrões aritméticos, as relações entre grandezas e a modelização e resolução de problemas algébricos difíceis torna-se possível, o que permite que seja possível caracterizar a álgebra de acordo com a utilização deste elemento, segundo quatro concepções diferentes:

- Álgebra como aritmética generalizada: baseia-se na tradução e generalização da álgebra, onde a variável passa a generalizar modelos.

- Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas: neste caso não existem variáveis, apenas incógnitas as quais necessitam de processos de simplificação e resolução de equações para tornarem-se elementos conhecidos.

- Álgebra como estudo de relações entre grandezas: Neste caso as variáveis admitem diversos valores e relacionam-se entre si, sendo representadas pelas fórmulas e por não buscarem valores específicos, isto é, não existem incógnitas.

- Álgebra como estudo das estruturas: envolve os procedimentos com variáveis, manipulações “cegas”, onde estas apresentam um caráter de símbolo arbitrário, envolvendo operações como fatoração e produtos notáveis.

A classificação determinada por Usiskin (1995) contempla a maioria, ou até mesmo todas as atividades algébricas do ponto de vista canônico, mas admite que a atividade algébrica é determinada pela utilização, ou não, de símbolos matemáticos. Tal classificação teve forte influência na determinação dos parâmetros curriculares nacionais brasileiros em relação ao conteúdo algébrico no ensino fundamental.

Outra forma de compreender a atividade algébrica foi proposta por Da Rocha Falcão (2003c), para quem a atividade algébrica como ferramenta representacional pode ter a finalidade de modelização (capturar e descrever fenômenos do real), e no

contexto de tal modelização, utilização de função matemática (explicitação simbólica de relações matemáticas) e de generalização (descrições específicas transformadas em leis gerais, como em $v=d/t$).⁶ Dentro destas perspectivas este pesquisador propõe que os elementos básicos do campo conceitual algébrico para a álgebra inicial são:

Elementos básicos do campo conceitual algébrico	
Números, medidas, incógnitas e variáveis, regras de atribuição de símbolos, gama de acepções do sinal de igual, trânsito entre formas de linguagem.	Operadores, sintaxe, prioridade de operações, princípio da equivalência, conhecimentos-em-ação vinculados a experiências extra-escolares de compensação e equilíbrio, fatos aritméticos instrumentais (ex: elemento neutro da adição).

Quadro 1: elementos básicos de caracterização do campo conceitual da Álgebra (a partir das contribuições de F.G. Bodanskii , G. Vergnaud e Da Rocha Falcão e colaboradores).
Fonte: Da Rocha Falcão (2003c)

Como pode ser observado no quadro acima, há elementos que não são unicamente algébricos, visto que é imprescindível a utilização de elementos aritméticos, por exemplo. A própria idéia de Campo Conceitual, trazida por Vergnaud (1990), permite compreender que um conceito não se forma através de uma situação, assim como uma situação não pode ser analisada através de um único conceito, o que gera a necessidade de compreender um conceito através de uma rede complexa de outros conceitos, desta forma, forma-se então um Campo Conceitual. No estudo da álgebra existem elementos que não são exclusivamente aritméticos ou algébricos, isto é, as experiências sócio-culturais e escolares são elementos presentes na atividade matemática em geral e algébrica em particular, experiências essas presentes através da linguagem.

O problema abaixo auxiliará na exemplificação destes fatores, em especial com relação às experiências do cotidiano e também das relações semânticas e

⁶ A função matemática que relaciona diretamente a velocidade de um corpo à distância percorrida na unidade de tempo, ou inversamente ao tempo despedido para percorrer determinada distância.

sintáticas da linguagem matemática:

“No dia das crianças a professora distribuiu bombons para os alunos da 7ª e 8ª série. Ao todo foram distribuídos 96 bombons para a 7ª série e 87 bombons para a 8ª série. Sabendo que na 7ª série existem 3 alunos a mais que na 8ª série e que **todos os alunos receberam a mesma quantidade de bombons**, determine a quantidade de alunos em cada uma das séries.”

Não é óbvio para os estudantes, ao resolverem a questão acima, que a sentença destacada, para sua modelização matemática, demanda o sinal de igualdade, o que está fortemente associado à sintaxe matemática. Isto é, na passagem da linguagem natural para a linguagem matemática existem regras que viabilizam esse processo: o triplo de um número pode ser representado por $3x$, sendo incorreto representar por $3+x$. Este é um aspecto que diz respeito às questões sintáticas do saber matemático. Ao contrário, compreender que o número de bombons que cada aluno recebe é determinado pelo total de bombons dividido pelo número de alunos não é trivial, pois envolve uma compreensão semântica do problema, aliada aos aspectos sintáticos do conhecimento matemático. Nesse sentido é imprescindível considerar as diferentes situações na qual um conceito é utilizado, assim como as diferentes formas de representações utilizadas pelos estudantes, as quais podem distanciar-se, ou não, dos saberes mais intuitivos e extra-escolares.

Fica evidente que existem elementos cognitivos que viabilizam a construção dos conceitos e estratégias para a resolução dos problemas algébricos, os quais estão presentes durante toda a atividade algébrica. No problema acima, geralmente estudado no 8º ano, o aluno pode ter dificuldade em escolher a estratégia de resolução do mesmo, ficando em dúvida sobre a utilização de uma equação, um

sistema de equações, ou mesmo não conseguir compreender quais conceitos matemáticos estão envolvidos. Para entender estas situações é preciso relacionar o problema dado aos conteúdos ou conceitos necessários para a resolução do mesmo.

Os elementos até agora discutidos evidenciaram que para compreender a atividade algébrica é preciso ir além dos elementos puramente algébricos ou aritméticos, isto é, dos conceitos matemáticos canônicos. Tais reflexões não têm como objetivo diminuir a importância dos saberes puramente matemáticos, mas sim, destacar a importância da proposição de elementos que venham a constituir um Campo Conceitual Algébrico, que permita a compreensão das atividades algébricas do ponto de vista matemático e psicológico.

Baseando-se nas reflexões acima e na teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), o Campo Conceitual Algébrico (CCA) pode ser concebido como o conjunto de situações, representações, e invariantes que envolvem elementos essenciais para a construção dos conceitos e atividades algébricas. Isto é, a determinação de elementos pertinentes a este campo é de suma importância para que seja possível compreender as dificuldades encontradas pelos estudantes na atividade algébrica. Seria muita pretensão acreditar que esta pesquisa poderá definir todas as situações e representações que fazem parte deste campo, mas considera-se relevante, como esforço preliminar, discutir algumas dificuldades na aprendizagem dos conceitos algébricos de forma a ampliar as situações e possíveis atividades a serem propostas para avaliação dos elementos que serão sugeridos.

6 AS DIFICULDADES E OBSTÁCULOS PARA A APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

Como já foi observado anteriormente há o interesse de refletir sobre os conceitos algébricos a serem aprendidos ao longo do ensino fundamental e os respectivos obstáculos encontrados pelos estudantes em atividades que envolvem conceitos fundamentais do campo conceitual algébrico e suas eventuais correlações.

Antes de iniciar tais reflexões, é imprescindível discutir brevemente a diferenciação entre o conceito de obstáculo e dificuldades. Para Brousseau (1997), um obstáculo é composto por erros, porém não se modificam, são persistentes, resistentes. Ele possui a mesma natureza de aprendizagem, é constituído de um saber que não pode ser adaptado a uma diferente situação. De acordo com este autor, em uma situação didática, podemos ter obstáculos de diferentes origens: ontogenética (limitações neurofisiológicas), didática (escolhas de sistemas educacionais) ou epistemológica (referente ao processo de formação do conhecimento). A análise de tais obstáculos demanda um processo que envolva diálogo e acompanhamento dos estudantes ao longo de diferentes situações didáticas, no caso deste projeto, algébricas. Além disso, a emergência destes está vinculada a uma situação didática. Segundo Brousseau (1986, apud FREITAS, 2008) esta é estabelecida pelas relações (implícitas e explícitas) entre o aluno, um sistema educativo (livro didático, programa a ser cumprido, professor) e o saber (neste caso o saber matemático de referência). O caminho que se busca ao longo desta pesquisa é enfatizar as relações entre o aluno e o saber, embora não se descarte que as dificuldades que emergem nestas relações estão também vinculadas às relações com o terceiro pólo da situação didática, que é o professor. Pretendemos ao longo da mesma sugerir caminhos para futuras reflexões no sentido

de compreender os obstáculos à aprendizagem da álgebra, partindo de reflexões sobre as principais dificuldades apontadas pelos estudantes em diferentes situações algébricas.

No momento em que o foco é análise da relação entre aluno e saber existe a necessidade de compreender como o saber matemático evolui ao longo das diversas etapas de sua construção e sua integração no ambiente escolar. Isto porque há que se considerar todo o processo de transformação desse saber, que historicamente foi construído e adaptado para o ensino escolar. Para Brousseau (2001) o saber matemático ao longo de seu desenvolvimento sofreu um processo de descontextualização e contextualização. Podemos representar este processo da seguinte forma:

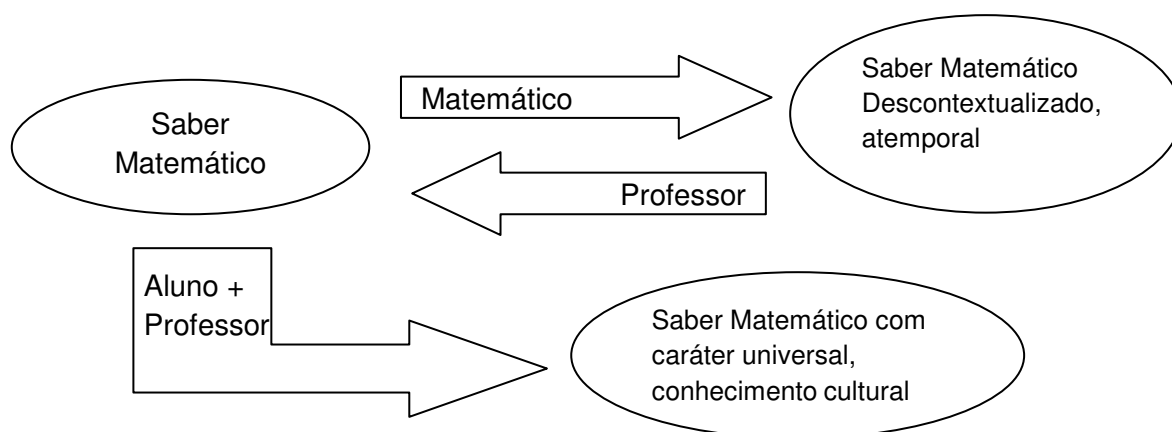


Figura 4: As diversas transformações do saber matemático

Enquanto o matemático tem como objetivo dar ao saber uma forma comunicável e chancelada pela comunidade de matemáticos,⁷ em um contexto acadêmico específico que deverá posteriormente ser transposto (cf. CHEVALLARD, 1985) para a escola, o professor faz o caminho inverso, isto é, busca através de

⁷ Para uma excelente discussão histórica deste ponto, ver a narrativa de S. Singh acerca das peripécias que marcaram a busca da comunidade internacional de matemáticos, por mais de duzentos anos, pela solução do último teorema de Fermat, em Singh, 1997.

situações contextualizadas na sala-de-aula auxiliar o aluno a ter acesso aos conhecimentos matemáticos formais. Desta forma, pode-se concluir que o aluno é apresentado em primeira instância a um saber que é restrito, que diz respeito às situações propostas em sala de aula. Após este momento, com a ajuda do professor, o aluno precisa recontextualizar o saber que foi produzido, de forma a construir um conhecimento cultural que vá além dos contextos específicos de exemplificação usados em sala-de-aula, e, portanto, utilizável em outras situações além da sala-de-aula.

Todo esse processo de contextualização e recontextualização pode ocultar diversos obstáculos na construção do conhecimento matemático. O processo inicial de “descontextualização” do saber, realizado pelo matemático, é um exemplo disto. Para Pais (2001) este processo não pode ser encarado linearmente, pois pode ocultar diversas etapas da construção do conhecimento. Segundo este autor, quando se observa o saber produzido pela comunidade científica nos textos matemáticos, acaba por se reduzir as etapas na construção desse saber, as quais apresentam inúmeros obstáculos epistemológicos durante sua criação. Isto é, de acordo com ele os erros cometidos nas etapas de conjecturas, as dúvidas, avanços e retrocessos desaparecem no texto científico. Tendo em vista que estes textos são a base para a construção dos textos de saberes a serem ensinados na escola, fica evidente que embora haja muito cuidado na construção de tais objetos de ensino, eles levarão consigo obstáculos provenientes da etapa de síntese de sua criação.

Em relação ao saber algébrico, esta situação será exemplificada através da construção da notação algébrica. Segundo Eves (2004) a notação algébrica desenvolveu-se em três estágios: álgebra retórica, sincopada e simbólica. No estágio da álgebra retórica, ao resolver problemas, não eram utilizadas abreviações,

mas sim a prosa pura. Isto é, os objetos envolvidos nos problemas eram representados por seu nome escrito de forma completa. Já no segundo estágio, marcado pelas contribuições de Diofanto, surge a chamada álgebra sincopada e iniciam-se as primeiras abreviações para as operações e objetos algébricos mais utilizadas. No último estágio a notação algébrica ganha um caráter essencialmente simbólico, onde os símbolos utilizados passam a não ter relação com o que representam, conforme utiliza-se até os dias atuais.

Esse breve resumo histórico evidencia a existência de três estágios para a construção da nomenclatura algébrica. Todavia, o ensino da álgebra é apresentado, desde seu início, por uma escrita simbólica. Isto é, os estágios anteriores, relacionados ao processo histórico de construção do conhecimento algébrico são omitidos. O que não elimina a utilização de outra nomenclatura por parte dos estudantes, pois é bastante comum a associação dos elementos presentes nos problemas matemáticos às letras iniciais de seus respectivos nomes (STACEY & MCGREGOR, 1998), o que representa uma escrita sincopada. Conforme evoluem na aprendizagem da álgebra, os estudantes tendem a se distanciarem destas formas, optando por elementos simbólicos como “ x ” e “ y ”. Notemos que ao utilizar uma notação com caráter sincopado, o aluno acaba por se distanciar da finalidade de generalização e simbolização dos elementos algébricos e mais, acaba por distanciar-se dos conhecimentos numéricos. Isto é, elementos que podem ser facilmente adicionados ou subtraídos de forma intuitiva, já não o podem ser quando os elementos são puramente algébricos. Isto é, embora possa adicionar diferentes tipos de objeto resultando em um único valor, em álgebra, quando o número de carros passa a ser representados por “ x ” e o número de caminhões por “ y ” a adição não pode ser representada pela junção dos símbolos acima, isto é, xy . Ou ainda,

mesmo a representação $x+y$ passa a não representar o fechamento (BOOTH, 1995) do problema, afinal, a adição de objetos tende a ser associada a um valor numérico. Este obstáculo rompe as regras aritméticas utilizadas por ele ao longo de sua vida escolar, e com estes novos conceitos, surgem novos obstáculos:

Durante a aprendizagem, ao iniciar o contato com um conceito inovador, pode ocorrer uma revolução interna entre o equilíbrio aparente do velho conhecimento e o saber que se encontra em fase de elaboração. Isso faz com que a noção seja de interesse para a didática, pois, para a aprendizagem escolar, por vezes, é preciso que haja fortes rupturas com o saber cotidiano, caracterizando a ocorrência de uma revolução interna, o que leva o sujeito vivenciar a passagem do seu mundo particular a um quadro mais vasto de idéias, às vezes, incomensuráveis através do antigo conhecimento. (PAIS, 2002, p.43)

A transposição didática (cf. nomenclatura proposta originalmente por Y. Chevallard, 1985) tem como principal objetivo adaptar esses saberes matemáticos formais (“saber sábio”) em saberes a serem ensinados no ambiente escolar (“saber ensinado” ou “ensinável”). Ora, estando os obstáculos epistemológicos não evidenciados no produto final que é o texto científico, isso gera conseqüências para o ensino escolar de tais textos, a serem devidamente gerenciadas pelo professor em sala de aula.

O exemplo anterior, sobre notação algébrica, demonstra um obstáculo que pode ser concebido tanto de forma epistemológica quanto didática. Quando tal erro vincula-se às concepções individuais do estudante, as quais são inerentes ao seu conhecimento matemático, este obstáculo pode ser encarado como epistemológico. Todavia, as dificuldades em notação algébrica podem estar associadas a escolha na ordem dos conteúdos abordados em sala, ou ainda, a uma forte tendência de enfatizar a utilização de elementos aritméticos e inserir os elementos algébricos mais tardiamente. Nesse sentido, considera-se que o obstáculo é proveniente de escolhas didáticas. Tal reflexão leva a uma forte inter-relação entre aspectos epistemológicos

e didáticos (além de psicológicos, apenas mencionados aqui), visto que estes se desenvolvem em um plano pedagógico.

A idéia de obstáculo epistemológico, segundo Iglori (2008), foi inicialmente introduzida por Gastón Bachelard (1938) no estudo do conhecimento científico. Para este autor, os obstáculos epistemológicos são constituintes do pensamento científico, sendo caracterizados pelas perturbações e lentidões, causados por sua vez pela estagnação e inércia do pensamento. Para ele, esses obstáculos estão incrustados nos conhecimentos que não são questionados. Ainda segundo Iglori (2008) a utilização deste termo no campo da Educação Matemática deve-se a Guy Brousseau (1976), para o qual ele é um obstáculo para a aprendizagem matemática, característico de um saber mal adaptado, saber este que proveniente de um conhecimento anterior, mas que se mostra inadequado para a nova situação. Para este autor o obstáculo epistemológico é constitutivo do conhecimento e está associado aos erros não aleatórios produzidos pelos estudantes.

O conjunto dos números naturais é um exemplo de obstáculo epistemológico para o ensino dos números decimais. É bastante comum que os alunos determinem que uma divisão resulte em um número sempre menor. No domínio dos números decimais, isto nem sempre é verdade, pois ao dividir qualquer número por um valor entre 0 e 1 obtém-se um valor maior ainda. Por exemplo, na divisão de 2 por 0,1 obtém-se 20. Em relação à álgebra as operações aritméticas podem ser um obstáculo às operações algébricas. Isto é, em aritmética sempre é possível fazer a adição de dois números reais e obter um único valor, o que não é válido para quantidades representadas de forma abstrata. Por exemplo, a adição de x e y não pode ser representada por xy .

Estas considerações levam a uma reinterpretação dos erros matemáticos. No momento em que se admite que um erro seja fruto de um saber mal adaptado, ele se torna um elemento essencial na busca da compreensão das dificuldades encontradas pelos estudantes e mais, foge da concepção de que alguns erros são cometidos por esquecimento ou falta de conhecimento. Conforme Brousseau (1983, apud LOURO, 2007), o erro passa a ser considerado uma manifestação explícita de concepções reconstruídas ou espontâneas que estão vinculadas a um conjunto de representações cognitivas e que se tornam obstáculo para a aquisição de novos conceitos.

Fundamentando-se nas concepções propostas acima, parte-se para a próxima etapa, que é a discussão sobre os erros algébricos encontrados no final do ensino fundamental, focando-se os aspectos relacionados ao procedimento de fatoração e produtos notáveis e os possíveis obstáculos inerentes a estas dificuldades.

6.1 Dificuldades apontadas pela literatura

O desempenho dos estudantes brasileiros nas avaliações nacionais reflete as dificuldades encontradas na aprendizagem da álgebra. Conforme indicam os Parâmetros Curriculares Nacionais, “nos resultados do SAEB, por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto em muitas regiões do país” (BRASIL, 1998, p.115-116). Com base nesta afirmação, antes de iniciar as discussões acerca da literatura sobre as dificuldades em álgebra, será feito um breve parêntese sobre o Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB, de forma que seja possível compreender melhor o que representam esses 60% de erros.

Atualmente o SAEB é o sistema utilizado para avaliar a aprendizagem escolar dos estudantes brasileiros das escolas públicas. Para tal são realizadas provas com base em habilidades previamente determinadas. Em relação às habilidades em álgebra, que alunos até a 8ª série (9º ano) devem possuir constam:

- Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.
- Resolver problema que envolva equação do 2º grau.
- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em seqüências de números ou figuras (padrões).
- Identificar uma equação ou inequação do 1º grau que expressa um problema.
- Identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema.
- Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1º grau.

Tais habilidades viabilizam a construção de avaliações onde cada uma dessas habilidades pode ser representada em intervalos das médias de notas dos estudantes. Determina-se que os estudantes que obtém médias entre 300 a 325 nesta avaliação conseguem resolver problemas identificando uma equação do primeiro grau adequada para a solução de um problema. Alunos que atingem médias entre 325 e 350 devem ser capazes de calcular o valor numérico de uma expressão algébrica em sua forma fracionária, assim como problemas que envolvem adição e multiplicação envolvendo a identificação de um sistema de equações, além de identificar inequação do primeiro grau de forma adequada para a solução de um problema. Por fim, para médias superiores a **350** os alunos ao final do ensino fundamental devem resolver problemas utilizando propriedades dos polígonos (número de diagonais, soma de ângulos internos, valor de cada ângulo interno ou

externo), inclusive por meio de equação do 1º grau e que podem recair em equação do 2º grau e sistema de equações do 1º grau.

O gráfico abaixo representa as médias dos alunos no período de 1995 até 2005, considerando os dados do SAEB e da Prova Brasil (sistema de avaliação anterior ao SAEB):

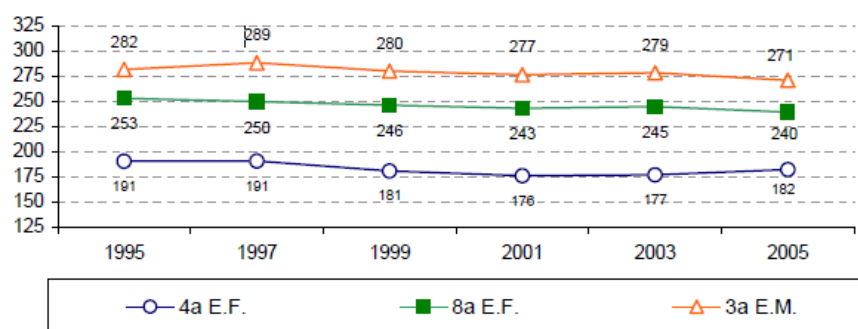


Gráfico 1: Médias de Proficiência em Matemática – Brasil – 1995 – 2005.

Fonte: Brasil, 2007.

No gráfico fica evidente que para a 8ª série (9º ano), nestes 10 anos, a média nunca atingiu 300. Estando as habilidades algébricas nas médias superiores a 300, é possível inferir que os conhecimentos algébricos representam uma das deficiências dos estudantes brasileiros, de forma que, tão importante como determinar essas dificuldades, é preciso verificar quais as conseqüências desses resultados. Conforme discutido anteriormente estas dificuldades podem constituir-se de obstáculos para o restante da vida escolar desses alunos. Nesse sentido, tendo em vista que a aprendizagem da álgebra no Ensino Fundamental é de suma importância como um “meio” e como um “fim”, conforme discutido anteriormente. Desta forma, serve tanto como um domínio do saber matemático, dotado de suas próprias regras e utilizações quanto de uma ferramenta para os demais domínios da matemática, em especial para os domínios mais avançados encontrados no Ensino Médio e Superior.

Tendo em vista a existência dessas dificuldades algébricas no ensino da matemática, inúmeras pesquisas foram realizadas no âmbito internacional e nacional. De forma mais geral, em relação às dificuldades encontradas pelos estudantes das séries iniciais do ensino da álgebra, Schliemann et al (2003) fazem uma revisão na literatura sobre pesquisas que refletem os obstáculos que emergem na aprendizagem da álgebra, as quais indicam que os estudantes:

a) baseiam-se na memorização para a resolução de problemas algébricos (KIERAN, 1992; BROWN et al., 1988);

b) Interpretam o signo de igual como um operador unidirecional (BEHR, ERLWANGER & NICHOLS, 1976; BOOTH, 1984; BYERS and HERSCOVICS, 1977; KIERAN, 1981, 1985, 1992; KNUTH et al., 2006; MEVARECH and YITSCHAK, 1983; VERGNAUD, 1985; VERGNAUD, CORTES, & FAVRE-ARTIGUE, 1988;

c) focam-se em resolver o 'x' ao invés de descrever relações gerais (focus on solving for x rather than describing general relationships) (BOOTH, 1984, 1988);

d) não utilizam símbolos matemáticos para expressar relações entre quantidades (BEDNARZ, 2001; BEDNARZ & JANVIER, 1996; VERGNAUD, 1985; WAGNER, 1981)

e) não compreendem as letras como números generalizados ou variáveis (BOOTH, 1984; KUCHEMANN, 1981; VERGNAUD, 1985);

f) têm dificuldades em operar com incógnitas e efetuar operações nos dois lados de uma igualdade (BEDNARZ, 2001; BEDNARZ & JANVIER, 1996; Functions and Equations in Elementary School 4, FILLOY & ROJANO, 1989; KIERAN, 1985, 1989; STEINBERG, SLEEMAN, & KTORZA, 1990);

g) não compreendem que quando são utilizados valores incorretos para as variáveis em uma equação, os lados não permanecem iguais (GREENO, 1982; KIERAN, 1984);

h) não usam álgebra para resolver equações onde variáveis aparecem nos dois lados do sinal de igual (FILLOY & ROJANO, 1989).

As dificuldades acima citadas refletem nas etapas posteriores do ensino da álgebra. Cury (1995) e Cury e Konzen (2006) afirmam que as dificuldades encontradas pelos estudantes de graduação, em Cálculo Diferencial e Integral estão fortemente relacionadas aos conceitos algébricos desenvolvidos ao longo do Ensino Fundamental e médio:

Efetivamente, a maioria dos problemas é decorrente da falta de pré-requisitos, especialmente quanto aos assuntos relacionados à Álgebra do ensino fundamental e médio, como propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, simplificação de expressões algébricas, fatoração, produtos notáveis e resolução de equações polinomiais. (CURY e KONSEN, 2006, p.1, tradução nossa)

De forma mais específica, em se tratando dos conhecimentos algébricos relacionados ao ensino fundamental, as autoras argumentam que os erros dos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e integral estão vinculados às dificuldades no reconhecimento de padrões nas expressões algébricas, o que é essencial no processo de fatoração.

Analogamente, focando a análise dos conhecimentos algébricos no Ensino Superior, Gray, Loud, e Sokolowski (2005) em sua pesquisa aplicaram um instrumento com conhecimentos algébricos para alunos universitários que cursavam as disciplinas de Basic Algebra, College Algebra e Calculus. Conforme os autores, os 364 estudantes que participaram da pesquisa foram avaliados segundo o teste algébrico de Küchemann para analisar a compreensão de variável de acordo com seu uso segundo o critério de Küchemann, o qual determina 4 níveis de uso da

variável. No nível 1 e 2 os alunos ignoram as variáveis ou as utilizam como rótulo (álgebra sincopada). No nível 3 as variáveis são utilizadas como valores desconhecidos específicos e números generalizados enquanto no nível 4 são interpretadas como relações funcionais. Conforme pode ser observado na tabela seguinte, cerca de 40% dos estudantes de cálculo não atingiram o nível 4, o qual está associado a compreensão das variáveis do ponto de vista de uma perspectiva funcional, o que é essencial para o curso.

Level	Basic Álgebra n=75	College Álgebra n=94	Calculus n=177
1	25.3%	22.3%	2.3%
2	38.7%	29.8%	7.3%
3	32.0%	35.1%	31.1%
4	4.0%	12.9%	59.3%

Tabela 1: Porcentagens de estudantes em cada nível por curso. Fonte: Gray, Loud, e Sokolowski (2005)

Em relação aos aspectos mais específicos, esta pesquisa mostra que a dificuldade encontrada na ausência de fechamento (cf. BOOTH, 1995) não é uma dificuldade apenas dos estudantes da escola primária e secundária, pelo contrário, alunos da disciplina de cálculo apresentam também a mesma. Em um teste aplicado durante a pesquisa, uma das questões é uma situação de compra de maçãs e peras. A questão informa que as maçãs custam 8 centavos e as peras 6 centavos, sendo a o número de maçãs compradas e p o número de peras compradas, e solicita que seja determinado o total de frutas compradas. O número de erros nesta questão é surpreendente: 64% dos 177 alunos que cursavam a disciplina de Cálculo erraram ao responder qual era o total de frutas compradas. Tal dado, unido a outras observações realizadas na pesquisa, leva as pesquisadoras a concluir que os

erros encontrados estão associados à utilização de variáveis como rótulos e também na passagem da linguagem verbal para expressões e equações. Além disto, indicam que há pouca habilidade para dar significado a uma expressão algébrica ou para utilizá-las como respostas generalizadas.

Em um estudo realizado com alunos de um curso pré-vestibular Samora e Tancredi (2004) analisaram a compreensão que estes alunos têm de conceitos algébricos presentes no currículo de 5^a à 8^a série do Ensino Fundamental. Além da aplicação de questões relacionadas aos conceitos algébricos, era solicitado que os alunos classificassem os elementos algébricos. As autoras afirmam que mesmo quando acertam as classificações os alunos têm dificuldade de argumentar corretamente sua escolha, o que segundo elas, indica falta de compreensão e aquisição incompleta do conceito. Dentre as dificuldades encontradas pelos alunos, destacam aquelas nos conceitos de expressão, equação e inequação, no grau da equação e da inequação e inexistência do conceito de equação fracionária, e indicam que:

Para os alunos, expressão é tudo o que tem letra e assim não é necessário usar termos mais específicos como monômios, binômios, trinômios, que não apareceram nas classificações e raras vezes nas justificativas. Com relação às equações, inequações e sistemas, observa-se, por exemplo, a confusão graus e número de variáveis. (SAMORA; TANCREDI, 2004, p.8)

Com base nas pesquisas acima referidas, pode-se sugerir que as dificuldades em álgebra no ensino superior, tanto no Brasil quanto em outros países, possuem origem em conceitos que são ensinados ao longo do ensino fundamental. Seria possível supor que o distanciamento entre estas duas etapas do ensino da álgebra pode influenciar o surgimento destes erros? Infelizmente não é o que a literatura sobre dificuldades em álgebra indicam. Notari (2002) desenvolveu uma pesquisa que tinha como objetivo analisar as dificuldades apresentadas por alunos da 8^a série

e 1º ano do ensino médio na simplificação de frações algébricas e aritméticas. Nas frações algébricas, para os alunos da 8ª série, quatro erros foram apresentados pelos estudantes: transformação da fração algébrica em equação, transposição de uma variável do numerador para denominador (e vice-versa), utilizar expoente da variável nos coeficientes e erros relacionados a uma simplificação parcial. Dentre estes erros, os mais freqüentes foram a transposição de variável e a simplificação parcial. Este autor observa ainda que ao longo da pesquisa verificou-se que os alunos não faziam analogias entre as expressões algébricas e aritméticas, de forma a ignorar as leis da aritmética que são o alicerce para as leis da álgebra. Neste momento há uma forte tendência de uma supervalorização da dimensão sintática dos procedimentos algébricos. Posto isto, pode-se concluir que a ênfase na dimensão sintática traz como consequência a mera repetição de justificativas na simplificação de frações, as quais são destituídas de uma análise das condições que viabilizam suas utilizações. Esta situação pode ser facilmente visualizada na simplificação da fração $\frac{2z^3}{z} = 2z^2$ que leva a erros na simplificação de uma expressão do tipo $x^2 + 2x + x^2$ erroneamente simplificada para $2x$. Note-se que não há uma reflexão na diferenciação destas simplificações. Enquanto a primeira está associada ao elemento inverso da multiplicação, a segunda está associada ao elemento simétrico ou oposto.

No domínio da fatoração Burigato (2007) explicita as dificuldades encontradas pelos estudantes em cada um dos tipos de fatoração. Na fatoração por fator comum em evidência os alunos demonstram dificuldades em: identificar o fator comum máximo para se colocar em evidência, dividir os termos da expressão pelo fator comum, divisão do segundo termo ao fatorar e ainda nas operações com monômios e propriedade distributiva. Já na fatoração dos trinômios quadrados perfeitos, há

uma tendência a tentarem utilizar as regras sem analisar procedimentos que precisam ser realizados anteriormente ou ainda na extração de raiz quadrada. Isto é, continua-se a verificar que há uma forte tendência dos erros em álgebra serem provenientes de conceitos mal aprendidos anteriormente ou mesmo nos conceitos essenciais, como o próprio conceito de fatoração.

Conforme pode ser observado, inúmeras são as dificuldades apresentadas pelos estudantes em álgebra. Fundamentando-se nos aspectos teóricos apresentados até o momento partiremos então para a discussão da delimitação de elementos para o campo conceitual algébrico ao final do ensino fundamental e respectivas situações que possam servir de base para a avaliação dos mesmos.

7 DELIMITANDO COMPETÊNCIAS, EM BUSCA DE ELEMENTOS DO CAMPO CONCEITUAL ALGÉBRICO

No momento em que há o interesse de avaliar competências algébricas é importante discutir quais elementos algébricos e não-algébricos são importantes para os estudantes ao final do Ensino Fundamental, e mais, como um dos objetivos da pesquisa é a construção de um instrumento de avaliação destas competências e habilidades, é preciso responder a seguinte pergunta: Quais são as competências algébricas que se deseja avaliar? Partindo da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1997) não é possível pensar na construção dos conceitos de forma isolada ou linear. Ou seja, a competência para operar termos algébricos só é possível mediante a utilização de diversos conceitos aritméticos fundamentais que permitirão o sucesso nesta tarefa. Ou seja, a compreensão dos conceitos algébricos e a avaliação dos mesmos não pode ser realizada sem levar em consideração elementos aritméticos e símbolos matemáticos utilizados em todos os domínios da matemática, por exemplo. Dessa forma, serão descritos e justificados os conceitos e propriedades que são considerados essenciais ao final do Ensino fundamental, sendo utilizados ao longo do 3º e 4º ciclo.

7.1.1 Aspectos Gerais da Matemática

Considerando que todas as atividades algébricas são permeadas de elementos aritméticos, os quais são fundamentais para a construção de conceitos algébricos, é preciso determinar os elementos que são provenientes da aritmética e aparecem como pré-requisitos para a construção dos conceitos algébricos, mesmo que implicitamente. E mais, considerar que existem elementos matemáticos que permeiam tanto a atividade algébrica quanto a atividade aritmética, como os sinais de igualdade e desigualdade.

O sinal de igual possui diversas aplicações. Na passagem da aritmética para a álgebra o sinal de igualdade passa a ter um novo significado, que não está associado a uma operação, mas expressa alguma função que deve ter seu valor determinado (VERGNAUD, 1998). Conforme Cavalcanti (2007) a igualdade possui diversos significados que estão relacionados ao contexto utilizado. Para este autor, nas operações aritméticas o sinal de igual possui uma concepção operacional, isto é, os estudantes interpretam como “fazer algo”. Exemplo: $5 + 4 = \underline{\quad}$. Já nas igualdades aritméticas a concepção deste sinal é de Igualdade relacional, isto é, o que está de um lado deve ser idêntico ao que está do outro ($1+2=3-1$). Na álgebra o sinal de igualdade pode ter a concepção de equivalência em igualdade condicional (equações), concepção funcional (funções) e uma concepção que não é restrita à álgebra: relacional nome-símbolo. Embora seja um elemento comum as duas áreas do conhecimento matemático, quais destas concepções são fundamentais para o ensino da álgebra? Se houver a restrição da compreensão do símbolo de igual à concepção de equivalência, é possível que os estudantes tenham dificuldade para lidar com equações com duas variáveis, por exemplo, as quais permitirão a construção do conceito de função. Ao que parece, a concepção de equivalência é suficiente para o ensino da álgebra no terceiro ciclo, sendo necessária a inclusão da concepção funcional no quarto ciclo do ensino fundamental ou ensino médio.

Analogamente, outro símbolo utilizado na atividade matemática em geral é o símbolo de desigualdade, representado pelos sinais de maior, maior ou igual a, menor e menor ou igual a, essenciais para a compreensão do conceito de inequações, por exemplo. Segundo Boero e Bassini (2001) na maioria dos países inequações são ensinadas de uma forma puramente algorítmica o que pode implicar numa “trivialização” do assunto, resultando numa seqüência de rotinas de

procedimentos, dificultando que alunos da escola secundária possam lidar com inequações ou situações que não se enquadram nos esquemas aprendidos que não são aquelas conhecidas como padrões. Embora a utilização de gráficos seja uma das alternativas para o ensino das inequações, Sackur (2004) alerta para as novas dificuldades que o uso de gráficos pode trazer para o ensino das inequações, e mais, que não se pode pensar que é ao resolver graficamente e algebricamente uma inequação os estudantes usam “a mesma matemática”, mas que o que importa é o que eles aprendem matematicamente quando lidam com estes dois tipos de estratégias. Dessa forma, era interessante observar como os alunos lidam com o sinal, se compreendem o mesmo e conseguem manejar o mesmo utilizando representações fora como a balança de dois pratos, sem a necessidade de operações entre termos algébricos.

Por fim, Verikios e Farmaki (2006) desenvolveram uma pesquisa utilizando sistemas de inequações e concluem que as dificuldades dos estudantes em inequações tendem a entender a solução de uma inequação de modo análogo a uma equação, além disso, apontaram as seguintes dificuldades:

- a) Mudar o sinal da desigualdade ao multiplicá-la por um número negativo sem compreender o motivo;
- b) Compreenderem que a inequação $14 > x$ é igual a $x < 14$;
- c) Noção incorreta de que inequação tem apenas uma solução, assim como nas equações, e não como um intervalo de valores;
- d) Dificuldade em aceitar o zero como um número

Dessa forma, os símbolos $<$ e $>$ e seus variantes, assim como o conceito de inequação são importantes como uma ferramenta para conceitos que serão aprendidos futuramente no ensino médio ou superior.

7.1.2 Noções conceituais compartilhadas com a aritmética

Conforme Vergnaud (1998) quando os alunos ouvem falar pela primeira vez em álgebra, precisam imaginar um significado concreto atrás dos números e letras utilizados. Este significado, estando associado ao concreto, remete a utilização de elementos aritméticos, como números naturais ou racionais decimais. Mas, existem elementos aritméticos que não estão presentes nas atividades concretas e que são necessários para o ensino da álgebra. Em relação à forte ligação entre aritmética e álgebra Booth (1995) enfatiza a diferenciação entre as respostas dadas aos problemas que remetem a cada um dessas sub-áreas da matemática. Segundo ele, enquanto em aritmética busca-se respostas particulares, em álgebra o foco é a generalização, o que pode implicar em obstáculos associados à necessidade de buscar respostas numéricas para expressões algébricas (ausência do fechamento).

Partindo da concepção que estas áreas estão fortemente interligadas, existem conceitos aritméticos que serão essenciais para a aprendizagem da álgebra e as dificuldades nestes conceitos contribuem para o surgimento de obstáculos (NORTON; IRVIN, 2007). A compreensão dos **conjuntos numéricos (N, Z, Q)** é inegável para o ensino da álgebra, assim como seus elementos e operações (adição, subtração, multiplicação e divisão). Por exemplo, o elemento inverso da multiplicação e o simétrico da adição são conceitos essenciais para os processos de simplificação. Além desses elementos, as operações (+, -, x:) carregam consigo uma ordem de prioridade, a qual determinará, por exemplo, se na expressão $2a + 4a \times 3a$ deve-se realizar primeiro a adição ou a multiplicação e também determinadas propriedades matemáticas (comutativa, associativa, distributiva, elemento neutro, etc.). Embora estes elementos sejam essencialmente aritméticos, são importantes para a compreensão dos conceitos algébricos, tendo em vista que cada termo

algébrico possui um coeficiente numérico. Ou seja, para que se possa resolver uma equação, resolver produtos notáveis e outras tarefas algébricas, é preciso que as operações e propriedades aritméticas sejam um domínio do conhecimento matemático já construído pelo estudante.

7.1.3 Noções conceituais específicas da álgebra

Conforme discutido previamente, a atividade algébrica é um elemento de grande simbolização, desta forma, um dos elementos fundamentais para tal atividade é o significado atribuído aos símbolos utilizados, como as **incógnitas e variáveis**. Ao iniciar os estudos em álgebra, é possível que seja inviável fazer discussões acerca de todos os tipos de variáveis (cf. USISKIN, 1995). Todavia, é importante que os símbolos utilizados pelos estudantes sejam compreendidos como elementos matemáticos que podem representar um único valor numérico ou diversos valores. Tal distinção permitirá que futuramente, ao estudar funções, eles façam distinção entre uma letra utilizada como variável independente ou como incógnita. Um exemplo que enriquece tal discussão é o momento em que se buscam as raízes de uma função para a construção do gráfico. Neste momento é atribuído à variável dependente um valor (ou mais, dependendo do grau da função polinomial) específico, e assim a variável passa a ser uma incógnita.

A **nomenclatura algébrica** é extremamente peculiar a esta área do conhecimento, e de acordo com Booth (1995) é uma das origens das dificuldades encontradas pelos estudantes, o que ele denomina “dilema nome-processo”. Tal dilema surge através de uma indiferenciação dos símbolos que são utilizados tanto em álgebra quanto em aritmética. Enquanto em aritmética os símbolos (+,-,=,...) indicam ações a serem executadas, em álgebra a união física de dois conjuntos pode não ser possível: $x+y$ não é o mesmo que xy . Além disso, tal autor evidencia as

dificuldades que emergem de uma associação equivocada de letras e variáveis. Novamente, tal aspecto está fortemente associado às concepções que os alunos trazem da aprendizagem da aritmética: a letra L pode representar litros em aritmética ou pode ser um valor arbitrário em álgebra. Quando a letra L é utilizada em álgebra para representar laranjas, como se fosse um rótulo, pode trazer diversos obstáculos como acreditar que L é uma laranja e não uma determinada quantidade de laranjas, que remete às dificuldades na compreensão de variável: “Mesmo quando as crianças interpretam as letras como representações de números, há uma forte tendência a considerar que as letras representam valores específicos únicos” (BOOTH, p.31) ou ainda “as crianças muitas vezes assumem que letras diferentes devem necessariamente representar valores numéricos diferentes” (p.32).

Ainda em relação à nomenclatura algébrica, as operações de adição e subtração trazem consigo mais um aspecto a ser considerado: o conceito de **termo semelhante**. Se em aritmética todos os elementos podem ser adicionados, subtraídos, multiplicados e divididos, em álgebra as regras para tais operações são diferenciadas. Na adição e subtração o conceito de termo semelhante é fundamental, o que não ocorre para as operações de multiplicação e divisão.

Tão importante quanto compreender os aspectos sintáticos citados acima é compreender e diferenciar elementos simbólicos da álgebra que possuem a mesma representação. Isto é, a compreensão dos conceitos de **variável e incógnita**. Tal conceito está fortemente conectado à concepção do sinal de igual. Enquanto o sinal de igualdade, ao ser utilizado em aritmética, encontra-se relacionado à idéia de fechamento (BOOTH, 1995), em álgebra ele terá a concepção de equivalência e funcional. A compreensão desses dois conceitos permitirá que o aluno não transforme uma expressão em equação ou ainda que tente encontrar o valor de uma

variável em dada expressão numérica, o que implicaria a falta de diferenciação entre os conceitos de **expressão**, **equação** e, posteriormente, de **função**.

Há ainda que se considerar um elemento que é pouco valorizado nos livros didáticos: o conceito de **grau de uma equação polinomial**. Embora seja utilizado formalmente apenas no 8º ano (7ª série), é necessário para a análise das possibilidades e do número de soluções de uma equação. Nos livros didáticos, o conceito de grau é abordado de forma meramente procedural, não trazendo discussões sobre as implicações na resolução de equações e nos gráficos das funções. Novamente temos um conceito que, ao ser mal compreendido restringirá o potencial de análise do número de soluções de uma equação. Em muitos casos, o aluno não entende porque em algumas equações é encontrado apenas um valor para a incógnita (equações do primeiro grau), quando em outros momentos, encontram-se dois valores (equações do segundo grau). E mais, os alunos tendem a resolver equações incompletas do segundo grau indicando como resposta apenas um valor, em especial quando a resposta é obtida através da extração da raiz quadrada.

Existem ainda outros dois elementos que precisam ser considerados dentro do campo conceitual algébrico: **produtos notáveis e fatoração**. Estes elementos estão permeados de conceitos tanto aritméticos como algébricos. Os produtos notáveis utilizam as propriedades das operações aritméticas e também algébricas, em especial às propriedades das potências. Já a fatoração abarca além dos elementos essenciais na construção do conceito de produto notável, elementos como múltiplos e divisores, binômios e trinômios, podemos ainda citar como elementos deste campo: divisão e multiplicação numérica e algébrica, fatoração numérica, fatos comum de uma expressão, redução de termos semelhantes,

quadrado perfeito, fator comum de uma expressão, redução de termos semelhantes, quadrado perfeito, raiz quadrada, dentre outros (BURIGATO, 2007).

Pesquisas realizadas por Cury (2003) e Cury e Konzen (2006) indicam que esses dois últimos elementos (produtos notáveis e fatoração) são fundamentais para a aprendizagem da álgebra no ensino superior. Embora sejam importantes no Ensino Superior, já nas séries finais do Ensino Fundamental são elementos cruciais para a simplificação de frações algébricas e expressões fracionárias e, posteriormente, no ensino médio nas equações biquadradas, equações e inequações-quociente e na geometria analítica.

Desta forma, com base nas reflexões acima e ampliando o Campo conceitual Algébrico proposto por Da Rocha Falcão et al (2003) foram sugeridos, como parte integrante do Campo Conceitual Algébrico, os elementos descritos na tabela a seguir. Lembramos que, a representação abaixo, no formato de tabela, visa permitir uma organização e exposição mais simplificada dessas habilidades. Dessa forma foram propostos os seguintes elementos:⁸

Aritmética	Elementos Cognitivos	Algébrica
A1 – Propriedades do conjunto dos números Naturais, Inteiros e Racionais (representações decimal e fracionária) A2- Operações com expressões numéricas: propriedades e ordem de prioridade das mesmas A3 - Fatoração Aritmética (números primos, decomposição, múltiplos e divisores,...).	PC1- Trânsito entre formas de linguagem PC2- Aspectos sintáticos e semióticos da linguagem PC3 – Heurística e Gestores Metacognitivos.	G1- Incógnita, variável (dependente e independente) e argumento G2 – Expressão algébrica (polinômio), equação e inequação G3- Grau de um polinômio, de uma equação G4 - Termos algébricos (significado, diferença do sistema posicional, semelhança entre termos, operações) G5 - Fatoração Algébrica (operações com termos algébricos, propriedades da multiplicação, fatoração aritmética,...)

⁸ Evidenciamos que o formato linear apresentado é meramente uma medida tomada para facilitar a leitura, visto que conceitos são organizados em formato de rede, conforme exposto na seção “5” .

		G6 - Produtos Notáveis (propriedades da multiplicação e das potências, operações com números reais,...)
Matemática em Geral		

M1- Conceitos de igualdade e do sinal de Igual (perspectiva operacional, de equivalência e funcional)

M2- Conceito de desigualdade e de sinais de maior, maior que, menor, menor que.

Quadro 2: Elementos do Campo Conceitual Algébrico construído para esta pesquisa baseando-se em sistematização do Campo Conceitual Algébrico proposto por Da Rocha Falcão (2003c).

7.4 Conceitos algébricos e construção de instrumento de avaliação

Após determinar os conceitos que foram sugeridos para o Campo Conceitual Algébrico, passou-se então para o próximo passo: determinar as situações a serem escolhidas. Mas, antes de fazermos estas considerações, voltaremos um pouco para os objetivos desta pesquisa. Tendo em vista o objetivo de construir um instrumento, não se poderia esquecer que, o foco também é avaliar essas competências. Segundo Da Rocha Falcão (2009), para construir um instrumento de avaliação de competências e habilidades, é importante passar pelas seguintes etapas:

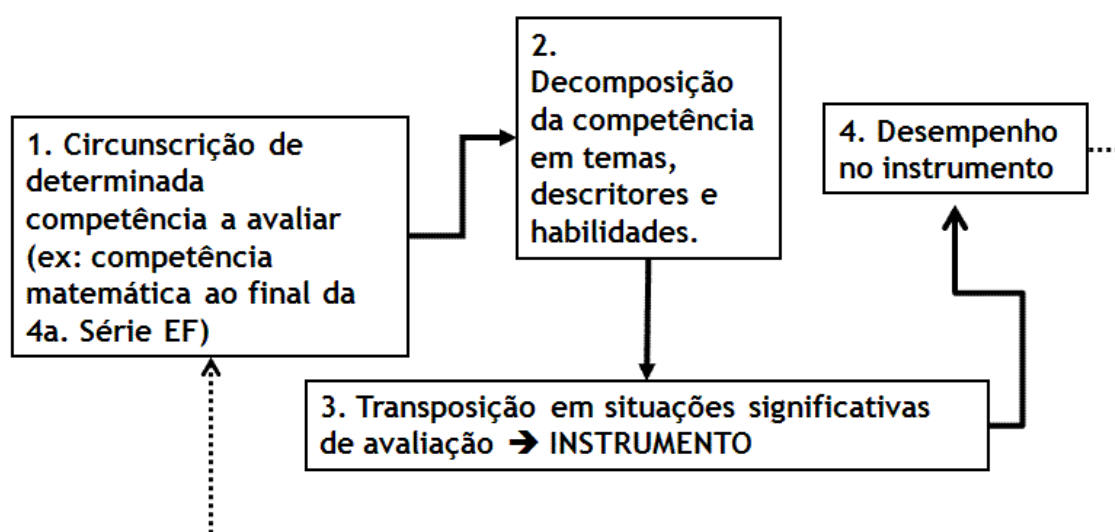


Figura 5: fluxo básico de trabalho na preparação e aplicação de instrumento de avaliação de desempenho escolar.

Seguindo o modelo proposto, o estudo em questão deseja avaliar a competência algébrica dos estudantes ao final do ensino fundamental (etapa 1). Tendo este foco, até o momento foram cumpridas as etapas 1 e 2 (decompor esta competência em temas, descritores e habilidades), e a partir de agora passaremos para a próxima etapa (3): pensar em questões e ou situações que permitam a avaliação das habilidades (Etapa 3).

7.4.1 Em busca de situações significativas de avaliação

Após a determinação das competências a serem analisadas, partiu-se então para a Etapa 3 (de acordo com proposta de construção da Fig.1), isto é, construir situações significativas de avaliação. Fundamentando-se nos elementos básicos do Campo Conceitual algébrico apresentado anteriormente, em uma breve revisão de literatura e na experiência docente da pesquisadora foi preciso fazer um recorte dentre as inúmeras situações presentes nos livros didáticos e na literatura. Havia ainda o interesse de que o instrumento não excedesse um número de questões que inviabilizasse a resolução em 2 tempos de aula (aproximadamente 1h30min).

Voltando para uma reflexão epistemológica, a álgebra pode se considerar um objeto de estudo em si mesmo e também uma ferramenta para outros domínios do conhecimento (DA ROCHA FALCÃO, 2003). Assim, num instrumento que tenha como objetivo avaliar as competências algébricas estes dois aspectos devem ser considerados e, por tal motivo buscou-se a inserção de questões procedurais que visassem a análise de procedimentos como objetos puramente algébricos (ver questões 6, 11, 14, 16, 17, 19), mas também questões onde os conceitos algébricos são inseridos em outras situações, que necessitam de conhecimentos que não são exclusivos da álgebra (Q1, Q13, Q21, por exemplo). Todavia, levando em consideração que uma competência matemática não pode ser avaliada com um foco

exclusivo na análise da resolução de problemas, isto é, do “saber fazer”, mas também nas formas como eles compreendem esses conceitos, inseriu-se questões com as quais os alunos (as) não precisassem realizar procedimentos, mas descrever os conceitos solicitados. Além desse fator, era de nosso interesse verificar como os estudantes explicitavam os conceitos algébricos. Em busca disso, e levando em consideração as limitações de um instrumento manuscrito, iniciou-se o instrumento com 13 itens nos quais é solicitado que sejam descritos conceitos matemáticos como incógnita, equação, fração, e etc (ver apêndice A para visualizar todos os elementos).

Houve o interesse de contemplar os quatros aspectos propostos por Da Rocha Falcão (1993) que abrangem a atividade algébrica: reconhecimento de determinadas funções da álgebra (questões 22 e 23), formalização do problema (questões 1, 3, 4, por exemplo), conhecimento dos objetos algébricos (questões 7, 11,...) e do que fazer a partir de uma equação (questões 14, 15,...). Algumas questões exigem essencialmente a aplicação de um algoritmo, enquanto outras são apresentadas na forma de problemas (Q1,Q3, Q4, Q12, Q23, por exemplo) ou envolvendo outros domínios do conhecimento matemático (Q2 e Q13). Acredita-se que a inserção de questões na forma de problema são importantes e úteis de forma que seja possível verificar tópicos importantes em álgebra através de aplicações quotidianas e de outras áreas da matemática (SCHOEN, 1995).

Por fim, para que fosse possível escolher os tópicos a serem abordados no instrumento recorreu-se ainda aos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), os quais indicam quatro dimensões para a álgebra (conforme discutido no seção 5): aritmética generalizada, funcional, equações e estrutural, conforme o quadro abaixo:

Álgebra no ensino fundamental				
Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

Quadro 3: Dimensões da álgebra.
Fonte: PCN, 1998 pag. 116.

Nesse sentido, as questões propostas podem ser distribuídas da seguinte forma, conforme será detalhado a seguir:

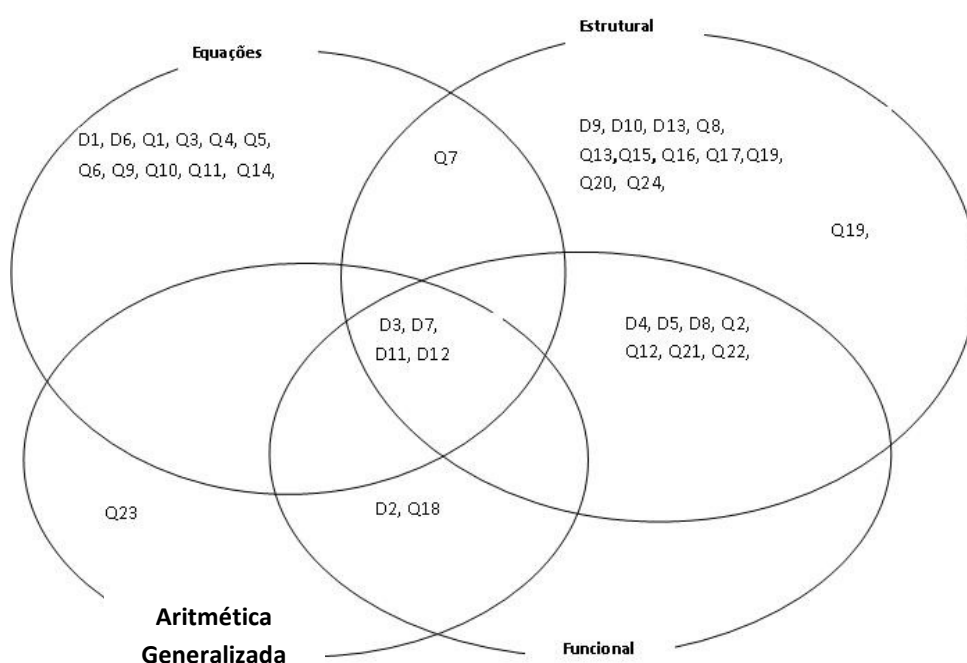


Figura 6: Distribuição das questões do instrumento de acordo com as subdivisões do conhecimento algébrico segundo os PCN.

Partindo para habilidades específicas, no domínio das equações era preciso avaliar o desempenho tanto na resolução de equações do 1º e 2º graus (ver quadro abaixo), mas também permitir que se verificassem dificuldades aritméticas, como

propriedade distributiva da multiplicação (questão 6) ou de conjuntos numéricos (questão 4 e 11), por exemplo. Tendo em vista que as questões algébricas envolvem todos os conjuntos dos números reais, optou-se por introduzir algumas questões que viessem a conter estes objetos, de forma a analisar as dificuldades encontradas pelos alunos ao utilizarem os diferentes conjuntos. Os problemas 1, 3 e 4 são resolvidos com equações do primeiro grau, sendo possível, para o último, o qual possui coeficientes racionais, a resolução com um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas. Estudo realizado por Teles (2002) com equações do primeiro grau cujos coeficientes são racionais aponta percentuais de erros elevados para esse tipo de questões. No problema da questão 3 a quantia de dinheiro dos irmãos é desconhecida e informa-se que um deles possui $\frac{1}{4}$ do outro. Remete-se a idéia de parte-todo, sendo o todo uma quantia desconhecida. Na análise do instrumento piloto foi observado que diversos alunos determinam $\frac{1}{4}$ do valor que o CD custava, não relacionando à quantia do outro irmão. Tal erro pode ser entendido como uma forte associação procedural por parte dos alunos, ou seja, a forte preocupação em realizar um procedimento e não refletir sobre os conceitos envolvidos no mesmo. Ou seja, os estudantes não estariam compreendendo uma equação como um todo, mas como uma acumulação de itens e operações que precisam ser realizadas (PIRIE e MARTIN, 1997).

Ainda na dimensão das Equações inseriu-se uma questão sobre Sistemas de Equações do 1º grau, mas que também pudesse ser resolvido utilizando uma equação do 1º grau mais complexa (questão 1).

Em relação às questões 11 e 14, buscou-se colocar equações variadas e que permitissem (em especial para equações do 2º grau que poderiam ser resolvidas também por fatoração) mais de um tipo de resolução. Buscou-se inserir questões

apontadas por Filloy e Rojano (1989)⁹ como essenciais para analisar o início do pensamento algébrico. Além disso, ao longo do instrumento tentou-se variar a utilização de termos, por exemplo “raiz de uma equação” por “valor que satisfaz uma equação” (questão 14).

Q1. A soma das idades dos irmãos Paulo e Bruno é 40. A idade de Bruno é igual à idade de Paulo mais 18. Qual a idade de cada um dos irmãos?

Q3. A mãe de Eduarda levou seus três filhos a uma sorveteria e comprou somente 1 sorvete para cada filho. Para pagar os sorvetes ela utilizou uma nota de R\$10,00 e obteve R\$4 de troco. Representando o preço de cada sorvete pela letra “y”, como você poderia representar esse problema, em linguagem da matemática? Qual o preço de cada sorvete?

Q4. Para comprar um CD que custava R\$20,00 os irmãos Jonas e Sérgio juntaram todo o dinheiro que tinham. Sabendo que Sérgio tinha $\frac{1}{4}$ da quantia que seu irmão possuía, como é possível representar este problema em linguagem matemática? Quanto cada irmão possuía em dinheiro?

Q6. Qual valor torna a igualdade verdadeira?

$$6(x + 4) - 8 = 5x + 3$$

Q11. Resolva as equações abaixo:

a) $2a = 12 + 8$

b) $10y = \frac{2}{4} + \frac{1}{2}$

c) $3b + 17 = 2b - 3$

d) $x^2 + 5x + 6 = 0$

Q14- Qual(is) são os valores de “x” que satisfazem a equação $2x^2 - 32 = 0$?

Quadro 4: Questões relacionadas ao subdomínio das equações.

Uma das dificuldades dos estudantes para um bom desempenho na resolução de problemas algébricos é a passagem da linguagem natural para a linguagem matemática (DA ROCHA FALCÃO, 2003). Visando analisar essa competência, foram inseridos problemas na ordem inversa ao que é comumente apresentado em sala, ou seja, ao invés de dar o problema e pedir a equação,

⁹ Filloy e Rojano (1989) defendem que a passagem do pensamento algébrico para o pensamento aritmético ocorre quando o aluno passa a obter sucesso na resolução de equações do tipo $ax+b=cx$ ou $ax+b=cx+d$.

solicitou-se também que, dada uma equação ou situação de desigualdade, fossem construídas representações para tais elementos matemáticos (questões 5, 9 e 21, apresentadas no quadro a seguir).

Q5. Dada a equação $x + 2 = y + 4$, que situação poderia ser criada de forma que representasse essa equação?

Q9. Supondo que a balança está equilibrada, como podemos representar essa situação em linguagem matemática?



Q10. Na situação abaixo, se a balança está equilibrada, qual é o valor do peso y?



$$x = 3\text{kg}$$

Q21- Com base na figura abaixo:



a) Imagine uma situação que possa ter sido ilustrada pela figura abaixo, e descreva essa situação por escrito, para que outro aluno a entenda.

b) Depois de ter escrito a explicação, tente representar o que você escreveu por uma expressão matemática.

Quadro 5: Questões que priorizam a passagem da linguagem simbólica para a natural e vice-versa.

Sob esse ponto de vista, Barros de Oliveira (2004) realiza uma pesquisa sobre a construção da linguagem simbólica algébrica, de forma a explorar a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica. Tal pesquisa aponta que, após intervenções que enfatizam essa passagem,¹⁰ os estudantes tendem a ter

¹⁰ Participaram desta pesquisa alunos da 6ª série da rede pública de ensino de São Paulo divididos em grupo experimental e controle. Para o grupo experimental foram propostas atividades de

um melhor desempenho nesse tipo de questões, enquanto que os alunos que recebem um ensino tradicional de equações tendem a terem um melhor desempenho em questões meramente algorítmicas. Embora os resultados sejam positivos na intervenção, em uma questão onde é solicitado que os estudantes construam um texto de uma equação dada (similar a questão 5 acima), ambos os grupos possuem um desempenho menor que 50%. Tendo em vista que a pesquisa é realizada com alunos da 6ª série, será que os resultados serão os mesmos para os estudantes ao final do ensino fundamental?

O segundo grupo de questões (questões 7, 8, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20 e 24) está associado à dimensão Estrutural da Álgebra, isto é, elementos que trazem a noção de letra como um elemento abstrato. É neste grupo que estão questões de equação equivalente, frações algébricas, propriedades das operações algébricas, produtos notáveis, fatoração e etc.

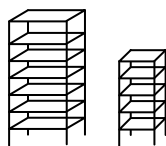
Em relação às questões desse grupo é importante fazer algumas considerações pontuais. Por exemplo, o interesse em uma diversificação de utilização dos conjuntos numéricos foi discutida anteriormente, todavia houve o interesse de analisar o desempenho dos alunos em uma noção conceitual relacionada aos números racionais aplicada a um conceito algébrico. Tal interesse partiu das observações em sala de aula da pesquisadora, na qual os estudantes mostram facilidade em entender que um número racional não pode ter denominador zero, mas não conseguem verificar que as frações algébricas respeitam essa mesma lei e, para tal, é preciso ver o domínio de validade, isto é, valores os quais a variável pode assumir, conforme solicitado na questão 8 apresentada abaixo.

Todavia, devido a um erro e impressão, a questão solicita valores que podem ser atribuídos à m , quando, na verdade, existe apenas um valor. Por tal erro optou-se por desconsiderar a mesma.

Q7. Equações equivalentes são equações que se diferenciam por terem passado por uma determinada transformação, mas cuja solução é a mesma. Assim, podemos dizer que $x + 2y = y$ é equivalente à $x + 2y + 30 = y + 30$. Com base nesta informação e em seus conhecimentos sobre álgebra, indique uma equação que seja equivalente a $2m + 4 = 18m + 10$

Q8. Que valores não podemos atribuir a “ m ” na fração $\frac{2}{m-1}$? Por quê?

Q12- Para organizar seus livros, Isabel comprou duas estantes de altura e largura diferentes. Na estante da esquerda (conforme ilustração abaixo) existem 6 prateleiras para colocar livros enquanto na estante da direita existem 4 prateleiras onde é possível guardar livros. Se em cada prateleira da maior cabem “ x ” livros e na menor cabem “ y ” livros, então podemos concluir que Isabel poderá acomodar, ao todo, quantos livros?

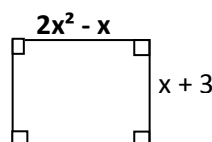


Q13- Ao calcular o perímetro do retângulo abaixo, Marcos resolveu da seguinte forma:

Perímetro = soma das medidas de todos os lados

$$P = 2x^2 - x + x + 3 + 2x^2 - x + x + 3$$

$$P = 4x^4 + 9$$



Em sua opinião, Marcos está correto? Por quê?

Q15- Qual expressão representa a medida da área de um retângulo cujos lados são representados por “ $a+2$ ” e “ $a+3$ ”?

Q16- Você sabe que expressões algébricas podem ser escritas de mais de uma forma, desde que tais formas sejam equivalentes entre elas. Um caminho para conseguir escrever uma expressão equivalente a outra é a fatoração. Em relação aos três polinômios abaixo você poderia pensar em caminhos de fatoração?

a) $3x^2 + 12x =$

b) $x^2 - 36 =$

c) $x^2 + 4x + 4 =$

Q17- Simplificando a fração abaixo, qual expressão você obtém?

$$\frac{x^2 - 9}{x(x + 3)}$$

Q19- Resolva os produtos abaixo:

a) $(x+3)(x-3) =$

b) $(x+4)^2 =$

c) $(x-5)^2 =$

Q20- Um retângulo tem sua área representada pela expressão $a^2 - 16$. Se uma das medidas dos lados é indicada por $a+4$ qual expressão representa a medida outro lado?

Q24- Qual é o grau do polinômio $x^2 + 2x - 10$? Justifique sua resposta.

Quadro 6: Questões pertencentes ao subdomínio da álgebra como Estrutura.

Para verificar o impacto da natureza das respostas em problema algébrico foi inserida a questão de número 12 apresentada no quadro acima. Conforme Booth (1995) uma das dificuldades das crianças em álgebra é o foco da atividade algébrica e também a natureza das “respostas”. Ou seja, enquanto em aritmética buscam-se respostas particulares, em álgebra o objetivo é estabelecer relações e procedimentos em busca de uma forma simplificada geral. Assim, a questão acima tem como principal objetivo verificar se os alunos conseguem determinar uma expressão, de forma generalizada, para uma situação que no cotidiano seria expressa através de um único número.

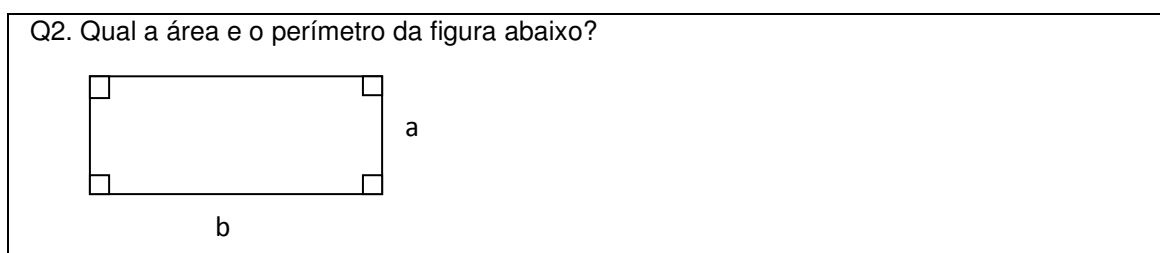
A justificativa para a inserção de questões sobre produtos notáveis, fatoração e frações algébricas foi a união de diversas pesquisas na área. Conforme discutido na seção 7, Cury e Konzen (2006) enfatizam a necessidade dos alunos de Cálculo Diferencial e Integral (ensino superior) de encontrarem fatores comuns nas expressões que envolvem limites e em outros procedimentos, o que é uma das dificuldades encontradas por eles. Notari (2002) desenvolveu uma pesquisa sobre os erros e dificuldades nas simplificações de frações aritméticas e algébricas,

apontando a incompreensão das regras formais de simplificação, onde questões de simplificação similares à que é apresentada abaixo, apresentaram um índice de erro de aproximadamente 94% entre estudante do 9º ano e 1º ano do Ensino Médio. O objetivo, além de considerar a fatoração um elemento importante para o ensino da matemática em nível médio e superior, é analisar quais conceitos que permeiam o conceito de fatoração conceito podem não ter sido aprendidos pelos estudantes, visto que eles necessitam de diversos outros elementos que permeiam os campos conceituais da álgebra e aritmética. A fatoração, por exemplo, não é uma operação simples, visto que demanda diversos conhecimentos prévios, como divisão e multiplicação algébrica, fatoração numérica, redução de termos semelhantes (BURIGATO, 2006).

Nas questões 13 e 15 acima apresentadas foram utilizados conceitos geométricos. Tais conceitos foram considerados por serem utilizados para possibilitar uma diversidade de situações para alguns conceitos e procedimentos algébricos, como produtos notáveis e fatoração. Em relação à variação das representações há que se considerar que, concebendo que os conceitos são construídos na forma de rede, isto é, inúmeras são as interconexões entre eles, é importante que venhamos a unir os conhecimentos algébricos não somente com os aritméticos, mas também geométricos. Segundo Dindyal (2004) os conceitos algébricos podem ser um desafio para os estudantes na aprendizagem da álgebra e vice-versa, embora a álgebra seja muito importante para a aprendizagem da geometria e, além disso, segundo este autor, os estudantes são melhores preparados para a álgebra quando há uma união entre estas duas áreas, evidenciando um ensino da geometria focado nos vários aspectos do pensamento algébrico que estão presentes. Tal pesquisa incentivou a inserção de questões que

compartilhassem esses domínios do conhecimento matemático, mas era preciso excluir a dificuldade nos conceitos geométricos utilizados e, portanto, foi inserida a questão de número 2.

Ao considerar elementos geométricos, seria necessário partirmos para discussões acerca de um Campo Conceitual Geométrico, o que aumentaria significativamente a extensão desse trabalho. Além disso, consideramos que tal campo está inserido num campo ainda maior, que é o campo dos conceitos matemáticos. Alguns deles, como no caso da aritmética, são imprescindíveis para a construção do conhecimento algébrico, enquanto outros são opcionais, que é o caso da geometria. Em vista disto, acreditamos que não há como tentar avaliar competências algébricas com uma riqueza de situações e representações se não utilizarmos elementos de outros campos. Segundo os PCN (1998) “convém também salientar que a visualização de expressões algébricas, por meio do cálculo de áreas e perímetros de retângulos, é um recurso que facilita a aprendizagem de noções algébricas” (p. 121). Tal afirmação serviu de confirmação para a necessidade de inserção dessas questões.



Quadro 7: Questão envolvendo conceitos geométricos.

Durante as seções anteriores tentou-se evidenciar que há uma preocupação no esforço de buscarmos uma aprendizagem significativa para a álgebra. Assim, quando é sugerido que haja uma compreensão conceitual ao invés da repetição de procedimentos decorados, tentou-se também inserir questões que permitissem a análise dos elementos conceituais envolvidos em procedimentos que são utilizados

diariamente pelos estudantes. O conceito de grau de um polinômio/equação, por exemplo, é pouco discutido em sala de aula e nos livros didáticos sendo apresentado pela forma como é calculado, ou seja, uma ênfase no saber-fazer pouca discussão de seus significados. A experiência em sala de aula indica que este não é um conceito que represente grande dificuldade para os alunos. O pode indicar que tal conceito é um teorema-em-ação utilizado pelos estudantes, ou seja, os estudantes sabem “intuitivamente”, o que pode ser reflexo da forma procedural é apresentado nos livros didáticos e nas salas de aula. Com o objetivo de refletir sobre esse problema, optou-se por inserir a questão 24.

Outro conceito que foi contemplado no instrumento é o de inequação (questões 10, 21 e 22). Uma pesquisa realizada por Blanco e Garrote (2009) indica que os estudantes possuem dois tipos de dificuldades relacionadas às inequações: um relacionado às habilidades aritméticas e outro devido à falta de significado a este conceito. Desta forma as implicações da pesquisa realizada por eles indicam que é preciso ter cautela na forma como o conceito de inequações é inserido na escola, evitando tarefas meramente mecânicas, de forma que possam diferenciar os símbolos utilizados ($<$ ou $>$) e ter um valor semântico para os mesmos e também diferenciar os conceitos de equações e inequações. Em vista das considerações propormos duas questões relacionadas às inequações: uma que faz menção ao conceito de balança, já utilizado anteriormente com equações, e outra onde os alunos devem sugerir valores que satisfaçam a inequação dada. Acreditamos que estas duas situações envolvem os principais conceitos sobre inequações e corroboram as preocupações de pesquisadores como os que foram acima mencionados.

Notemos que as questões 21 e 22 (ver abaixo) podem também auxiliar a análise do desempenho dos estudantes no entendimento das relações entre variáveis. Partindo desse ponto de vista tais questões foram escolhidas para representar a dimensão Funcional da Álgebra. Importante evidenciar que não houve maior aprofundamento da perspectiva funcional devido a dois motivos: recomendação dos PCN e momento da aplicação do instrumento. Isto é, não é recomendado um estudo aprofundado dos conceitos de funções do 1º e 2º grau no Ensino Fundamental e também a idéia era construir um instrumento que pudesse ser aplicado antes do final do ensino fundamental, com isso o aluno poderia não ter visto determinado conceito sobre funções, assim, optamos por não inserir questões sobre funções, mas foram inseridos elementos primordiais para a construção deste conceito (Q21, Q22, Q18, Q23).

Q21- Com base na figura abaixo:



a) Imagine uma situação que possa ter sido ilustrada pela figura abaixo, e descreva essa situação por escrito, para que outro aluno a entenda.

Depois de ter escrito a explicação, tente representar o que você escreveu por uma expressão matemática.

Q22- Na inequação $x + 3 < y$, complete a tabela abaixo indicando os valores que x e y podem assumir para que a desigualdade permaneça verdadeira:

X	Y

Quadro 8: Questões que envolvem o conceito de inequações utilizando mais de uma representação.

Notemos que a utilização da balança de dois pratos aparece em questões com objetivos diferentes, isto é, diferentes situações ao longo do instrumento. Segundo Teles (2002) a metáfora da balança de dois pratos é utilizada pela maioria dos autores de livros didáticos para iniciar o conteúdo de equações (TELES, 2002).

Assim sendo, acredita-se que seja importante utilizar essa situação diferente para comparar o desempenho em equações, mas também em outras situações, visto que para Da Rocha Falcão (2001) tal metáfora¹¹ é importante para o desenvolvimento das noções de equivalência entre as equações, o que é essencial para a compreensão dos algoritmos algébricos. Para este pesquisador ela oferece um contexto de funcionamento cultural onde conceitos matemáticos complexos podem ser guiados inicialmente pelos teoremas-em-ação, enriquecendo os esquemas pré-existentes. Assim, colocaram-se no instrumento três questões envolvendo a metáfora da balança, sendo que em uma delas o conceito de inequação é utilizado, como pode ser observado na questão 21 (acima). Com isso, será possível verificar se tal metáfora pode ser ampliada pelo estudante para conceitos onde é pouco utilizada (inequações) e também para analisar a origem das dificuldades na resolução das equações anteriormente sugeridas.

O último grupo de questões a ser discutido (18 e 23) remete à dimensão da álgebra quanto aritmética generalizada. Isto é, era preciso avaliar o desempenho dos estudantes em questões que visassem a construção de leis gerais para situações envolvendo regularidades. Uma das questões (23) trazia uma situação elementar com seqüências numéricas, enquanto a outra visava também verificar o desempenho na generalização padrões numéricos envolvendo duas grandezas (que é o elemento chave para compreensão do conceito de funções).

De acordo com Vale e Pimentel (2005), é possível introduzir conceitos algébricos elementares através da utilização de padrões e generalizações, em especial recorrendo aos padrões da natureza. Conforme esses autores, tais

¹¹ Brito Menezes (2006), Lins e Gimenez (2007) dentre outros autores atentam para o uso da metáfora como um passo inicial, mas que a mesma possui limitações a serem observadas com cautela.

situações são uma das formas de permitir que os estudantes desenvolvam a capacidade de se comunicar matematicamente e também aumentar o desempenho na resolução de problemas. Tais apontamentos corroboram os esforços dos Parâmetros Curriculares Nacionais:

É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a idéia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades. (p.117)

Q18- Uma pessoa caminha em uma pista de corrida e vai observando as marcações ao longo da mesma. Ela percebe que começou a sua caminhada na marcação 500m. Após 1 minuto ela observa a marcação novamente e percebe que está na posição 550m. Com base nestas informações, complete a tabela:

Tempo	Distância Percorrida	Marcação na pista
2 minutos		600 m
	700 m	
20 minutos		

a) E se a pessoa caminhasse por “x” minutos, quanto teria percorrido?

b) Qual seria a marcação na pista?

Q23- Podemos utilizar a álgebra para determinar leis de formação para seqüências numéricas. Por exemplo, a seqüência (0, 2, 4, 6, 8,...) pode ser representada por $2n$, onde n pertence ao conjunto dos Naturais ($\mathbb{N}$). Ou seja, ao substituir n por 0 obtém-se o primeiro elemento da seqüência, ao substituir n por 1 se obtém o segundo termo da seqüência e assim por diante. Veja mais alguns exemplos:

(2, 4, 6, 8,...) → Lei de formação: $2n + 2$, $n \in \mathbb{N}$

(-5, 5, 15, 25,...) → Lei de formação: $10n - 5$, $n \in \mathbb{N}$

Determine as leis de formação para as seguintes seqüências:

a) (0, 5, 10, 15, 20, 25, 30,...) → Lei de formação:

b) (1, 3, 5, 7,...) → Lei de formação:

Quadro 9: Questões inseridas com o objetivo de avaliar o desempenho em álgebra quanto aritmética generalizada

Durante o processo de escolha das situações era preciso ter cautela em relação aos conceitos sugeridos como elementos do campo conceitual algébrico¹² para que fosse possível contemplá-los integralmente. Partindo dessa preocupação,

¹² Conforme Quadro 2.

foi construído o quadro abaixo, que analisa questão por questão os elementos contemplados:¹³

Questões	Aritmética			Aspectos matemáticos gerais		Aspectos algébricos			
	A1	A2	A3	M1	M2	G1	G2	G3	G4
D1									
D2									
D3									
D4									
D5									
D6									
D7									
D8									
D9									
D10									
D11									
D12									
D13									
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
Q10									
11a									
11b									
11c									
11d									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									
24									

Quadro 10: Distribuição dos conceitos envolvidos em cada questão de acordo com os elementos básicos propostos para o CCA.

¹³ Os campos mais escuros dizem respeito aos conceitos utilizados para o procedimento esperado como resposta. Os mais claros dizem respeito a um caminho alternativo, mas que podem não ser utilizados se for utilizado o procedimento esperado.

Como pode ser observado no quadro-resumo acima, o instrumento aqui cobriu todos os elementos sugeridos como parte integrante do campo conceitual algébrico apresentado. Alguns com mais frequência e outros com menos, o que levou ao questionamento da necessidade de inclusão de novas questões. Todavia, tendo em vista que os conceitos estão relacionados segundo uma estrutura em rede, seria praticamente impossível manter a mesma frequência para todos. Assim, acreditamos que no momento em que se opta por fazer um recorte dentro de determinado domínio da matemática é inevitável que isto aconteça.

Após a proposição das situações, de ter verificado que as mesmas englobam os elementos propostos para o Campo Conceitual Algébrico buscou-se analisar o grau de dificuldade imposto era adequado à faixa etária pretendida para o estudo. Para tal o instrumento foi encaminhado para professores de matemática graduados em licenciatura em matemática ou ciências. Foram obtidas seis classificações, distribuídas conforme o quadro abaixo. Como critério de desempate foi utilizada a classificação inicial oriunda da construção do instrumento:

	Número de professores por classificação (6 professores no total)			Classificações iniciais		Classificação final
	Fácil	Médio	Difícil	Classificação dos Professores (Moda)	Critério para desempate: Classificação inicial (da autora)	
Des_1	3	2	1	Fácil	Médio	Fácil
Des_2	2	3	1	Médio	Médio	Médio
Des_3	4	2	0	Fácil	Fácil	Fácil
Des_4	4	1	1	Fácil	Fácil	Fácil
Des_5	4	1	1	Fácil	Fácil	Fácil
Des_6	3	3	0	Fácil/Médio	Médio	Médio
Des_7	2	3	1	Médio	Médio	Médio

Des_8	2	4	0	Médio	Médio	Médio
Des_9	3	2	1	Fácil	Médio	Fácil
Des_10	2	3	1	Médio	Fácil	Médio
Des_11	3	3	0	Fácil/Médio	Médio	Médio
Des_12	1	4	1	Médio	Médio	Médio
Des_13	1	4	1	Médio	Médio	Médio
Q1	2	4	0	Médio	Médio	Médio
Q2	6	0	0	Fácil	Fácil	Fácil
Q3	1	5	0	Médio	Fácil	Médio
Q4	1	2	3	Difícil	Difícil	Difícil
Q5	2	3	1	Médio	Médio	Médio
Q6	5	1	0	Fácil	Médio	Fácil
Q7	1	3	2	Médio	Fácil	Médio
Q8	4	1	1	Fácil	Médio	Fácil
Q9	3	3	0	Fácil/Médio	Fácil	Fácil
Q10	3	3	0	Fácil/Médio	Fácil	Fácil
Q11A	6	0	0	Fácil	Fácil	Fácil
Q11B	4	1	1	Fácil	Médio	Fácil
Q11C	5	1	0	Fácil	Fácil	Fácil
Q11D	2	4	0	Médio	Médio	Médio
Q12	2	3	1	Médio	Difícil	Médio
Q13	4	1	1	Fácil	Médio	Fácil
Q14	2	4	0	Médio	Médio	Médio
Q15	4	2	0	Fácil	Médio	Fácil
Q16a	1	4	1	Médio	Fácil	Médio
Q16b	1	4	1	Médio	Fácil	Médio
Q16c	1	4	1	Médio	Fácil	Médio
Q17	1	3	2	Médio	Difícil	Médio
Q18A	0	2	4	Difícil	Difícil	Difícil

Q18B	0	2	4	Difícil	Difícil	Difícil
Q18C	0	2	4	Difícil	Difícil	Difícil
Q19a	5	1	0	Fácil	Fácil	Fácil
Q19b	5	1	0	Fácil	Fácil	Fácil
Q19c	5	1	0	Fácil	Fácil	Fácil
Q20	1	3	2	Médio	Médio	Médio
Q21	0	5	1	Médio	Médio	Médio
Q22	3	2	1	Fácil	Fácil	Fácil
Q23a	1	4	1	Médio	Médio	Médio
Q23b	1	4	1	Médio	Médio	Médio
Q24	5	1	0	Fácil	Fácil	Fácil

Quadro 11: Classificação em termos de grau de dificuldade para as questões segundo os professores-juízes.

Como pode ser observado acima, de um total de 47 itens (questões ou subitens) 20 foram considerados fáceis, 23 de nível médio e 4 de nível difícil. Isto permite inferir que o instrumento estaria apropriado em termos de dificuldade. Ou seja, segundo os professores-juízes o grau de dificuldade imposto pelo instrumento era médio ou baixo, o que sugere que os estudantes não deveriam mostrar dificuldade na resolução do mesmo. Após a confirmação dos professores-juízes e amparados pelos resultados do Estudo Piloto (para o qual o desempenho dos participantes ficaram próximo a 50%), concluímos então que o instrumento seria viável em termos de aplicabilidade (grau de dificuldade e tempo de 140 minutos).

Não tivemos a pretensão de construir um instrumento que desse conta de todas as situações e representações de forma que fosse possível avaliar em sua complexidade o Campo Conceitual Algébrico. Mas, acreditamos que, dentro das noções propostas para o Campo Conceitual neste trabalho, o instrumento em questão conta com o mínimo de situações, representações e conceitos que

precisam ser compreendidos pelos estudantes ao final do ensino fundamental em termos de álgebra.

Conforme vimos logo no início desta seção, são quatro as etapas principais que permitem a construção de um instrumento de avaliação segundo Da Rocha Falcão (2009). Até o presente momento foram apresentadas as três etapas iniciais percorridas para que fosse possível a construção de um instrumento de avaliação que permitisse a avaliação de competências algébricas ao final do ensino fundamental. Posto isto, passaremos agora para a próxima etapa que consiste em discutir os desempenhos dos estudantes nesse instrumento e, com isso fazer possíveis reflexões nas dificuldades nos elementos propostos para o Campo Conceitual Algébrico.

8 OBJETIVOS

O objetivo central da presente pesquisa é contribuir para o aprofundamento da compreensão acerca dos processos de aprendizagem da álgebra, buscando levar em conta as especificidades deste domínio do saber matemático enquanto campo conceitual individual (saber do aluno em processo de construção) em relação com o campo conceitual canônico-cultural (saber institucional de referência ou “saber-sábio”, cf. CHEVALLARD, 1998). Conforme visto é vasta a literatura que aponta para as dificuldades na aprendizagem e formação dos conceitos neste subcampo da matemática. Do ponto de vista da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990) para que ocorra uma aprendizagem produtiva é preciso pensar na construção dos conceitos por parte do aprendiz. Adicionalmente este autor considera que a abordagem de conteúdos matemáticos como a álgebra, organizados em campos conceituais, implica na consideração de uma rede de conceitos interligados, em que vários tópicos e sub-tópicos se concatenam. Tal pressuposto foi o alicerce para o método utilizado nesta pesquisa, que visa permitir uma reflexão sobre como os conceitos e dificuldades algébricas se apresentam e se relacionam.

Desta forma o presente projeto de pesquisa tem como objetivos:

- Gerais

Refletir integradamente sobre os principais conceitos algébricos a serem aprendidos e as respectivas dificuldades encontradas pelos alunos ao final do Ensino Fundamental, ampliando as discussões sobre o Campo Conceitual Algébrico (CCA).

Específicos

- Propor um instrumento para a avaliação da aprendizagem dos elementos referentes ao CCA ao final do Ensino Fundamental;
- Especificar dificuldades em determinados domínios do CCA proposto, relacionando-as entre si.

9 MÉTODO

A presente pesquisa teve as seguintes etapas, planejadas para a operacionalização dos objetivos anteriormente descritos:

1ª) Sistematização e aprofundamento, a partir de revisão de literatura e análise conceitual matemática, do Campo Conceitual Algébrico (análise a priori do campo de conteúdo visado).

2ª) Elaboração de um instrumento de avaliação contendo questões referentes ao Campo Conceitual previamente determinado (ver transcrição do instrumento no Anexo A).

3ª) Aplicação deste instrumento ao grupo de participantes da pesquisa.

4ª) Análise quantitativa das respostas dos participantes às questões propostas no instrumento, em termos de perfil de acertos/erros e especificação dos tipos de procedimento para a resposta. Tal análise comportou uma etapa unidimensional, com abordagem seqüencial de tópicos do instrumento, e uma análise multidimensional, ambos detalhados mais adiante.

5ª) Análise qualitativa-interpretativa dos dados, de forma a integrar as reflexões que emergiram ao longo das diversas fontes de informação oriundas da análise quantitativa.

Em relação ao contexto de aplicação do instrumento de pesquisa é importante fazer algumas considerações. A escola em questão disponibilizou três turmas de 9º para participarem da pesquisa, sendo duas mais numerosas (32 e 27 alunos respectivamente) do período matutino e outra menos numerosa (11 alunos) do período vespertino. Nesta escola a disciplina de matemática é subdividida em duas: álgebra e geometria. Em vista disso, cada turma possui dois professores distintos de matemática, sendo um de álgebra e outro de geometria. O professor de álgebra das

turmas A e B não é o mesmo da turma C. Porém o professor de geometria é o mesmo para todas. As avaliações dos estudantes ocorrem trimestralmente, em vista disto, quando foi aplicada a pesquisa recém havia sido divulgado para os estudantes as notas relativas ao primeiro trimestre, já tendo iniciado o processo de avaliação inicial (primeiro teste) do segundo trimestre. No início do ano letivo a escola adota a realização de testes de sondagem, ou seja, na primeira quinzena do ano letivo há revisão de todas as disciplinas do ano anterior e são realizados testes de sondagem. Logo, os conceitos algébricos referentes ao 8º ano foram revisados e avaliados previamente. Infelizmente não há divulgação destes resultados e, portanto, os mesmos não foram utilizados na pesquisa, apenas os resultados das avaliações referentes ao primeiro trimestre.

Em relação aos participantes, conforme dito anteriormente, foram divididos em três grupos de alunos com efetivos de 32, 27 e 11 (efetivo total de 70 alunos) do 9º ano (8ª série) da rede particular de Ensino Fundamental, com idade média de 14 anos. Optou-se pela rede privada tendo em vista que a pesquisadora foi professora com regência de turmas nessa rede. A escolha pelo 9º ano deveu-se ao objetivo de pesquisa estar relacionado a um mapeamento para o Ensino Fundamental, sendo, portanto mais pertinente avaliar alunos ao final desta etapa. O grupo de 70 alunos possui professores distintos, conforme distribuição abaixo:

Professor de álgebra	
1	2
Grupo A	Grupo C
Grupo B	-

Tabela 2: esquema de constituição dos três grupos de participantes da pesquisa.

Tal desenho básico teve por objetivo tentar atenuar possíveis variáveis intervenientes relacionadas a especificidades de cada turma, método de ensino e perfil do professor, bem como características inerentes a cada grupo.

Os três grupos acima referidos foram submetidos ao questionário de sondagem (reproduzido no Anexo A), cujos princípios de construção foram discutidos nas seções anteriores. Foram utilizados quatro modelos de instrumento para a aplicação, onde as questões eram idênticas, porém a ordem das questões foi modificada buscando-se amenizar os efeitos de variáveis intervenientes como ordem das mesmas e tempo de resolução. Foram disponibilizados dois tempos de aula (aproximadamente 90 minutos) para a resolução do mesmo. A categorização dos dados referentes às respostas dadas pelos sujeitos ao instrumento foi realizada com base em expectativas prévias de resposta, a partir de dados obtidos no Estudo Piloto realizado durante a construção do projeto de pesquisa. Todavia, tal categorização sofreu diversas modificações a partir dos dados obtidos na fase principal da pesquisa. A categorização para as respostas a cada item do questionário contemplou dois aspectos: análise de desempenho em termos de acerto e erro, abarcando as categorias “acerto”, “acerto parcial”, “erro” e “em branco”; e análise do procedimento seguido para a produção das respostas, englobando categorias que buscaram descrever os caminhos de operacionalização escolhidos pelos participantes para chegar à resposta da questão.

Para a análise dos dados foram utilizados os seguintes procedimentos, divididos em duas etapas:

- 1) Análise descritiva e inferencial em relação aos desempenhos globais do instrumento: Nesta etapa foram analisados os desempenhos de forma global, buscando-se analisar se o mesmo mostrava-se coerente em relação ao nível de

dificuldade esperado das questões, bem como verificar possíveis relações entre os desempenhos e variáveis como turma, modelos do instrumento e gênero.

2) Análise multidimensional: buscou-se evidenciar conjunções de aspectos em estudo e relações sistemáticas entre os mesmos, de forma a avançar no entendimentos das dificuldades e descrição dos elementos constitutivos do campo conceitual algébrico em estudo.

3) Análise descritiva e inferencial dos resultados obtidos na análise multidimensional.

10 RESULTADOS

Seguindo as etapas descritas anteriormente, os resultados serão apresentados da seguinte forma:

- Análise descritiva inferencial: análises gerais do desempenho dos participantes ao responderem às questões do instrumento: verificação do total de acertos e erros, verificação do grau de dificuldade imposto pelo instrumento, média e desvio padrão.

- Análise multidimensional: utilizaremos esta análise para verificar quais variáveis (itens do instrumento) segundo tal análise mostraram-se eficazes na classificação de grupos de sujeitos que responderam o questionário.

10.1 Instrumento de avaliação e desempenho dos participantes

Conforme foi discutido na seção anterior, o instrumento proposto na pesquisa tinha como preocupação englobar elementos considerados como relevantes para o Campo Conceitual Algébrico. Desta forma, após a aplicação do instrumento era importante refletir se o grau de dificuldade imposto corroborava as expectativas dos professores-juízes e também da classificação inicial de sua construção. Em relação a esta preocupação, foi realizado um teste de normalidade de distribuição dos escores de desempenho dos alunos participantes. O teste de Kolmogorov-Smirnov para normalidade da curva permitiu verificar que a referida distribuição dos escores de desempenho dos estudantes nas questões descritivas, nos problemas e no instrumento como um todo segue um padrão de normalidade (Questões descritivas: $k-s=.85$, problemas: $K-s=.75$ e Desempenho geral: $k-s=0.59$). Tais resultados indicam que a distribuição de dificuldade nas questões do instrumento foi adequada.

Todavia, devido ao número de participantes optou-se pela realização de testes não-paramétricos para as demais análises.

Lembramos que a classificação dada pelos professores-juízes foi a seguinte:

	Nível de dificuldade atribuído pelos professores		
	Fácil	Médio	Difícil
Questões	Des_1, Des_3, Des_4, Des_5, Des_9, Q2, Q6, Q8, Q9, Q10, Q11A, Q11B, Q11C, Q13, Q15, Q19, Q22, Q24	Des_2, Des_6, Des_7, Des_8, Des_10, Des_11, Des_12, Des_13, Q1, Q3, Q4, Q5, Q7, Q11D, Q12, Q14, Q16, Q17, Q20, Q21, Q23	Q4, Q18,

Quadro 12: Distribuição das questões em relação aos níveis de dificuldades segundo classificação dada pelos professores.

Conforme pode ser observado no quadro 12 os professores-juízes consideraram que a distribuição das questões do instrumento concentra-se nos níveis médio e fácil, o que em princípio permite considerar que se propôs um instrumento viável, ou até mesmo fácil, com piso e teto de dificuldade compatíveis com os objetivos pedagógicos estabelecidos para o ensino da álgebra no nível Fundamental II (conforme discutido na seção 7). Todavia, quando os dados de avaliação dos professores, resumidos pelo quadro 12, são cotejados com o perfil de normalidade de distribuição verificado e comentado mais acima, verifica-se uma distorção: se o perfil de escores de desempenho dos participantes aproxima-se da normalidade, então poucas questões (cerca de 5%) estariam em um nível fácil e difícil, enquanto 95% estariam num nível mediano. Tal constatação não se coaduna, portanto, com a classificação empírica dos professores-juízes. A atitude dos juízes sugere estudos posteriores acerca de variação de padrões de julgamento em função do desempenho efetivamente verificado, porém ambas as classificações sugeriam a viabilidade do instrumento em relação ao nível de dificuldade para a amostra escolhida.

Retornando novamente a discussão dos desempenhos, observou-se que a média de desempenho no instrumento, e separadamente nas questões descritivas e problemas, permaneceu próxima à média escolar nacional (5 em 10 ou 50 pontos em 100), conforme pode ser observado na tabela abaixo:

Tipos de questão	Escores médios de desempenho observados			
	Mínimo	Máximo	Média	Desvio Padrão
Descritivas	6,06	112,12	68,442	21,092
Questões problemas	18,63	90,20	54,291	18,961
Total no instrumento	21,28	87,94	55,350	17,059

Tabela 3: Percentuais médios de acerto dos participantes nas questões descritivas, problemas e no instrumento como um todo.

Além disso, as médias em relação às questões descritivas, aos problemas e no instrumento integralmente são razoavelmente próximas, conforme pode ser observado na tabela acima. Sobre possíveis diferenças nesses desempenhos em relação às turmas, modelos do instrumento (foram utilizados quadro modelos, alternando o ordenamento das questões) e sexo, observou-se que:

- Segundo o teste Kruskal-Wallis para distribuições não-paramétricas, há uma diferença estatisticamente significativa ($p < 0,01$) entre os desempenhos descritos acima quando se comparam as turmas. Logo infere-se que não as dificuldades não possuem relação com o desempenho dos estudantes. Como pode ser observado a turma 1 possui médias bastante inferiores às demais:

	Turma	N	Posto Médio
Desempenho_Descritivas	"Turma A"	32	24,22
	"Turma B"	27	46,85
	"Turma C"	11	40,45
	Total	70	
Desempenho_Problemas	"Turma A"	31	22,77
	"Turma B"	27	51,96
	"Turma C"	11	27,82

	Total	69	
Desempenho_Geral	"Turma A"	31	22,10
	"Turma B"	27	52,00
	"Turma C"	11	29,64
	Total	69	

Tabela 4: Postos médios de cada variável em relação às turmas.

	Desempenho_Descri tivas	Desempenho_Proble mas	Desempenho_Geral
Chi-Square	18,959	32,247	33,014
DF	2	2	2
Asymp. Sig.	,000	,000	,000

Tabela 5: Resultados do teste Kruskal Wallis agrupado de acordo com a variável turma.

- Utilizando-se o teste Kruskal-Wallis verificou-se ainda que não há diferenças estatisticamente significativas para os três desempenhos e os modelos do instrumento, e com isso infere-se que o ordenamento das questões e fatores relacionados ao desgaste durante resolução do instrumento não influenciaram o desempenho dos estudantes, conforme pode ser observado nas seguintes tabelas:

	Modelo_Instrumento	N	Posto Médio
Desempenho_Descritivas	Modelo 1	16	38,75
	Modelo 2	16	31,41
	Modelo 3	18	37,67
	Modelo 4	20	34,23
	Total	70	
Desempenho_Problemas	Modelo 1	16	37,84
	Modelo 2	15	34,27
	Modelo 3	18	34,44
	Modelo 4	20	33,78
	Total	69	
Desempenho_Geral	Modelo 1	16	38,44
	Modelo 2	15	33,27
	Modelo 3	18	35,08
	Modelo 4	20	33,48
	Total	69	

Tabela 6: Postos médios de cada variável em relação ao modelo do instrumento.

	Desempenho_ Descritivas	Desempenho_ Problemas	Desempenho_ Geral
Chi-Square	1,343	,430	,698
DF	3	3	3
Asymp. Sig.	,719	,934	,874

Tabela 7: Resultados do teste Kruskal Wallis com agrupamento da variável modelo no instrumento.

- Utilizando o teste U de Mann-Whithney não foram verificadas diferenças estatisticamente significativas entre os desempenhos em função do gênero:

	Sexo	N	Posto Médio	Soma dos Postos
Desempenho_ Descritivas	MENINA	26	35,31	918,00
	MENINO	44	35,61	1567,00
	Total	70		
Desempenho_ Problemas	MENINA	25	38,88	972,00
	MENINO	44	32,80	1443,00
	Total	69		
Desempenho_ Geral	MENINA	25	38,76	969,00
	MENINO	44	32,86	1446,00
	Total	69		

Tabela 8: Postos médios de cada variável em relação ao gênero.

	Desempenho_ Descritivas	Desempenho_ Problemas	Desempenho_ Geral
Mann-Whitney U	567,000	453,000	456,000
Z	-,061	-1,211	-1,174
Asymp. Sig. (2-tailed)	,951	,226	,240

Tabela 9: Resultados dos testes estatísticos utilizando a variável de agrupamento “gênero”.

De forma sucinta, observa-se que as variáveis sexo, turma e professor não apresentam correlação com o desempenho dos estudantes.

Buscou-se igualmente analisar se os alunos que possuem um bom desempenho na parte descritiva também teriam um bom desempenho nos problemas ou no instrumento como um todo, bem como verificar possível relação

entre os desempenhos e a nota escolar.¹⁴ Para tal foi utilizado o coeficiente de correlação de Spearman(ρ):

		Desempenho Descritivas	Desempenho Problemas	Desempenho Geral
Desempenho Descritivas	ρ	1,000	,601(**)	,747(**)
Nota Escolar	ρ	,415(**)	,536(**)	,541(**)
	N	69	68	68

**Correlação bilateral significativa para $p < 0,01$.

Tabela 10: Tabela de correlações para fatores globais em relação ao desempenho nas questões descritivas e nota escolar.

Em relação a um possível vínculo de desempenho entre questões descritivas e desempenho nos problemas constata-se uma correlação moderada positiva ($N=69$, $\rho=0,601$, $p < 0,01$). Notemos que tal dado permite algumas inferências. A correlação do desempenho nas questões descritivas e desempenho geral no instrumento segue a mesma tendência, porém apresenta índice um pouco maior ($N=69$, $\rho=0,747$, $p < 0,01$). Ou seja, existem as evidências de que um bom desempenho nas questões descritivas fosse implicar em um bom desempenho nos problemas e no instrumento como um todo não são tão fortes, mas não podem ser desconsideradas como um dos fatores de contribuição. Em relação a estes fatores, é importante considerar que as questões descritivas foram inseridas no instrumento para tentarmos nos aproximar de um meio de avaliar a forma predicativa¹⁵ do conhecimento algébrico, isto é, verificar como os alunos explicitam os objetos matemáticos (VERGNAUD, 1996) de que fazem uso. Segundo Vergnaud (1997) “[...] conceitos explícitos e teoremas permitem aos estudantes explicitar seu

¹⁴ Média escolar de matemática (geometria e álgebra) para o trimestre anterior à aplicação do instrumento aos participantes.

¹⁵ Para Vergnaud (1996) o conhecimento possui uma forma operatória, isto é, o saber-fazer e uma forma predicativa, ou seja, saber explicitar os objetos e suas propriedades.

conhecimento e discutir se tal conhecimento é apropriado e válido” (p.28, tradução nossa), além disso, para a ciência, os conceitos e teoremas são explícitos (VERGNAUD, 1990, p.141). Isto é, quando falamos de um conhecimento científico, como no caso dos conceitos matemáticos, a explicitação seria posterior à construção dos esquemas e teoremas-em-ação. Desta forma, se um estudante tem um bom desempenho nas questões descritivas, isto intuitivamente poderia sugerir que seu desempenho nos problemas relativos a estes conhecimentos deveria ser maior. Todavia, em vista desta correlação ser moderada, há que se observar que no instrumento esse tipo de movimento não foi tão evidente. Uma das possíveis causas pode ser o fato dos estudantes estarem pouco habituados a explicitarem conceitos matemáticos. Isto é, a grande preocupação no “saber fazer” e pouca no “saber explicitar o que se sabe fazer” pode ter sido um fator de dificuldade por parte dos participantes.

Houve fraca correlação, porém significativa, entre os desempenhos e a nota escolar o que pode ter ocorrido por dois motivos:

1) A nota escolar apresentada é uma média entre as disciplinas de álgebra e geometria, então não reflete necessariamente seu desempenho escolar em álgebra, e sim nos conceitos matemáticos aprendidos até o primeiro trimestre.

2) Um bom desempenho no instrumento indica (pelo menos é o que se espera) que o estudante domine os conceitos sugeridos para algumas situações e representações que podem ser diferentes das habituais em sala de aula (como no caso das questões descritivas, utilização da balança e etc). Ou seja, embora viável segundo a avaliação dos professores, as questões propostas no instrumento podem ir de encontro com a realidade das atividades e avaliações matemáticas desses estudantes.

Tendo em vista a impossibilidade de discutir pontualmente as dificuldades em cada item do questionário, recorreu-se então ao procedimento de análise descritiva multidimensional para variáveis categóricas (nominais) de forma a determinar quais variáveis foram mais relevantes na determinação das dificuldades encontradas pelos estudantes.

10.3 Análise multidimensional

As respostas dos participantes às questões problemas foram submetidas a procedimento de análise descritiva multidimensional para variáveis categóricas (nominais), utilizando-se algoritmo de análise do tipo 'análise de agrupamentos em duas etapas' (TwoStep Cluster Analysis), disponível em versão informatizada no aplicativo SPSS (Statistical Package for Social Sciences™) - versão 15 (SPSS, 2006). Tal algoritmo é uma ferramenta exploratória desenhada para revelar agrupamentos (clusters) de variáveis e/ou sujeitos em conjuntos de dados, agrupamentos estes que não se mostrariam facilmente por inspeção direta ou consideração isolada e seqüencial das informações (para mais informações acerca do referido procedimento consultar STATSOFT, 2009).

A supracitada análise evidenciou a existência de dois grandes agrupamentos (clusters) de variáveis (questões do instrumento), conforme quadro-resumo abaixo:

Agrupamentos (clusters)	N	% do total de participantes válidos	% do total de sujeitos
1	35	50,7	50,0
2	34	49,3	48,6
Total de participantes válidos	69	100	98,6
Casos excluídos	1	-	0,4
Total de sujeitos	70	-	100

Quadro 13: Distribuição dos efetivos dos agrupamentos encontrados por procedimento de análise descritiva multidimensional de agrupamentos realizada a partir das variáveis injetadas para a análise.

Conforme evidenciado pelo quadro acima, os dois agrupamentos obtidos aproveitaram quase a totalidade dos sujeitos (apenas um sujeito foi excluído), e os efetivos de cada agrupamento foram praticamente idênticos (35 e 34 participantes).

Tendo em vista o nível de exigência estabelecido para o aproveitamento de variáveis na construção da partição ($p \leq 0,05$ para valores de qui-quadrado), do total de 66 variáveis (todos os problemas do questionário e respectivos procedimentos, sem os itens descritivos D1 a D13, que não se mostraram estatisticamente relevantes como contribuintes para a construção dos agrupamentos) tratadas, apenas quatorze variáveis sobreviveram a este crivo de exigência, conforme descrito no quadro 14 abaixo:

Código da variável	Nome da variável	Aspecto explorado
Q1	Desempenho em problema que pode ser resolvido utilizando sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas ou equação do primeiro grau.	Sistema de equação do primeiro grau com duas incógnitas ou equação do primeiro grau com uma incógnita
Q1_tr	Tipo de procedimento adotado para resolver problema descrito acima.	Caminho de resolução escolhido para a abordagem do problema.
Q2	Desempenho em problema de determinação da área e perímetro de um retângulo com lados representados por termos algébricos.	Operações com termos algébricos aplicados a situação geométrica de determinação de área e perímetro.
Q2_tr_perimetro	Tipo de procedimento adotado para determinação do perímetro de figura com medidas dos lados representadas por termos algébricos.	Caminho de resolução escolhido para resolução do problema.
Q11B	Desempenho em resolução de equação do primeiro grau do tipo $ax=c+d$ com termos fracionários.	Equação do primeiro grau com termos fracionários.
Q15	Desempenho na determinação de área e perímetro de retângulo cujos lados são representados por expressões algébricas.	Multiplicação de binômios (utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma).
Q16A	Desempenho em fatoração de expressão algébrica com fator algébrico comum.	Fatoração de expressão algébrica.
Q16B	Desempenho em fatoração de	Fatoração de expressão algébrica.

	expressão algébrica denominada diferença de dois quadrados.	
Q16B_tr	Tipo de procedimento adotado para realizar a fatoração de uma expressão algébrica do tipo diferença de dois quadrados.	Caminho de resolução escolhido para a abordagem do problema.
Q16C	Desempenho em fatoração de uma expressão algébrica do tipo trinômio quadrado perfeito	Fatoração de expressão algébrica do tipo trinômio quadrado perfeito.
Q17_tr	Tipo de procedimento adotado para simplificação de uma expressão algébrica.	Caminho de resolução escolhido para a abordagem do problema.
Q19C	Desempenho em resolução de produto notável do quadrado da diferença de dois termos.	Produto notável do quadrado da diferença de dois termos.
Q20	Desempenho em problema envolvendo área de figura com medidas representadas por expressões algébricas.	Fatoração aplicada em um contexto geométrico (área).
Q22	Desempenho em problema de inequação utilizando a representação da balança de dois pratos.	Inequação e entendimento da representação de uma situação de desigualdade na balança de dois pratos.

Quadro 14: Descrição das variáveis que contribuíram significativamente para a partição do conjunto de dados analisados em dois agrupamentos.

A seguir serão detalhadas uma a uma as características apontadas pela análise multidimensional para cada uma das variáveis descritas no Quadro 14 e que foram determinantes para a formação dos dois grupos.

Para a questão Q1, apresentada abaixo, temos as seguintes informações:

Q1. A soma das idades dos irmãos Paulo e Bruno é 40. A idade de Bruno é igual à idade de Paulo mais 18. Qual a idade de cada um dos irmãos?

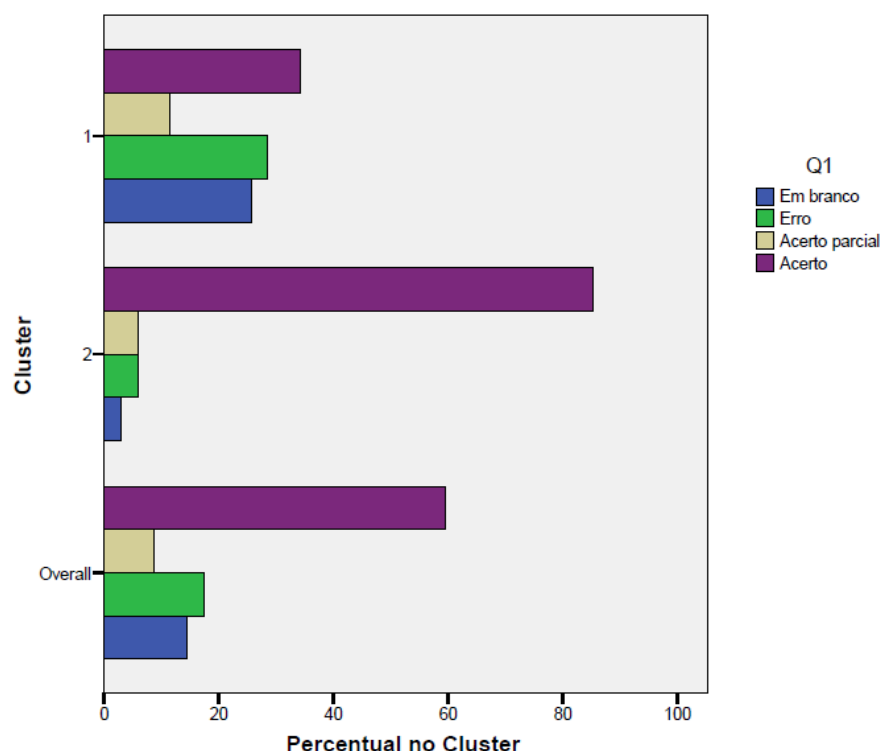


Gráfico 2 : Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q1 em relação ao respectivo grupo.

		Em branco		Erro		Acerto parcial		Acerto	
		Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)
Cluster	1	9	90,0%	10	83,3%	4	66,7%	12	29,3%
	2	1	10,0%	2	16,7%	2	33,3%	29	70,7%
	Total	10	100,0%	12	100,0%	6	100,0%	41	100,0%

Tabela 11: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q1 em relação aos grupos.

Conforme o gráfico 2 e tabela 11 acima, a categoria de resposta “Acerto” foi aquela de maior contribuição à partição dos agrupamentos 1 e 2 para a questão Q1, com um total de 41 dos 69 sujeitos tendo acertado; nota-se contudo que a distribuição dos acertos nessa questão caracterizou o agrupamento 2, com 70,7% das 41 respostas, enquanto que o agrupamento 1 teve 29,3% das respostas de acerto. Coerentemente, a categoria “Erro” teve distribuição inversa, com maior predomínio desse tipo de resposta para Q1 para o agrupamento 1 (83,3% das 12 respostas). Os sujeitos do agrupamento 1 foram igualmente aqueles onde se

concentraram as respostas “Em branco”: das 10 respostas em branco verificadas, 9 foram dadas por sujeitos do agrupamento 1, contra apenas 1 de um sujeito do agrupamento 2.

Em relação a esta questão, os tipos de procedimento adotados pelos participantes distribuíram-se da seguinte forma:

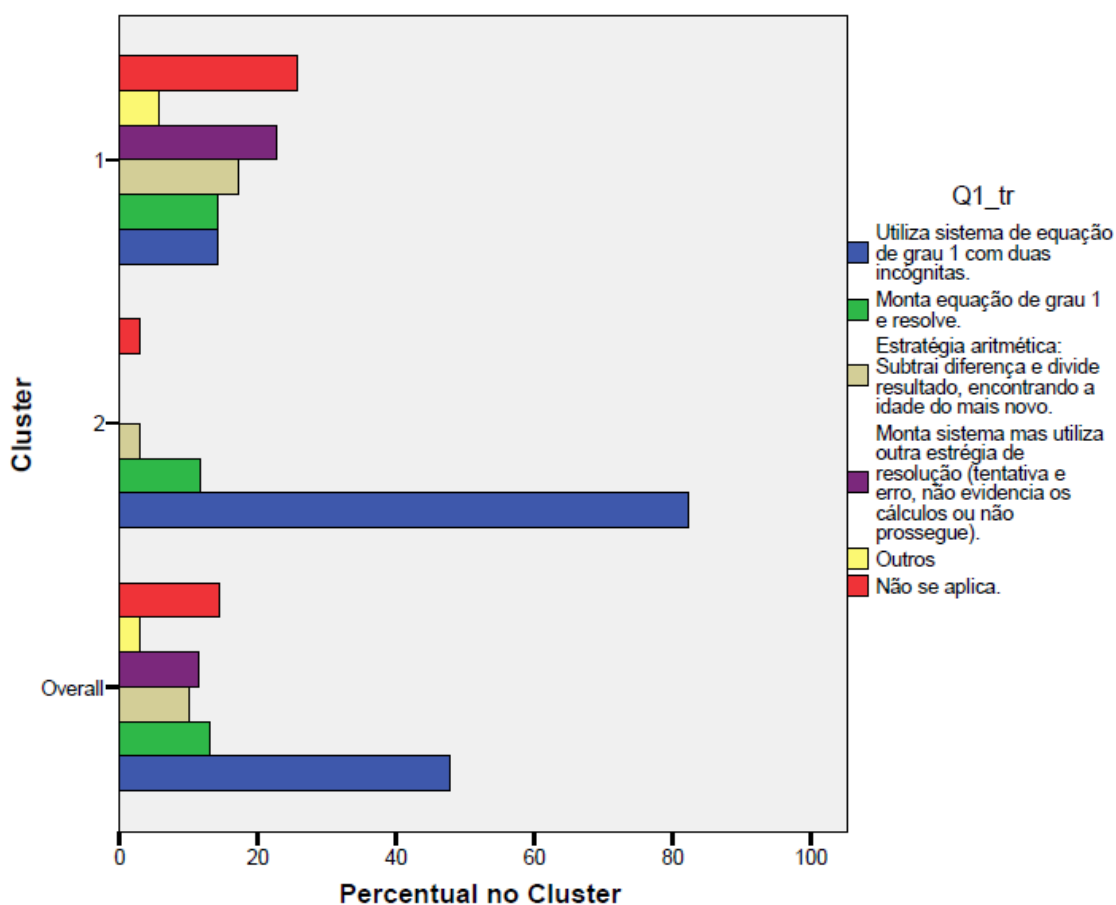


Gráfico 3: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q1_tr (procedimento utilizado) em relação ao respectivo grupo.

		Utiliza sistema de equação de grau 1 com duas incógnitas.		Monta equação de grau 1 e resolve.		Estratégia aritmética: Subtrai diferença e divide resultado, encontrando a idade do mais novo.		Monta sistema mas utiliza outra estratégia de resolução (tentativa e erro, não evidencia os cálculos ou não prossegue).		Outros		Não se aplica.	
		Fre q.	Perc. (%)	Fr eq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Fre q.	Perc. (%)	Fre q.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)
Cluster	1	5	15,2	5	55,6	6	85,7	8	100,0	2	100,0	9	90,0
	2	28	84,8	4	44,4	1	14,3	0	,0	0	,0	1	10,0
	Total	33	100,0	9	100,0	7	100,0	8	100,0	2	100,0	10	100,0

Tabela 12: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q1_tr (procedimento utilizado) em relação aos grupos.

Observa-se, conforme gráfico 3 que para o agrupamento 1 a categoria “Não se aplica”¹⁶ é a que mais contribui para a determinação deste, em contrapartida, para o agrupamento 2, observa-se que a utilização de sistema de equação do 1º grau com duas incógnitas é o procedimento mais adotado por estes, representando 84,8% desta categoria (conforme tabela acima).

Na tabela 12 observa-se que o procedimento “Monta equação de grau 1 e resolve” possui distribuição pouco diferenciada para os grupos. Para aqueles que optaram pela estratégia aritmética a grande maioria (85,7%) pertence ao agrupamento 1 e há somente um representante do agrupamento 2 nesta categoria (14,3%). Conforme a tabela é possível verificar que para os procedimentos “Monta sistema, mas utiliza outra estratégia de resolução (tentativa e erro, não evidencia os

¹⁶ A categoria “Não se aplica” corresponde a uma classificação das respostas daqueles participantes que não indicaram procedimento. A diferenciação para notação “Em branco” deve-se ao fato de analisar o tipo de estratégia adotada, e como isto não ocorre não é possível determinar o tipo de procedimento.

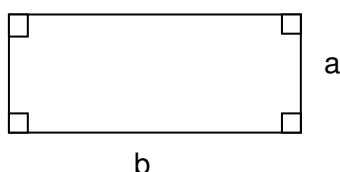
cálculos ou não prossegue” ou “Outros” existem apenas integrantes do agrupamento 1 e, dentre os que não apresentaram procedimentos (categoria “Não se aplica”) 90% das respostas também são de participantes do agrupamento 1, e apenas 10% das respostas (1 sujeito) é do agrupamento 2.

Desta forma, observa-se que para o agrupamento 1 é aquele que é caracterizado pelos que acertam a questão Q1, porém com percentual muito inferior ao segundo agrupamento (29% contra 71% aproximadamente). Em termos de procedimento este grupo não apresenta ou utiliza mais de um procedimento na tentativa de resolver. Já o agrupamento 2 é aquele que acerta a questão Q1 utilizando um procedimento mais sofisticado (sistema de equações do primeiro grau com duas variáveis), isto é, um procedimento aprendido no 8º ano.

Ou seja, as respostas a Q1 sugerem que o agrupamento 1 apresentou dificuldade para a resolução de um problema envolvendo equações do primeiro grau, sendo a categoria de maior frequência referentes a ausência de procedimentos. Em contrapartida os integrantes do agrupamento 2 acertam e utilizam um procedimento aprendido no 8º ano que envolve mais operações algébricas: sistema de equações. Lembramos que a utilização de uma equação pode ser mais complexa para montagem, mas em termos de procedimentos a estratégia de sistema de equações exige menos procedimentos.

Em relação à questão Q2, abaixo, temos:

Q2. Qual a área e o perímetro da figura abaixo?



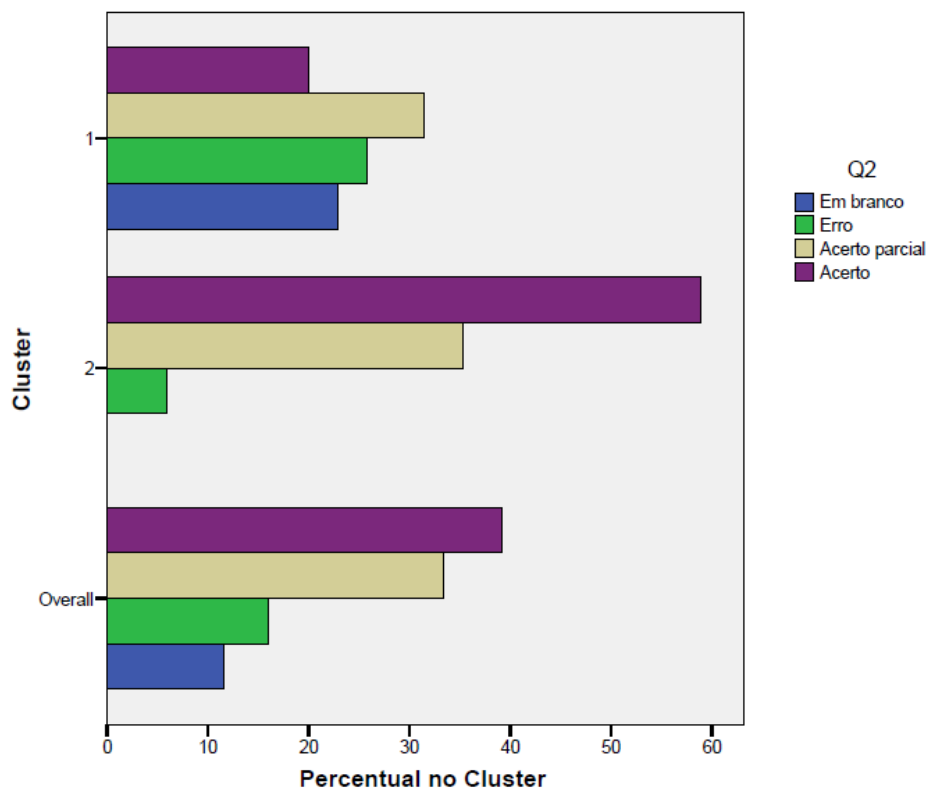


Gráfico 4: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q2 em relação ao respectivo grupo.

		Em branco		Erro		Acerto parcial		Acerto	
		Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)
Cluster	1	8	100,0	9	81,8	11	47,8	7	25,9
	2	0	,0	2	18,2	12	52,2	20	74,1
	Total	8	100,0	11	100,0	23	100,0	27	100,0

Tabela 13: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q2 em relação aos grupos.

Para a questão 2, a resposta que mais caracteriza o agrupamento 1 é o “Acerto Parcial” os quais representam 52% desta categoria e os 47,8% restantes (11 sujeitos) integram o agrupamento 2. Todavia, a mesma não passou no teste de significância para o agrupamento 1, o que sugere cautela em relação aos dados apresentados para este grupo.

Já para o agrupamento 2 o “Acerto” possui maior potencial de categorização. Para a categoria acerto apenas 25,9% (7 participantes) das respostas é proveniente

de participantes do agrupamento 1. Dentre as categorias “Erro” e “Em Branco”, novamente há maior percentual de respostas provenientes dos participantes do agrupamento 1, com percentuais de 81,3% e 100%, respectivamente. Apenas 2 respostas completamente erradas (18,2%) foram dadas por integrantes do grupo 2.

Os procedimentos adotados se distribuíram da seguinte forma:

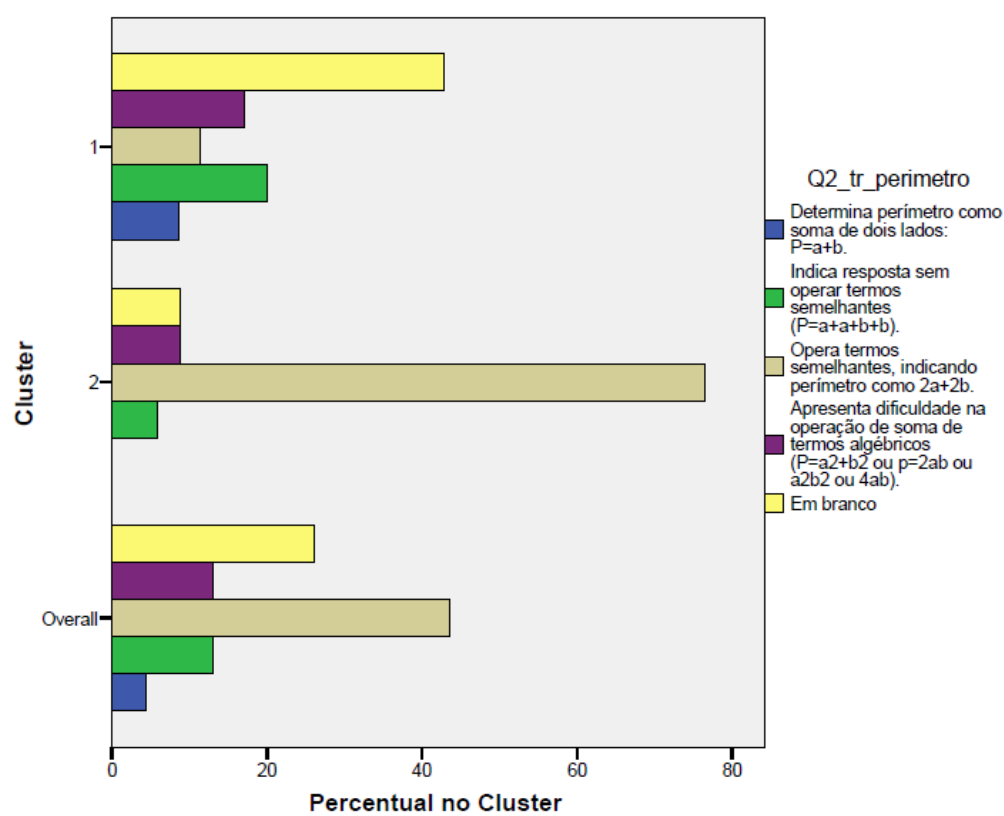


Gráfico 5: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q2_tr em relação ao respectivo grupo.

	Determina perímetro como soma de dois lados: $P=a+b$.		Indica resposta sem operar termos semelhantes ($P=a+a+b+b$).		Opera termos semelhantes, indicando perímetro como $2a+2b$.		Apresenta dificuldade na operação de soma de termos algébricos ($P=a^2+b^2$ ou $p=2ab$ ou a^2b^2 ou $4ab$).		Não se aplica	
	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)
Cluster 1	3	100,0 %	7	77,8%	4	13,3%	6	66,7%	15	83,3%
Cluster 2	0	,0%	2	22,2%	26	86,7%	3	33,3%	3	16,7%
Total	3	100%	9	100%	30	100%	9	100%	18	100%

Tabela 14: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão “Q2_tr perímetro” em relação aos grupos.

Conforme o gráfico acima, a categoria “Branco” é a mais representativa para o agrupamento 1, com 15 das 35 respostas nesta categoria. Ou seja, quase metade deste agrupamento não fez esta questão, contraponto com apenas 3 sujeitos do agrupamento 2, que segundo a tabela 14 representam 16,7% das respostas nesta categoria.

Já para o agrupamento 2 a resposta que mais contribuiu para a formação deste foi “Opera termos semelhantes, indicando perímetro como $2a+2b$ ”. Dentre os integrantes do grupo 2 a grande maioria está nesta categoria: 76,5% do grupo ou 26 sujeitos. Comparando os grupos, apenas 4 sujeitos do agrupamento 1 estão nesta categoria, todavia, dentre aqueles que “Indica resposta sem operar termos semelhantes ($P=a+a+b+b$)” 77,8% são do agrupamento 1, o qual representa também 100% daqueles que “Determina perímetro como soma de dois lados: $P=a+b$.” e 66,7% dos que “Apresenta dificuldade na operação de adição de termos algébricos ($P=a^2+b^2$ ou $p=2ab$ ou a^2b^2 ou $4ab$).”

Como podemos observar novamente o agrupamento 1 sugere dificuldade, lembramos que esta é uma questão de resolução de equação. Para este grupo, somando aqueles que não apresentaram procedimento (15) com aqueles que utilizaram alguma estratégia incorreta¹⁷ (9) temos um percentual de aproximadamente 69%. Em contrapartida o agrupamento 2 além de ter a maioria dos acertos apresenta 86% de respostas corretas e mais econômicas: $P=2a+2b$

Para a questão 11B, que indica o desempenho em uma equação do tipo $ax=bx+c$,¹⁸ houve a seguinte distribuição:

¹⁷ $P=a+b$ ou $P=a^2+b^2$ ou $p=2ab$ ou a^2b^2 ou $4ab$

¹⁸ A questão solicitava a resolução da seguinte equação: $10y = \frac{2}{4} + \frac{1}{2}$.

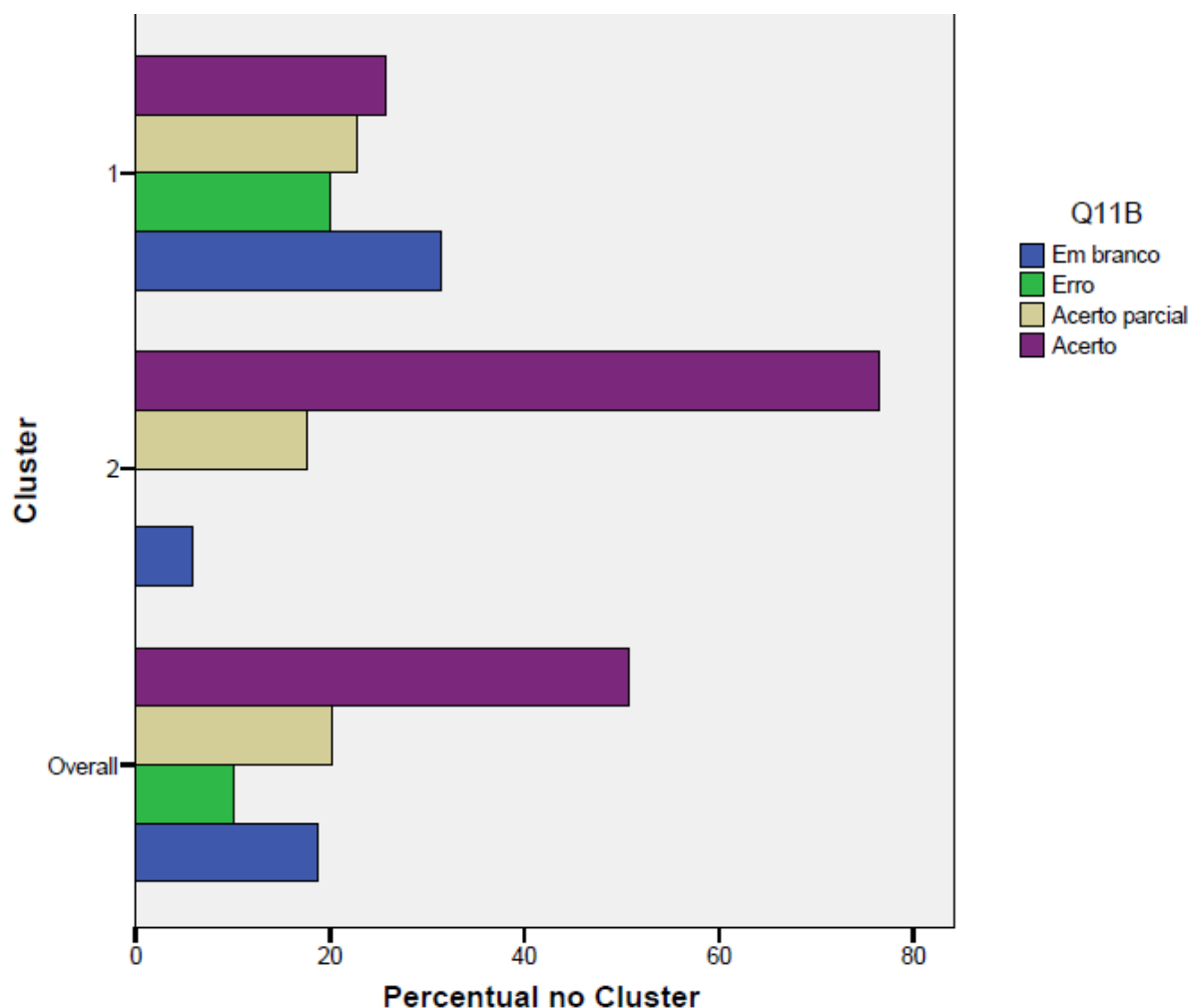


Gráfico 6: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q11B em relação ao respectivo grupo.

		Em branco		Erro		Acerto parcial		Acerto	
		Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)
Cluster	1	11	84,6	7	100,0	8	57,1	9	25,7
	2	2	15,4	0	,0	6	42,9	26	74,3
	Total	13	100,0	7	100,0	14	100,0	35	100,0

Tabela 15: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q11B em relação aos grupos.

No gráfico acima se observa que as respostas que melhor caracterizam os grupos 1 e 2 são, respectivamente, “Em Branco” e “Acerto”. Observa-se que 11 sujeitos do agrupamento 1 estão na categoria “Em Branco”. Para o agrupamento 2, dos 34 integrantes deste grupo, 26 estão na categoria “Acerto”, um percentual de 76,5%.

Em relação à tabela 15, verifica-se que das respostas em branco 84,6% foram dadas por participantes do grupo 1, enquanto apenas 15,4% são do grupo 2. Já para a categoria “Acerto” este percentual inverte-se e 74,3% daqueles que acertaram pertencem ao agrupamento 2, contraponto os 25,7% dos relativos ao grupo 1

Para as demais categorias, observa-se que todos os participantes que erraram (7) pertencem ao grupo 1. E para a categoria “Acerto parcial” a distribuição possui percentuais próximos: 57,1% para o agrupamento 1 e 42,9% para o agrupamento 2.

Nesta questão, envolvendo uma equação que exigia operações algébricas com coeficientes fracionários, novamente o agrupamento 1 demonstra dificuldade (apenas 26% acertam completamente), enquanto para o agrupamento 2 o percentual é de 76%.

A questão 15,¹⁹ que inseria operações algébricas em contexto geométrico simples, teve a seguinte distribuição de suas categorias de desempenho:

¹⁹ Qual expressão representa a medida da área de um retângulo cujos lados são representados por “ $a+2$ ” e “ $a+3$ ”?

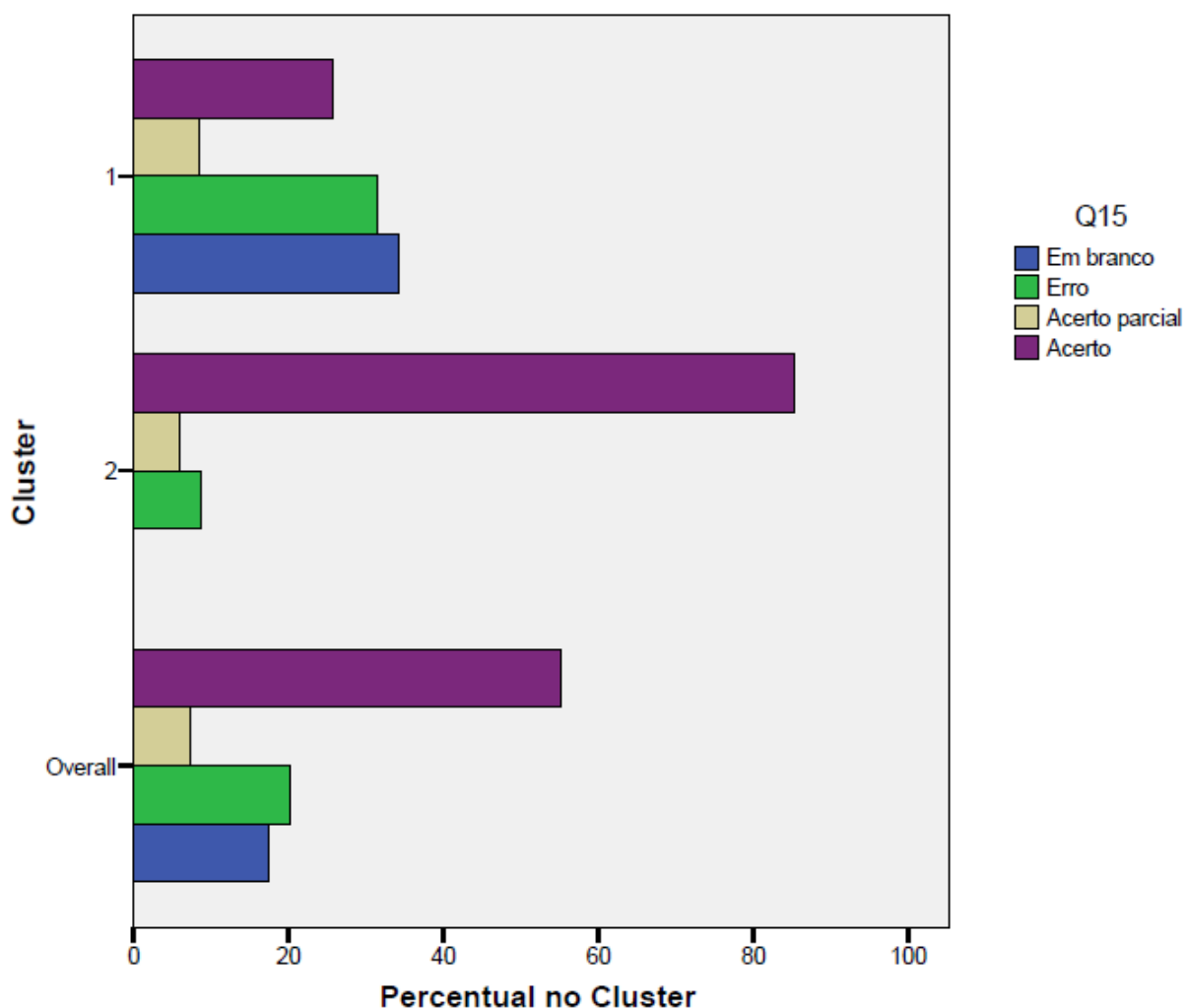


Gráfico 7: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q15 em relação ao respectivo grupo.

		Em branco		Erro		Acerto parcial		Acerto	
		Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)
Cluster	1	12	100,0	11	78,6	3	60,0	9	23,7
	2	0	,0	3	21,4	2	40,0	29	76,3
	Total	12	100,0	14	100,0	5	100,0	38	100,0

Tabela 16: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q15 em relação aos grupos.

O comportamento na questão anterior repete-se para a questão Q15 e, novamente, a categoria que melhor caracteriza o agrupamento 1 é “Em Branco” enquanto, para o agrupamento é a categoria “Acerto”.

Conforme tabela acima, 100% daqueles que não responderam a questão (Em Branco) pertencem ao agrupamento 1 e 23,7% dos que acertaram. Em

contrapartida, dentre os que acertaram 76,3% estão no agrupamento 2.

Os percentuais daqueles que estão no agrupamento 2 são maiores nas categorias “Erro” e “Acerto Parcial”, com percentuais de 78,6% (ou 11 alunos) e 60% (3 alunos) respectivamente.

Notemos que esta questão envolvia o conhecimento geométrico de área de um retângulo com lados determinados por expressões algébricas. Como respostas corretas foram admitidas também aquelas que apresentavam somente a expressão algébrica, sem realizar as operações. Todavia, realizando um cruzamento dos dados, observou-se que dentre 25 participantes que resolveram o produto corretamente, utilizando parênteses, 21 são do agrupamento 2.

Logo, esta questão permitiu concluirmos que os alunos pertencentes ao agrupamento 2 além de terem melhor desempenho são aqueles que conseguem utilizar a propriedade distributiva corretamente.

A questão Q16 (A, B e C)²⁰ que tratava dos três principais tipos de fatoração teve a seguinte distribuição:

²⁰ Q16- Você sabe que expressões algébricas podem ser escritas de mais de uma forma, desde que tais formas sejam equivalentes entre elas. Um caminho para conseguir escrever uma expressão equivalente a outra é a fatoração. Em relação aos três polinômios abaixo você poderia pensar em caminhos de fatoração?

a) $3x^2 + 12x =$

b) $x^2 - 36 =$

c) $x^2 + 4x + 4 =$

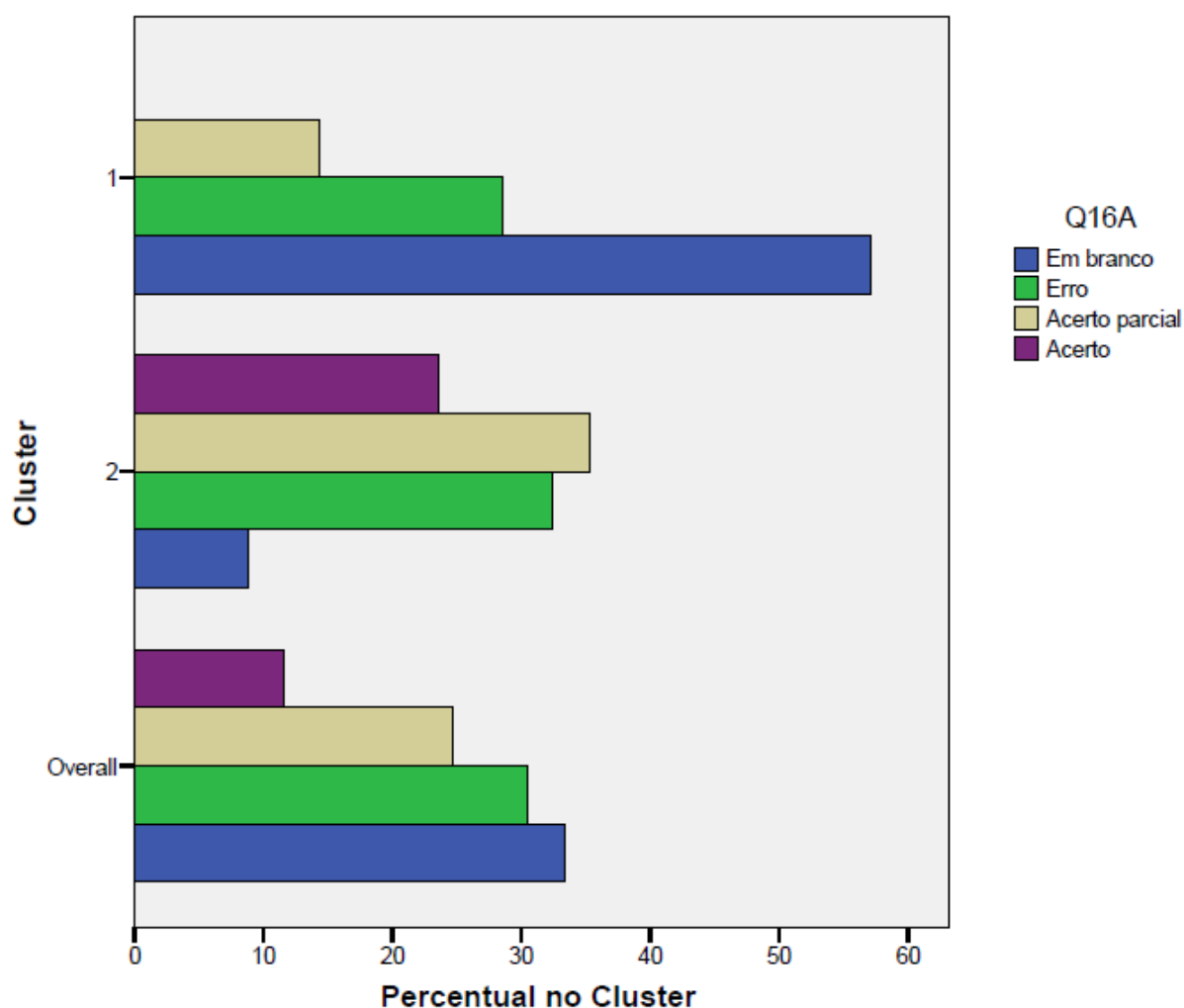


Gráfico 8: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q16A em relação ao respectivo grupo.

		Em branco		Erro		Acerto parcial		Acerto	
		Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)
Cluster	1	20	87,0	10	47,6	5	29,4	0	,0
	2	3	13,0	11	52,4	12	70,6	8	100,0
	Total	23	100,0	21	100,0	17	100,0	8	100,0

Tabela 17: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q16A em relação aos grupos.

Na questão 16 item a, as categorias de maior contribuição foram “Em branco” para o agrupamento 1 e “Acerto Parcial” para o agrupamento 2. É possível perceber que a contribuição é maior para o agrupamento 1, pois 57% ou 20 dos 35 deste agrupamento estão na categoria “Em Branco”, enquanto 35% ou 12 dos 34 daqueles que estão no agrupamento 2 estão na categoria “Acerto Parcial”.

Na tabela 17 observa-se que apenas 3 participantes que deixaram a questão em branco pertencem ao agrupamento 2, contrapondo com os 100% (ou 10 participantes) da categoria de acerto. Para a categoria “Erro” a distribuição é próxima para os dois agrupamentos: 47,6% para o 1 e 52,4% para o 2. Já na categoria “Acerto Parcial” 70,6% dos participantes estão no agrupamento 2 e apenas 5 ou 29,4% estão no agrupamento 1.

Novamente percebemos que os participantes do agrupamento 2 são aqueles que possuem melhor desempenho e, em sua maioria, conseguem fatorar uma expressão algébrica utilizando o procedimento de evidência de um termo em comum. Esse tipo de fatoração embora seja um dos primeiros a serem aprendidos na escola, demanda conhecimento e domínio sobre operações com termos algébricos (multiplicação e divisão) e, além disso, é preciso verificar qual é o maior termo que pode ser colocado em evidência e esta é uma tarefa que não pode ser executada com uma regra de procedimento, exige grande potencial de abstração.

Para o segundo tipo de fatoração (diferença de dois quadrados), que pode ser resolvido, após identificação deste modelo, com uma regra prática (extraem-se as raízes dos dois termos e indica-se a fatoração através do produto da soma e subtração desses valores) temos:

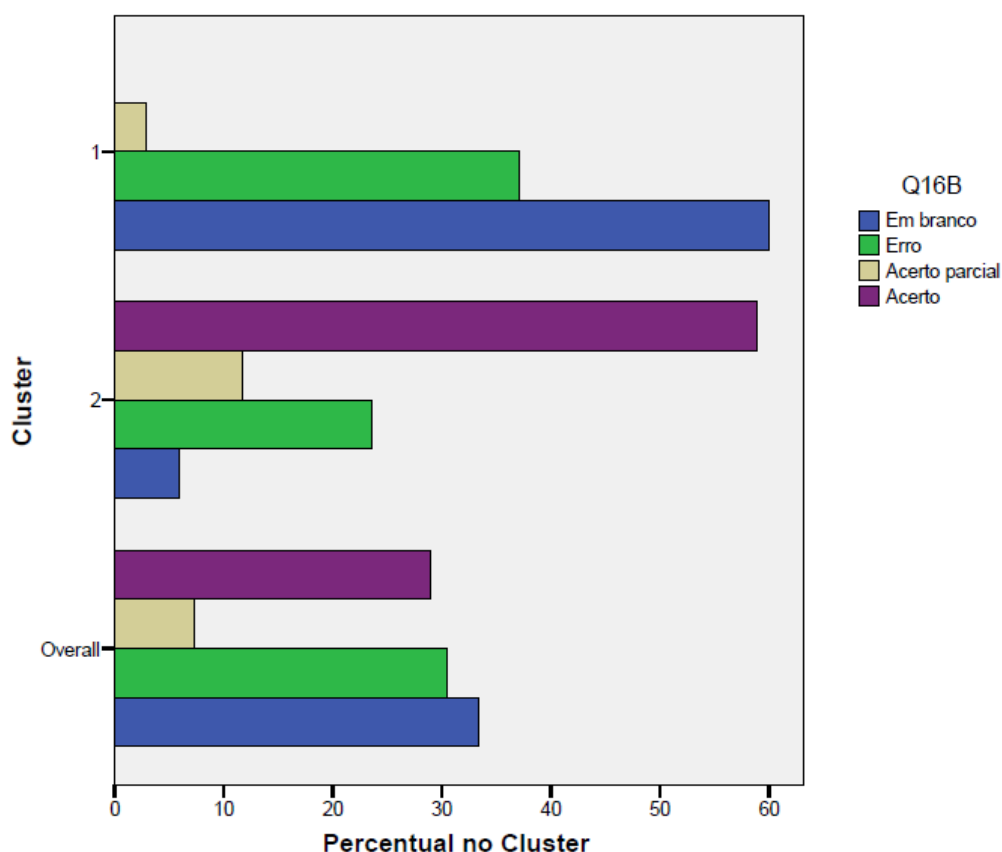


Gráfico 9: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q16B em relação ao respectivo grupo.

		Em branco		Erro		Acerto parcial		Acerto	
		Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)
Cluster	1	21	91,3	13	61,9	1	20,0	0	,0
	2	2	8,7	8	38,1	4	80,0	20	100,0
	Total	23	100,0	21	100,0	5	100,0	20	100,0

Tabela 18: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q16B em relação aos grupos.

Conforme pode ser observado no gráfico 9, voltamos a mesma tendência das outras questões: categoria “Em Branco” caracterizando o agrupamento 1 e “Acerto” caracterizando o agrupamento 2.

Para a tabela acima verifica-se que dentre os que deixaram em branco a questão 91,3% são do agrupamento 1 e todos aqueles que acertam completamente a questão integram o agrupamento 2 (20 participantes). Na categoria “Erro”, a maioria pertence ao agrupamento 1 (61,9%) enquanto na categoria “Acerto Parcial”

apenas 1 participante (20%) está neste agrupamento. Ao contrário, o percentual de participantes nesta última categoria para o agrupamento 2 é de 80% e para a categoria “Erro” é de 38,1%. Isto é, percebe-se que a grande maioria do agrupamento 1 não resolve ou erra esta questão, enquanto o agrupamento 2 demonstra domínio do procedimento ou executa o mesmo e erra o sinal ou o raiz quadrada de um dos termos (acerto parcial). Logo, em um procedimento que pode ser executado de forma mais mecânica que o item anterior, o desempenho do agrupamento 1 se mantém (0 acertos) , e expressivamente melhor para o agrupamento 2 (de 8 para 20 acertos).

Em relação aos procedimentos adotados, esta categoria teve a seguinte contribuição para a formação dos grupos:

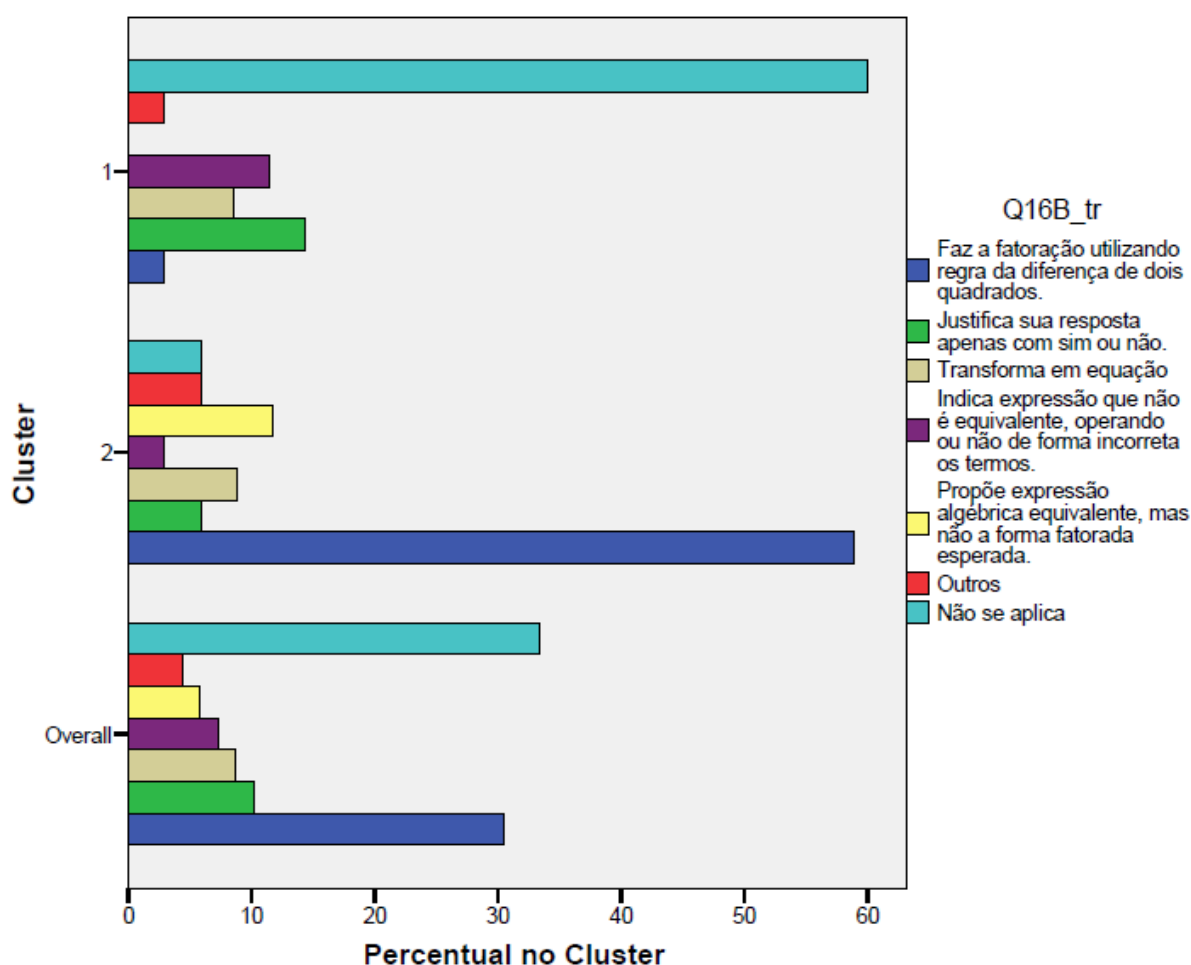


Gráfico 10: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q16B_tr em relação ao respectivo grupo.

	Faz a fatoração utilizando regra da diferença de dois quadrados.		Justifica sua resposta apenas com sim ou não.		Transforma em equação		Indica expressão o que não é equivalente, operando ou não de forma incorreta os termos.		Propõe expressão algébrica equivalente, mas não a forma fatorada esperada.		Outros		Não se aplica	
	Freq	Perc (%)	Freq	Perc (%)	Freq	Perc (%)	Freq	Perc (%)	Freq	Perc (%)	Freq	Perc (%)	Freq	Perc (%)
Cluster 1	1	5	5	71	3	50	4	80	0	0	1	33	21	91
Cluster 2	20	95	2	29	3	50	1	20	4	100	2	67	2	9
Total	21	100	7	100	6	100	5	100	4	100	3	100	23	100

Tabela 19: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q16B_tr em relação aos grupos.

Corroborando os resultados da análise na questão anterior, o gráfico e tabela acima indicam que a categoria “Não se aplica” contribui de forma expressiva para o agrupamento 1, de forma que 91% daqueles que não responderam pertencem ao agrupamento 1, contrapondo com 9% para aqueles do agrupamento 2. Para o procedimento “Faz a fatoração utilizando regra da diferença de dois quadrados” 95% das respostas classificadas nesta categoria foram dadas por integrantes do agrupamento 2.

Nas outras categorias, observa-se que aquela mais próxima ao valor de referência deste item (Propõe expressão algébrica equivalente, mas não a forma fatorada esperada), novamente há um percentual alto de integrantes do agrupamento 2: 100% dos participantes. Interessante observar que os sujeitos nesta categoria são aqueles que compreendem o processo de fatoração, pois fatoram de forma isolada cada um dos termos, mas não utilizam o procedimento esperado

(descrito acima). Dentre aqueles que estão nas categorias “Justifica sua resposta apenas com sim ou não.” e “Indica expressão que não é equivalente, operando ou não de forma incorreta os termos.” a maioria pertence ao agrupamento 1, com percentuais de 71% e 80% respectivamente, o que indicaria não compreender o que é o processo e o conceito de fatoração. A categoria “Transforma em equação” apresenta percentuais iguais para os integrantes de cada um dos agrupamentos, o que não demonstra grande novidade, visto que este é um dos erros comuns no processo de fatoração, conforme aponta Burigato (2007).

Para o último tipo de fatoração avaliado no instrumento, fatoração do trinômio quadrado perfeito, houve a seguinte contribuição dos resultados para a formação dos agrupamentos:

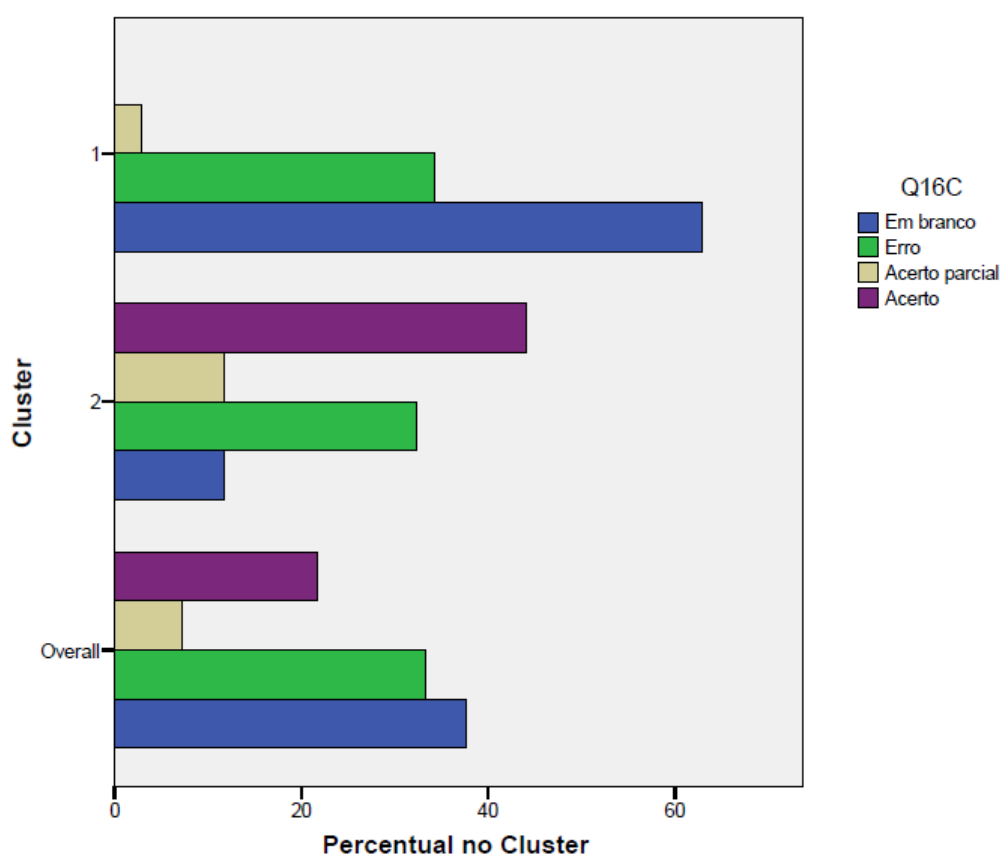


Gráfico 11: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q16C em relação ao respectivo grupo.

		Em branco		Erro		Acerto parcial		Acerto	
		Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)
Cluster	1	22	84,6	12	52,2	1	20,0	0	,0
	2	4	15,4	11	47,8	4	80,0	15	100,0
	Total	26	100,0	23	100,0	5	100,0	15	100,0

Tabela 20: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q16C em relação aos grupos.

De acordo com o gráfico 11 e tabela 20, observa-se que as categorias que mais contribuíram para a constituição dos agrupamentos 1 e 2 foram “Em Branco” e “Acerto”, respectivamente.

Em relação à distribuição dos desempenhos, a categoria “Em Branco” e “Erro” são formadas, em sua maioria, pelos integrantes do grupo 1, com percentuais aproximados de 85% e 52%. As demais categorias possuem percentuais superiores para o Grupo 2, sendo que dentre os que acertaram, todos são deste agrupamento.

Este tipo de fatoração é muito utilizado ao longo do ensino da matemática e, em termos de processo de resolução é bastante parecida com a questão anterior, ou seja, feita a identificação do tipo de fatoração o processo exige apenas a extração das raízes dos quadrados perfeitos indicando-se como resposta a soma desses dois termos. Logo, existe a necessidade do domínio das operações aritméticas e algébricas e do procedimento de fatoração. Analisando os erros apresentados, dos 15 participantes que apresentaram erro nas operações, dos quais 9 são do agrupamento 1 e 6 do agrupamento 2. Os demais que apresentaram erros no processo de fatoração.

Em relação ao processo de simplificação de uma expressão algébrica, solicitado na questão 17,²¹ houve a seguinte distribuição dos procedimentos:

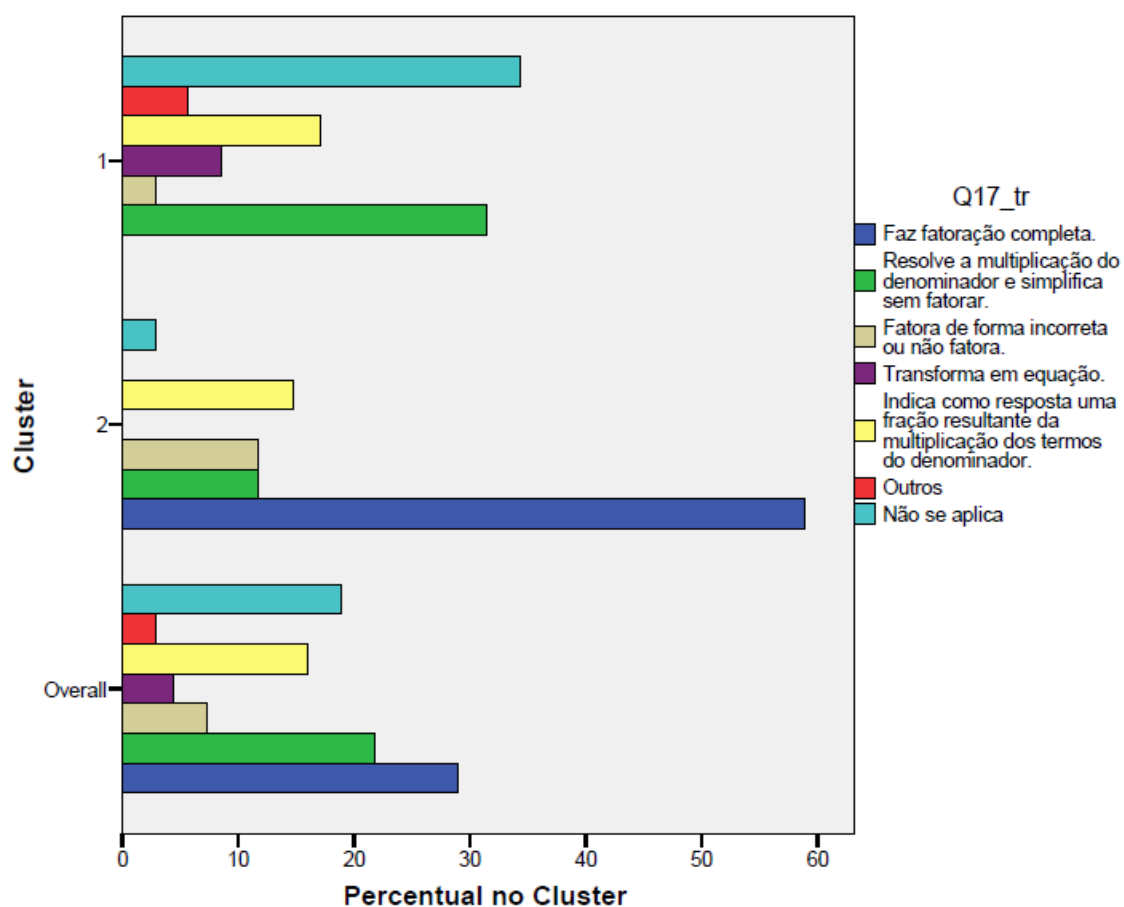


Gráfico 12: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q17_tr em relação ao respectivo grupo.

²¹ Q17- Simplificando a fração abaixo, qual expressão você obtém?

$$\frac{x^2 - 9}{x(x + 3)}$$

	Faz fatoração completa.		Resolve a multiplica ção do denomina dor e simplifica sem fatorar.		Fatora de forma incorreta ou não fatora.		Transfor ma em equação.		Indica como resposta uma fração resultante da multiplica ção dos termos do denomina dor.		Outros		Não se aplica	
	Freq	Perc (%)	Freq	Perc (%)	Freq	Perc (%)	Freq	Perc (%)	Freq	Perc (%)	Freq	Perc (%)	Freq	Perc (%)
Cluster 1	0	0	11	73	1	20	3	100	6	55	2	100	12	93
Cluster 2	20	100	4	27	4	80	0	0	5	45	0	0	1	8
Total	20	100	15	100	5	100	3	100	11	100	2	100	13	100

Tabela 21: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q17C_tr em relação aos grupos.

Para a variável 17C_Procedimento as categorias que melhor contribuíram para a formação dos grupos foram “Resolve a multiplicação do denominador e simplifica sem fatorar” e “Não se aplica” para o agrupamento 1, enquanto a que melhor definiu o agrupamento 2 foi “Fatora completamente”, sendo que esta última (conforme gráfico 12) só é composta por estes integrantes. Notemos que o processo de fatoração é essencial para a simplificação desta fração algébrica, logo se não é feita a fatoração ou de forma incorreta a simplificação estará também incorreta.

As demais categorias, que informam algum tipo de erro na referida questão, apresentaram percentuais mais elevados para o agrupamento 1. Isto é, dentre os que estão nas categorias “Resolve a multiplicação do denominador e simplifica sem fatorar”, “Transforma em equação.”, “Indica como resposta uma fração resultante da multiplicação dos termos do denominador.”, “Outros” e “Não se aplica” os percentuais para o agrupamento 1 são de 73%, 100%, 55%, 100% e 93%. O agrupamento 2 só supera os percentuais para as categorias “Fatora de forma

incorreta ou não fatora” com 80% e “Fatora completamente”, conforme discutido acima. O que evidencia novamente que o agrupamento 2 apresenta melhor desempenho nas tarefas envolvendo processo de fatoração e também compreensão os conceitos de simétrico aditivo e oposto multiplicativo fundamentais para executar corretamente o processo de simplificação.

Ainda no domínio da álgebra estrutural, a questão Q19C²² que solicitava a resolução de um produto notável do tipo $(a-b)^2$ teve a seguinte distribuição:

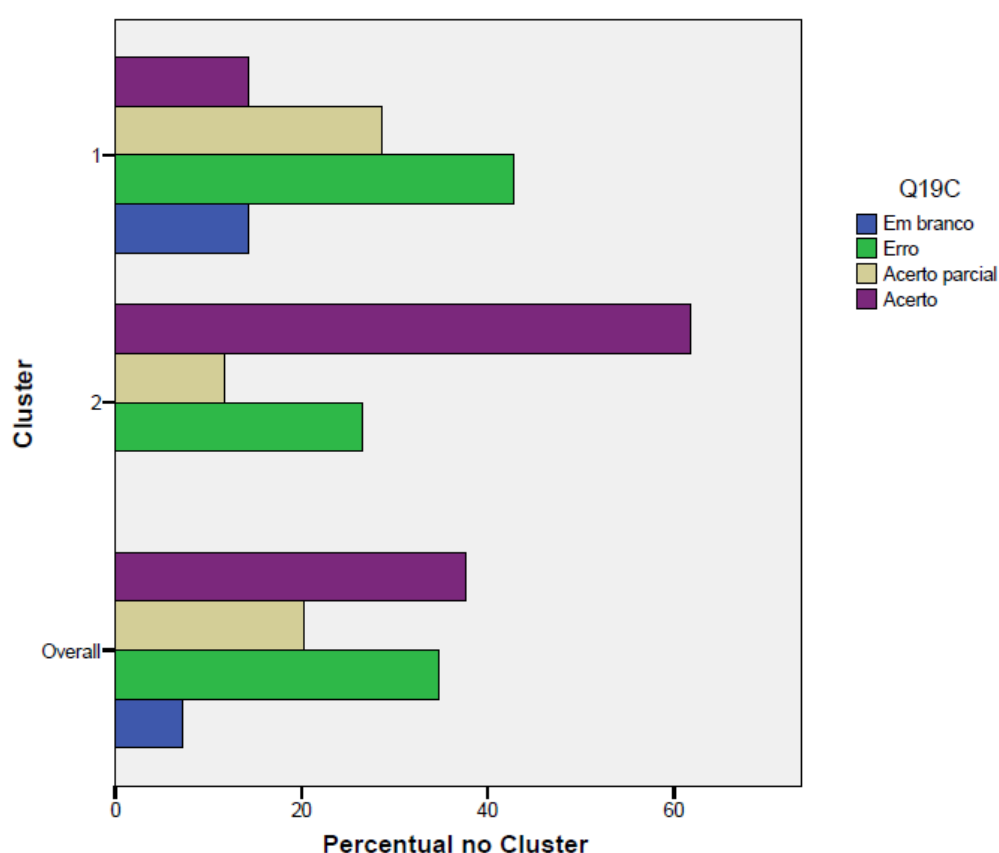


Gráfico 13: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q19C em relação ao respectivo grupo.

²² Q19- Resolva os produtos abaixo:

a) $(x+3)(x-3) =$

b) $(x+4)^2 =$

c) $(x-5)^2 =$

		Em branco		Erro		Acerto parcial		Acerto	
		Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)
Cluster	1	5	100,0	15	62,5	10	71,4	5	19,2
	2	0	,0	9	37,5	4	28,6	21	80,8
	Total	5	100,0	24	100,0	14	100,0	26	100,0

Tabela 22: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q19C em relação aos grupos.

A questão acima não passou no teste de significância para a determinação do agrupamento 1, todavia ficou bastante próxima ao valor de corte. Embora isto tenha ocorrido, observa-se que os resultados obtidos não contradizem as demais questões, visto que as categorias que mais colaboraram foram “Erro” para o grupo 1 e “Acerto” para o grupo 2. Observa-se que o potencial de contribuição é maior para o agrupamento 2, visto que a maioria dos participantes que estão nesse grupo acertaram, isto é 21 de 34 ou 62%. As demais categorias apresentam maiores distribuições para os integrantes do agrupamento 1. Todos os que deixaram em branco, 62,5% dos que erraram e 71,4% dos que acertaram parcialmente pertencem a este agrupamento. Novamente temos uma questão que exige essencialmente a identificação do tipo de produto notável e aplicação de determinada regra apresenta baixo percentual de acerto. Tal dificuldade pode estar associada ao sinal do produto, que exige uma adaptação a regra de ação para a determinação deste produto notável.

A questão Q20²³ trazia o conceito de fatoração aplicado em uma situação geométrica apresentou a seguinte distribuição:

²³ Q20- Um retângulo tem sua área representada pela expressão $a^2 - 16$. Se uma das medidas dos lados é indicada por $a+4$ qual expressão representa a medida outro lado?

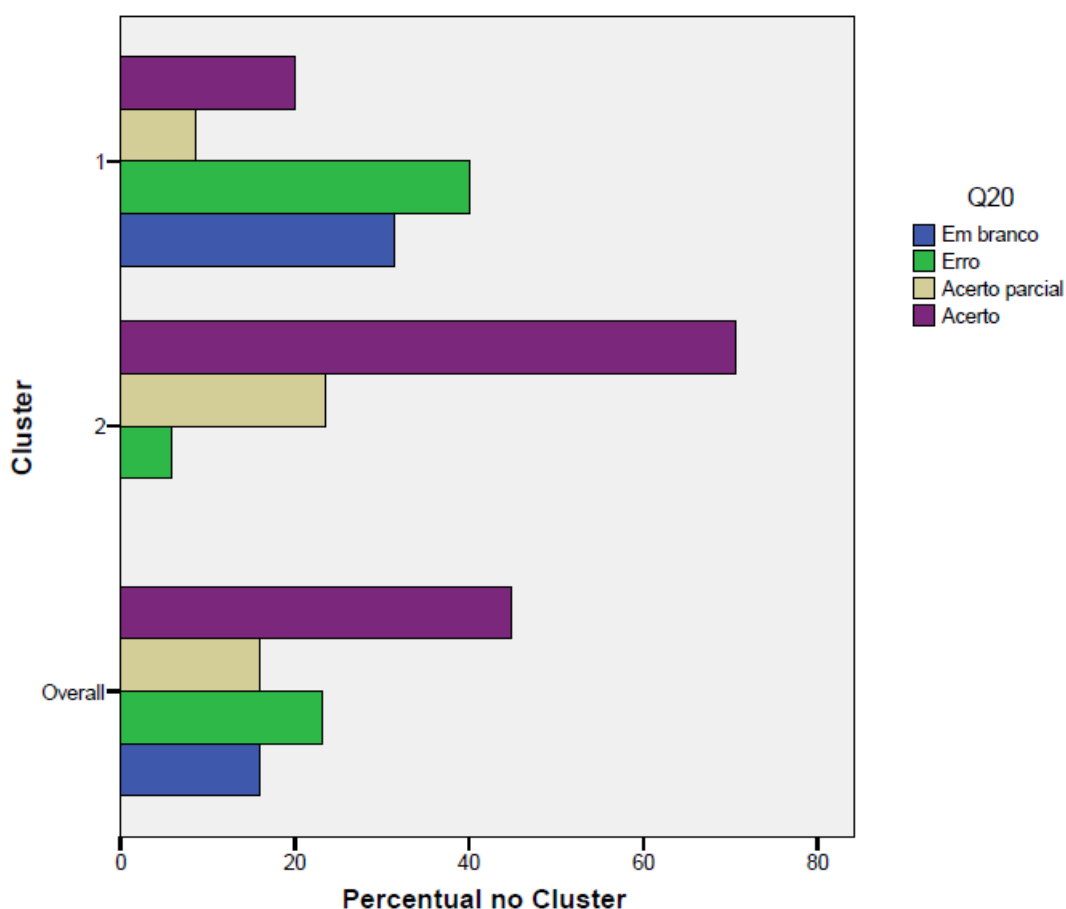


Gráfico 14: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q20 em relação ao respectivo grupo.

		Em branco		Erro		Acerto parcial		Acerto	
		Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)
Cluste	1	11	100,0	14	87,5	3	27,3	7	22,6
	2	0	,0	2	12,5	8	72,7	24	77,4
	Total	11	100,0	16	100,0	11	100,0	31	100,0

Tabela 23: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q20 em relação aos grupos.

Para a questão Q20 a categoria “Erro” foi aquela que contribui melhor para o agrupamento 1, visto que 14 participantes deste agrupamento estão nesta categoria. Há ainda que considerar que 100% daqueles que deixaram em branco também fazem parte do agrupamento 1. Em contrapartida, para o agrupamento 2 a categoria com melhor contribuição é a “Acerto”, na qual 77,4% daqueles que acertaram pertencem ao agrupamento 2 e a categoria “Acerto Parcial” também apresenta, em

sua maioria (72,7%) são representantes deste.

A questão acima, que envolve conceitos geométricos e fatoração reflete o padrão que está sendo apresentado nas demais questões: agrupamento 1 com desempenho inferior ao agrupamento 2, o que sugere que este último apresenta não só um domínio dos processo de fatoração (questão Q16), mas também neste conceito aplicado em outros domínios matemáticos.

Por fim, a última questão apontada pela análise multidimensional, apresenta o conceito de inequação como critério central, para o qual a situação envolvida solicitava a determinação de valores válidos para a mesma. A distribuição das respostas e caracterização dos agrupamentos foram as seguintes:

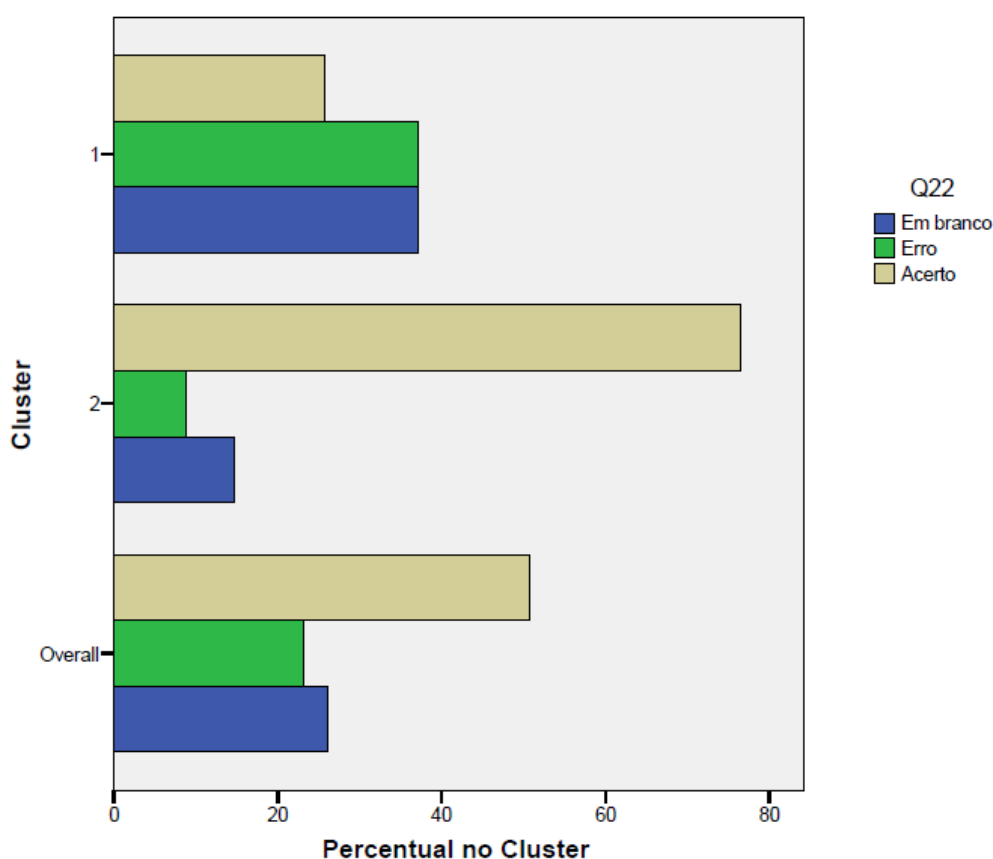


Gráfico 15: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q22 em relação ao respectivo grupo.

		Em branco		Erro		Acerto	
		Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)	Freq.	Perc. (%)
Cluster	1	13	72,2	13	81,3	9	25,7
	2	5	27,8	3	18,8	26	74,3
	Total	18	100,0	16	100,0	35	100,0

Tabela 24: Distribuição da porcentagem de participantes válidos para cada modalidade de resposta da questão Q22 em relação aos grupos.

No caso da questão 22,²⁴ de acordo com o gráfico acima, as categorias “Em branco” e “Erro” concorreram de forma idêntica na formação do agrupamento 1. Para tais a maioria dos participantes que integram cada uma pertencem ao agrupamento 1 com percentuais de 72,2% e 81,3%. Já a categoria “Acerto” foi prioritariamente a que melhor contribuiu para a formação do agrupamento 2 e este representa 74,3% daqueles que acertaram.

Infer-se desta forma que os integrantes do agrupamento 2 demonstram domínio do conceito de inequação e do símbolo de menor, o que não ocorre para o outro agrupamento. Além dos conceitos descritos acima era fundamental a compreensão dos conceitos de variável (como símbolo que pode admitir diversos valores numéricos) e também a relação entre as variáveis x e y (essencial para a aprendizagem de funções). Logo, no momento em que há um bom desempenho nesta questão, admite-se que há um relativo domínio de conceitos básicos sobre relação entre variáveis e inequações, que são essenciais no ensino médio.

Após a discussão das questões acima, percebe-se que as características principais de formação de cada um dos agrupamentos são:

²⁴ Q22- Na inequação $x + 3 < y$, complete a tabela abaixo indicando os valores que x e y podem assumir para que a desigualdade permaneça verdadeira:

X	Y

Questões	Agrupamentos	
	1	2
Q1	Tem menor percentual de acerto (apenas 12 alunos ou 35% do grupo) para problema de equações que pode ser resolvido com uma equação de primeiro grau ou sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas.	Tem maior percentual de acerto (29 alunos do grupo ou 85%) para problema de equações que pode ser resolvido com uma equação de primeiro grau ou sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas.
Q1 (procedimento)	Não apresentam procedimentos para o problema descrito acima (9 alunos ou 26%) ou montam um sistema de equações e adotam outra estratégia (8 alunos ou 24%)	Utilizam sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas (28 alunos ou 80%) para o problema acima.
Q2	Apresentam dificuldades nas operações com termos algébricos: Acertam parcialmente questão envolvendo área e perímetro com medidas representadas por termos algébricos (11 alunos ou 31%). Isto é, acertam pelo menos um dos itens (área ou perímetro) seguidos daqueles que erram ambos (9 alunos ou 26%)	Não apresentam dificuldades nas operações com termos algébricos: Acertam a determinação da área e do perímetro com medidas representadas por termos algébricos (20 alunos ou 59%) seguidos daqueles que acertam parcialmente, isto é, acertam pelo menos um dos itens (área ou perímetro) (11 alunos ou 35%).
Q2_ Tipo de procedimento para o item perímetro.	Não apresentam resposta ou procedimento para cálculo do perímetro de figura com medidas dos lados representadas por termos algébricos (15 alunos ou 44%), seguidos daqueles que indicam resposta correta sem operar os termos semelhantes (7 alunos ou 21%).	Em sua maioria indicam resposta correta e operam os termos semelhantes (26 alunos ou 76%) na determinação de perímetro de figura com medidas dos lados representadas por termos algébricos.
Q11B	Deixam em branco, ou seja, não resolvem equação de primeiro grau do tipo $ax=b$ com termos fracionários (11 alunos ou 31%) seguidos daqueles que acertam a mesma (9 alunos ou 26%).	Em sua maioria acertam (76%) a resolução de uma equação de primeiro grau do tipo $ax=b$ com termos fracionários.
Q15	Não realizam produto de binômios representados por uma situação envolvendo área de retângulo (12 alunos ou 34%) ou erram (11 alunos ou 31%).	Realizam corretamente produto de binômios representados por uma situação envolvendo área de retângulo (29 alunos ou 85%).
Q16A	Deixam em branco item de fatoração por evidência (21 alunos ou 57%), seguidos dos que erram a mesma (13 alunos ou 27%).	Acertam parcialmente item de fatoração por evidência (20 alunos ou 35%), seguidos dos que erram (21 alunos ou 32%).
Q16B	Deixam em branco item referente à fatoração do quadrado da diferença de dois termos (21 alunos ou 60%) seguidos dos que erram (13 alunos ou 37%)	Acertam fatoração do quadrado da diferença de dois termos (20 alunos ou 59%), seguidos dos que erram (8 alunos ou 23%)
Q16B (procedimento)	Em sua maioria não realizam a fatoração do quadrado da soma	Em sua maioria realizam a fatoração correta do quadrado da soma de dois

	de dois termos algébricos (21 alunos ou 60%).	termos, utilizando regra adequada (20 alunos ou 59%).
Q16C	Deixam em branco item referente à fatoração de um trinômio quadrado perfeito (22 alunos ou 63%), seguidos dos que erram (12 alunos ou 34%).	Acertam item referente à fatoração de um trinômio quadrado perfeito (15 alunos ou 44%), seguidos dos que erram (11 alunos ou 32%).
Q17 (procedimento)	Não apresentam procedimento para a simplificação de uma fração algébrica (12 alunos ou 34%) seguidos daqueles que resolvem a multiplicação do denominador e simplificam sem fatorar (11 alunos ou 31%).	Fazem a fatoração completa dos termos apresentados na fração algébrica (20 alunos ou 59%) seguidos daqueles que indicam como resposta uma fração resultante da multiplicação dos termos do denominador (5 alunos ou 15%).
Q19C	Erram o cálculo do produto notável do quadrado da diferença de dois termos (15 alunos ou 43%), seguidos dos que acertam parcialmente (10 alunos ou 29%).	Em sua maioria acertaram cálculo do produto notável do quadrado da diferença de dois termos (21 alunos ou 62%).
Q20	Erraram questão sobre fatoração aplicada à geometria (40%), seguidos dos que deixaram em branco (31%).	Acertaram questão sobre fatoração aplicada à geometria (71%), seguidos dos que acertaram parcialmente (23%).
Q22	Erraram valores indicados para solução de uma inequação (13 alunos ou 37%) ou deixaram em branco (37%).	Em sua maioria acertaram valores indicados para solução de uma inequação (26 alunos ou 76%).

Quadro 15: Sinopse dos perfis caracterizadores das questões com contribuição significativa para a partição dos sujeitos em termos dos agrupamentos 1 e 2.

Analisando os dados acima, observa-se que o Agrupamento 1, em termos gerais, é composto por aqueles estudantes com maior dificuldade nos conceitos algébricos apontados. Em contrapartida, o Agrupamento 2 é representado por aqueles que apresentam maiores percentuais de acerto em todas as questões e também acertos parciais em algumas questões. O que pode indicar que o mesmo representaria aqueles estudantes com melhor desempenho algébrico.

Com base nas reflexões acima, há fortes indícios que os grupos formados poderiam ser representantes daqueles que tem “facilidade” e dos que tem “dificuldade” em álgebra. As questões apontadas poderiam nos dar indícios de quais são os elementos essenciais para que um aluno tenha bom desempenho em álgebra. Ou seja, um aluno que domina processos de fatoração, produtos notáveis resolução de equações com frações e inequações seria um bom pretendente a um

aluno conceitualmente forte em álgebra. Além disso, poderíamos supor que estes conceitos e suas aplicações representam as principais dificuldades em álgebra para os estudantes ao final do ensino fundamental. Para verificar essa suposição e possibilitar refletir sobre essas inferências, inicialmente utilizaremos o teste U de Mann-Whitney para distribuições não paramétricas, testando a possível diferença entre os desempenhos no instrumento e na escola e os grupos:

	Grupo	N	Mean Rank	Sum of Ranks
Desempenho_Descritivas	1	35	25,49	892,00
	2	34	44,79	1523,00
	Total	69		
Desempenho_Problemas	1	35	20,17	706,00
	2	34	50,26	1709,00
	Total	69		
Desempenho_Geral	1	35	20,17	706,00
	2	34	50,26	1709,00
	Total	69		
Nota_Escola	1	34	26,53	902,00
	2	34	42,47	1444,00
	Total	68		

Tabela 25: Postos médios para cada uma das variáveis a serem analisadas nos testes de hipóteses.

	Desempenho Descritivas	Desempenho Problemas	Desempenho Geral	Nota_Escola
Mann-Whitney U	262,000	76,000	76,000	307,000
Z	-4,005	-6,231	-6,231	-3,325
Significância bicaudal (p)	,000	,000	,000	,001

Tabela 26: Testes de hipóteses para comparação entre os grupos definidos na análise multidimensional TwoStepCluster.

Assim, conforme Tabela 26 há diferença estatisticamente significativa entre os desempenhos no instrumento e a nota na escola quando são comparados os grupos determinados pela análise multidimensional. Além disto, observa-se que as médias dos desempenhos para o grupo 2 são sempre maiores do que o grupo 1.

Até o momento percebe-se que os agrupamentos indicados pela análise multidimensional apresentaram-se como alunos que apresentaram um bom desempenho no instrumento e alunos que apresentaram um baixo desempenho. Desta forma, a análise poderá nos guiar de forma a apontar as principais dificuldades dos estudantes no instrumento proposto e, além disso, auxiliar na discussão das principais dificuldades apresentadas por eles.

De forma a complementar os dados apresentados pela análise multidimensional recorreremos aos percentuais de brancos e erros, apresentados no gráfico 16:

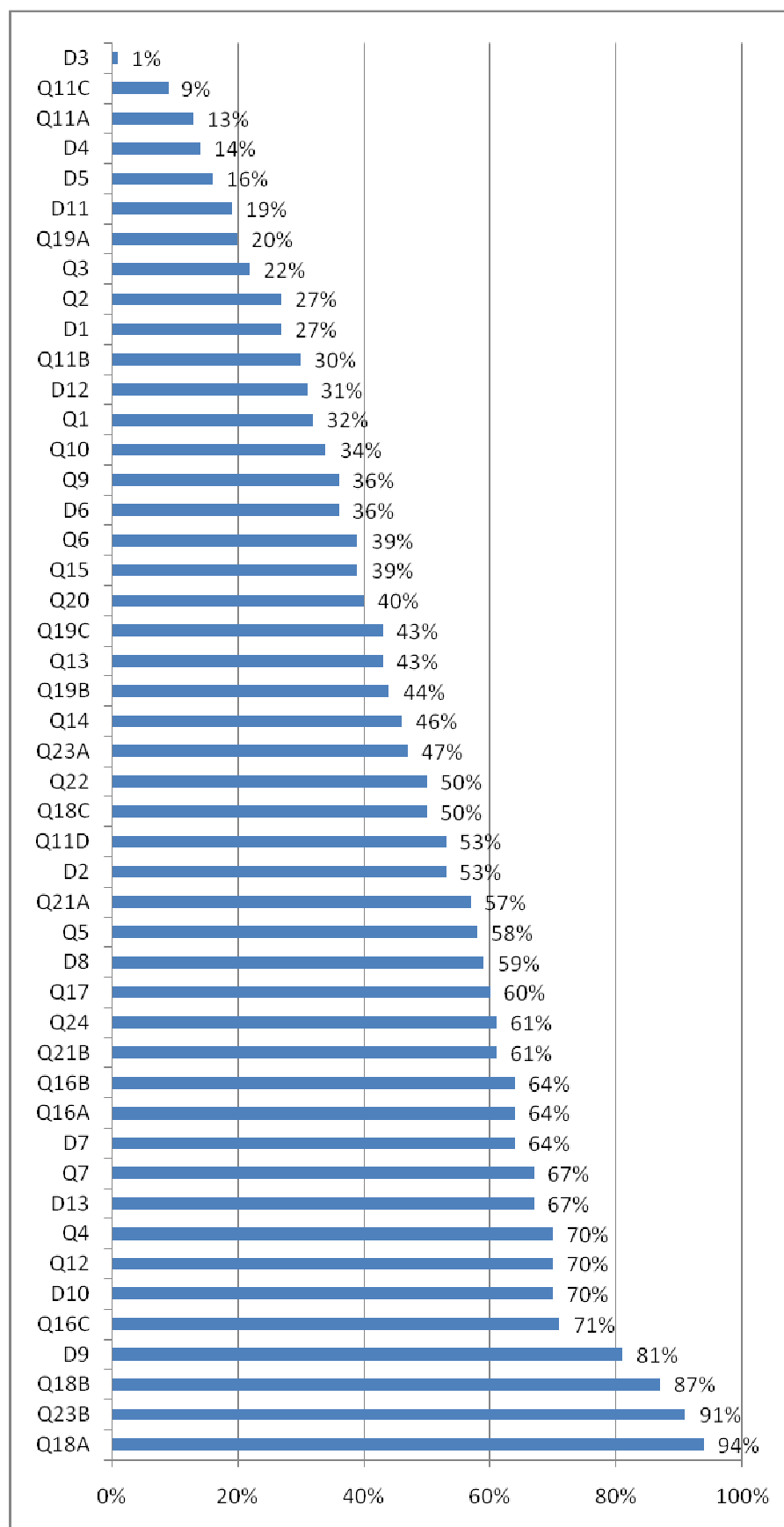


Gráfico 16: Frequências (em percentuais) de erros e brancos das respostas às questões do instrumento.

Conforme pode ser observado no gráfico 16 (acima), 23 dos 47 itens com maiores percentuais de brancos e erros são itens que envolvem essencialmente os seguintes conceitos: generalização de padrões aritméticos, fatoração e inequação.

Em relação à generalização de padrões aritméticos, alguns estudos (ARCHILIA, 2008; ALMEIDA, 2008) apontam que não é freqüente a utilização deste tipo de questões em sala de aula de matemática. Notemos que a base conceitual subjacente a esta questão tem um alto potencial para a introdução e aplicação no o ensino da álgebra, todavia os dados aqui disponíveis sugerem que construir padrões a partir de séries numéricas não é algo trivial para os alunos.

No domínio da fatoração e inequação as dificuldades corroboram as pesquisas apontadas na seção 7, isto é, os desempenhos dos alunos nestes conceitos são muito abaixo do esperado e também corrobora os resultados da análise multidimensional.

Para tentar compreender os níveis de dificuldade de acordo com o gráfico 16 os 47 itens foram subdivididos em 3 faixas parcialmente eqüitativas, conforme quadro abaixo:

Grau de dificuldade	Questão	Conceitos matemáticos contemplados	Período escolar que é ensinado	Resumo das características do grupo de questões
DIFÍCEIS: Questões com maiores percentuais de erros e brancos (maiores que 60%)	Q18A	GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES	8º ano	Apresenta a maioria dos itens classificados como difíceis pelos professores-juizes.
	Q23B	GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES	8º ano	Em termos de conceitos contempla principalmente questões relativas à generalização de padrões aritméticos, fatoração, expressões algébricas, equações equivalentes e resolução de equações com frações .
	Q18B	GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES	8º ano	
	D9	MONÔMIO	8º ano	
	Q16C	FATORAÇÃO	8º ano	
	D10	POLINÔMIO	8º ano	
	Q12	EXPRESSÃO ALGÉBRICA	8º ano	Em relação às questões descritivas, apresentam dificuldade nos conceitos aprendidos no 8º ano como
	Q4	EQUAÇÃO COM FRAÇÃO	7º ano	
	D13	PRODUTO NOTÁVEL	8º ano	
	Q7	EQ. EQUIVALENTES	7º ano	

	D7	EXP. ALGÉBRICAS	8º ano	expressões algébricas, monômios, polinômios e produtos notáveis.
	Q16A	FATORAÇÃO	8º ano	
	Q16B	FATORAÇÃO	8º ano	
	Q21B	INEQUAÇÃO	7º ano	
	Q24	GRAU DE POLINÔMIO	8º ano	
MÉDIAS: Questões com percentuais de erros e brancos entre 40% e 60%	Q17	SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÃO ALGÉBRICA	8º ano	Apresenta apenas um item considerado difícil e, em sua maioria, apresenta itens classificados por nível médio de dificuldade pelos professores-juízes.
	D8	INEQUAÇÃO	7º ano	
	Q5	EQUAÇÃO	7º ano	
	Q21A	INEQUAÇÃO	7º ano	
	D2	VARIÁVEL	7º ano	
	Q11D	EQ. 2º GRAU	9º ano	Apresenta principalmente os seguintes conceitos: inequações, equações do 2º grau, produtos notáveis e situações (equação e termos algébricos) envolvendo a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma.
	Q18C	GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES	8º ano	
	Q22	INEQUAÇÃO	7º ano	
	Q23A	GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES	8º ano	
	Q14	EQ. 2º GRAU	9º ano	
	Q19B	PRODUTO NOTÁVEL	8º ano	As duas questões descritivas que estão presentes são conceitos relacionados às inequações.
	Q13	OPERAÇÕES ALGÉBRICAS	8º ano	
	Q19C	PRODUTO NOTÁVEL	8º ano	
	Q20	FATORAÇÃO	8º ano	
	Q6	EQUAÇÃO COM DISTRIBUTIVA	7º ano	
	Q15	OPERAÇÕES ALGÉBRICAS	7º ano	
FÁCEIS: Questões com percentuais de erros e brancos De 0% até 39%	D6	EQUAÇÃO	7º ano	Não apresenta itens classificados como difíceis pelos professores-juízes sendo a maioria das questões classificadas como fáceis pelos professores.
	Q9	EQUAÇÃO	7º ano	
	Q10	EQUAÇÃO	7º ano	
	Q1	EQUAÇÃO	7º ano	
	D12	FATORAÇÃO	8º ano	
	Q11B	EQUAÇÃO COM FRAÇÃO	7º ano	Apresenta principalmente situações envolvendo o conceito de equações do primeiro grau e descrições de elementos não algébricos ou relacionados às equações.
	D1	INCÓGNITA	7º ano	
	Q2	OPERAÇÕES TERMOS ALGÉBRICOS	7º ano	
	Q3	EQUAÇÃO	7º ano	
	Q19A	PRODUTO NOTÁVEL	8º ano	
	D11	FRAÇÃO	Fundamental I	
	D5	MENOR QUE	Fundamental I	
	D4	MAIOR QUE	Fundamental I	
	Q11A	EQUAÇÃO	7º ano	
	Q11C	EQUAÇÃO	7º ano	
	D3	IGUAL	Fundamental I	

Quadro16: Classificação das questões de acordo com faixas de percentuais de erros e brancos.

A tabela acima evidencia que as questões que apresentaram menor grau de dificuldade por parte dos estudantes são aquelas que envolvem conceitos algébricos básicos (equação, incógnita) ou elementos não-algébricos ($<$, $>$, fração). Poderia causar certo estranhamento a presença do item relativo a descrição do conceito de fatoração, todavia a maioria dos alunos associou fatoração ao processo de fatoração aritmética, logo, não remetem à definição algébrica de fatorar, o que justifica a classificação acima.

As questões que envolvem generalização de padrões aritméticos e procedimento de fatoração mostraram ser um grande obstáculo por parte dos alunos. O percentual que apresenta maior diferença entre os demais é a questão sobre generalização de padrões aritméticos (Q23B), com percentual de erro e branco de 63%.

Além desses dois conceitos, observa-se que os outros elementos do campo conceitual algébrico referente ao ensino da álgebra no 8º ano (fatoração, produtos notáveis, monômios, polinômios, etc) estão presentes, em sua maioria, no grupo de maior nível de dificuldade (questões com maiores percentuais de erros e brancos).

Por fim, cruzamos os resultados da classificação acima com as questões apresentadas pela análise multidimensional e observamos tais questões encontram-se nas três faixas de graus de dificuldade, conforme a tabela abaixo:

	Questões apontada pela análise multidimensional	Conceito abordado	Agrupamento 1	Agrupamento 2
Díficeis: Questões com maiores	Q16C	FATORAÇÃO TQP ²⁵ (procedimento)	Deixam em branco (63%), seguidos dos que erram (34%).	Acertam (44%), seguidos dos que erram (32%).

²⁵ TQP: Trinômio quadrado perfeito

percentuais de erros e brancos (maiores que 60%)	Q16A	FATORAÇÃO POR EVIDÊNCIA (procedimento)	Deixam em branco (57%), erram (27%).	Acertam parcialmente (35%), erram (32%).
	Q16B	FATORAÇÃO DDQ ²⁶ (procedimento)	Deixam em branco (60%) seguidos dos que erram (37%)	Acertam (59%), seguidos dos que erram (23%)
Médias: Questões com percentuais de erros e brancos entre 39% e 60%	Q22	INEQUAÇÃO (valores válidos)	Erraram (37%), deixaram em branco (37%).	acertaram (76%) .
	Q19C	PRODUTO NOTÁVEL QD2T ²⁷ (procedimento)	Erram (43%) seguidos dos que acertam parcialmente (29%).	acertaram (62%), seguidos dos que erraram (26%).
	Q20	FATORAÇÃO DDQ (problema com geometria)	Erraram (40%), deixaram em branco (31%).	acertaram (62%), seguidos dos que erraram (26%).
	Q15	OPERAÇÕES ALGÉBRICAS COM DISTRIBUTIVA (problema com geometria)	Não realizam produto de binômios representados por uma situação envolvendo área de retângulo (34%) ou erram (31%).	Realizam corretamente produto de binômios representados por uma situação envolvendo área de retângulo (85%).
Fáceis: Questões com percentuais de erros e brancos menores que 38%	<u>Q1</u>	PROB. EQUAÇÃO (problema)	Tem menor percentual de acerto (apenas 12 alunos ou 35%)	Tem maior percentual de acerto (29 alunos do grupo ou 85%)
	Q11B	EQUAÇÃO COM FRAÇÃO (procedimento)	Deixam em branco (31%) seguidos daqueles que acertam a mesma (26%).	acertam (76%)
	<u>Q2</u>	OPERAÇÕES TERMOS ALGÉBRICOS (problema com geometria)	Acertam parcialmente (31%). seguidos daqueles que erram (26%)	Acertam (59%) seguidos daqueles que acertam parcialmente, (35%).

Quadro 17: Cruzamento dos dados apresentados no Quadro 13 com os resultados da análise multidimensional.

²⁶ DDQ: Diferença de dois quadrados

²⁷ QDDT: Quadrado da diferença de dois termos

Desta forma, a análise multidimensional confirma as observações feitas anteriormente e amplia as diferenças, evidenciando que:

- Na faixa de maior dificuldade, representada essencialmente pelos elementos aprendidos no oitavo ano destacam-se pela análise multidimensional os processos de fatoração. Notemos que o processo de fatoração demanda além de domínio dos elementos essenciais na construção do conceito de produto notável, elementos como múltiplos e divisores, binômios e trinômios, podemos ainda citar como elementos deste campo: divisão e multiplicação numérica e algébrica, fatoração numérica, fator comum de uma expressão, redução de termos semelhantes, quadrado perfeito, fator comum de uma expressão, redução de termos semelhantes, quadrado perfeito, raiz quadrada, dentre outros (BURIGATO, 2007). Isto é, é um procedimento que, por muitas vezes, recebe um enfoque procedural, porém necessita do domínio de diversos conceitos matemáticos e algébricos para sua compreensão.

- Na faixa de dificuldade média, o conceito de inequação quando inserido em uma situação não procedural destacou-se para a diferenciação dos grupos, assim como o produto notável que não poderia ser resolvido meramente com a aplicação da fórmula (era preciso operar os sinais ou adequar a fórmula) e os problemas envolvendo situações geométricas.

Por fim, a resolução de equações com coeficientes fracionários parecem ser a principal dificuldade dos estudantes em relação ao domínio das equações (questões na faixa mais baixa de dificuldade). As operações com termos algébricos ao serem aplicadas em um contexto geométrico destacaram-se também em relação a este grupo.

Dessa forma, as observações realizadas até o momento permitem concluir que a divisão dos grupos determinados pela análise multidimensional além de ser explicada pelas 14 questões descrita acima pode ser explicada também pelo desempenho no instrumento. Ou seja, podemos supor que alunos que tenham melhor desempenho algébrico (supondo que o instrumento seja um instrumento adequado para avaliar competências algébricas), conseguem:

- Resolver problemas com equações optando por procedimentos algébricos menos elementares (sistemas de equações);
- Fazer operações com termos algébricos de forma adequada utilizando diferentes representações;
- Dominar elementos aritméticos mais complexos como operações com números racionais;
- Utilizar os processos de fatoração elementares (fatoração por evidência, quadrado da diferença de dois termos e trinômio quadrado perfeito) e utilizar esta ferramenta na simplificação de frações algébricas;
- Utilizar os procedimentos de produtos notáveis mais conhecidos (produto da soma pela diferença, quadrado da soma ou da diferença de dois termos)
- Compreender o conceito de inequação e determinar valores de validade para a mesma.

Os apontamentos acima corroboram as pesquisas apresentadas na seção 7. Ou seja, as maiores dificuldades dos estudantes, quando lidamos com conceitos aprendidos no decorrer do ensino fundamental, são nos conceitos algébricos aprendidos no 8º ano do ensino fundamental (equações fracionárias, simplificação de frações algébricas, fatoração e produtos notáveis). Quando é solicitada a descrição dos mesmos os resultados são ainda maiores em termos de dificuldade, o

que implica fraca competência na explicitação dos conceitos algébricos utilizados por estes estudantes ao longo do Ensino Fundamental. Além disso, os alunos demonstram melhores desempenhos nas questões referentes ao domínio das equações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho foi feito um esforço no sentido propor e avaliar conceitos e situações que julgamos necessários à aprendizagem da álgebra ao longo do Ensino Fundamental II. Tentou-se mostrar que para que seja possível avaliar este domínio do conhecimento matemático é preciso compreendê-lo através de sua complexidade, evidenciando que não existem conceitos matemáticos e, no caso desta pesquisa, algébricos, que podem ser avaliados isoladamente. Com base neste critério, buscou-se propor elementos básicos para a constituição de elementos básicos para o Campo Conceitual Algébrico de forma a amparar a construção de um instrumento de avaliação.

Para que isto fosse viável, após a proposição desses elementos, discutimos do ponto de vista de mais de uma perspectiva as situações que deveriam servir de base para a avaliação dos mesmos. Tivemos a preocupação em propor um instrumento que fosse viável em termos de dificuldade, e para tal, contamos com a participação de professores para confirmar que o mesmo não estaria aquém do que era esperado de um estudante ao final do Ensino Fundamental. Ou seja, não poderíamos propor um instrumento com questões que acreditamos ser ideal em termos de aprendizagem algébrica. Era preciso propor um instrumento de acordo com o atual sistema de ensino, que infelizmente ainda é bastante procedural e pouco conceitual. Embora esse esforço tenha sido feito, observou-se que houve uma grande variação nos padrões de julgamento quando comparados com os resultados dos desempenhos obtidos pelos estudantes. A avaliação dada pelos professores-juízes e também por nós sugeria que os estudantes não teriam dificuldade na resolução do questionário, o que não refletiu nos resultados: o desempenho médio foi próximo a 50%. É bem possível que essa diferença entre

juízo ocorra também nas salas de aula, o que leva a seguinte reflexão: será que nós, professores, estamos avaliando o que os alunos estão aprendendo (e o que estamos ensinando) ou que desejamos que eles tivessem aprendido?

Independente da resposta a esse questionamento, não se pode desconsiderar que o baixo rendimento em matemática e, conforme apresentou-se nesta pesquisa, em álgebra, é preocupante. Acreditamos que o instrumento proposto atingiu seus objetivos dentro das limitações impostas a um modelo manuscrito. Tais limitações restringiram, por exemplo, o potencial de compreender a origem de algumas dificuldades, a escolha dos procedimentos adotados e as relações entre estas, o que impossibilitou uma análise mais detalhada dos obstáculos epistemológicos e didáticos envolvidos nas situações propostas aos estudantes.

Embora não tenhamos atingidos todas as expectativas iniciais, foi possível alcançar os objetivos básicos e que poderão nortear os direcionamentos futuros para esta pesquisa: refletir sobre os principais conceitos a serem aprendidos ao longo de ensino fundamental e as principais dificuldades dos estudantes nestes conceitos.

Os resultados dos desempenhos no instrumento permitem concluir que há uma disparidade em termos de desempenho dos estudantes nos elementos sugeridos como integrantes do Campo Conceitual Algébrico. Ou seja, é evidente que há maior domínio nas situações envolvendo equações do que para as demais.

Em termos gerais os desempenhos indicaram que para os conceitos aprendidos no 8º ano (7ª série) há uma disparidade maior, visto que a maioria dos problemas envolvendo esses conceitos apresentaram percentuais de erros e brancos superiores a 40%.

Além disso, os resultados evidenciaram que os alunos com baixo rendimento algébrico no instrumento foram aqueles que apresentam dificuldades em conceitos e situações já apontados pela literatura e discutidos ao longo do trabalho: fatoração e produtos notáveis (BURIGATO, 2007; CURY E KONZEN, 2006; Cury, 2003); resolução de equações com coeficientes fracionários (TELES, 2002), inequações e também dificuldade na aplicação dos conceitos algébricos em outros domínios do conhecimento matemático, no caso, em geometria (DINDYAL, 2004).

Os resultados também apontam que uma das situações com menor índice de acerto refere-se a problema envolvendo de generalização de padrões matemáticos, um dos elementos básicos para a construção conhecimento algébrico. Além de ser uma ferramenta muito poderosa em diversos domínios do conhecimento ela é uma das estratégias didáticas que podem ser utilizadas para se iniciar a aprendizagem da álgebra. As razões da dificuldade apresentada pelos mesmos podem sugerir que haja pouca ênfase didática para estas situações ou ainda introdução tardia deste domínio do conhecimento.

Devido a estas reflexões, podemos inferir que a forma como o saber algébrico é ensinado nas escolas pode ser um dos motivos desta disparidade. Há mais de dez anos os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam a necessidade de que sejam propostas situações que fujam das atividades meramente procedurais presentes em sala de aula e que contemplem domínios como geometria para auxiliar a aprendizagem da álgebra. Embora haja esta preocupação, pelos resultados apresentados nesta pesquisa, observa-se que os desempenhos dos alunos ao final do Ensino Fundamental em questões que façam esse esforço estão muito abaixo do esperado. O que reflete a necessidade de maior inserção dos esforços acadêmicos

na realidade escolar e também a sensibilidade dos professores de matemática para os mesmos.

Algumas questões ficaram ainda pendentes e servem de incentivo para continuarmos nossos esforços no sentido de respondê-las:

- Tais dificuldades estão vinculadas a obstáculos didáticos ou epistemológicos? Quais são estes obstáculos?

- Quais estratégias didáticas poderiam ser realizadas de forma a auxiliar os estudantes a terem um melhor desempenho em álgebra?

Pesquisas em álgebra têm mostrado que existem caminhos que possam favorecer o ensino da álgebra e permitir que as dificuldades e seus respectivos obstáculos sejam transpostos. Dentre elas, destacamos que a utilização de *softwares* educativos unidos a uma perspectiva funcional para o ensino da álgebra possa ser um dos caminhos para construirmos uma aprendizagem algébrica produtiva, que vá além de uma perspectiva procedimental de ensino.

Fica a preocupação pelo fato de que ao final do Ensino Fundamental os estudantes demonstrem dominar essencialmente as situações envolvendo equações, o que possivelmente irá refletir sobre os desempenhos dos mesmos nos anos escolares que se seguem, conforme apontam Cury (2003) e Cury e Konzen (2006). Este é o reflexo de um ensino-aprendizagem bastante inferior ao desejável no 9º ano (8ª série), onde, ao que parece e que está presente nos livros didáticos, a ênfase está no saber fazer, na reprodução de inúmeros procedimentos que parecem não serem compreendidos pelos alunos.

Por fim, acreditamos que na medida em que se avançar na descrição e compreensão de tais dificuldades e dos procedimentos utilizados será possível caminhar em direção a uma proposta de engenharia didática que vise auxiliar os

estudantes do Ensino Fundamental no enfrentamento de tais dificuldades, em especial no 8º ano do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, M.M.M. **Estratégias de generalização de padrões de alunos do Ensino Fundamental do ponto de vista de seus professores**. 2008. 96 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2008.
- ARCHILIA, S. **Construção do termo geral da progressão aritmética pela observação e generalização de padrões**. 2008. 90 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Faculdade de Educação, PUC-SP, São Paulo, 2008.
- BACQUET, M. **Matemática sem dificuldades**: ou como evitar que ela seja odiada pelos seus alunos. Tradução Maria Elizabeth Schneider. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- BARROS DE OLIVEIRA, M. **Construindo significados para a linguagem algébrica com o auxílio do jogo Codificação Decodificação**. 2004. 177 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Matemática, PUC – SP, São Paulo, 2004.
- BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L.; Introduction. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. **Approaches to Algebra**: Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht: Kluwer Academic, 1996. p.3-12.
- BITTAR, M.; CHAACHOUA, H. . Integração de um *software* para a aprendizagem da álgebra: Apluxix. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Recife. **Anais...** Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004. v. único.
- BLANCO, J.L; GARROTE, M. Difficulties in Learning Inequalities in Students of the First Year of Pre-University Education in Spain. **Eurasia Journal of Mathematics Science & Technology Education**, Turkey, v.3, n3, o. 221-229, nov. 2009. Disponível em: http://www.ejmste.com/v3n3/EJMSTE_v3n3_Blanco_Garrote.pdf. Acesso em: ago. 2009.
- BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As idéias da Álgebra**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995, p. 23-37.
- BOERO, P., BAZZINI, L. and GARUTI, R. (2001). Metaphors in teaching and learning mathematics: a case study concerning inequalities. *Proceedings of the 25th PME Conference*, Utrecht University, the Netherlands, vol.2, 185-192.
- BRASIL, Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2007) **“SAEB 2005 – Primeiros resultados: Médias de desempenho do SAEB/2005 em perspectiva comparada”**. Brasília – MEC, INEP. Disponível em <http://www.inep.gov.br/basica/saeb/default.asp>. Acesso em: dez. 2009.

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Relatório do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – 2001 - Matemática. Brasília, 2001.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITO MENEZES, A.P.A. **Contrato Didático e Transposição Didática:** Inter-relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6ª série do Ensino Fundamental. 2006. Tese (Doutorado em Educação), não-publicada – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife. 2006.

BROUSSEAU, Guy. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, c. & SAIZ, I. (Orgs). **Didática da Matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001. p.48-72.

_____. **Theory of didactical situations in mathematics.** Dordrecht: Kluwer, 1997.

_____. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 7/2, p. 33-115. 1986.

BRUNER, Jerome. **Uma Nova Teoria de Aprendizagem.** Rio de Janeiro: Bloch Editores S.A, 1976.

BURIGATO, S.M.M.S. **Estudo de Dificuldades na Aprendizagem da Fatoração nos Ambientes:** Papel e Lápis e no *Software* Aplusix. Dissertação (Mestrado em Ciências Sociais) – Centro de Ciências Sociais e Humanas – PPGEDU, UFMS, Campo Grande, 2007.

CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A.D.; BRIZUELA, B. Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. In: MEETING OF THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 22., 2000, Tucson. **Anais...** Tucson: [s.n.], 2000. CD-ROM.

CARRAHER, T.N.. **Aprender pensando.** Petrópolis: Vozes, 1989.

CAVALCANTI, J. D. B. **Concepções de alunos do 3º ano do ensino médio acerca dos significados do símbolo “=” em contextos aritméticos e algébricos.** 2007. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2007.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica:** del saber sabio al saber enseñado. Madrid, Aique Grupo Editor, 1998.

_____. **La transposition didactique.** Grenoble : La Pensée Sauvage, 1985.

CORTES, A.; VERGNAUD, G.; KAVAFIAN, N. From arithmetic to algebra: negotiating a jump in the learning process. In: **Proceedings Of The International Conference of the Psychology of Mathematics Education**, v.2, 14., 1990. México.

CURY, H. N.; KONZEN, B. Análise de resoluções de questões em matemática: as etapas do processo. **Educação Matemática em Revista-RS**, Canoas, v. 7, n. 7, p. 33-41, 2006.

_____. Análise de Erros em Cálculo diferencial e Integral: Resultados de Investigações em Cursos de Engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA SÃO JOSÉ DO RIO PRETO, 31, 2003, São Paulo. **Anais...** São Paulo, 2003.

_____. Análise e classificação de erros cometidos por alunos de Cálculo Diferencial e Integral A. In: REUNIÃO ANUAL DA SBPC, 42., 1990, Porto Alegre. **Anais...** São Paulo: SBPC, 1995. v. 2. p. 124-125.

CRUZ, Eliana S. **A noção de variável em livros didáticos de ensino fundamental**: um estudo sob a ótica da organização praxeológica. 2005. 106 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Matemática, PUC, São Paulo, 2005.

DA ROCHA FALCÃO, J.T. . Na vida dez, na escola dez: breve discussão crítica acerca de pressupostos psicológicos e seus desdobramentos sobre a avaliação em matemática escolar. *Vértices* (Campos dos Goitacazes), v. 10, p. 117-139, 2009.

_____. Learning environment for mathematics in school: towards a research agenda in psychology of mathematics education. In: PROCEEDINGS OF CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION – PME, 23.,2001, Utrecht (The Netherlands). **Anais...** Utrecht: Universidade de Utrecht, 2001, v. 1, p. 65-71.

_____. Elementos para uma abordagem psicológica do desenvolvimento de conceitos científicos e matemáticos. In: DIAS, M.G.; SPINILLO, A.G. (Org.). **Psicologia cognitiva**. 2. ed. Recife: Editora Universitária UFPE, 2005. p. 137-162.

_____.O gato e o número. In: GROSSI, E.P. (Org.) **Por que ainda há quem não aprende?** Petrópolis: Vozes, 2003a. p. 137-148.

_____. **Psicologia da educação matemática**: uma introdução. Belo Horizonte, Editora Autêntica, 2003b.

_____. **Álgebra só se ensina lá pela 7ª série...** Boletim Salto para o Futuro. MEC Secretaria de Educação a Distância. TV Escola, 2003c, p.8-17.

_____. Clinical analysis of difficulties in algebraic problem solving among Brazilian students: principal aspects and didactic issues. In: PROCEEDINGS OF INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 20., 1996, Valencia. **Anais...** Valencia: Universidade de Valencia, 1996, v.2, p.257-264.

_____. Representação do problema, escrita de fórmulas e tutoria na passagem da aritmética à álgebra. *Eventos*: Brasília, v. 4, n. 2, p. 1-28, 1994.

_____. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: SCHIELMANN, A.D.; CARRAHER, D.W.; SPINILLO, A.; MEIRA, L.; DA ROCHA FALCÃO, J.T. (Orgs). **Estudos em psicologia da educação matemática**. Recife: Editora Universitária UFPE, 1993. p. 85-107.

DINDYAL, J. Algebraic thinking in geometry at high school level: Students' use of variables and unknowns. Em I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.), **Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia** (Vol. 1, p. 183-190), Townsville, Australia, 27-30, 2004.

EVES, H. **Introdução à História de Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FILLOY, E. ; ROJANO, T. **Solving equations**: transition from arithmetic to álgebra. For the Learning of Mathematics, 1989, 9(2), 19-25.

FREITAS, J.L.M.. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S.A.(Org). **Educação Matemática**: uma nova introdução. MACHADO, S. (Org.). 3ª ed. São Paulo: PUC, 2008. p.77-111.

GRAY, S. , LOUD, B. ;SOKOLOWSKI, C.. Undergraduates' Errors in Using and Interpreting Algebraic Variables: A Comparative Study. In: ANNUAL MEETING OF PME-NA, 7., 2005. **Anais...** Virginia Tech. Disponível em: <http://www.allacademic.com/meta/p24628_index.html>. Acesso em: 10 de out. 2008.

HENLE, M. Systems as reconceptualizations: the work of Edna Heidebreder. In: KIMBLE, G.A., WERTHEIMER, M., WHITE, C.L. **Portraits of pioneers in psychology**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1991.p. 293-305.

HOUAISS, Antônio. *Minidicionário Houaiss da Língua Portuguesa*. Elaborado no Instituto Antônio Houaiss de Lexicografia e Banco de Dados da Língua Portuguesa S/C Ltda. – 3. Ed. Ver. e aum. – Rio de Janeiro: Objetiva, 2008.

<http://www.tec-quest.com/aplusix.htm>. Acesso em: set. 2009.

http://www.recreomath.qc.ca/dict_capitaine_age.htm. Acesso em: ago. 2009.

IGLIORI, S.B.C. A noção de Obstáculo Epistemológico e a Educação Matemática. In MACHADO, S. (Org.). 3.ed. **Educação Matemática**: uma Introdução. São Paulo: PUC, 2008. p. 113-142.

LOURO, Donizetti, F. Erros e obstáculos epistemológicos na aprendizagem. Palestra. Instituto de Matemática Arte e Tecnologia – São Paulo, 2007. Disponível em: <<http://www.ima.mat.br/pdf/obstaculos.pdf> > Acesso em: 25 de out.2008.

KIERAN, Carolyn. Research on the Learning and Teaching of Algebra. In GUTIÉRREZ, A. & BOERO, P. (Eds.). **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education**: Past, Present and Future. Rotterdam: Sense Publishers, 2006. p. 11-48.

_____. The equation-solving errors of novice and intermediate algebra students. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 9, 1985. Noordwijkerhout. **Anais...** Noordwijkerhout, The Netherlands: State University of Utrecht, v.1. p. 141-146

LATOUR, B. **Ciência em ação**. São Paulo: Editora da UNESP, 2000.

LINCHEVSKI, L.. Operating on the unknowns: what does it really mean? In: PROCEEDINGS OF THE 25TH CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. Utrecht. **Resumos...** Utrecht: Utrecht University, 2001.v. 1, 3p.

LINCHEVSKI, L; HERSCOVICS, N. Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. **Educational Studies in Mathematics**, v.1, n. 30, p. 39-65, 1996.

LINS, R. C.; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. 7 ed. Campinas, SP: Papirus, 2006.

LINS, R. C.; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

MEIRA, L. Calcule! (*software* sem registro de patente), 2000.

MOYSES, L. Aplicações de Vygotsky à educação matemática. Campinas: Papirus, 1997.

NICOLINI, C. H.. Projetos de aprendizagem e educar pela pesquisa: praticando a cidadania em sala de aula de matemática. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2006, Caxias do Sul. **Anais...** Caxias do Sul: Universidade de Caxias do Sul, 2006, p.8. Disponível em: < <http://ccet.ucs.br/eventos/outros/egem/cientificos/cc73.pdf> >. Acesso em: 10 de out. de 2008.

NORTON, S.; IRVIN, J. A Concrete Approach to Teaching Symbolic Algebra. In PROCEEDINGS OF THE 30TH ANNUAL CONFERENCE OF THE MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH GROUP OF AUSTRALASIA, 30., 2007, Hobart. **Anais...** Sydney: MERGA, 2007. p.551- 560. Disponível em < http://www98.griffith.edu.au/dspace/bitstream/10072/16033/1/45370_1.pdf > . Acesso em: 20 de out. 2008.

NOTARI, Alexandre M. **Simplificação de Frações Aritméticas e Algébricas**: Um Diagnóstico Comparativo dos Procedimentos. 2002. 119 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós Graduated em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2002.

NUNES, Terezina. Systems of signs and mathematical reasoning. . In NUNES, T. & BRYANT, P. (Eds). **Learning and Teaching Mathematics**: An International Perspective. Hove (East Sussex): Psychology Press, 1997. p. 29-44.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (5º a 8º série): Matemática - Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília: MEC/SEF, 1998.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática**: Uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PIAGET, J.; GRECO, P. **Aprendizagem e conhecimento**. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.

PIRIE, S.; MARTIN, L. **One approach to the teaching of linear equations, Educational Studies in Mathematics** 34. 1997, 159–181.

SACKUR, C. **Problems related to the use of graphs in solving inequalities, Proc. of PME28**, Bergen, Norway, I, 2004, p. 148-152.

SAMORA, G. ; TANCREDI, R. M. S. P. Conceitos algébricos iniciais: um estudo com alunos de um curso pré-vestibular. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO, 7., 2004, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM-SP, 2004.

SCHLIEMANN, A. L. et al. Algebra in elementary school. In: PROCEEDINGS OF THE 2003 JOINT MEETING OF PME AND PME-NA, 4, 2003, Honolulu. **Anais...** Honolulu: University of Hawai'i, 2003. p. 127-134.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; BRIZUELA, B. M. **Bringing out the algebraic character of arithmetic**: From children's ideas to classroom practice. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2007.

SCHOEN, Harold L. A resolução de problemas em álgebra. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

SINGH, S. **O último teorema de Fermat**. Rio de Janeiro: Editora Record, 1997.

SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. O diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática. In: MEIRA; SPINILLO, A. G (Orgs.). **Psicologia Cognitiva**: Cultura, desenvolvimento e aprendizagem. 1 ed. Recife: Editora Universitária da UFPE, 2006, v. 1, p. 46-80.

SPSS Statistical Package for Social Sciences. Version 15.0 for Windows. SPSS Inc., 2006. CD-ROM.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Taking the algebraic thinking out of algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 11(1), 25-38.

STATSOFT. Disponível em: <http://www.statsoft.com/textbook/stcluan.html>. Acesso em: nov. 2009.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo. A relação entre aritmética e álgebra na matemática escolar: um estudo sobre a influência da compreensão das propriedades da igualdade e do conceito de operações inversas com números racionais, na

resolução de equações polinomiais do 1º grau. 202f. Dissertação (Mestrado em Educação) — Centro de Educação, UFPE, Recife, 2002.

USISKIN, Z.. O Que é Álgebra Da Escola Média? In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: Um tema transversal no currículo. **Revista de associação dos professores de matemática**, n. 85, nov.-dez., 2005.

VERGNAUD, G.. A gênese dos campos conceituais. In: GROSSI, E. P. **Por que ainda há quem não aprende?** Petrópolis: Vozes, 2003. p. 21-60.

_____. **Algebra, additive and multiplicative structures**. Is there any coherence at the early secondary level? Paris: CNRS/Université de Paris 8, 1998 (material não-publicado).

_____. The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (Eds). **Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective**. Hove (East Sussex): Psychology Press, 1997. p. 5-28.

_____. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEMPA**, Porto Alegre, Nº 4: 9-19, 1996.

_____. Multiplicative conceptual field: what and why? In GUERSHON, H.; CONFREY, J. (1994). (Eds.) **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994. p. 41-59.

_____. **Le sens de l'Algèbre** (Comunicação não publicada). Paris: Université Paris-V, 1991.

_____. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. p.10-23, p.133-170, 1990.

_____. Multiplicative structures. In: HIEBERT, H.; BEHR, M.(Eds.) **Research Agenda in Mathematics Education: Number concepts and operations in the Middle Grades**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1988. p 141-161.

_____. **Conhecimento e atividade operatória**. Texto de conferência. Porto Alegre: GEEMPA, 1986.

_____. Multiplicative structures. In LESH, R. e LANDAU, M. (Eds.) **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press Inc. p. 127-174, 1983.

_____. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. (Eds.) *Addition and subtraction. A cognitive perspective*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. p. 39-59, 1982.

VERIKIOS, P.; FARMAKI, V. **Introducing algebraic thinking to 13 year-old students:** The case of the inequality. Proc. of PME 30, Prague, Czech Republic, V,2006, 321-328.

WARREN, E.; COOPER, T. J. The unknown that does not have to be known. In: PROCEEDINGS OF THE 25TH CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25, 2001. Utrecht. **Anais...** Utrecht: Universidade de Utrecht, 2001. p. 156-159.

WERTHEIMER, M. *Productive thinking*. New York: Harper & Row, 1959.

ANEXOS

Apêndice A - INSTRUMENTO ALGÉBRICO

Abaixo encontramos algumas palavras e símbolos que você utiliza em álgebra. Como você descreveria cada um dos itens abaixo?

D1 - Incógnita: _____

D2 - Variável: _____

D3 - = : _____

D4 - > : _____

D5 - < : _____

D6 - Equação: _____

D7 - Expressão Algébrica: _____

D8 - Inequação: _____

D9 - Monômio: _____

D10 - Polinômio: _____

D11 - Fração: _____

D12 - Fatoração: _____

D13 - Produtos Notáveis: _____

Q1. A soma das idades dos irmãos Paulo e Bruno é 40. A idade de Bruno é igual à idade de Paulo mais 18. Qual a idade de cada um dos irmãos?

Q2. Qual a área e o perímetro da figura abaixo?



Q 3. A mãe de Eduarda levou seus três filhos a uma sorveteria e comprou somente 1 sorvete para cada filho. Para pagar os sorvetes ela utilizou uma nota de R\$10,00 e obteve R\$4 de troco. Representando o preço de cada sorvete pela letra “y”, como você poderia representar esse problema, em linguagem da matemática? Qual o preço de cada sorvete?

Q4. Para comprar um CD que custava R\$20,00 os irmãos Jonas e Sérgio juntaram todo o dinheiro que tinham. Sabendo que Sérgio tinha $\frac{1}{4}$ da quantia que seu irmão possuía, como é possível representar este problema em linguagem matemática? Quanto cada irmão possuía em dinheiro?

Q5. Dada a equação $x + 2 = y + 4$, que situação poderia ser criada de forma que representasse essa equação?

Q6. Qual valor torna a igualdade verdadeira?

$$6(x + 4) - 8 = 5x + 3$$

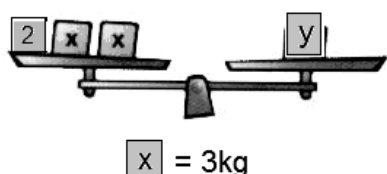
Q7. Equações equivalentes são equações que se diferenciam por terem passado por uma determinada transformação, mas cuja solução é a mesma. Assim, podemos dizer que $x + 2y = y$ é equivalente à $x + 2y + 30 = y + 30$. Com base nesta informação e em seus conhecimentos sobre álgebra, indique uma equação que seja equivalente a $2m + 4 = 18m + 10$.

Q8. Que ~~valores~~ valor não podemos atribuir a “m” na fração $\frac{2}{m-1}$? Por quê?

Q9. Supondo que a balança está equilibrada, como podemos representar essa situação em linguagem matemática?



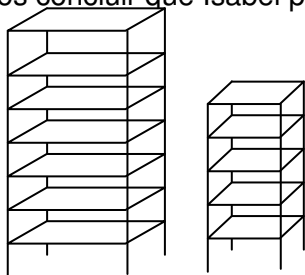
Q10. Na situação abaixo, se a balança está equilibrada, qual é o valor do peso y?



Q11 Resolva as equações abaixo:

a) $2a = 12 + 8$	c) $3b + 17 = 2b - 3$
b) $10y = \frac{2}{4} + \frac{1}{2}$	d) $x^2 + 5x + 6 = 0$

Q 12- Para organizar seus livros, Isabel comprou duas estantes de altura e largura diferentes. Na estante da esquerda (conforme ilustração abaixo) existem 6 prateleiras para colocar livros enquanto na estante da direita existem 4 prateleiras onde é possível guardar livros. Se em cada prateleira da maior cabem “x” livros e na menor cabem “y” livros, então podemos concluir que Isabel poderá acomodar, ao todo, quantos livros?

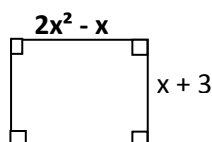


Q13- Ao calcular o perímetro do retângulo abaixo, Marcos resolveu da seguinte forma:

Perímetro = soma das medidas de todos os lados

$$P = 2x^2 - x + x + 3 + 2x^2 - x + x + 3$$

$$P = 4x^4 + 9$$



Em sua opinião, Marcos está correto? Por que?

Q14- Qual(is) são os valores de “x” que satisfazem a equação $2x^2 - 32 = 0$?

Q15- Qual expressão representa a medida da área de um retângulo cujos lados são representados por “a+2” e “a+3”?

Q16- Você sabe que expressões algébricas podem ser escritas de mais de uma forma, desde que tais formas sejam equivalentes entre elas. Um caminho para conseguir escrever uma expressão equivalente a outra é a fatoração. Em relação aos três polinômios abaixo você poderia pensar em caminhos de fatoração?

a) $3x^2 + 12x =$

b) $x^2 - 36 =$

c) $x^2 + 4x + 4 =$

Q17- Simplificando a fração abaixo, qual expressão você obtém?

$$\frac{x^2 - 9}{x(x + 3)}$$

Q18- Uma pessoa caminha em uma pista de corrida e vai observando as marcações ao longo da mesma. Ela percebe que começou a sua caminhada na marcação 500m. Após 1 minuto ela observa a marcação novamente e percebe que está na posição 550m. Com base nestas informações, complete a tabela:

Tempo	Distância Percorrida	Marcação na pista
2 minutos		600 m
	700 m	
20 minutos		

a) E se a pessoa caminhasse por “x” minutos, quanto teria percorrido?

b) Qual seria a marcação na pista?

Q19- Resolva os produtos abaixo:

a) $(x+3)(x-3) =$

b) $(x+4)^2 =$

c) $(x-5)^2 =$

Q20- Um retângulo tem sua área representada pela expressão $a^2 - 16$. Se uma das medidas dos lados é indicada por $a+4$ qual expressão representa a medida outro lado?

Q21- Com base na figura abaixo:



a) Imagine uma situação que possa ter sido ilustrada pela figura abaixo, e descreva essa situação por escrito, para que outro aluno a entenda.

b) Depois de ter escrito a explicação, tente representar o que você escreveu por uma expressão matemática.

Q22- Na inequação $x + 3 < y$, complete a tabela abaixo indicando os valores que x e y podem assumir para que a desigualdade permaneça verdadeira:

X	Y

Q23- Podemos utilizar a álgebra para determinar leis de formação para seqüências numéricas. Por exemplo, a seqüência (0, 2, 4, 6, 8,...) pode ser representada por $2n$, onde n pertence ao conjunto dos Naturais ($\mathbb{N}$). Ou seja, ao substituir n por 0 obtém-se o primeiro elemento da seqüência, ao substituir n por 1 se obtém o segundo termo da seqüência e assim por diante. Veja mais alguns exemplos:

(2, 4, 6, 8,...) $\rightarrow$ Lei de formação: $2n + 2, n \in \mathbb{N}$

(-5, 5, 15, 25,...) $\rightarrow$ Lei de formação: $10n - 5, n \in \mathbb{N}$

Determine as leis de formação para as seguintes seqüências:

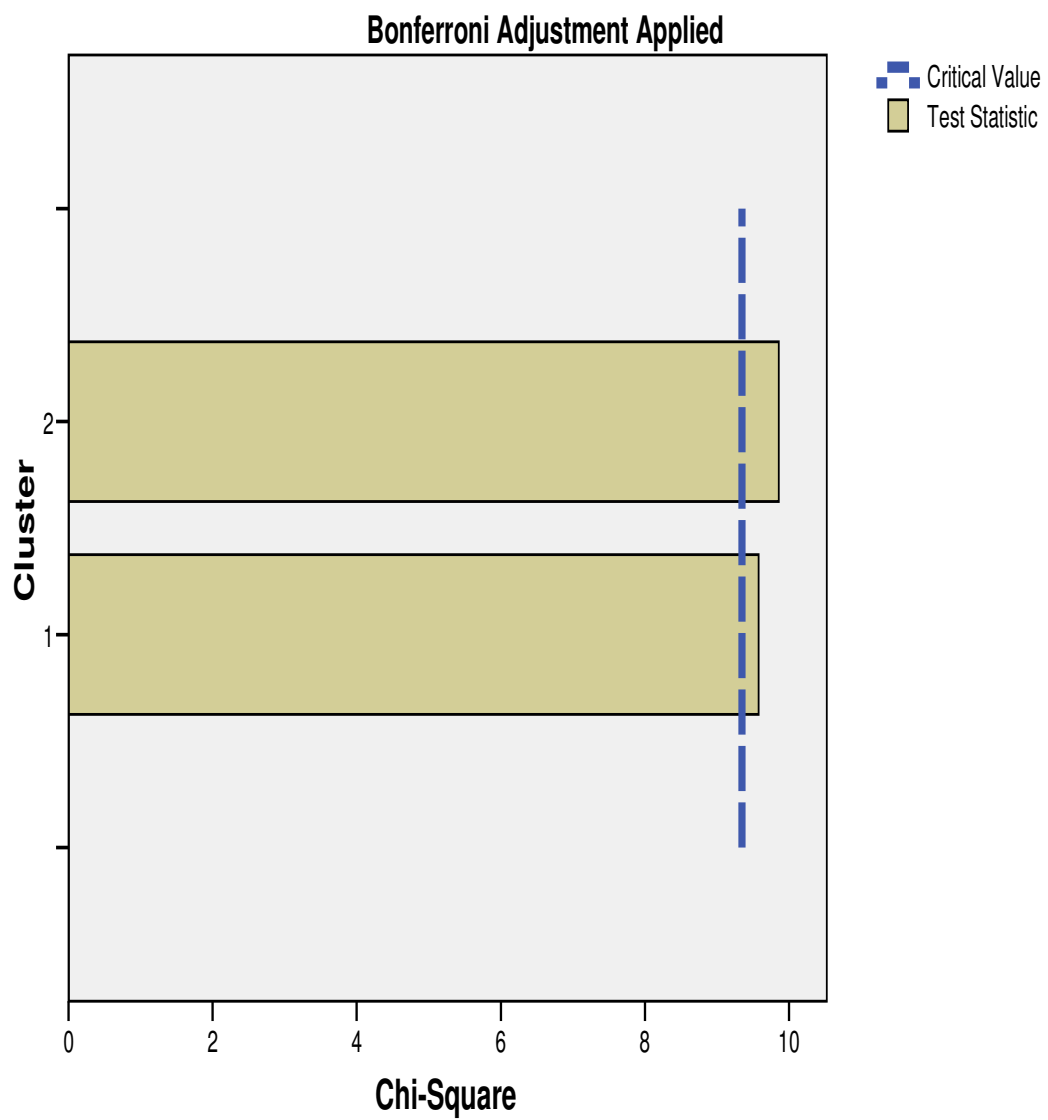
a) (0, 5, 10, 15, 20, 25, 30,...) $\rightarrow$ Lei de formação:

b) (1, 3, 5, 7,...) $\rightarrow$ Lei de formação:

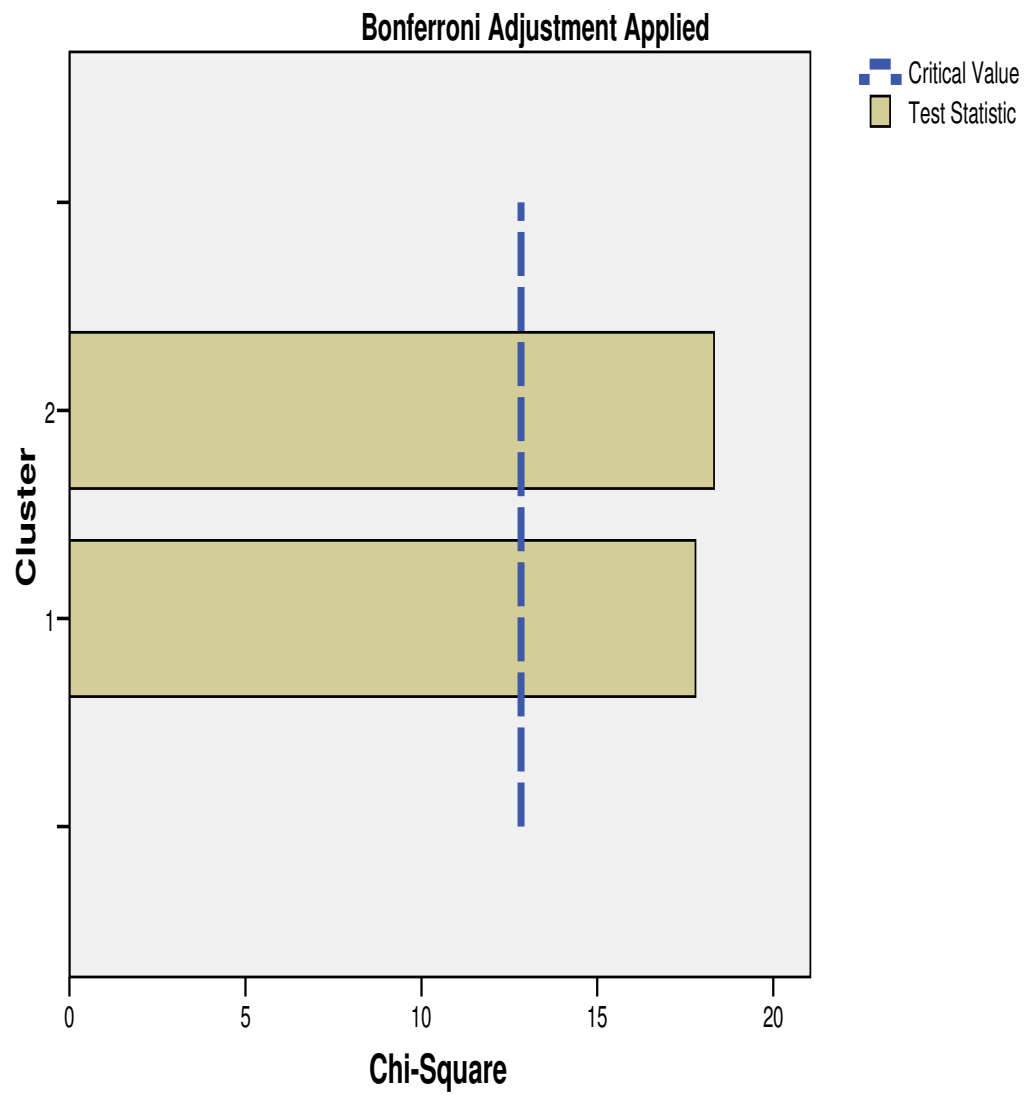
Q24- Qual é o grau do polinômio $x^2 + 2x - 10$? Justifique sua resposta.

**ANEXO A - Testes de significância obtidos pela análise multidimensional
TwoStepCluster**

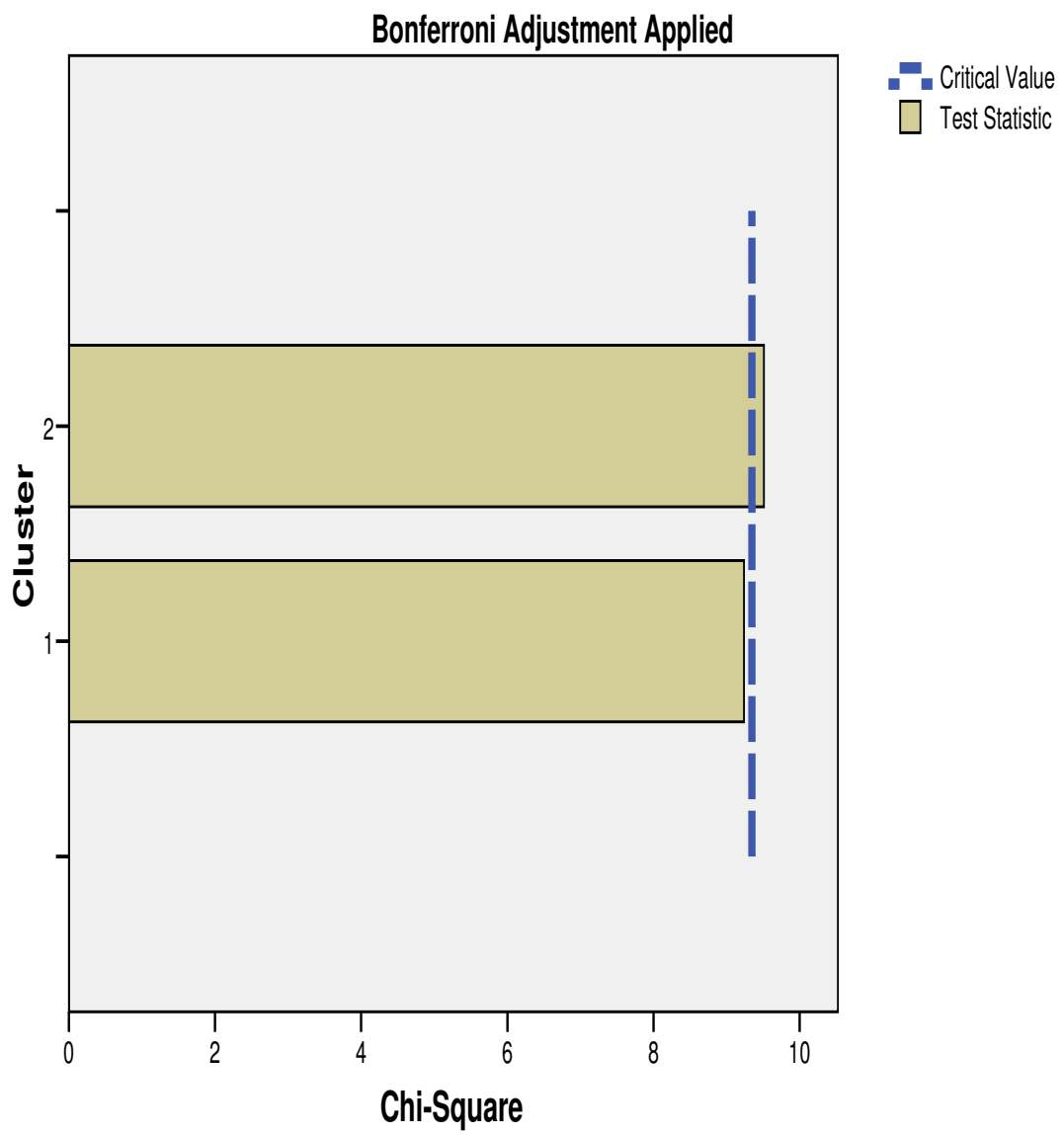
Q1



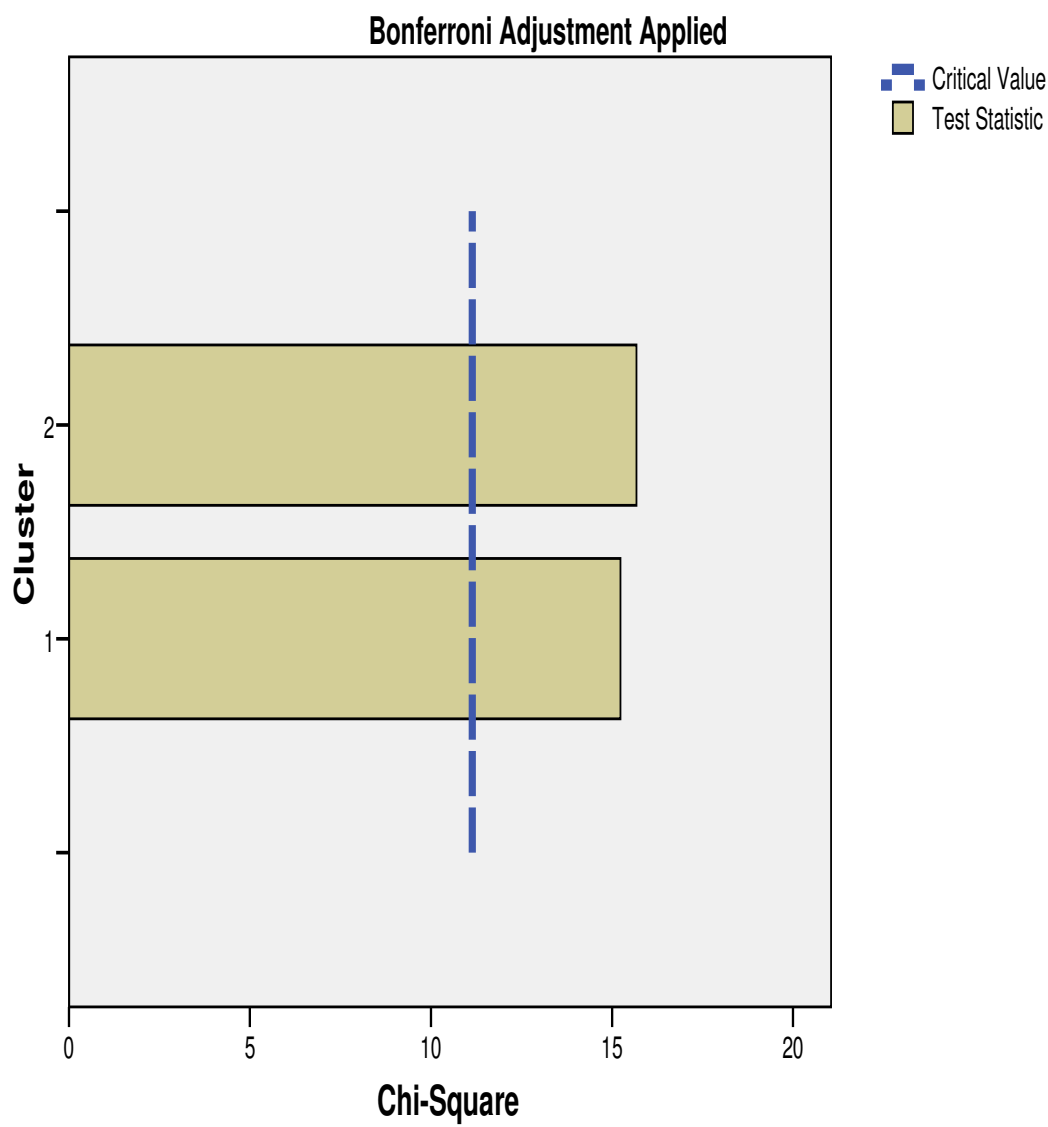
Q1_tr



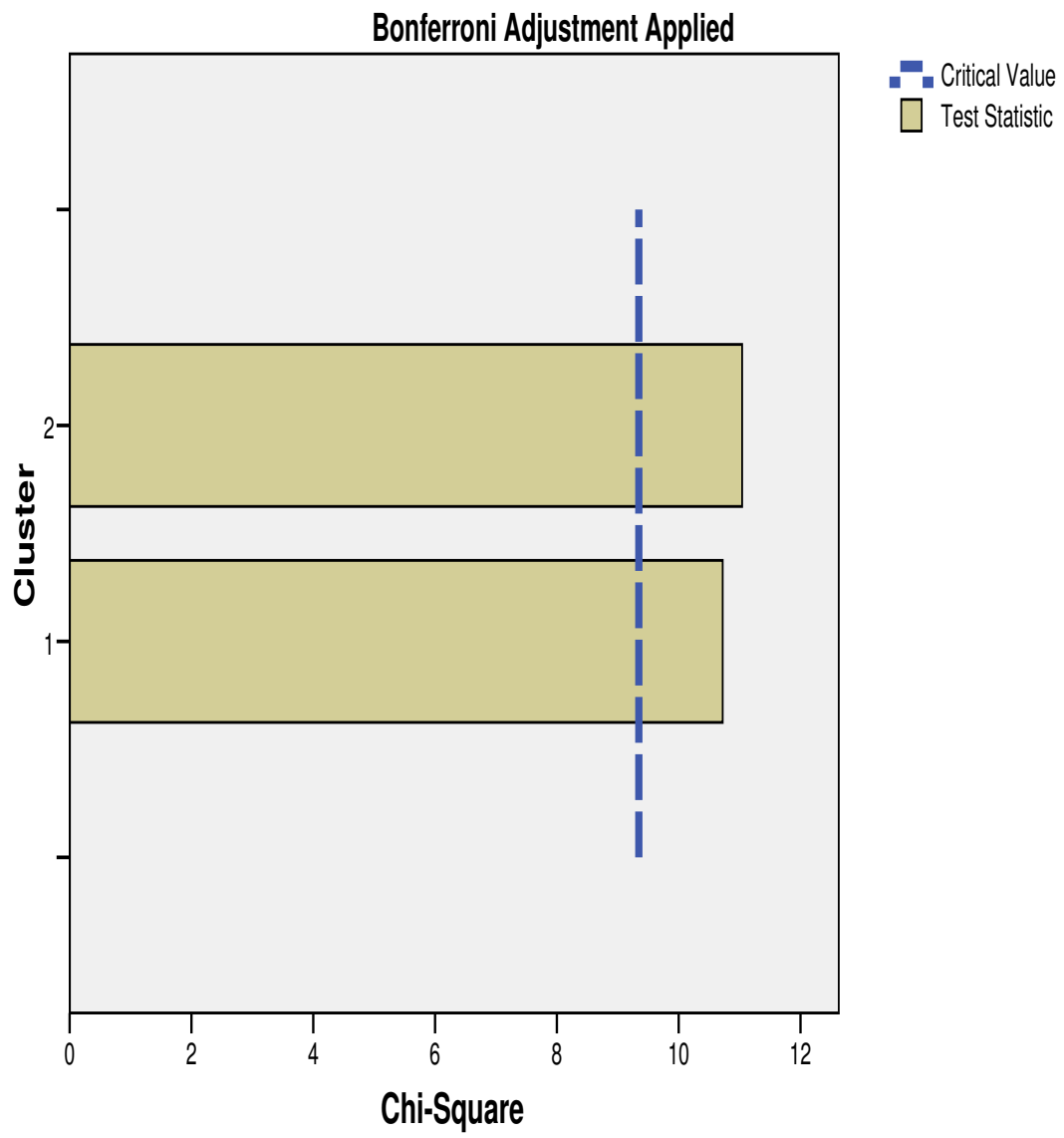
Q2



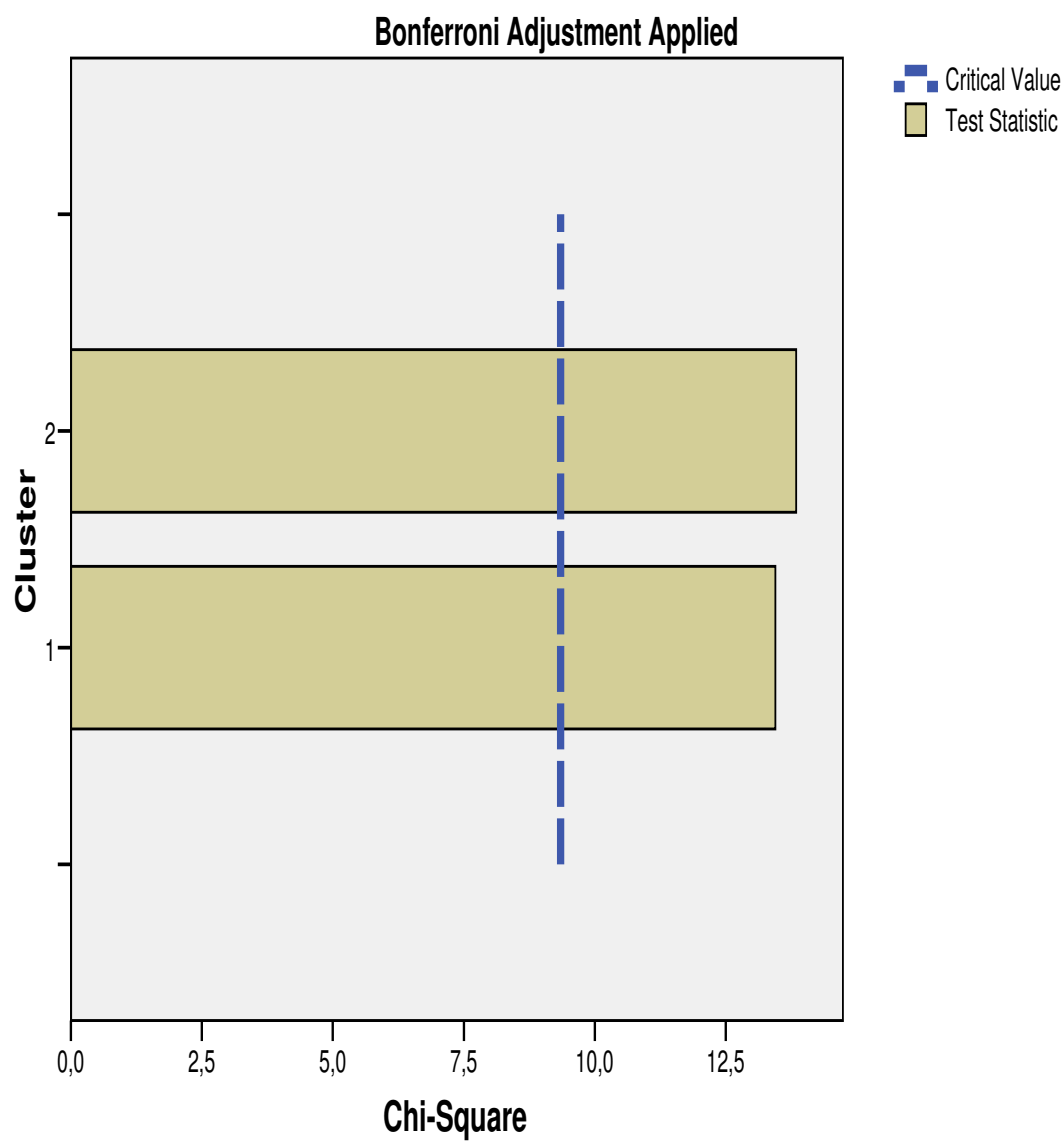
Q2_tr_perimetro



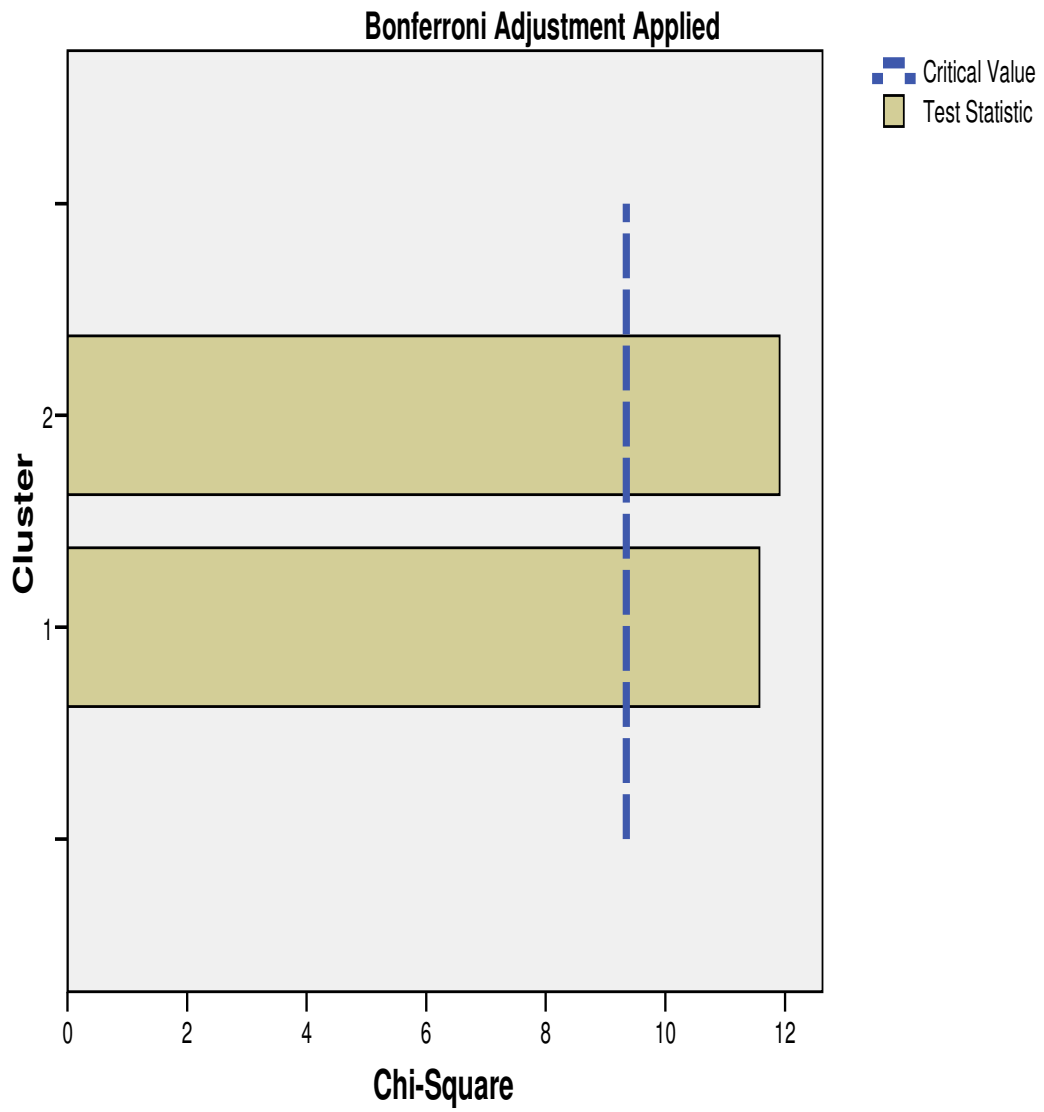
Q11B



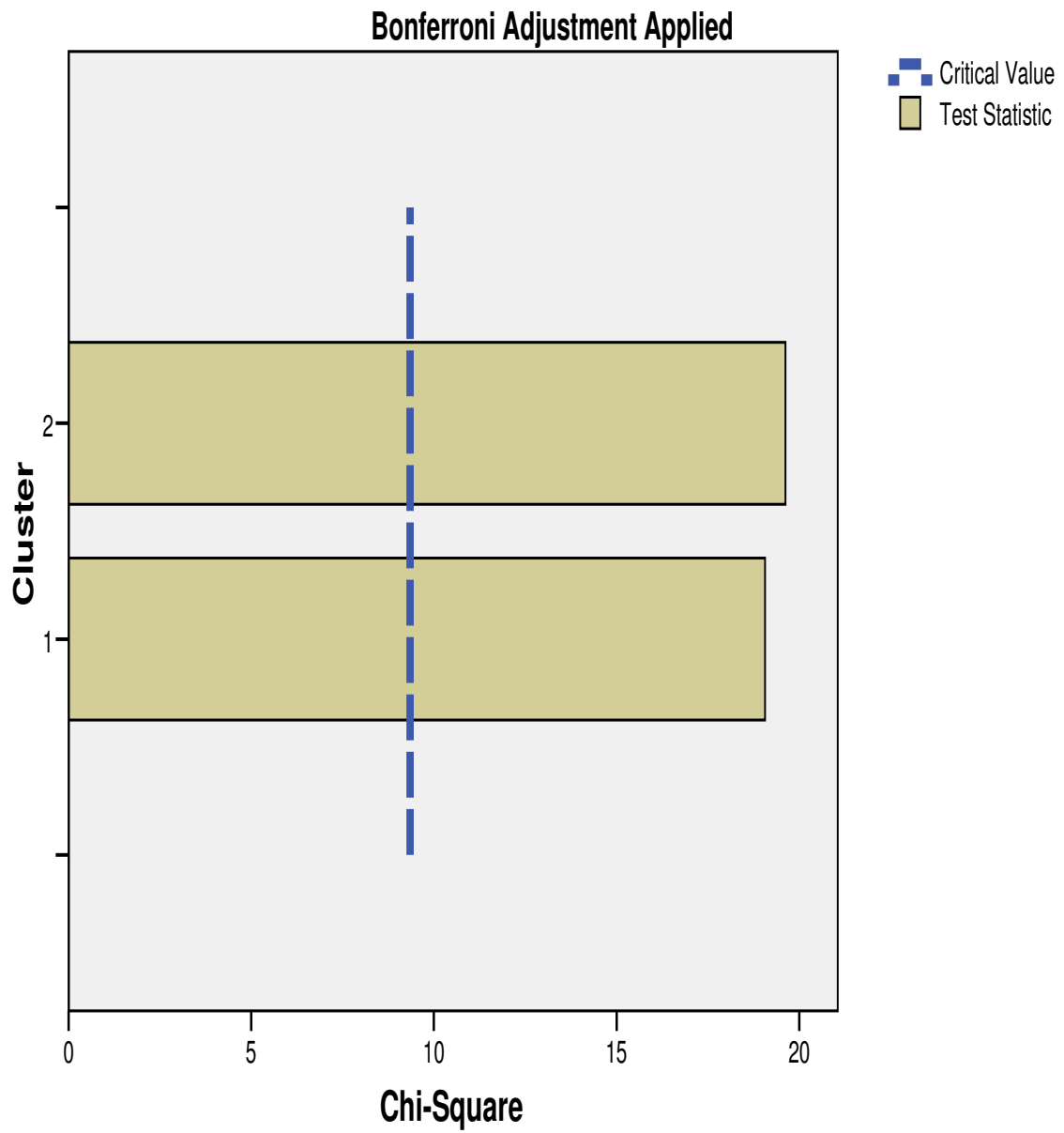
Q15



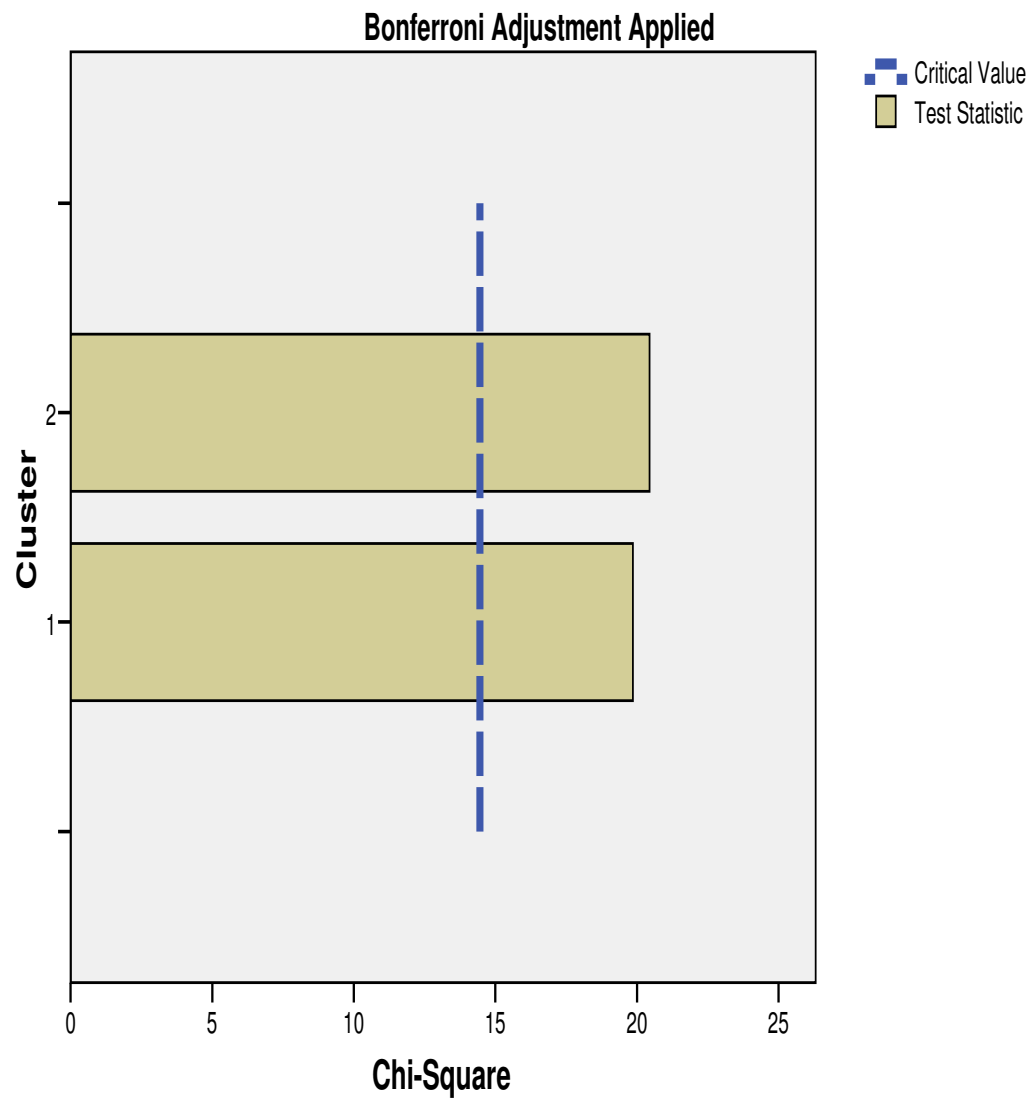
Q16A



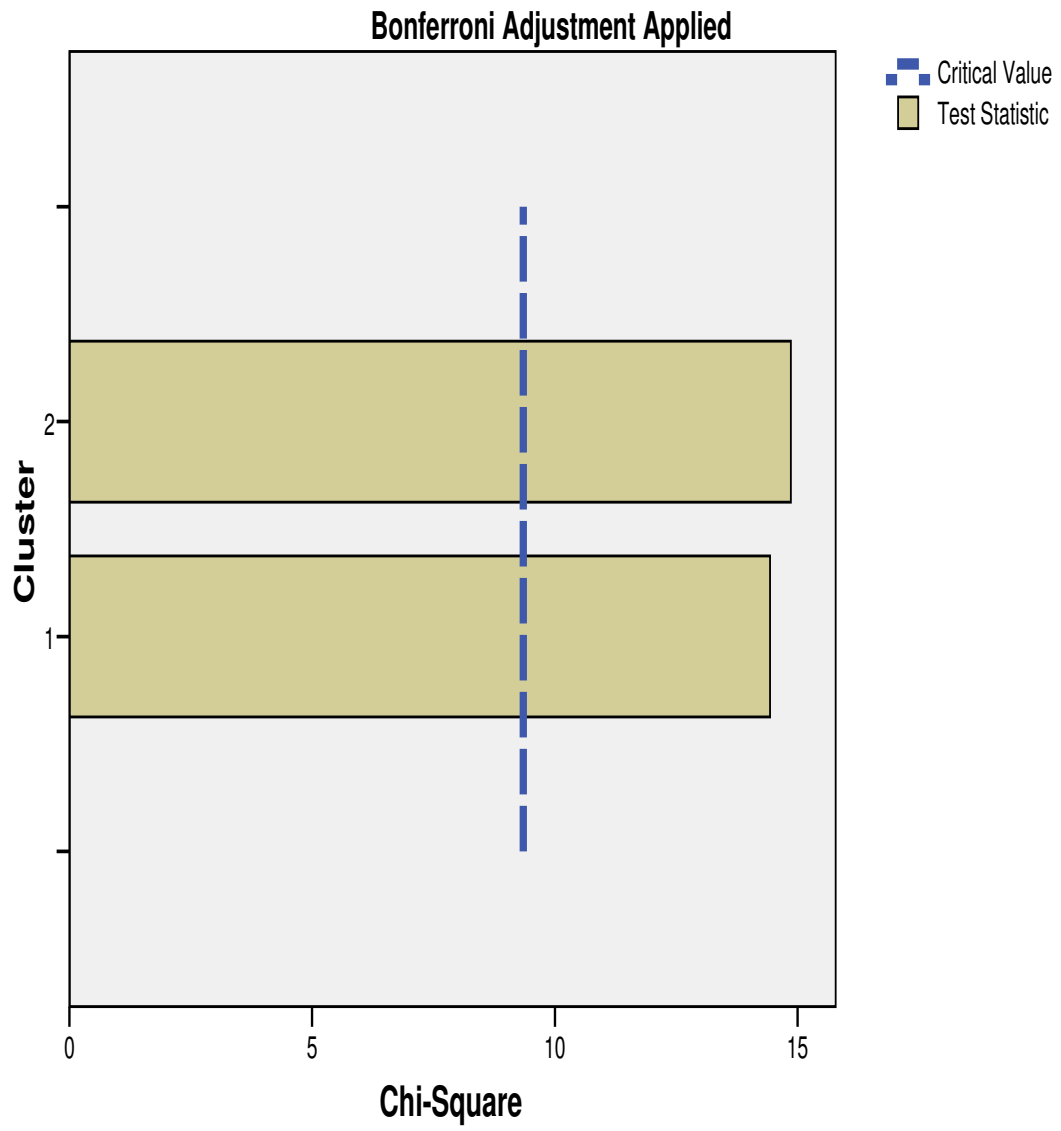
Q16B



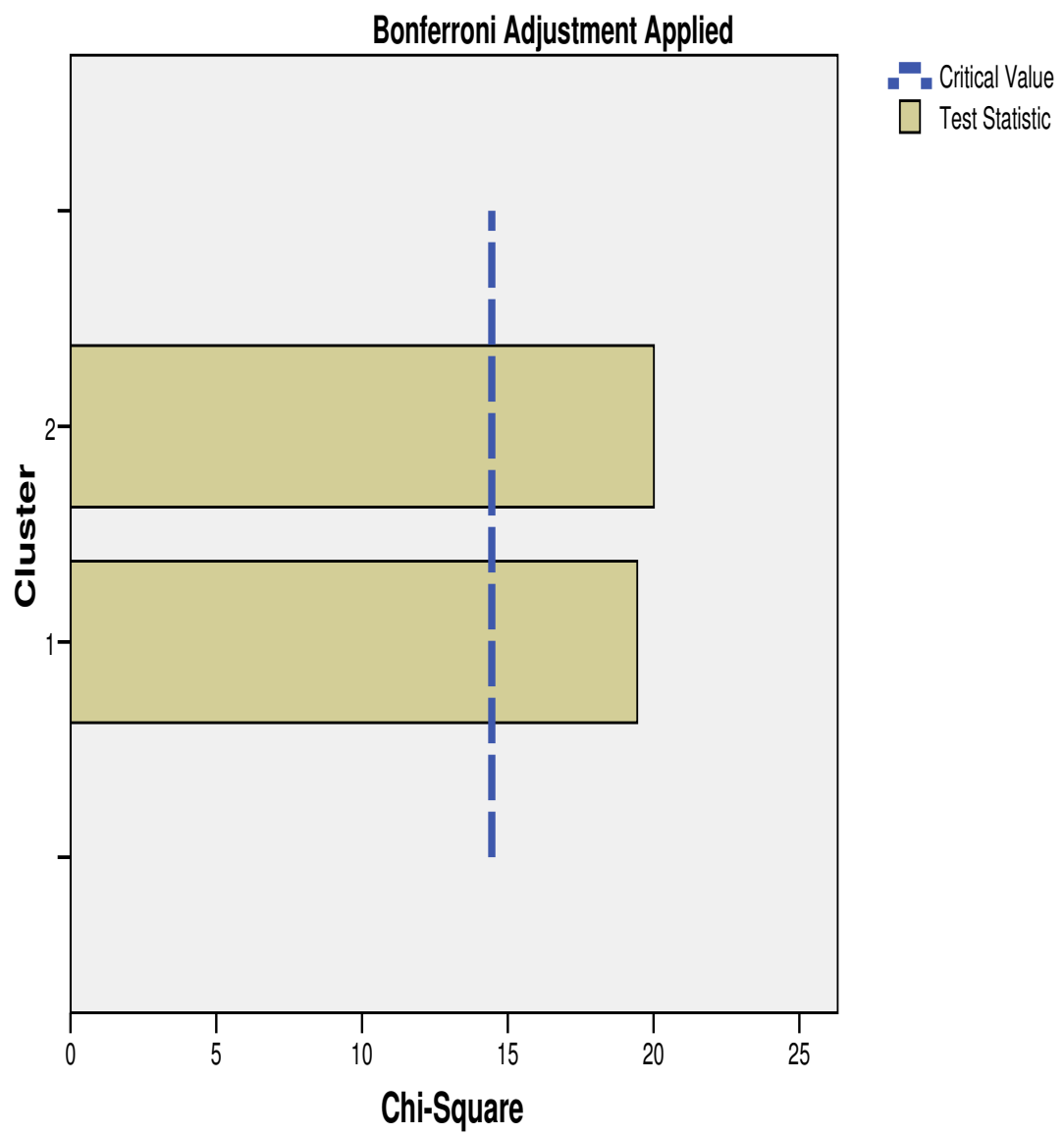
Q16B_tr



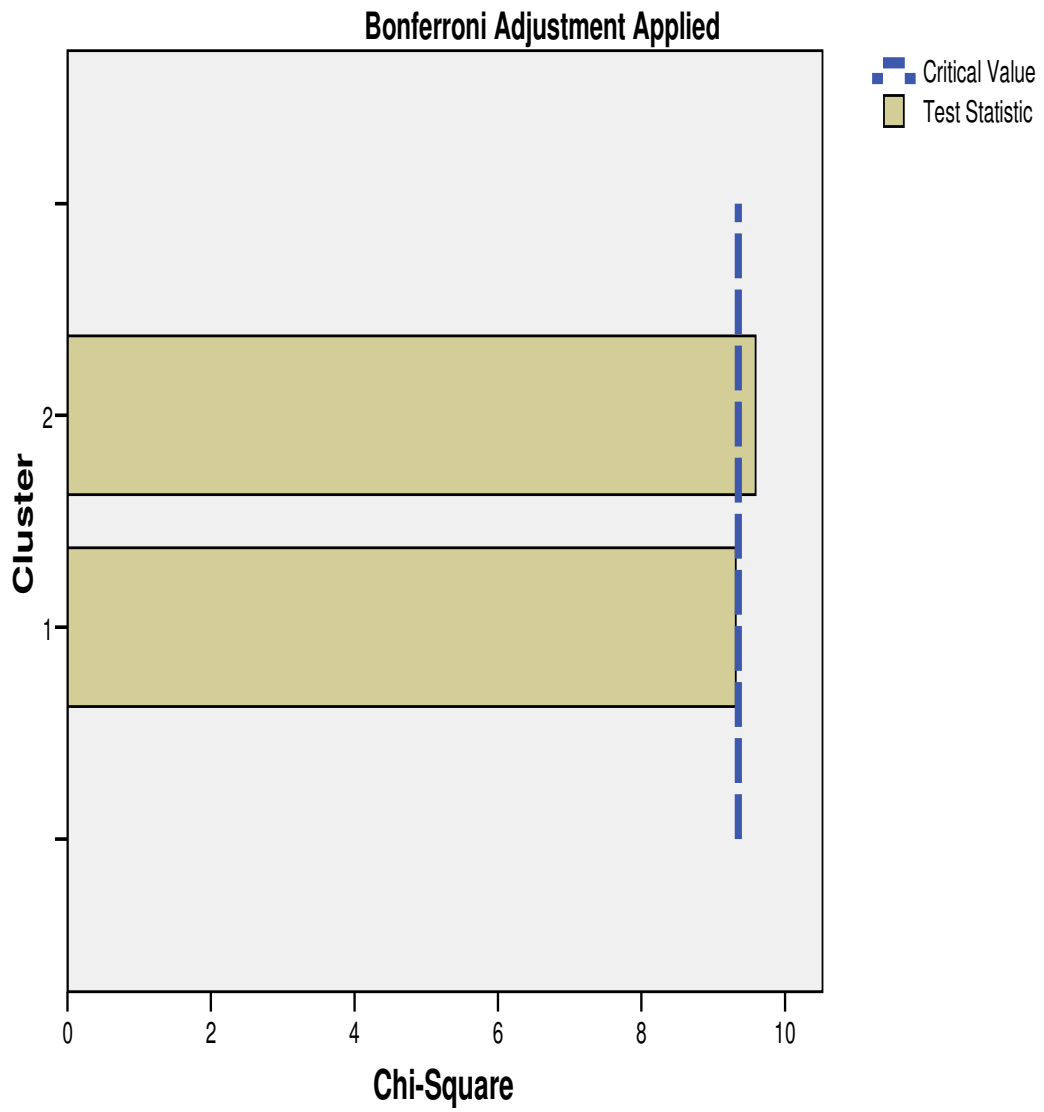
Q16C



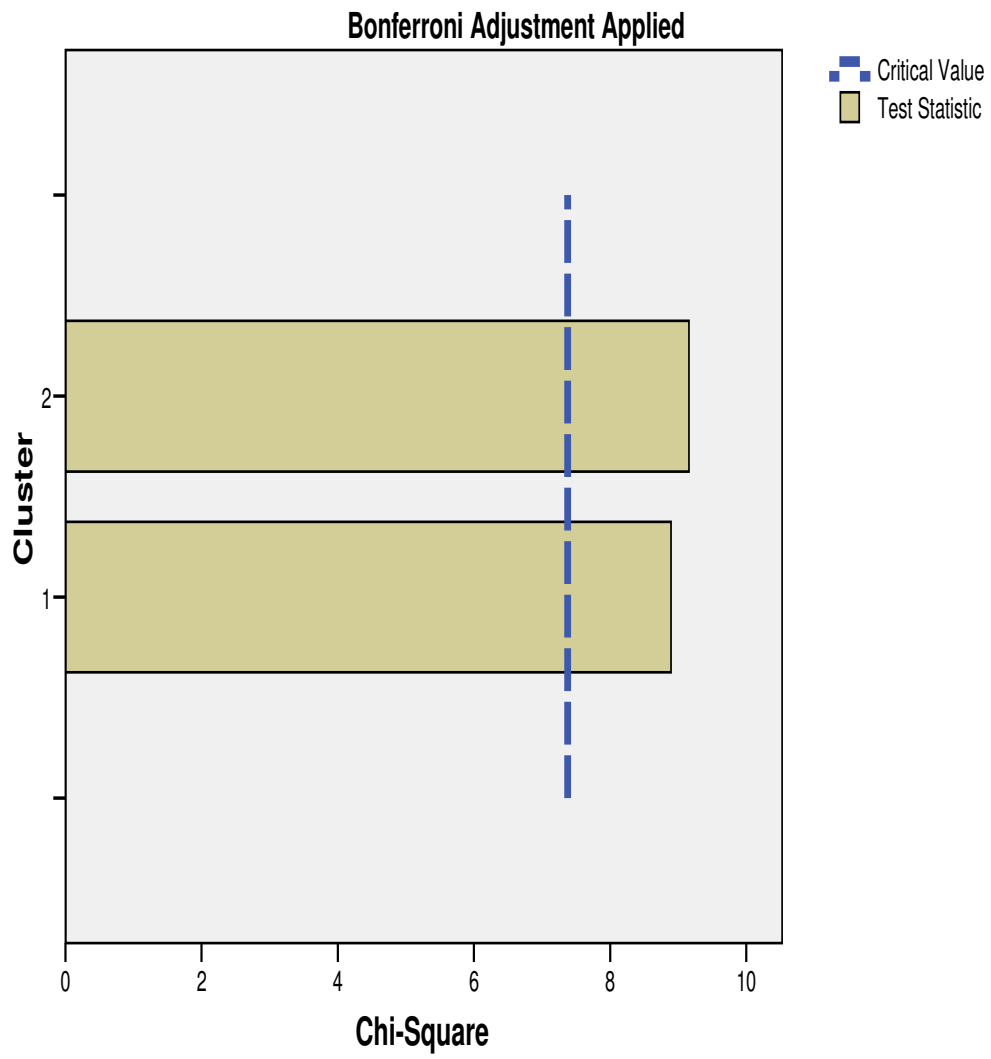
Q17_tr



Q19C



Q22



Q20

