UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
DEPARTAMENTO DE PSICOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA COGNITIVA

Análise do uso de uma sequência didática com objetos de aprendizagem digitais no desenvolvimento de conceitos algébricos

Dissertação de Mestrado

Laécio Nobre de Macêdo

Orientadora: Profª. Drª. Síntria Labres Lautert

Co-orientador: Prof. Dr. José Aires de Castro Filho

Área de Concentração: Psicologia Cognitiva
Linha de Pesquisa: Educação Matemática e Científica

Recife
2009

Laécio Nobre de Macêdo

Análise o uso de uma sequência didática com objetos de aprendizagem digitais no desenvolvimento de conceitos algébricos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Psicologia Cognitiva.
Linha de Pesquisa: Educação Matemática e Científica.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Síntria Labres Lautert
Co-orientador: Prof. Dr. José Aires de Castro Filho.

Recife
2009

Macêdo, Laécio Nobre de
Análise do uso de uma sequência didática com objetos de aprendizagem digitais no desenvolvimento de conceitos algébricos / Laécio Nobre de Macêdo. – Recife: O Autor, 2009.
171 folhas : il., fig., tab., quadros.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CFCH. Psicologia, 2009.

Inclui: bibliografia e anexos.

1. Psicologia Cognitiva. 2. Álgebra – Testes de capacidade. 3. Aprendizagem – Desempenho. 4. Intervenção(psicologia). I. Título.

159.9 CDU (2. ed.) UFPE
150 CDD (22. ed.) BCFCH2009/116

FOLHA DE APROVAÇÃO

Laécio Nobre de Macedo

Análise do Uso de uma Sequência Didática com Objetos de Aprendizagem Digitais no Desenvolvimento de Conceitos Algébricos.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco para obtenção do título de Mestre.
Área de Concentração: Psicologia Cognitiva

Aprovado em: 21 de maio de 2009

Banca Examinadora

Profa. Dra. Sintria Labres Lautert
Instituição: U.F.PE Assinatura: Sintria Lautert

Profa. Dra. Claudia Roberta de Araújo Gomes
Instituição: U.F.R.PE Assinatura:

Prof. Dr. Jorge Tarcísio da Rocha Falcão
Instituição: U.F.PE Assinatura:

DEDICATÓRIA

A minha esposa ANA ANGÉLICA
pelo amor, incentivo, confiança e
apoio constante durante todas
as fases desta pesquisa
e de nossas vidas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a **Deus** por minha existência neste mundo.

Aos meus pais Raimundo e Regina Macêdo pelo amor, atenção e exemplo de vida.

A minha esposa, Ana Angélica pelo amor incondicional.

A Síntria Labres Lautert, orientadora, pelo apoio, exemplo, paciência, motivação e constante atenção em todos os momentos da elaboração deste trabalho.

A José Aires de Castro Filho, co-orientador e amigo, que me ajudou a dar os primeiros passos na pesquisa científica.

Aos participantes do Grupo Proativa – Grupo de Pesquisa e Produção de Ambientes Interativos e Objetos de Aprendizagem – da Universidade Federal do Ceará (UFC) que têm contribuído para o meu crescimento pessoal e profissional.

Aos professores Jairo Eduardo Borges-Andrade (UnB) e **Lívia de Oliveira Borges** (UFRN) pela participação e contribuições na qualificação deste trabalho.

A todos os professores da UFPE com quem tive a honra de estudar, principalmente, a **Jorge Falcão, Alina Spinillo e Antônio Roazzi** pelas valiosas sugestões ao projeto de qualificação.

Ao amigo, **Ricardo Sávio Teixeira Moretz Sohn**, pelas críticas, sugestões e apoio nos momentos em que precisei.

A Ernani Santos e Luciana de Lima pelas contribuições na revisão das questões de Matemática e estruturas algébricas utilizadas neste estudo.

A Nicolai Henrique Dianim Brion pela correção do Abstract e do Resumo desta dissertação.

Aos colegas do Mestrado Acadêmico: Ana Paula, Cristiane, Geovana, Giselda, Janaína, Fabiana, Gabriela, Marcílio, Marisa, Mariana, Renê, Renata e Rosita.

A todos os alunos, professores, coordenadores e diretores que permitiram a efetivação desta pesquisa e sempre se mostraram disponíveis e interessados por todas as atividades realizadas.

Aos funcionários do Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva pela atenção e competência, especialmente, **Ivo Vanderlei da Silva** pela disponibilidade sempre que seus conhecimentos de estatística e informática foram solicitados.

Às bolsistas **Jaiane Barbosa, Lavina Lima** e **Lorena Camelo** pela atuação como juízes independente em todas as questões do pré-teste e pós-teste.

Às bolsistas **Fernanda Chagas e Karoline Sobreira** pela colaboração na análise dos dados.

Ao CNPq e a **CAPES** pela concessão da bolsa de estudos.

“A maior parte dos conhecimentos são competências, e a análise dos esquemas mostra que eles não consistem somente em maneiras de agir, mas também em conceitualizações implícitas. Se os conhecimentos mudam, é antes de tudo porque a criança se dirige a situações cada vez mais complexas”.

Gérard Vergnaud (2003, p. 67)

Resumo

MACEDO, L. N. **Análise do uso de uma sequência didática com objetos de aprendizagem digitais no desenvolvimento de conceitos algébricos.** 2009. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Psicologia – Universidade Federal de Pernambuco.

Pesquisas em Psicologia da Educação Matemática apontam diversos recursos didáticos que podem ser utilizadas no desenvolvimento de conceitos algébricos, tais como: sequências didáticas, desenhos, diagramas, balança de dois pratos e recursos digitais, como, os *softwares* educacionais. Com o avanço tecnológico proporcionado pela automação industrial e comercial e o crescimento da rede mundial de computadores, cresceu também o desejo de aplicação de recursos digitais na educação, sobretudo do novo paradigma tecnológico, chamado objeto de aprendizagem. O presente estudo nasceu das seguintes inquietações: como inserir um objeto de aprendizagem digital em uma sequência didática desenvolvida para o ensino de equações do 1ª grau? Que efeitos isso poderia causar na aprendizagem dos estudantes? Quais os possíveis ganhos cognitivos obtidos pelos usuários desta sequência didática na resolução de problemas e equações algébricas? Esta pesquisa tem por objetivo investigar os efeitos de uma intervenção específica, com a utilização de uma sequência didática, onde o estudante será desafiado a refletir sobre sua ação e encorajado a desenvolver estratégias próprias do pensamento algébrico durante a resolução de equações do lº grau. A investigação foi dividida em três fases: pré-teste, intervenção e pós-teste. Os participantes da pesquisa foram 40 alunos do 7º ano de escolas públicas da cidade de Fortaleza. Os estudantes foram alocados em dois grupos: Grupo Controle (GC) e Grupo Experimental (GE). Todos os alunos participaram do pré-teste e do pós-teste, que foram aplicados individualmente. Todavia, ao GC não foi ministrado nenhuma instrução formal além da recebida em sala de aula. O GE foi submetido a uma intervenção de natureza tutorada, em duas sessões individuais, com a utilização do objeto de aprendizagem Balança Interativa. Durante a intervenção foi implementada a seguinte sequência didática: descobrir incógnitas no nível icônico; descobrir incógnitas no nível simbólico; resolução de equações algébricas propostas no Balança Interativa e resolução de problemas algébricos com uso de lápis e papel. No decorrer da intervenção o experimentador solicitava explicações ao estudante, procurando compreender a perspectiva por ele adotada; apresentava *feedback* e forma correta de proceder; além de explicitar regras ou princípios gerais relativos aos invariantes da álgebra que estavam sendo enfatizados nas expressões propostas durante a intervenção. Os dados foram analisados em função dos seguintes aspectos: desempenho e natureza das respostas apresentadas. Os testes estatísticos U de Mann-Whitney e Wilcoxon indicaram que os estudantes do grupo experimental apresentam níveis de desempenho significativamente superior quando comparados aos estudantes do grupo controle no pós-teste. Estes participantes (GE) apresentaram melhor desempenho tanto na resolução de problemas quanto na resolução de equações algébricas. A análise da natureza das respostas e das entrevistas clínicas corrobora com este resultado e apontam melhoras de natureza qualitativa e quantitativa no grupo experimental.

Palavras - chave: álgebra; objetos de aprendizagem; intervenção.

Abstract

MACEDO, L. N. **Analysis of the use of a didactic sequence with digital learning objects in the development of algebraic concepts.** 2009. Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Psicologia - Universidade Federal de Pernambuco.

Research in Psychology of Mathematics Education show various teaching resources that can be used in the development of algebraic concepts, such as teaching sequences, drawings, diagrams, two-pan balance scale and digital resources, such as the educational software. With the technological advances provided by industrial and commercial revolution and growth of the global network of computers, also increased the desire of application of digital resources in education, especially the new technological paradigm, called learning object. This study was the following concerns: how to insert a learning object in a didactic sequence for teaching developed equations of 1st degree? What effects this could cause the learning of students? What are the possible cognitive gains made by users of this teaching sequence in problem solving and algebraic equations? This study aims to investigate the effects of a specific intervention with the use of a teaching sequence, where the student will be challenged to reflect on their actions and encouraged to develop strategies own of algebraic thinking during the resolution of equations of 1st degree. The research was divided into three phases: pre-test, intervention and post-test. The participants were 40 students from 7º grade of public schools in city Fortaleza. Students were divided into two groups: Control Group (CG) and Experimental Group (EG). All students participated in the pre-test and post-test, which were applied individually. However, the CG has not been given any formal instruction received in addition to the classroom. The EG was subject to a mentoring intervention in two individual sessions with the use of the learning object Balança Interativa (Balance Interactive). During the intervention was implemented the following teaching sequence: discover unknowns at iconic level; find unknowns in the symbolic level, resolution of algebraic equations proposed in Balance Interactive and resolution of algebraic problems using pencil and paper. During the speech the experimenter asked the student explanations, trying to understand the perspective adopted by him, had feedback and how to proceed, in addition to explicit rules or general principles for the invariant of the algebra being emphasized in the terms proposed during the intervention. Data were analyzed according to the following aspects: performance and nature of the responses submitted. Statistical tests of Mann-Whitney U and Wilcoxon indicated that students in the experimental group have significantly higher levels of performance when compared to students in the control group post-test. These participants (EG) showed better performance as in solving problems as in solving algebraic equations. The analysis of the nature of responses and clinical interviews confirms this result and suggest improvements in qualitative and quantitative nature in the experimental group.

Key-words: algebra, learning objects, intervention.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

O primeiro tratado de álgebra foi escrito pelo matemático e astrônomo árabe Mohammed Ibu-Musa Al-Khowarizmi durante o segundo século do império muçulmano, aproximadamente, em 825 d.C. na cidade de Bagdá. O título do livro era *Al-jabr Wa'l muqabalah*. "Desse título veio o termo álgebra, pois foi por esse livro que mais tarde a Europa aprendeu o ramo da Matemática que tem esse nome" (BOYER, 1996, p. 156).

O significado exato dos termos *Al-jabr Wa'l muqabalah*, ainda, são desconhecidos. Entretanto, segundo Boyer (1996, p. 156) a palavra *Al-jabr* se refere a "restauração" ou "complementação" dos termos subtraídos para o outro lado da equação. Já o termo *muqabalah,* ao que se diz, refere-se a "redução" ou "equilíbrio", isto é, ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação.

A álgebra de Al-Khowarizmi foi utilizada como uma ferramenta útil na resolução de problemas do cotidiano como partições, casos de herança, processos legais e transações comerciais, além do uso prático em atividades como medir terras e escavar canais. Al-Khowarizmi apresenta um conteúdo algébrico inteiramente expresso em palavras, sem nada de sincopação[1]. Mesmo os números são escritos em palavras em vez de símbolos. Nem Al-Khowarizmi, nem outros estudiosos árabes, cuja crença religiosa considerava as palavras como sagradas, usaram sincopação ou números negativos.

Para o matemático e historiador Carl Boyer, a exposição de Al-Khowarizmi era tão sistemática que o *Al-jabr* se aproxima mais da álgebra elementar de hoje, do que, as obras de

[1] O termo sincopação refere-se ao uso de abreviações para as quantidades e operações que se repetem com frequência (BOYER, 1996).

outros autores como Diofante (grego) e Brahmagupta (hindu). Por esse motivo, Al-Khowarizmi é considerado o "pai da álgebra" (BOYER, 1996).

Segundo o mesmo autor, outros dois matemáticos, além de Al-Khowarizmi, se destacam na sistematização e construção da teoria algébrica, foram eles: Diofante de Alexandria e François Viète da França. Coube ao grego Diofante, o uso de um sinal especial para a incógnita em uma equação por volta do ano 250 d.C; já o francês Viète (1540 a 1603) fez a sistematização do uso de letras para representar os valores conhecidos em uma expressão algébrica, ou seja, ele introduziu a prática de usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. "A convenção atual de usar as últimas letras do alfabeto (x, y e z) para indicar as incógnitas e as primeiras (a, b, c) para as constantes foi introduzida por Descartes em l637" (EVES, 2004, p. 308).

Segundo Lins e Gimenez (1997), em 1842, Nesselmann caracterizou três estágios principais do desenvolvimento histórico da notação algébrica, a saber: álgebra retórica, álgebra sincopada e álgebra linear. Na álgebra retórica, os argumentos de resolução de um problema são escritos em prosa, sem abreviações ou símbolos específicos (ex.: álgebra de Al-Khowarizmi). Enquanto isso, na álgebra sincopada é adotado o uso de abreviações para as quantidades e operações que se repetem com frequência (ex.: álgebra de Diofante). Já na álgebra simbólica, as resoluções são representadas por símbolos (letras do alfabeto) que, aparentemente, nada tem a ver com os elementos que representam (ex.: álgebra de Viète).

Tal divisão em estágios, embora arbitrária e simplória, serve como primeira aproximação ao que aconteceu na história do desenvolvimento da álgebra. Trata-se de uma classificação didática com o objetivo de facilitar a compreensão das diferentes formas algébricas no decorrer da história.

O fato é que, ao longo dos anos, tem crescido a importância do conteúdo algébrico na sala de aula e vários estudos foram desenvolvidos sobre as dificuldades de compreensão deste conteúdo matemático. Pesquisadores (e.g. CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995; CORTES; VERGNAUD; KAVAFIAN, 1990; DA ROCHA FALCÃO, 1993, 2000, 2003; KIERAN, 1995; LINS LESSA, 1996, 2005; SCHLIEMANN; CARRAHER; BRIZUELA, 2007; VERGNAUD, 1998) realizaram várias investigações nesta área e verificaram a importância da álgebra na resolução de problemas, bem como, as dificuldades e desafios enfrentados pelos alunos na aquisição deste conhecimento.

Mas apesar de ser considerada uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas e um conteúdo importante dentro da disciplina de Matemática, percebe-se que em muitas escolas, há uma resistência dos professores em adotar novas metodologias que possibilitem a superação das dificuldades no conteúdo algébrico, principalmente, na adoção de recursos tecnológicos.

Muitas vezes, essa resistência pode está ligada a alguns fatores como: falta de computadores nas escolas, inexperiência do professor no uso destas ferramentas, deficiências na sua formação acadêmica ou medo de utilizar recursos digitais advindo das novas tecnologias. Outro fator, de natureza social e econômica, mas não menos importante, que pode está na raiz do problema, são os baixos salários que levam muitos professores a triplicar a jornada de trabalho. Nessas condições, não sobra tempo para que o docente possa preparar uma boa aula, nem para que o mesmo possa fazer cursos de formação continuada e de pós-graduação.

Porém, acredita-se que as propostas para mudar o ensino nas escolas resultam sempre de uma visão pessoal, da classe social dominante, daquilo que se deseja promover através do ensino. Em outras palavras, como dizia Paulo Freire, “toda educação é um ato político, não existe educação neutra, portanto é preciso que o educador tenha clareza do por que, a favor de que e contra o que ele está educando” (FREIRE, 1978, p. 78).

Essa inquietação de Freire, a favor de uma educação libertária, leva-nos a pensar sobre as forças que atuam sobre o currículo e o ensino. House (1995) afirma que essas forças surgem basicamente de duas fontes: tecnologia da computação e forças sociais.

No que diz respeito ao uso efetivo das Tecnologias da Informação e Comunicação, Fraze (1995, p. 181) acredita que “o microcomputador é um instrumento valioso nas aulas de álgebra, uma vez que possibilita ao professor introduzir métodos de resolução, às vezes, inviáveis sem a tecnologia” (e.g. uso de planilhas, simulações e jogos). Contudo, na área educacional, mesmo pequenas mudanças costumam gerar grande resistência por parte de alguns educadores que não conseguem imaginar um currículo desprovido de tópicos que não se baseiem nos métodos tradicionais de ensino. Alguns deles parecem esquecer que, no passado, o surgimento do papel e da imprensa mudou, sobremaneira, a forma de ensinar e de aprender.

Atualmente, alguns tópicos tradicionais do currículo algébrico como, por exemplo, a fatoração de polinômios pode ser realizada em segundos com a utilização de diversos tipos de *softwares*. A manipulação e a interpretação de planilhas eletrônicas também podem ser úteis para a realização de uma infinidade de cálculos matemáticos e estatísticos. Programas de simulação do “mundo real”, impraticáveis através do lápis e papel podem agora fazer parte do cotidiano das escolas. Tais recursos não deveriam ser ignorados por alunos e professores (HOUSE, 1995).

A sociedade, também, exerce forte pressão sobre a escola para que adote o uso de tecnologias da informação e comunicação em seus currículos. Há uma expectativa social de que o mesmo impacto que a tecnologia da computação trouxe sobre a indústria, comércio e o setor de serviços, transforme também, a forma de atuação da escola. O certo, é que, a escola pública não acompanhou o ritmo das transformações ocorridas na sociedade. Todavia, as escolas particulares já perceberam essa demanda e passaram a adotar o uso da tecnologia da computação desde as séries iniciais. Enquanto isso, a escola pública está sendo informatizada aos poucos, ao sabor das políticas públicas para a educação.

Buscando uma metodologia que concilie o uso de recursos tecnológicos e ensino de conceitos matemáticos, elaborou-se, neste estudo, uma sequência didática com a utilização de objetos de aprendizagem digitais com o objetivo de proporcionar aos alunos uma situação didática capaz de levá-los a atribuir novos significados aos conceitos de equação, incógnita, igualdade e desigualdade.

Ciente da importância de ter uma teoria de base psicológica para dar suporte à metodologia e análise dos dados encontrados, neste trabalho adotou-se a Teoria dos Campos Conceituais por acreditar, assim como Vergnaud, que os conhecimentos não estão soltos, nem isolados, pelo contrário, eles estão interligados, encadeados e presentes nas diferentes situações, invariantes e representações que formam um campo conceitual.

1.1. TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista da conceitualização do real, que permite estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos do ponto de vista de seu conteúdo conceitual. Esta teoria permite, igualmente, analisar a relação entre conceitos enquanto conhecimentos explícitos e os invariantes operatórios implícitos nas condutas do sujeito em situação (VERGNAUD, 1990, p. 133).

Segundo Vergnaud (1986, p. 84), o campo conceitual "é um conjunto de situações, cujo domínio progressivo exige uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão". Supõe-se, então, que os conceitos só adquirem sentido em situações ou conjunto de situações nas quais ele emerge, em suas propriedades invariantes e formas de representação (Figura 1).

Figura 1 – Formação de um campo conceitual

Dessa forma, pode-se dizer que os campos conceituais são formados pelos conjuntos ***(S, I, R)*** onde o **S** representa o conjunto das situações que faz o conceito ser útil e significativo; **I** representa o conjunto dos invariantes operacionais, ou seja, as propriedades relativas a um conceito, as leis e regras que devem ser observadas quando da resolução de um problema; enquanto, **R** significa o conjunto de representações linguísticas, gráficas ou gestuais que podem ser utilizadas para representar invariantes, situações e procedimentos, tais como o uso de números, letras, equações, fórmulas, gráficos, etc. (VERGNAUD, 1997).

Os conceitos matemáticos, bem como, os demais conceitos em outras disciplinas, não estão soltos; na verdade, estão entrelaçados. Dessa forma, ao invés de tentar estudar os conceitos como se estivessem isolados, seria mais interessante estudar os campos conceituais. Para Vergnaud (1990), há diferentes campos conceituais que requerem uma variedade de conceitos interligados, como por exemplo, o campo conceitual da aritmética e o campo conceitual algébrico. Embora, seja possível delimitar o espaço pertencente a cada um desses campos, devido às especificidades de cada um deles, os limites cognitivos entre ambos não são completamente definidos, haja vista, a existência de proximidades inerentes entre esses campos, uma vez que para resolver um problema algébrico, faz-se necessário o uso de operações aritméticas.

A seguir, apresenta-se o campo conceitual algébrico e o resultado de pesquisas que tinham por objetivo desenvolver o pensamento algébrico em estudantes, por meio do uso de diferentes atividades.

1.1.1. Campo Conceitual Algébrico

A álgebra constitui uma importante fase do ensino de Matemática nas escolas de Ensino Fundamental. Vergnaud (1997, p.25) destaca essa importância:

> A álgebra é uma etapa importante na aprendizagem da Matemática. Não apenas porque requer cálculo simbólico, em um sentido e extensão, nunca visto antes pelos estudantes, mas também, porque envolve novos conceitos e teoremas. Os conceitos de equação, fórmula, função, variável não são conceitos aritméticos, mas algébricos e o mesmo é verdade para os conceitos de uma classe de números, grupos ou vetores de espaço.

A força Matemática da álgebra é, particularmente, devido à polivalência de sinais e símbolos, mas estas raízes polivalentes causam dificuldades para que ela possa ser dominada com facilidade pelos estudantes. Na álgebra, os mesmos símbolos podem abrigar diferentes operações e propósitos matemáticos. Além disso, os cálculos algébricos carregam importantes reduções e equivalências que, normalmente, não estão explícitos (VERGNAUD, 1997).

A própria definição do termo álgebra é considerada uma tarefa difícil. De acordo com Usiskin (1995), definir álgebra não é uma tarefa fácil. Para Da Rocha Falcão (1993, p. 93), o campo conceitual algébrico é bastante complexo e abarca diferentes vertentes, tais como: “variável e parâmetro; fórmula e equação; aritmética e álgebra; atividade extra-matemática ligada a um conteúdo específico e atividade intra-matemática de processamento algébrico”. A seguir, busca-se conceituar cada uma dessas vertentes:

Variável[2] é uma grandeza que não tem um valor fixo. No cálculo algébrico, as variáveis são representadas por letras do alfabeto. Embora seja possível utilizar qualquer letra do alfabeto, as mais utilizadas são x, y e z.

Parâmetro[3] pode ser entendido como uma constante que aparece em uma equação, fórmula ou expressão algébrica cujo valor determina certas propriedades dessa equação, fórmula ou expressão algébrica. Também se considera o termo parâmetro como sendo informações, instruções ou procedimentos necessários que devem ser seguidos quando da resolução de uma sentença Matemática, um situação-problema, uma decisão ou avaliação.

Equação[4] é toda sentença Matemática na qual aparece um sinal de igual e uma ou mais letras que representam números desconhecidos chamados de incógnitas. A palavra equação é formada pelo prefixo *equa*, que em latim quer dizer "igual". Portanto, toda equação representa uma igualdade entre dois termos e possui letras que representam as incógnitas.

---

[2] Conforme Imenes e Lellis (1998). *Microdicionário de Matemática.* São Paulo: Scipione.
[3] *Idem.*
[4] *Idem.*

A **Aritmética**[5] é parte da Matemática que investiga os números e operações. O termo aritmética deriva do grego *arithmos*, que significa "número".

A **álgebra**[6] é parte da Matemática que estuda equações e cálculos com variáveis e incógnitas, ambas, representadas por letras. A palavra álgebra é uma variante latina da palavra árabe *al-jabr*, usada no título de um livro, *Hisab al-jabr w'al-muqabalah*, escrito pelo matemático árabe Mohammmed Ibu-Musa Al-Khowarizmi.

Atividade extra-matemática ligada a um conteúdo específico, conforme sugerido por Da Rocha Falcão (1993), diz respeito à exploração de atividades interdisciplinares como a observação de fenômenos físicos e a tentativa de construção de um modelo matemático para explicar esses fenômenos.

Atividade intra-matemática de processamento algébrico, segundo Da Rocha Falcão, (1993) diz respeito à identificação de variáveis e parâmetros, a representação do problema, proposição de fórmulas operacionais e resolução de equações.

É importante salientar que, álgebra e aritmética não são campos isolados do saber matemático. De acordo com Schliemann; Carraher; Brizuela (2005), a aritmética é parte da álgebra, isto é, a parte que trata do sistema numérico, funções simples e assim por diante. A álgebra depende da aritmética, sobretudo das estruturas aditivas[7] e multiplicativas para sua complementação, uma vez que, para resolver um problema algébrico é necessário utilizar as operações de aritméticas (Figura 2).

[5] Conforme Imenes e Lellis (1998). *Microdicionário de Matemática.* São Paulo: Scipione.
[6] *Idem.*
[7] Para Vergnaud (1997) o campo conceitual das estruturas aditivas é constituído por um conjunto de situações que pode ser analisado com base na adição e na subtração. Estas envolvem um estado inicial, a operação (algo adicionado ou retirado) e o estado final, após a transformação. Por outro lado, o campo conceitual das estruturas multiplicativas envolve todo o conjunto de situações que requer o uso de divisão, multiplicação ou a combinação destas operações e outros conceitos como: fração, razão, proporção, porcentagem, número racional, análise de dimensão, espaços vetoriais, funções lineares e não lineares.

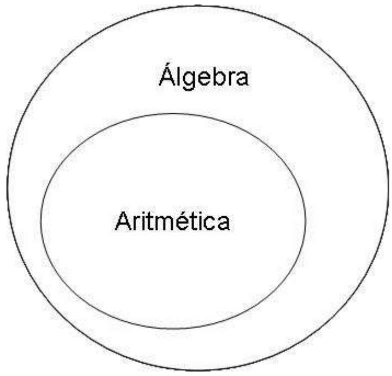


Figura 2 – Relação entre aritmética e álgebra.

Para Da Rocha Falcão (1993, p. 86), a álgebra constitui uma ferramenta poderosa ferramenta para a resolução de problemas. Ela é “um conjunto de conceitos e procedimentos matemáticos que permitem a representação prévia e a resolução de um determinado tipo de problema, para o qual os procedimentos aritméticos mostram-se insuficientes”. Essa conceituação proposta por Da Rocha Falcão inclui aspectos importantes do processo de resolução algébrica que o diferem do processo aritmético, tais como: mapear o problema, escrita algébrica, procedimento de resolução e a retomada de sentido.

Segundo Da Rocha Falcão (2003a), enquanto na aritmética, o aluno só precisa efetuar cálculos numéricos, em álgebra, há a necessidade de primeiro interpretar o problema *(mapear o problema).* Sem essa interpretação, pode-se incorrer em diversos erros que dificultarão a busca do resultado da equação. Ao mapear o problema, o aluno precisa utilizar a notação algébrica, letras do alfabeto, que irão substituir os valores desconhecidos propostos na situação-problema *(escrita algébrica).* Essas variáveis, juntamente, com os valores conhecidos, irão compor a equação relativa à resolução do problema algébrico. Após escrever a equação referente ao problema *(procedimento de resolução),* o próximo passo é reduzir a mesma, ou seja, passar de uma equação à outra, dita equivalente, efetuando a mesma operação, em ambos os membros da equação *(princípio algébrico de equivalência)* até chegar à equação equivalente que levará a descoberta da variável. Contudo, alguns problemas algébricos exigem mais que o valor da variável a ser descoberta. Nestes casos, há sempre a necessidade de interpretação da resposta (*retomada do sentido)*, pois o valor da variável em si, nem sempre corresponde à resposta que dá solução ao problema.

Importante salientar que, durante a aprendizagem de conceitos algébricos na escola, as fases descritas acima não são igualmente consideradas nos livros didáticos e, muito menos pelos professores. Estes, por sua vez, costumam privilegiar a fase do procedimento de resolução, em detrimento das demais fases. Os dados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB, de 1995 a 2005, mostram que tal prática, além de pouco produtiva, baseia-se apenas na tradição e não encontra apoio em resultados recentes da pesquisa científica. "Os resultados do SAEB, por exemplo, os itens referentes à álgebra, raramente, atingem o índice de 40% de acerto em muitas regiões do país (BRASIL, 2008).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática - PCN, o ensino formal de álgebra – estudo das equações lineares – costuma ter início, na escola, a partir da sexta série ou terceiro ciclo do ensino fundamental (BRASIL, 1998). Durante o início desse percurso, os estudantes costumam encontrar alguns *obstáculos epistemológicos*[8]. Estes obstáculos ocorrem na passagem do pensamento aritmético ao pensamento algébrico. Uma dessas mudanças refere-se à nova atribuição do sinal de igual (=). Na aritmética, o sinal de igualdade representa o resultado final de uma determinada operação (ex.: uso da calculadora para computar um resultado). Na álgebra, o sinal de igual (Figura 3), assume uma nova função: significa uma relação de equivalência entre os termos de uma equação (CORTÉS; VERGNAUD; KAVAFIAN, 1990; LINS LESSA, 1996).

[8] Os obstáculos epistemológicos são conhecimentos que se encontram, relativamente, estabilizados no plano intelectual do aluno e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar. Para maiores detalhes sobre esse tema, sugere-se consultar Bachelard (1996).

23 + 2x	**=**	**47**
1º membro	**igualdade**	**2º membro**

Figura 3 – Exemplo de Equação do 1º Grau

Na equação 23 + 2x = 47, o sinal de igual representa uma relação de equivalência entre os dois lados da igualdade. Em geral, no Ensino Fundamental, costuma-se dizer ao aluno que para resolver uma equação do 1º grau, ele deveria realizar o seguinte *script-algoritmo*[9]: (i) Juntar os termos com incógnita num dos membros e os termos sem incógnita no outro; (ii) Reduzir a equação à forma canônica ax = b, operando os termos semelhantes em cada membro; (iii) Resolver a equação ax = b; (iv) Interpretar a resposta.

Seguindo os passos acima, a solução de uma equação como 2x + 23 = 47 seria realizada da seguinte forma:

2x + 23 = 47 (1) Equação inicial;

2x = 47 – 23 (2) Separando os termos com a incógnita dos demais termos da equação;

2x = 24 (3) Reduzindo a equação à forma canônica ax = b;

$\frac{2x}{2} = \frac{24}{2}$ (4) Resolvendo a equação ax = b;

x = 12 (5) Interpretando a resposta.

Uma coisa importante que, na maioria das vezes, não é explorado pelo professor, quando do ensino de equações, diz respeito ao uso do princípio algébrico de equivalência.

[9] "[...] uma regra ou conjunto de regras que permitem, em face de todo problema de uma determinada classe, achar a solução (se existir uma) em um número finito de passos, ou demonstrar a inexistência da tal solução" (VERGNAUD 1991 apud DA ROCHA FALCÃO 2003, p. 60).

Este princípio é o que permite passar, de uma equação a outra dita mais simples e/ou equivalente, através da realização da mesma operação em ambos os membros da equação.

Utilizando o princípio algébrico de equivalência na mesma equação utilizada acima, tem-se a seguinte situação:

2x + 23 = 47 (1) Equação inicial;

2x + 23 **– 23** = 47 **– 23** (2) Efetuando a mesma operação em cada lado da equação;

2x = 24 (3) Encontrando a equação equivalente do tipo ax = b;

$\frac{2x}{2}=\frac{24}{2}$ (4) Efetuando a mesma operação em cada lado da equação;

x = 12 (5) Interpretando a resposta.

Porém, é possível utilizar outros caminhos como:

2x + 23 = 47 (1) Equação inicial;

2x + 23 **– 13** = 47 **– 13** (2) Efetuando a mesma operação, em cada lado da equação;

2x + 10 = 34 (3) Descobrindo a equação equivalente;

$\frac{2x+10}{2}=\frac{34}{2}$ (4) Efetuando a mesma operação, em cada lado da equação;

x + 5 = 17 (5) Descobrindo a equação equivalente;

x + 5 **– 5** = 17 **– 5** (6) Efetuando a mesma operação, em cada lado da equação;

x = 12 (7) Interpretando a resposta.

Como se pode perceber, no exemplo acima, esta forma de resolução através do princípio algébrico de equivalência não costuma ser enfatizado pelos professores durante a introdução do ensino da álgebra. Agindo dessa forma, o professor acaba fornecendo um único caminho, não discutindo que existem outros, e esta atitude pode reforçar o obstáculo didático que existe para a compreensão do sinal de igual (=), não mais como um resultado (na aritmética), e sim, como uma relação de igualdade entre os termos de uma equação (na álgebra).

Os alunos que iniciam o estudo da álgebra costumam enfrentar uma série de dificuldades. Booth (1995) realizou uma série de entrevistas com alunos ingleses da sexta à nona série (12 a 15 anos) com o objetivo de analisar os tipos de erros cometidos durante a resolução de problemas algébricos. Os resultados do estudo indicaram que apesar da diferença de idade e da maior experiência em álgebra dos alunos da nona série em relação aos alunos da sexta, os erros cometidos eram semelhantes em todas as séries.

A análise dos protocolos dos participantes parece indicar que muitos desses erros teriam origem nas ideias que os alunos possuem acerca de aspectos como: o foco da atividade algébrica e a natureza das respostas; o uso da notação e da convenção em álgebra; o significado das letras e das variáveis e, finalmente, os tipos de relações e métodos utilizados na aritmética. Busca-se, a seguir, explicar como essas ideias induzem alguns alunos ao erro.

(i) O foco da atividade algébrica e a natureza das respostas

Na aritmética, o foco da atividade é encontrar uma resposta correta, a solução do problema. Na álgebra é um pouco diferente. O foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los através de uma equação simplificada geral. Em outras palavras, na álgebra a ênfase não está apenas sobre um resultado numérico, tal qual, existe na aritmética. Muitos alunos não percebem isso e continuam achando que devem encontrar apenas uma resposta numérica o que pode levá-los a cometer erros.

(ii) O uso da notação e da convenção em álgebra

Uma simples expressão como $3a + 2b$ pode levar a interpretações equivocadas como $5ab$. Tal fato, decorre da falta de domínio da notação e da convenção algébrica. Na aritmética, os sinais "+" e "=" são interpretados em termos de ações a serem executadas. Onde o "+" significa a realização da operação de adição e o "=" expressa um resultado numérico. Na álgebra, porém, estes sinais assumem, respectivamente, outro significado, a saber: resultado de uma ação e uma relação de equivalência.

(iii) O significado das letras e das variáveis

O uso de letras para indicar valores é uma das diferenças marcantes entre álgebra e aritmética. Embora, algumas vezes, algumas letras possam ser utilizadas na aritmética, elas não têm o mesmo sentido quando utilizadas no campo algébrico. Essa mudança de uso pode resultar numa “falta de referencial numérico”, por parte do aluno, ao interpretar o significado das letras em álgebra.

Outra mudança marcante da álgebra em relação à aritmética é a utilização de variáveis. Na aritmética há uma forte tendência a considerar que as letras representam sempre valores fixos (noção de incógnita). Entretanto, uma variável pode assumir qualquer valor, podendo ser representada, não somente por letras, mas por outros símbolos como: “?”, “△” e “☐” (e.g. 2☐ + 3△).

(iv) Os tipos de relações e métodos utilizados na aritmética

A álgebra não está isolada da aritmética. Na verdade, o uso de operações aritméticas é de fundamental importância para a resolução de uma equação algébrica. Nesse caso, muitos problemas que os alunos têm em álgebra não são, necessariamente, devido ao conteúdo algébrico, mas de problemas com a aritmética que não foram devidamente resolvidos. Por exemplo: “muitos alunos acreditam que o valor de uma expressão permanece inalterado, mesmo quando se muda a ordem dos cálculos” (BOOTH, 1995, p. 33).

Dessa forma, torna-se importante que o professor de Matemática esteja atendo a estas diferenças, uma vez que, o aprendiz parece não entender, intuitivamente, a passagem da aritmética à álgebra. Coisas aparentemente simples para o professor, não são tão simples aos olhos dos alunos. Os esquemas mentais, de resolução aritmética, dos alunos não dão conta dessa nova situação surgindo assim um obstáculo didático a ser superado.

Nesse momento, há a necessidade de intervenção do professor para que seus alunos possam *assimilar e acomodar*[10], no sentido piagetiano, essa nova situação. Vários estudos foram realizados com o objetivo de descobrir maneiras de resolver o conflito cognitivo da passagem do pensamento aritmético ao pensamento algébrico. Nestes estudos, os pesquisadores utilizaram diferentes abordagens do conteúdo algébrico, tais como: balança de dois pratos em situações da vida cotidiana (CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995), balança de dois pratos no contexto escolar (DA ROCHA FALCÃO, 2003; LINS LESSA, 1996) desenhos ou diagramas (BRITO LIMA, 1996), problemas verbais (FREIRE, 2007; KIERAN, 1995; LINS LESSA, 1996), sequências didáticas (DA ROCHA FALCÃO *et al.* 2000; LINS LESSA, 2005; PINTO, 2001) e ambientes computacionais (CASTRO-FILHO; LEITE; FREIRE; MACEDO, 2007).

Na seção seguinte, serão mostrados alguns desses estudos e suas contribuições para a Psicologia da Educação Matemática, no que se refere, ao desenvolvimento do pensamento algébrico e suas implicações na prática educativa.

[10] Para Piaget (1967) Assimilação é a tendência a compreender a nova informação em termos de marcos mentais de referência existentes, sendo este processo complementar a acomodação. Já acomodação, é a modificação dos esquemas mentais existentes para ter em consideração uma nova informação e incluir experiências novas de tal forma que o sujeito se adapte à realidade presente, buscando sempre a equilibração.

Kieran (1995) realizou um estudo de intervenção com seis alunos do 7º ano que ainda não haviam iniciado o ensino formal da álgebra. O foco dessa pesquisa era o uso do princípio algébrico de equivalência. Em outras palavras, o procedimento de resolução de efetuar a mesma operação nos dois membros da equação. Além disso, objetivava ampliar os conhecimentos prévios que os alunos têm sobre equação, incógnita e sinal de igualdade.

A pesquisa foi dividida em três fases: pré-teste, intervenção e pós-teste. Após o pré-teste, os participantes foram alocados em dois grupos: aritmética e álgebra. O critério desta alocação foi a análise das respostas que os alunos apresentaram no pré-teste. Os alunos cujas respostas se referiam ao uso das operações inversas para encontrar o valor da incógnita constituíram o grupo da álgebra e os que não fizeram menção as operações inversas, mas que ao contrário, afirmavam que as incógnitas eram números, constituíram o grupo da aritmética.

Os dois grupos foram submetidos a dez sessões individuais de intervenção com a pesquisadora. Após a intervenção, os dois grupos realizaram o pós-teste. Os resultados dessa experiência indicaram que apenas metade dos alunos, a saber, o grupo da aritmética, passou a utilizar, regularmente, o princípio algébrico de equivalência para simplificar e resolver equações algébricas. O grupo da álgebra continuou a resolver equações através do tradicional método de transposição dos termos semelhantes para lados postos da equação. Observa-se que essa técnica considerada, por muitos professores, como uma versão abreviada do procedimento de efetuar a mesma operação nos dois membros da equação, não é vista da mesma maneira pelos alunos.

As constatações de Kieran (1995) sugerem que a construção de significados para o procedimento de resolução de equações através do princípio de equivalência algébrica é um processo de aprendizagem que demanda tempo. Uma opção interessante para superar essa dificuldade seria antecipar o ensino da álgebra na escola e deixar que essa construção de significados aritmética/álgebra vá se formando, aos poucos, através do ensino concomitante destes dois conteúdos.

Lins Lessa (1996) realizou um estudo de intervenção com 40 alunos, de ambos os sexos, na faixa etária de 11 e 12 anos, cursando a 5ª série do Ensino Fundamental de duas escolas da cidade do Recife. O foco desse estudo era analisar o uso de diferentes artefatos para o desenvolvimento de conceitos algébricos em alunos que ainda não haviam iniciado o ensino formal de equações do 1º grau.

O estudo foi constituído de três fases: pré-teste, intervenção e pós-teste. Em todas as fases, os participantes da pesquisa, deveriam descobrir o valor das incógnitas envolvidas na tarefa e justificar a sua resposta, tentando explicitar o raciocínio utilizado.

Na primeira fase (pré-teste), os participantes resolveram uma lista de seis equações e seis problemas verbais envolvendo igualdade entre quantidades. Após o pré-teste os alunos foram divididos em dois grupos: Grupo A – composto de 20 alunos que utilizaram uma balança de dois pratos para resolver equações e Grupo B – 20 alunos que utilizaram lápis e papel para resolver uma lista de problemas verbais.

A segunda fase consistiu em uma intervenção, onde os participantes foram submetidos, individualmente, a uma série de doze tarefas-problemas. Nesta fase, os dois grupos participaram de um treinamento para resolução de equações e problemas algébricos nas seguintes condições: uso da balança de dois pratos (Grupo A) e uso de problemas verbais (Grupo B).

Após a intervenção os dois grupos, foram submetidos ao pós-teste. Nesta última fase, os participantes resolveram as mesmas questões do pré-teste. Após a análise dos resultados do pós-teste, a pesquisadora percebeu que o uso do procedimento aritmético, na resolução de problemas, predominou no pré-teste. Tal achado, talvez possa ser explicado pelo fato de que, na quinta série, o ensino formal da álgebra ainda não havia sido iniciado.

Todavia, no pós-teste, após a intervenção, o uso do procedimento algébrico foi eleito pelos dois grupos como o procedimento mais adequado na resolução de problemas e equações. A análise dos resultados indicou que ambos os grupos melhoraram seus desempenhos no pós-teste. Tal achado parece indicar que a intervenção foi efetiva para modificar a forma como os alunos resolvem problemas e equações algébricas.

Em termos de contribuição teórica, a pesquisa de Lins Lessa (1996), foi importante por dois motivos: em primeiro lugar porque mostrou que ambos os suportes didáticos utilizados na pesquisa (balança de dois pratos e problemas verbais) promovem o uso do procedimento algébrico para a resolução de problemas. Em segundo lugar porque evidenciou que, na iniciação ao conteúdo algébrico, o que parece ser mais importante, não é o suporte didático em si, mas ao engajamento do aluno na tarefa onde tal suporte seja combinado a problemas com diferentes estruturas algébricas. Em outras palavras, não adianta muito fazer vários exercícios sempre utilizando a mesma estrutura algébrica. É preciso envolver os alunos em situações didáticas onde todos os invariantes do campo conceitual algébrico sejam demonstrados.

Estudo realizado por Pinto (2001) teve por objetivo investigar as contribuições de uma sequência didática para o ensino de álgebra inicial (*early algebra*). Participaram da pesquisa 18 crianças, de ambos os sexos, cursando o 2º ano do 1º ciclo, de escolas públicas da cidade de Fortaleza. A idade das crianças variou entre sete e oito anos e todos pertenciam ao mesmo extrato social.

A pesquisadora aplicou uma *sequência didática*[11], em um contexto de laboratório, composta de quatro módulos que abordavam um conjunto de noções que constituem o campo conceitual da álgebra, a saber:

Módulo 1: composto de figuras que mostravam uma espécie de “máquina mágica” que modificava todos os objetos nela introduzidos;

Módulo 2: composto por figuras que apresentavam outra “máquina mágica” que transformava uma representação icônica em representação simbólica;

Módulo 3: composto de quatro atividades envolvendo os símbolos (>), (<) e (=);

Módulo 4: composto por um problema algébrico envolvendo a passagem de uma relação de desigualdade para uma igualdade.

Os resultados obtidos por Pinto (2001) parecem indicar que, as crianças que passaram pela sequência didática, adquiriram noções de álgebra inicial, tais como: transformações, o uso de letras para representar diferentes objetos e as noções de igualdade e desigualdade.

Estes resultados tornam-se interessantes porque evidenciam a possibilidade de ensino-aprendizagem de conceitos algébricos já nas séries inicias do ensino fundamental e atestam a eficácia do uso de sequências didáticas no desenvolvimento de conceitos algébricos.

Han e Chang (2007) realizaram um estudo piloto para verificar a possibilidade de adoção de um Sistema de Álgebra Computacional - CAS[12] em Educação Matemática. Neste estudo, os participantes foram 11 estudantes de uma escola do 8º ano e o recurso digital utilizado foi uma calculadora gráfica especial, modelo Casio ClassPad 300®. Os dados foram coletados, através de, três tipos de tarefas: modelagem em álgebra, encontrar padrões de integração e otimizar a superfície, área ou volume. Depois de um mês de treinamento para as competências básicas na utilização da ClassPad, os alunos foram convidados a resolver as três tarefas em duas horas, sendo instruídos a utilizar ClassPad caso fosse necessário.

---

[11] Maiores informações sobre a sequência didática podem ser obtidas em Da Rocha Falcão et al. (2000).
[12] Sigla inglesa para Computer Algebra System.

Os resultados mostram que os alunos resolvem equações complicadas melhor com o uso do CAS, do que utilizando apenas lápis e papel, eles também apresentaram grande interesse em resolver problemas mais complicados de modelização com o uso do CAS. Os autores constataram que alunos tiveram algumas dificuldades em decidir quando e como usar o CAS e que os obstáculos encontrados por eles serviram para ajudar a expandir sua compreensão de Matemática de uma forma mais significativa.

Banerjee e Subramaniam (2007) realizaram estudo com 31 estudantes do 6º ano sobre os aspectos sintáticos da álgebra. Os autores propuseram aos estudantes várias atividades para aplicação deste entendimento nos contextos em que é exigido o uso da álgebra como uma ferramenta para fins de generalização, previsão, comprovação e justificativa que pode ser denominado como raciocínio com expressões algébricas. As respostas dos estudantes foram analisadas buscando identificar sua compreensão acerca da letra em uma equação, a capacidade para representar uma situação com uso da letra e à apreciação da manipulação de expressões algébricas para se chegar a conclusões quanto à situação. Os resultados preliminares desse estudo indicam que os estudantes mostraram entendimento da letra como permanente para certo número de situações e que a expressão algébrica poderia ser simplificada para tirar conclusões sobre as situações.

Kieran e Damboise (2007) realizaram um estudo comparativo com duas turmas de dez alunos com idades entre 15 e 16 anos, que apresentavam muita dificuldade em álgebra. O objetivo era auxiliar alunos com dificuldade a compreender álgebra. Os participantes foram alocados em dois grupos: controle e experimental. Dois conjuntos de tarefas paralelas foram concebidos para os grupos, tendo como a principal diferença entre elas o uso da ferramenta CAS. Para o grupo experimental (GE) foi disponibilizado a calculadora gráfica com a CAS Tecnologia e para o grupo controle (GC) não foi disponibilizado nenhuma ferramenta tecnológica.

A intervenção, para ambos os grupos (GC e GE), foi realizada da seguinte forma: os participantes tiveram aulas complementares de álgebra, lecionadas pelo mesmo professor, ao longo de um mês. Cada aula tinha duração de 50 minutos e era realizada a cada 2 dias.

Ao final da intervenção os participantes foram submetidos a uma avaliação. Os resultados indicam que o GE, que utilizou a CAS tecnologia melhorou muito mais que o GC que não a utilizaram. Os autores constataram que o uso da CAS tecnologia desempenhou três papéis que foram determinantes no aumento da motivação e confiança dos alunos: (i) gerador de respostas exatas, (ii) verificador de trabalho escrito dos estudantes e (iii) instigador da discussão em sala de aula. Estes achados sugerem que a aprendizagem da álgebra pode ser beneficiada com a integração da CAS Tecnologia.

Entretanto, colocando em perspectiva os estudos de Kieran (1995), Lins Lessa (1996), Pinto (2001), Han e Chang (2007), Banerjee e Subramaniam (2007), Kieran e Damboise (2007) verifica-se que é possível desenvolver conceitos algébricos utilizando diferentes suportes didáticos e que a mediação do professor tem importância fundamental nesse processo, principalmente, na ajuda aos estudantes, visando à superação dos obstáculos encontrados para desenvolver o raciocínio algébrico.

Todavia, estes estudos, em suas análises não dão ênfase a um fator de vital importância para o sucesso do estudante na atividade algébrica: a metacognição. Como sugerido por Vergnaud (2003, p. 25), a metacognição "implica em um retorno reflexivo sobre a própria atividade e enfatiza a relação entre as propriedades do objeto e as propriedades da ação. [...] devemos ser cognitivos para dar conta de uma tarefa, e metacognitivos, para compreender o que fizemos".

Percebe-se que, mesmo com o crescente número de pesquisas sobre o desenvolvimento de conceitos algébricos e a utilização de diferentes artefatos, algumas questões, ainda, precisam ser respondidas, por exemplo: como inserir um objeto de aprendizagem digital em uma sequência didática desenvolvida para o ensino de equações do 1ª grau? Que efeitos isso poderia causar na aprendizagem dos estudantes? Quais os possíveis ganhos cognitivos obtidos pelos usuários desta sequência didática na resolução de problemas e equações algébricas?

Em face disso, o presente estudo tem por objetivo investigar os efeitos de uma intervenção específica com a utilização de uma sequência, onde o estudante será desafiado a refletir sobre sua ação e encorajado a desenvolver estratégias próprias do pensamento algébrico durante a resolução de equações do lº grau. A referida sequência será composta por seis atividades que incluem o uso de situações-problema e do objeto de aprendizagem Balança Interativa.

Considerando que este estudo envolve o uso de um objeto de aprendizagem, torna-se pertinente discutir o que se denomina objetos de aprendizagem, suas características, vantagens e limites para o ensino presencial e/ou à distância.

Objetos de Aprendizagem e Educação Matemática

A utilização de objetos de aprendizagem, não digitais, no ensino não é uma ideia recente. Desde a década de 1970, técnicos em didática têm pensado em armazenar pequenos fragmentos de conteúdo instrucional para reutilização no processo de ensino. Porém, o uso de objetos de aprendizagem digitais - *OA*[13], como ferramentas interativas na educação, surgiu apenas no final do século XX impulsionado pela popularização da *Web* onde é possível encontrar esses objetos com facilidade.

De acordo com a norma IEEE 1484.12.1, do *Institute of Electrical and Electronics Engineers* (IEEE), órgão regulador que desenvolve normas, recomendações e guias para implementação de sistemas de plataformas para educação à distância, um objeto de aprendizagem é definido como qualquer entidade, digital ou não, que possa ser usada para aprendizagem, educação ou treinamento (IEEE, 2002).

Todavia, esse conceito ficou muito amplo, uma vez que, por esta definição, pode-se concluir que qualquer objeto, como uma caneta ou um pincel, por exemplo, poderiam ser considerados objetos de aprendizagem. Sendo assim, faz-se necessário uma revisão na literatura para uma melhor compreensão, acerca, desse conceito.

Constata-se na literatura, que há diferentes denominações para o termo objetos de aprendizagem. Isto ocorre porque alguns pesquisadores dão ênfase a uma característica específica do objeto de aprendizagem e o denominam segundo essa característica. Por exemplo: Wiley (2000) utiliza o termo recurso digital; Gibbons e Nelson (2001); Muzio, Heins e Mundell (2001); Tarouco, Fabre e Tamusiunas (2003) o denominam de objeto instrucional; e Castro-Filho (2007) e Nunes (2005) utilizam o termo objetos de aprendizagem.

---

[13] Neste estudo, usa-se a sigla OA sempre que se fizer referência aos objetos de aprendizagem. Em inglês a sigla utilizada é LO (*learning Objects*).

O primeiro pesquisador a popularizar o termo objetos de aprendizagem foi David Wiley, que conceituou OA como “qualquer recurso digital que possa ser reutilizado para o suporte ao ensino” (WILEY, 2000, p.3). Esta definição necessita de uma análise mais aprofundada, uma vez que, dessa forma, uma simples foto, numa apresentação *Power Point*, pode ser considerada um objeto de aprendizagem. Entende-se que um objeto de aprendizagem possui outras características mais importantes que apenas ser “um recurso digital” (CASTRO-FILHO; LEITE; FREIRE; MACEDO, 2007).

Em outro estudo, Gibbons e Nelson (2001, p. 5) definem objeto de aprendizagem como “um elemento ou parte da arquitetura de um evento instrucional que foi modelado para ser usado independentemente em outra ocasião”. Salienta-se que esta conceituação, bem como a anterior, destacam a capacidade de reutilização dos objetos de aprendizagem.

Tarouco, Fabre e Tamusiunas (2003, p.2) consideram os OA como objetos educacionais e os define como “qualquer recurso, suplementar ao processo de aprendizagem, que pode ser reusado para apoiar a aprendizagem”. Outros pesquisadores como Muzio, Heins e Mundell (2001) compartilham dessa mesma visão e o conceituam como um objeto que é designado e/ou utilizado para propósitos instrucionais. Estes autores reforçam a característica instrucional dos OA com ênfase nas suas possibilidades de comunicação entre professor-aluno.

Bettio e Martins (2004, p. 3), denominam OA como “entidades digitais utilizadas para divulgar informação através da internet, as quais são independentes umas das outras”. Numa perspectiva mais ampla que a anterior, Sá Filho e Machado (2004), denominam objeto de aprendizagem como recursos digitais, que podem ser usados, reutilizados e combinados com outros objetos para formar um ambiente de aprendizado rico e flexível.

Outros pesquisados como Pimenta e Baptista (2004, p. 102) conceituam os objetos de aprendizagem com base em características como: tamanho, capacidade de reutilização e combinação com outros objetos.

> [...] unidades de pequena dimensão, desenhadas e desenvolvidas de forma a fomentar a sua reutilização, eventualmente em mais do que um curso ou em contextos diferenciados, e passíveis de combinação e/ou articulação com outros objetos de aprendizagem de modo a formar unidades mais complexas e extensas.

Neste estudo, adota-se a definição proposta por Nunes (2005) por entender que, atualmente, essa representa o conceito mais adequado para objetos de aprendizagem. Nunes conceitua OA como materiais digitais (imagens, jogos, simulações, vídeos, recursos multimídia) que apóiam o processo de ensino e aprendizagem e têm um objetivo educacional, previamente, definido. Nunes destaca que, na hora de desenvolver recursos educacionais multimídia, é importante considerar os OA nos níveis do indivíduo como aprendiz, da escola, da cidade, região ou estado. As características, expectativas e necessidades próprias de cada região e os modos de satisfazer esses objetivos e necessidades estão todos inter-relacionados.

Assim, constata-se na literatura da área que o conceito de objeto de aprendizagem é recente, encontra-se em construção e constante re-elaboração. No entanto, verifica-se que há entre os pesquisadores um consenso quanto ao que um OA deve conter, a saber: (i) propósito educacional definido, (ii) um elemento que estimule a reflexão do estudante e que (iii) seja construído de forma que possa ser reutilizado em outros contextos de ensino-aprendizagem (CASTRO-FILHO, 2007; NUNES, 2005; WILEY, 2000).

Com relação à capacidade de reutilização dos OA, há dois tipos diferentes de reutilização que se destacam: reutilização técnica e reutilização pedagógica. A reutilização técnica diz respeito à possibilidade de o programador aproveitar o código de um OA, já existente, para realizar as adaptações necessárias sem a necessidade de escrever um novo código começando do zero.

A reutilização pedagógica é a possibilidade de reuso do objeto em outra disciplina cujo conteúdo tenha uma relação de interdisciplinaridade. Por exemplo, um OA utilizado em uma disciplina do curso de Biologia pode ser utilizado com sucesso em outra disciplina do curso de Medicina ou de Enfermagem. O mesmo pode ocorrer com um objeto de Matemática que pode ser reutilizado na disciplina de Física (SÁ FILHO; MACHADO, 2004; SALES *et al*., 2007).

Como costuma ocorrer com outros recursos pedagógicos, os objetos de aprendizagem, apresentam vantagens e limitações, que serão discutidos no próximo tópico.

1.3.1. Vantagens e limites dos objetos de aprendizagem no processo de ensino e aprendizagem

Diversos autores discutem as vantagens e limitações (BETTIO; MARTINS, 2004; CASTR0-FILHO, 2007; NUNES, 2005; MACEDO; MACEDO; CASTRO-FILHO, 2007) acerca do uso de OA como recurso didático seja este na modalidade presencial ou à distância. Listam-se abaixo, as vantagens de utilização de objeto de aprendizagem:

- ***Reutilização*** - os objetos de aprendizagem são bastante flexíveis. Eles foram projetados para serem reutilizados em outras disciplinas. Esta reutilização se traduz em economia para a escola. Ao reutilizar um objeto de aprendizagem, a escola diminui os custos com a compra de novos programas e licenças de instalação o que constituem uma grande economia (WILEY, 2000);

- ***Praticidade*** - os objetos de aprendizagem estão disponíveis na *Web* e podem ser acessados de qualquer computador que esteja conectado a internet. Utilizar um OA não requer do professor conhecimento técnico especializado. Além disso, os OA não necessitam ser instalados no computador (CASTR0-FILHO, 2007);

- ***Durabilidade*** - permite continuar usando recursos educacionais mesmo quando a base tecnológica é alterada, sem que seja necessário, reprojeto ou recodificação (MENDES; SOUZA; CAREGNATO, 2004);

- ***Interoperabilidade*** - é a capacidade que o objeto de aprendizagem possui de operar em conjunto com vários *softwares* de fabricantes diferentes sem apresentar conflitos. O fato de poder utilizar um OA em qualquer plataforma de ensino, em todo o mundo, aumenta ainda mais as vantagens destes objetos (TAROUCO; FABRE; DUTRA, 2003);

- ***Facilidade para Atualização*** - a atualização dos objetos de aprendizagem, mesmo em tempo real, é relativamente simples, desde que, todos os dados relativos a este objeto estejam em um mesmo banco de informações chamado de Repositório de Objetos de Aprendizagem - ROA[14]. O desenvolvedor faz a atualização do AO, diretamente, no repositório e o mesmo ficará disponível, para todos os usuários, já atualizado (SÁ FILHO; MACHADO, 2004);

- ***Indexação e Procura*** - a padronização dos OA e a utilização de assinaturas digitais tende a criar uma maior facilidade de indexação e procura de objetos de aprendizagem. Isto é de grande importância para o professor que necessita encontrar na *Web* um determinado objeto para completar seu conteúdo programático (BETTIO; MARTINS, 2004).

Estas vantagens mostram que a utilização de objetos de aprendizagem pode contribuir para facilitar e melhorar a qualidade do ensino, presencial ou à distância, proporcionando aos professores e alunos o acesso às ferramentas interativas capazes de modificar a forma de busca e apreensão do conhecimento.

Os objetos de aprendizagem também possuem limites. Algumas pessoas acreditam que, o objeto sozinho pode levar o aluno à aquisição de conhecimentos escolares. Na verdade, o computador sozinho ou mesmo o objeto de aprendizagem de aprendizagem per si, não

[14] Espécie de biblioteca digital ou banco de dados que armazena objetos de aprendizagem. Nesses repositórios os objetos são guardados de maneira organizada, seguindo regras de catalogação que facilitam a recuperação, reutilização e atualização dos objetos (MACHADO, 2002).

produz o conhecimento. Um objeto de aprendizagem segue apenas as rotinas pré-estabelecidas pelo programador de computador. Dessa forma, do ponto de vista da didática, o professor deve tomar algumas decisões e refletir sobre os objetivos que pretende atingir ao utilizar o objeto de aprendizagem; pensar sobre o tipo de atividade que pretende realizar e estar atento ao número de computadores versus o número de alunos da turma.

Além disso, do ponto de vista epistemológico, o professor precisa tomar alguns cuidados na escolha do objeto de aprendizagem, tais como:

(i) Deve haver relação entre o objeto de aprendizagem escolhido e a atividade que o professor pretende desenvolver com os alunos. Há diferentes opções de OA para um mesmo conteúdo, de maneira que, cabe ao professor escolher o OA mais adequado, saber utilizá-lo e aplicá-lo as situações de sala de aula (NUNES, 2005).

(ii) O objeto de aprendizagem não deve ter a pretensão de substituir o professor nem de cobrir determinado conteúdo por completo. OA são fragmentos de um conteúdo maior, que possui relação com outros conteúdos. Esta passagem, de um conteúdo micro para um conteúdo macro e suas relações com outras disciplinas, devem ser realizadas com a mediação do professor. Recomenda-se que o OA seja sempre utilizado na presença do professor da disciplina e não apenas com o especialista em informática educativa, que geralmente, é o responsável pelo laboratório (CASTRO-FILHO, 2007).

(iii) Os OA estão fundamentados em diferentes concepções de aprendizagem. É desejável que o professor saiba avaliar, pedagogicamente, o objeto de aprendizagem. A escolha do OA não pode ser feita só por catálogos ou internet, ou, porque ele apresenta uma bela interface, sons e movimentos. Faz-se necessário o conhecimento da concepção de aprendizagem que serviu com base na confecção do objeto de aprendizagem e sua relação com o Projeto Político Pedagógico da Escola (MACEDO; MACEDO; CASTRO-FILHO, 2007).

(iv) Os objetos de aprendizagem devem apresentar uma situação-problema desafiadora para o aluno. Isso estimula a reflexão e motiva o aprendiz a continuar utilizando o objeto. Alguns OA possuem uma interface bonita, têm sons e movimentos, todavia, falta-lhes uma situação desafiadora (CASTRO-FILHO, 2007).

(v) Deve-se estar atento ao conteúdo dos objetos de aprendizagem. Cabe ao professor verificar se há erros conceituais nos objetos de aprendizagem. Um desenvolvedor que não é especialista na disciplina pode até desenvolver um bom objeto, do ponto de vista técnico, porém apresentando alguns erros conceituais que não deveriam ocorrer em um conteúdo educacional de qualidade.

Nos repositórios podem ser encontrados objetos de aprendizagem para diferentes disciplinas, conteúdos, formatos e níveis de ensino. Os repositórios possuem catálogos por assunto e uma descrição sobre os objetos, bem como, o guia do professor onde o usuário poderá se informar sobre as formas de utilização de cada objeto, sobre o tempo de aplicação, a avaliação e atividades complementares que podem ser realizadas antes ou depois da aplicação do objeto.

Alguns repositórios, como o RIVED (Rede Interativa Virtual de Educação), por exemplo, mantêm o controle estatístico sobre o número de vezes que os objetos foram acessados e/ou baixados através de *download*. Estes dados, sobre a utilização dos OA, são importantes porque possibilitam identificar os objetos que tem mais aceitação entre professores e alunos.

Os repositórios são atualizados, periodicamente, e recebem cada vez mais objetos. Acredita-se que o uso de objetos de aprendizagem baseados em computação gráfica, simulações digitais, jogos educativos e realidade virtual em atividades educativas proporcionarão condições promissoras para a investigação dos efeitos da mediação digital sobre o processo de construção do conhecimento matemático da criança (FERREIRA; RANGEL; BERCHT, 2005).

Vários pesquisadores têm desenvolvido estudos empíricos sobre a utilização de objeto de aprendizagem no ensino de conceitos matemáticos: Castro-Filho *et al.* (2003); Castro-Filho, Macedo, Leite e Freire (2005); Freire (2007); Leite (2006).

Castro-Filho *et al.* (2003) investigou o uso de um objeto de aprendizagem e de uma balança de dois pratos para o desenvolvimento de conceitos algébricos. Nesta pesquisa participaram vinte e seis alunos e a professora de Matemática de uma turma do sétimo ano de uma escola pública da cidade de Fortaleza. Os alunos tinham média de idade de doze anos e seis meses. Eles resolveram uma lista com dez problemas verbais utilizando uma balança de dois pratos. Depois, os alunos foram ao Laboratório de Informática Educativa da escola para descobrir incógnitas com o uso de um objeto de aprendizagem.

Os resultados do estudo de Castro-Filho *et al.* (2003) indicaram que os alunos desenvolveram a compreensão dos conceitos de incógnitas, equação e inequação.

Castro-Filho, Macedo, Leite e Freire (2005) realizaram um estudo com um grupo de alunos de uma escola pública da cidade de Fortaleza. Este grupo era formado por dois alunos do sétimo ano, dois do oitavo ano e dois do nono ano. A média de idade dos alunos era de treze anos. Eles foram submetidos a duas sessões com uso do objeto de aprendizagem Cartas Interativas.

Os alunos foram acompanhados pelo experimentador através de entrevistas baseadas no Método Clínico. No início da atividade os alunos utilizaram o objeto de aprendizagem através da estratégia tentativa e erro. Após a mediação do pesquisador os alunos desenvolveram estratégias próprias do pensamento algébrico, tais como: **Busca pela metade**: corresponde a iniciar cada teste de uma nova carta com o número que representa a metade dos valores possíveis; **Teste do valor intermediário**: esta estratégia é utilizada quando apenas três valores são possíveis para a carta desconhecida (incógnita); **Subtração indireta**: esta estratégia equivale a acrescentar um número ao lado da carta desconhecida, para subtrair o seu valor das cartas conhecidas que estão do outro lado do tabuleiro; **Uso de cartas desconhecidas**: consiste em utilizar cartas desconhecidas após seus valores terem sido descobertos; **Soma de Valores Conhecidos**: somar as cartas cujos valores são conhecidos para substituir as cartas que estão faltando no jogo.

Lerman e Zevenbergen (2006) desenvolveram um estudo sobre o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na sala de aula. Este estudo teve por objetivo identificar como as TIC são utilizadas no ensino e aprendizagem da Matemática. Para tanto, foi traçada uma metodologia de coleta de dados que durou, aproximadamente, dois anos e foi realizada em oito escolas espalhadas pelo país. As escolas foram escolhidas, intencionalmente, através de técnicas de amostragem. Dessa forma, elas são representativas da diversidade de escolas australianas, de tal forma, que representam: áreas rurais / urbanas, mesma faixa econômica da população, indígenas / não indígena, alto uso de tecnologia / baixo uso de tecnologia e escolas públicas e privadas.

A coleta de dados foi realizada com o uso de uma câmera de vídeo. Para que tal procedimento fosse possível, cada escola recebeu uma câmera e as aulas de Matemática, além de filmadas, foram analisadas por três comentadores, ou seja, os pesquisadores assistentes analisaram cada aula videografada para assegurar a validade dos aspectos de produtividade pedagógica identificados no vídeo.

Os dados analisados, durante a pesquisa, indicam que o uso das TIC, pelos professores, diminui o controle sobre os estudantes e estes ficam mais livres para aprender cada um no seu próprio ritmo. Outro dado interessante, é que, o uso das TIC contribuiu para a diminuição de aulas expositivas baseadas apenas na oralidade, o que pode ser positivo para o ensino, desde que, o material digital utilizado seja eficiente para fornecer aos alunos os fundamentos necessários à compreensão e formação de conceitos.

Pesquisa realizada por Losano, Sandoval e Trigueros (2006) com o propósito de relatar a forma como os estudantes de uma escola primária aprendem a Matemática com a utilização de programas interativos de computador. O objeto de estudo dessa pesquisa foi o ambiente conhecido como Enciclomedia[15] que é um projeto mexicano de larga escala que tem como objetivo enriquecer o ensino e a aprendizagem na escola primária trabalhando com computadores na sala de aula. Nessa pesquisa participaram quatro grupos com 25 alunos cada, duas classes do 5º ano e duas, do 6º ano, perfazendo um total de 100 alunos, com idade entre 11 a 13 anos. Dois pesquisadores foram à sala de aula e utilizaram gravações de áudio e vídeo para documentar as ações dos alunos durante a utilização de *softwares* educativos para o ensino de Matemática.

Os *softwares* utilizados pelos alunos foram o Perimarea e The Balance. O Perimarea é um *software* destinado ao ensino de conceitos matemáticos de geometria plana onde os estudantes podem realizar o cálculo do perímetro e da área de algumas figuras geométricas contando os quadrados que estão dentro de uma grade.

O The Balance é um *software* que permite ao aluno comparar frações e resolver problemas do livro texto, através da manipulação de uma balança virtual onde realizam simulações para comparar pesos diferentes e descobrir os valores ocultos de algumas frações que são representadas por incógnitas.

Os resultados obtidos, na primeira sessão de observação, indicaram que ao utilizarem o *software* Perimarea, os estudantes respondiam por tentativa e erro. Eles não recebiam um *feedback* do programa mostrando onde erravam. Ao final da lição, ficou evidente que eles não tinham mudado suas ideias iniciais de área como sendo o ponto central da superfície da forma.

Resultados da segunda sessão indicam que, ao utilizarem o *software* The Balance, os estudantes recebiam um *feedback* imediato, pois o programa mostrava se os pesos estavam em

[15] Mais informação sobre o Projeto Enciclomedia podem ser obtidas em http://www.enciclomedia.edu.mx/

equilíbrio ou não. Desse modo, os alunos foram refinando suas estratégias e começaram a produzir mais eficientemente e sistematicamente métodos para obter frações que equilibravam a balança. Aos poucos, os alunos foram abandonando o uso de números aleatórios como sendo uma estratégia válida para resolver o problema. Após algumas sessões com o programa The Balance, o comportamento dos alunos ficou diferente de quando eles utilizaram o Perimarea.

Tais dados sugerem que um *software* educacional precisa: fornecer *feedback* imediato, ser superior ao uso de outro material concreto utilizado para o mesmo propósito (e.g. lápis, papel, quadro etc.), apresentar uma situação-problema que seja desafiadora para o aluno e o instigue a desenvolver hipóteses para resolvê-la e também, devem ser testados com alunos e professores para verificar sua viabilidade (CASTRO-FILHO; LEITE; FREIRE; MACEDO, 2007).

Leite (2006) investigou a análise das trocas dialógicas entre pares, durante o uso do objeto de aprendizagem balança interativa, para compreender que mecanismos influenciam as interações, tendo em vista, as possíveis contribuições do professor como um mediador para construção de conhecimentos algébricos.

A pesquisa foi realizada com uma turma de 7ª série, composta de 23 alunos e o professor de Matemática da referida série. Todos os participantes utilizaram o objeto de aprendizagem Balança Interativa durante o horário da aula de Matemática. Entretanto, a autora salienta que apenas seis alunos da turma, divididos em três duplas, e o professor de Matemática foram analisados nesse estudo.

Cada sessão, com as díades foi gravada e analisada, posteriormente, através do recurso da *videografia* e da *análise microgenética*[16]. Os diálogos foram transcritos e analisados através do método de Análise da Conversação, proposto por Marcuschi (1991), a fim de

[16] Maiores informações sobre videografia e análise microgenética podem ser obtidas em Meira (1994).

capturar a riqueza da interação proporcionada pelas trocas dialógicas entre as díades com a mediação do professor de Matemática.

Os resultados indicam que as trocas dialógicas entre o professor e os alunos, durante o uso do objeto de aprendizagem, estão, na sua maioria, voltadas à compreensão de conceitos matemáticos referentes à equação, inequação e incógnita. Também, foi observada uma grande continuidade de ações entre os participantes durante a atividade, sugerindo que a mediação do professor aparece como orientadora das ações.

Recentemente, Freire (2007) elaborou uma série de atividades com materiais concretos e programas de computador que ajudem na construção do pensamento algébrico e analisou como as crianças formulam suas hipóteses acerca dessas atividades. Nesse estudo foram realizadas atividades envolvendo uma balança de dois pratos, problemas verbais e dois objetos de aprendizagem digitais: *Balança Interativa e Balança Seriada.*

A pesquisa foi realizada com oito participantes de duas turmas, terceiro e quinto ano, de uma escola pública municipal da cidade de Fortaleza, com idades que variavam entre 8 e 10 anos. Um dos objetivos do estudo era examinar se os alunos compreendiam o princípio de equivalência algébrica modelizados nos problemas verbais e de que forma elaboravam e testavam hipóteses quando descobriam incógnitas no Balança Interativa e no Balança Seriada.

Os resultados obtidos por Freire (2007) indicam que o importante não é somente o tipo de atividade que está sendo desenvolvida (uso de materiais concretos ou virtuais), mas também o engajamento dos alunos na tarefa. Cada atividade sejam elas, problemas verbais, balança de dois pratos ou objetos de aprendizagem desencadearam estratégias diferentes de resolução de problemas algébricos que se mostraram úteis na aquisição de conceitos como igualdade, desigualdade, incógnita, relações entre termos conhecidos e desconhecidos que são conceitos fundamentais para a compreensão da álgebra.

Dentre as estratégias categorizadas por Freire (2007) no uso da balança de dois pratos temos:

(i) Subtrativa – o aluno acha o valor de uma incógnita, colocando um peso conhecido em dos pratos da balança e no outro prato põe outro peso conhecido junto aos pesos com valores desconhecidos. O uso da estratégia subtração consiste em constatar que, o ato de acrescentar um peso dos pratos da balança, é equivalente a subtrair este mesmo valor no outro prato da balança;

(ii) Análise de intervalo – o aluno analisa o intervalo onde, possivelmente, irá encontrar o valor da incógnita. Por exemplo, se um peso é maior que 100 gramas e menor que 400 gramas, então seu valor deve estar dentro desse intervalo;

(iii) Estimativa – quando o aluno coloca na balança o peso aproximado ao valor que ele representa, aumentando ou diminuindo de forma gradativa. Nesse caso, o aluno procura estimar o peso antes de colocá-lo na balança. Por exemplo, se achar que o peso pode valer aproximadamente 200 gramas, coloca esse valor na balança de dois pratos.

Já na atividade com o OA Balança Interativa os alunos desenvolveram as seguintes estratégias:

(i) Análise de intervalo – o aluno analisa o intervalo onde, possivelmente, está o valor da incógnita. Se um peso é maior que dois e menor que cinco, então o valor do peso desconhecido estará dentro desse intervalo, ou seja, pode ser três ou quatro;

(ii) Observação dos pesos já registrados – o aluno observa os pesos que já saíram e os elimina na hora de escolher um valor para as incógnitas;

(iii) Busca pela metade – consiste em encontrar cada peso, iniciando com a metade dos valores possíveis. Por exemplo, ao tentar descobrir o valor de qualquer peso, o aluno inicia com o número 5. Se o programa apresentar o *feedback* maior que cinco, então o peso desconhecido pode ser 6, 7, 8, 9 ou 10. Se o valor for menor que cinco, então o peso pode ser 4, 3, 2 ou 1. Se o valor do peso for igual a 5, o aluno encontrou a solução do problema na primeira tentativa. Essa estratégia lhe permite diminuir pela metade o intervalo onde estará o valor da incógnita;

(iv) Intercalar pesos – o aluno não usa uma sequência de pesos para tentar descobrir um valor desconhecido, ao contrário, ele utiliza uma sequência alternada. Por exemplo: se testou o "C" como o número sete, percebendo que a incógnita era maior, testa o valor dez e observa o *feedback* do Balança. Se o valor da incógnita for menor que dez, então o aluno percebe que "C" pode ser oito ou nove;

(v) Sequência de pesos – o aluno tenta uma sequência de peso para descobrir o valor desconhecido. Por exemplo, para descobrir o valor do peso B, coloca o peso 1, logo depois o 2, em seguida o 3, e assim sucessivamente até achar o peso;

(iv) Uso de extremidades – o aluno inicia a descoberta de uma incógnita pelos valores dos pesos que ficam na extremidade, ou seja, joga os pesos 1 ou 9 todas as vezes que inicia a busca do valor de um peso desconhecido. Percebe-se que Freire (2007) encontrou mais estratégias no uso do OA que no uso da balança de dois pratos.

Colocando em perspectiva os estudos de Castro-Filho *et al.* (2003), Castro-Filho, Macedo, Leite e Freire (2005), Lerman e Zevenbergen (2006), Losano, Sandoval e Trigueros (2006), Leite (2006) e Freire (2007) percebe-se que é possível desenvolver conceitos algébricos utilizando diferentes recursos digitais. Todavia, observa-se que nestes estudos não foi realizada uma intervenção de natureza tutorada; não havia grupo controle; nem uso de pré-teste e pós-teste para medir o quanto participantes avançaram em suas aprendizagens. Também não foi utilizada nenhuma ferramenta estatística para comparar se a melhora obtida no desempenho dos alunos era significativa.

Considerando estas lacunas, esta pesquisa utilizará um objeto de aprendizagem digital para o desenvolvimento de conceitos algébricos numa sequência didática onde dois grupos (controle e experimental) serão comparados no início e no final da intervenção tutorada e testes estatísticos medirão se o grupo experimental apresenta uma melhora significativa em relação ao grupo controle.

Apresenta-se, a seguir, uma descrição detalhada do Balança Interativa. Escolheu-se o OA Balança Interativa pelas seguintes razões: é gratuito, de fácil manuseio, não exige o uso de computadores potentes e já há registros sobre a utilização deste objeto na literatura que trata do uso de recursos computacionais para o desenvolvimento de conceitos algébricos.

1.3.2. Balança Interativa

O Balança Interativa é um objeto de aprendizagem, com a tipologia de jogo, onde ícones de pesos com letras (incógnitas) e de pesos com números são comparados em uma balança de dois pratos. O desafio proposto ao aluno é descobrir os valores associados, aleatoriamente, às letras. Para isso, o usuário deverá utilizar o OA para pesar os pesos conhecidos e desconhecidos, compará-los e chegar a conclusões sobre os valores dos pesos desconhecidos.

O Balança Interativa foi desenvolvido pelo Grupo Proativa (Grupo de Pesquisa e Produção de Ambientes Interativos e Objetos de Aprendizagem) com o objetivo educacional de trabalhar noções de equação, inequação, incógnita e resolução problemas através da simulação de uma balança de dois pratos na tela do computador.

Para iniciar o jogo, o usuário deve arrastar, com o *mouse*, um peso com letra (incógnita) e soltá-lo em cima de um dos pratos da balança. O próximo passo é colocar um peso (com valor numérico) em outro prato da balança. Cada vez que os pesos são colocados em qualquer dos pratos, a balança pode apresentar um estado de equilíbrio - quando os pesos dos dois lados da balança são iguais - ou desequilíbrio - quando os pesos são diferentes. Neste caso, são possíveis duas configurações: o prato que fica à direita vir a ser mais pesado (e o da esquerda mais leve) ou o prato que fica à esquerda vir a ser mais pesado (e o da direita mais leve). Estabelecendo combinações de igualdade e desigualdade o aluno pode encontrar o valor dos pesos desconhecidos. Ressalta-se que em cada prato da balança podem ser colocados, no máximo, quatro pesos.

Diferentemente de uma balança comum, que permite o uso de estimativa para descobrir um peso desconhecido, no Balança Interativa os valores das incógnitas não podem ser determinados por aproximação, pois a balança virtual apresenta apenas três estados: em equilíbrio, desequilíbrio para a direita e desequilíbrio para a esquerda. Essa diferença permite que os alunos, ao utilizarem o Balança Interativa, elaborem diferentes estratégias em relação ao uso de uma balança real (FREIRE, 2007).

Outra diferença entre o uso de uma balança virtual e uma balança real é que o os objetos digitais são mais precisos e não apresentam o inconveniente de uma balança comum que, mesmo diante de pesos iguais, costuma fazer que um de seus pratos se incline um pouco mais para a direta ou para a esquerda.

O objeto de aprendizagem Balança Interativa possui dez níveis. Os níveis 1 a 5 podem ser chamados de icônicos porque apresentam o conteúdo algébrico na forma de figuras ou ícones (balança de dois pratos e pesos virtuais). Já os níveis 6 a 10 podem ser chamados de simbólicos porque utilizam apenas a manipulação simbólica. Não existem figuras ou ícones nestes níveis. Existem apenas letras e números que são utilizados para manter a igualdade numa área de comparação chamada de tabuleiro.

1.3.3. Representação icônica no Balança Interativa

Os níveis 1 a 5 apresentam o conteúdo algébrico de forma icônica, ou seja, utilizam a metáfora da balança de dois pratos e pesos virtuais (representação icônica) que devem ser manipulados na balança até que seus valores sejam descobertos (Figura 4).

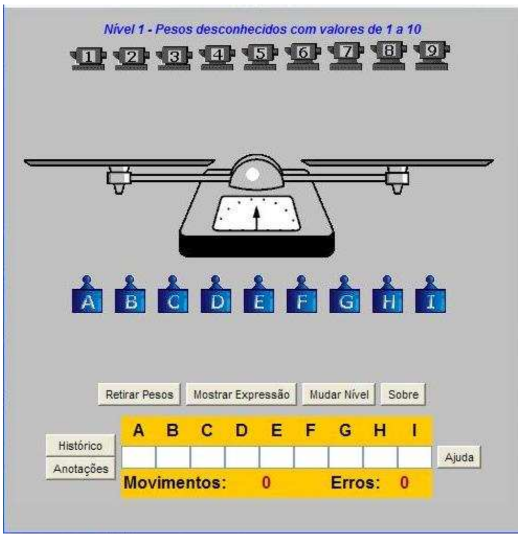


Figura 4 – Balança Interativa

No primeiro nível, o aluno depara-se com pesos desconhecidos (letras que vão do A ao I) cujos valores variam de 1 a 10. Ele tenta descobrir os valores numéricos dessas letras, cada uma, representada por algarismos diferentes. Estabelecendo combinações de igualdade e desigualdade por meio da "balança de dois pratos" o aluno pode chegar ao resultado procurado. Por exemplo, se ele ao escolher o peso A e depois de alguns movimentos souber que $A > 5$, $A > 6$ e $A < 8$ concluirá que o único valor a ser atribuído ao peso A só poderá ser 7.

No nível 2, o grau de dificuldade aumenta e o aluno terá que manipular a balança um número maior de vezes, pois o valor dos pesos desconhecidos passa a variar de 1 a 20. O mesmo ocorre no nível 7. Nos outros níveis, o valor dos pesos desconhecidos varia de um à dez.

Do nível 3 ao nível 5 os pesos conhecidos (números) começam a faltar. O objetivo é criar desafios cada vez maiores de forma que o jogo se torne mais emocionante a cada nível que o usuário consegue avançar. Ver exemplo na Figura 5.

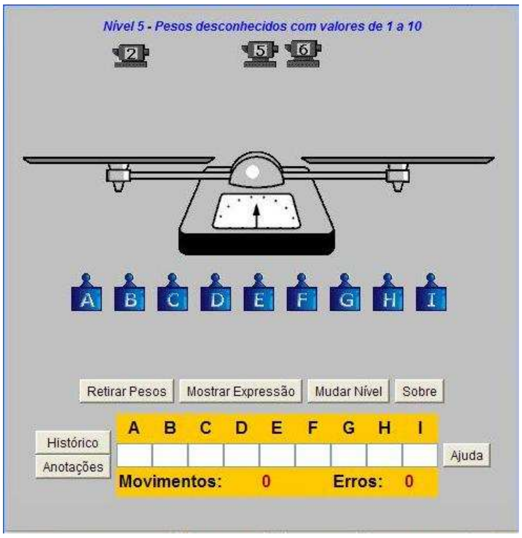


Figura 5 – Balança Interativa – Nível 5 [faltam 6 pesos numéricos].

Enquanto é manipulado, o OA vai registrando o número de erros e de movimentos realizados pelo aluno no uso da balança. O objetivo desse recurso é disponibilizar para o aluno, bem com ao professor, um *feedback* de suas ações. Esse recurso permite que o próprio usuário avalie se está tendo uma boa performance durante a utilização do Balança Interativa. Vale salientar que neste contexto virtual não existe punição ao aluno, em caso de erro, nem o uso de reforço positivo quando o usuário acerta a resposta.

No nível 3 - faltam dois pesos conhecidos, no nível 4 - faltam quatro pesos e no nível 5 - faltam seis pesos. Essa diminuição progressiva do número de pesos conhecidos tem por objetivo levar o usuário a utilizar outras estratégias, que vão além da tentativa e erro, pois, nos casos anteriores (níveis l e 2), havia um peso conhecido para cada incógnita a ser descoberta e isto permitia que o usuário descobrisse o valor da incógnita sem maiores dificuldades. Do nível 3 ao nível 5 a situação se inverte: há mais incógnitas do que números para equilibrar a balança virtual.

A Figura 6 descreve a tela principal do Balança Interativa e suas funções.

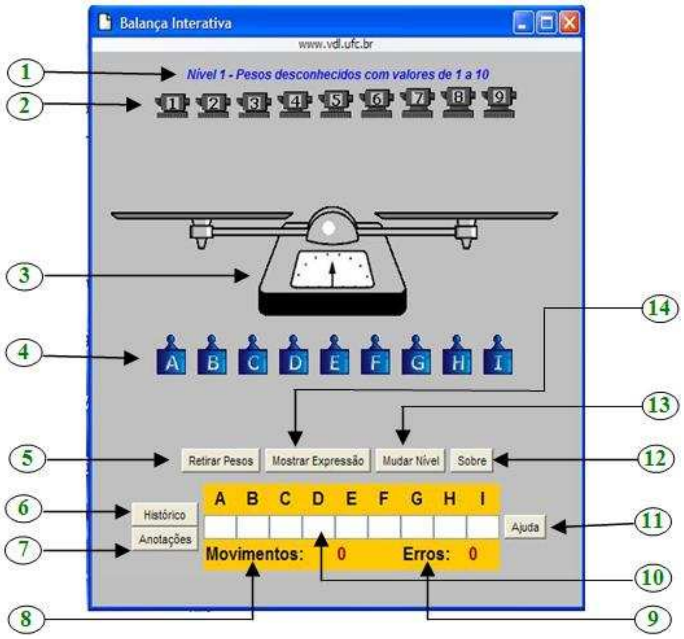


Figura 6 – Balança Interativa – Representação Icônica

Listam-se abaixo, os comando e funções do OA Balança Interativa:

1. Indica o nível que está sendo utilizado. Ao clicar em Jogo, o usuário pode escolher um dos dez níveis que deseja utilizar para iniciar o jogo.
2. Pesos numéricos ou pesos conhecidos (representação icônica) – a quantidade de pesos diminui acordo com o nível de utilização.
3. Balança virtual utilizada para a manipulação dos pesos (representação icônica).
4. Pesos com letras ou pesos desconhecidos (representação icônica) – representam as incógnitas a serem encontradas cujos valores não se repetem no mesmo nível de utilização (letras A - I).
5. Retira todos os pesos que estão nos pratos da balança sem a contagem de movimentos.

6. Registro de todas as tentativas feitas pelo usuário.
7. Permite que sejam feitas pequenas anotações sobre o jogo.
8. Registra o número de movimentos efetuados pelo usuário em cada nível.
9. Registra o número de erros do usuário em cada nível.
10. Local onde são colocados os valores das incógnitas.
11. Notas de ajuda para orientar aos usuários sobre a utilização do OA.
12. Mostra os créditos da obra.
13. Permite que o usuário mude de nível em qualquer momento do jogo.
14. Mostra a expressão algébrica representada na balança virtual.

Conforme pode ser observado na Figura 7, no nível 5 do Balança Interativa, o usuário dispõe de apenas três números para fazer a comparação na balança virtual e descobrir o valor das incógnitas. Neste contexto, o usuário não consegue resolver as situações proposta pelo objeto utilizando apenas a estratégia tentativa e erro. Para se adaptar à nova situação, ele começa a desenvolver novas estratégias diferenciadas, como por exemplo: as estratégias busca pela metade, análise de intervalo, subtração indireta, teste do valor intermediário e combinação de estratégias. Estas estratégias foram identificadas em estudos conduzidos por Castro-Filho e colaboradores (CASTRO-FILHO; LEITE; FREIRE; PASCHOAL, 2003).

1.3.4. Representação simbólica no Balança Interativa

A partir do nível 6 até o nível 10, o objeto não apresenta mais a figura da balança. Desse nível em diante, a representação icônica é substituída pela representação numérica ou simbólica. Este recurso é utilizado com o objetivo de levar o usuário a ir se familiarizando com a linguagem Matemática utilizada nas equações algébricas (Figura 7).

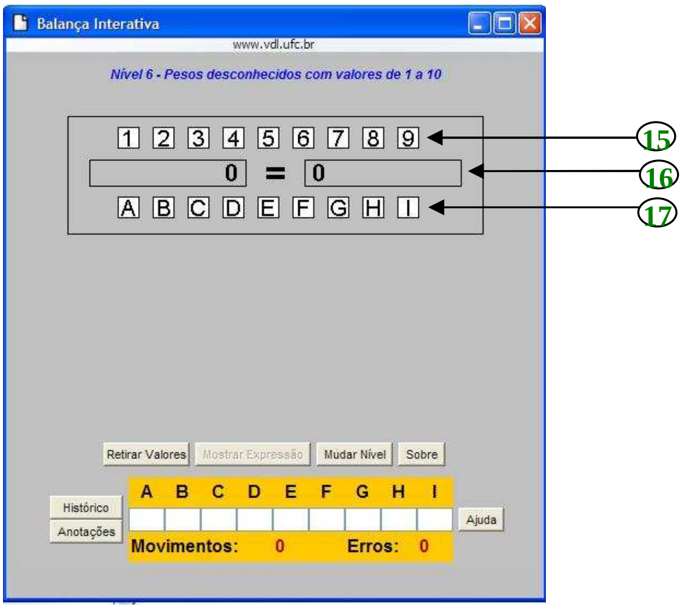


Figura 7 – Balança Interativa – Representação Simbólica

15. Números (representação simbólica) substituem a figura dos pesos virtuais (representação icônica).
16. Tabuleiro ou área de comparação onde os números são colocados. A balança virtual foi retirada (representação icônica).
17. Letras ou incógnitas (representação simbólica). Não há mais a figura dos pesos (representação icônica).

Importante salientar que os níveis 6, 7, 8, 9 e 10 possuem a mesmas características dos níveis 1 2, 3, 4 e 5, apresentam o desafio de encontrar incógnitas com diminuição progressiva dos números desconhecidos, mas sem apresentar a balança virtual, ou seja, a representação icônica é substituída pela representação simbólica. Este mesmo recurso, de passar de uma representação icônica à representação algébrica, pode ser observado em estudos com sequências didáticas realizador por Da Rocha Falcão *et al*. (2000), Pinto (2001), Lins Lessa (2005).

Do nível 8 ao nível 10 os pesos conhecidos (números) começam a faltar: no nível 8 - faltam dois pesos conhecidos; no nível 9 - faltam quatro pesos e finalmente no nível 10 -

faltam seis pesos. Essa diminuição gradativa de pesos conhecidos tem o objetivo de levar o usuário a pensar em novas estratégias de resolução, das situações propostas pelo OA, conforme foi observado em investigações anteriores conduzidas por Castro-Filho *et al.* (2003).

A Figura 8 apresenta alguns recursos do Balança Interativa.

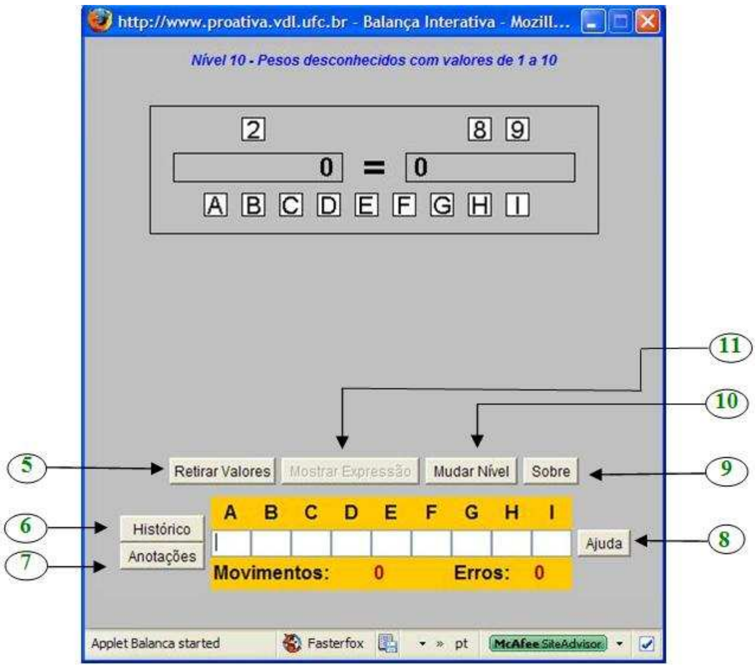


Figura 8 – Balança Interativa – Nível 10 [Faltam seis números conhecidos]

Como pode ser observado na Figura 8 o Balança Interativa apresenta os seguintes recursos: mostrar expressão, retirar pesos, histórico e anotações que têm por finalidade auxiliar o usuário no uso do objeto de aprendizagem. Suas funções estão descritas, a seguir:

5. Mostrar Expressão: Este botão permite que o usuário tenha acesso à representação simbólica correspondente à forma algébrica da relação contida na balança;
6. Mudar Nível: Este recurso permite a mudança de nível a qualquer momento do jogo. Conforme Macedo, Macedo e Castro-Filho (2007), esta é uma das características que diferem um objeto de aprendizagem construtivista de um OA behaviorista;
7. Sobre: Mostra os créditos (nome dos desenvolvedores e da Instituição na qual o objeto de aprendizagem foi desenvolvido);
8. Ajuda: Fornece ajuda ao usuário sobre como utilizar o Balança Interativa;

9. Retirar Pesos: Retira todos os pesos que estiverem sobre a balança;
10. Histórico: Permite ao usuário ter acesso imediato a todos os passos (movimentos) por ele realizado no nível do jogo em que se encontra;
11. Anotações: É como uma folha em branco onde o usuário pode anotar informações importantes sobre as relações encontradas durante a partida. Esse dispositivo na verdade, serve para que, aos poucos, o usuário vá deixando de lado o lápis e papel e passe a fazer suas anotações no próprio objeto de aprendizagem.

No próximo capítulo descreve-se o planejamento experimental utilizado neste estudo que busca analisar os efeitos os efeitos de uma intervenção específica para a compreensão de conceitos algébricos com o uso de um objeto de aprendizagem e a sua contribuição para o desenvolvimento de tais conceitos.

Planejamento Experimental

Conforme as considerações expostas no referencial teórico, o campo conceitual algébrico e a utilização de objetos de aprendizagem na educação, constata-se a necessidade de pesquisas que investiguem mais acerca dos ganhos cognitivos na interação entre o usuário e um objeto de aprendizagem, durante a realização de atividades envolvendo o conceito algébrico.

Nota-se ainda que, em muitas escolas, os professores não utilizam os recursos digitais seja por falta de computadores, por dificuldade no manuseio desses equipamentos ou por ausência de embasamento teórico e resultados consistentes de pesquisa científica sobre a eficiência desses recursos na aprendizagem dos estudantes.

Em função do exposto, foi realizado um estudo de intervenção sobre o desenvolvimento de conceitos algébricos. Para isso, foi construída uma sequência didática que inclui o uso do objeto de aprendizagem Balança Interativa e situações-problemas onde o estudante será desafiado a refletir sobre sua ação e encorajado a desenvolver estratégias próprias do pensamento algébrico durante a resolução de equações do lº grau.

2.1. MÉTODO

2.2. Participantes

Quarenta estudantes, de ambos os sexos, alunos do 7º ano (antiga 6ª série) de duas escolas públicas da cidade de Fortaleza, com a média de idade de 12 anos e 7 meses. A escolha dessa série deve-se ao desejo de investigar estudantes que estavam iniciando o ensino formal da álgebra, a fim de auxiliá-los a superar possíveis dificuldades que surgem durante a passagem do pensamento aritmético para o pensamento algébrico.

Os participantes foram alocados em dois grupos: Grupo Experimental (GE) e Grupo Controle (GC). Os critérios adotados para alocar os participantes nos grupos foram: desempenho no pré-teste e as respostas fornecidas a um questionário sobre a familiaridade dos estudantes com o uso do computador e de *software* educacional.

2.2.1. Material

Neste estudo foram utilizados os seguintes materiais: *notebook*, programa Balança Interativa, programa Restaurador do Balança[17], gravador tipo MP4, lápis, borracha, folhas de ofício contendo as questões do pré-teste e pós-testes (Anexo A), situações-problemas na intervenção (Anexo D e E) e o questionário do aluno contendo questões sobre a familiaridade dos alunos com uso do computador e de *software* educacional (Anexo C).

2.2.2. Procedimentos

O presente estudo foi composto por três fases: pré-teste, intervenção e pós-teste. O pré e o pós-testes foram aplicados a todos os participantes individualmente, enquanto, que a intervenção foi proporcionada apenas aos participantes do grupo experimental.

O pré-teste, individual, teve por objetivo examinar as noções iniciais ou espontâneas que os participantes apresentam acerca dos conceitos algébricos. Para tal, foram elaboradas seis situações-problema e seis equações construídas com base no estudo realizado por Lins Lessa (1996). Tanto os problemas quanto as equações obedeciam às estruturas algébricas mostradas no Quadro 1, a seguir:

[17] Programa de computador do tipo *screen capture* que copia todas as telas e as reproduz, passo a passo, na mesma sequência de movimentos realizada pelo usuário no Balança Interativa.

Tipo	Estrutura Algébrica	Exemplo	Questões
1	**ax + b = c**	2x + 100 = 250	1 e 7
2	**ax + bx = c**	2x + 3x = 500	2 e 8
3	**x + a = bx**	3x + 81 = 6x	3 e 9
4	**ax + b = cx + d**	2x + 400 = 4x + 300	4 e 10
5	**ax + b = ax + cy + d**	1x + 600 = 1x + 4y + 100	5 e 11
6	**ax + by + c = dx + by + e**	2x + 2y + 50 = 4x + 2y + 10	6 e 12

Quadro 1 - Estrutura algébrica utilizada nas questões do pré-teste e pós-teste.

Estas estruturas proporcionam ao aluno a oportunidade de conhecer e aplicar seus conhecimentos em diferentes tipos de equações. Conforme Vergnaud (1990), a compreensão de um campo conceitual não pode está restrita apenas a um tipo de situação; pelo contrário, ela emerge a partir de um conjunto de situações, invariantes e representações.

Após a aplicação do pré-teste, e observados os critérios relacionados anteriormente, os estudantes foram alocados nos grupos controle e experimental. Aos estudantes do grupo controle, não foi oferecido qualquer programa de intervenção, participando apenas das atividades didáticas sobre aprendizagem de conceitos algébricos realizadas usualmente pelo professor de matemática na sala de aula. Já o grupo experimental participou de um programa de intervenção tutorada[18] com uso do objeto de aprendizagem Balança Interativa que explorou os conceitos de incógnita, igualdade, desigualdade e princípio de equivalência algébrica.

Após a aplicação do pré-teste, cada estudante preenchia um questionário que visava obter informações sobre a sua familiaridade com o computador e uso de software

[18] Maiores esclarecimentos sobre a proposta de intervenção são fornecidas no tópico Natureza da Intervenção.

educacional. Esse questionário, como comentado anteriormente, serviu também para a alocação dos estudantes nos grupos (GC e GE). Isto porque, quando da divisão dos grupos, consideraram-se algumas variáveis como: ter realizado curso de informática, possuir computador em casa e utilizar *software* educacional para o ensino de Matemática.

Depois de realizar o pré-teste e o questionário, os estudantes do grupo experimental participaram individualmente de um programa de intervenção sobre a aprendizagem de conceitos algébricos realizado, além das atividades escolares, durante o horário de aula. Esta intervenção foi realizada por um único examinador, em duas sessões com um intervalo de dois a três dias entre elas.

O pós-teste foi aplicado individualmente, duas a três semanas após o pré-teste, tendo por objetivo comparar o desempenho dos alunos dos dois grupos entre si em relação ao pré-teste, quanto à compreensão dos conceitos algébricos. Em outras palavras, o pós-teste buscou avaliar se a sequência didática proposta foi eficaz para promover a aprendizagem de conceitos algébricos.

Durante o pré-teste e pós-teste, o experimentador lia a pergunta para o aluno e pedia para que ele respondesse da forma que lhe fosse mais conveniente. Eles poderiam responder através de cálculos, desenhos ou apenas dar a resposta. O tempo era livre para que o estudante resolvesse a questão e o problema poderia ser lido várias vezes. Após a resolução, correta ou incorreta, o examinador solicitava que o estudante explicitasse como ele chegou àquela resposta. Este procedimento visava acompanhar a linha de raciocínio seguida pelo aluno na resolução da questão, tentando descobrir se ele estava pensando e resolvendo o problema considerando o modelo algébrico. Ao explicitar as bases de seu raciocínio o estudante poderia ou não alterar a resposta caso ele achasse pertinente.

Por se tratar de um estudo de intervenção, a seguir, apresento o modelo de intervenção utilizado neste trabalho.

2.2.3. Natureza da Intervenção

Segundo Spinillo e Lautert (2008), uma intervenção de natureza tutorada, caracteriza-se por uma intervenção explícita de algo, em que o adulto tem um papel ativo no processo, com vistas a fornecer *feedback* e explicações sobre a resposta do aprendiz, explicitar regras, enfatizar aspectos relevantes da situação que se deseja ensinar, corrigir soluções, hipóteses inadequadas e propor modelos mais eficientes de resolução de uma determinada situação-problema, sem que isto restrinja o papel dos indivíduos-aprendizes neste processo.

Em outras palavras, nesse tipo de intervenção, o examinador, geralmente, um adulto, procura acionar mecanismos psicológicos relevantes e envolver aspectos cruciais do conceito ou habilidade que deseja desenvolver, a fim de propiciar a compreensão do mesmo. O fato da assistência do examinador ser mais explícita não significa que o estudante (aprendiz) seja considerado um receptor de informações. Ele participa ativamente, “[...] interagindo com o adulto, realizando algo, solucionando uma situação-problema, emitindo julgamentos, testando hipóteses, etc.” (SPINILLO; LAUTERT, 2008, p. 301).

Propiciando, portanto, formas efetivas de desenvolver e ampliar os limites do raciocínio dos estudantes, evocando um processo cognitivo de maior importância para a aprendizagem: a metacognição. Esta tem sido definida como a “habilidade do indivíduo em tomar seu próprio pensamento como objeto de análise e reflexão, sendo um processo intelectual que envolve, dentre outros aspectos, a consciência sobre os atos e processos de conhecer e de raciocinar em uma dada situação” (LAUTERT, 2005, p. 79).

Sendo assim, considerando tais aspectos, a intervenção implementada ancorou-se nos seguintes pontos, propostos por Lautert (2005): (i) desafiar o aprendiz a pensar sobre as intervenções do examinador, sobre a natureza das atividades e sobre seu raciocínio frente à tarefa; (ii) dirigir a atenção do estudante para os aspectos relevantes de uma dada situação, tornando-os explícitos; (iii) fornecer *feedback* acerca do acerto/erro do estudante, corrigindo-o quando necessário. Tanto o *feedback* quanto as correções serão acompanhados de explicações e exemplos, procurando a promoção de re-organizações conceituais; (iv) apresentar contra-exemplos e contra-argumentos, com o objetivo de gerar conflitos e desafios que levem à reflexão e (v) solicitar do estudante a explicitação de suas formas de raciocinar e proceder.

Para tal, foi construída uma sequência didática que inclui o uso do objeto de aprendizagem Balança Interativa e situações-problemas onde o estudante foi desafiado a refletir sobre sua ação e encorajado a desenvolver o pensamento algébrico na resolução de equações do lº grau.

Descreve-se, a seguir, a sequência didática construída para a presente investigação.

2.2.4. Sequência Didática

A seqüência foi composta por seis atividades (ver Figura 9) apresentadas aos estudantes do grupo experimental pelo examinador, em duas sessões individuais realizadas no contexto escolar, durante o horário de aula com um intervalo de dois a três dias entre elas. As sessões foram gravadas e transcritas em protocolos individuais para análise posterior.

Figura 9 – Organograma da Seqüência Didática

Como comentado, anteriormente, a intervenção proposta ao grupo experimental foi composta de duas sessões, a saber: 1ª Sessão - Descobrindo incógnitas no nível icônico e 2ª Sessão - Descobrindo incógnitas no nível simbólico. Em cada sessão, os estudantes realizaram três atividades diferentes sob a orientação do examinador.

Importante salientar que, antes de o estudante iniciar as atividades com o objeto de aprendizagem "Balança Interativa", o examinador apresentou um conjunto de instruções necessárias para que os alunos pudessem utilizar o referido objeto, como por exemplo, explicitava o objetivo para o qual esse objeto foi desenvolvido e como ele procederá para utilizá-lo (Anexo B). A instrução pode ser assim resumida:

Balança Interativa é um objeto de aprendizagem na forma de jogo onde você pode descobrir o valor das incógnitas, através da manipulação de pesos conhecidos e desconhecidos, até que se consiga a igualdade entre eles. Esta atividade deve ser realizada com o menor número de movimentos possíveis e sem cometer erros. Ganha o jogo quem conseguir descobrir todos os valores com o menor número de movimentos. Mas, para que isso aconteça, eu preciso dizer a você algumas regras de funcionamento do Balança Interativa.

1. Utilize o *mouse* para arrastar um dos pesos desconhecidos até um dos pratos da balança e solte-o;
2. Use o outro prato da balança para colocar os pesos conhecidos;
3. Se a balança não ficar em equilíbrio, retire ou acrescente mais pesos conforme a indicação da mesma;
4. Podem-se utilizar, no máximo, quatro pesos em cada prato da balança;
5. Quando a balança fica em equilíbrio, significa que encontro o valor do peso desconhecido;

6. Os valores descobertos devem ser digitados em uma caixinha que fica logo abaixo das letras, que representam esses pesos;
7. Digita-se o valor descoberto na caixinha e aperta-se a tecla *enter* para confirmar o resultado. Se o valor estive errado, aparecerá o número de tentativas erradas, logo abaixo das caixinhas;
8. Em cada nível do jogo, o valor de um peso desconhecido não se repete;
9. É possível misturar pesos conhecidos e desconhecidos em qualquer um dos pratos da balança;
10. Se, ao manipular a balança, já for possível saber qual o valor do peso desconhecido, pode-se colocá-lo diretamente na caixinha, não é necessário validar o mesmo na balança ver o equilíbrio;
11. A contagem do número de movimentos inicia quando o usuário coloca algum peso sobre a balança;
12. A ação de retirar os pesos não altera o número de movimentos feitos pelo usuário. Esta ação pode ser realizada com o uso do *mouse* ou através do botão *Retirar Pesos*;
13. Em cada nível, o usuário pode consultar todas as jogadas que fez através do botão *Histórico*;
14. Pode-se, também, incluir informações diversas sobre o jogo através do botão *Anotações* e depois confirmar as mesmas apertando no botão *Adicionar ao Histórico*;
15. É possível visualizar a expressão algébrica que representa o movimento atual da balança apertando o botão *Mostrar Expressão.*

A seguir, são descritas em detalhes as duas sessões de intervenção com suas respectivas atividades.

2.2.5. Primeira Sessão – *Descobrindo incógnitas no nível icônico*

Conforme foi comentado na fundamentação teórica, o objeto de aprendizagem Balança Interativa possui 10 níveis. Nessa primeira sessão de intervenção, optou-se por utilizar apenas os níveis 1 a 5 por duas razões: (i) devido ao fato de que, estes níveis, possuem semelhanças quanto à forma de representação, uma vez que estes utilizam à forma icônica; (ii) eles apresentam dificuldades semelhantes, ou seja, os valores das incógnitas nesses níveis variam de 1 a 10. A única exceção fica por conta do nível 2, que adota também a representação icônica, mas os valores das incógnitas variam de 1 a 20.

Durante a primeira sessão, foram realizadas três atividades: ***Atividade 1 -*** Uso do objeto de aprendizagem nos níveis 1 a 5 - tem por objetivo descobrir incógnitas, estabelecendo relações de igualdade e desigualdade com o Balança Interativa, através de representações icônicas; ***Atividade 2 -*** Resolução de uma equação do 1º grau, proposta no objeto de aprendizagem, com o objetivo de levar o aluno a explicitar sua compreensão sobre a noção de igualdade, a noção incógnita e o princípio de equivalência; ***Atividade 3*** - Interpretação, montagem e resolução de uma equação do 1º grau proposta numa situação-problema – com o objetivo de enfatizar o processo de resolução de uma equação algébrica na forma simbólica com uso de lápis e papel.

Apresenta-se, a seguir, uma descrição detalhada de cada atividade que foi desenvolvida na primeira sessão de intervenção.

Atividade 1: Uso do objeto de aprendizagem nos níveis 1 a 5.

Esta atividade teve o objetivo de levar o aluno a descobrir incógnitas através da manipulação do objeto de aprendizagem nos níveis 1 a 5, através de representações icônicas, estabelecendo relações de igualdade e desigualdade no Balança Interativa.

No extrato de protocolo, Figura 10, apresenta-se um exemplo de manipulação do objeto de aprendizagem por parte do estudante e as intervenções realizadas, pelo examinador, quando o estudante erra ou acerta os valores das incógnitas.

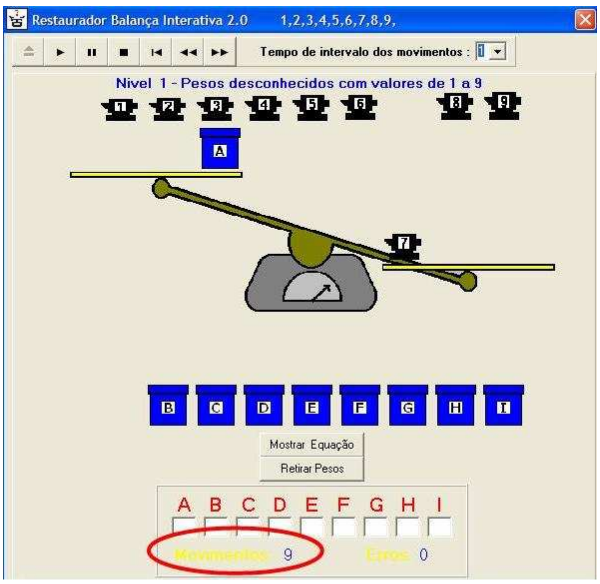


Figura 10: Reprodução da atividade 1, protocolo 31, sexo masculino, 12 anos quando utiliza o Balança Interativa no nível icônico.

E[19]**:** [após a explicação do examinado, sobre o funcionamento do OA, o aluno inicia a primeira atividade]. “Vamos descobrir o valor das incógnitas começando com a letra A”.

A: ((o aluno fica em silêncio, enquanto realiza as jogadas)) [aluno tenta os números 4, 3, 9, 2, 1, 5, 6, 1 e 7, mas não acerta o valor da incógnita A]

E: **“**você já fez nove movimentos e ainda não conseguiu descobrir o valor da incógnita. Você precisa pensar sobre o que está acontecendo na balança. Se o peso é maior do que quatro (A > 4) por que você botou o três? Se “A” era menor que quatro não era pra ter botado o três.” [sic]

A: “hum!” [aluno fica parado ouvindo a intervenção do experimentador]

E: “depois você botou o nove que é um número bem grande e ficou menor que nove (A < 9). Depois disso, por que você botou o dois se A já era maior que quatro? Você tem que prestar atenção nestes sinais: maior que (>) e menor que (<). Se “A” já era maior que quatro não era pra ter botado o dois, o três e o um.” [sic]

A: ((silêncio))

E: “aqui no Histórico [recurso do programa que mostra os números que foram jogados] diz que ‘A’ é maior que cinco e menor que sete. Pronto! A resposta é um número maior que cinco (A > 5) e menor que sete (A < 7), ok? No jogo é uma questão de você ter um pensamento lógico pra poder descobrir as incógnitas.” [sic]

A: “seis!” [descobre que o valor de A = 6]

E: ”isso mesmo! ‘A’ é igual a seis. Retire os pesos aqui e vamos tentar agora descobrir o valor de B.”

A: “certo.” [aluno testa o valor 7]

E: “é maior do que sete [o valor de B >7]. Pode ser oito, nove ou dez.”

A: “é nove.” [aluno tenta o valor nove e acerta o valor da incógnita B]

E: “ponha o valor nove na caixinha, embaixo do ‘B’.” [cada incógnita tem uma caixinha onde deve ser colocado o seu respectivo valor]

A: “pronto!”

E: “muito bem! Dessa vez, com apenas dois movimentos você descobriu o valor de ‘B’ e, naquela hora, com nove movimentos você ainda não sabia o valor de A.” [sic]

No protocolo, acima, percebe-se que, no início da atividade, o participante não conseguia achar o valor da incógnita “A”. Nota-se, por outro lado, que o estudante manipulava os números utilizando a estratégia tentativa e erro. Nesta busca, sem nenhum plano aparente, ele acabou realizando várias tentativas sem nenhum sucesso. Mas, após a intervenção do experimentador, o participante, consegue descobrir o valor da incógnita “B” com apenas duas tentativas.

Atividade 2: Resolução de equações montadas no objeto de aprendizagem.

Esta atividade teve por objetivo levar o aluno a explicitar sua compreensão sobre noção de igualdade, noção de incógnita e princípio de equivalência. Para tal,

[19] Convenções adotadas: E: examinador e A: aluno

selecionou-se o Nível 1, pois este nível apresenta todos os números (pesos) disponíveis para a comparação dos valores das incógnitas. O estudante era levado a descobrir as incógnitas até a metade dos valores possíveis (Letra E) e depois o examinador montava duas equações do 1º grau, proposta no objeto de aprendizagem e que deveria ser resolvida pelo aluno. Por exemplo:

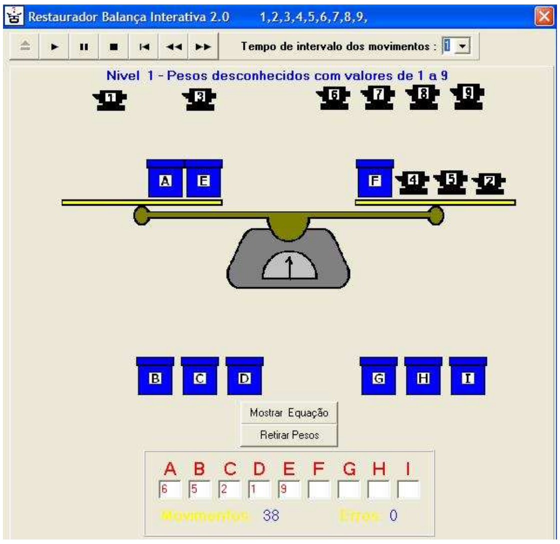


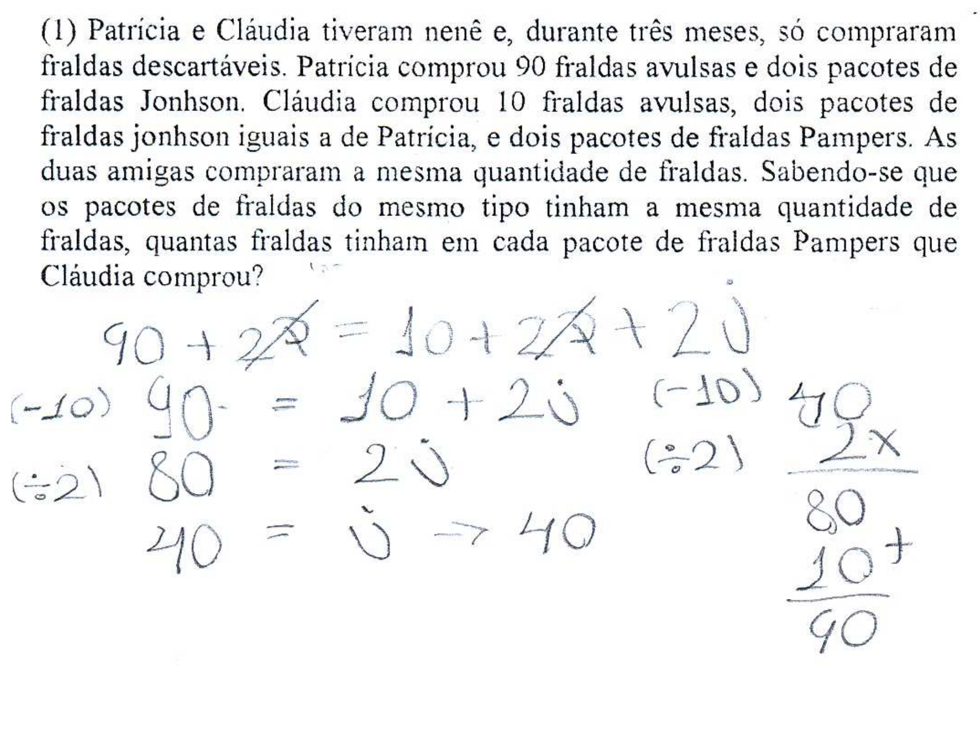
Figura 11: Reprodução da atividade 2, protocolo 31, sexo masculino, 12 anos quando resolve uma equação proposta no Balança Interativa no nível icônico.

E: ”qual é o valor de F?”
A: “é quatro.”
E: “quatro? Por que você acha que é quatro?”
A: “quatro mais quatro é oito... aí tem cinco mais dois mais que é quinze.”
E: “quinze. E o valor de F, dá quanto?”
A: “o valor de F é quatro.”
E: “bote aí quatro pra ver se funciona.”
A: [o aluno põe o valor 4 na caixinha F]
E: “muito bem! Pronto! O valor de F é quatro.”

Durante a resolução destas equações e das demais atividades, o examinador através de uma entrevista clínica, buscava obter explicações do estudante sobre o seu raciocínio frente à tarefa, com o objetivo de chamar a atenção do estudante para aspectos invariantes que estavam presentes na resolução de uma equação, tornando-os explícitos. Além disso, o examinador fornecia *feedback* acerca do acerto/erro do estudante, corrigindo-o quando necessário. Tanto o *feedback* quanto as correções eram acompanhados de explicações e exemplos, procurando a promoção de re-organizações conceituais. Nesta ocasião, também, eram fornecidos contra-exemplos e contra-argumentos, com o objetivo de gerar conflitos e desafios que levassem à reflexão por parte do estudante sobre a sua forma de proceder.

Atividade 3: Interpretação, montagem e resolução de equações, a partir de uma situação-problema.

Esta atividade tinha como foco a montagem e resolução de duas equações com uso de lápis e papel. A resolução da equação era realizada através do princípio de equivalência algébrica. A primeira situação refere-se à resolução de uma equação com duas incógnitas (x e y) em apenas um lado da igualdade. Já a segunda situação, apresenta uma equação com duas incógnitas (x e y) em ambos os lados da igualdade. Na Figura 12, há um exemplo dessa atividade.


(1) Patrícia e Cláudia tiveram nenê e, durante três meses, só compraram fraldas descartáveis. Patrícia comprou 90 fraldas avulsas e dois pacotes de fraldas Jonhson. Cláudia comprou 10 fraldas avulsas, dois pacotes de fraldas jonhson iguais a de Patrícia, e dois pacotes de fraldas Pampers. As duas amigas compraram a mesma quantidade de fraldas. Sabendo-se que os pacotes de fraldas do mesmo tipo tinham a mesma quantidade de fraldas, quantas fraldas tinham em cada pacote de fraldas Pampers que Cláudia comprou?

$90 + 2\cancel{R} = 10 + 2\cancel{R} + 2J$

(−10) $90 = 10 + 2J$ (−10)

(÷2) $80 = 2J$ (÷2)

$40 = J \rightarrow 40$

$40 \times 2 = 80$

$80 + 10 = 90$

Figura 12: Reprodução da atividade 3, protocolo 31, sexo masculino, 12 anos, GE, Atividade 3.

A: “o valor de J é quarenta.”
E: “como é que eu sei que está certo?”
A: “por que eu cancelei as duas Jonhson e tirei dez”...
E: “você tirou dez de cada lado?”
A: “foi.”
E: “por que você tirou dez de cada lado?”
A: “porque tinha dez aqui.” [90 = 10 + 2J]
E: “por que dez era o menor valor sem incógnita. Você não poderia subtrair o maior valor que era noventa. Você deve subtrair sempre o menor valor sem incógnita.”
A: “certo.”
E: “e aqui por que você dividiu por dois?”
A: “tinha um dois.” [o coeficiente dois estava junto à incógnita]
E: “porque o dois estava multiplicando a incógnita e você usou a operação inversa de multiplicação que é a divisão. Você dividiu oitenta por dois e deu quarenta?”
A: “foi.”
E: “ok. Muito bem!”

Durante a realização da atividade, o examinador busca, através de entrevista clínica, obter explicações do estudante sobre o seu raciocínio frente à tarefa com o objetivo de chamar a atenção do estudante para os aspectos relevantes enfatizados numa situação-problema onde o aluno precisa, primeiramente, interpretar o problema para montar a equação que o representa, e só depois disso, ele inicia o processo de redução da equação até encontrar o valor da incógnita.

2.2.6. Segunda Sessão – *Descobrindo incógnitas no nível simbólico*

Diferentemente da primeira, a segunda sessão, propõe-se que o aluno utilize o objeto de aprendizagem apenas nos níveis 6 a 10 que adotam a representação simbólica. Optou-se por usar esses níveis por duas razões: (i) possuem semelhanças quanto à forma de representação, uma vez que utilizam à forma simbólica; (ii) apresentam níveis de dificuldade semelhantes, ou seja, os valores das incógnitas nesses níveis variam de 1 a 10. A única exceção fica por conta do nível 7, que adota também a representação simbólica, mas os valores das incógnitas variam de 1 a 20.

Nessa sessão, foram realizadas as seguintes atividades: ***Atividade 4*** **-** Uso do objeto de aprendizagem nos níveis 6 a 10 com o objetivo de usar o OA para descobrir incógnitas, através de representações simbólicas; ***Atividade 5*** **-** Resolução de duas equações do 1º grau, proposta no objeto de aprendizagem – buscando levar o aluno a explicitar sua compreensão sobre os invariantes presentes na resolução de uma equação algébrica; ***Atividade 6*** **-** Interpretação, montagem e resolução de duas equações do 1º grau proposta em duas situações-problema – com o objetivo de enfatizar o processo de resolução de uma equação algébrica na forma simbólica adotando o uso de lápis e papel.

Atividade 4: Uso do objeto de aprendizagem nos níveis 6 a 10

Conforme foi comentado anteriormente, a Atividade 4 teve por objetivo propiciar o uso do objeto de aprendizagem levando o aluno a descobrir incógnitas presentes nos níveis 6 a 10, através de representações simbólicas, estabelecendo relações de igualdade e desigualdade no *Balança Interativa*. O protocolo nº 24, Figura 13, apresenta alguns exemplos de manipulação do objeto de aprendizagem, por parte do estudante, e as intervenções realizadas pelo examinador quando o estudante erra ou acerta os valores das incógnitas.

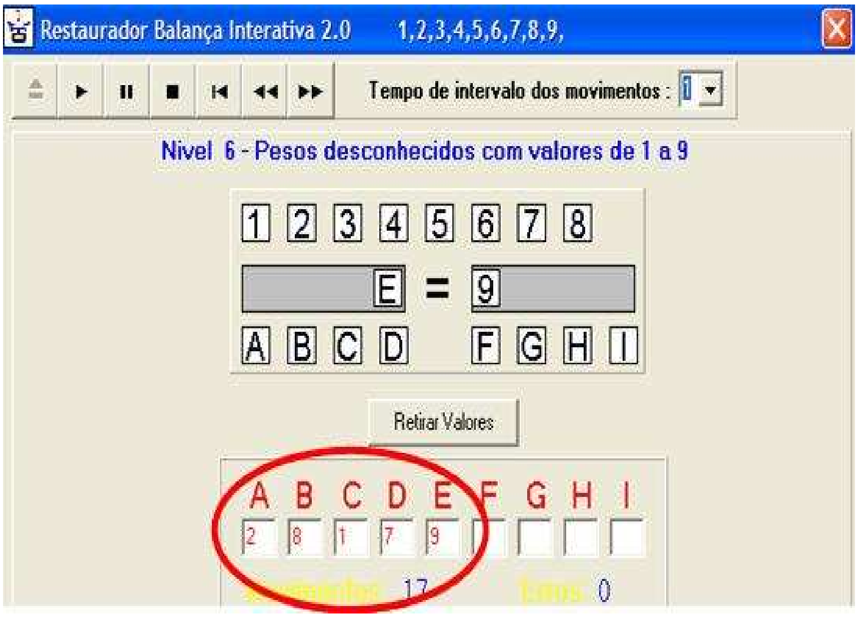


Figura 13: Reprodução da atividade 4, protocolo 24, sexo feminino, 12 anos quando tenta descobrir incógnitas no nível simbólico.

E: "você colocou seis e o programa indicou que A < 6. Colocou o cinco [C < 5]... não foi... agora vai colocar o três ..." [a balança indica que A < 3]
A: "é dois ou um... é o dois." [aluna tira conclusões a partir do *feedback* da área de comparação e descobre que A = 2]
E: "tá mais fácil?" [nível simbólico]
A: "esse tá mais fácil." [aluna acha que o nível simbólico está mais fácil que o nível icônico]
E: "hum! Descobriu né?" [B = 8].
A: "sim."
E: **"**Isso mesmo. Você tentou o quatro [C < 4], depois o três" [C < 3].
A: "foi."
E: "como o 'C' era maior que três, você colocou o um e deu certo." [C = 1]
A: "Agora é o valor de D."
E: "primeiro você tentou o quatro [D > 4] e depois o sete." [D = 7]
A: "sim."
E: " muito bem! Continue assim!"
A: "ih! Descobri de primeira." [acerta o valor de E na primeira tentativa]
E: "muito bem!" [E = 9]

Neste protocolo, percebe-se que a participante não encontrou dificuldades na passagem do nível icônico para o simbólico. Ela descobriu o valor de cada incógnita com, aproximadamente, três tentativas e tirou conclusões sobre suas jogadas a partir do *feedback* produzido na área de comparação (tabuleiro) do Balança Interativa.

Atividade 5: Resolução de equações montadas no objeto de aprendizagem

Nesta atividade, o usuário utilizava o objeto de aprendizagem no nível 6 até descobrir o valor da incógnita “E”, restando, ainda, quatro incógnitas a serem descobertas. Nesse ponto do jogo, o experimentador utilizava o objeto para montar equações com as incógnitas restantes e convidava o aluno a resolver as mesmas. Importante salientar que o nível 6 foi escolhido, porque este apresenta todos os números (pesos) disponíveis para a comparação dos valores das incógnitas no nível simbólico. A Figura 14 apresenta um exemplo da realização dessa atividade.

Figura 14: Reprodução da atividade 5, protocolo 31, sexo masculino, 12 anos quando resolve uma equação proposta no Balança Interativa no nível simbólico.

E: “pronto! Eu quero saber qual o valor de D?”
A: “o valor dele é cinco.”
E: “por quê?”
A: “por causa que aqui é dezesseis.” [Na verdade o valor é quinze que corresponde à soma dos valores do 1° membro da equação 7 + 3 + 5]
E: “tem certeza? Por que é dezesseis?”
A: “porque sete mais três mais cinco é igual a dezesseis.”
E: “Não. Tem certeza? Pra mim sete mais três mais cinco é igual a quinze.”
A: “ah! É quinze, então o valor dele é quatro.”
E: “mesmo assim não poderia ser o cinco porque ele já saiu. Bote aí o valor. Se passar é porque tá certo.” [a cada resposta incorreta o OA registra erro]
A: “deu certo.”
E: “muito bem!”

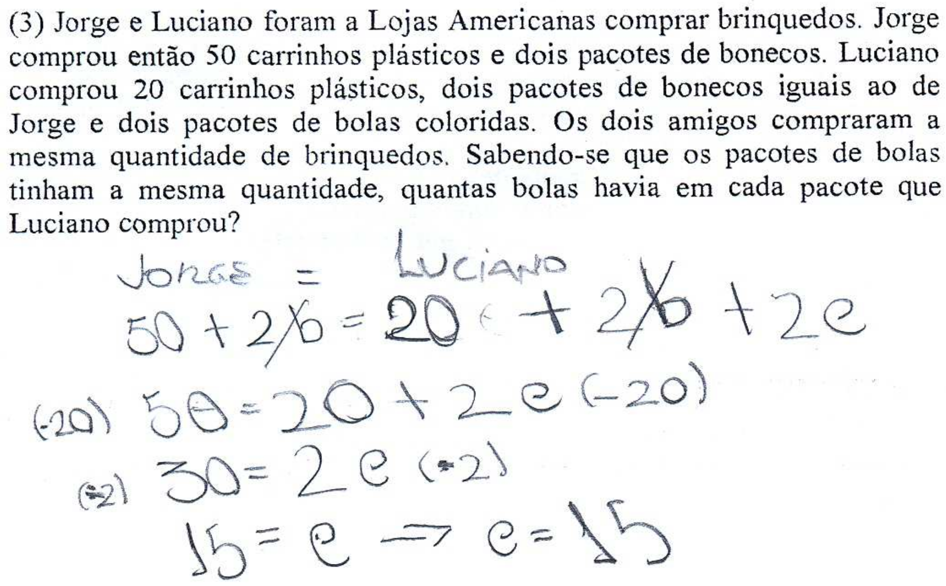
Salienta-se que resolver equações é uma atividade que faz parte do currículo do sétimo ano do Ensino Fundamental. Uma das formas de saber se o aluno internalizou os invariantes da álgebra é acompanhá-lo, individualmente, durante a resolução de uma equação. Esta atividade permitiu ao experimentador intervir, enfatizando os invariantes da álgebra e fornecendo *feedback* aos alunos sobre as formas de resolução de uma equação o 1º grau.

Pensando nisso, foi desenvolvida a atividade 6 que permite o acompanhamento, passo a passo, da resolução de uma situação-problema com uso de lápis e papel.

Atividade 6: Interpretação, montagem e resolução de equações a partir de uma situação-problema

Esta atividade tinha como foco a montagem e resolução de duas equações através de interpretação de duas situações-problema, no nível simbólico, com uso de lápis e papel. A resolução da equação era realizada através do princípio de equivalência algébrica. A primeira situação apresenta um enunciado que envolve a resolução de uma equação com duas incógnitas (x e y) em apenas um lado da igualdade (Estrutura 5). A segunda situação, todavia, mostra uma equação com duas incógnitas (x e y) em ambos os lados da igualdade (Estrutura 6). Esta atividade permite que o experimentador possa acompanhar o processo de resolução de uma equação e venha a intervir, enfatizando os invariantes da álgebra presentes na atividade. A seguir, são apresentados dois exemplos de situações que foram fornecidas aos estudantes em uma folha de ofício com espaço para a resolução.

A Figura 15 apresenta um exemplo da realização desta atividade.


(3) Jorge e Luciano foram a Lojas Americanas comprar brinquedos. Jorge comprou então 50 carrinhos plásticos e dois pacotes de bonecos. Luciano comprou 20 carrinhos plásticos, dois pacotes de bonecos iguais ao de Jorge e dois pacotes de bolas coloridas. Os dois amigos compraram a mesma quantidade de brinquedos. Sabendo-se que os pacotes de bolas tinham a mesma quantidade, quantas bolas havia em cada pacote que Luciano comprou?

JORGE = LUCIANO

$50 + \cancel{2b} = 20 + \cancel{2b} + 2e$

$(-20)\ 50 = 20 + 2e\ (-20)$

$(\div 2)\ 30 = 2e\ (\div 2)$

$15 = e \rightarrow e = 15$

Figura 15: Reprodução da atividade 5, protocolo 31, sexo masculino, 12 anos quando resolve uma situação problema com uso de lápis e papel (Atividade 6).

E: "pronto você montou a equação. Agora veja o que eles compraram para ver se tem alguma coisa que se repete nos dois lados da equação?"
A: "2b" [*feedback* do aluno]
E: "então cancela os dois pacotes de bonecos em cada lado e baixa os valores que sobram." [ênfase no uso do princípio de equivalência algébrica]
A: [aluno cancela os valores que se repetem nos dois lados da equação]
E: "certo? Aqui qual o termo sem incógnita que eu posso subtrair?"
A: "vinte." [*feedback* do aluno]
E: "vinte de cada lado. Tira vinte de cada lado. Pra que se faz isso? Para equação ficar equilibrada. Uma equação é igual a uma balança de dois pratos. Se você retirar o mesmo peso de cada lado da balança ela continua equilibrada." [ênfase no uso do princípio de equivalência algébrica]
A: [aluno realiza a mesma operação (subtração) nos dois lados da equação]
E: "pronto! Chegou à equação equivalente. Agora na equação equivalente, qual a operação que você usa?" [mediação do pesquisador]
A: "subtração... não... divisão! "[*feedback* do aluno]
E: "divisão por qual número?" [mediação do pesquisador]
A: "dois." [*feedback* do aluno]
E: "dois porque é o número que está junto com a incógnita."
A: [aluno realiza a mesma operação (divisão) nos dois lados da equação]
E: "trinta divido por dois dá quanto?"
A: "quinze"
E: "bote aí quinze. '2C' dividido por dois dá quanto?"
A: "um 'C'."
E: "então 'C = 15'. O que ele queria saber no problema? Não era o valor de bolas? Então tinha quinze bolas."

O Quadro 2 apresenta uma visão geral do planejamento experimental adotado nesta investigação.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Planejamento</th><th colspan="2">Grupos</th></tr>
<tr><td>Controle</td><td>Experimental</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pré-teste</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="2">Questionário</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Intervenção (duas sessões)</td><td>1ª Sessão – Descobrindo incógnitas no nível icônico</td><td>-</td><td>X</td></tr>
<tr><td>2ª Sessão – Descobrindo incógnitas no nível simbólico</td><td>-</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pós-teste</td><td>X</td><td>X</td></tr>
</table>

Quadro 2 - Visão geral do planejamento experimental adotado

Análise dos Resultados

A presente análise compreendeu duas etapas: análise do desempenho e análise da natureza das respostas. Na primeira análise, que compreende o desempenho dos participantes, levou-se em conta o número de acertos no geral e o número de acertos na resolução dos problemas e das equações algébricas apresentados pelos participantes de ambos os grupos (GC e GE), tanto no pré-teste como no pós-teste. Nesta oportunidade faz-se, ainda, uma análise sobre a relação entre o desempenho dos participantes (acerto e erro) e os tipos de estruturas algébricas utilizadas na pesquisa.

A segunda etapa consiste na análise da natureza das respostas onde o foco estava nos tipos de procedimentos adotados pelos participantes na resolução tanto das situações-problema quanto das equações algébricas, na ocasião do pré-teste e do pós-teste.

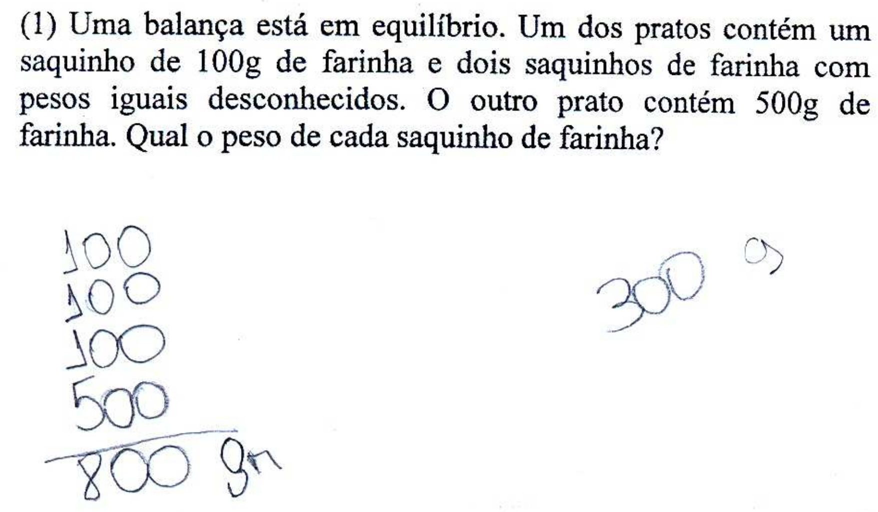
3. 1. Análise do Desempenho

No presente estudo, o desempenho dos participantes, no pré e pós-testes, foi analisado considerando o desempenho geral e o desempenho na resolução dos problemas e das equações algébricas. A seguir, são descritos e exemplificados os critérios adotados para analisar o desempenho dos participantes dessa investigação, a saber:

Pontuação – zero: não resolve o problema ou a equação algébrica, deixando a questão em branco.

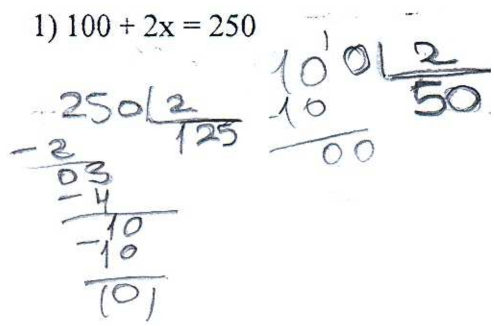
Pontuação – um: resolve o problema ou a equação algébrica de forma inadequada, ou seja, o aluno não fornece a resposta correta. Também estão incluídas nesta categoria, as tentativas de resolução que culminaram na desistência do procedimento que estava sendo realizado.

Figura 16: Reprodução do protocolo 23, sexo feminino, 12 anos, GE, pré-teste, problema.



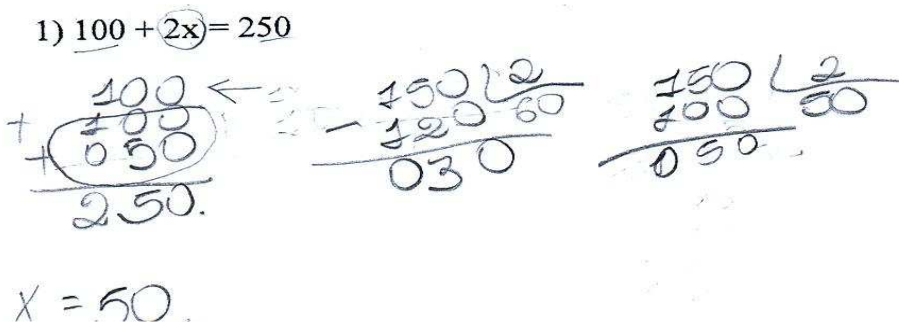
A: "dá trezentos gramas."
E: "por que você acha que cada saquinho pesa trezentos gramas?"
A: "pelos meus cálculos dá trezentos gramas."

Figura 17: Reprodução do protocolo 25, sexo feminino, 12 anos, GE, pré-teste, equação.



E: "qual o valor de x?"
A: "o valor de x é cinquenta!"
E: "então põe aí o valor de x." [sic]

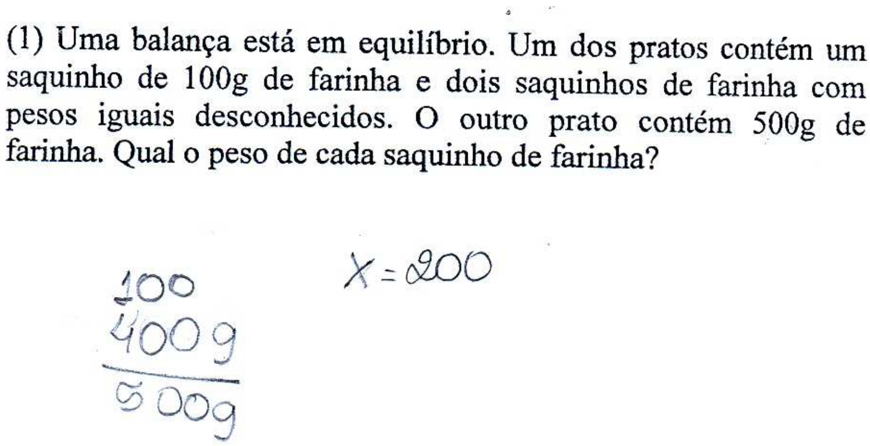
Figura 18: Reprodução do protocolo 3, sexo feminino, 12 anos, GC, pré-teste, equação.



E: “qual o valor de x?”
A: “eu tenho quase certeza que o valor é cinquenta.”
E: “você acha que é cinquenta?”
A: “sim.”
E: “então põe aí ‘x’ igual a cinquenta.” [sic]

Pontuação – dois: resolve o problema ou a equação algébrica de forma adequada, apresentando a resposta correta. São incluídas, também, nesta categoria as respostas provenientes de um cálculo mental.

Figura 19: Reprodução do protocolo nº 24, sexo feminino, 12 anos, GE, pré-teste, problema.


(1) Uma balança está em equilíbrio. Um dos pratos contém um saquinho de 100g de farinha e dois saquinhos de farinha com pesos iguais desconhecidos. O outro prato contém 500g de farinha. Qual o peso de cada saquinho de farinha?

100
400 g
500 g

X = 200

A: “x é igual a duzentos.”
E: “como foi que você fez?”
A: “eu pensei assim: se um é cem e tem que dá quinhentos em cada prato, então só pode ser duzentos em cada saquinho!”

O desempenho dos participantes deste estudo foi analisado, por dois juízes independentes e treinados, obtendo um índice de concordância de 96,88%. Os casos discordantes foram analisados por um terceiro juiz, também independente, sendo o seu julgamento considerado final.

3.1.1. Desempenho geral

Inicialmente, serão apresentados os resultados referentes ao desempenho geral dos participantes em todos os itens no pré e pós-testes e, posteriormente, os desempenhos na resolução dos problemas algébricos e das equações. O desempenho geral no pré-teste e pós-teste em relação aos grupos (GC e GE) é apresentado na Tabela 1.

Tabela 1- Frequência e percentual (entre parênteses) de desempenho geral por grupo (GC e GE) no pré-teste e pós-teste.

Pontuação	Grupo Controle (nrp= 240) [20]		Grupo Experimental (nrp= 240)	
	Pré	**Pós**	**Pré**	**Pós**
zero	**88** (36%)	**98** (41%)	**82** (34%)	**0** (0%)
um	**45** (19%)	**26** (11%)	**63** (26%)	**19** (8%)
dois	**107** (45%)	**116** (48%)	**95** (40%)	**221** (92%)

Nota: zero (não fez); um (erro) e dois (acerto).

Em termos gerais, como pode ser observado na Tabela 1, no pré-teste, os participantes apresentaram um desempenho semelhante quanto ao número de acertos (GC: 45% e GE: 40%), bem como, de respostas que obtiveram a pontuação um (GC: 19% e GE: 26%) e pontuação zero (GC: 36% e GE: 34%). O teste U de Mann-Whitney, compara as amostras independentes e confirma que no pré-teste, os dois grupos não diferem significativamente ($Z = - 0.217$; $p = 0.414$).

Já no pós-teste, observa-se que houve uma melhora no desempenho dos dois grupos. Tal fato, possivelmente, ocorreu porque o grupo controle estava iniciando o ensino formal de álgebra. Neste caso, as aulas sobre conceitos algébricos, ministradas

[20] nrp = número de respostas possíveis.

pela professora, podem influenciar na melhoria de desempenho do grupo controle. Entretanto, os participantes submetidos à intervenção, grupo experimental, apresentaram um desempenho superior quando comparado aos participantes do grupo controle (GC: 48% e GE: 92%). Os resultados obtidos através do teste U de Mann-Whitney confirmam que os grupos diferem, significativamente, na ocasião do pós-teste ($Z = -5.057$; $p = 0.000$).

Comparações entre o pré-teste e pós-teste, em cada grupo, foram realizadas através do teste Wilcoxon. Como mostra a Tabela 1, o desempenho dos participantes do grupo controle nas duas ocasiões de testagem foi semelhante (Pré: 45% e Pós 48%), não havendo uma diferença significativa entre o pré-teste e o pós-teste ($Z = -0.390$; $p = 0.348$). Por outro lado, constata-se que os participantes do grupo experimental apresentam um desempenho superior na ocasião do pós-teste (92%) quando comparado ao pré-teste (40%), sendo essa diferença detectada pelo teste Wilcoxon ($Z = -3.923$; $p = 0.000$). Observa-se, ainda, que os participantes do grupo experimental tentam resolver todos os itens na ocasião do pós-teste, mesmo que seja de forma inadequada; o que não ocorria, anteriormente, na ocasião do pré-teste. Esta melhora no desempenho aponta que os participantes do grupo experimental parecem ter adquirido uma melhor compreensão acerca dos conceitos algébricos que envolvem equações do 1º grau, indicando um efeito positivo da intervenção realizada.

Considerando que os participantes resolveram dois tipos de questões – equações e problemas algébricos – seria interessante investigar o desempenho deles nestas duas ocasiões, tanto no grupo controle como no grupo experimental. Sendo assim, foi realizada uma análise do desempenho dos participantes em função dos problemas e das equações algébricas presentes nas duas ocasiões de testagem (pré e pós-testes).

3.1.2. Desempenho nos problemas algébricos

O desempenho nos problemas algébricos no pré-teste e pós-teste em relação aos dois grupos é apresentado na Tabela 2.

Tabela 2- Frequência e percentual (entre parênteses) de desempenho nos problemas algébricos por grupo (GC e GE) no pré-teste e pós-teste.

Pontuação	Grupo Controle (nrp= 120)[21]		Grupo Experimental (nrp= 120)	
	Pré	**Pós**	**Pré**	**Pós**
zero	**35** (29%)	**34** (28%)	**29** (24%)	**0** (0%)
Um	**20** (17%)	**14** (12%)	**32** (27%)	**11** (9%)
dois	**65** (54%)	**72** (60%)	**59** (49%)	**109** (91%)

Nota: zero (não fez); um (erro) e dois (acerto).

Observa-se, na Tabela 2 no pré-teste, que os dois grupos apresentam desempenho semelhante quando resolvem problemas algébricos. Percebe-se que, embora o grupo controle apresente um percentual menor de questões que receberam - pontuação um - quando comparado ao grupo experimental (GC: 17% e GE: 27%); em contrapartida, o grupo experimental apresenta um percentual menor de questões com pontuação zero (GC: 29% e GE: 24%). Isto parece indicar que o grupo experimental tentou responder mais questões e por isso errou mais. Já o grupo controle arriscou menos e por isso deixou mais questões em branco. Apesar disso, constata-se que ambos os grupos (GC e GE) apresentaram desempenhos semelhantes na pontuação dois (GC: 54% e GE: 49%). O teste U de Mann-Whitney confirma que os grupos não diferem, significativamente, no pré-teste ($Z = -0.178$; $p = 0.429$).

Constata-se, por outro lado, no pós-teste, uma melhora no desempenho em ambos os grupos, entretanto, observa-se que os estudantes que foram submetidas à

[21] nrp = número de respostas possíveis.

intervenção (grupo experimental) apresentam um percentual maior de respostas corretas quando comparadas ao grupo controle (GC: 60% e GE: 91%). Verifica-se, ainda, que os estudantes submetidos à intervenção não apresentam respostas em branco (GE: 0% e GC: 28%) e diminuem o percentual de respostas incorretas – pontuação um – quando comparado ao grupo controle (GE: 9% e GC: 12%). O teste U de Mann-Whitney confirma que os grupos diferem significativamente no pós-teste, observando-se um desempenho superior das crianças do grupo experimental em relação às crianças do grupo controle ($Z = -4.949$; $p = 0.000$).

Comparações entre o pré-teste e pós-teste em cada grupo foram feitas através do teste Wilcoxon. Como mostra a Tabela 2, os participantes do grupo controle melhoraram o desempenho na resolução de problemas algébricos, porém esta diferença não foi significativa ($Z = -0.781$; $p = 0.217$). Por outro lado, esse mesmo teste aplicado aos participantes do grupo experimental revelou existir diferenças significativas entre o pré-teste e o pós-teste ($Z = -3.939$; $p = 0.000$). Observando-se a Tabela 2, constata-se que o grupo experimental, além de não deixar nenhuma das questões sem resposta, amplia o número de respostas corretas quando comparado nas duas ocasiões de testagem (Pré: 49% para Pós: 91%).

3.1.3. Desempenho nas equações algébricas

O desempenho nas equações algébricas no pré-teste e pós-teste em relação aos grupos é apresentado na Tabela 3.

Tabela 3- Frequência e percentual (entre parênteses) de desempenho nas equações algébricas por grupo (GC e GE) no pré-teste e pós-teste.

Pontuação	Grupo Controle (nrp = 120)		Grupo Experimental (nrp = 120)	
	Pré	**Pós**	**Pré**	**Pós**
zero	**53** (44%)	**64** (53%)	**53** (44%)	**0** (0%)
um	**25** (21%)	**12** (10%)	**31** (26%)	**8** (7%)
dois	**42** (35%)	**44** (37%)	**36** (30%)	**112** (93%)

Nota: zero (não fez); um (erro) e dois (acerto).

Como pode ser observado na Tabela 3, no pré-teste, há uma proximidade entre os resultados apresentados pelos dois grupos. O percentual de acertos na resolução de equações algébricas foi de 35% para o grupo controle e 30% para o grupo experimental; semelhantemente, em relação às respostas com pontuação zero (GC: 44% e GE: 44%) e pontuação um (GC: 21% e GE: 26%), o teste U de Mann-Whitney confirma que os grupos não diferem, significativamente, no pré-teste ($Z = - 0.178$; $p = 0.429$).

No pós-teste, verifica-se na Tabela 3 que os alunos do grupo controle aumentaram o número de respostas corretas de 35% para 37% e diminuíram o número de respostas com pontuação um de 21% para 10% e aumentaram o número de respostas que receberam pontuação zero (Pré: 44% e Pós: 53%). Por outro lado, no grupo experimental, nenhuma questão ficou sem resposta, houve redução de 44% no pré-teste para 0% no pós-teste. Além disso, aumentaram o número de respostas corretas (Pré: 30% e Pós: 93%) e diminuíram o número de respostas que receberam pontuação um de 26%, no pré, para apenas 7%, no pós-teste. O teste U de Mann-Whitney confirma que os grupos diferem, significativamente, no pós-teste ($Z = - 4.949$; $p = 0.000$) com vantagem a favor do grupo experimental.

Comparações entre o pré-teste e pós-teste em cada grupo foram feitas através do teste Wilcoxon. Como mostra a Tabela 3, não foram detectadas diferenças, significativas, entre o pré-teste e o pós-teste dos participantes do grupo controle ($Z = -0.781$; $p = 0.217$). Entretanto, no grupo experimental, foram detectadas diferenças, significativas, entre o pré-teste e o pós-teste ($Z = -3.939$; $p = 0.000$). Isso ocorreu porque no pré-teste havia um percentual elevado de questões em branco, que receberam pontuação zero (44%), e de respostas erradas, que a pontuação um (26%). Porém, após a intervenção, os estudantes do grupo experimental ampliaram o percentual de respostas corretas (30% para 93%), diminuíram o número de respostas que receberam pontuação um (26% para 7%) e não deixaram questões em branco, demonstrando ter adquirido uma maior compreensão acerca das expressões algébricas, indicando um efeito positivo da intervenção realizada.

3.1.4. Desempenho vs. estruturas algébricas

Será que o tipo de estrutura algébrica – incógnita (x) em apenas um lado da igualdade ou equações com duas incógnitas diferentes (x e y) em cada lado – tem alguma influência no desempenho dos problemas e das equações?

Neste estudo o uso de diferentes estruturas foi uma opção teórica, uma vez que a Teoria dos Campos Conceituais aborda a utilização de diferentes situações, invariantes e representações para a efetiva compreensão de um determinado campo conceitual. Portanto, para compreender o campo conceitual da álgebra, o aluno precisa experimentar diferentes situações, dominar os invariantes envolvidos na tarefa. Além disso, torna-se importante que ele identifique e utilize diferentes formas de representação de um conceito. Para Vergnaud (1988), o domínio de um campo conceitual é um processo que leva bastante tempo para ser consolidado.

Dessa forma, buscou-se conciliar as diferentes situações, invariantes e representações nas tarefas proposta neste estudo. Todos os problemas e equações tiveram por base estruturas algébricas propostas por Lins Lessa (1996). Cada questão foi modelizada por um tipo diferente de estrutura algébrica. O Quadro 3 apresenta os problemas com suas respectivas estruturas.

Tipos de Problemas	Estrutura	Equação
(P1) Uma balança está em equilíbrio. Um dos pratos contém dois saquinhos de farinha com pesos iguais desconhecidos e mais um saquinho com 100g de farinha. O outro prato contém 500g de farinha. Qual o peso de cada saquinho de farinha?	(1) $ax + b = c$	$2x + 100 = 500$
(P2) Raquel e Gisele foram à feira comprar farinha. Raquel comprou dois sacos de farinha numa barraca e três sacos de farinha em outra barraca. Gisele comprou 250 gramas de farinha. Sabendo que elas compraram a mesma quantidade de farinha, quantas gramas de farinha tinham em cada saco que Raquel comprou?	(2) $ax + bx = c$	$2x + 3x = 250$
(P3) Carla e Patrícia foram à feira comprar açúcar para fazer uns docinhos. Carla comprou dois sacos de açúcar e mais 400 gramas de açúcar. Patrícia comprou quatro sacos de açúcar de mesmo peso dos de Carla. Sabendo-se que elas compraram a mesma quantidade, quantos gramas pesam cada saco de açúcar que elas compraram?	(3) $ax + b = cx$	$2x + 400 = 4x$
(P4) Fabio e Fernando eram irmãos e colecionavam bolas de gude. Fábio ganhou um pacote de bolas de gude de seu pai e mais 70 bolas de gude de sua mãe. Fernando ganhou de seu pai quatro pacotes de bolas de gude e mais 25 bolas de gude de sua mãe. Os dois irmãos ganharam a mesma quantidade de bolas de gude para a coleção. Sabendo-se que cada pacote tinha sempre a mesma quantidade de bolas, quantas bolas de gude havia em cada pacote?	(4) $ax + b = cx + d$	$1x + 70 = 4x + 25$
(P5) Gabriel foi ao supermercado com seu irmão Rafael. Gabriel comprou um pacote de queijo mussarela e 900g de queijo prato. Rafael comprou um pacote de queijo mussarela, dois sacos de queijo parmesão e 100g de queijo prato. Sabendo que ao final da compra os dois irmãos ficaram com a mesma quantidade de queijo e que todos os sacos continham a quantidade de queijo em gramas, qual o peso de cada saco de queijo parmesão?	(5) $ax + b = ax + cy + d$	$1x + 900 = 1x + 2y + 100$
(P6) Dona Vera e Dona Lia foram à feira comprar frutas. Dona Vera comprou dois sacos de maçãs, dois sacos de goiabas e mais 70 laranjas. Dona Lia comprou também dois sacos de maçãs e quatro sacos de goiabas iguais aos de Dona Vera e mais 20 laranjas. Ao final da compra as duas senhoras ficaram com a mesma quantidade de frutas. Sabendo-se que os sacos de frutas de um mesmo tipo tinham sempre a mesma quantidade, quantas goiabas tinham em cada saco?	(6) $ax + by + c = dx + by + e$	$2x + 2y + 70 = 4x + 2y + 20$

Quadro 3 - Tipos de problemas utilizados no pré-teste e pós-teste e suas respectivas estruturas [adaptado de Lins Lessa (1996)].

Percebe-se, no Quadro 3, que há diferentes tipos de problemas e que as estruturas presentes em cada problema algébrico são diferentes. Os problemas foram elaborados de forma que eles se aproximassem o máximo possível de uma situação cotidiana. Além disso, o nível de dificuldade de resolução dos problemas vai aumentando progressivamente. Eles iniciam com uma estrutura simples (Estruturas 1 e 2), incógnita em apenas um lado da igualdade e vão progredindo até chegar a equações mais complexas com duas incógnitas diferentes (x e y) em cada lado da igualdade (Estrutura 6).

Será que o tipo de estrutura influencia na forma de resolução adotada pelo aluno na hora da resolução dos problemas e equações algébricas? A Tabela 4 traz um panorama geral do desempenho dos grupos (GC e GE) por questão tanto no pré-teste quanto no pós-teste.

Tabela 4 - Frequência de respostas corretas em cada item por grupo (GC e GE) nas duas ocasiões de testagem

Grupos	**Problemas**											
	P1		**P2**		**P3**		**P4**		**P5**		**P6**	
	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
Controle	19	20	19	20	11	16	10	10	6	5	0	1
Experimental	19	20	19	20	9	20	4	17	8	16	0	16
	Equações											
	E1		**E2**		**E3**		**E4**		**E5**		**E6**	
	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
Controle	15	17	16	17	1	3	7	4	3	3	0	0
Experimental	13	20	15	20	2	16	2	20	4	18	0	18

Conforme pode ser visto na Tabela 4, a frequência das respostas corretas indica que os alunos não apresentaram dificuldades na resolução dos problemas (P1 e P2) e equações algébricas (E1 e E2) modelizados pelas Estruturas 1 e 2 (incógnita x em apenas um lado da igualdade). Tanto no pré-teste como no pós-teste, os alunos conseguiram resolver, corretamente, as equações e problemas algébricos modelizados por estas estruturas.

Estudos empíricos realizados, por Vergnaud (1988), indicaram que as Estruturas 1 e 2 são, demasiadamente simples e nesse contexto, o uso da ferramenta algébrica seria desnecessária. Portanto, o elevado número de acerto nas questões modelizadas pelas Estruturas 1 e 2 neste estudo corrobora com as descobertas feitas por Gérard Vergnaud que os estudantes podem responder a estas questões adotando procedimentos aritméticos.

No pré-teste, observa-se que nas questões (P3 e E3), modelizada pela Estrutura 3, têm início com uma queda no número de acertos dos dois grupos que vai se acentuando até chegar as questões finais. Estudos anteriores apontam ser nessa estrutura (incógnita x nos dois lados da igualdade) onde acontece, verdadeiramente, a ruptura entre o pensamento aritmético e o pensamento algébrico (VERGNAUD, 1988).

Em relação às questões com menor frequência de acertos, no pré-teste, foram detectados os problemas (P5 e P6) e as equações algébricas (E5 e E6) todos modelizados pelas Estruturas 5 e 6. Tal resultado, já era esperado no pré-teste, devido à complexidade própria dessas estruturas e ao fato de os alunos, ainda, não terem iniciado o ensino formal de equações do 1º grau na escola.

Contudo, no pós-teste, dados da Tabela 4 indicam que os alunos do grupo controle tiveram um desempenho semelhante em relação ao pré-teste. Estes se saíram bem nos problemas (P1 e P2) e nas equações (E1 e E2). Todavia, continuaram com fraco desempenho nos problemas (P5 e P6) e nas equações (E5 e E6). Já em relação ao desempenho do grupo experimental, consta-se que eles aumentam o número de respostas corretas em todas as estruturas e as resolvem por procedimentos algébricos. Tais resultados, mostram que os alunos que participaram da intervenção demonstram ter adquirido uma maior compreensão acerca das situações envolvendo álgebra, indicando um efeito positivo da intervenção realizada.

3.2. Análise dos Procedimentos

Outra forma de visualizar os resultados deste estudo pode ser obtida através da análise dos tipos de procedimentos utilizados pelos participantes para resolver os problemas e equações algébricas. Haveria diferenças nos tipos de procedimentos quando se compara problemas e equações? A intervenção propiciou a melhora dos estudantes em ambas as questões - problemas ou nas equações?

3.2.1. Sistema de Análise

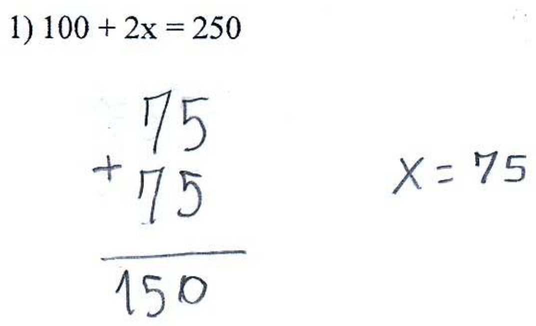
A análise dos protocolos dos estudantes permitiu identificar quatro tipos de procedimentos de resolução, independentemente da utilização de estratégias apropriadas ou não apropriadas para a resolução dos problemas e das equações algébricas. A análise dos tipos de procedimentos, adotados neste estudo, tiveram como base o estudo de Lins Lessa (1996). As verbalizações dos alunos, durante a realização das tarefas, serviram de apoio na classificação dos tipos de procedimento adotados tanto nos problemas como nas equações algébricas. Os tipos de procedimentos são descritos e exemplificados a seguir.

Tipo 1 (ausência de resolução) **–** o estudante deixa a questão em branco e não explicita como o problema ou a equação poderiam ser resolvidos.

Tipo 2 – cálculo mental – o estudante apresenta só o resultado da questão, sabe explicar como pensou, mas desconhece o algoritmo de resolução. Estão incluídas nesta categoria todas as questões com ausência de cálculos, ou seja, que apresentam só a resposta.

Tipo 3 – cálculo aritmético – o estudante utiliza operações aritméticas (soma, subtração, multiplicação e divisão) para resolver a questão. Nesta categoria estão incluídas também as respostas em que o aluno atribuía um determinado valor a incógnita e realizava testes para saber se estes valores eram verdadeiros. Por exemplo:

Figura 20: Reprodução do protocolo 21, sexo masculino, 12 anos, GE, pré-teste, equação.



E: “qual é o valor?”
A: “setenta e cinco”.
E: “por que você acha que é setenta e cinco?”
A: “por que setenta e cinco mais setenta e cinco é igual a cento e cinquenta.”

Tipo 4 – cálculo algébrico – nesta categoria foi incluída todas as respostas onde o aluno realizou a manipulação algébrica (efetuar a mesma operação em ambos os membros da equação) ou utilizou as regras algébricas formais (separar os termos com incógnitas dos termos sem incógnita) ensinadas na escola. Por exemplo:

Figura 21: Reprodução do protocolo 24, sexo feminino, 11 anos, GE, pós-teste, problema.

(1) Uma balança está em equilíbrio. Um dos pratos contém 2 saquinhos de café com pesos iguais desconhecidos e 1 saquinho de 100g de café. O outro prato contém 500g de café. Qual o peso de cada saquinho de café?

$$(-100)\ 2x + 100 = 500\ (-100)$$
$$(\div 2)\ 2x = 400\ (\div 2)$$
$$x = 200$$

A: "terminei."
E: "como é que você resolveu?"
A: "eu tirei o cem, diminui cem de cada lado"...
E: "e depois?"
A: "eu dividi por dois e ficou um x que deu igual a duzentos."

Figura 22: Reprodução do protocolo 1, sexo masculino, 12 anos, GC, pós-teste, equação.

6) $2x + \cancel{2y} + 60 = 4x + \cancel{2y} + 20$

$$100 + 60 = 160 + 20$$

$$x = 50$$

E: "por que você riscou o y?"
A: "não...pra ficar mais fácil..."
E: "você já estudou isso na sala de aula?"
A: "Já."
E: "quanto deu quanto o valor de um x?"
A: "aqui? Vinte... vinte não como é o nome? Cinquenta!"
E: "deu cinquenta cada um?
A: "sim"
E: "então ponha aí o valor de x."

Os tipos de procedimentos, adotados neste estudo, foram analisados por dois juízes independentes e treinados, obtendo-se um índice de concordância de 92,19%. Os casos discordantes foram analisados por um terceiro juiz, também independente, sendo o seu julgamento considerado final.

Os resultados referentes aos tipos de procedimentos adotados pelos participantes (GC e GE) nas duas ocasiões de testagem (pré e pós-testes) são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Frequência e percentual (entre parênteses) geral dos tipos de procedimentos adotados nos problemas do pré-teste e pós-teste por ambos os grupos GC e GE.

		Tipos de procedimentos			
Grupos	**Fase**	**Tipo 1**	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Tipo 4**
GC (nrp=240)	Pré	**93** (39%)	**66** (27%)	**81** (34%)	**0** (0%)
	Pós	**98** (41%)	**64** (26%)	**74** (31%)	**4** (2%)
GE (nrp=240)	Pré	**82** (34)	**58** (24)	**100** (42)	**0** (0)
	Pós	**0** (0%)	**0** (0%)	**0** (0%)	**240** (100%)

Nota: Tipo 1 (ausência de resolução); Tipo 2 (cálculo mental); Tipo 3 (aritmético) e T 4 (algébrico).

De uma forma geral, observa-se que ambos os grupos na ocasião do pré-teste não utilizaram o procedimento do Tipo 4 (algébrico). Nota-se, também, que os grupos (GC e GE) apresentaram um número elevado de questões sem resolução (Tipo 1) e de procedimentos aritméticos (GC: 34% e GE: 42%).

Como se verificar na Tabela 5, os estudantes do grupo controle, na ocasião do pré-teste apresentam um elevado percentual de respostas em branco (39%), seguido do cálculo aritmético (34%) e do cálculo mental (27%). Já o grupo experimental utilizou mais o procedimento cálculo aritmético em 42% das questões, seguido de questões em branco (34%) e do cálculo mental (24%). O teste U de Mann-Whitney indica que não há diferença significativa entre os grupos em relação aos quatro tipos de procedimentos utilizados no pré-teste: Tipo 1 ($Z = -0.572$; $p = 0.283$); Tipo 2 ($Z = -0.698$; $p= 0.242$); Tipo 3 ($Z = -0.639$; $p = 0.261$) e Tipo 4 ($Z = -0.000$; $p = 1.000$).

Por outro lado, na ocasião do pós-teste, constata-se que o grupo experimental resolveu todas as questões, através da representação algébrica (GE: 100%), enquanto, o grupo controle continua adotando procedimentos aritméticos (31%), cálculo mental (26%) e apenas (2%) são de procedimentos algébricos. Além disso, constata-se um número expressivo de questões em branco (41%). Quando aplicado o teste U de Mann-Whitney, constata-se que há diferenças, significativas, entre os grupos em relação aos quatro tipos de procedimentos utilizados na ocasião do pós-teste: Tipo 1 ($Z = -5.796$; $p = 0.000$); Tipo 2 ($Z = -4.895$; $p = 0.000$); Tipo 3 ($Z = -5.113$; $p = 0.000$) e Tipo 4 ($Z = -6.054$; $p = 0.000$).

Comparações entre o pré-teste e pós-teste em cada grupo foram feitas através do teste Wilcoxon. Como mostra a Tabela 5, os participantes do grupo controle na ocasião do pós-teste continuam apresentando procedimentos semelhantes aos apresentados no pré-teste. Um número elevado de respostas em branco (Pré: 39% e Pós: 41%), seguido do cálculo aritmético (Pré: 34% e Pós: 31%), cálculo mental (Pré: 27% e Pós: 26%) e apenas 2% das respostas no pós-teste apresentam procedimentos aritméticos. O teste Wilcoxon comprova que o grupo controle não apresenta diferença significativa nos procedimentos entre o pré-teste e o pós-teste em relação ao Tipo 1 ($Z = -0.661$; $p = 0.254$) ; Tipo 2 ($Z = -0.078$; $p = 0.469$); Tipo 3 ($Z = -0.719$; $p = 0.236$) e Tipo 4 ($Z = -1.633$; $p = 0.051$)

Em relação ao grupo experimental, foram detectadas diferenças significativas entre o pré-teste e o pós-teste entre todos os tipos de procedimentos, a saber: Tipo 1 ($Z = -3.632$; $p = 0.000$); Tipo 2 ($Z = -3.529$; $p = 0.000$); Tipo 3 ($Z = -3.627$; $p = 0.000$) e Tipo 4 ($Z = -4.472$; $p = 0.000$). Isto ocorreu porque no pré-teste os estudantes do GE adotavam mais o procedimento do cálculo aritmético em 42% das questões, seguido de questões em branco (34%) e do cálculo mental (24%). Já no pós-teste, todos os participantes do grupo experimental independentemente da resolução estar correta ou incorreta adotaram procedimentos algébricos tanto para os problemas como para as equações.

Isto parece indicar uma influência positiva da intervenção realizada, sobre os procedimentos de resolução adotados pelo grupo experimental, uma vez que o objetivo da sequência didática proposta era que, ao final do treinamento, os alunos passassem a incorporar o uso de procedimentos algébricos tanto na resolução de problemas quanto nas equações algébricas.

3.2.2. Tipos de Procedimentos: problemas vs. Equações

A Tabela 6 apresenta os tipos de procedimentos utilizados pelos participantes (GC e GE) tanto na resolução de problemas, quanto na resolução das equações algébricas, em ambas as ocasiões de testagem (pré e pós-testes).

Tabela 6 – Frequência e percentual (entre parênteses) dos tipos de procedimentos adotados no pré-teste e pós-teste por ambos os grupos (GC e GE) nos problemas e equações.

Grupos	Fase	Tipos de procedimentos							
		Tipo 1		Tipo 2		Tipo 3		Tipo 4	
		Problema	Equação	Problema	Equação	Problema	Equação	Problema	Equação
GC	Pré	**39** (32%)	**54** (44%)	**40** (34%)	**26** (22%)	**41** (34%)	**40** (34%)	**0** (0%)	**0** (0%)
	Pós	**34** (28%)	**64** (52%)	**38** (32%)	**26** (22%)	**48** (40%)	**26** (22%)	**0** (0%)	**4** (4%)
GE	Pré	**28** (24%)	**54** (44%)	**41** (34%)	**17** (16%)	**51** (42%)	**49** (40%)	**0** (0%)	**0** (0%)
	Pós	**0** (0%)	**0** (0%)	**0** (0%)	**0** (0%)	**0** (0%)	**0** (0%)	**120** (100%)	**120** (100%)

Nota: Tipo 1 (ausência de resolução); Tipo 2 (cálculo mental); Tipo 3 (aritmético) e T4 (algébrico).

Os dados da Tabela 6 indicam que, no pré-teste, o tipo de procedimento mais utilizado para resolver os problemas algébricos foi o aritmético (GC: 34% e GE: 42%) seguido pelo procedimento cálculo mental (GC: 34% e GE: 34%). Já na resolução das equações algébricas o que predominou foram as respostas em branco (Tipo 1: 44% para o GC e para o GE). O segundo procedimento mais utilizado na resolução das equações foi o aritmético (GC: 34% e GE: 40%). Ressalta-se que o procedimento algébrico não foi utilizado em nenhum momento pelos dois grupos na primeira ocasião de testagem.

No pós-teste, o grupo controle deixa um número elevado de respostas em branco (Tipo 1) com maior frequência nas equações (52%) quando comparado aos problemas (28%). Já os procedimentos de cálculo mental e aritmético são adotados com maior frequência nos problemas.

Por outro lado, os estudantes que foram submetidos à intervenção que antes adotavam procedimentos de cálculo mental e aritmético para resolver problemas e equações passaram, após o treinamento, a adotar o procedimento mais eficiente e eficaz na resolução de equações e problemas: procedimento algébrico, independente da estrutura apresentada.

3.3. Comparações entre desempenho e tipos de procedimentos

O fato dos procedimentos adotados nesta pesquisa terem, em certo sentido, um caráter hierárquico, sobretudo em relação ao Tipo 4 (procedimentos algébricos), nos leva a pensar que seria interessante examinar a existência de uma possível relação entre a resposta correta e o tipo de procedimento adotado pelos estudantes, como ilustrado na Tabela 7.

Tabela 7 - Frequência e percentual (entre parênteses) de respostas corretas e incorretas em cada tipo de procedimento adotados no pré e pós-testes em ambos os grupos (GC e GE).

Pré-teste				
Procedimentos	**Grupo Controle** (nrp = 240)		**Grupo Experimental** (nrp = 240)	
	Corretas	**Incorretas**	**Corretas**	**Incorretas**
Tipo 1 (ausência de resolução)	**0** (0%)	**93** (39%)	**0** (0%)	**83** (35%)
Tipo 2 (cálculo mental)	**56** (23%)	**10** (4%)	**54** (22%)	**8** (3%)
Tipo 3 (cálculo aritmético)	**52** (22%)	**29** (12%)	**47** (20%)	**48** (20%)
Tipo 4 (cálculo algébrico)	**0** (0%)	**0** (0%)	**0** (0%)	**0** (0%)
Pós-teste				
Procedimentos	**Grupo Controle** (nrp = 240)		**Grupo Experimental** (nrp = 240)	
	Corretas	**Incorretas**	**Corretas**	**Incorretas**
Tipo 1 (ausência de resolução)	**0** (0%)	**97** (40%)	**0** (0%)	**0** (0%)
Tipo 2 (cálculo mental)	**53** (22%)	**11** (5%)	**0** (0%)	**0** (0%)
Tipo 3 (cálculo aritmético)	**63** (26%)	**12** (5%)	**0** (0%)	**0** (0%)
Tipo 4 (cálculo algébrico)	**3** (1,5%)	**1** (0,5%)	**221** (92%)	**19** (8%)

Como se observa na Tabela 7, as questões corretas, em ambos os grupos, no pré-teste, em geral, estão associadas ao procedimento do cálculo mental (GC: 23% e GE: 22%) e cálculo aritmético (GC: 22% e GE: 20%). Nenhuma resposta correta esteve associada ao procedimento do Tipo 4 (cálculo aritmético).

No pós-teste, as respostas estão associadas aos três tipos de procedimentos (Tipo 2, Tipo 3 e Tipo 4). Constata-se, também, que os alunos não submetidos à intervenção (GC) acertam adotando o cálculo mental (Tipo 2), procedimentos aritméticos (Tipo 3); enquanto os alunos do grupo experimental apresentam 92% dos acertos associados ao procedimento algébrico (Tipo 4). Salienta-se, ainda, que os alunos do grupo experimental que adotaram procedimentos do Tipo 2 (cálculo mental) e Tipo 3 (cálculo aritmético) no pré-teste, passaram na ocasião do pós-teste, a adotar procedimentos algébricos. Tais resultados revelam que os participantes do grupo experimental sempre tentavam resolver as questões através do procedimento algébrico, mesmo naqueles procedimentos onde houve erros (8%). Novamente, constata-se o efeito positivo da intervenção realizada.

Discussões e Conclusões

O objetivo deste estudo foi investigar os efeitos de uma intervenção específica com o objeto de aprendizagem Balança Interativa para desenvolver conceitos algébricos. Dessa forma, foram elaboradas diferentes atividades, proposta numa sequência didática, que tinha como recurso multimídia o objeto de aprendizagem Balança Interativa. Cada atividade contemplava aspectos dos invariantes algébricos e tinham o objetivo de levar o aluno a superar o pensamento aritmético e a utilizar o pensamento algébrico na resolução dos problemas e equações.

Antes da elaboração das atividades, da sequência didática, o pesquisador realizou um mapeamento das dificuldades a partir de uma revisão na literatura da área, tomando como pontos de partida alguns estudos empíricos realizados no Brasil (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995; FREIRE, 2007; LEITE, 2006; LINS LESSA, 1996; PINTO, 2001) e no exterior (BOOTH, 1995; KIERAN, 1995; SCHLIEMANN, CARRAHER; BRIZUELA, 2007; VERGNAUD, 1991). Através deste mapeamento, foi possível identificar as principais dificuldades apresentados pelos alunos na aprendizagem de conceitos algébricos, a saber: compreensão do sinal de igual (=) como uma relação e não como um resultado; compreensão dos conceitos de equação, incógnita e princípio de equivalência algébrica. Tais dificuldades foram incorporadas a sequência didática proposta neste estudo que visava desenvolver a compreensão de conceitos algébricos.

Ademais, esta pesquisa ancora-se na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1990). Para um conceito ser compreendido é necessário levar em consideração três aspectos: as situações (que dão significados aos conceitos), os invariantes operatórios (propriedades fundamentais que caracterizam os conceitos, que podem ser detectados e usados pelo sujeito para analisar e dominar as situações) e as representações (utilizadas na para expressar os conceitos: simbólicas, linguísticas, gráficas, gestuais). Diante disso, as atividades propostas na intervenção apresentavam diferentes situações (virtual e real com diferentes estruturas algébricas), múltiplas formas de representação (icônica e simbólica) e invariantes algébricos como o princípio de equivalência, igualdade, desigualdade, equação e incógnita.

Além disso, pesquisas anteriores (FREIRE, 2007; LEITE, 2006; LINS LESSA, 1996; PINTO, 2001) mostram que alguns questionamentos ainda precisavam ser respondidos: como inserir um objeto de aprendizagem digital em uma sequência didática desenvolvida para o ensino de equações do 1ª grau no contexto escolar? Quais os possíveis ganhos cognitivos obtidos pelos usuários desta sequência didática na resolução de problemas e equações algébricas?

Em resposta a primeira pergunta pode-se dizer que a inserção de um objeto de aprendizagem digital em uma sequência didática, para o ensino das noções de equação ou qualquer outro conteúdo, pode ser realizada com sucesso desde que sejam tomados alguns cuidados, tais como: (i) conhecer bem o objeto de aprendizagem que vai aplicar, uma vez que os OA não contemplam todos os invariantes de um campo conceitual; (ii) desenvolver atividades complementares que contemplem os invariantes que não foram “cobertos” pelo OA; (iii) acompanhar, pessoalmente, os alunos durante a aplicação da sequência didática – a mediação do professor é de grande importância na superação dos possíveis obstáculos didáticos; (iv) fazer um “fechamento” da atividade ao final da sequência proposta. Esse fechamento possibilita que o professor conheça as descobertas e possíveis dúvidas de seus alunos em relação aos invariantes algébricos apresentados nas atividades levando-os a superações.

Em relação à segunda questão, as análises dos resultados desse estudo revelam que, de fato, há uma diferença significativa no desempenho do grupo experimental quando comparado ao grupo controle na ocasião do pós-teste. Os estudantes que foram submetidos à intervenção apresentaram um desempenho superior quando comparado aos estudantes do grupo controle que estavam iniciando aprendizagem da álgebra.

Outro dado interessante revelado nessa investigação é que os estudantes que foram submetidos à intervenção apresentam uma mudança qualitativa nos procedimentos adotados tanto nos problemas como nas equações. No pré-teste, quando tentavam resolver as questões propostas adotavam o procedimento aritmético e o cálculo mental. Após as sessões de intervenção, na ocasião do pós-teste, os estudantes passam adotar o procedimento algébrico, mesmo naqueles problemas e equações que poderiam ser resolvidos por procedimentos aritméticos (Estruturas 1 e 2). Tais resultados apontam o efeito positivo da intervenção realizada que propiciou mudanças do ponto de vista psicológico na forma como os estudantes abordam os problemas e as equações apresentadas.

Por outro lado, salienta-se que mesmo sendo instruídos acerca de conceitos algébricos no contexto escolar, no momento que estava sendo realizada a investigação os estudantes que não foram submetidos à intervenção (GC) adotaram os mesmos procedimentos apresentados na ocasião do pré-teste (procedimento aritmético e o cálculo mental) quando solicitados a resolverem os problemas e equações no pós-teste. Tais resultados corroboram com os estudos de Da Rocha Falcão (1993) e Lins Lessa (1996) que apontam que a apropriação da álgebra é uma tarefa cognitiva árdua e que uma das tarefas mais difíceis são a colocação do problema em equação e depois saber operar com os dados.

Além disso, os resultados desse estudo apontam que na ocasião do pré-teste para ambos os grupos (GC e GE) era mais fácil para os estudantes resolverem problemas algébricos do que as equações. Uma explicação possível para isso, talvez seja, a natureza semântica dos problemas utilizados na pesquisa, todos eles utilizavam situações presentes no cotidiano dos participantes, o que de certa forma contribuiu para o engajamento do aluno na realização da tarefa. O uso de situações-problema no contexto do aluno pode facilitar sua compreensão e guiá-lo a resolução do problema (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995; LINS LESSA, 1996).

Quanto aos possíveis ganhos cognitivos obtidos pelos usuários desta sequência didática na resolução de problemas algébricos, pode-se dizer que a análise dos protocolos dos participantes do grupo experimental indica que eles estavam adquirindo novos conhecimentos sobre os invariantes algébricos, uma vez que, os mesmos eram encorajados a dizer como estavam pensando durante o processo de resolução das questões com o OA e através de lápis e papel. Dessa forma, teve-se a oportunidade de acompanhar o processo de resolução e ao mesmo tempo avaliar a compreensão do aluno sobre os invariantes algébricos envolvidos na questão através do diálogo entre o participante e o examinador.

Durante as entrevistas clínicas, nas sessões de intervenção e no pós-teste, os participantes explicitaram a compreensão de invariantes como o princípio de equivalência, equação e incógnita. A compreensão destes princípios é fundamental para a aprendizagem de equações do 1ª grau e devem ser explorados e explicitados no contexto escolar quando se deseja ensinar álgebra.

O uso de situações-problema, durante as sessões de intervenção, oportunizou a representação simbólica, passo inicial para o procedimento algébrico durante a resolução de problemas. Esta situação permitiu aos participantes do grupo experimental descobrir como representar, simbolicamente, uma equação com duas incógnitas (x e y) e realizar a redução desta equação – através do princípio de equivalência – até encontrar a equação reduzida do tipo ax = b. A compreensão desse processo permite a resolução diferentes tipos de problemas algébricos.

Em uma pesquisa de intervenção, os dados obtidos no pré-teste servem para direcionar as atividades que serão desenvolvidas com o objetivo de proporcionar aos participantes ganhos qualitativos em relação ao nível inicial em que estavam na ocasião do pré-teste. Neste caso, o pré-teste exerce o papel de uma avaliação diagnóstica ao indicar, ao pesquisador, onde os alunos têm maiores dificuldades na compreensão de um determinado conceito (SPINILLO; LAUTERT, 2008). Diante disso, o papel do experimentador é traçar estratégias pedagógicas que levam os alunos a superação das dificuldades apresentadas na compreensão dos invariantes algébricos como foram realizadas nesta investigação.

Diante dos resultados apresentados no pré-teste, o experimentador optou por desenvolver atividades que levassem os alunos a entender o princípio de equivalência algébrica (efetuar a mesma operação nos dois membros da equação) e, conseqüentemente, melhorar o desempenho dos estudantes na resolução de equações e problemas cujas estruturas exigissem o uso da ferramenta algébrica, tais como as Estruturas 3, 4, 5 e 6.

As Atividades 3 e 4 (Anexo D e E, respectivamente) apresentam situações-problema cuja resolução exige o uso da ferramenta algébrica. A Atividade 3 apresenta a Estrutura 5 (ax + b = ax + cy + d), enquanto a Atividade 6 tem como base a Estrutura 6 (ax + by + c = dx + by + e). Os dados de pré-teste indicaram ser nestas estruturas onde os alunos apresentaram maiores dificuldades de compreensão, especialmente, nas equações algébricas. O alto percentual de questões deixadas em branco (GC: 36% e

GE: 34%) indica a dificuldade que os alunos mostraram ao se depararem com equações e problemas algébricos modelizados por essas estruturas.

De fato, as Estruturas 5 e 6 apresentam duas incógnitas (x e y) diferentes e por isso pode confundir e dificultar o processo de resolução. No início da aprendizagem deste conteúdo, um erro bastante comum é o estudante montar a equação do problema utilizando a mesma letra para representar duas incógnitas diferentes, e dessa forma, ignorar a necessidade de utilizar uma letra diferente para cada referente.

Outro aspecto importante a ser ressaltado, refere-se ao que fazer quando uma equação algébrica apresenta o mesmo coeficiente em lados opostos da igualdade (Estruturas 5 e 6). Alguns alunos, iniciantes em álgebra, não sabem o que fazer e acabam somando os termos, incorrendo num erro conceitual. Alguns alunos demoram a entender que esses termos podem ser cancelados ou suprimidos da equação sem nenhum prejuízo à resolução da mesma.

A análise do pós-teste, do grupo experimental, indica que os alunos entenderam o princípio algébrico de equivalência e melhoraram o desempenho tanto na resolução dos problemas quanto das equações algébricas. Já os alunos do grupo controle continuaram com a mesma dificuldade de compreensão. O percentual de questões sem resposta do grupo controle foi de 41% (ver Tabela 1). Enquanto isso, conforme a mesma tabela, o percentual de questões sem resposta do grupo experimental foi de 0%. Isto parece indicar que os participantes submetidos à intervenção demonstraram uma maior compreensão dos invariantes algébricos após o treinamento quando comparado aos estudantes do grupo controle.

Durante a intervenção, com o grupo experimental, houve sempre a preocupação com a busca de uma melhora qualitativa dos participantes em relação à compreensão dos invariantes da álgebra. Embora seja possível, e mesmo desejável que esta melhora esteja ligada ao alto índice de acerto nas questões do pós-teste, o que de fato aconteceu, foi uma melhora também em relação aos procedimentos adotados. Os dados da Tabela 5 (página 85) indicam que no *pré-teste* nenhum dos participantes (GC e GE) chegou a utilizar o procedimento algébrico de resolução. Contudo no *pós-teste* todos os participantes que foram submetidos à intervenção utilizaram o procedimento algébrico e apresentaram um excelente desempenho (92% de acertos). Enquanto que apenas 2% das respostas do grupo controle no pós-teste apresentavam procedimentos algébricos.

Desse modo, pode-se, agora, considerar que a mudança de um procedimento aritmético para um procedimento algébrico constitui uma mudança qualitativa, uma vez que, a álgebra é considera na literatura da Psicologia da Educação Matemática como uma poderosa ferramenta para resolver “um determinado tipo de problema, para o qual os procedimentos aritméticos mostram-se insuficientes” (DA ROCHA FALCÃO, 1993, p. 86).

O fato de tal mudança ocorrer apenas em relação ao grupo experimental, considerando que ambos os grupos estavam iniciando o aprendizado da álgebra com o mesmo professor e adotando mesmo material didático, leva-nos a atribuir tal mudança as atividades que foram propostas durante as situações de intervenção.

Quanto à possibilidade de uso de ferramentas digitais no ensino de equações do 1º grau, os dados deste estudo demonstraram que é possível e viável a utilização de objetos de aprendizagem em combinação com outros recursos que levem o aluno a estabelecer alguma relação entre a situação virtual e a situação real. Uma das principais dificuldades do indivíduo que trabalha com recursos digitais e/ou materiais concretos é que os alunos conseguem resolver as atividades propostas neste ambientes, mas não conseguem fazer a relação entre as duas situações (real/virtual), levando o professor a certa frustração quando este compara o tempo gasto no preparo da atividade e os resultados alcançados.

Lins e Gimenez (1997) afirmam que há a crença de que a utilização de materiais concretos como, por exemplo, a balança de dois pratos pode facilitar o processo de assimilação de conceitos algébricos por parte do aluno. O grande problema desse tipo de abordagem é que o aluno não consegue fazer a “passagem”, do concreto para o formal, via abstração.

Neste contexto, o professor deve levar em conta não os materiais em si, mas, sobretudo a utilização de situações significativas e o estabelecimento de uma relação entre a situação virtual e/ou concreta e a situação simbólica. Não é o tipo de material utilizado que determina o sucesso do professor na ação pedagógica, mas sim o conjunto de atividades traçadas em função das necessidades de aprendizagem de cada aluno como as que foram adotadas nesta investigação.

Destaca-se, ainda, que o papel do examinador torna-se fundamental na condução de situações significativas e no estabelecimento da relação entre a situação virtual e a situação real. Sem esta mediação, é provável que os alunos se percam no meio do caminho. Dessa forma, o planejamento cuidadoso, o acompanhamento pessoal e uma avaliação conjunta de cada atividade servem como uma ponte para estabelecer as relações necessárias entre as diferentes situações, tornando-as significativas para o aluno. Tais ações implementadas nessa investigação corroboram com estudos anteriores (FREIRE, 2007; LEITE, 1996; LINS LESSA, 1996) que apontam para o engajamento dos estudantes nas atividades como uma das possíveis formas de superação para as suas dificuldades.

Outro aspecto a ser ressaltado é a possível relação entre o uso do cálculo mental, a autonomia do sujeito no processo de resolução e o desempenho em Matemática na escola. As questões modelizadas pelas Estruturas 1 e 2 foram facilmente resolvidas pelos alunos que tinha desempenho médio e/ou superior[22] nas notas finais de Matemática no ano anterior. Via de regra, estas questões eram resolvidas através do cálculo mental e os alunos não necessitavam de nenhuma representação auxiliar nem de intervenção do pesquisador. Já entre os alunos com desempenho inferior em Matemática havia a necessidade de fazer uma representação auxiliar e/ou de uma rápida intervenção do pesquisador para que obtivessem as respostas.

Além disso, verificou-se que foi possível levar os alunos do grupo experimental a transpor uma situação virtual – descobrir incógnitas no OA Balança Interativa – para uma situação simbólica – resolver equações com lápis e papel. Isto aconteceu, principalmente, devido às Atividades 3 e 6 propostas na sequência didática cujo foco estava no processo de transposição de uma situação no mundo virtual para uma situação real. Os bons resultados, no pós-teste, indicam que o grupo experimental conseguiu fazer essa transposição.

Para finalizar, destaca-se o viés da teoria vergnausiana neste estudo que se mostra presente na medida em que leva em consideração o campo conceitual envolvido na construção do conhecimento. Ao longo das atividades desenvolvidas buscou-se levar o aluno a compreensão dos diferentes invariantes algébricos. O uso de diferentes estruturas algébricas mostra essa preocupação em deixar que o aluno tenha a oportunidade de experimentar todas as situações e os invariantes possíveis de serem encontrados durante o estudo de equações do 1º grau. Além disso, neste estudo, utiliza-se diferentes formas de representação como a icônica e a simbólica. Um dos objetivos dessas representações era facilitar a compreensão dos conceitos de equação, incógnita e princípio de equivalência.

---

[22] Este desempenho refere-se à média obtida pelos alunos na disciplina de Matemática no ano anterior. Considera-se desempenho médio: notas 7 e 8 e desempenho superior: notas 9 e 10.

Implicações Educacionais e Pesquisas Futuras

Este estudo tem possíveis implicações na área educacional. Uma delas seria a necessidade de uma mudança na forma como a álgebra é apresentada aos alunos. Via de regra, há uma ênfase sobre o algoritmo de resolução da equação e não sobre os invariantes algébricos envolvidos. A instrução acerca dos invariantes operatórios da álgebra deveria preceder ao ensino do algoritmo utilizado para resolução da equação.

Outra implicação seria em relação às situações onde um novo conceito é apresentado. Situações de ensino devem colocar em evidência tanto as formas de pensar dos alunos como os diferentes invariantes do conceito que se deseja ensinar. Dessa forma, seria interessante a criação de situações diversificadas que possam contemplar várias facetas de um conceito como as que foram apresentadas nessa investigação.

Normalmente, após a apresentação de um novo conceito matemático, o aluno é convidado a responder uma sequência de exercícios, que geralmente, são questões modelizadas pela mesma estrutura algébrica. É importante, que sejam apresentadas aos alunos situações-problema que envolva diferentes estruturas, simultaneamente. Desse modo, seria possível explorar diferentes invariantes do campo conceitual algébrico numa mesma atividade como propõe a teoria dos campos conceituais defendida por Gérard Vergnaud (1990).

O presente estudo mostrou, também, que o acompanhamento individualizado, quando bem realizado, pode trazer excelentes resultados. Numa sala de aula, normalmente, com 30 alunos, uma parte significativa dos alunos que necessitam de acompanhamento personalizado nem sempre conseguem ter. As escolas deveriam propiciar um meio de atender, em horário especial, aqueles alunos que apresentam dificuldades de aprendizagem. Afinal, criar situações de aprendizagem e prover meios de recuperar os alunos nesta situação é uma das funções da escola.

Finalmente, vale destacar que os erros e as dificuldades dos alunos devem ser tomados como auxílios para desenvolver formas de raciocinar mais apropriadas. Conhecer os erros e dificuldades dos alunos permite ao professor a adoção de medidas preventivas para melhorar a qualidade da aprendizagem. Uma dessas medidas seria a criação de sequências didáticas semelhantes a que foi apresentada nesta pesquisa.

Quanto a pesquisas futuras, salienta-se que o presente estudo foi realizado de forma individualizada, num contexto experimental. Portanto, uma nova perspectiva seria investigar se a intervenção, conduzida aqui de forma individual, seria bem sucedida se fosse realizada no contexto de sala de aula. Neste caso o trabalho com a turma seria conduzido pelo próprio professor na sala de aula e no laboratório de informática da escola. O professor seria, previamente, treinado pelo experimentador e observado por este ao longo do desenvolvimento de todas as atividades.

Outra possibilidade, seria investigar diferentes procedimentos incorretos de resolução de problemas e equações algébricas. Neste caso, poderia ser realizado um planejamento em que o experimentador apresentaria duas formas de resolução ao participante: uma correta e outra errada. O participante seria, então, convidado a decidir qual das respostas estava correta e explicitar o porquê de sua escolha. Atividade semelhante à realizada no estudo de Lautert (2005).

Referências

ALCÂNTARA MACHADO, S. D. Engenharia didática. In: S. D. ALCÂNTARA MACHADO (Org.) **Educação matemática**: uma introdução. São Paulo: Educ, 1999.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. São Paulo: Contraponto, 1996.

BANERJEE, R.; SUBRAMANIAM, K. Exploring student's reasoning with algebraic expressions. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). **Proceedings of the 31 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education – PME 31**. Coréia do Sul, Seul, vol. 1, p. 197, 2007.

BETTIO, R. W.; MARTINS, A. **Objetos de Aprendizagem –** Um novo modelo direcionado ao Ensino à Distância. Disponível em: <http://www.universia.com.br/materia/materia.jsp?id=5938>. Publicado em 17/12/2004. Acesso em: 22 de nov. 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB.** Publicado em 2008. Disponível na Web <http://www.todospelaeducacao.org.br/Comunicacao.aspx?action=3&pID=0&Page=10>. Acesso em 20 de jan. de 2009.

___________. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática /Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: A. F. COXFORDE; A. P. SHULTE (Orgs.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 1996.

BRITO LIMA, A. P. **O desenvolvimento da representação de igualdades**. Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 1996.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. (Org.) **Na vida dez na escola zero.** São Paulo: Cortez, 1995.

CARRAHER, T.N.; SCHLIEMANN, A. D. Álgebra na feira? In T. N. CARRAHER; D. W. CARRAHER; A. D. SCHLIEMANN (Org.) **Na vida dez na escola zero.** São Paulo: Cortez, 1995. 127-141 p.

CASTRO-FILHO, J. A. Objetos de Aprendizagem e sua Utilização no Ensino de Matemática. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática** (ENEM), Belo Horizonte, 2007.

______________;LEITE, M. A; FREIRE, R. S.; MACEDO, L. N. O desenvolvimento de conceitos matemáticos e científicos com o auxilio de objetos de aprendizagem. In: C. R. LOPES; M. A. FERNANDES; A. J. SOUZA JUNIOR; R. M. G. SILVA (Orgs.). **Informática na educação**: elaboração de objetos de aprendizagem. Uberlândia: EDUFU, 2007. 39-59 p.

______________; MACEDO, L. N. ; LEITE, M. A. ; FREIRE, Raquel Santiago . Cartas Interativas: desenvolvendo o pensamento algébrico mediado por um software educativo. In: **XXV Congresso da Sociedade Brasileira de Computação** - São Leopoldo - RS. Workshop de Informática na Escola - WIE 2005. p. 2763-2770.

______________; FREIRE, R. S.; CABRAL, B. de S. Estratégias e Erros utilizados na resolução de problemas algébricos. **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM**, Recife, 2004.

______________; LEITE, M.A.; FREIRE, R. S.; PASCHOAL, I.V.A. Balança Interativa: um software para o ensino da Álgebra. **Anais do XVI Encontro de Pesquisa Educacional das Regiões Norte e Nordeste - EPENN**, Aracaju, SE, 2003.

______________;______________;______________;______________; CABRAL, B. S. Estratégias Encontradas durante atividades com software e manipulativos. **Anais da II Jornada de Educação Matemática do Ceará.** Fortaleza, 2003.

CORTES, A.; VERGNAUD, G.; KAVAFIAN, N. From arithmetic to algebra: negotiating a jump in the learning process. **Proceedings of the 14 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education – PME 14**. México, vol. 2, p. 27-34, 1990.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. **Psicologia da Educação Matemática** – uma introdução. Belo Horizonte: Autêntica, 2003a.

______________; O gato e o Número. In: E. P. GROSSI (Org) **Por que ainda há quem não aprende?** Petrópolis: Vozes, 2003b. 137-148 p.

______________; LIMA, A. P. B.; ARAÚJO, C.R.; LINS LESSA, M.M.; OSÓRIO, M. A didactic sequence for the introduction of algebraic activity in early elementary school. In: **Proceedings of the 24th International Meeting of Psychology of Mathematics Education (PME)**, Hiroshima-Japão, vol. 2, p. 209-216, 2000.

______________; A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: A. SCHLIEMANN; D. CARRAHER; A. G. SPINILLO; L. MEIRA; J. T. DA ROCHA FALCÃO (Orgs.). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática** Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1993. 85-107 p.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: UNICAMP, 2004.

FERREIRA, L. F. G.; RANGEL, A. C. S.; BERCHT, M. **A educação matemática e a construção do número pela criança, mediada pela tecnologia digital**. Disponível na web em http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/4803/000504819.pdf?sequence=1]. Porto Alegre, 2005. Acesso em 25 jan. de 2008.

FRAZE, Patrícia. Aulas de computação em álgebra. In: A. F. COXFORDE; A. P. SHULTE (Orgs.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. 181-188 p.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1978.

FREIRE, R. S. **Objetos de aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico no ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2007.

FUNARO, V. M. B. O... [*et al*.].Universidade de São Paulo. Sistema Integrado de Bibliotecas. Grupo DiTeses. **Diretrizes para apresentação de dissertações e teses da USP**: documento eletrônico e impresso / São Paulo: SIBi-USP, 2004. 110 p.

GIBBONS, A. S.; NELSON; J. The Nature and Origin of Instructional Objects. In D. A. Wiley (Ed.). **The instructional use of learning object**s. Bloomington: Association for Educational Communications and Technology, 2000. Disponível em < http://reusability.org/read/chapters/gibbons. doc>. Acesso em 16 de jul. de 2007.

HAN, S.; CHANG, K. Problem solving with a Computer Algebra System and the pedagogical usage of its obstacles. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). **Proceedings of the 31 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education – PME 31**. Coréia do Sul, Seul, vol. 1, p. 223, 2007.

HOUSE, P. A. Reformular a álgebra da escola média: por que e como? In: A. F. COXFORDE; A. P. SHULTE. **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

IEEE Learning Technology Standards Committee (LTSC). **Draft Standard for Learning Object Metadata** (IEEE 1484.12.1-2002). Publicado em 2002. Disponível em < http://ltsc.ieee.org/doc/wg12/LOM_1484_12_1_v1_Final_Draft.pdf>. Acesso em: 12 de jul. 2007.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Microdicionário de Matemática**. São Paulo: Scipione, 1998.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: A. F. COXFORDE; A. P. SHULTE. **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. 104-110 p.

KIERAN, C.; DAMBOISE, C. “How can we describe the relation between the factored form and the expanded form of these trinomials? – we don’t even know if our paper-and pencil factorizations are right”: the case for computer algebra systems (CAS) with weaker algebra students. **Proceedings of the 31 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education –** PME 31. Coréia do Sul, Seul, vol. 1, p. 105-112, 2007.

LAUTERT, S. L. **As dificuldades das crianças com divisão**: Um estudo de intervenção. Tese de Doutorado não publicada. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2005.

LEITE, M. A. **Processos de mediação de conceitos algébricos durante o uso de um objeto de aprendizagem**. Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2006.

LERMAN, S.; ZEVENBERGEN, R. Maths, ICT and pedagogy: An examination of equitable practice in diverse contexts. In Novotná, J.; Moraová, H.; Krátká, M.; Stehlíková, N. (Eds.). **Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Prague: PME 30, 2006, Vol. 4, p. 49-56.

LINS LESSA, M. M. **Aprender álgebra em sala de aula**: contribuição de uma sequência didática. Tese de Doutorado não publicada. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2005.

______________. **Balança de dois pratos e problemas verbais como ambientes didáticos para iniciação à álgebra:** um estudo comparativo. Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 1996.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo, Campinas: Papirus, 1997.

LOZANO, M. D.; SANDOVAL, I. T.; TRIGUEROS, M. Investigating mathematics learning with the use of computer programmes in primary schools. In Novotná, J.; Moraová, H.; Krátká, M.; Stehlíková, N. (Eds.). **Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Prague: PME 30, 2006, Vol. 4, p. 1-8.

MACEDO, L. N.; MACEDO, A. A. M.; CASTRO-FILHO, J. A. Avaliação de um Objeto de Aprendizagem com Base nas Teorias Cognitivas. Disponível na *web* em http:// www.scribd.com/doc/8628940/t10avaliacaodeumobjetodeaprendizagemcombasewie2007>. **Anais do XIII Workshop sobre Informática na Escola – WIE2007. Rio de Janeiro, 2007.** 330-338 p.

MACEDO, L. N.; CASTRO-FILHO; J. A.; MACEDO, A. A. M.; SIQUEIRA, D. M. B.; OLIVEIRA, E. M.; SALES, G. L.; FREIRE, R. S. Desenvolvendo o Pensamento Proporcional com o Uso de um Objeto de Aprendizagem. In: C. L. PRATA.; A. C. A. A. NASCIMENTO (Org.). **Objetos de Aprendizagem**: Uma Proposta de Recurso Pedagógico. 1 ed. Brasília: MEC/SEED, 2007. 17-25 p.

MACHADO, Arlindo. Regimes de Imersão e Modos de Agenciamento. INTERCOM – Sociedade Brasileira de Estudos Interdisciplinares da Comunicação. **Anais do XXV Congresso Brasileiro de Ciências da Comunicação** – Salvador – Bahia, 2002.

MARCUSCHI, L. A. **Análise da Conversação**. 2. ed. São Paulo: Ática, 1991.

MEIRA, L. Análise microgenética e videografia: Ferramentas de pesquisa em psicologia cognitiva. In: **Temas em Psicologia**, v. 3, p. 59-71, 1994.

MENDES, R. M.; SOUZA, V. I.; CAREGNATO, S. E. A propriedade intelectual na elaboração de objetos de aprendizagem. In: **Anais do V Encontro Nacional de Ciência da Informação**. Salvador – Bahia, 2004.

MUZIO, J.; HEINS, T.; MUNDELL, R. **Experiences with Reusable e-Learning Objects**: From Theory to Practice. Victoria, Canadá. 2001.

NUNES, C. **Objetos de aprendizagem a serviço do professor**. Entrevista publicada no site da Microsoft®. Disponível em <http://www.microsoft.com/brasil/educacao/ parceiro / objeto_ texto.mspx>. Publicado em 2005. Acesso em 30 nov. 2007.

PIAGET, J. **Seis Estudos de Psicologia**. Trad. Maria A. M. D'Amorim; Paulo S.L. Silva. Rio de Janeiro: Forense, 1967. 146 p.

PIMENTA, P.; BAPTISTA, A. A. **Das Plataformas de E-learning aos Objetos de Aprendizagem**. TecMinho, 2004, p. 97-109. Disponível em <www.abed.org.br/congresso 2005/por/pdf/024tcc4.pdf>. Acesso: 09 de jul. 2007.

PINTO, G. A. T. **Noções pré-algébricas e seu ensino para crianças no início do ensino fundamental.** Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2001.

SÁ FILHO, C. S.; MACHADO, E. C. **O computador como agente transformador da educação e o papel do objeto de aprendizagem**. Disponível em: <http://www. universiabrasil.net/materia/materia.jsp?id=5939>. Publicado em 17/12/2004. Acesso em 22 de nov. 2007.

SALES, G. L.; OLIVEIRA, E. M; CASTRO-FILHO, J. A.; FREIRE, R. S.; MACEDO, L. N.; SIQUEIRA, D. M. B. O OA Gangorra Interativa e a Interdisciplinaridade Matemática-Física. **Anais do XVII Simpósio Nacional de Ensino de Física**. São Luís – MA, 2007.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D.W.; BRIZUELA, B. (Org.). **Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic**: From Children's Ideas to Classroom Practice. Studies in Mathematical Thinking and Learning Series. New Jersey/USA: Lawrence Erlbaum Associates, 2007.

SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L. Pesquisa de intervenção em psicologia do desenvolvimento cognitivo: princípios metodológicos, contribuição teórica e aplicada. In: L. R. de CASTRO; V. L. BESSET. (Org.). **Pesquisa-intervenção na infância e juventude**. Rio de Janeiro: Trarepa/FAPERJ, 2008. 294-321 p.

TAROUCO, L. M. R.; FABRE, M. J. M.; DUTRA, R. L. S. **Interoperabilidade entre objetos educacionais e sistemas de gerenciamento de aprendizagem**. Disponível em http://www.cinted.ufrgs.br/ppt/interopObjEduc/sld001.htm. Palestra apresentada no Fórum Educação a Distância da SEAD/UFRGS, 2003.

TAROUCO, L.M.R; FABRE, M.J.M; TAMUSIUNAS, F.R. Reusabilidade de objetos educacionais. In: **Revista Eletrônica Novas Tecnologias na Educação** - RENOTE. Porto Alegre: s.ed. v.1, n.1. Fev 2003. Disponível em: <http://www.cinted.ufrgs.br/renote /fev2003 /artigos/marie_reusabilidade.pdf>. Acesso em: nov. 2007.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: A. F. COXFORDE; A. P. SHULTE. **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. In: E. P. GROSSI (Org.) **Por Que Ainda Há Quem Não Aprende?** Editora Vozes, Petrópolis, 2003. 21-60 p.

______________; The nature of mathematical concepts. In T. Nunes e P. Bryant (Eds.) **Learning and teaching mathematics**: An international Perspective. East Sussex: Psychology Press, 1997. 5-28 p.

______________; **El nino, las Matemáticas y la realidad**: Problemas de la ensenanza de las Matemáticas em la escuela primaria. México: Trillas, 1991.

______________; **La théorie des champs conceptuels**. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10, 23, p. 133-169, 1990.

______________; Theorical frameworks and empirical facts in the psychology of mathematics education. **Proceedings of the sixth international congress on mathematics education**, Budapest, p. 39-41, 1988.

______________; Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das Matemáticas um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, 1, p. 75-90, 1986.

WILEY, D. Connecting learning objects to instructional design theory: a definition, a metaphor, and a taxonomy. In WILEY, D. (ed.) **The instructional use of learning objects**. Online version: available from <http://reusability.org/read/>. Publicado em 2000. Acesso em: 20 de novembro de 2005.

Anexo A

Atividades propostas no pré-teste e no pós-teste

<table>
<tr><th colspan="2">Problemas Verbais</th></tr>
<tr><th>Pré-teste</th><th>Pós-teste</th></tr>
<tr><td>(P1) Uma balança está em equilíbrio. Um dos pratos contém dois saquinhos de farinha com pesos iguais desconhecidos e mais um saquinho com 100g de farinha. O outro prato contém 500g de farinha. Qual o peso de cada saquinho de farinha?
Estrutura: ax + b = c
Resolução:
2x + 100 = 500
(-100) 2x + 100 = 500 (-100)
(/2) 2x = 400 (/2)
x = 200

(Questão adaptada do trabalho desenvolvido por Lins Lessa, 1996).

<u>Aspectos conceituais envolvidos:</u> exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente os conceitos de incógnita e o princípio de equivalência.</td><td>(P1) Uma balança está em equilíbrio. Um dos pratos contém dois saquinhos de café com pesos iguais desconhecidos e um saquinho de 100g de café. O outro prato contém 500g de café. Qual o peso de cada saquinho de café?
Estrutura: ax + b = c
Resolução:
2x + 100 = 500
(-100) 2x + 100 = 500 (-100)
(/2) 2x = 400 (/2)
x = 200

(Questão adaptada do trabalho desenvolvido por Lins Lessa, 1996).

<u>Aspectos conceituais envolvidos</u>: exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente os conceitos de incógnita e o princípio de equivalência.</td></tr>
<tr><td>(P2) Raquel e Gisele foram à feira comprar farinha. Raquel comprou dois sacos de farinha numa barraca e três sacos de farinha em outra barraca. Gisele comprou 250 gramas de farinha. Sabendo que elas compraram a mesma quantidade de farinha, quantas gramas de farinha tinham em cada saco que Raquel comprou?
Estrutura: ax + bx = c
Resolução:
2x + 3x = 250
(/5) 5x = 250 (/5)
x = 50
(Questão adaptada do trabalho desenvolvido por Lins Lessa, 1996).

<u>Aspectos conceituais envolvidos</u>: exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente o uso da mesma incógnita em apenas um lado da equação.</td><td>(P2) Fabiana e Janaína colecionavam papéis de carta. Fabiana tinha dois blocos de papel de carta e ganhou mais três blocos de seu pai. Janaína tinha 250 papéis de carta. As duas meninas ficaram com a mesma quantidade de papéis. Sabendo que cada bloco continha a mesma quantidade de papel, quantos papéis de carta tinham em cada bloco?
Estrutura: ax + bx = c
Resolução:
2x + 3x = 250
(/5) 5x = 250 (/5)
x = 50
(Questão adaptada do trabalho desenvolvido por Lins Lessa, 1996).

<u>Aspectos conceituais envolvidos</u>: exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente o uso da mesma incógnita em apenas um lado da equação.</td></tr>
<tr><td>(P3) Carla e Patrícia foram à feira comprar açúcar para fazer uns docinhos. Carla comprou dois sacos de açúcar e mais 400 gramas de açúcar. Patrícia comprou quatro sacos de açúcar de mesmo peso dos de Carla. Sabendo-se que elas compraram a mesma quantidade, quantos gramas pesam cada saco de açúcar que elas compraram?
Estrutura: x + a = bx
Resolução:
2x + 400 = 4x
(-2x) 2x + 400 = 4x (-2x)
(/2) 400 = 2x (/2)
200 = x
x = 200</td><td>(P3) Gabriela e Ana Paula colecionavam figurinhas da Turma da Mônica. Gabriela tinha dois álbuns completos e mais 400 figurinhas. Ana Paula tinha quatro álbuns completos iguais aos de Gabriela. As duas meninas tinham ao todo a mesma quantidade de figurinhas na coleção. Sabendo-se que cada álbum tinha sempre a mesma quantidade, quantas figurinhas tinham em cada álbum?
Estrutura: x + a = bx
Resolução:
2x + 400 = 4x
(-2x) 2x + 400 = 4x (-2x)
(/2) 400 = 2x (/2)
200 = x
x = 200</td></tr>
</table>

(Questão proposta e desenvolvida por Lins Lessa, 1996). **Aspectos conceituais envolvidos**: exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente o uso da mesma incógnita nos dois lados da igualdade.	(Questão adaptada do trabalho desenvolvido por Lins Lessa, 1996). **Aspectos conceituais envolvidos**: exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente o uso da mesma incógnita nos dois lados da igualdade.
(P4) Fabio e Fernando eram irmãos e colecionavam bolas de gude. Fábio ganhou um pacote de bolas de gude de seu pai e mais 70 bolas de gude de sua mãe. Fernando ganhou de seu pai quatro pacotes de bolas de gude e mais 25 bolas de gude de sua mãe. Os dois irmãos ganharam a mesma quantidade de bolas de gude para a coleção. Sabendo-se que cada pacote tinha sempre a mesma quantidade de bolas, quantas bolas de gude havia em cada pacote? **Estrutura: ax + b = cx + b** **Resolução:** 1x + 70 = 4x + 25 (-25) 1x + 70 = 4x + 25 (-25) (-1x) 1x + 45 = 4x (-1x) (/3) 45 = 3x (/3) 15 = x x = 15 (Questão proposta e desenvolvida por Lins Lessa, 1996). **Aspectos conceituais envolvidos**: exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente o uso da mesma incógnita nos dois lados da igualdade.	(P4) As lojas de brinquedo Carrossel e Piuí venderam muitas bonecas para o dia das crianças. A loja Carrossel vendeu uma caixa de bonecas importadas e mais 70 bonecas Barbie. A loja Piuí vendeu quatro caixas de bonecas importadas iguais as da loja Carrossel e mais 25 bonecas Barbie. As duas lojas venderam a mesma quantidade de bonecas. Sabendo-se que as caixas tinham a mesma quantidade de bonecas, quantas bonecas importadas tinham em cada caixa? **Estrutura: ax + b = cx + b** **Resolução:** 1x + 70 = 4x + 25 (-25) 1x + 70 = 4x + 25 (-25) (-1x) 1x + 45 = 4x (-1x) (/3) 45 = 3x (/3) 15 = x x = 15 (Questão adaptada do trabalho desenvolvido por Lins Lessa, 1996). **Aspectos conceituais envolvidos**: exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente o uso da mesma incógnita nos dois lados da igualdade.
(P5) Gabriel foi ao supermercado com seu irmão Rafael. Gabriel comprou um pacote de queijo mussarela e 900g de queijo prato. Rafael comprou um pacote de queijo mussarela, dois sacos de queijo parmesão e 100g de queijo prato. Sabendo que ao final da compra os dois irmãos ficaram com a mesma quantidade de queijo e que todos os sacos continham a quantidade de queijo em gramas, qual o peso de cada saco de queijo parmesão? **Estrutura: ax + b = ax + cy + d** **Resolução:** 1x + 900 = 1x + 2y + 100 ~~1x~~ + 900 = ~~1x~~ + 2y + 100 (-100) 900 = 2y + 100 (-100) (/2) 800 = 2y (/2) 400 = y y = 400 (Questão proposta e desenvolvida por Lins Lessa, 1996). **Aspectos conceituais envolvidos:** exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente a resolução de equações com duas incógnitas (x e y) em um lado da igualdade.	(P5) Dona Laura e Dona Carmem foram à livraria comprar o material escolar para doar aos meninos da comunidade. Dona Laura comprou um pacote de cadernos grandes e 900 cadernos pequenos. Dona Carmem comprou um pacote de cadernos grandes igual ao de Dona Laura, dois pacotes de cadernos de desenho e 100 cadernos pequenos. Ao final da compra as duas senhoras compraram a mesma quantidade de cadernos. Sabendo-se que os pacotes do mesmo tipo de caderno tinham a mesma quantidade, quantos cadernos de desenho havia em cada pacote que Dona Carmem comprou? **Estrutura: ax + b = ax + cy + d** **Resolução:** 1x + 900 = 1x + 2y + 100 ~~1x~~ + 900 = ~~1x~~ + 2y + 100 (-100) 900 = 2y + 100 (-100) (/2) 800 = 2y (/2) y = 400 (Questão adaptada do trabalho desenvolvido por Lins Lessa, 1996). **Aspectos conceituais envolvidos:** exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente a resolução de equações com duas incógnitas (x e y) em um lado da igualdade.
(P6) Dona Vera e Dona Lia foram à feira comprar frutas. Dona Vera comprou dois sacos de maçãs, dois sacos de goiabas e mais 70 laranjas. Dona Lia comprou também dois sacos de maçãs e quatro sacos de goiabas iguais aos de Dona Vera e mais 20 laranjas. Ao final da compra as duas senhoras ficaram com a mesma quantidade de frutas. Sabendo-se que os sacos de frutas	(P6) Dona Glória e Dona Lúcia foram ao Bompreço comprar material de limpeza. Dona Glória comprou duas caixas de detergente Limpol, mais duas caixas de detergente Odd e 70 detergentes Minerva. Dona Lúcia comprou duas caixas de detergente Limpol igual à de Dona Glória, quatro caixas de detergente Odd e mais 20 detergentes Minerva. Ao final da compra as duas

de um mesmo tipo tinham sempre a mesma quantidade, quantas goiabas tinham em cada saco? **Estrutura: ax + by + c = dx + by + f** **Resolução:** $2x + 2y + 70 = 2x + 4y + 20$ $\cancel{2x} + 2y + 70 = \cancel{2x} + 4y + 20$ $(-20)\ 2y + 70 = 4y + 20\ (-20)$ $(-2y)\ 2y + 50 = 4y\ (-2y)$ $(/2)\ 50 = 2y\ (/2)$ $25 = y$ $y = 25$ (Questão proposta e desenvolvida por Lins Lessa, 1996). **<u>Aspectos conceituais envolvidos</u>:** exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente a resolução de equações com duas incógnitas (x e y) em ambos os lados da igualdade.	senhoras ficaram com a mesma quantidade de detergentes. Sabendo-se que as caixas de detergente do mesmo tipo tinham sempre a mesma quantidade, quantos detergentes Odd havia em cada caixa? **Estrutura: ax + by + c = dx + by + f** **Resolução:** $2x + 2y + 70 = 2x + 4y + 20$ $\cancel{2x} + 2y + 70 = \cancel{2x} + 4y + 20$ $(-20)\ 2y + 70 = 4y + 20\ (-20)$ $(-2y)\ 2y + 50 = 4y\ (-2y)$ $(/2)\ 50 = 2y\ (/2)$ $y = 25$ (Questão adaptada do trabalho desenvolvido por Lins Lessa, 1996). **<u>Aspectos conceituais envolvidos</u>:** exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente a resolução de equações com duas incógnitas (x e y) em ambos os lados da igualdade.
Equações	
Pré-teste	**Pós-teste**
(E1) $2x + 100 = 250$ **Estrutura: ax + b = c** **Resolução:** $2x + 100 = 250$ $(-100)\ 2x + 100 = 250\ (-100)$ $(/2)\ 2x = 150\ (/2)$ $x = 75$ (Questão proposta e desenvolvida por Lins Lessa, 1996). **<u>Aspectos conceituais envolvidos:</u>** exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente os conceitos de incógnita e o princípio de equivalência.	(E1) $2x + 150 = 300$ **Estrutura: ax + b = c** **Resolução:** $2x + 150 = 300$ $(-150)\ 2x + 150 = 300\ (-150)$ $(/2)\ 2x = 150\ (/2)$ $x = 75$ (Questão adaptada do trabalho desenvolvido por Lins Lessa, 1996). **<u>Aspectos conceituais envolvidos</u>:** exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente os conceitos de incógnita e o princípio de equivalência.
(E2) $2x + 3x = 500$ **Estrutura: ax + bx = c** **Resolução:** $2x + 3x = 500$ $(/5)\ 5x = 500\ (/5)$ $x = 100$ (Questão proposta e desenvolvida por Lins Lessa, 1996). **<u>Aspectos conceituais envolvidos</u>:** exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente o uso da mesma incógnita em apenas um lado da equação.	(E2) $2x + 4x = 600$ **Estrutura: ax + bx = c** **Resolução:** $2x + 4x = 600$ $(/6)\ 6x = 600\ (/6)$ $x = 100$ (Questão adaptada do trabalho desenvolvido por Lins Lessa, 1996). **<u>Aspectos conceituais envolvidos</u>:** exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente o uso da mesma incógnita em apenas um lado da equação.
(E3) $3x + 81 = 6x$ **Estrutura: x + a = bx** **Resolução:** $3x + 81 = 6x$ $(-3x)\ 3x + 81 = 6x\ (-3x)$ $(/3)\ 81 = 3x\ (/3)$ $27 = x$ $x = 27$ (Questão adaptada do trabalho desenvolvido por Lins Lessa, 1996). **<u>Aspectos conceituais envolvidos</u>**: exploração do campo	(E3) $4x + 54 = 6x$ **Estrutura: x + a = bx** **Resolução:** $4x + 54 = 6x$ $(-4x)\ 4x + 54 = 6x\ (-4x)$ $(/2)\ 54 = 2x\ (/2)$ $27 = x$ $x = 27$ (Questão adaptada do trabalho desenvolvido por Lins Lessa, 1996). **<u>Aspectos conceituais envolvidos</u>**: exploração do campo

conceitual da álgebra. Mais especificamente o uso da mesma incógnita nos dois lados da igualdade.	conceitual da álgebra. Mais especificamente o uso da mesma incógnita nos dois lados da igualdade.
(E4) 2x + 400 = 4x + 300 **Estrutura: ax + b = cx + d** **Resolução:** 2x + 400 = 4x + 300 (-300) 2x + 400 = 4x + 300 (-300) (-2x) 2x + 100 = 4x (-2x) (/2) 100 = 2x (/2) 50 = x x = 50 (Questão proposta e desenvolvida por Lins Lessa, 1996). **Aspectos conceituais envolvidos**: exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente o uso da mesma incógnita nos dois lados da igualdade.	(E4) 4x + 500 = 6x + 400 **Estrutura: ax + b = cx + d** **Resolução:** 4x + 500 = 6x + 400 (-400) 4x + 500 = 6x + 400 (-400) (-4x) 4x + 100 = 6x (-4x) (/2) 100 = 2x (/2) 50 = x x = 50 (Questão proposta e desenvolvida por Lins Lessa, 1996). **Aspectos conceituais envolvidos**: exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente o uso da mesma incógnita nos dois lados da igualdade.
(E5) 1x + 600 = 1x + 4y + 100 **Estrutura: ax + b = ax + cy + d** **Resolução:** 1x + 600 = 1x + 4y + 100 ~~1x~~ + 600 = ~~1x~~ + 4y + 100 (-100) 600 = 4y + 100 (-100) (/4) 500 = 4y (/4) 125 = y y = 125 (Questão proposta e desenvolvida por Lins Lessa, 1996). **Aspectos conceituais envolvidos:** exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente a resolução de equações com duas incógnitas (x e y) em um lado da igualdade.	(E5) 2x + 700 = 2x + 4y + 200 **Estrutura: ax + b = ax + cy + d** **Resolução:** 2x + 700 = 2x + 4y + 200 ~~2x~~ + 700 = ~~2x~~ + 4y + 200 (-200) 700 = 4y + 200 (-200) (/4) 500 = 4y (/4) 125 = y y = 125 (Questão proposta e desenvolvida por Lins Lessa, 1996). **Aspectos conceituais envolvidos:** exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente a resolução de equações com duas incógnitas (x e y) em um lado da igualdade.
(E6) 2x + 2y + 50 = 4x + 2y + 10 **Estrutura: ax + by + c = dx + by + f** **Resolução:** 2x + 2y + 50 = 4x + 2y + 10 2x + ~~2y~~ + 50 = 4x + ~~2y~~ + 10 (-10) 2x + 50 = 4x + 10 (-10) (-2x) 2x + 40 = 4x (-2x) (/2) 40 = 2x (/2) 20 = x x = 20 (Questão proposta e desenvolvida por Lins Lessa, 1996). **Aspectos conceituais envolvidos:** exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente a resolução de equações com duas incógnitas (x e y) nos dois lados da igualdade.	(E6) 2x + 2y + 60 = 4x + 2y + 20 **Estrutura: ax + by + c = dx + by + f** **Resolução:** 2x + 2y + 60 = 4x + 2y + 20 2x + ~~2y~~ + 60 = 4x + ~~2y~~ + 20 (-20) 2x + 60 = 4x + 20 (-20) (-2x) 2x + 40 = 4x (-2x) (/2) 40 = 2x (/2) 20 = x x = 20 (Questão adaptada do trabalho desenvolvido por Lins Lessa, 1996). **Aspectos conceituais envolvidos:** exploração do campo conceitual da álgebra. Mais especificamente a resolução de equações com duas incógnitas (x e y) nos dois lados da igualdade.

Anexo B

Roteiro inicial para a intervenção com o Grupo Experimental

a) O examinador presta as seguintes informações ao aluno sobre como iniciar o uso do objeto de aprendizagem:

O objetivo do Balança Interativa é a manipulação de pesos conhecidos e desconhecidos até que se consiga a igualdade entre eles utilizando o menor número de movimentos possíveis e sem cometer erros. Ganha o jogo quem conseguir descobrir todos os valores com o menor número de movimentos. Mas, para que isso aconteça, eu preciso dizer a vocês algumas regras de funcionamento do Balança Interativa.

1. Utilize o *mouse* para arrastar um dos pesos desconhecidos até um dos pratos da balança e solte-o;
2. Use o outro prato da balança para colocar os pesos conhecidos;
3. Se a balança não ficar em equilíbrio retire ou acrescente mais pesos conforme a indicação da mesma;
4. Pode-se utilizar, no máximo, 4 pesos em cada lado da balança;
5. Quando a balança fica em equilíbrio significa que encontramos o valor do peso desconhecido;
6. Os valores descobertos são digitados em uma caixinha que fica logo abaixo das letras que representam esses pesos;
7. Digita-se o valor descoberto na caixinha e aperta-se a *tecla enter* para confirmar o resultado. Se o valor estive errado aparecerá o número de tentativas erradas logo abaixo das caixinhas;
8. Em cada nível do jogo o valor de um peso desconhecido não se repete;
9. É possível misturar pesos conhecidos e desconhecidos em qualquer um dos pratos da balança;
10. Se, ao manipular a balança, já for possível saber qual o valor do peso desconhecido, pode-se colocá-lo diretamente na caixinha, não é necessário validar o mesmo na balança para ver o equilíbrio;
11. A contagem do número de movimentos inicia quando o usuário colocar algum peso sobre um dos pratos da balança;
12. A ação de retirar os pesos não altera o número de movimentos feitos pelo usuário. Esta ação pode ser realizada diretamente com o uso do *mouse* ou através do botão *Retirar Pesos*;
13. Em cada nível, o usuário pode consultar todas as jogadas que fez através do botão *Histórico*;
14. Pode-se também incluir informações diversas sobre o jogo através do botão *Anotações* e depois confirmar as mesmas apertando no botão *Adicionar ao Histórico*;
15. É possível visualizar a expressão algébrica que representa o movimento atual da balança apertando o botão *Mostrar Expressão.*

Anexo C

Questionário para o Aluno

Nome: ____ Data: _____/_____/_____

Escola: ____

Série: _____________________ Data de nascimento: _____________________

(1) Você usa o computador? (   ) Não (   ) Sim . Em caso afirmativo em que locais?
____
____
____

(2) Há quanto tempo você usa computadores de modo regular?

(   ) Não uso. (   ) De 1 a 2 anos.
(   ) Até 06 meses de uso. (   ) De 2 a 3 anos.
(   ) De 06 meses a 1 ano. (   ) Mais de 03 anos.

(3) Quantas horas por dia, em média, você passa usando o computador? Considere o uso em casa, na escola, na casa de amigos, no curso e em qualquer lugar ______________
____

(4) O que você faz quando está utilizando o computador? _____________________
____
____
____

(5) Você usa programas de computador que ajudam a aprender as matérias do colégio?
(   ) Não (   ) Sim

(6) Você já usou o computador para aprender conceitos matemáticos? (   ) Não (   ) Sim
Em caso afirmativo qual (is) programa (s) você utilizou e em que locais eles foram utilizados?
____
____

(7) Você fez ou está fazendo um curso de computação? (   ) Não (   ) Sim. Em caso afirmativo em que local o curso foi realizado ou está sendo? ____________________
____

(8) Você tem acesso à Internet:

a) Em casa	( ) Sim	( ) Não	
b) Na escola	( ) Sim	( ) Não	
c) No trabalho	( ) Sim	( ) Não	
d) Em outro lugar	( ) Sim	( ) Não	Especificar lugar: ________________

(9) Há quanto tempo você usa a Internet de modo regular?

( ) Não uso.	( ) De 1 a 2 anos.
( ) Até 06 meses de uso.	( ) De 2 a 3 anos.
( ) De 06 meses a 1 ano.	( ) Mais de 03 anos.

(10) No computador, você normalmente usa:

a) Editor de Textos (ex: Word)	( ) Sim	( ) Não
b) Planilha Eletrônica (ex: Excel)	( ) Sim	( ) Não
c) Programa de Apresentações (ex: PowerPoint)	( ) Sim	( ) Não
d) Editor de Imagens (ex: Adobe Photoshop)	( ) Sim	( ) Não
e) Programa de Desenho (ex: CorelDraw)	( ) Sim	( ) Não
f) Jogos Eletrônicos Simples (ex: Paciência, Tetris)	( ) Sim	( ) Não
g) Jogos Eletrônicos Sofisticados (ex: Tomb Raider)	( ) Sim	( ) Não
h) Programa de Navegação (ex: Explorer, Mozilla)	( ) Sim	( ) Não
i) Programa de Mensagens (ex: MSN, Yahoo Mens.)	( ) Sim	( ) Não
j) Correio Eletrônico (ex: Hotmail, Google, Yahoo)	( ) Sim	( ) Não
l) Sites de Busca (ex: Google, Yahoo)	( ) Sim	( ) Não
m) Sites de Bate Papo (ex: UOL, Bol., Terra)	( ) Sim	( ) Não
n) Redes Sociais (ex: Orkut, blogs, fotologs)	( ) Sim	( ) Não
o) Sites de Vídeos (ex: You tube, Globo.com)	( ) Sim	( ) Não

(11) Você gosta de jogos de computador?
( ) Não gosto.
( ) Gosto um pouco.
( ) Gosto mais ou menos.
( ) Gosto muito.
( ) Adoro.

(12) No ano passado, sua média final em Matemática ficou:
( ) abaixo de 5
( ) Entre 5 e 6
( ) Entre 6 e 7
( ) Entre 7 e 8
( ) Entre 8 e 9
( ) Entre 9 e 10

(13) Você gosta de Matemática? ( ) Sim ( ) Não

Por quê? ____

____

____

____

Anexo D

ATIVIDADE 3 (1ª sessão)

ALUNO: ____ DATA: _____/______/______
ESCOLA: ____

Resolva os problemas abaixo:

(1) Patrícia e Cláudia tiveram nenê e, durante três meses, só compraram fraldas descartáveis. Patrícia comprou 90 fraldas avulsas e dois pacotes de fraldas Jonhson. Cláudia comprou 10 fraldas avulsas, dois pacotes de fraldas Jonhson iguais a de Patrícia, e dois pacotes de fraldas Pampers. As duas amigas compraram a mesma quantidade de fraldas. Sabendo-se que os pacotes de fraldas do mesmo tipo tinham a mesma quantidade de fraldas, quantas fraldas tinham em cada pacote de fraldas Pampers que Cláudia comprou?

Resolva o problema abaixo:

(2) Rosita e Renata eram irmãs e gostavam muito de ajudar as crianças pobres. Elas foram ao Atacadão dos Presentes comprar brinquedos para doar a um orfanato. Rosita comprou 50 bonecas, dois pacotes de bolas e dois pacotes de carrinhos. Renata comprou 10 bonecas, dois pacotes de bolas iguais as de Rosita e quatro pacotes de carrinhos também iguais aos de Rosita. As duas irmãs compraram a mesma quantidade de brinquedos. Sabendo-se que os pacotes de brinquedos do mesmo tipo tinham a mesma quantidade, quantos carrinhos tinham em cada pacote?

Anexo E

ATIVIDADE 6 (2ª sessão)

ALUNO: ____ DATA: _____/______/______
ESCOLA: ____

Resolva os problemas abaixo:

(3) Jorge e Luciano foram a Lojas Americanas comprar brinquedos. Jorge comprou então 50 carrinhos plásticos e dois pacotes de bonecos. Luciano comprou 20 carrinhos plásticos, dois pacotes de bonecos iguais ao de Jorge e dois pacotes de bolas coloridas. Os dois amigos compraram a mesma quantidade de brinquedos. Sabendo-se que os pacotes de bolas tinham a mesma quantidade, quantas bolas havia em cada pacote que Luciano comprou?

(4) Ernani e Wagner ganharam muitos chocolates na páscoa. Ernani ganhou 56 bombons Serenata de Amor, 1 caixa de Batom Garoto e uma caixa de bombons da Lacta. Wagner ganhou 28 bombons Serenata de Amor, uma caixa de Batom Garoto igual à de Ernani e duas caixas de bombons Lacta. Os dois amigos ganharam a mesma quantidade de chocolates. Sabendo-se que as caixas de chocolate do mesmo tipo tinham a mesma quantidade, quantos chocolates da Lacta tinham em cada caixa?

Anexo F

Primeira Sessão – Resolvendo equações no nível icônico

Data da sessão: 29/08/2008 Duração: 01h36min.

Aluno: Edson[23] Idade: 12 anos

Atividade 1: Uso do objeto de aprendizagem nos níveis 1 a 5

Objetivo: descobrir incógnitas, estabelecendo relações de igualdade e desigualdade no Balança Interativa, através de representações icônicas

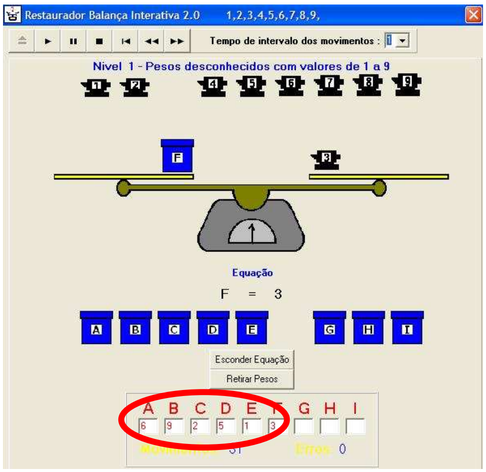
Nota: no início da sessão o examinador explica ao aluno como o objeto de aprendizagem Balança Interativa funciona.

E: “o Edson vai começar fazer a primeira sessão com o programa Balança Interativa. Vamos lá Edson vamos descobrir o valor das incógnitas começando com a letra A.”
A: ((silêncio))
E: “e aí, vamos abrir o histórico[24] para gente ver o que está acontecendo? Você já fez nove movimentos e ainda não conseguiu descobrir o valor da incógnita. Você precisa pensar sobre o que está acontecendo. Se ele é maior do que quatro (A > 4) por que você botou o 3? Se A era menor que quatro não era pra ter botado o três.”
A: “hum!”
E: “depois você botou o nove que é um número bem grande e ficou menor que nove (A < 9). Depois disso, por que você botou o dois se A já era maior que quatro? Você tem que prestar atenção nestes sinais: maior que (>) e menor que (<). Se A já era maior que quatro não era pra ter botado o dois, o três e o um.”
A: ((silêncio))
E: “aqui no histórico diz que A é maior que cinco e menor que sete. Pronto! Tai a resposta: é um número maior que cinco (A > 5) e menor que sete (A < 7), ok? Neste jogo é uma questão de você ter um pensamento lógico pra poder descobrir as incógnitas.”
A: “seis!”
E: “isso mesmo! A é igual a seis. Retire os pesos aqui e vamos tentar agora descobrir o valor de B.”
A: ((silêncio))
E: “na sequência, o tempo todo na sequência, certo?”
A: “certo.”
E: “é maior do que sete. Pode ser oito, nove ou dez.”
A: “é nove.”
E: “bote lá o valor de nove na caixinha, embaixo do B. Se não for embaixo do B dá erro.”
A: “pronto.”

[23] Para garantir o sigilo dos participantes todos os nomes encontrados no texto são fictícios (Resolução 196/96 – Conselho Nacional de Saúde).
[24] Comando que mostra todas as jogadas feitas pelo usuário e permite a reflexão sobre as mesmas.

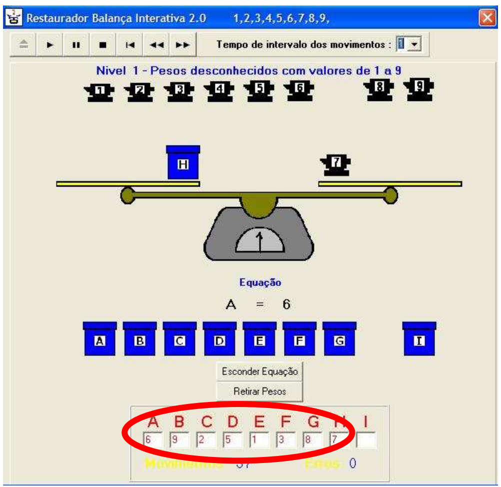
E: “muito bem! Viu como dessa vez com apenas três movimentos você descobriu o valor de B e naquela hora com nove (movimentos) você ainda não sabia o valor de A.”
A: ((silêncio))
E: “oh! Os números que já saíram seis e nove não se repetem mais e você pode colocar até quatro pesos de cada lado, certo?”
A: “certo.”
E: “hum! menor do que três, meu camarada! Tá vendo aí. Você viu que o três ficou mais pesado?”
A: “hum!”
E: “pronto, pare aí. Agora eu não entendi. Se ele (incógnita C) é menor do que três, por que você pegou um número maior do que três?” [aluno pegou o cinco]
A: “porque eu queria saber ele era maior do três aí eu testei o cinco.”
E: “não. Se ele é menor que três, então você tem que pegar os números que vêm antes do três: o um e o dois.”
A: “ah!”
E: “agora se ele fosse maior que três, aí você pegava o quatro, o cinco, o seis.”
A: “ah! É por que eu não tava entendendo isso.”
E: “é tem esse detalhe aí. Você tem que ver esses sinais que ele bota: maior (>) e menor (<). Se $C < 3$, então ele só pode ser um ou dois.”
A: “ah!”
E: “agora se ele fosse maior do que três, ele poderia ser quatro...até dez. Por que o valor das incógnitas vão até dez.”
A: “taí é 2.”
E: “entendeu?”
A: “agora eu entendi.”
E: “tem que ver o sinal, maior que (>) ou menor que (<).”
A: ((silêncio))
E: “bote o valor de D.”
A: ((silêncio))
E: “cinco, olha aí. Que bom acertou de primeira!”
A: ((rsrsrs))
E: “Muito bem! Põe aí dentro da caixinha (o valor de D). Bote o valor, retira pesos e começa tudo de novo.”
A: “agora é E?”
E: “é. Deixa eu ver uma coisa: tá dizendo aqui que ele é menor do que sete. Se o sete fica lá embaixo (na balança) é porque ele está mais pesado. Mas se ele ficar lá em cima é porque o peso aqui (incógnita) é maior do que ele.”
A: “tá menor.”
E: “mas você pegou o oito que é maior que sete, entendeu? Lembre-se de uma coisa: se o peso ficar lá embaixo é porque ele está mais pesado. Então você tem que pôr um número menor do que ele, como agora.”
A: “ah!”
E: “é maior do que quatro e menor do que sete.”
A: ((silêncio))
E: “por que você pegou o nove e pegou o três? Se ele (valor de C) é menor do que sete e maior que quatro? Oh, Edson! Você tem que ver uma coisa: é um número que é menor do que sete e maior do que quatro, entendeu? E agora?”
A: “podia ser o cinco e o seis, mas eles já saíram.”

E: “então deixa eu ver aqui. Tem alguma coisa errada...deixa eu ver de novo o sinal...não ele é menor do que quatro. Foi engano meu, me desculpa!” [erro do experimentador]
A: “hum!”
E: “é igual a um.”
A: “agora F.”
E: “se o número desceu é porque ele é mais pesado, então tem que ser um número mais leve.”
A: “menor...o três!”
E: “por que você achava que era o três?”
A: “porque o um, o dois, o cinco e seis já foram. Sobraram só estes três.” [como mostra a representação abaixo]



Estratégia Análise de Intervalo[25]

E: “muito bem! Uma excelente resposta. Então bote o valor dele aí. Valor de F = 3.”
A: “agora o G.”
E: “muito bem! Retira os pesos.”
A: “agora sim!”
E: “por que você pegou o sete? Por que não pegou os outros números?”
A: “só tinha o quatro e o sete sobrando” [como mostra a representação abaixo].

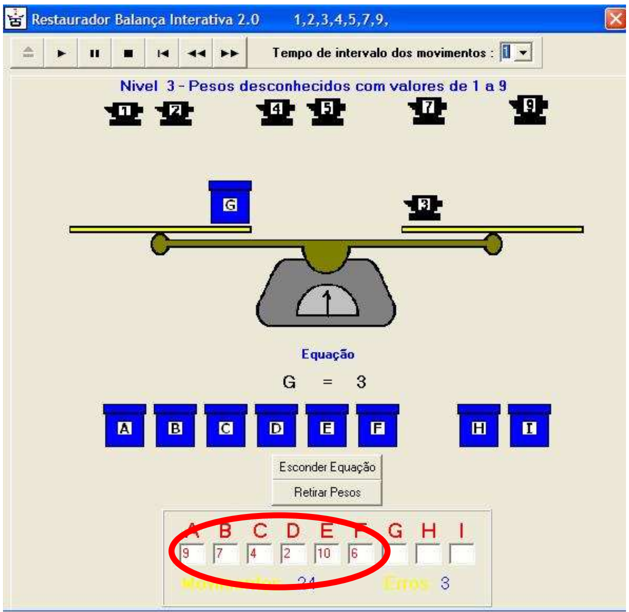


[25] Estratégias documentadas nos estudos realizados por Castro-Filho *et al.* (2003, 2004).

Estratégia Análise de Intervalo

E: “então pronto! Você descobriu que A = 6, B = 9, C = 2, D = 5, E = 1, F = 3, G = 8 e H = 7. Falta só o valor de I. quais os números que não saíram ainda?”
A: “Falta só o quatro.”
E: “Não. Faltam dois números: o quatro e o dez.”
A: “é mesmo...o dez!”
E: ((silêncio))
A: “eu tenho que colocar o dez?”
E: “se você já tiver certeza que o valor é dez, pode colocar direto na caixinha.”
A: “pode?”
E: “pode. muito bem! Você acabou de fazer o nível um com 39 movimentos e nenhum erro, vamos para o próximo. Aperte ok, certo?”
A: “hum!”
E: “só que o nível dois é semelhante ao nível um. Só que ele vai de um à vinte o valor das incógnitas. Mas como ele você passou bem e sem nenhum erro (pelo nível um) a gente vai para o nível três, certo?”
A: “certo.”
E: “é um nível em que as incógnitas, mas em compensação, faltam dois números. Quais os números que estão faltando aqui?”
A: “seis e oito.”
E: “muito bem! Então tente descobrir as incógnitas, no nível três, faltando dois pesos. Essas são as dificuldades: em cada nível os números vão diminuindo.”
A: ((silêncio))
E: “muito bem! Por que você pegou o nove?”
A: “porque eu botei o sete, aí ele era mais pesado do que sete. Aí eu botei o nove” [aluno já demonstra uma compreensão da lógica do jogo].
E: “muito bem! Foi uma ótima escolha. Ponha o valor do peso aí... nove... ok.”
A: ((silêncio))
E: “muito bem! Continue assim Edson. Eu gostei muito dessa jogada. Vamos ao valor de B.”
A: ((silêncio))
E: “e agora por que você jogou o sete?”
A: “porque ele era mais pesado do que quatro. Aí eu botei sete.”
E: “certo, muito bem! Agora põe o valor sete na caixinha e vamos retirar os pesos.”
A: “opa! não foi!” [aluno comete um erro]
E: “Não foi por quê? O que foi que você tentou fazer aí?”
A: “Ele era mais pesado que o cinco, então coloquei o seis direto na caixinha.”
E: “deixe eu ver o histórico pra confirmar os passos que você deu.”
A: “ele era maior...”
E: “não. Você se enganou. Ele é menor que cinco.”
A: “hum!”
E: “então agora tente colocar os números menores que cinco.”
A: ((silêncio))
E: “pronto! Só pode ser um número menor, né?”
A: “quatro.”
E: “quatro. Muito bem! Por isso que é bom ter o histórico pra ver se a gente errou em alguma coisa e rever as jogadas que a gente fez.”
A: ((sussurrando a jogada))
E: “muito bem! D = 2. Por que você achava que D = 2?”
A: “eu botei o número três, aí três era mais pesado que ele, então eu tentei o um que era mais leve do que ele. Aí depois eu botei o 2.”

E: “muito bem! Agora vamos ao valor de E.”
A: ((silêncio))
E: “opa! Tem outro erro aí, por quê?” [coloca o nº 6 na caixinha e acerta]
A: “eu botei o cinco ele era mais pesado, então eu botei o seis.”
E: “mais pesado do que cinco pode ser qualquer valor que não saiu ainda, pode ser o 8, pode ser o 10. Só não podia ser o 7 e o 9 porque já saíram. Não fique chutando sem ter certeza do número.”
A: “vou ver se é o oito.”
E: “não é oito.” [coloca o nº 8 na caixinha e erra novamente]
A: “então só pode ser o dez.”
E: “Só coloque um número na caixinha quando você tiver certeza[26]. Agora vamos ao valor de F.”
A: ((silêncio))
E: “como você descobriu que o valor dele era 6?”
A: “eu botei um, o três e o cinco e ficou mais leve, então eu botei o seis que era mais pesado.” [coloca o nº 6 na caixinha e acerta]
E: “muito bem! Pode continuar.”
A: ((silêncio))
E: “como você descobriu que G = 3?”
A: “porque eu só tinha quatro números: 1, 3, 5 e 8, aí eu botei o 3.”
E: “muito bem! Você está analisando os números que já saíram. Então você está fazendo uma análise de intervalo para ver em que intervalo se encontra os números que ainda não saíram. Muito bem! Continue assim!”
A: [veja abaixo a reprodução da estratégia utilizada pelo aluno]

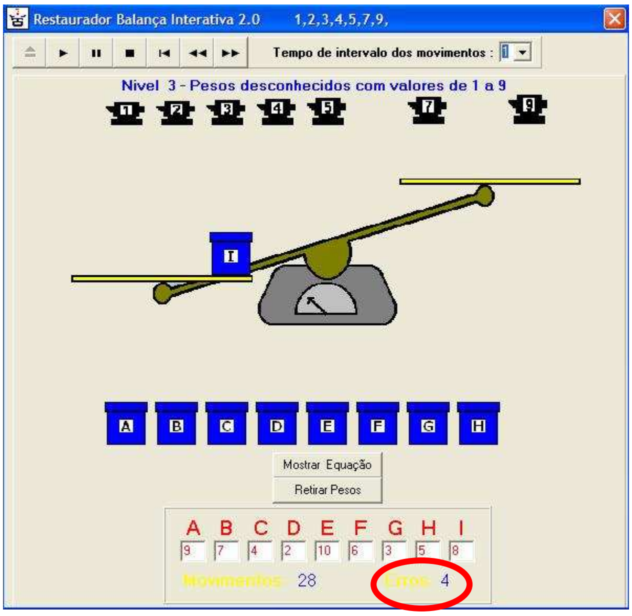


Estratégia Análise de Intervalo

E: “por que você tentou de novo esse número?”
A: “por que...”
E: “qual o número que você tentou aí?”
A: “o oito.”
E: “por quê?”

[26] Ao colocar um número na caixinha, que não seja o valor da incógnita, o jogo indica a marcação de erro.

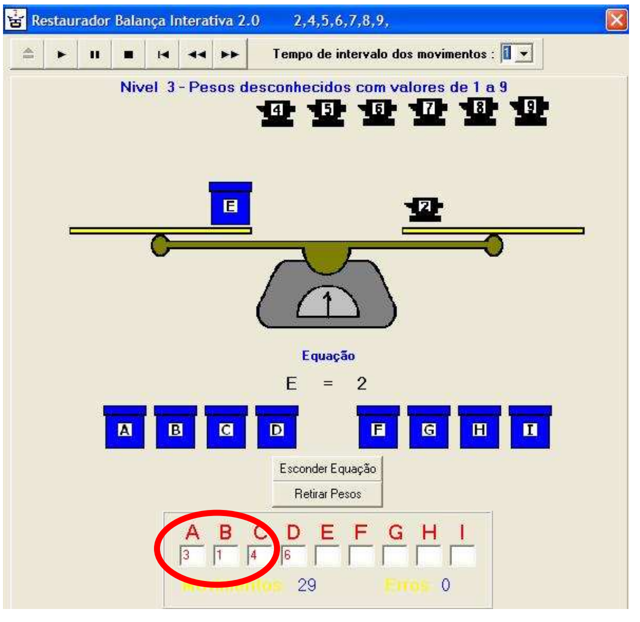
A: “porque ele era mais pesado que o um.”
E: “sim, ainda tem outros números, não é só o oito não! Ainda falta o um, o cinco...eu acho que você fez uma besteira aí! Olha aí, tá vendo? Não fique chutando número não. Você já tem quatro erros. Não é pra ficar erros não! Você está chutando o valor de uma incógnita. É como dá um tiro no escuro. Se ao menor você tivesse mais dicas sobre esse número, olhe que faltam sair ainda dois números, certo.”
A: “certo.”
E: “você fez 39 movimentos e cometeu 4 erros. Deixa eu ver que horas são... vou pedir pra você repetir esse nível agora sem erro, certo?”
A: “certo!” [veja abaixo a reprodução do número de erros do aluno]



Número de erros do aluno no nível 3

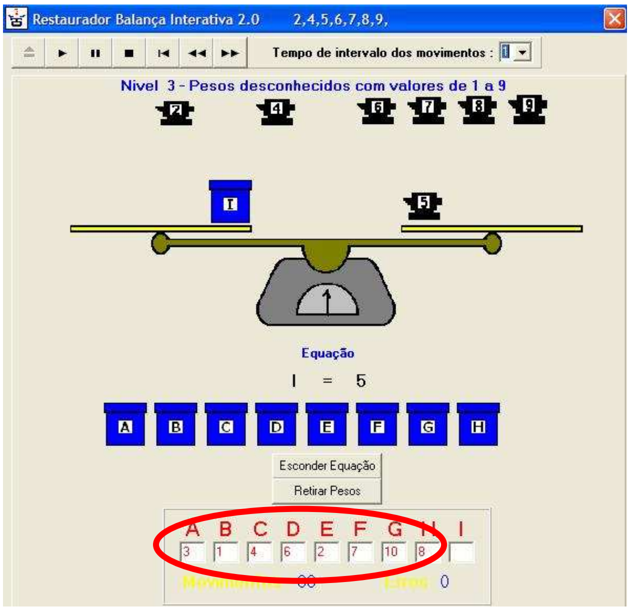
E: “Os números das incógnitas não serão mais os mesmos, nem os números que desapareceram serão os mesmos. Vamos fazer agora sem erros, tá?”
A: “tá.” [aluno refaz o nível 3]
E: “veja o que você está fazendo. O programa diz que A é menor que seis, neste caso, então você deveria colocar números menores que seis! Mas você botou foi o sete, o oito e o nove!
A: achei que era maior que seis!”
E: “presta atenção nos sinais. Olha, já deu a resposta aí! Se ele é maior que dois e menor que quatro... qual o número que é maior que dois e menor que quatro?”
A: “menor que dois?”
E: “maior que dois e menor que quatro.”
A: “três.”
E: “muito bem! Vamos lá retirar pesos e continuar. Vamos ao valor de ...”
A: “B”
E: “isso!”
A: ((silêncio))
E: “veja bem: se B é menor que sete. Você não percebeu e colocou os números o oito e nove!”
A: “foi mal.”

E: “agora sim! B = 1. Vamos ao valor de C.”
A: ((silêncio))
E: “C é igual a 4, muito bem! Vamos ao valor de D.”
A: ((silêncio))
E: “muito bem! O valor de D é seis. Você botou o sete e viu que era mais pesado, então você colocou o cinco que ficou mais leve. Neste caso você concluir que o valor era seis.”
A: “agora é o valor de E...”
E: “E = 2. Muito bem! Como você chegou a esse resultado?”
A: “eu tentei o cinco e era mais pesado aí eu só tinha o 2 porque o quatro já foi” [como mostra a reprodução abaixo].



Estratégia Análise de Intervalo

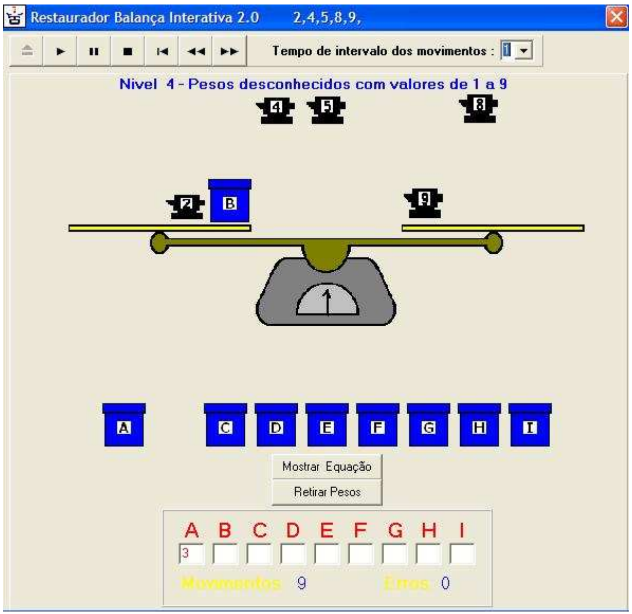
E: “excelente! Agora vamos ao valor de F.”
A: ((silêncio))
E: “o que foi que você descobriu aí?”
A: “eu tentei o sete.”
E: “e deu certo de primeira?”
A: “foi.”
E: “muito bem!”
A: ((silêncio))
E: “olha! Está dizendo aqui que ele é maior que nove, então só pode ser um número...”
A: “dez.”
E: “muito bem!”
A: ((silêncio))
E: “até agora você descobriu que A = 3, B = 1, C = 4, D = 6, E = 2, F = 7, G = 10 e H = 8. Falta só o valor de I. Eu lhe pergunto que números ainda não saíram e que podem ser esse valor?”
A: “cinco e nove.” (Análise de intervalo)
E: “certo. Então tente esses valores.”
A: “nove é mais pesado... é oito” [como mostra a representação na próxima página].



Estratégia Análise de Intervalo

E: “excelente! Viu como agora você não cometeu nenhum erro! E você ainda diminuiu um pouco o número de movimentos. Vamos para o quarto nível.”
A: “certo.”
E: “neste nível só tem cinco pesos: 2, 4, 5, 8 e 9. Vamos descobrir o valor das incógnitas com esses cinco números. Pode começar.”
A: ((silêncio))
E: “você acha que é qual número?”
A: “três.”
E: “muito bem!por que você acha que é três?”
A: “o quatro era maior do que ele e o dois era menor.”
E: “muito bem!”
A: ((silêncio))
E: ((silêncio))
A: “vixe! Acho que errei aqui.”
E: “vamos ver aqui no Histórico. Oh! maior que cinco e menor que oito, rapaz! Então são os dois números que estão faltando aqui.”
A: “certo.”
E: “então eu vou te dá uma dica em primeira mão! Se você botar aqui um número junto com a letra D (no caso esse número é o dois) e do outro lado colocar o nove, a balança ficaria assim: D + 2 = 9.”
A: ((silêncio))
E: “então utilizando a operação inversa da adição, pode-se dizer que se D + 2 = 9, então o valor de D = 9 – 2. No caso D = 7. Certo? Você teria aí uma estratégia subtrativa, caso dê certo. Se não equilibra é por que é outro valor.”
A: “certo.”
E: “pode pegar o oito também. Quanto dá oito menos dois?”
A: “seis”
E: “olha aí, não é. Tá mais pesado, pega o nove. Olha que jogada linda! Quanto foi que deu?”
A: “sete menos dois.”

E: “não. Nove menos dois. Dá quanto?”
A: “Nove menos dois dá sete.”
E: “então bote lá o valor de B. Você já descobriu um número que não existia aí.”
A: [veja abaixo a reprodução da estratégia utilizada pelo aluno]

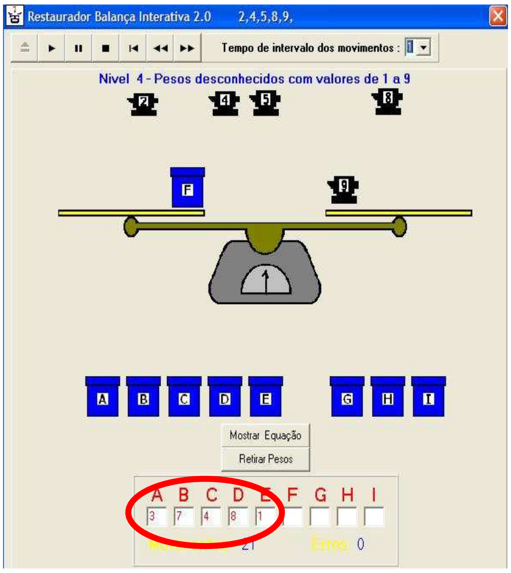


Estratégia Subtração Indireta[27]

E: “outro detalhe: agora que você já descobrir que o valor B é sete, você pode utilizá-lo quando você quiser no lugar do sete[28] para descobrir outros valores. Por exemplo: neste nível não existe o valor um, mas você pode colocar o B (7) de um lado da balança junto com a incógnita e o oito do outro lado, e a balança ficar em equilíbrio, é porque o valor da incógnita é um ($x + B = 8 \rightarrow x = 8 - 7 \rightarrow x = 1$), entendeu? Você pode fazer isso.”
A: “eu deixo o B, né? Posso tirar qual número?”
E: “Não, isso que eu estou te dizendo é pra você utilizar mais na frente, no nível cinco vai precisar....”
A: “ah!”
E: “deu maior, então é menor que oito, né? Não, bote lá mesmo, pra gente saber se é um número menor que oito. Pra gente saber que número é esse. Olha! O cinco é mais pesado, então é menor que cinco (o valor da incógnita).”
A: ((silêncio))
E: “muito bem! Quatro.” (C = 4)
A: “é o D, né?”
E: “valor de D agora.”
A: “D vamos tentar o ...”
E: “muito bem! Você acertou de primeira! Vamos ao valor de E.”
A: ((silêncio))
E: “vamos ver aí, menor que 2, né? Qual o número menor que 2?”
A: “um.”
E: “E = 1 muito bem! Preste atenção a nesses detalhes. Senão você ia deixar passar e gastar um monte de movimentos até descobrir.” (o valor da incógnita)

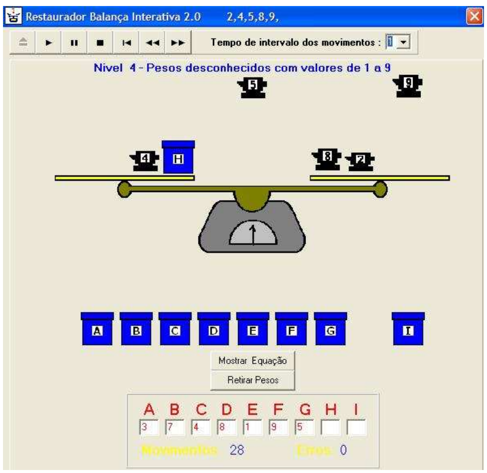
[27] Estratégias documentadas nos estudos realizados por Castro-Filho *et al.* (2003, 2004).
[28] O número sete não estava presente neste nível do jogo.

A: ((silêncio))
E: “maior. Por que você pegou o nove e não pegou o oito?”
A: “o oito já foi e o nove não.”
E: “então você está analisando o intervalo pra ver onde se encontram os números que falta ser descobertos para a incógnita. Vamos ao valor de G.”
A: [veja abaixo a reprodução da estratégia utilizada pelo aluno]



Estratégia Análise de Intervalo

E: “olha ao, acertou de primeira, foi? G = 5. Retire os pesos.”
A: ((silêncio))
E: “é maior do que dois e agora? Já saiu o 5, o 4 ...o 6 não saiu ainda não.”
A: ((silêncio))
E: “bote o quatro lá do outro lado que eu tenho uma ideia.”
A: “não pode, já foi.”
E: “então bote o dez do lado de lá.”
A: “como?”
E: “8 + 2 não dá dez. Você está somando oito mais dois, entendeu?”
A: “ah!”
E: “olha que jogada linda! Me explica aí o que significa isso?”
A: “significa que o H = 6.” [veja abaixo a reprodução da estratégia utilizada pelo aluno]

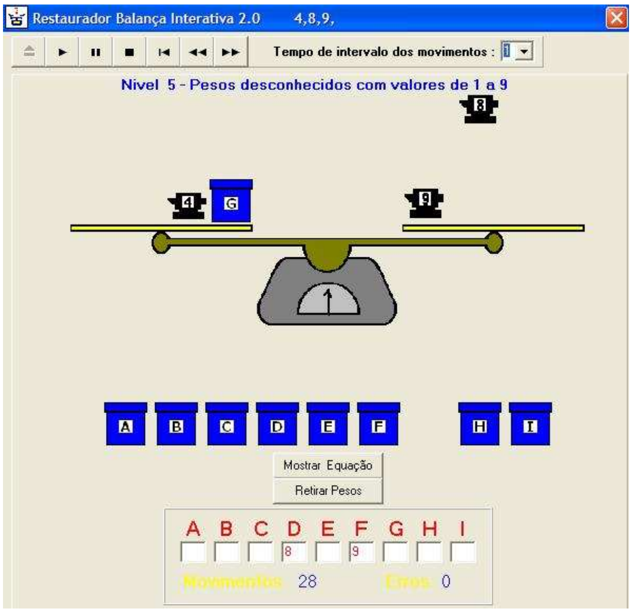


Combinação de Estratégia: soma de pesos conhecidos e subtração indireta.

E: “por quê?”
A: “porque eu botei 6 + 4 = 10 e 8 + 2 = 10 também.”
E: “8 + 2 = 10. Dez menos 4 é igual a seis.”
A: “seis.”
E: “então bote aí o valor de H. Pronto só faltam sair dois números e um deles é o valor de I. Você tem ideia de quais sejam estes números?”
A: “o dois e o dez.”
E: “certo.”
A: ((silêncio))
E: “sim, mas aí dá seis, né? Deixa o dez lá, tira só o quatro. Pode deixar o 8 + 2 lá. Basta tirar o quatro.”
A: “boto o dois?”
E: “bota. 8 + 2 = 10 é o número que está faltando.”
A: ((silêncio))
E: “tira o quatro agora.”
A: ((silêncio))
E: “pronto então é o dois (I = 2). Tira o oito. Entendeu aí?”
A: “entendi.”
E: “trinta e cinco movimentos no nível quatro e nenhum erro. Foi muito legal esse nível.”
A: ((silêncio))
E: “muito bem! Pode avançar pro nível cinco.”
A: ((silêncio))
E: “e no nível cinco uma surpresa: três números apenas (4, 8 e 9). Aí você vai ter que usar aquelas estratégias que você já viu lá: subtração, uso de pesos depois que seus valores são conhecidos e principalmente ter paciência. Por que você vai ter que testar os números e ver se dá certo com os que estão aí. Senão der certo você deixa eles por último e assim vai enquanto você descobre os outros, ta? Então vamos lá! Começando com o valor de A.”
A: ((silêncio))
E: “e aí, tá gostando Edson de descobrir incógnitas?”
A: “tô. Eu aprendi mais coisas...”
E: “muitas estratégias de resolução? Subtração, soma de pesos conhecidos para descobrir incógnita, uso de pesos com letras...”
A: “foi.”
E: “é bem legal, né?”
A: “é.”
E: “ficou mais pesado... agora mais leve.”
A: ((silêncio))
E: “é um número maior que oito e menor que quatro. Quais os dois números que eu posso usar para fazer um cinco aí?”
A: “dois números.”
E: “dois números que eu usando possa fazer uma subtração e dá cinco.”
A: “dois e o três.”
E: “não. São dois números grandes que eu possa fazer uma subtração e dá cinco. A incógnita é maior que quatro.”
A: “dois números grandes que fazendo a subtração vai dá cinco?”
E: “é dois números que estão lá em cima.”

A: “quatro e oito?”
E: “não dá não, oito menos quatro, dá quanto?”
A: “quatro.”
E: “então oito e nove”...
A: “não. Nove e quatro! Nove e quatro, viu. Como é que você vai fazer?”
E: “muito bem! Mas ainda não é cinco. Ainda não dá. Vamos procurar outro valor, o valor de B. É um valor que não dá pra encontrar agora.”
A: (tenta descobrir o valor de A e não consegue. Muda para o valor de B)
E: “retira os pesos e põe o valor de B. Agora vai ser assim: você pega a incógnita e testa todos os números e, se não der certo, você pega a próxima incógnita e deixa essa por último. Com os que você for descobrindo até o final você vai achar esse que falta, viu?”
A: ((silêncio))
E: “oito é mais pesado. Tem que ser um mais leve.”
A: ((silêncio))
E: “quatro é mais leve. Como não dá pra você testar números menores que quatro, agora você pega a próxima incógnita. Vamos para o C. Tira tudo.”
A: (tenta descobrir o valor de B e não consegue. Muda para o valor de C)
E:” mais pesado.”
A: “mais pesado do que nove.”
E: “não. O nove é que é mais pesado que ele.”
A: ((silêncio))
E: “o oito é mais pesado que ele. Tem que ser um número menor que oito.”
A: ((silêncio))
E: “quatro ainda é mais pesado. Vixe! Rapaz todos esses números aí são menores que quatro e não tem como a gente testar. Vamos fazer uma anotação aqui pra não esquecer: A, B e C são menores que quatro.”
A: “certo.”
E: “pronto! Vamos lá! Já vimos A, B e C. Agora vamos ao valor de D.”
A: ((silêncio))
E: “olha, maior que quatro! Será que vai ser um desses dois?” (8 ou 9)
A: “é oito.”
E: “D = 8 até que enfim! Vamos agora ao valor de E.”
A: ((silêncio))
E: “olha, o E é menor que quatro!”
A: “então é o A, B, C e E.”
E: “isso. Faz aí as anotações: A, B, C e E são menores que quatro. Então destes números é 1, 2, 3 ou 4. Fique de olho no lance. Ok! Depois a gente vai pesar um por um para ver quem é mais pesado. O menor deles vai seu o um. O segundo menor vai ser o dois e assim por diante. O mais pesado vai ser o quatro.”
A: (tenta descobrir o valor de E, não consegue e muda para o valor de F)
E: “então agora vamos ao F.”
A: ((silêncio))
E: “descubra aí o valor de F. não saiu nem o quatro, nem o nove.”
A: “é nove!” ((silêncio))
E: “muito bem! Retira pesos. Vamos ao valor de G. Só falta o quatro, dos valores que estão aí” (valores que estão disponíveis no jogo).
A: ((silêncio))
E: “maior que quatro. Vamos aquela estratégia: nove menos quatro. Pode ser o cinco!”
A: ((silêncio))

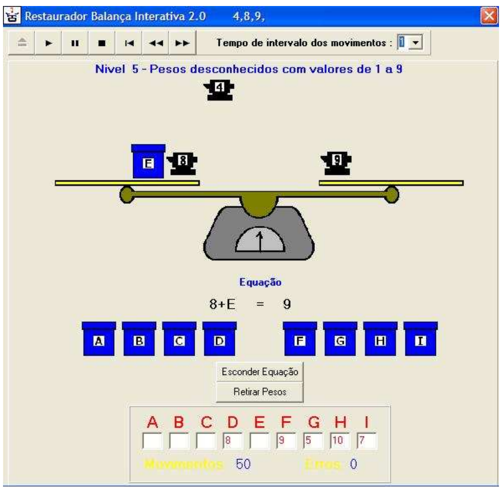
E: “bote aí. Nove menor que quatro. Não, lá do outro lado, viu? Esqueceu como é a subtração. Olha que jogada linda! O que é que isso quer dizer?”
A: “que é o número cinco.”
E: “como é que você fez aí?”
A: “eu fiz assim: o G significa 8... o 4 aí eu somei...não o G significa”...
E: “você somou G + 4 e colocou o nove do outro lado (junto com a incógnita). Isso quer dizer que o valor de F é igual a quê?”
A: “cinco” [veja abaixo a reprodução da estratégia utilizada pelo aluno]



Estratégia Subtração Indireta

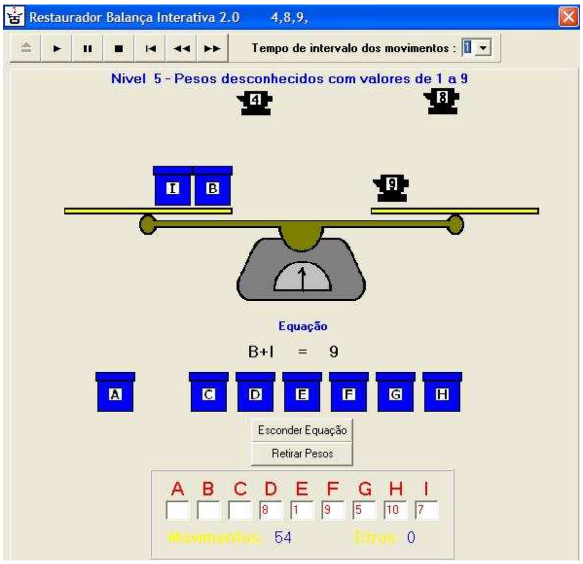
E: “por quê?”
A: “o F que vai ser cinco... o cinco mais quatro é nove.”
E: “muito bem! Ponha aí o resultado.”
A: ((silêncio))
E: “retira pesos e vamos ver o valor de H.”
A: ((silêncio))
E: “não. O oito é mais leve e não pode ser o nove, então só pode ser qual?”
A: ((silêncio))
E: “ele é maior que oito, entendeu? Já saiu o nove... só vai até dez”...
A: “ele pode ser cinco.”
E: “não. Se ele é maior que oito e já saiu o nove.... só vai até dez. Qual é o número que falta?”
A: ((silêncio))
E: “ô, ele não é maior que oito? Quais são os números maiores que oito aí nesse intervalo? Só são o nove e o dez. O nove já saiu, então só falta qual número?”
A: “o dez.”
E: “Ok, presta atenção neste detalhes! Você tem que ver os números que já saíram.”
A: ((silêncio))
E: “ok? Vamos ao valor de I.”
A: ((silêncio))

E: “oito mais quatro dá doze! Ele é maior que quatro e não pode ser cinco e oito. Então ele só pode ser”...
A: “sete ou seis.”
E: “isso! Como é que eu faço aí pra testar esses dois números, sete e seis?”
A: ((silêncio))
E: “não. Deixe lá o quatro. Bote o nove aí. Quanto é nove mais oito? “
A: “nove mais oito... dezessete.”
E: “não vai dá não. Deu um número muito alto. Vamos pensar um pouco. Ele tem que dá sete ou seis, certo?”
A: ((silêncio))
E: “oito mais cinco dá treze, menos quatro, dá nove. Também não dá. Vamos ver outra coisa aqui”...
A: ((silêncio))
E: “pronto! H e G dá quanto?”
A: “cinco mais dez.”
E: “quinze, menos nove, dá seis. Tira o quatro e bote o nove no lugar dele... e bote ali do outro lado G e H... certo? Quinze menos nove dá quanto?”
A: “dá dez.”
E: “não. Quinze menos nove!”
A: “quinze, menos nove, dá seis.”
E: “pronto!”
A: “não deu”... (a balança não ficou equilibrada)
E: “então é sete. Eu não lhe disse que seria seis ou sete?”
A: “sete é?”
E: “sete. Retira pesos e vamos ver os mais complicados lá.”
A: ((silêncio))
E: “o A é menor que quatro, né?”
A: “é. Vamos ver...oito”...
E: “então deixe o oito de um lado e ponha o cinco lá do outro lado para subtrair.”
A: ((silêncio))
E: “muito bem! Pegou o G. Olha o que está dizendo ai?”
A: “é mais pesado.”
E: “então ainda não é esse valor. Vamos ver que é um. Vamos fazer um teste, bote o oito desse lado e o nove do outro. Agora tire o A, bote o B. Tire o B, bote o C. Tira o C, bota o E. Que é que quer dizer aí?”
A: “dizer que o E significa 1.” [veja abaixo a reprodução da estratégia utilizada pelo aluno]



Estratégia Subtração Indireta

E: “por quê?”
A: “porque oito mais um dá nove.”
E: “muito bem! Bote lá um. Na caixinha do E.”
A: ((silêncio))
E: “agora é o valor de B.”
A: ((silêncio))
E: “cinco não é... tira esse daí e bota o sete... ali, né?... o que significa isso?”
A: “B significa 2.” [veja abaixo a reprodução da estratégia utilizada pelo aluno]

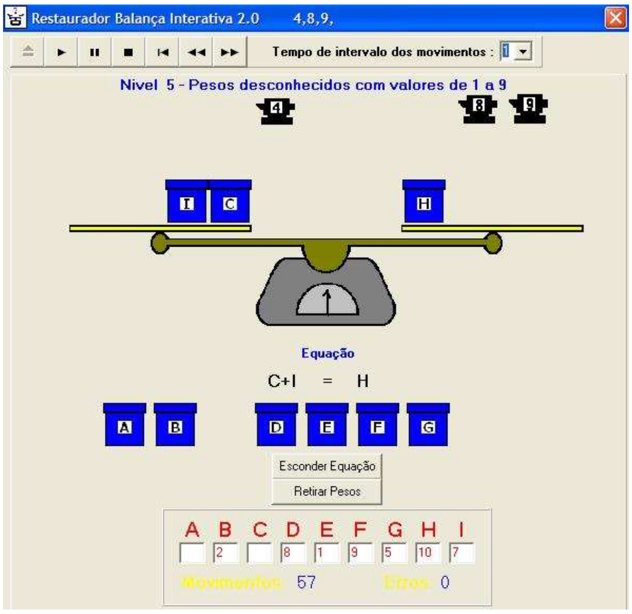


Combinação de Estratégias: Subtração Indireta e uso de pesos com letras

E: “por quê?”
A: “porque sete mais dois é nove.”
E: “então bote o dois aí.”
A: ((silêncio))
E: “muito bem meu caro amigo! Vamos ao valor de C.”
A: ((silêncio))
E: “vamos ver se o C é três.”
A: “então deixa eu ver....”
E: “bote o sete desse lado aqui e dez do outro. Olha aí que jogada linda? O que significa essa jogada?”
A: “significa que o C significa três. Aí três mais sete é dez.”
E: “então qual o valor de C?”
A: “três.” [veja na próxima página a reprodução desta estratégia]
E: “quais os valores que estão faltando?”
A: “um.”
E: “o um já tá ali.”
A: “o quatro.”
E: “bote o A com o quatro, pra ver se é quatro.”

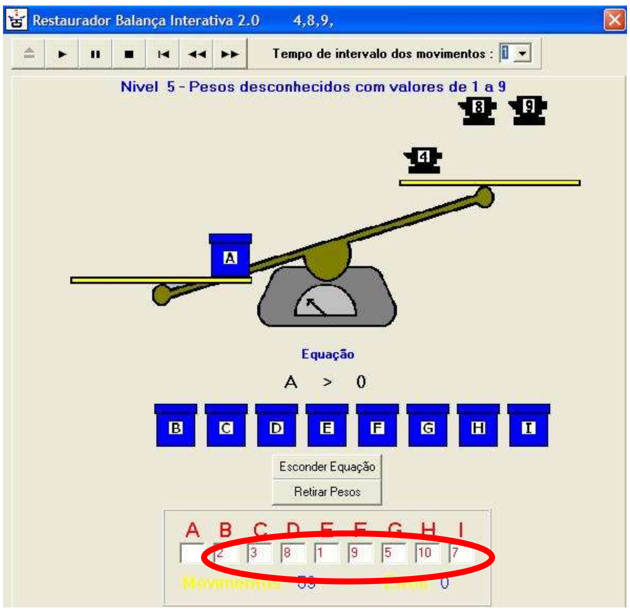
A: ((silêncio))

[Reprodução da estratégia utilizada pelo aluno]



Estratégia Subtração Indireta

E: “então não é quatro. Qual o outro valor fora o quatro?”
A: “um.”
E: “o um já tá ali.”
A: “seis!” [veja abaixo a reprodução da estratégia utilizada pelo aluno]



Estratégia Análise de Intervalo

E: “seis meu camarada! Bote aí o seis.”
A: “esse foi difícil!”
E: “muito bem! Terminou nível cinco com 59 movimentos e nenhum erro. Foi um nível mais difícil porque os valores de A, B, C e E não estavam disponíveis. As incógnitas estavam faltando aí.”
A: “certo.”
E: “agora vamos resolver as equações que eu te falei. Mas antes você volta para o nível um, certo? Você descobre as incógnitas até o valor de E e pára que eu vou fazer um teste com você.”

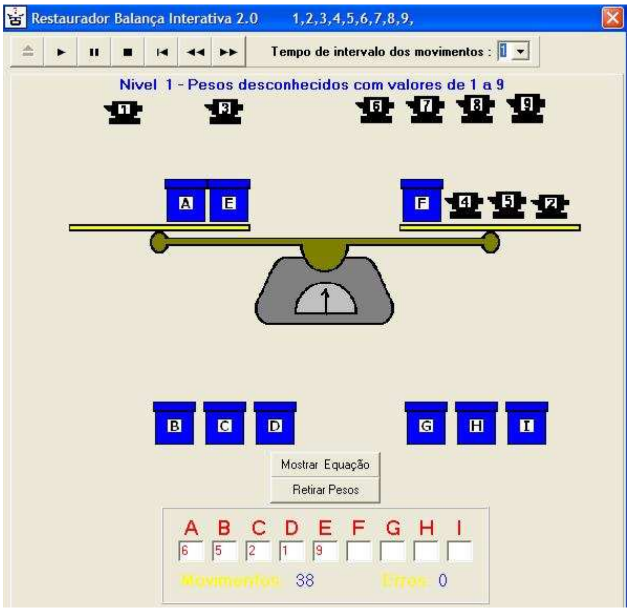
Atividade 2 – Resolução de equações do 1º grau propostas no Balança Interativa.

Objetivo: levar o aluno a explicitar sua compreensão sobre as noções de igualdade, a incógnita e princípio de equivalência algébrica.

A: ((silêncio))
E: “A = 6”
A: ((silêncio))
E: “B = 5. muito bem!”
A: ((silêncio))
E: “C = 2”
A: ((silêncio))
E: “D = 1. Falta só o valor de E”
A: ((silêncio))
E: “enquanto você usa o balança. Você está manipulando incógnitas com números para descobrir o valor da incógnitas. Nisso você está também utilizando a noção de igualdade e desigualdade. Está o tempo todo testando os valores, mas não de forma aleatória. Você está utilizando estratégias como subtração, análise de intervalo e uso de pesos com letra.”
A: ((silêncio))
E: “muito bem! Agora eu vou pegar aqui, certo, e vou montar algumas equações para você resolver.”
A: ((silêncio))
E: “e aí, qual o valor de F?”
A: “valor de F? ... o valor de F é três.”
E: “por quê? Me explica aí”...
A: “porque quatro mais cinco é nove, mais dois é onze e mais três dá catorze. Porque tem catorze aqui”...
E: “tem catorze! Por que catorze? Aqui tem sete mais quatro que é onze e aqui doze, treze, catorze. E se não for catorze?”
A: “e aqui tem seis mais nove.”
E: “quanto é seis mais nove?”
A: “é catorze.”
E: “some aí pra você se é mesmo esse valor.”
A: ((silêncio))
E: “seis mais nove, dá quanto?”
A: “é quinze, então é cinco.”
E: “cinco? O quê que é cinco?”
A: “esse valor.”

E: “não. O cinco já saiu.”

[Reprodução da equação proposta no Balança Interativa]

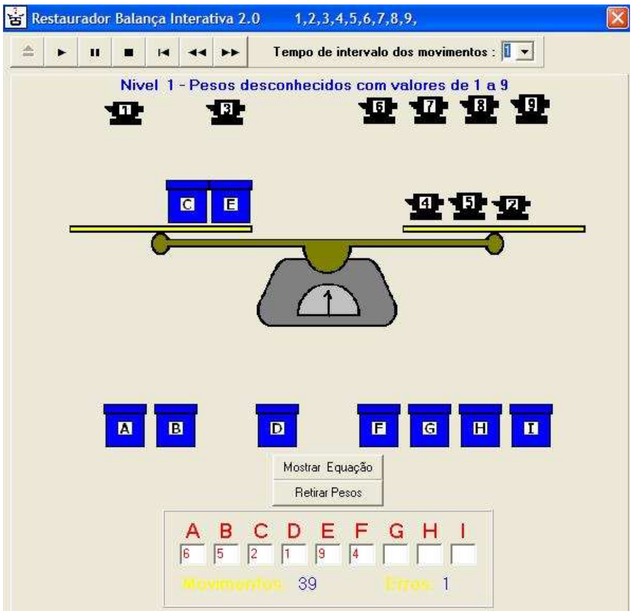


Atividade 2: equação 1 – proposta no Balança Interativa

A: “então é quatros ou três.”
E: “e aí? É cinco, é três,..o que é?”
A: “é cinco.”
E: “cinco já saiu. Não pode sair duas vezes.”
A: “é três.”
E: “veja aí se é três.”
A: ((silêncio))
E: “e se não for? Vamos ver se é três... atenção... errou!”
A: ((silêncio))
E: “não é três. Qual é o valor de F?”
A: “é quatro.”
E: “quatro? Por que você acha que é quatro?”
A: “quatro mais quatro é oito... aí tem cinco mais dois mais dois que é quinze.”
E: “quinze e o valor de F, dá quanto?”
A: “o valor de F é quatro.”
E: “bote aí quatro pra ver se funciona.”
A: ((silêncio))
E: “muito bem! Passou. Pronto! O valor de F é quatro.”
A: ((silêncio))
E: “agora eu vou retirar estes valores”...
A: “pra quê?”
E: “eu vou montar aqui outra equação. “
A: ((silêncio))
E: “e agora, qual o valor de G?”
A: ((silêncio))

E: “essa aqui ta mais fácil que a outra.”
A: “é dez.”

[Reprodução da equação proposta no Balança Interativa]



Atividade 2: equação 2 – proposta no Balança Interativa

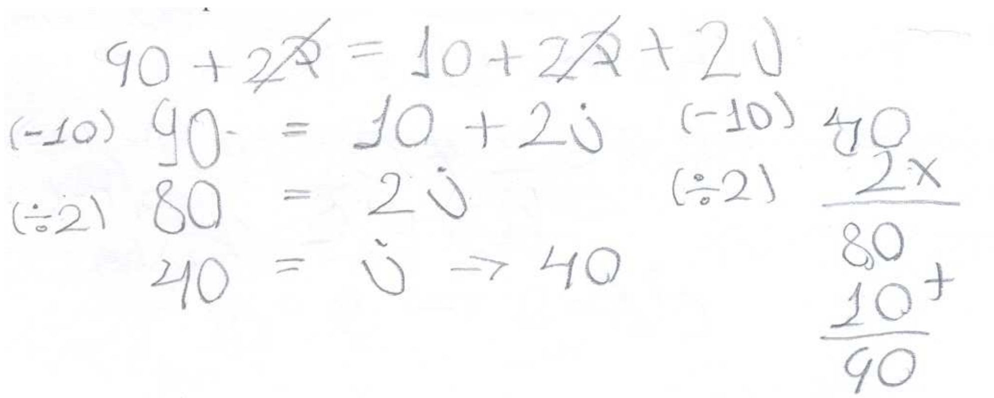
E: “dez? Por quê?”
A: “por causa que E é nove e C é dois então dá onze.”
E: “onze menos um dá quanto?”
A: “dez.”
E: “e dez menos dois?”
A: “sete!”
E: “não.”
A: “oito!”
E: “pronto! Agora acertou.”
A: ((silêncio))
E: “quanto é?”
A: “oito.”
E: “por quê?”
A: “por causa que oito... nove mais dois é onze. Oito mais dois é dez, mais um onze.”
E: “muito bem! Vamos para a próxima atividade.”

Atividade 3 – Resolução de equações do 1º grau propostas numa situação-problema

Objetivo: interpretar, montar e resolver uma equação algébrica na forma simbólica com uso de lápis e papel.

E: “nessa atividade vamos resolver equações com duas incógnitas, certo? Estamos no problema um. Então Edson você nota (na resolução desta equação) que estes números se repetem. Por quê? Porque eles são variáveis. O valor deles não é um valor fixo, podendo ser qualquer valor. Estes números podem ser um, podem ser dez ou cem que não vão alterar o valor de fraldas Pampers que é o valor representado por P (incógnita usada para fraldas Pampers). Por que o valor que for aqui... essa comprou dois (pacotes) e esta outra comprou dois (pacotes). Então esse valor não vão alterar estes aqui.”
A: “ah!”
E: “então se você for resolver essa equação e tiver dois valores iguais, coeficiente igual que é o dois e incógnita igual que é o J (pode ser o x, pode ser qualquer letra) automaticamente você cancela estes termos e repete o que sobrou. Esse sinal de mais (+ no início da equação) você ignora e repete o que sobrou: 90 = 10 + 2P”
A: “hum!”
E: “ta vendo como a equação ficou pequenininha. Por que eu subtraí dos dois lados o mesmo valor. O que foi que eu subtraí aqui? Subtraí os dois J (2J de cada lado). 2J – 2J = 0. E agora qual o número que eu posso subtrair aqui?”
A: “subtrai”...
E: “2P eu não posso mexer porque é a única incógnita. Não tem mais nenhum P do outro lado. Qual o número que eu posso subtrair?”
A: “o noventa.”
E: “eu não posso subtrair noventa menos dez. Só é possível subtrair o menor valor. Neste caso pode ser noventa menos dez, mas nunca dez menos noventa. Quanto é que dá noventa menos dez?”
A: “oitenta.”
E: “muito bem! Dez menos dez?”
A: “nada.”
E: “então aqui é zero. Sobra agora só 2P = 80. Pronto! Cheguei à equação reduzida. E agora? Que é que posso fazer?”
A: “como é... é”...
E: “eu...divido. começa a dividir. Eu não disse que você ia resolver equação utilizando só duas operações: subtração e divisão? Primeiro você subtrai o mesmo valor de cada lado e depois (quando tiver apenas um termo de cada lado) você divide. Eu vou dividir por quanto?”
A: “dois.”
E: “pelo número que está multiplicado a incógnita. Sempre por este número. Pode ser qualquer número que estiver multiplicando a incógnita.”
A: “hum!”
E: “você divide os dois lados, senão a equação não fica equivalente.”
A: “certo.”
E: “oitenta dividido por dois?”
A: “quarenta.”
E: “muito bem! E dois P divididos por dois?”
A: “um P.”
E: “dá um P, mas não precisa colocar o um. Basta colocar o P. Isso significa que P = 40, então cada pacote de Pampers tem 40 fraldas.”
A: “ah!”
E: “aí você me diz: como eu sei se isso está certo? É muito fácil. Basta você multiplicar esse valor na equação principal. Duas vezes quarenta dá quanto?”
A: “Duas vezes quarenta dá”...
E: “dá quanto?”
A: “oitenta.”

E: “oitenta, rapaz! Oitenta mais dez?”
A: “noventa.”
E: “olhe o que tem do outro lado aqui?”
A: “noventa.”
E: “isso mesmo, então fica noventa de um lado e noventa do outro.”
A: ((silêncio))
E: “estes dois J (2J) você não considera porque são variáveis que podem ter qualquer valor, certo?”
A: “hum!”
E: “então resolvi esta equação aqui só para você ver como é que se faz. Agora é a sua vez de fazer. Eu vou apagar e você faz do mesmo jeito. Subtraí o mesmo valor dos dois lados até achar a equação equivalente e depois divide pra resolver tudo. Você resolve esta depois resolve a outra questão. A hora do treinamento é esta. Qualquer dúvida pode me perguntar.”
A: “certo.”
E: “você subtrai o mesmo valor de cada lado até achar a equação equivalente. Depois divide a equação equivalente pelo número que está junto com a incógnita. Leia com atenção... veja direitinho. De um lado bote só o que a Patrícia comprou e do outro lado o que a Cláudia comprou.”
A: ((silêncio))
E: “se você botou P para esta fralda (Johnson), a outra é Pampers e você não vai poder botar a incógnita P. Você vai ter que botar outra letra para não confundir, entendeu?”
A: “ah, hum!”
E: “o que mais que ela comprou? Foi duas de Johnson e duas de quê?”
A: “duas de”...
E: “duas Johnson e duas Pampers. Tem que botar as Pampers aí, mas então tem que botar outra letra não pode ser mais P. Qualquer letra viu!”
A: “pronto.”
E: “certo! Pronto terminou” (de montar a equação).
[veja abaixo a reprodução da resposta do aluno]



Atividade 3 – equação 1 – resolução do aluno

E: “Agora eu te pergunto: o que tem desse lado e que tem também do outro lado?”
A: “dois pacotes de Pampers.”
E: “não mas não é Pampers. Essa é Johnson (a que tem como incógnita P) as duas compraram Johnson, mas só quem comprou Pampers foi a Cláudia. Pode deixar o P que eu já sei que o J é Pampers. Aí o que tiver desse lado que for igual ao que está do outro lado você cancela. A

primeira coisa é cancelar (termos semelhantes). É a mesma coisa de você subtrair os dois P de cada lado.” [sic]
A:” hum!”
E: “aí você repete o que sobra. Não precisa do “mais” (+). Não bote o “mais” (+) porque o “mais” é do 2P. Você cancelou os 2P, então não tem o “mais”. Repita a outra equação... os números que sobraram, certo?”
A: “certo.”
E: “agora subtraia o mesmo valor desse lado da igualdade e do outro lado da igualdade. Subtraia um valor igual, viu?”
A: “menos, né?”
E: “menos dez, por que dez? Por que é o menor valor que ta aqui. Você tem que começar a eliminar os valores que tão aqui...90 – 10?”
A: “oitenta!”
E: “que é igual a ...10 -10?”
A: “nada.”
E: “não precisa botar o zero. Repita o outro valor que sobra.”
A: “2P.”
E: “agora chegou na equação equivalente. Quando chega aqui o que a gente faz?”
A: “divide.”
E: “divide por qual valor?”
A: “dois.”
E: “não é por dois não. É por qualquer número que estiver multiplicando a incógnita. Aí fica oitenta dividido por dois que dá quanto?”
A: “quarenta.”
E: “quarenta. Repete o sinal (=) pra fazer o mesmo calculo no outro lado. Dois J divididos por dois?”
A: “dá J.”
E: “então eu já sei que sendo J o total de fraldas Pampers, elas são iguais a quarenta, certo? Então J = 40.”
A: ((silêncio))
E: “como é que eu sei que está certo isso aí?”
A: “por que eu cancelei as duas Jonhson e tirei 10”...
E: “você tirou dez de cada lado?”
A: “foi.”
E: “por que você tirou dez de cada lado?”
A: “porque tinha dez aqui.”
E: “por que dez era o menor valor sem incógnita. Você não poderia subtrair o maior valor que era noventa. Você deve subtrair sempre o menor valor sem incógnita.”
A: “certo.”
E: “e aqui por que você dividiu por dois?”
A: “tinha um dois.”
E: “porque o dois estava multiplicado (a incógnita) e você usou a operação inversa de multiplicação que é a divisão. Você dividiu oitenta por dois e deu quarenta.”
A: “foi.”
E: “pra saber se isto está certo é só pegar o valor da incógnita e colocar na equação inicial. Duas vezes quarenta dá quanto?”
A: “oitenta.”
E: “e oitenta mais dez?”
A: “noventa.”

E: “muito bem! Se der o mesmo número desse lado e do outro lado, então ta certo. tem noventa e noventa do outro lado, então bateu (os valores).”
A: ((silêncio))
E: “agora vamos montar uma equação maior com duas incógnitas diferentes de cada lado. São três termos de um lado e três do outro.”
A: “certo.”
E: “de um lado você põe as coisas que a Rosita, bota o sinal de igual e do outro bota as coisas que a Renata comprou. Cada uma comprou três coisas diferentes. Aí você bota aí o valor que elas compraram, certo? Elas compraram a mesma quantidade. Todos os problemas que você vai resolver aqui têm sempre a mesma quantidade, então você põe o sinal de igual no meio e a quantidade da outra. No final a gente vai reduzindo até saber que valor era esse.”
A: ((silêncio))
E: “vamos lá. Leia duas vezes o problema com calma, com atenção. Entenda o que o problema está perguntando.”
A: ((silêncio))
E: “muito bem! O que é isso que você colocou aí?”
A: “dois pacotes de bola de dois pacotes de carrinhos.”
E: “então você usou B para simbolizar bolas e C para simbolizar os carrinhos.”
A: “foi.”
E: “e do outro lado, o que você vai colocar?”
A: “carrinhos desse”...
E: “faltam as compras da Renata.”
A: “aqui eu posso botar a mesma letra?”
E: “você tem que ver se ela comprou a mesma coisa que a outra. Se for a mesma coisa, você repete a mesma incógnita.”
A: “então eu vou deixar sem nada”...
E: ‘não se o problema diz que foram dez bonecas então você não precisa botar uma incógnita para boneca, basta colocar só o dez, entendeu? Se aqui diz que foi 50 bonecas você não precisa botar uma incógnita para boneca, só precisa botar o 50. Porque o valor já está dado. Você só usa letras para os que não têm valores conhecidos. Por exemplo: um pacote, dois sacos, três caixas.’
A: ((silêncio))
E: ‘muito bem! Você montou a equação.’
[veja abaixo a reprodução da resposta do aluno]

$$50 + 2\cancel{B} + 2c = 10 + 2\cancel{B} + 4c$$

$$(-10)\ 50 + 2c = 10 + 4c\ (-10)$$

$$(-2c)\ 40 + 2\cancel{c} = 4c\ (-2c)$$

$$(\div 2)\ 40 = 2c\ (\div 2) \rightarrow 20 = c$$

Atividade 3 – equação 2 – resolução do aluno

E: ‘Agora vamos resolver. O que tem de um lado que tem do outro igual?’
A: “dois pacotes de bonecas.”

E: “então você cancela dois pacotes de bonecas. Isso quer dizer que você esta considerando que eles são iguais a zero. É a mesma coisa que subtrair 2B de um lado e 2B do outro.”
A: “e aqui é dois pacotes de carrinho e quatro pacotes de carrinhos.”
E: “é diferente. Não pode (cancelar) porque são valores diferentes. Você repete o que sobrou.”
A: “aí?” [sic]
E: “vamos agora mexer nesses números aí.” [sic]
A: ((silêncio))
E: “menos dez dá quarenta. Por que dez? Pra eliminar logo esse dez que está aqui desse lado. Aí o que sobra? Quarenta”...
A: “é.”
E: “bote aí o que sobrou... bote o 2C. O 2C você repete eu não posso mexer agora não”. [sic]
A: ((silêncio))
E: “ótimo. Dez menos dez?”
A: “nada.”
E: “isso nada. Não precisa botar o sinal de “mais” (+), basta botar o 4C. que eu já sei que ele é positivo. Agora vamos fazer o seguinte Edson: vamos mexer nesse 2C e 4C.”
A: ((silêncio))
E: “vamos retirar o mesmo valor de cada um deles para eliminar o menor deles. Vamos eliminar esse 2C. Pra eliminar como é que faz? Você tem que tirar 2C de cada lado. Bote aí (-2C). Não corta ele agora não. Bote (-2C) entre parênteses. Você não pode cancelar valores diferentes. Você tem que subtrair o 2C de cada lado da equação. Bote (-2C) desse lado e do outro lado também”. [sic]
A: “aqui ficou quarenta igual a 2C.”
E: “quarenta é igual a 2C. Agora chegamos na equação reduzida (2C = 40). O que eu faço agora?”
A: “subtrai.”
E: “Não. Você já subtraiu, agora chegou a hora de dividir.”
A: “é dividir!”
E: “dividir por quanto?”
A: “dois.”
E: “divide aí por dois. Por que é por dois?” [sic]
A: “por que é o dois que está multiplicando (a incógnita).”
E: “quarenta dividido por dois dá quanto?”
A: “vinte.”
E: “e 2C dividido por dois dá quanto?”
A: “1C.”
E: “então C = 20, o um não precisa botar. Em Matemática o número um antes de qualquer incógnita não precisa ser expresso, ele fica subentendido.”
A: ((silêncio))
E: “C = 20, como você pode saber se esse valor está certo?”
A: “4C.”
E: “quanto é o C?”
A: “o valor de C é um divido por”...
E: “não. O valor de C é esse aqui... vinte (C = 20). Então quanto é quatro vezes vinte?
A: quatro vezes vinte é quarenta...aí mais dez”... [sic]
E: “não. Quatro vezes dez é quarenta. Quatro vezes vinte não dá quarenta não.”
A: “não é... quatro vezes vinte?”
E: “sim.”
A: “oitenta.”
E: “e oitenta mais dez?”

A: “noventa.”
E: “Ok. Desse lado tem noventa e do outro lado tem 50 + 2C. Quanto é duas vezes C?”
A: “é vinte”
E: “vinte? Duas vezes vinte dá quanto?”
A: “quarenta.”
E: “então 50 + 2C é igual a....”
A: “noventa.”
E: “Ok. Edson muito obrigado!”

Segunda Sessão – Resolvendo equações no nível simbólico

Data da sessão: 01/09/2008 Duração: 01h03min.

Aluno: Edson[29] Idade: 12 anos

Atividade 4: Uso do objeto de aprendizagem nos níveis 6 a 10

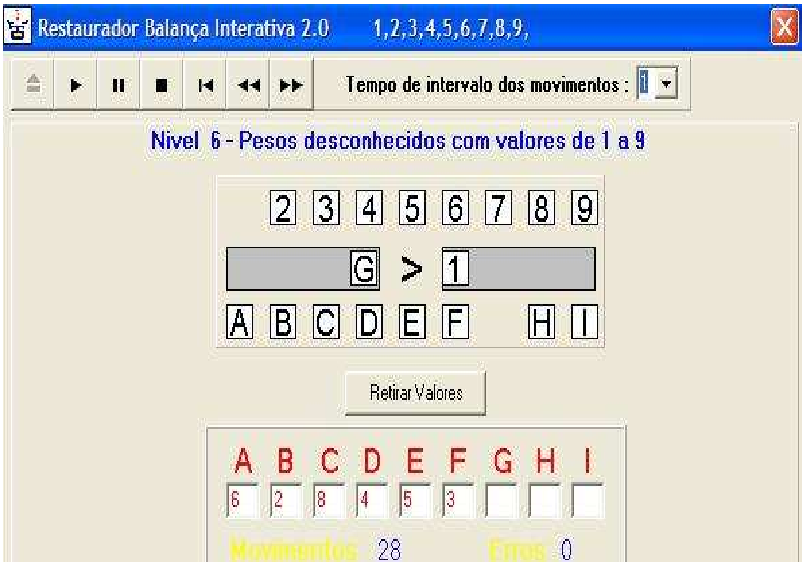
Objetivo: descobrir incógnitas, estabelecendo relações de igualdade e desigualdade no Balança Interativa, através de representações simbólicas

Nota: no início da sessão o examinador explica ao aluno como o objeto de aprendizagem Balança Interativa funciona.

E: "estou com o aluno Edson que está fazendo a segunda sessão com o Balança Interativa. Ele já descobriu o valor de A = 6 e B = 2 e C = 8."
A: "muito bem Edson! Vamos agora ao valor de D."
E: "os valores que já saíram não se repetem mais."
A: ((silêncio))
E: "D < 7...o seis já saiu, não pode ser mais seis."
A: ((silêncio))
E: "muito bem! Coloquei aí o valor de D." [sic]
A: ((silêncio))
E: "Ok."
A: "valor de E, né?" [sic]
E: "isso! O seis já saiu"...
A: "ah! É cinco."
E: "muito bem!"
A: "agora é F."
E: "menor que nove e menor que sete."
A: "eu acho que pode ser o três."
E: "hum, F = 3 muito bem! Já descobriu sete pesos com 25 movimentos. Você está num ritmo bom."
A: ((silêncio))
E: "o importante aqui não é fazer rápido, mas fazer pensando para fazer poucos movimentos. Pensar em cada jogada para pegar o número mais próximo possível."
A: "só pode ser o sete."
E: "G = 7 muito bem! Você está fazendo a análise de intervalo e vendo logo os números que já saíram e os que faltam."
A: ((silêncio))
E: "oh, só faltam três números e duas letras. Um dos números está fora e os outros dois são os valores das letras (incógnitas)."
A: "acho que é esse...não, é menor...deixa eu ver"...
E: "ok. H = 1."
A: ((silêncio))

[29] Para garantir o sigilo dos participantes todos os nomes encontrados no texto são fictícios (Resolução 196/96 – Conselho Nacional de Saúde).

[Reprodução da estratégia utilizada pelo aluno]



Estratégia Análise de Intervalo

E: “pronto Edson! Agora falta só o I, certo? Você está numa média excelente. Eu considero trinta e cinco movimentos o ideal. Você está com trinta e três e falta apenas mais um pra descobrir”...
A: “é!”
E: “hehehé muito bem! Uso o seis pra somar com o quatro.” [sic]
A: ((rir))
E: “você terminou o nível seis com trinta e cinco movimentos e nenhum erro. Vamos avançar de nível. O nível sete tem todos os números, mas no nível oito faltam dois números e tem um pouquinho mais de desafios. Já que você passou muito bem por esse nível nós vamos direto para o nível oito.”
A: “certo!”
E: “faltam quais números?”
A: “dois e cinco.”
E: “isso! Você vai descobrir as incógnitas sem contar com estes dois números e com poucos movimentos.”
A: “sim.”
E: “de preferência menos de quarenta movimentos.”
A: “é menor que oito... é sete” ((sussurrando a jogada))
E: “muito bem! Vamos ao valor de B.”
A: “é menor que três... é um.”
E: “exatamente B é igual a um, muito bem!”
A: “é menor que oito”... ((sussurrando a jogada))
E: “hum C = 3 muito bem!” [sic]
A: “agora é D, né?” [sic]
E: “é sim.”
A: ((silêncio))

E: “acertou rapaz! Descobriu um número que estava faltando no jogo. Você entrou mesmo no ritmo do jogo! (somou 4 + 1 porque não tinha o número 5) Fica mais tempo pensado nos números que não saíram... e ainda acerta quase de primeira.”
A: ((silêncio))
E: “hum.. .agora você acertou de primeiríssima!” [sic]
A: ((rir))
E: “muito bem! E = 8. Agora vamos ao valor de F.”
A: ((silêncio))
E: “muito bem! Acertou de primeira. F = 6.”
A: ((silêncio))
E: “maior do que nove então só pode ser um número”...
A: “oito num já foi?” [sic]
E: “mas os números vão até dez.”
A: “é dez.”
E: “muito bem Edson! H = 4. Foi muito boa essa jogada.”
A: ((silêncio))
E: “faltam só dois? Quais os números que não saíram ainda?”
A: “dois e nove.”
A: “nove!”
E: “I = 9 muito bem! Trinta e dois movimentos, uma excelente média.”
A: ((silêncio))
E: “vamos para o outro nível. Aperte OK, nível nove. Quais os números que estão faltando?”
A: “dois, cinco, oito e nove.”
E: “muito bem! Vamos descobrir incógnitas do mesmo jeito, só faltando esses dois números. Você vai usar aquela estratégia subtrativa e a soma de pesos também para substituir os valores que estão faltando.”
A: “é maior.” ((sussurrando a jogada))
E: “humm! Já deu certo! 7 + 1 = 8.” [sic]
A: “A = 8.”
E: “retira os valores. Vamos botar o valor de B.”
A: ((silêncio))
E: “B é maior que quatro. E agora, se é maior que sete, podem ser quais números?”
A: “maior que sete”...
E: “se é maior que sete, não adianta você botar o quatro.”
A: ((silêncio))
E: “quais os números maiores que sete?”
A: “maior que sete... oito, nove e dez.”
E: “o oito num já saiu?”
A: “maior que nove.” ((sussurrando a jogada))
E: “então só pode ser o”...
A: “dez.”
E: “bota lá o dez.”
A: “hã?”
E: “não é maior que nove? Então só pode ser o dez! Bote o dez lá na caixinha. Quando você tiver certeza pode colocar o valor direto na caixinha.”
A: ((silêncio))
E: “ok. Vamos ao valor de C... menor que seis...por que você vai colocar o sete?”
A: ((silêncio))
E: “menor... menor ainda”...
A: “C é dois!”

E: “bote lá o dois.” [sic]
A: ((silêncio))
E: “C = 2.”
A: “agora aqui... só pode ser o cinco.” ((sussurrando a jogada))
E: “é menor que seis”...
A: “é cinco.” (D = 5)
E: “certo! Então vamos ao valor de E.”
A: “quatro.”
E: “E = 4 muito bem! Vai retira os pesos. Vamos ao valor de F.”
A: ((silêncio))
E: “olhe presta atenção na jogada. O F < 3 e você botou o seis, por quê?” [sic]
A: “era maior.”
E: “não é menor. Veja aí no histórico.”
A: “é mesmo... então é o um.”
E: “isso mesmo! Vamos ao valor de G.”
A: “é sete.”
E: “muito bem! Acertou de primeira.”
A: ((silêncio))
E: “H é maior que quatro e maior que sete.”
A: “é seis.”
E: “isso muito bem!Só faltam dois (pesos com incógnita) e três números que não saíram ainda.”
A: ((silêncio))
E: “Quais os números que faltam?”
A: “três e nove.”
E: “não, ainda tem mais um.”
A: “três.”
E: “isso! Deu menor que nove, então qual é?”
A: “três.”
E: “aeeh! Trinta e nove movimentos e nenhum erro! Vamos para o nível dez.”
A: “oba!”
E: “no nível dez tem só três números. Quais os números que tem aí?”
A: três, quatro e sete.”
E: “ok. Vamos descobrir incógnitas só com três números. Vamos lá!”
A: “A é igual a sete”
E: “isso! Na segunda jogada já descobriu um.”
A: ((silêncio))
E: “maior que quatro... maior que sete... bota aqui no histórico pra eu ver uma coisa.”
A: ((silêncio))
E: “pronto! B é maior que quatro e o sete já saiu, então vamos ao valor de C. depois nos voltamos para esse valor.”
A: “é.”
E: “agora usa aquela estratégia subtrativa. Botando um número maior desse lado e um menor do outro lado.” [sic]
A: “assim?”
E: “não. Um número maior deste lado e um menor do outro lado.”
A: ((silêncio))
E: “que tal tirar o sete e botar o quatro?.. não dá, vamos ver o valor de D.”
A: “deixa eu ver”...
E: “por que você não bota o quatro?”

A: "é maior que quatro."
E: "então não dá. Vamos ao valor de E."
A: "é maior que quatro"...
E: "o sete já saiu. Tira então o E, bota o F." [sic]
A: "menor que três."
E: "por que você não bota o três? Faz aquela subtração que a gente fez naquela hora."
A: "é um."
E: "muito bem! Você botou três aqui (junto com a incógnita) e o quatro do outro lado." [sic]
A: [veja abaixo a reprodução da estratégia utilizada pelo aluno]

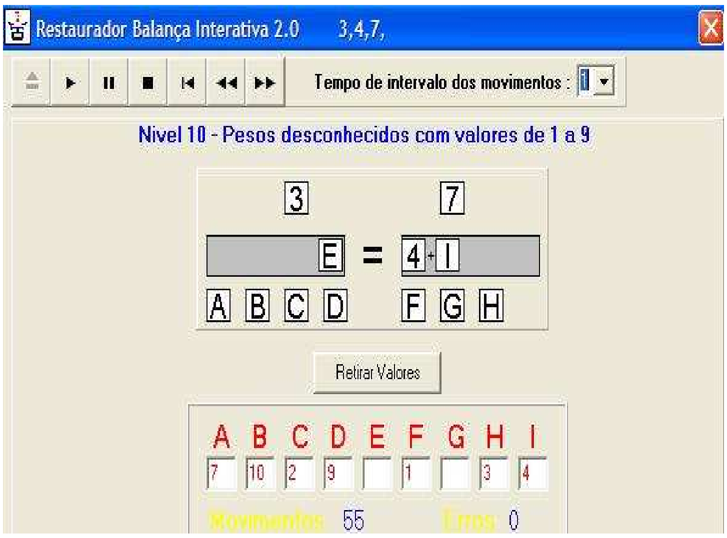
Estratégia Subtração Indireta

A: "e agora é o quê, o G é?"
E: "é sim o G. Pronto! Retira os valores."
A: ((silêncio))
E: "maior que quatro... o sete já foi... então vamos ao valor de H."
A: ((silêncio))
E: "H é menor pode ser o três. Pronto, vamos pro I agora."
A: "três!"
E: "Pronto, vamos pro I agora!"
A: "é quatro."
E: "Ainda bem! Pronto, descobrimos quatro números, certo Edson? Faltam cinco. Volta pro B agora."
A: ((silêncio))
E: "isso! Agora bota outros números para somar com ele." [sic]
A: ((silêncio))
E: "ainda é maior. É maior que oito... então, só pode ser nove ou dez."
A: ((silêncio))
E: "soma três e o sete pra ver se ele é dez."
A: "sete...mais"... ((sussurrando a jogada))
E: "olha aeh! Deu certo!" [sic]

A: “B é igual a dez.”
E: “vamos ao valor de C.”
A: ((silêncio))
E: “menor que três... o um já saiu, então só pode ser o” ...
A: “dois.”
E: “pronto! Agora você já pode usar o C para somar com os outros pesos. Por exemplo: C + 4 = 6.”
A: ((silêncio))
E: “por que você não soma o três com o quatro pra dá um número maior?”
A: “D é nove.” [como mostra a representação abaixo].

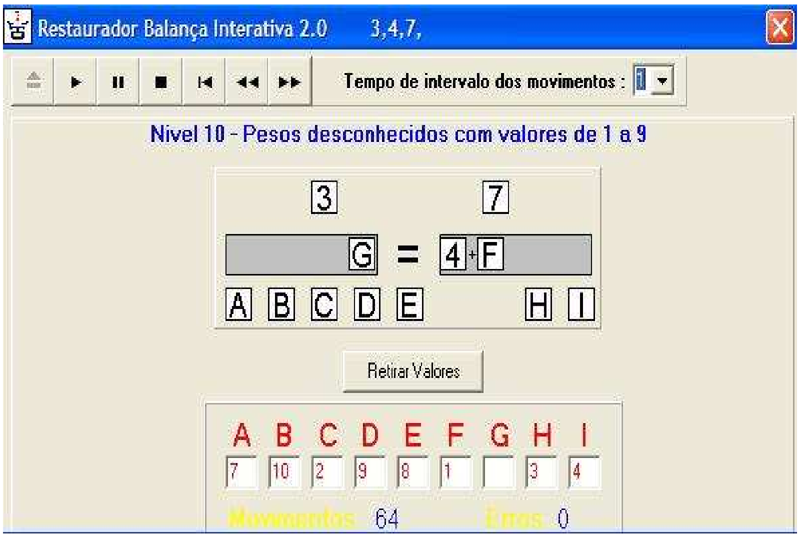
Estratégia Soma de Letras com Números

E: “muito bem! Você fez uma ótima jogada. Agora faltam só três.”
A: “tá faltando sair o cinco, o seis e o oito.” [sic]
E: “tem também o nove.”
A: “E = 5.”
E: “muito bem! Você somou 4 + I.” [como mostra a representação abaixo].



Estratégia Soma de Letras com Números

A: ((silêncio))
E: “agora só falta uma incógnita. Vamos ao valor de G.”
A: ((silêncio))
E: “quais os números que faltam?”
A: “o seis. Pode ser o seis!”
E: “veja se é.”
A: “eu acho que já sei.”
E: “qual é?”
A: “eu quero só fazer um teste aqui”...
E: “muito bom! Você somou 4 + F excelente!”
A: [veja abaixo a reprodução da estratégia utilizada pelo aluno]



Estratégia Soma de Letras com Números

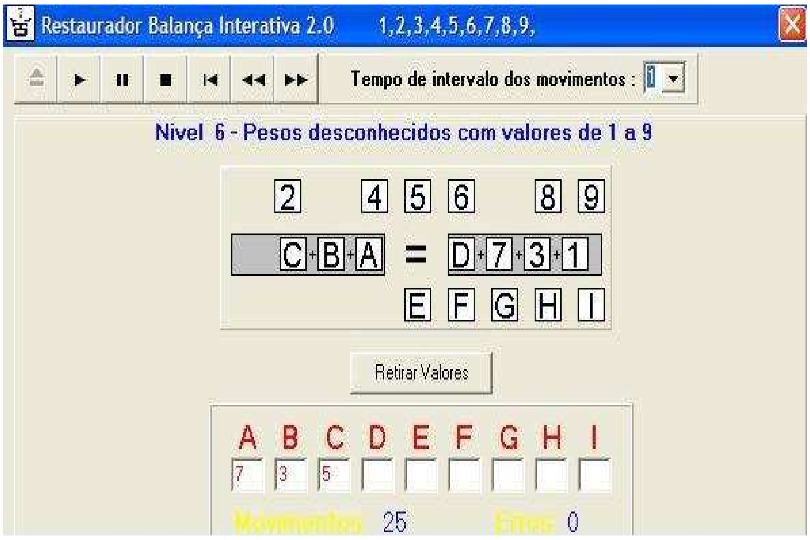
E: “qual o valor de G?”
A: “cinco.”
E: “pronto! Terminamos o nível dez com trinta e quatro movimentos e nenhum erro.”

Atividade 5 – Resolução de equações do 1º grau propostas no Balança Interativa.

Objetivo: levar o aluno a explicitar sua compreensão sobre as noções de igualdade, a incógnita e princípio de equivalência algébrica.

E: “vamos agora para a atividade 5. Volte ao nível seis e descubra as incógnitas até o valor de E. Depois eu vou montar umas equações para você resolver.”
A: (descobre as incógnitas sem a interferência do examinador)
E: “pronto! Até o valor de C é suficiente. Agora Edson eu vou montar aqui uma equação. Eu vou pegar os valores que você já descobrir e montar equações misturando com os outros valores que você ainda não descobriu como D, E e F.”
A: “certo.”
E: “pronto! Eu quero saber qual o valor de D?”

A: “o valor dele é cinco.”
E: “por quê?”
A: “por causa que aqui é dezesseis.” [sic]
E: “tem certeza? Por que é dezesseis?”
A: “porque a soma de 7 + 3 + 5 = 16.”
E: “Não. Tem certeza? Pra mim a soma de 7 + 3 + 5 = 15.”
A: “ah! É quinze mesmo, então o valor dele é quatro.”
E: “não podia ser o cinco porque ele já saiu.”
[Reprodução da equação proposta no Balança Interativa]



Atividade 5 – equação 1 – proposta no Balança Interativa

E: “então bote aí. Se passar é porque tá certo”. [sic]
A: “deu.”
E: “muito bem! Agora eu vou fazer outra equação aqui.”
A: ((silêncio))
E: “e agora Edson, qual o valor de E?”
[Reprodução da equação proposta no Balança Interativa]

Atividade 5 – equação 1 – proposta no Balança Interativa

A: “professor pode fazer no papel?”
E: “pode.”
A: “só pode ser dois.”
E: “então bota lá o dois. Se não for vai aparecer um erro.” [sic]
A: “deu certo.”
E: “Muito bem! Agora nos vamos resolver equações no papel.”

Atividade 6 – Resolução de equações do 1º grau propostas numa situação-problema

Objetivo: interpretar, montar e resolver uma equação algébrica na forma simbólica com uso de lápis e papel.

E: (examinador explica ao aluno os invariantes de uma equação do 1º grau). “Edson você estava descobrindo incógnitas no computador. Cada incógnita tem um valor. As incógnitas são aquelas letras que vêm nas equações, certo? Uma equação é toda sentença aberta, expressa por uma igualdade. Mas por que ela é uma sequência aberta? Por que ela tem incógnita e nós não sabemos o valor desta incógnita, por isso se diz que a sentença é aberta. Pra ser equação tem que ter incógnita e representar uma igualdade. Algumas equações têm apenas uma incógnita, mas existem equações com duas incógnitas de cada lado (x e y). Para você resolver uma equação do 1º grau é muito simples. Eu proponha o uso de duas operações: subtração e divisão. Subtrair é utilizar uma “conta de menos” e fazer uma divisão é dividir um número em partes iguais. Você precisa subtrair o mesmo valor de cada lado da equação até achar a equação equivalente. Quando você achar a equação equivalente é só dividir a equação pelo número que está junto com a incógnita. Geralmente a incógnita é o x ou o y, que são os mais utilizados na Matemática, mas pode ser também qualquer outra letra, tá bom? Vamos ver essa equação, por exemplo, você deve subtrair o mesmo valor de cada lado até achar a equação equivalente. Depois disso é só dividir pra achar o valor de incógnita. Por exemplo, esta equação aqui $1x + 600 = 1x + 100 + 4y$ tem dois membros. O que vem antes da igualdade é o primeiro membro $(1x + 600)$ e o segundo membro é o que vem depois da igualdade $(1x + 100 + 4y)$. O primeiro membro tem dois termos e o segundo membro tem três termos. Para começar a resolver essa equação nós vamos subtrair o mesmo de cada lado. Para isso existe uma regra básica: em primeiro lugar você olha se tem algum termo que se repete nos dois lados da equação. Tem algum termo igual nos dois lados desta equação?”
A: “1x.”
E: “muito bem! Neste caso nós podemos cancelar estes valores e repetir os termos que sobraram. Pra cancelar os valores basta marcá-los com um traço. Neste caso, quais os valores que sobraram?” [sic]
A: “$600 = 100 + 4y$”
E: “isso mesmo! Neste caso sobrou apenas um termo com incógnita (4y). Neste termo você não pode mexer. Ele tem que ir até o final (equação equivalente). Já entre os outros termos você deve subtrair o menor deles. Qual o termo menor aqui?”
A: “cem.”
E: “muito bem! Então quanto é seiscentos menos cem?”
A: “quinhentos.”
E: “e cem menos cem?”
A: “nada.”

E: “então você bota só 500 = 4y. Não precisa colocar o sinal positivo (+) do 4y. Depois do sinal de igualdade você não precisa colocar o sinal de mais (+).” [sic]
A: “ah hum!”
E: “Agora achamos a equação equivalente 500 = 4y. a equação equivalente é aquela com apenas dois termos de cada lado: um termo com a incógnita e outro sem a incógnita. Quando você chega nesta equação você vai mudar a operação Matemática. Antes você usou e subtração, agora você vai usar a divisão? Você vai dividir os dois lados da equação pelo mesmo número. Qual é esse número que você vai usar pra dividir?” [sic]
A: “o número que eu vou dividir?”
E: “é. Por qual número você vai dividir?”
A: “quatro.”
E: “por quê? Porque quatro é o número que está multiplicando a incógnita, por isso você vai dividir por ele. Quanto é 4y dividido por quatro?”
A: “1y.”
E: “aí você bota só o y. Não precisa botar o um.”
A: ((silêncio))
E: “e quanto é 500 dividido por quatro?”
A: “cento e vinte e cinco.”
E: “cento e vinte e cinco então tá aqui! Para saber se está certo é só você para a primeira equação (1x + 600 = 1x + 100 + 4y) e substituir o valor de y (1x + 600 = 1x + 100 + 4 . 125). Depois é só fazer as operações. Quanto é quatro vezes 125?”
A: “quinhentos.”
E: “com mais cem?”
A: “seiscentos.”
E: “muito bem! E do outro lado o que tem?”
A: “seiscentos.”
E: “então bateu.” [sic]
A: “agora eu sei como é que faz.” [sic]
E: “certo! Vamos para a segunda equação 2x + 2y + 50 = 4x + 2y + 10 Qual o termo que se repete nos dois membros?”
A: “2y.”
E: “agora retira os 2y e vai ficar só 2x + 50 = 4x +10 Qual o menor destes números que a gente pode eliminar?”
A: “dez.”
E: “agora tira dez de cada lado [2x + 50 (-10) = 4x +10 (-10)] apenas dos termos que não têm incógnita. Você não pode misturar os termos com incógnitas (coeficientes) com os termos que não possuem incógnita, certo? Quanto é cinquenta menos dez?”
A: “quarenta.”
E: “e dez menos dez?”
A: “nada.”
E: “pronto! sobrou apenas 2x + 40 = 4x Para chegar na equação equivalente é preciso eliminar uma destes dois termos com incógnitas. Qual é o termo que você eliminaria?”
A: “4x.”
E: “não. Você deve usar sempre o menor valor (2x). Você deve subtrair (-2x) de um lado e (2x) do outro lado. Quanto é 2x – 2x?”
A: “nada.”
E: “e 4x – 2x?”
A: “2x.”
E: “então chegamos na equação equivalente (2x = 40). Quando chega na equação equivalente o que você tem que fazer?”

A: “dividir”
E: “dividir por qual número?”
A: “dois.”
E: “dois, porque o dois está multiplicando a incógnita. Então, quarenta dividido por dois dá quanto?”
A: “vinte.”
E: “e 2x dividido por dois?”
A: “1x então bote só o x.”
E: “então x = 20 Como eu sei que isso está certo?”
A: “vinte mais dez é trinta...”
E: “não. Tem que ver aqui (equação inicial) 2x + 2y + 50 = 4x + 2y + 10 Qual o número que esta multiplicando o x?”
A: “quatro.”
E: “quanto é quatro vezes vinte?”
A: “quarenta.”
E: “não. Quatro vezes dez que é quarenta. Quatro vezes vinte é oitenta.”
A: “hum!”
E: “oitenta mais dez?”
A: “noventa.”
E: “noventa de um lado e do outro lado? Tem que ter o mesmo valor nos dois lados da equação.”
A: “noventa.”
E: “quanto é duas vezes vinte?”
A: “quarenta.”
E: “quarenta mais cinquenta?”
A: “dá noventa.”
E: “então bateu: noventa de um lado e noventa do outro [sic]. Agora se a equação for desse tipo aqui 2x + 3x = 500 e tiver os termos com e mesma incógnita todos no primeiro membro você não pode fazer o que fez agora: subtrair e dividir. Primeiro você vai ter que somar os termos com incógnitas semelhantes (juntar os termos) para montar a equação equivalente. Quanto é que dá 2x + 5x?”
A: “500x”
E: “não.”
A: “não, 5x.”
E: “5x = 500 agora chegamos na equação equivalente. Qual a operação que você vai usar agora?”
A: “subtrair... não dividir!”
E: “dividir por quanto?”
A: “cinco.”
E: “quinhentos dividido por cinco, dá quanto?”
A: “dá cinco... não dá cem!”
E: “dá cem, rapaz! 5x dividido por cinco?”
A: “5x dividido por cinco dá 1x.”
E: “então x = 100. Por que cem? Porque duas vezes cem dá duzentos e três vezes cem dá trezentos. Trezentos mais duzentos dá quinhentos. Resolveu a questão!”
A: ((silêncio))
E: “agora algumas vezes a equação vem assim, dentro de uma situação-problema como esta aqui: Jorge e Luciano foram a Lojas Americanas comprar brinquedos. Jorge comprou então dois pacotes de bonecos e 50 carrinhos plásticos. Luciano comprou dois pacotes de bonecos iguais ao de Jorge e dois pacotes de bolas coloridas e mais 20 carrinhos plásticos também

iguais aos de Jorge. Os dois amigos compraram a mesma quantidade de brinquedos. Sabendo-se que os pacotes de bolas tinham a mesma quantidade, quantas bolas havia em cada pacote que Luciano comprou?”
A: ((silêncio))
E: “neste caso você tem que colocar dum lado as compras de Jorge e do outro lado as compras de Luciano. Aí o que tiver número, por exemplo, o 50 carrinhos, você bota logo o 50, escreve o número. Agora quando tiver, por exemplo, dois pacotes de bonecos você escreve o dois e cria uma incógnita para pacote de bonecos. Se for dois pacotes de carrinhos você escreve dois e cria uma outra incógnita para pacotes de carrinhos diferente da incógnita dos pacotes de boneco porque são produtos diferentes.”
A: ((silêncio))
E: “agora escreve aqui de um lado o que o Jorge comprou e quando terminar de escrever as coisas de Jorge você bota do outro lado o que o Luciano comprou. Se tiver número você escreve o número. Mas se tiver assim dois pacotes de bonecos você tem que escrever dois e cria uma incógnita para pacotes de bonecos. Se for dois pacotes de carrinhos?”
A: “dois incógnita.”
E: “você escreve o dois e cria uma incógnita diferente daquela que você usou para pacotes de bonecos, certo?”
A: “pode seu um C.”
E: “então escreve aí o que Jorge comprou...” [sic]
A: “2b”
E: “mais (+)... o quê?”
A: “cinquenta”
E: “agora é Luciano.”
A: “igual, né?” (sinal de igualdade) [sic]
E: “igual... aí bote agora o que Luciano comprou.” [sic]
A: “cinquenta foi?”
E: “não. vinte! Cinquenta foi o Jorge.”
A: “vinte carrinhos.”
E: “basta botar o vinte. Não precisa cria incógnita para carrinhos.” [sic]
A: “certo”.
E: “Luciano não comprou dois pacotes de bonecos também? Então você tem que botar a mesma incógnita que usou para Jorge. Tem que repetir por é a mesma coisa boneco e boneco. Mas só que Luciano feito uma compra a mais que Jorge, qual foi?”
A: “foi dois pacotes de carrinhos.”
E: “não. Tem continue... tem mais coisa... dois pacotes de bonecos iguais aos de Jorge e dois pacotes de bolas coloridas.”
A: “hum!”
E: “vamos somando... bota outra incógnita pra bola. O problema diz que os dois compraram a mesma quantidade no total.”
A: ((silêncio))
E: “pronto você montou a equação.”
E: “Agora veja o que eles compraram para ver se tem alguma coisa que se repete nos dois lados da equação?”
A: “2b.”
E: “então cancela os dois pacotes de bonecos em cada lado e baixa o que sobra.”
A: ((silêncio))
E: “certo? Aqui qual o termo sem incógnita que eu posso subtrair?”
A: “vinte.”

[Reprodução da resolução do aluno]

Jorge = Luciano

$$50 + \cancel{2b} = 20 + \cancel{2b} + 2c$$

$$(-20)\ 50 = 20 + 2c\ (-20)$$

$$(\div 2)\ 30 = 2c\ (\div 2)$$

$$15 = c \rightarrow c = 15$$

Atividade 6 – equação 1 – resolução do aluno

E: “vinte de cada lado. Tira vinte de cada lado. Pra que se faz isso? Pra equação ficar equilibrada. Uma equação não é igual a uma balança de dois pratos? Se você retirar o mesmo peso de cada lado da balança ela continua equilibrada.”
A: ((silêncio))
E: “pronto! Chegou à equação equivalente. Agora na equação equivalente, qual a operação que você usa?”
A: “subtração... não... divisão!”
E: “divisão por qual número?”
A: “dois.”
E: “dois porque é o número que está junto com a incógnita.”
A: ((silêncio))
E: “trinta divido por dois dá quanto?”
A: “quinze.”
E: “bote aí quinze. 2C dividido por dois dá quanto?”
A: “um C.”
E: “então C = 15. O que ele queria saber no problema? Não era o valor de bolas? Então tinha quinze bolas. Vamos ver se isso era verdade?”
A: ((silêncio))
E: “duas vezes quinze dá quanto?”
A: “trinta.”
E: “trinta com mais vinte?”
A: “cinquenta.”
E: “olha o que sobrou do outro lado!”
A: “cinquenta.”
E: “cinquenta. muito bem rapaz! Agora vamos montar essa outra equação: Ernani e Wagner ganharam muitos chocolates na páscoa. Ernani ganhou uma caixa de Battom Garoto, uma caixa de bombons da Lacta e 56 bombons Serenata de Amor. Wagner ganhou uma caixa de Batom Garoto, duas caixas de bombons iguais as de Ernani Lacta e 28 bombons Serenata de Amor. Os dois amigos ganharam a mesma quantidade de chocolates. Sabendo-se que as caixas de chocolate do mesmo tipo tinham a mesma quantidade, quantos chocolates da Lacta tinham em cada caixa?”
A: ((silêncio))

E: “deu um lado você bota o que o Ernani ganhou, depois bota o sinal de igual e depois que o Wagner ganhou. Só que tem uma diferença: esta equação aqui ela tem duas incógnitas diferentes no primeiro membro e no segundo tem as mesmas incógnitas, apenas os números são diferentes.”
A: ((silêncio))
E: “vamos lá. De uma lado você bota as coisas de Ernani, põe o sinal de igualdade, e do outro lado as coisas de Wagner. A primeira incógnita é uma caixa de battom Garoto.” [sic]
A: “pronto.”
E: “agora bote do outro lado o que o Wagner ganhou. Se tiver o valor você bota só o valor.” [sic]
A: ((silêncio))
E: “não. Wagner ganhou uma caixa de battom também. As incógnitas são as mesmas só muda o coeficiente. Coeficiente é o número que acompanha a incógnita.”
A: ((silêncio))
E: “oh! Uma caixa de battom garoto igual a de Ernani e duas caixas de bombons da Lacta. Qual a incógnita para bombons da Lacta?”
A: “L”
E: “certo. Você montou a equação.”
[Reprodução da resolução do aluno]

$$56 + \cancel{1B} + 1L = 28 + \cancel{1B} + 2L$$

$$(-28) \quad 56 + 1L = 28 + 2L \quad (-28)$$

$$(-1L) \quad 28 + 1L = 2L \quad (-1L)$$

$$28 = 1L \rightarrow 1L = 28$$

Atividade 6 – equação 2 – resolução do aluno

E: “Agora faça aquele procedimento. Vamos olhar o que se repete nos dois lados da equação para cancelar. Cancelar é igual a subtrair o mesmo valor de cada lado da equação.”
A: ((silêncio))
E: “pronto! Agora vamos subtrair o menor termo sem incógnita.”
A: “vinte oito.”
E: “cinquenta e seis menos vinte e oito?”
A: “pode fazer aqui?” (fazer os cálculos no papel)
E: “pode. É pra fazer mesmo.”
A: ((silêncio))
E: “é cinquenta e seis menos vinte e oito! Você ta botando vinte e seis!”
A: “dá vinte e oito!”
E: “então pronto! Bote aí 28 + L = 2L. Agora você tem que subtrair o menor termo com incógnita. Qual é esse termo?’
A: “L”

E: “então subtrai menos L de cada lado. Repete o vinte e oito porque você não pode tirar L de vinte e oito. Mexe agora só com os termos que têm incógnitas.” [sic]
A: ((silêncio))
E: “quanto é 2L – L?”
A: “L”
E: “L – L?”
A: “nada.”
E: “então L = 28. Não precisou nem achar a equação equivalente porque já chegou no final.
A: agora vinte oito vezes dois dá cinquenta e seis e aqui tá repetido.” [sic]
E: “cinquenta e seis de cada lado. Muito bem Edson! Muito obrigado!”

Anexo G

Lista de Repositórios de Objetos de Aprendizagem

RIVED: Rede Interativa Virtual de Educação - O RIVED é um programa da Secretaria de Educação a Distância - SEED, que tem por objetivo a produção de conteúdos pedagógicos digitais, na forma de objetos de aprendizagem.
Endereço eletrônico: http://www.rived.mec.gov.br/site_objeto_lis.php

MERLOT: Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching – Site mantido pela Universidade do Estado da Califórnia – EUA. É uma comunidade virtual onde professores, funcionários e estudantes de todo o mundo partilham os seus materiais didáticos e pedagógicos voltados para o ensino superior e ensino *online.*
Endereço eletrônico: http://www.merlot.org/merlot/materials.htm

LABVIRT: Laboratório didático Virtual - Site direcionado ao ensino médio nas áreas de química e física. O LabVirt é uma iniciativa da Universidade de São Paulo – USP. No site há espaço para pesquisa, simulações e jogos virtuais destinados ao ensino de conteúdo para o ensino médio nas disciplinas de Física e Química.
Endereço eletrônico: www.labvirt.fe.usp.br

CESTA: Coletânea de Entidades de Suporte ao uso de Tecnologia na Aprendizagem – Site mantido por pesquisadores da Pós-Graduação em Informática na Educação e CINTED - Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Foi idealizado com vistas a sistematizar e organizar o registro dos objetos educacionais para utilização em cursos de capacitação em gerência de redes, videoconferência e na pós-graduação *lato-sensu* em informática na educação.
Endereço eletrônico: http://cesta.cinted.ufrgs.br/cesta.login.php

NOA – Núcleo de Produção de Objetos de Aprendizagem – Site desenvolvido por pesquisadores da Universidade Federal da Paraíba. Contêm animações interativas, simulação, jogos e modelagem de fenômenos da natureza voltados para o ensino de Física.
Endereço eletrônico:
http://www.fisica.ufpb.br/~romero/objetosaprendizagem/index.html

PROATIVA - Grupo de Pesquisa e Produção de Ambientes Interativos e Objetos de Aprendizagem – Site mantido por pesquisadores da Universidade Federal do Ceará. Contêm jogos e simulações destinados ao ensino de conteúdo matemático, linguagem, física, química e biologia.
Endereço eletrônico: http://www.proativa.vdl.ufc.br/

Anexo H

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (T.C.L.E.)

Você está sendo convidado a participar de uma pesquisa. Sua participação é importante, porém, você não deve participar contra a sua vontade. Leia atentamente as informações abaixo e faça qualquer pergunta que desejar, para que todos os procedimentos desta pesquisa sejam esclarecidos.

A presente pesquisa será realizada com alunos do 7º ano e tem o objetivo de proporcionar aos alunos a aprendizagem de equações do 1º grau através da utilização de um *software (programa de computador)* chamado Balança Interativa.

O pesquisador realizará quatro entrevistas com cada aluno individualmente:

1ª entrevista: realização de um pré-teste composto por 12 questões;

2ª entrevista: uso do *software* Balança Interativa (até o nível 5) e resolução de 4 equações;

3ª entrevista: uso do *software* Balança Interativa (até o nível 10) e resolução de 4 equações;

4ª entrevista: realização de um pós-teste composto por 12 questões.

Observações:

- Todas as entrevistas serão realizadas no laboratório de informática da escola e serão gravadas através de uso de um gravador de voz do tipo MP4;
- O pesquisador escolherá as três melhores entrevistas para serem gravadas com o uso de uma câmera de vídeo na própria escola onde a pesquisa está sendo realizada;
- Cada entrevista dura em média 60 minutos e será realizada no horário escolar;
- Será garantido o anonimato dos alunos e da escola onde a pesquisa foi realizada;
- <u>A participação na pesquisa é totalmente gratuita</u> e não haverá nenhum custo para os pais;
- Qualquer dúvida ou esclarecimentos sobre a pesquisa pode ser adquirido diretamente junto ao pesquisador no horário escolar ou no seguinte endereço:

Endereço do responsável pela pesquisa: Pesquisador: Laécio Nobre de Macêdo Endereço: Rua Capitão Gustavo, 3374-A - Joaquim Távora CEP 60120-140 – Fortaleza – CE Telefones para contato: (85) 8712- 9249 e 3257-3540

ATENÇÃO: Esta pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal do Ceará e está sendo supervisionada por este órgão. Para informar ocorrências irregulares durante a sua participação no estudo, dirija-se a Rua Coronel Nunes de Melo, 1127 - Rodolfo Teófilo - Telefone: 3366.8338

Tendo compreendido perfeitamente tudo o que me foi informado sobre a minha participação no mencionado estudo e estando consciente dos meus direitos, das minhas responsabilidades, dos riscos e dos benefícios que a minha participação implicam, concordo em dele participar e para isso eu DOU O MEU CONSENTIMENTO SEM QUE PARA ISSO EU TENHA SIDO FORÇADO OU OBRIGADO.

Fortaleza, / /2009.

Nome do Participante: ____

________________________________ (Assinatura do pai/mãe ou responsável legal)	________________________________ Assinatura do responsável pelo estudo
Endereço do participante-voluntário(a) Rua: .... Nº....................... Complemento:.. Bairro:.. CEP..................... Cidade: .... Telefone:.......................	

Anexo I

Aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa

Universidade Federal do Ceará
Comitê de Ética em Pesquisa

Of. Nº 557/08 Fortaleza, 22 de agosto de 2008
Protocolo COMEPE nº 141/ 08
Pesquisador responsável: Laécio Nobre de Macêdo
Deptº./Serviço: Departamento de Psicologia/ UFC
Título do Projeto: "Uso de um objeto de aprendizagem digital no desenvolvimento de conceitos algébricos"

Levamos ao conhecimento de V.Sª. que o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal do Ceará – COMEPE, dentro das normas que regulamentam a pesquisa em seres humanos, do Conselho Nacional de Saúde – Ministério da Saúde, Resolução nº 196 de 10 de outubro de 1996 e complementares, aprovou o projeto supracitado na reunião do dia 21 de agosto de 2008.

Outrossim, informamos, que o pesquisador deverá se comprometer a enviar o relatório final do referido projeto.

Atenciosamente,

Mirian Parente Monteiro

Dra. Mirian Parente Monteiro
Coordenadora Adjunta do Comitê
de Ética em Pesquisa
COMEPE/UFC