Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ricardo Nunes Machado Júnior

Uma equação não linear do calor com valor inicial singular

Recife

2009

Ricardo Nunes Machado Júnior

Uma equação não linear do calor com valor inicial singular

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Miguel Loayza

Recife

2009

Ricardo Nunes Machado Júnior

Uma equação não linear do calor com valor inicial singular

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: ______________________________
Miguel Fidencio Loayza Lozano, UFPE
Orientador

____
Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva, UFPE

____
Flávio Dickstein, UFRJ

UMA EQUAÇÃO NÃO LINEAR DO CALOR COM VALOR INICIAL SINGULAR

Por

Ricardo Nunes Machado Júnior

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro - 2009

Machado Júnior, Ricardo Nunes
Uma equação do calor não linear com valor inicial singular / Ricardo Nunes Machado Júnior – Recife : O Autor, 2009.
64 folhas : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2009.

Inclui bibliografia e índice remissivo.

1. Equações diferenciais parciais. I. Título.

515.353 CDD (22.ed.) MEI2009-020

A Deus.

A meus pais.

A minha irmã.

Agradecimentos

A Deus.

A meus pais Alba Menezes e Ricardo Nunes.

A minha irmã Raquel Menezes.

A minhas avós Adília Menezes e Maria Nunes.

A meu orientador Miguel Loayza pela paciência e dedicação.

A meu primo Marcelo pela convivência.

A minhas tias Aurea e Carmelita.

Aos meus tios Antonio e Diniz.

Aos meus primos Klinger e Karina.

Aos Professores Antonio Carlos, Henrique Araújo, Hildeberto Cabral, Sergio Santa Cruz e Sóstenes Lins.

Ao Professor José Alvino que me incentivou a fazer o curso de matemática.

Aos amigos da minha turma da graduação e mestrado Gigi, Gabriel, André Ventura, Anderson (Formiga), Renato Gabarito, Paulo Roberto e Wagner.

Aos amigos do Dmat Allyson (Billy Joe), Alejandro, Eudinho, Rodrigo Gondam, André BB, Bárbara, Cabecinha, Adecarlos, Marcelo (Johnny), Joilson, Bruno, Bruna, Renata, Zaqueu, Wilberclay, Jesus (João Paulo), Adriano Regis, Cláudio Cristino, Laudelino (Típico Sertanejo), Felipe (Gigante), Eder, Lito.

Aos meus amigos Curupa, Dario, Felipe Chaves, Manoel, Netto, Olga, Patrícia, Rafael Oliveira, Raydonal, Renner, Valdemir, Vini.

A Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Estudamos a existência e unicidade de solução de uma equação do calor não linear com dado inicial em $L^q(\Omega)$, onde $1 \leq q < \infty$. Mostramos que esta solução é clássica.

Palavras-chave: Equação do calor, solução clássica, existência e unicidade.

Abstract

We study the existence and uniqueness of a solution of a nonlinear heat equation with initial data in $L^q(\Omega)$, where $1 \leq q < \infty$. We show that this solution is classical.

Keywords: Heat equation, existence, uniqueness, classical solution.

Sumário

Introdução

Nosso objetivo é analisar a existência e unicidade de soluções para a seguinte equação parabólica semilinear

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= |u|^{p-1}u \quad \text{em } (0,T)\times\Omega, \\ u &= 0 \qquad\quad \text{em } (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) &= u_0(x) \quad\ \ \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular, $p > 1$ e $u_0 \in L^q(\Omega)$. O problema da existência local para (1) foi estudado por Weissler [2], que mostrou que se $u_0 \in L^q(\Omega)$ e $q > \frac{N}{2}(p-1)$ ou $q = \frac{N}{2}(p-1) > 1$, existem $T = T(u_0) > 0$ e uma função $u \in C([0,T], L^q(\Omega))$ solução da equação

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)|u(s)|^{p-1}u(s)ds, \tag{2}$$

onde $(T(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo do calor. O resultado é "quase" optimal, pois quando $1 \leq q < \frac{N}{2}(p-1)$, existe $u_0 \in L^q(\Omega)$ não negativo tal que a equação (2) não possui solução não negativa na classe $C([0,T], L^q(\Omega))$.

A questão de unicidade foi tratada por Brézis e Cazenave em [1]. Especificamente eles mostram que quando $q > \frac{N}{2}(p-1)$ ou $q = \frac{N}{2}(p-1) > 1$ o problema (1) possui uma única solução na classe

$$C([0,T], L^q(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega)).$$

Para mostrar que a solução obtida por Weissler encontra-se na classe $L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega))$, eles estudaram o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= au \quad \text{em } (0,T)\times\Omega, \\ u &= 0 \quad\ \ \text{em } (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 \quad \text{em } L^r(\Omega). \end{cases}$$

Nesta dissertação, substituimos o argumento deles pelo argumento de Snoussi, Tayachi e Weissler [9] pois é um argumento muito mais geral.

Agora vamos comentar o que foi desenvolvido ao longo de cada capítulo.

No Capítulo 1, apresentamos alguns conceitos preliminares como os espaços L^p, teoria das distribuições, derivada fraca, espaços de Sobolev e a integral de Bochner.

No Capítulo 2, abordamos a teoria de semigrupos. Enunciamos o teorema de Hille-Yosida e falamos de operadores m-acretivos[1], apresentando alguns resultados necessários para mostrar que o operador Δ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações, denominado semigrupo do calor. Também falamos brevemente sobre semigrupo analítico.

No início do Capítulo 3, falamos sobre a equação do calor linear e a regularidade maximal. Em seguida, falamos sobre equação do calor não linear, dada por

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= g(u), \quad x \in \Omega,\ t \in [0,T], \\ u(t,x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \in [0,T], \\ u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

com dado inicial $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Analisamos a existência e unicidade da solução.

Finalmente, no Capítulo 4 tratamos a existência e unicidade para o problema (1) para dado inicial $u_0 \in L^q(\Omega)$.

[1] em inglês é chamado de m-accretive

Capítulo 1

Conceitos preliminares

1.1 Espaços L^p

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável e $0 < p < \infty$, definimos

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{1/p}$$

(permitindo que $\|f\|_{L^p} = \infty$). Definimos

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_{L^p} < \infty\}.$$

Abreviaremos $L^p(\Omega)$ simplesmente por L^p quando isso não gere confusão sobre o domínio das funções tratadas. Como

$$|f + g|^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p),$$

concluímos que $f + g \in L^p$, se $f, g \in L^p$. Como $\|cf\|_{L^p} = |c|\|f\|_{L^p}$, L^p é um espaço vetorial.

Nossa notação sugere que $\|\cdot\|_{L^p}$ é uma norma em L^p. De fato temos que $\|f\|_{L^p} = 0$ se, e somente se, $f = 0$ q.t.p. e $\|cf\|_{L^p} = |c|\|f\|_{L^p}$. Então, só nos resta verificar a desigualdade triangular, ou seja $\|u+v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}$. Isto não é válido se $0 < p < 1$. Para mostrar isto, sejam $a, b > 0$. Para $t > 0$ temos que $t^{p-1} > (a+t)^{p-1}$, e integrando de 0 a b obtemos $a^p + b^p > (a + b)^p$. Portanto, se E e F são conjuntos disjuntos de medida finita e positiva em Ω definindo $a = |E|^{1/p}$, $b = |F|^{1/p}$ e $\chi_E(x)$ como sendo 1 se $x \in E$ e 0 se $x \notin E$, temos

$$\|\chi_E + \chi_F\|_{L^p} = (a^p + b^p)^{1/p} > a + b = \|\chi_E\|_{L^p} + \|\chi_F\|_{L^p}.$$

A desigualdade de Minkowski (1.2), nos diz que L^p é um espaço normado se $1 \leq p < \infty$. Agora vamos definir o espaço L^∞.

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ é mensurável e } \exists\ C > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\ \}$$

e

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C\}$$

Como antes, é possível verificar que L^∞ é um espaço vetorial e $\|\cdot\|_{L^\infty}$ é uma norma.

Agora vamos apresentar alguns resultados sem demonstrá-los, já que eles podem ser encontrados nos livros de teoria da medida, como por exemplo Folland [7].

Para L^1, temos os seguintes resultados.

Teorema da convergência monótona. Seja (f_n) uma seqüência em $L^1(\Omega)$ tal que

(i) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ q.t.p. em Ω,

(ii) $\sup\limits_n \displaystyle\int_\Omega f_n < \infty$.

Então, $f_n(x)$ converge para $f(x)$ q.t.p. em Ω e, além disso, $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|dx = 0.$$

Teorema da convergência dominada. Seja $(f_n) \subset L^1(\Omega)$ tal que

(i) $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω,

(ii) Existe $g \in L^1(\Omega); |f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|dx = 0$

Lema de Fatou. Seja $(f_n) \subset L^1(\Omega)$ verificando

(i) $f_n(x) \geq 0$ q.t.p. em Ω,

(ii) $\sup\limits_n \displaystyle\int_\Omega f_n(x)dx < \infty$.

Se $f(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, então $f \in L^1(\Omega)$ e $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx$

A seguir, apresentamos alguns resultados que valem para os espaços L^p com $p \geq 1$.

a) O conjunto $C_0(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua tais que $f(x) = 0\ \forall x \in \Omega \setminus K$ onde K é um compacto$\}$ é denso em $L^p(\Omega)$, se $1 \leq p < \infty$.

b) **(Desigualdade de Hölder)** Suponha que $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. ($q$ é chamado o conjugado de p) Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$ então $fg \in L^1$ e

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}. \tag{1.1}$$

A igualdade vale em (1.1) se, e somente se, existem constantes α, β com $\alpha\beta \neq 0$ tais que $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ q.t.p.

c) **(Desigualdade de Minkowski)** Se $1 \leq p \leq \infty$ e $f, g \in L^p$, então

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \tag{1.2}$$

d) O espaço L^p com $1 \leq p \leq \infty$ é um espaço de Banach.

e) O espaço L^p com $1 \leq p < \infty$ é separável.

f) **(Desigualdade de interpolação)** Seja $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Então, $f \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [p, q]$ e $\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\theta}\|f\|_{L^q}^{1-\theta}$ com $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

h) **(Teorema de representação de Riesz)** Sejam $1 < p < \infty$, p' o conjugado de p, e $L \in [L^p(\Omega)]'$ onde $[L^p(\Omega)]'$ é o dual de $L^p(\Omega)$. Então, existe um único $v \in L^{p'}(\Omega)$ tal que para todo $u \in L^p$

$$L(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Mais ainda, $\|v\|_{L^{p'}} = \|L\|_{[L^p]'} = \sup\left\{\left|\int_{\Omega} u(x)v(x)\right|; \|v\|_{L^p} = 1\right\}$.

1.2 Desigualdades do tipo Gronwall

As demonstrações dos seguintes resultados podem ser encontradas em Brézis e Cazenave [3].

Lema 1.1 (Gronwall). *Sejam $T > 0, A \geq 0$ e $f \in L^1(0,T)$ uma função não negativa. Considere uma função não negativa $\varphi \in C([0,T])$ tal que*

$$\varphi(t) \leq A + \int_0^t f(s)\varphi(s)ds,$$

para todo $t \in [0, T]$. *Então,*

$$\varphi(t) \leq A \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right),$$

para todo $t \in [0, T]$.

Lema 1.2 (singular de Gronwall). *Sejam* $T > 0, A \geq 0, 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, *e* f *uma função não negativa com* $f \in L^p(0, T)$ *para algum* $p > 1$, *tal que* $p' \max\{\alpha, \beta\} < 1$. *Considere uma função não negativa* $\varphi \in L^\infty(0, T)$ *tal que*

$$\varphi(t) \leq At^{-\alpha} + \int_0^t (t-s)^{-\beta} f(s)\varphi(s)ds, \qquad \text{para quase todo } \ t \in [0, T].$$

Então, existe C, *dependendo apenas de* T, α, β, p *e* $\|f\|_{L^p}$, *tal que*

$$\varphi \leq ACt^{-\alpha},$$

para quase todo $t \in [0, T]$.

1.3 Distribuições e derivadas fracas

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\{\Theta_i\}_{i \in I}$ a família de todos os abertos tais que $\varphi(x) = 0$ q.t.p x de Θ_i. O Suporte de φ, denotado por supp φ, é definido como sendo $\Omega \setminus \cup_{i \in I} \Theta_i$.

A fim de simplificar a notação de derivada parcial, definimos o multi-índice α como sendo a n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$. Assim, se α é um multi-índice escrevemos $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ e $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}$.

Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto. O espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com a seguinte noção de convergência: a seqüência $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ no sentido de $\mathcal{D}(\Omega)$ se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) existe $K \subset\subset \Omega$ tal que supp$(\varphi_n - \varphi) \subset K$ para todo n,

(ii) $\lim_{n \to \infty} D^\alpha \varphi_n(x) = D^\alpha \varphi(x)$ uniformemente em K para cada multi-índice α.

onde $K \subset\subset \Omega$ significa que $\overline{K} \subset \Omega$ e $\overline{K}$ é compacto, Uma transformação linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é uma distribuição se for contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$, ou seja, se $\varphi_n \to \varphi$ no sentido de $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T\varphi_n \to T\varphi$. O espaço das distribuições é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Uma função u definida em quase todo ponto de Ω é dita localmente integrável em Ω se $u \in L^1(A)$ para todo conjunto mensurável $A \subset\subset \Omega$. Neste caso escrevemos $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Correspondendo a cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ existe uma distribuição $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definida por

$$T_u(\varphi) = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.3}$$

E claro que T_u é linear em $\mathcal{D}(\Omega)$. Para ver que é contínua, suponha que $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Então existe $K \subset\subset \Omega$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi_n - \varphi) \subset K$ para $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$|T_u(\varphi_n) - T_u(\varphi)| \leq \sup_{x \in K} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \int_K |u(x)|dx.$$

o lado direito da desigualdade acima tende a zero quando $n \to \infty$, já que $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente em K.

Se $u \in C^1(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos que φ é identicamente nula fora de algum subconjunto compacto de Ω. Integrando por partes na variável x_j obtemos

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u(x)\right) \varphi(x)dx = -\int_\Omega u(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x)\right) dx.$$

Similarmente, integrando por partes $|\alpha|$ vezes, temos

$$\int_\Omega (D^\alpha u(x))\, \varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)dx$$

se $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$. Isto motiva a seguinte definição de derivada $D^\alpha T$ de uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.4}$$

Como $D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sempre que $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $D^\alpha T$ é um funcional em $\mathcal{D}(\Omega)$. De fato $D^\alpha T$ é linear em $\mathcal{D}(\Omega)$. Mostraremos que $D^\alpha T$ é contínua. Para isto suponha que $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Então,

$$\operatorname{supp}(D^\alpha(\varphi_n - \varphi)) \subset \operatorname{supp}(\varphi_n - \varphi) \subset K$$

para algum $K \subset\subset \Omega$. Mais ainda,

$$D^\beta[D^\alpha(\varphi_n - \varphi)] = D^{\beta+\alpha}(\varphi_n - \varphi)$$

converge para zero uniformemente em K quando $n \to \infty$ para cada multi-índice β. Aqui, $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Como $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, segue que

$$D^\alpha T(\varphi_n) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi_n) \to (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) = D^\alpha T(\varphi).$$

Portanto, $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

1.4 Espaços de Sobolev

Nesta seção vamos introduzir o conceito de espaços de Sobolev e suas propriedades básicas. Estes espaços são definidos sobre domínio arbitrário $\Omega \in \mathbb{R}^N$ e são subespaços vetoriais dos espaços $L^p(\Omega)$.

Defina o funcional $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$, onde m é um inteiro não negativo e $1 \leq p \leq \infty$, como

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \qquad \text{se} \quad 1 \leq p < \infty, \tag{1.5}$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} \tag{1.6}$$

para qualquer função u tal que o lado direito (das igualdades acima) faça sentido. Claramente (1.5) ou (1.6) definem uma norma no espaço vetorial de funções nas quais o lado direito assume valores finitos. Definimos

$W^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para $0 \leq |\alpha| \leq m,$ onde $D^\alpha u$ é a derivada no sentido das distribuições de $u\}$, e

$W_0^{m,p}(\Omega) \equiv$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ no espaço $W^{m,p}(\Omega)$.

Estes espaços, munidos com a norma (1.5) ou (1.6), são chamados espaços de Sobolev sobre Ω.

Agora vamos apresentar alguns resultados sobre os espaços de Sobolev que podem ser encontrados no livro de Adams [5].

a) $W^{m,p}(\Omega)$, munido com a norma (1.5) ou (1.6), é um espaço de Banach.

b) Quando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com Ω um aberto de classe C^1 tal que $\partial\Omega$ limitado, ou $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ e $1 \leq p \leq \infty$, temos que

   − se $1 \leq p < N$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,

- se $p = N$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in [p^*, +\infty)$,
- se $p > N$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,

com injeções contínuas, ou seja existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{W^{1,p}} \leq C\|u\|_{L^p}$. Mais ainda, se $p > N$, temos para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ que

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}}|x-y|^\alpha \quad \text{em quase todo } \ x, y \in \Omega$$

com $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ e C depende apenas de Ω, p e N. Em particular $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

c) **(Rellich-Kondrachov)** Suponha que Ω seja limitado e de classe C^1. Temos que

- se $p < N$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, p^*)$ onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,
- se $p = N$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, +\infty)$,
- se $p > N$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,

com injeções compactas, ou seja leva conjunto limitado em conjunto relativamente compacto.

1.4.1 O espaço dual de $W_0^{m,p}$

Seja $1 \leq p < \infty$. Quando $p = 2$ denotamos $W^{m,p}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$ e $W_0^{m,p}(\Omega)$ por $H_0^m(\Omega)$. Denotamos por $W^{-m,p'}(\Omega)$ o espaço dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$, denotamos por $H^{-m}(\Omega)$ o espaço dual de $H_0^m(\Omega)$. Identificando, pelo teorema de representação de Riesz, $L^2(\Omega)$ com seu dual, temos as seguintes inclusões

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega),$$

com injeções contínuas e densas.

Em particular, se $u \in H_0^m(\Omega)$ e $v \in L^2(\Omega)$, então

$$\langle v, u\rangle_{H^{-m}, H_0^m} = \int_\Omega u(x)v(x)dx. \tag{1.7}$$

Tomando $u = v \in H_0^m(\Omega)$ em (1.7), temos

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H_0^m}\|u\|_{H^{-m}}, \text{ para todo } u \in H_0^m(\Omega). \tag{1.8}$$

E ainda, como por definição $\|v\|_{H^{-m}} = \sup\{|\langle v, u\rangle_{H^{-m}, H_0^m}|;\ \|u\|_{H^m} = 1\}$, deduzimos de (1.7) que

$$\|v\|_{H^{-m}} \leq \|v\|_{L^2}, \tag{1.9}$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$.

1.5 Espaços de Hilbert

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H munido com um produto interno $(\cdot,\cdot)$ e completo com a norma $(\cdot,\cdot)^{1/2}$. Por exemplo, o espaço H^m munido com o produto interno $(u,v)_{H^m} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$ é um espaço de Hilbert.

Teorema 1.3 (Lax-Milgram). *Sejam H um espaço de Hilbert com norma $\|\cdot\|_H$ e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ um funcional bilinear. Suponha*

(i) Continuidade. Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|_H\|v\|_H \text{ para todo } (u,v) \in H \times H.$$

(ii) Coercividade. Existe $\alpha > 0$ tal que $|a(u,u)| \geq \alpha\|u\|_H^2$ para todo $u \in H$.

Então, para todo $f \in H^*$ (o espaço dual de H) a equação

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle_{H^*,H}, \text{ para todo } v \in H$$

possui uma única solução $u \in H$.

Para uma demonstração, veja Brézis [6], pag. 84.

O operador Laplaciano $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ define um operador linear de $H^1(\Omega)$ a $H^{-1}(\Omega)$. Note que para $u \in H^1(\Omega)$ o funcional linear é definido por

$$\langle \Delta u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} = -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.10}$$

Com efeito, se $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle \Delta u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \langle \Delta u, v\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx.$$

Daí, por densidade temos (1.10).

Como aplicação do Teorema 1.3 temos.

Lema 1.4. *Para cada $f \in H^{-1}(\Omega)$, existe uma única solução $u \in H_0^1(\Omega)$ da equação*

$$-\Delta u + u = f \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Mais ainda,

$$\|f\|_{H^{-1}} = \|u\|_{H^1}. \tag{1.11}$$

Em particular,

$$\|u\|_{H^1} \leq \|f\|_{L^2}, \tag{1.12}$$

sempre que $f \in L^2(\Omega)$.

Demonstração. Pelo Teorema 1.3, para todo $f \in H^{-1}(\Omega)$ existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(u, v)_{H^1} = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.13}$$

Em particular, (1.13) é equivalente a equação

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \text{ para todo } v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

que é equivalente por (1.10) a

$$-\Delta u + u = f, \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Mais ainda, tomando $v = u$ em (1.13) temos $\|u\|_{H^1}^2 \leq \|f\|_{H^{-1}}\|u\|_{H^1}$; e portanto $\|u\|_{H^1} \leq \|f\|_{H^{-1}}$. E ainda, segue de (1.13) que

$$|\langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}| \leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$. Portanto, $\|f\|_{H^{-1}} \leq \|u\|_{H^1}$, donde a igualdade (1.11) segue. A desigualdade (1.12) é conseqüência de (1.11) e (1.9). $\square$

Observação 1.5. *De (1.11) vemos que o operador diferencial* $-\Delta + I$ *define uma isometria de* $H_0^1(\Omega)$ *em* $H^{-1}(\Omega)$.

Observação 1.6. *Quando* Ω *possui a fronteira limitada de classe* C^2 *e* $1 < p < \infty$, *temos o seguinte resultado de regularidade de Agmon-Douglis-Nirenberg, veja [6], cap. 9. Para todo* $\lambda > 0$ *e* $f \in L^p(\Omega)$, *existe uma única solução* $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ *da equação*

$$-\Delta u + \lambda u = f, \text{ em } H^{-1}(\Omega); \tag{1.14}$$

e

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C(\|u\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}),$$

para alguma constante C *independente de* f.

1.6 Integral de Bochner

Seja X um espaço de Banach e denote a norma em X por $\|\cdot\|$. Seja $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ uma coleção finita de subconjuntos de $\mathbb{R}$ mutuamente disjuntos, cada um com medida de Lebesgue finita, e seja $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ uma coleção de pontos em X, tais que $f(A_j) = b_j,\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. A função f de $\mathbb{R}$ em X definida por

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m} \chi_{A_j}(t) b_j,$$

onde χ_A é a função característica de A, é chamada de função simples. Para funções simples definimos,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j) b_j,$$

onde $\mu(A)$ denota a medida de Lebesgue de A.

Seja $A \subset \mathbb{R}$ mensurável e f uma função arbitrária definida em quase todo ponto de A em X. A função f é chamada (fortemente) mensurável em A se existe uma seqüência $\{f_n\}$ de funções simples com suporte em A tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\| = 0 \quad \text{q.t.p. em } A. \tag{1.15}$$

Suponha que uma seqüência de funções simples f_n satisfazendo (1.15) possa ser escolhida de tal forma que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \|f_n(t) - f(t)\| dt = 0.$$

Então f é chamada (Bochner) integrável em A e nós definimos

$$\int_A f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(t)dt. \tag{1.16}$$

Os seguintes resultados podem ser encontrados em K. Yosida [12].

a) **(Teorema de Bochner)** Seja $f : I \to X$ uma função mensurável. Então, f é integrável se, e somente se, a função $\|f\| : I \to X$ é integrável. Além disso,

$$\left\| \int_I f(t)dt \right\| \leq \int_I \|f(t)\| dt,$$

para toda função integrável $f : I \to X$.

b) Se $f : I \to X$ é integrável e $\varphi \in L^\infty(I)$, então $f\varphi : I \to X$ é integrável.

c) **(Teorema da convergência dominada)** Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções integráveis definidas em I e com valores em X. Seja $f : I \to X$ uma função mensurável e seja $g \in L^1(I)$. Se

   (i) $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ para quase todo $t \in I$ e todo $n \in \mathbb{N}$,

   (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ para quase todo $t \in I$,

   então f é integrável e $\displaystyle\int_I f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)dt.$

d) Se Y é um espaço de Banach, $A : X \to Y$ é um operador linear contínuo e $f : I \to X$ é integrável, então $Af : I \to Y$ é integrável e

$$\int_I Af(t)dt = A\left(\int_I f(t)dt\right).$$

   Em particular, se $X \subset Y$ com injeção contínua e se $f : I \to X$ é integrável, então a integral de f no sentido de X coincide com a integral de f no sentido de Y.

Capítulo 2

Teoria de Semigrupos

O objetivo deste capítulo é apresentar a teoria de semigrupos. Para uma leitura mais aprofundada sobre esta teoria indicamos A. Pazy [4] e H. Brézis e T. Cazenave [3].

2.1 Semigrupo de operadores lineares limitados.

Seja X um espaço de Banach. Uma família (a um parâmetro) $(T(t))_{t\geq 0}$, de operadores lineares limitados de X em X é um semigrupo de operadores lineares limitados sobre X se

(i) $T(0) = I$ (I é a identidade sobre X);

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$.

Um semigrupo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ é uniformemente contínuo se

$$\lim_{t\downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0.$$

O operador linear A definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \text{ e}$$

$$Ax = \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0} \quad \text{para } x \in D(A).$$

é chamado de gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$. O espaço $D(A)$ é o domínio de A.

Observe que o conjunto definido acima é não vazio, pois $0 \in X$. Além disso, usando a linearidade de $T(t)$ e do limite, é fácil verificar que $D(A)$ é subespaço vetorial de X.

Um semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$, de operadores lineares limitados sobre X é dito um C_0 semigupo se

$$\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x \text{ para todo } x \in X.$$

A seguir, apresentaremos alguns resultados sobre semigrupos que podem ser encontradas em Pazy [4], pags. 1-4.

a) Seja $T(t)$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados. Então,

   (i) Existe uma constante $\omega \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$;

   (ii) Existe um único operador linear limitado A tal que $T(t) = e^{tA}$;

   (iii) O operador linear dado em (ii) é o gerador infinitesimal de $T(t)$;

   (iv) A aplicação $t \mapsto T(t)$ é diferenciável em norma e

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

b) Seja $T(t)$ um C_0 semigrupo. Então, existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \text{ para } 0 \leq t < \infty.$$

   Se $\|T(t)\| \leq M,\ t \geq 0$, dizemos que $T(t)$ é um C_0 semigrupo uniformemente limitado. Em particular, quando $M = 1$, dizemos que $T(t)$ é um C_0 semigrupo de contrações, ou semigrupo de contrações.

c) Se $T(t)$ é um C_0 semigrupo, então para todo $x \in X$ a aplicação $t \mapsto T(t)x$, é uma função contínua de $\mathbb{R}_0^+$ em X.

d) Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $T(t)$, então $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.

e) Sejam $T(t)$ e $S(t)$ C_0 semigrupos de operadores lineares limitados com geradores infinitesimais A e B, respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$, para $t \geq 0$.

Um operador linear ilimitado em X é um par (D, A), onde D é um subespaço linear de X e A é a aplicação linear $D \to X$. Se $\sup\{\|Ax\|; x \in D, \|x\| \leq 1\} < \infty$, dizemos que A é limitado, caso contrário, ou seja, $\sup\{\|Ax\|; x \in D, \|x\| \leq 1\} = \infty$, dizemos que A é não limitado.

Se A é um operador linear, não necessariamente limitado em X, o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A é o conjunto de todos os números complexos λ para o qual $I + \lambda A$ é invertível, com $(I + \lambda A)^{-1}$ limitado em X. A família $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ de operadores lineares limitados é chamada de resolvente de A.

O seguinte resultado relaciona os conceitos de gerador e semigrupo de contrações.

Teorema 2.1 (Hille -Yosida)**.** *Um operador linear ilimitado $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$, se, e somente se,*

(i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.

(ii) O conjunto resolvente de A, $\rho(A)$, contém $\mathbb{R}^+$ e para cada $\lambda > 0$

$$\|J_\lambda\| \leq 1. \tag{2.1}$$

Para uma demonstração, veja Pazy [4], pag. 8.

2.2 Operadores m-acretivos

Seja X um espaço de Banach. Um operador A ilimitado em X com domínio $D(A)$ é acretivo se

$$\|x + \lambda Ax\| \geq \|x\|,$$

para todo $x \in D(A)$ e todo $\lambda > 0$. Mais ainda, dizemos que A é m-acretivo se valem as seguintes propriedades:

(i) A é acretivo e

(ii) para todo $\lambda > 0$ e todo $f \in X$, existe $x \in D(A)$ tal que $x + \lambda Ax = f$.

A seguir, tratamos separadamente os casos em que X é um espaço de Banach e de Hilbert.

2.2.1 Operadores m-acretivos em espaços de Banach

Nesta seção, assumiremos que X um espaço de Banach.

Lema 2.2. *Se A é um operador m-acretivo em X, então para todo $\lambda > 0$ e todo $f \in X$, existe uma única solução $x \in D(A)$ da equação*

$$x + \lambda Ax = f \tag{2.2}$$

e mais,

$$\|x\| \leq \|f\|. \tag{2.3}$$

Observação 2.3. *Do resultado anterior, vemos que para $\lambda > 0$ a aplicação $J_\lambda : X \to D(A)$ dada por $J_\lambda f = x$ é bem definida, injetiva, $J_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, com $\|J_\lambda\| \leq 1$.*

Demonstração. Se x_1 e x_2 são duas soluções da equação (2.2), então $x_1 + \lambda Ax_1 = x_2 + \lambda Ax_2$. Logo $x_1 - x_2 = -\lambda A(x_1 - x_2)$. E como A é acretivo, tem-se que $0 = \|x_1 - x_2 + \lambda A(x_1 - x_2)\| \geq \|x_1 - x_2\|$. □

Proposição 2.4. *Se A é um operador m-acretivo em X, então o gráfico $G(A)$ de A é fechado em $X \times X$.*

Demonstração. Como o operador J_1 é contínuo, seu gráfico é fechado e, como $Im(J_1) = D(A)$, o conjunto $\{(x, f) \in X \times X; x \in D(A)$ e $f = x + Ax\}$ é fechado em $X \times X$. Portanto, o conjunto $\{(x, f) \in X \times X; x \in D(A)$ e $f = Ax\}$ é fechado em $X \times X$, e isto mostra o resultado. □

Proposição 2.5. *Se A é um operador acretivo em X, então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) A é m-acretivo.

(ii) existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $f \in X$, existe uma solução $x \in D(A)$ da equação $x + \lambda_0 Ax = f$.

Demonstração. Claramente $(i) \Rightarrow (ii)$. Vamos mostrar que $(ii) \Rightarrow (i)$. Como A é acretivo, segue da propriedade (ii) que dado $f \in X$, existe um único $x \in D(A)$ tal que $x + \lambda_0 Ax = f$. E ainda, da desigualdade (2.3), temos $\|x\| \leq \|f\|$. Portanto, a aplicação $f \mapsto x$ é contínua de $X \to X$, e sua norma é menor ou igual a 1. Vamos denotar este operador por J. Considere $\lambda > 0$ e $f \in X$. Note que a equação

$$x + \lambda Ax = f,$$

é equivalente a

$$x + \lambda_0 Ax = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) x.$$

Esta última equação é equivalente a

$$x = F(x),$$

onde

$$F(x) = J\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) x\right).$$

Note que F é Lipschitz contínua (ou seja Lip(F) $:= \sup_{x,y \in X}\left(\frac{|F(x)-F(y)|}{|x-y|}\right) < \infty$ para todo $x \neq y$) de $X \to X$ com constante de Lipschitz $L \leq \left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right|$. Portanto, se $\lambda > \lambda_0/2$, então $L < 1$; e portanto, segue do teorema do ponto fixo de Banach que existe $x \in X$ tal que $x = F(x)$. Portanto, para todo $\lambda > \lambda_0/2$ e todo $f \in X$, existe $x \in D(A)$ tal que $x + \lambda Ax = f$. Repetindo este argumento n vezes, temos que, para todo $\lambda > \lambda_0/2^n$ e todo $f \in X$, existe $x \in D(A)$ tal que $x + \lambda Ax = f$. Desde que n é arbitrário, temos o resultado. $\square$

Corolário 2.6. *Sejam A e B dois operadores em X. Se $Im(I + A) = X$, B é acretivo e $G(A) \subset G(B)$, então $A = B$ e A é m-acretivo.*

Demonstração. Sejam $(x, f) \in G(B)$ e $g = f + x$. Como $Im(I + A) = X$, existe $y \in D(A)$ tal que $y + Ay = g$. Como $G(A) \subset G(B)$, segue que $y \in D(B)$ e $y + By = g$. Em particular, $x - y + B(x - y) = 0$. Portanto, $y = x$, já que B é acretivo. E segue que $(x, f) \in G(A)$. Portanto, $A = B$. Finalmente, A é acretivo e $Im(I + A) = X$; e portanto, A é m-acretivo pela Proposição 2.5. $\square$

2.2.2 Operadores m-acretivos em espaços de Hilbert.

Nesta seção, assumiremos que X é um espaço de Hilbert com o produto interno $(\cdot, \cdot)$. Temos a seguinte caracterização para operadores acretivos.

Lema 2.7. *Se A é um operador linear em X, então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) A é acretivo

(ii) $(Ax, x) \geq 0$, para todo $x \in D(A)$.

Demonstração. Assuma que A é acretivo e seja $x \in D(A)$. Para todo $\lambda > 0$ temos

$$(Ax, x) + \frac{\lambda}{2}\|Ax\|^2 = \frac{\|x + \lambda Ax\|^2 - \|x\|^2}{2\lambda} \geq 0$$

e a propriedade (ii) segue fazendo $\lambda \downarrow 0$. Reciprocamente, assuma que (ii) é verdade. Se $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$ temos

$$\|x + \lambda Ax\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda(Ax, x) + \lambda^2\|Ax\|^2 \geq \|x\|^2;$$

e portanto, A é acretivo. □

Dado um operador A em X com domínio denso, seu adjunto A^* será definido a seguir. Considere

$$D(A^*) = \{x \in X; |(Ay, x)| \leq C\|y\|; \forall y \in D(A) \text{ e algum } C > 0\}.$$

Dado $x \in D(A)$ a aplicação linear

$$\begin{cases} D(A) \to \mathbb{R} \\ y \mapsto (Ay, x) \end{cases}$$

pode ser estendida por uma aplicação linear contínua $X \mapsto \mathbb{R}$. Isto define um elemento de $X^\star = X$, que nós denotamos por A^*x. Uma propriedade bem conhecida é que se $B \in \mathcal{L}(X)$ então $(A + B)^* = A^* + B^*$. Em particular, $(I + A)^* = I + A^*$. Finalmente relembramos que $(Im(A))^\perp = Ker(A^*) = \{x \in D(A^*); A^*x = 0)\}$.

Proposição 2.8. *Se A é um operador m-acretivo em X, então*

(i) A^* é m-acretivo em X;

(ii) $(I + \lambda A^*)^{-1} = ((I + \lambda A)^{-1})^*$, para todo $\lambda > 0$;

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que A^* é acretivo. Seja $x \in D(A^*)$ e $\lambda > 0$. Aplicando a Proposição 2.11 temos

$$(A^*x, J_\lambda x) = (x, AJ_\lambda x) = (x, A_\lambda x) = \frac{1}{\lambda}(\|x\|^2 - (x, J_\lambda x)) \geq 0, \tag{2.4}$$

e

$$\lambda\|Ax\| \geq \|\lambda J_\lambda Ax\| \geq \|x - J_\lambda x\|.$$

Daí $J_\lambda x \to x$ quando $\lambda \to 0$. Fazendo $\lambda \downarrow 0$ em (2.4) segue do Lema 2.7 que A^* é acretivo. Considere agora $\lambda > 0$ e seja $L_\lambda = ((I + \lambda A)^{-1})^* \in \mathcal{L}(X)$. Seja $z \in X$ e $x = L_\lambda z$. Para todo $(y, g) \in G(A)$, temos

$$\begin{aligned} (x, g) &= \frac{1}{\lambda}((x, y + \lambda g) - (x, y)) = \frac{1}{\lambda}((L_\lambda z, (I + \lambda A)y) - (x, y)), \\ &= \frac{1}{\lambda}((z, (I + \lambda A)^{-1}(I + \lambda A)y) - (x, y)) = \frac{1}{\lambda}(z - x, y). \end{aligned}$$

e segue que $\left(x, \frac{z-x}{\lambda}\right) \in G(A^*)$. Portanto, $x \in D(A^*)$ e $x + \lambda A^* x = z$. $\square$

Proposição 2.9. *Seja A um operador acretivo e fechado em X, com domínio denso. Se $Ker(I + A^*) = \{0\}$, então A é m-acretivo. Em particular, se A^* é acretivo, então A é m-acretivo.*

Demonstração. Temos que

$$(Im(I + A))^\perp = Ker((I + A)^*) = Ker(I + A^*) = \{0\};$$

e portanto, $Im(I + A)$ é denso em X. Agora mostraremos que $Im(I + A)$ é fechado. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Im(I + A)$ tal que $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ em X. Temos $f_n = x_n + Ax_n$ onde $x_n \in D(A)$. Como A é acretivo, temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em X. Seja x seu limite. Note que $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüencia de Cauchy em X. Como $G(A)$ é fechado, temos que $x \in D(A)$ e que $f = (I + A)x$; e portanto, $Im(I + A)$ é fechado. Assim, $Im(I + A) = X$, e segue da Proposição 2.5 que A é m-acretivo. $\square$

Dizemos que um operador A em X é simétrico se $G(A) \subset G(A^*)$. Um operador A em X com domínio denso é chamado de auto-adjunto se $A = A^*$.

Corolário 2.10. *Se A é um operador m-acretivo em X, então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) A é auto-adjunto,

(ii) $(Ax, y) = (x, Ay)$, para todo $x \in D(A)$.

Demonstração. Assuma que A é auto-adjunto. Então, $G(A) = G(A^*)$, e portanto, a propriedade (ii) segue. Reciprocamente, assuma que A verifica (ii). Isto significa que

$G(A) \subset G(A^*)$. Seja $(x, f) \in G(A^*)$, e seja $g = x + A^*x = x + f$. Como A é m-acretivo, existe $y \in D(A)$ tal que $g = y + Ay$. Como $G(A) \subset G(A^*)$, segue que $y \in D(A^*)$ e que $g = y + A^*y$; e portanto, $x = y$, já que A^* é m-acretivo. Portanto $G(A^*) \subset G(A)$; logo $A = A^*$. □

2.3 Operadores m-acretivos e semigrupos

Seja A um operador m-acretivo em X. Para todo $x \in X$ e $\lambda > 0$, definimos $A_\lambda x \in X$ por $A_\lambda x = AJ_\lambda x$. O operador A_λ á chamado de aproximação de Yosida de A.

Proposição 2.11. *Se A é um operador m-acretivo em X, então valem as seguintes propriedades:*

(i) $A_\lambda x = \frac{x - J_\lambda x}{\lambda}$, *para todo* $x \in X$;

(ii) $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ *e* $\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{2}{\lambda}$, *para todo* $\lambda > 0$;

(iii) $A_\lambda x = J_\lambda Ax$, *para todo* $x \in D(A)$.

Demonstração. Seja $x \in X$ e $z = J_\lambda x$. Como $z + \lambda Az = x$, temos que $\lambda A_\lambda x = \lambda Az = x - z$. Isto demonstra (i). Como $\|J_\lambda\| < 1$, (ii) segue imediatamente. Finalmente, se $x \in D(A)$ e $z = J_\lambda x$, então

$$z + \lambda Az = x.$$

Como x e z pertencem a $D(A)$, segue que $Az \in D(A)$ e que

$$Az + \lambda A(Az) = Ax.$$

Defina $w = J_\lambda Ax$. Como

$$w + \lambda Aw = Ax,$$

pelo Lema 2.2 temos que $w = Az$. □

Proposição 2.12. *Seja A um operador m-acretivo em X com domínio denso. Existe um semigrupo $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que*

(i) $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$, *para todo* $t \geq 0$;

(ii) $e^{-tA_\lambda}x \to T(t)x$, *quando* $\lambda \downarrow 0$, *uniformemente em subconjuntos limitados de* $[0, \infty)$.

Além disso, para todo $x \in D(A)$ e todo $t \geq 0$, temos as seguintes propriedades:

(iii) $\|T(t)x - x\| \leq t\|Ax\|$, *para todo* $t > 0$,

(iv) a aplicação $t \mapsto T(t)x$ *pertence a* $C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), X)$,

(v) $AT(t)x = T(t)Ax$, *para todo* $t \geq 0$.

Mais ainda, temos que $u(t) = T(t)x$ *é a única solução do problema*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \;\; \textit{para todo } t \geq 0, \\ u(0) = x \end{cases} \tag{2.5}$$

no espaço $C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), X)$.

Para a demonstração, veja a Proposição 1.3.4 de [3].

2.4 O operador Laplaciano

Nesta seção, estudamos o operador Laplaciano em X com a condição de Dirichlet na fronteira. Consideramos os casos em que $X = H^{-1}(\Omega),\; X = L^2(\Omega)$ e $X = L^p(\Omega)$.

2.4.1 Teoria H^{-1}

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$, $X = H^{-1}(\Omega)$, e A o operador em X dado por

$$\begin{cases} D(A) = H_0^1(\Omega), \\ Au = -\Delta u, \;\; \text{para todo } u \in D(A), \end{cases} \tag{2.6}$$

onde $H_0^1(\Omega)$ está munido com a norma $(\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2)^{1/2}$.

Proposição 2.13. *O operador A definido por (2.6) é auto-adjunto, m-acretivo e com domínio denso. Mais ainda, $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações* $(T(t))_{t\geq 0}$.

Demonstração. Segue do Lema 1.4 que para todo $f \in X$, existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$-\Delta u + u = f, \;\; \text{em } X$$

Denote por J o operador $f \mapsto u$. Segue da Observação 1.5 que J é uma isometria de X em $H_0^1(\Omega)$. Em particular,

$$(u,v)_{H^{-1}} = (Ju, Jv)_{H_0^1}. \tag{2.7}$$

Seja $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Segue de (1.10) e (1.7) que

$$\begin{aligned} (u, Jv)_{H_0^1} &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (Jv) dx + (u, Jv)_{L^2} \\ &= \langle -\Delta(Jv), u\rangle_{H^{-1},H_0^1} + \langle (Jv), u\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \langle v, u\rangle_{H^{-1},H_0^1} = (u,v)_{L^2}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ademais, segue de (2.7) que

$$\begin{aligned} (-\Delta u, v)_{H^{-1}} &= (-\Delta u + u, v)_{H^{-1}} - (u,v)_{H^{-1}} = (J(-\Delta u + u), Jv)_{H_0^1} - (u,v)_{H^{-1}} \\ &= (-\Delta(Ju) + Ju, Jv)_{H_0^1} - (u,v)_{H^{-1}} = (u, Jv)_{H_0^1} - (u,v)_{H^{-1}}. \end{aligned}$$

Aplicando (2.8), segue que

$$(-\Delta u, v)_{H^{-1}} = (u,v)_{L^2} - (u,v)_{H^{-1}}. \tag{2.9}$$

Em particular, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$(Au, u)_{H^{-1}} = \|u\|_{L^2}^2 - \|u\|_{H^{-1}}^2 \geq 0,$$

por (1.9); e portanto, A é acretivo, pelo Lema 2.7. Dado $f \in X$, segue da Observação 2.3 que $u = Jf \in D(A)$ satisfaz $u + Au = f$ e pela Proposição 2.5 concluímos que A é m-acretivo.

Por outro lado, de (2.9) temos

$$(Au, v)_{H^{-1}} = (u, Av)_{H^{-1}},$$

para todo $u, v \in D(A)$. Aplicando o Corolário 2.10, temos que A é auto-adjunto.

Como A é m-acretivo, pela Observação 2.3, Proposição 2.4 e pelo Teorema 2.1 (Hille-Yosida), temos que $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações $(T(t))_{t\geq 0}$, muitas vezes denotado por $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$. □

O seguinte resultado cuja demonstração pode ser encontrado H. Brézis e T. Cazenave [3], pag. 25. será usado na definição da teoria L^p.

Proposição 2.14. *Sejam A definido por (2.6) e $1 \leq p < \infty$. Para todo $u \in H^{-1}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ temos as seguintes propriedades:*

(i) $J_\lambda u \in L^p(\Omega)$ e $\|J_\lambda u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p}$, para todo $\lambda > 0$;

(ii) $J_\lambda u \xrightarrow{\lambda \downarrow 0} u$ em $L^p(\Omega)$.

2.4.2 Teoria L^2

Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$, $X = L^2(\Omega)$ e B o operador em X definido por

$$\begin{cases} D(B) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}, \\ Bu = -\Delta u, \text{ para todo } u \in D(B). \end{cases} \tag{2.10}$$

Temos o seguinte resultado.

Proposição 2.15. *O operador B definido por (2.10) é auto-adjunto e m-acretivo com domínio denso. Mais ainda, $-B$ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações $(S(t))_{t\geq 0}$.*

Demonstração. Sejam $u, v \in D(B)$. Segue das fórmulas (1.7) e (1.10) que

$$(Bu, v)_{L^2} = -(\Delta u, v)_{L^2} = -\langle \Delta u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v. \tag{2.11}$$

Em particular, $(Bu, u)_{L^2} \geq 0$, para todo $u \in D(B)$; e portanto, B é acretivo, pelo Lema 2.7. Dado $f \in L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, segue da Proposição 2.13 que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u - \Delta u = f, \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Em particular, temos $\Delta u = u - f \in L^2(\Omega)$; e portanto, $u \in D(B)$ e $u + Bu = f$. Portanto, B é m-acretivo (Proposição 2.5). Ainda temos de (2.11) que

$$(Bu, v)_{L^2} = (u, Bv)_{L^2},$$

para todo $u, v \in D(B)$. Aplicando o Corolário 2.10, temos que B é auto-adjunto. E pelo Teorema de Hille-Yosida, temos que $-B$ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações $(S(t))_{t\geq 0}$. $\square$

Proposição 2.16. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ e $(S(t))_{t\geq 0}$ os C_0 semigrupos de contrações gerados pelos operadores dados em (2.6) e (2.10) respectivamente, então $T(t)\varphi = S(t)\varphi$ para todo $t \geq 0$ e todo $\varphi \in L^2(\Omega)$.*

Demonstração. Como $G(B) \subset G(A)$ como subconjuntos de $H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, o resultado segue da Proposição 2.12 quando $\varphi \in D(B)$. Como ambos $S(t)$ e $T(t)$ são contínuos $L^2 \to H^{-1}(\Omega)$, o resultado segue pela densidade de $D(B)$ em $L^2(\Omega)$. $\square$

2.4.3 Teoria L^p

Seja Ω um subconjunto aberto qualquer do $\mathbb{R}^N$.

Lema 2.17. *Seja $1 \leq p < \infty$. Então existe um único operador $I_\lambda \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$ tal que $I_\lambda f = J_\lambda f$ para todo $f \in H^{-1}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ com as seguintes propriedades:*

(i) $\|I_\lambda\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq 1$, para todo $\lambda > 0$,

(ii) para todo $f \in L^p(\Omega)$ e todo $\lambda > 0$ temos que $\Delta I_\lambda f \in L^p(\Omega)$ e $-\lambda \Delta I_\lambda f + I_\lambda f = f$,

(iii) $Im(I_\lambda) = Im(I_\mu)$, para todo $\lambda, \mu > 0$.

Demonstração. Como $H^{-1}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, segue da Proposição 2.14 que J_λ tem uma única extensão $I_\lambda \in L^p(\Omega)$, que verifica (i). Para demonstração de (ii), seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ em $L^p(\Omega)$. Assim temos que $I_\lambda f_n \xrightarrow{n\to\infty} I_\lambda f$ em $L^p(\Omega)$, e como $-\lambda \Delta I_\lambda f_n + I_\lambda f_n = f_n$ em $H^{-1}(\Omega)$, temos que $-\lambda \Delta I_\lambda f + I_\lambda f = f$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Finalmente, seja $f \in H^{-1}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, e seja $u = I_\lambda f \in H^{-1}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Dado $\mu > 0$, temos

$$-\mu \Delta u + u = \frac{\lambda - \mu}{\lambda} u + \frac{\mu}{\lambda} f.$$

Defina $g = \frac{\lambda-\mu}{\lambda} u + \frac{\mu}{\lambda} f$ e seja $v = I_\mu g \in H^{-1}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Então

$$-\mu \Delta (v - u) + v - u = 0, \text{ em } H^{-1}(\Omega);$$

e portanto, $u = v$. Logo, $I_\lambda(H^{-1}(\Omega) \cap L^p(\Omega)) \subset I_\mu(H^{-1}(\Omega) \cap L^p(\Omega))$. Trocando μ por λ temos $I_\lambda(H^{-1}(\Omega) \cap L^p(\Omega)) = I_\mu(H^{-1}(\Omega) \cap L^p(\Omega))$. Como I_λ e I_μ são contínuas em $L^p(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, (iii) segue. □

Proposição 2.18. *Seja $1 \leq p < \infty$. O operador A em $L^p(\Omega)$ definido por*

$$\begin{cases} D(A) = Im(I_1); \\ Au = -\Delta u, \ \text{para } u \in D(A); \end{cases} \tag{2.12}$$

é m-acretivo com domínio denso. Mais ainda, $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações $(S(t))_{t\geq 0}$.

Observação 2.19. *Note que para $u \in D(A)$, temos pelo Lema 2.17 que $\Delta u \in L^p(\Omega)$; portanto, (2.12) faz sentido.*

Demonstração. Sejam $u \in D(A)$, $\lambda > 0$ e $f = \lambda Au + u = -\lambda\Delta u + u$. Segue do Lema 2.17 (iii) que existe $g \in L^p(\Omega)$ tal que $u = I_\lambda g$. Em particular, $g = -\lambda\Delta u + u$; e portanto, $f = g$. Aplicando novamente o Lema 2.17, temos que $\|u\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$. Portanto, A é acretivo. Agora considere $f \in L^p(\Omega)$, e seja $u = I_1 f$. Assim temos que $u \in D(A)$ e que $Au + u = f$; e portanto, A é m-acretivo. Finalmente, seja $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, e seja $f = -\Delta u + u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Então temos que $u = I_1 f$. Portanto, $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(A)$, e segue que $D(A)$ é denso em $L^p(\Omega)$. □

Quando Ω possui fronteira regular temos uma melhor caracterização do conjunto $D(A)$. Especificamente, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.20. *Sejam $1 < p < \infty$ e A definido por (2.12). Se Ω possui fronteira limitada de classe C^2, então $D(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ com equivalência entre as normas.*

Para a demonstração, veja a Proposição 1.2.29 de [3].

Como na Proposição 2.16 temos que os semigrupos construídos coincidem.

Proposição 2.21. *Sejam $1 \leq p < \infty$, $(S(t))_{t\geq 0}, (T(t))_{t\geq 0}$ os semigrupos gerados pelo operadores (2.12) e (2.10) respectivamente. Então, $S(t)\varphi = T(t)\varphi$ para todo $\varphi \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ e cada $t \geq 0$.*

Para a demonstração deste resultado, veja a demonstração da Proposição 1.4.19 de [3].

2.5 Teoria C_0

Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto tal que $\partial\Omega$ possui a propriedade do cone exterior. É possível mostrar que o operador

$$\begin{cases} D(A) &= \{u \in C_0(\mathbb{R}); \Delta u \in C_0(\mathbb{R})\} \\ Au &= -\Delta u \end{cases}$$

é o gerador infinitesimal de um semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$ com domínio denso, veja a Proposição 1.2.32 de [3]. Mais ainda, se $(T(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo gerado pelo operador (2.12) então $S(t)\varphi = T(t)\varphi$ para todo $\varphi \in L^2(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ e todo $t \geq 0$, veja a Proposição 1.4.23 de [3].

2.6 Semigrupo analítico

Sejam $\Delta = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \varphi_1 < \arg z < \varphi_2,\ \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ e para $z \in \Delta$, $T(z)$ um operador linear limitado. A família $\{T(z),\ z \in \Delta\}$ é um semigrupo analítico em Δ se

(i) $z \to T(z)$ é analítico em Δ,

(ii) $T(0) = I$ e $\lim_{z\to 0} T(z)x = x$, $z \in \Delta$ para todo $x \in X$ e

(iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ para $z_1, z_2 \in \Delta$.

Um semigrupo $T(t)$ será chamado analítico se ele for analítico em algum setor Δ contendo o eixo real não negativo.

Claramente, a restrição de um semigrupo analítico ao eixo real é um C_0 semigrupo.

Proposição 2.22. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ o semigrupo do calor e $1 < p < \infty$. Então $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo analítico em $L^p(\Omega)$. Mais ainda, se Ω possui a fronteira limitada e de classe C^2, então temos que*

$$\|T(t)\varphi\|_{W^{2,p}} \leq C\left(1 + \frac{1}{t}\right)\|\varphi\|_{L^p}\ e \tag{2.13}$$

$$\|T(t)\varphi\|_{W^{1,p}} \leq C\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\|\varphi\|_{L^p}, \tag{2.14}$$

para todo $t > 0$ e todo $\varphi \in L^p(\Omega)$.

Para uma demonstração veja H. Bézis e T. Cazenave [3], pag. 60.

Teorema 2.23. *Assuma que $|\Omega| < \infty$. Sejam $\lambda_1 > 0$ definido por*

$$\lambda_1 = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2,\ u \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega |u|^2 = 1\right\}. \tag{2.15}$$

e $(T(t))_{t\geq 0}$ o semigrupo do calor. Então, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq e^{-\lambda_1 t}$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e seja $u(t) = T(t)\varphi$. Segue que

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 = 2\langle u_t(t), u(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1} = 2\langle \Delta u(t), u(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1} = -2\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2;$$

e portanto $\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq -2\lambda_1\|u(t)\|_{L^2}^2$. Integrando, obtemos $\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq e^{-2\lambda_1 t}\|\varphi\|_{L^2}^2$ e o resultado segue por densidade. $\square$

Corolário 2.24. *Assuma que* $|\Omega| < \infty$. *Sejam* $\lambda_1 > 0$ *definida por (2.15) e* $(T(t))_{t\geq 0}$ *o semigrupo do calor. Para todo* $1 \leq p \leq \infty$, *existe uma constante* C_p *tal que* $\|T(t)\varphi\|_{L^p} \leq C_p e^{-\lambda_1 t}\|\varphi\|_{L^p}$, *para todo* $t \geq 0$ *e todo* $\varphi \in L^p(\Omega)$.

Demonstração. Primeiro suponha que $p < \infty$. Por densidade, precisamos apenas de mostrar que o resultado vale para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Considere $t_0 > 0$. Para $t < t_0$, segue de

$$\|T(t)\varphi\|_{L^p} \leq \|\varphi\|_{L^p} = e^{\lambda_1 t_0} e^{-\lambda_1 t_0}\|\varphi\|_{L^p} \leq e^{\lambda_1 t_0} e^{-\lambda_1 t}\|\varphi\|_{L^p}.$$

Agora, se $p > 2$, segue do Lema 4.5 e do Teorema 2.23 que

$$\begin{aligned}
\|T(t)\varphi\|_{L^p} &\leq (4\pi t_0)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\|T(t-t_0)\varphi\|_{L^2} \\
&\leq (4\pi t_0)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} e^{\lambda_1 t_0} e^{-\lambda_1 t}\|\varphi\|_{L^2} \\
&\leq \left((4\pi t_0)^{-N/2}|\Omega|\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} e^{\lambda_1 t_0} e^{-\lambda_1 t}\|\varphi\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Se $p < 2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|T(t)\varphi\|_{L^p} &\leq |\Omega|^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\|T(t)\varphi\|_{L^2} \\
&\leq |\Omega|^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} e^{\lambda_1 t_0} e^{-\lambda_1 t}\|T(t_0)\varphi\|_{L^2} \\
&\leq \left((4\pi t_0)^{-N/2}|\Omega|\right)^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} e^{\lambda_1 t_0} e^{-\lambda_1 t}\|\varphi\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Para $p = \infty$, aplique o resultado para p finito e então faça $p \uparrow \infty$. □

Capítulo 3

A equação do calor

3.1 A equação do calor linear

Nesta seção, Ω será um subconjunto aberto qualquer do $\mathbb{R}^N$. A seguir apresentamos resultados sobre a existência e unicidade de solução da equação $u_t - \Delta u = 0$ e sobre a regularidade da solução da equação $u_t - \Delta u = f$. Para uma demonstração destes fatos, veja Bezis e Cazenave [3].

Teorema 3.1. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ o semigrupo do calor. Dado $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$, defina $u(t) = T(t)\varphi$ para $t \geq 0$. Então, valem as seguintes propriedades:*

(i) $u \in C([0,\infty), H^{-1}(\Omega)) \cap C((0,\infty), H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0,\infty), H^{-1}(\Omega))$, *e u é a única solução do problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{para todo } t > 0 \\ u(0) = \varphi; \end{cases} \tag{3.1}$$

nesta classe. Ainda mais, $\Delta^n u \in C^\infty((0,\infty), H_0^1(\Omega))$ para todo inteiro não negativo n;

(ii) $u \in C^\infty((0,\infty) \times \Omega)$;

(iii) Se $\varphi \in L^2(\Omega)$, então $u \in C([0,\infty), L^2(\Omega))$. Se $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, então $u \in C([0,\infty), H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty), H^{-1}(\Omega))$. Ainda mais, se $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$, então $\Delta u \in C([0,\infty), L^2(\Omega))$ e $u \in C^1([0,\infty), L^2(\Omega))$.

Teorema 3.2. *Sejam $T > 0$, $1 < p, q < \infty$, $f \in L^q((0,T), L^p(\Omega))$ e u é definida por*

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Então $u \in W^{1,q}((0,T), L^p(\Omega))$, $\Delta u \in L^q((0,T), L^p(\Omega))$ *e existe uma constante* C *tal que*

$$\|u_t\|_{L^q((0,T),L^p)} + \|\Delta u\|_{L^q((0,T),L^p)} \leq C\|f\|_{L^q((0,T),L^p)}.$$

Observação 3.3. *Este tipo de regularidade é conhecido como regularidade maximal, já que todos os membros da equação* $u_t - \Delta u = f$ *possuem a mesma regularidade.*

3.2 A equação do calor não linear com dados iniciais em L^∞

Considere a equação

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= g(u), \quad x \in \Omega,\ t \in [0,T], \\ u(t,x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \in [0,T], \\ u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Assumindo que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitziana, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.4. *Dado* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, *existe uma única função* u *definida em um intervalo maximal* $[0, T_m)$ *tal que* $u \in L^\infty((0,T) \times \Omega)$ *para todo* $T < T_m$ *e é solução da equação integral*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)g(u(s))ds, \tag{3.3}$$

para todo $t \in [0, T_m)$. *Além disso, ou* $T_m = +\infty$, *ou* $T_m < \infty$ *e* $\lim_{t\uparrow T_m} \|u(t)\|_{L^\infty} = +\infty$.

Mais ainda, u *depende continuamente de* u_0, *ou seja, para todo* $T < T_m$ *existe* $\varepsilon > 0$ *e* $C < \infty$ *tal que, se* $\|v_0 - u_0\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$, *então* $\|v - u\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \leq C\|v_0 - u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$, *onde* v *é a solução de (3.3) com o valor inicial* v_0.

Demonstração. Unicidade. Suponha que u_1 e u_2 sejam duas soluções de (3.3) em $[0, T]$ e

$$A = \max\left\{\|u_1\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}, \|u_2\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\right\}.$$

Então,

$$u_1(t) - u_2(t) = \int_0^t T(t-s)(g(u_1(s)) - g(u_2(s)))ds.$$

Daí,

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^\infty} \leq \int_0^t \|g(u_1(s)) - g(u_2(s))\|_{L^\infty} ds \leq K \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^\infty} ds,$$

para todo $t \in [0, T]$, com K sendo a constante de Lipschitz de g em $[-A, A]$. Usando a desigualdade de Gronwall concluímos que $u(t) = v(t)$ para $t \in [0, T]$.

Existência. Analizamos primeiro o caso em que g é globalmente Lipschitz com constante Lipschitz $L > 0$. Usaremos o argumento do ponto fixo. Seja

$$E = \left\{ u \in L^\infty([0, \infty), L^\infty(\Omega));\ \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \|u(t)\|_{L^\infty} < \infty \right\},$$

onde k será escolhido mais adiante. Dessa forma E munido com a norma

$$\|u\|_E = \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \|u(t)\|_{L^\infty},$$

é um espaço de Banach. Dado $u \in E$, defina

$$\Phi(u)(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s) g(u(s)) ds,$$

para todo $t \geq 0$. Primeiro afirmamos que $\Phi(u) \in E$.

$$\|\Phi(u)(t)\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty} + \int_0^t \|g(u(s))\|_{L^\infty} ds.$$

Mas $\|g(u(s))\|_{L^\infty} \leq L\|u(s)\|_{L^\infty} + |g(0)|$, e portanto

$$\begin{aligned} \|\Phi(u(t))\|_{L^\infty} &\leq \|u_0\|_{L^\infty} + t|g(0)| + L\|u\|_E \int_0^t e^{ks} ds, \\ &= \|u_0\|_{L^\infty} + t|g(0)| + L\frac{e^{kt} - 1}{k} \|u\|_E. \end{aligned}$$

Logo, $\Phi(u) \in E$ e

$$\|\Phi(u)\|_E \leq \|u_0\|_{L^\infty} + \frac{1}{ek}|g(0)| + \frac{L}{k}\|u\|_E.$$

Afirmamos que Φ é uma contração em E, se $k > L$. De fato

$$\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{L^\infty} \leq L \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_{L^\infty} \leq L\|u - v\|_E \int_0^t e^{ks} ds = L\frac{e^{kt} - 1}{k}\|u - v\|_E.$$

Portanto

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_E \leq \frac{L}{k}\|u - v\|_E.$$

Escolhendo qualquer $k > L$, concluimos que Φ tem um ponto fixo $u \in E$, que é a solução da equação (3.3).

Analiamos agora o caso em que g é localmente Lipschitz. Seja $M = \|u_0\|_{L^\infty} + 1$ e defina $\widetilde{g}$ por

$$\widetilde{g}(u) = \begin{cases} g(M) & \text{se } u > M, \\ g(u) & \text{se } |u| \leq M, \\ g(-M) & \text{se } u < -M, \end{cases}$$

portanto $\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é globalmente Lipschitziana. Assim temos a seguinte solução global da equação integral

$$\widetilde{u}(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)\widetilde{g}(\widetilde{u}(s))ds, \tag{3.4}$$

com $\widetilde{u} \in L^\infty([0,\infty), L^\infty(\Omega))$. Daí,

$$\|\widetilde{u}(t)\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty} + \int_0^t \|\widetilde{g}(\widetilde{u}(s))\|_{L^\infty} ds \leq \|u_0\|_{L^\infty} + K_M t,$$

onde $K_M = \|g\|_{L^\infty(-M,M)}$. Escolha T suficientemente pequeno, de tal maneira que $K_M T \leq 1$. Então $\|\widetilde{u}(t)\|_{L^\infty} \leq M$ para todo $t \in [0,T]$ e portanto $\widetilde{u}$ satisfaz (3.4) em $[0,T]$. A unicidade implica na existência de uma solução definida em um intervalo maximal $[0,T_m)$.

Para mostrar que ou $T_m = +\infty$, ou $T_m < \infty$ e $\lim_{t \uparrow T_m} \|u(t)\|_{L^\infty} = +\infty$, suponha que $T_m < \infty$, e assuma que existe uma seqüência $t_j \uparrow T_m$ tal que $\|u(t_j)\|_{L^\infty} \leq A < \infty$. Fixe $\delta > 0$ tal que $\delta K_{A+1} \leq 1$. Começando com o valor inicial $u(t_j)$, temos uma solução v_j de (3.3) definida em $[0,\delta]$. Colando u com v_j, obtemos uma solução de (3.3) definida em $[0, t_j + \delta]$. Para j suficientemente grande, temos que $t_j + \delta > T_m$, mas isto é impossível desde que u é a solução maximal.

Finalmente mostraremos a dependência contínua. Dado $T < T_m$, defina $M_T = \|u\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} + 1$. Sejam $\widetilde{g}$ como acima, mas com $M = M_T$, L_T a constante de Lipschitz de $\widetilde{g}$, $\widetilde{u}$ a solução de (3.4) e, dado $v_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\widetilde{v}$ a solução correspondente de (3.4). Segue que

$$\|\widetilde{u}(t) - \widetilde{v}(t)\|_{L^\infty} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^\infty} + L_T \int_0^t \|\widetilde{u}(s) - \widetilde{v}(s)\|_{L^\infty} ds;$$

e portanto, pela desigualdade de Gronwall,

$$\|\widetilde{u} - \widetilde{v}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \leq e^{TL_T} \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em particular, se $\|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon$, com $\varepsilon = e^{-TL_T}$, temos que $\|\widetilde{u} - \widetilde{v}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \leq M_T$, portanto $\widetilde{v}$ é a solução de (3.3) em $[0,T]$ com o valor inicial v_0. E a dependência contínua segue facilmente. $\square$

Observação 3.5. *Assuma que* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, *e que* $u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *para algum* $p \in (1,\infty)$. *Então, pelo Teorema 3.2, a solução da equação (3.2) pertence a* $C([0,T_m), W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C^1([0,T_m), L^p(\Omega))$.

3.3 Princípio de Comparação

Uma função v na classe

$$L^\infty((0,T)\times\Omega)\cap C([0,T],L^2(\Omega))\cap L^2_{loc}((0,T),H^1(\Omega))\cap H^1_{loc}((0,T),H^{-1}(\Omega)),$$

é dita super-solução de (3.2), se

$$\begin{cases} v_t-\Delta v & \geq & g(v), & x\in\Omega,\ t\in[0,T], \\ v(t,x) & \geq & 0, & x\in\partial\Omega,\ t\in[0,T], \\ v(0,x) & \geq & u_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

Sub-soluções são definidas de forma análoga, com a desigualdade invertida.

Teorema 3.6 (Princípio de Comparação)**.** *Sejam $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ localmente Lipschitz e $u_0\in L^\infty(\Omega)$. Suponha que u,v sejam, respectivamente, uma super-solução e uma sub-solução de (3.2) em algum intervalo $[0,T]$. Então $u(t)\geq v(t)$ para todo $t\in[0,T]$.*

Demonstração. Multiplicando a diferença das desigualdades satisfeitas por u e v por $(v-u)^+$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (v-u)^{+2}+\int_\Omega|\nabla(v-u)^+|^2 &\leq \int_{v>u}(g(v)-g(u))(v-u)^+ \\ &\leq L_M\int_{v>u}(v-u)^{+2}, \end{aligned}$$

onde $M=\max\{\|u\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)},\|v\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}\}$ e L_M é a constante de Lipschitz sobre $[-M,M]$. Daí,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(v-u)^{+2}\leq L_M\int_\Omega(v-u)^{+2}.$$

Assim, temos $\int_\Omega(v-u)^{+2}\leq 0$ e portanto $(v-u)^+=0$, logo $v(t)\leq u(t)$. □

Capítulo 4

A equação do calor não linear com dados iniciais não regulares

4.1 O problema não linear

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, suave e $p > 1$. Consideramos o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= |u|^{p-1}u \quad \text{em } (0,T) \times \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) &= u_0(x) \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $u_0 \in L^q(\Omega);\ 1 \leq q < \infty$

O seguinte resultado trata sobre a existência e unicidade para o problema dado.

Teorema 4.1. *Assuma $q > N(p-1)/2$ (resp. $q = N(p-1)/2$) e $q \geq 1$ (resp. $q > 1$), $N \geq 1$. Dado qualquer $u_0 \in L^q(\Omega)$, existe um tempo $T = T(u_0) > 0$ e uma única função $u \in C([0,T], L^q(\Omega))$ com $u(0) = u_0$, na qual é uma solução clássica de (4.1) em $(0,T) \times \overline{\Omega}$.*

Mais ainda:

(i) Se v é solução de (4.1) definida em $[0, T(v_0)]$ com $v(0) = v_0$, então

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^q} + t^{N/2q}\|u(t) - v(t)\|_{L^\infty} \leq C\|u_0 - v_0\|_{L^q} \tag{4.2}$$

para todo $t \in (0,T]$, onde $T = \min\{T(u_0), T(v_0)\}$ e C pode ser estimado em termos de $\|u_0\|_{L^q}$ e $\|v_0\|_{L^q}$.

(ii) $\lim\limits_{t\downarrow 0} t^{N/2q}\|u(t)\|_{L^\infty} = 0$.

(iii) Se $u_0 \geq 0$*, então* $u(t) \geq 0$ *para todo* $t \in [0, T(u_0)]$.

Além disso, para qualquer conjunto limitado (resp. conjunto compacto) $\mathcal{K} \in L^q(\Omega)$*, existe um tempo (uniforme)* $T = T(\mathcal{K})$ *tal que para qualquer* $u_0 \in \mathcal{K}$ *a solução de (4.1) existe em* $[0, T]$.

Quando $q \geq p$, faz sentido falar sobre soluções $u \in C([0,T], L^q(\Omega))$ no sentido integral, ou seja,

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)|u(s)|^{p-1}u(s)ds, \tag{4.3}$$

para todo $t \in [0,T]$ e $(T(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo do calor.

O seguinte resultado mostra que a equação (4.3) é única na classe $C([0,T], L^q(\Omega))$. Especificamente,

Teorema 4.2. *Assuma* $q > N(p-1)/2$ *(resp.* $q = N(p-1)/2$*) e* $q \geq p$ *(resp.* $q > p$*),* $N \geq 1$*. Então a unicidade para (4.3) vale na classe* $C([0,T], L^q(\Omega))$.

Observação 4.3. *A solução u de (4.1) dada no Teorema 4.1 também satisfaz (4.3); quando q satisfaz as hipóteses do Teorema 4.1. Isto não é completamente óbvio desde que a integral no lado direito de (4.3) pode não estar bem definida. Para estabelecer a convergência desta integral, usamos o efeito regularizante do semigrupo do calor. Como* $u(s) \in L^\infty(\Omega)$ $(s > 0)$*, temos que*

$$u(t) = T(t-s)u(s) + \int_s^t T(t-\sigma)|u(\sigma)|^{p-1}u(\sigma)d\sigma, \tag{4.4}$$

para todo $0 < s < t < T$*. Tentamos fazer* $s \downarrow 0$ *em (4.4). Para justificar esta passagem é suficiente checar que*

$$\int_0^t \|T(t-\sigma)|u(\sigma)|^{p-1}u(\sigma)\|_{L^q} d\sigma < \infty.$$

A única dificuldade é quando σ *está perto de* 0*. Mas*

$$\|T(t-\sigma)|u(\sigma)|^{p-1}u(\sigma)\|_{L^q} \leq (t-\sigma)^{-\frac{N}{2}(\frac{q-1}{q})}\|u(\sigma)\|_{L^p}^p.$$

(Veja e.g. Lema 4.5 (Efeito regularizante).) Podemos assumir que $p > q$ *já que o caso* $q \geq p$ *foi tratado e portanto,*

$$\|u(\sigma)\|_{L^p}^p \leq \|u(\sigma)\|_{L^q}^q \|u(\sigma)\|_{L^\infty}^{p-q} \leq C\sigma^{-\frac{N(p-q)}{2q}}$$

Assim temos que

$$\int_0^t \|T(t-\sigma)|u(\sigma)|^{p-1}u(\sigma)\|_{L^q} d\sigma \leq CT^{1-N(p-1)/2q}\int_0^1 (1-s)^{-N(q-1)/2q}s^{-N(p-q)/2q}ds,$$

e como $\frac{N(q-1)}{2q} < \frac{N(p-q)}{2q} = 1 - \frac{1}{q}\left(q - \frac{N(p-1)}{2}\right) - \frac{N}{2q}(q-1) < 1$, *temos o resultado.*

O resultado seguinte é de Fred B. Weissler [2] e garante a não existência local de solução.

Corolário 4.4. *Se* $u_0 \geq 0$ *e* $q < N(p-1)/2$ *então não existe* $u \in C([0,T], l^q(\Omega))$, *com* $u(t) \geq 0$, *satisfazendo a equação integral (4.3) , em qualquer intervalo não trivial* $[0,T]$.

A demonstração deste Corolário será feita na Seção 4.5.

4.2 Demonstração do Teorema 4.2

Vamos precisar dos seguintes lemas.

Lema 4.5 (Efeito regularizante)**.** *Sejam* $(T(t))_{t\geq 0}$ *o semigrupo do calor e* $1 \leq \beta \leq \gamma \leq \infty$. *Então*

$$\|T(t)\varphi\|_{L^\gamma(\Omega)} \leq t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)}\|\varphi\|_{L^\beta(\Omega)}, \tag{4.5}$$

para todo $t > 0$ *e todo* $\varphi \in L^\beta(\Omega)$.

Lema 4.6. *Sejam* u, v *duas soluções de (4.3),* $q = N(p-1)/2$, $q > p$ *e*

$$a(t,x) = \begin{cases} \dfrac{|u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v}{u-v} & se\ u \neq v, \\ p|u|^{p-1} & se\ u = v, \end{cases} \tag{4.6}$$

então $a(t,x) \in C([0,T], L^{N/2}(\Omega))$.

Demonstração. Como $|a| \leq p(|u|^{p-1} + |v|^{p-1})$, temos que $a \in L^\infty((0,T),\ L^{N/2}(\Omega))$. Agora vamos mostrar o resultado por contradição. Caso $a(t,x) \notin C([0,T], L^{N/2}(\Omega))$, existiria $\varepsilon > 0$, $t \in [0,T]$ e uma seqüência $(t_n)_{n\geq 0} \in [0,T]$ tal que $t_n \to t$ e $\|a(t_n,\cdot) - a(t,\cdot)\|_{L^{N/2}} \geq \varepsilon$. Já que, podemos extrair uma subseqüência que converge para $u(t)$, assumiremos que $u(t_n) \to u(t)$ e $v(t_n) \to v(t)$ em $L^q(\Omega)$ em quase todo ponto, e que existe $\varphi \in L^q(\Omega)$ tal que $|u(t_n)| + |v(t_n)| \leq \varphi$ em quase todo ponto. Segue facilmente que $a(t_n) \to a(t)$ em quase todo ponto e que $|a(t_n)| \leq C|\varphi|^{p-1} \in L^{N/2}(\Omega)$. Pelo Teorema da convergência dominada, deduzimos que $a(t_n) \to a(t) \in L^{N/2}(\Omega)$, o que é um absurdo. $\square$

Lema 4.7. *Assuma $N > 3$. Seja $T > 0$ e $a \in C([0,T], L^{N/2}(\Omega))$. Se $u \in L^\infty((0,T), L^q(\Omega))$ com $q > N/(N-2)$ satisfaz*

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)a(s)u(s)ds, \tag{4.7}$$

para todo $t \in [0,T]$, então $u(t) \equiv 0$.

Demonstração. Como $au \in L^\infty((0,T), L^{r_0}(\Omega))$ com $1/r_0 = 1/q + 2/N$, pela regularidade máximal, temos que $u \in L^p((0,T), W^{2,r_0}(\Omega) \cap W_0^{1,r_0}(\Omega))$ para todo $p < \infty$, e u satisfaz

$$u_t - \Delta u = au, \tag{4.8}$$

em $L^{r_0}(\Omega)$ para quase todo $t \in (0,T)$. Agora fixe $t_0 \in (0,T)$, e $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Seja $a_n = \min\{n, \max\{a, -n\}\}$. Temos que $(a_n)_{n\geq 0} \subset C([0,T], L^{N/2}(\Omega)) \cap L^\infty((0,T)\times\Omega)$. Ainda mais $a_n \to a$ em $C((0,T), L^{N/2}(\Omega))$ quando $n \to \infty$. Seja v_n uma solução de

$$\begin{cases} -(v_n)_t - \Delta v_n &=& a_n v_n, & \text{em } (0,t_0)\times\Omega, \\ v_n &=& 0 & \text{em } (0,t_0)\times\partial\Omega, \\ v_n(t_0) &=& \psi & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Multiplicando a equação (4.8) por v_n e integrando em $(0,t_0)\times\Omega$. Obtemos

$$\begin{aligned} \left[\int_\Omega u v_n\right]_0^{t_0} = \int_0^{t_0}\int_\Omega (u(v_n)_t + u_t v_n) &= \int_0^{t_0}\int_\Omega (u(-\Delta v_n - a_n v_n) + v_n(\Delta u + au)) \\ &= \int_0^{t_0}\int_\Omega (a - a_n) u v_n. \end{aligned}$$

Então,

$$\int_\Omega u(t_0)\psi = \int_0^{t_0}\int_\Omega (a-a_n)uv_n.$$

Portanto

$$\left|\int_\Omega u(t_0)\psi\right| \leq t_0 \|a - a_n\|_{C([0,t_0],L^{N/2})} \|u\|_{L^\infty((0,t_0),L^q)} \|v_n\|_{L^\infty((0,t_0),L^\theta)}, \tag{4.9}$$

com $\frac{1}{\theta} = 1 - \frac{1}{q} - \frac{2}{N} > 0$. Em particular, temos que $\theta < \infty$. Afirmamos que para todo $2 \leq r < \infty$ existe uma constante C (C dependendo de r) tal que

$$\sup_{n\geq 0} \|v_n\|_{L^\infty((0,t_0),L^r)} \leq C\|\psi\|_{L^r}. \tag{4.10}$$

Assumindo a afirmação, e fazendo $n \to \infty$ em (4.9) obtemos

$$\int_\Omega u(t_0)\psi = 0.$$

Desde que $t_0 \in (0,T)$ e $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ são arbitrários, deduzimos que $u \equiv 0$. $\square$

Demonstração da afirmação (4.10). É interessante definir $w_n(t) = v_n(t_0 - t)$ assim w_n satisfaz

$$\begin{cases} (w_n)_t - \Delta w_n &= b_n w_n \quad \text{em } (0, t_0) \times \Omega, \\ w_n &= 0 \quad \text{em } (0, t_0) \times \partial\Omega, \\ w_n(0) &= \psi \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{4.11}$$

com $b_n(s) = a_n(t_0 - s)$. Multiplicando a equação (4.11) por $|w_n|^{r-2}w_n$ obtemos

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\int_\Omega |w_n(t)|^r + \frac{4(r-1)}{r^2}\int_\Omega |\nabla |w_n|^{r/2}|^2 \leq \int_\Omega |b_n||w_n|^r \leq \int_\Omega |b||w_n|^r, \tag{4.12}$$

onde $b(t) = a(t_0 - t)$ para $0 \leq t \leq t_0$. Dado $j \leq 0$ podendo ser escolhido suficientemente grande, escrevemos $b = b - b_j + b_j$, e estimamos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |b||w_n|^r &\leq \int_\Omega |b - b_j||w_n|^r + \int_\Omega |b_j||w_n|^r \\ &\leq \|b - b_j\|_{L^{N/2}} \|w_n\|^r_{L^{Nr/(N-2)}} + j\|w_n\|^r_{L^r} \\ &\leq C\|b - b_j\|_{L^{N/2}} \int_\Omega |\nabla \|w_n|^{r/2}|^2 + j\|w_n\|^r_{L^r}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

onde a última desigualdade segue da desiguldade de Sobolev. Agora escolhemos j suficientemente grande (independente de n) tal que

$$C\|b - b_j\|_{L^{N/2}} \leq \frac{4(r-1)}{r^2}.$$

(Lembre-se que $b_j \to b$ quando $j \to \infty$ em $C([0, t_0], L^{N/2}(\Omega))$.)Agora, segue de (4.12) e (4.13) que

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\int_\Omega |w_n(t)|^r \leq j\|w_n\|^r_{L^r}.$$

□

Demonstração do Teorema 4.2. Consideramos dois casos.

Caso 1: $q > N(p-1)/2$ e $q \geq p$, Seja u e v duas soluções de (4.3) com $u, v \in C([0, T], L^q(\Omega))$. Temos que

$$u(t) - v(t) = \int_0^t T(t-s)(|u(s)|^{p-1}u(s) - |v(s)|^{p-1}v(s))ds. \tag{4.14}$$

Portanto, pelo efeito regularizante de $T(t) : L^{q/p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{L^q} &\leq C\int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|(|u|^{p-1} + |v|^{p-1})|u - v|\|_{L^{q/p}} ds \\ &\leq C\int_0^t (t-s)^{-\alpha} (\|u\|^{p-1}_{L^q} + \|v\|^{p-1}_{L^q})\|u - v\|_{L^q} ds, \end{aligned}$$

onde $\alpha = N(p-1)/2q < 1$ desde que estamos no caso A. Seja

$$M = \sup_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_{L^q} + \|v(t)\|_{L^q} \quad \text{e} \quad \psi(t) = \sup_{0 \le s \le t} \|u(s) - v(s)\|_{L^q},$$

para $t \in [0, T]$. Deduzimos que

$$\psi(t) \le C M^{p-1} \frac{T_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} \psi(t).$$

Portanto, para T_0 suficientemente pequeno, $\psi(t) = 0$ para $t \in [0, T_0]$. Repetindo o mesmo argumento, vemos que $\psi(t) = 0$ para $t \in [0, T]$.

Caso 2: $q = N(p-1)/2$ e $q > p$, logo $N > 3$. Sejam u, v duas soluções, $w = u - v$ e $a(t, x)$ dado por (4.6), logo

$$w(t) = \int_0^t T(t-s) a(s) w(s) ds,$$

e pelo Lema 4.6 temos

$$a \in C([0, T], L^{N/2}(\Omega)). \tag{4.15}$$

Assim, aplicando o Lema 4.7, temos que $w \equiv 0$. □

4.3 Demonstração do Teorema 4.1

4.3.1 Existência de solução no caso $q > N(p-1)/2$ e $q \ge 1$

Usaremos o princípio de contração em um espaço especial (esta idéia foi feita por F.B. Weissler [8]). Fixe $M \ge \|u_0\|_{L^q}$ e defina

$$E = L^\infty((0, T), L^q(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}((0, T), L^{pq}(\Omega)),$$

$$K = K(T) = \left\{ u \in E; \|u(t)\|_{L^q} \le M + 1 \text{ e } t^\alpha \|u(t)\|_{L^{pq}} \le M + 1 \text{ para } t \in (0, T) \right\},$$

com $\alpha = N(p-1)/2pq < 1/p < 1$. Considere K munido com a seguinte distância

$$d(u, v) = \sup_{0 \le t \le T} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^{pq}},$$

portanto (K, d) é um espaço métrico completo e não vazio. Dado $u \in K$, defina

$$\Phi(u)(t) = T(t) u_0 + \int_0^t T(t-s) |u(s)|^{p-1} u(s) ds.$$

Para $u \in K$, nós temos

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)\|_{L^q} &\leq \|u_0\|_{L^q} + \int_0^t \|u(s)\|_{L^{pq}}^p ds \\
&\leq \|u_0\|_{L^q} + \left(\sup_{0\leq t\leq T} t^\alpha \|u(t)\|_{L^{pq}}\right)^p \int_0^t s^{-p\alpha} ds \qquad (4.16)\\
&\leq \|u_0\|_{L^q} + \frac{T^{1-p\alpha}}{1-p\alpha}(M+1)^p.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
t^\alpha \|\Phi(u)(t)\|_{L^{pq}} &\leq \|u_0\|_{L^q} + t^\alpha \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|u(s)\|_{L^{pq}}^p ds \\
&\leq \|u_0\|_{L^q} + t^\alpha (M+1)^p \int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^{-p\alpha} ds \\
&\leq \|u_0\|_{L^q} + T^{1-p\alpha}(M+1)^p \int_0^1 (1-\sigma)^{-\alpha}\sigma^{-p\alpha} d\sigma.
\end{aligned}$$

Similarmente, podemos mostrar que para $u, v \in K$,

$$t^\alpha \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{L^{pq}} \leq CT^{1-p\alpha}(M+1)^{p-1} d(u,v). \qquad (4.17)$$

Segue das estimativas acima que, se T é pequeno o suficiente (dependendo de M), $\Phi : K \to K$ é uma contração estrita. Portanto, Φ possui um único ponto fixo em K.

Mostraremos agora que $u \in C([0,T], L^q(\Omega))$ Desde que $u \in K$ e $p\alpha < 1$, temos que $|u|^{p-1}u \in L^1((0,T), L^q(\Omega))$. Isto implica que $u \in C([0,T], L^q(\Omega))$. (Lembre-se que, no caso geral, se $f \in L^1((0,T), X)$ e $u(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds$, então $u \in C([0,T], X)$.)

Note que a escolha de T depende apenas de M, o que mostra a última afirmação do Teorema 4.1

Para mostrar (iii) basta considerar

$$K(T) = \{u \in E; \|u(t)\|_{L^q} \leq M+1,\ t^\alpha \|u(t)\|_{L^{pq}} \leq M+1 \text{ para } t \in (0,T) \text{ e } u(t) \geq 0\}.$$

□

4.3.2 Existência de solução no caso $q = N(p-1)/2$ e $q > 1$

Vamos precisar do lema seguinte.

Lema 4.8. *Dado um conjunto compacto $\mathcal{K} \subset L^q(\Omega)$, $q < r \leq \infty$ e $\alpha = \frac{N}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)$, então*

$$\lim_{t\downarrow 0} t^\alpha \|T(t)u_0\|_{L^r} = 0 \quad \textit{uniformemente sobre } \mathcal{K},$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $t^\alpha \|T(t)u_0\|_{L^r} < \varepsilon$ para todo $u_0 \in \mathcal{K}$ se $0 < t < \delta$.

Demonstração. Se $\mathcal{K} = \{u_0\}$, o resultado é claro. De fato, se $v_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned} t^\alpha \|T(t)u_0\|_{L^r} &\leq t^\alpha \|T(t)(u_0 - v_0)\|_{L^r} + t^\alpha \|T(t)v_0\|_{L^r} \\ &\leq \|u_0 - v_0\|_{L^q} + Ct^\alpha \|v_0\|_{L^\infty}; \end{aligned}$$

e portanto,

$$\limsup_{t \downarrow 0} t^\alpha \|T(t)u_0\|_{L^r} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^q}.$$

E o resultado segue da densidade de $C_0^\infty(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$.

No caso geral, dado qualquer $\rho > 0$, existe uma cobertura finita de $\mathcal{K}$ por bolas $B(u_i, \rho)$ em $L^q(\Omega)$. Qualquer $u_0 \in \mathcal{K}$ pertence a alguma $B(u_i, \rho)$, e então nós escrevemos

$$\begin{aligned} t^\alpha \|T(t)u_0\|_{L^r} &\leq t^\alpha \|T(t)(u_0 - u_i)\|_{L^r} + t^\alpha \|T(t)u_i\|_{L^r} \\ &\leq \|u_0 - u_i\|_{L^q} + t^\alpha \|T(t)u_i\|_{L^r} \\ &\leq \rho + t^\alpha \|T(t)u_i\|_{L^r}. \end{aligned}$$

E a conclusão do lema segue da parte anterior. $\square$

Demonstração do Teorema 4.1. A estratégia é similar à usada na seção 4.3.1 com algumas modificações. Fixe qualquer $r \in (q, pq), r \geq p$ e defina

$$\widetilde{E} = L^\infty((0,T), L^q(\Omega)) \cap \left\{u \in L^\infty_{loc}((0,T), L^r(\Omega)); t^\alpha u \in L^\infty((0,T), L^r(\Omega))\right\},$$

$$E = L^\infty((0,T), L^q(\Omega)) \cap \left\{u \in L^\infty_{loc}((0,T), L^r(\Omega)); t^\alpha u \in C_0([0,T], L^r(\Omega))\right\},$$

com $\alpha = \frac{N}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) < \frac{1}{p} < 1$ (desde que $r < pq$). Aqui, C_0 significa que estamos considerando funções que se anulam em $t = 0$. Fixe $M \geq \|u_0\|_{L^q}$. Dado $\delta > 0$ para ser escolhido depois, seja

$$\widetilde{K} = \widetilde{K}(T) = \left\{u \in \widetilde{E}; \|u(t)\|_{L^q} \leq M + 1 \text{ e } t^\alpha \|u(t)\|_{L^r} \leq \delta \text{ para } t \in (0,T)\right\}$$

e

$$K = K(T) = \widetilde{K} \cap E.$$

Considere $\widetilde{K}$ munido com a distância

$$d(u,v) = \sup_{0<t<T} t^\alpha \|u(t) - v(t)\|_{L^r},$$

assim $(\widetilde{K}, d)$ e (K, d) são espaços métricos completos e não vazios. Considere a mesma aplicação Φ como na Seção 4.3.1. Seja $a = \frac{N}{2}\left(\frac{p}{r} - \frac{1}{q}\right)$. Para $u \in \widetilde{K}$, temos pelo efeito regularizante $L^{r/p} \to L^q$ (note que $r < pq$, portanto $r/p < q$)

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)(t)\|_{L^q} &\leq \|u_0\|_{L^q} + \int_0^t (t-s)^{-a}\|u(s)\|_{L^r}^p ds \\ &\leq \|u_0\|_{L^q} + \left(\sup_{0<t<T} t^\alpha \|u(t)\|_{L^r}\right)^p \int_0^t (t-s)^{-a} s^{-p\alpha} ds \\ &\leq \|u_0\|_{L^q} + C_1\delta^p, \end{aligned} \tag{4.18}$$

desde que $a + p\alpha = 1$. Aqui, a constante C_1 (e as constantes C_2, C_3 abaixo) depende apenas de p, q, r, N. Portanto,

$$\|\Phi(u)(t)\|_{L^q} \leq M + 1,$$

dado que

$$C_1\delta^p \leq 1. \tag{4.19}$$

Agora, usando o efeito regularizante $L^{r/p} \to L^r$, temos que

$$\begin{aligned} t^\alpha\|\Phi(u)(t)\|_{L^r} &\leq \sup_{0<t<T} t^\alpha \|T(t)u_0\|_{L^r} + t^\alpha \int_0^t (t-s)^{-N(p-1)/2r}\|u(s)\|_{L^r}^p ds \\ &\leq \sup_{0<t<T} t^\alpha \|T(t)u_0\|_{L^r} \\ &\quad + \left(\sup_{0<t<T} t^\alpha \|u(t)\|_{L^r}\right)^p t^\alpha \int_0^t (t-s)^{-N(p-1)/2r} s^{-p\alpha} ds \\ &\leq \sup_{0<t<T} t^\alpha \|T(t)u_0\|_{L^r} + C_2\delta^p, \end{aligned}$$

desde que $p\alpha + N(p-1)/2r = \alpha + 1$. Portanto,

$$\sup_{0<t<T} t^\alpha\|\Phi(u)(t)\|_{L^r} \leq \sup_{0<t<T} t^\alpha\|T(t)u_0\|_{L^r} + \delta/2, \tag{4.20}$$

dado que

$$C_2\delta^{p-1} \leq \frac{1}{2}. \tag{4.21}$$

Similarmente, podemos mostrar que para $u, v \in \widetilde{K}$,

$$\sup_{0<t<T} t^\alpha\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{L^r} \leq C_3\delta^{p-1} d(u,v) \leq \frac{1}{2} d(u,v), \tag{4.22}$$

dado que

$$C_3\delta^{p-1} \leq \frac{1}{2}, \tag{4.23}$$

para alguma constante C_3. Segue das estimativas acima que $\Phi : \widetilde{K} \to \widetilde{E}$.

Fixe $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que (4.19), (4.21) e (4.23) são satisfeitos. A escolha de δ depende apenas de N, p, q, r.

Agora, fixaremos $T > 0$ tal que

$$\sup_{0<t<T} t^{\alpha} \|T(t)u_0\|_{L^r} \leq \delta/2. \tag{4.24}$$

Tendo em vista o Lema 4.8, a escolha de T depende apenas do conjunto compacto $\mathcal{K} \subset L^q(\Omega)$. Isto mostra a última afirmação do Teorema 4.1.

Por (4.22), (4.20) e (4.24), $\Phi : \widetilde{K} \to \widetilde{K}$ é uma contração estrita, e portanto tem apenas um ponto fixo em $\widetilde{K}$.

Agora, afirmamos que este ponto fixo pertence a K. Para mostrar isto, é suficiente verificar que $\Phi : K \to K$. Precisamos mostrar que $\Phi(u) \in C((0,T], L^r(\Omega))$ e que $\lim_{t\downarrow 0} t^{\alpha}\Phi(u)(t) = 0$ em $L^r(\Omega)$. Como, pelo Lema 4.8, $T(t)u_0$ satisfaz as condições acima, podemos assumir que $u_0 = 0$. Está claro que $\Phi(u) \in K$ quando $u \in C([0,T], L^{\infty}(\Omega))$. Desde que $K \cap C([0,T], L^{\infty}(\Omega))$ é denso em K munido com a métrica d, o resultado segue de (4.22).

Finalmente, mostraremos que $u \in C([0,T], L^q(\Omega))$. De fato $u \in K$, logo, em particular temos que $u \in C((0,T], L^r(\Omega)) \subset C((0,T], L^q(\Omega))$. Portanto, só nos resta mostrar que $u(t) - T(t)u_0 \to 0$ em $L^q(\Omega)$ quando $t \downarrow 0$. Como em (4.18), temos que

$$\|u(t) - T(t)u_0\|_{L^q} \leq C_1 \sup_{0<s<t} (s^{\alpha}\|u(s)\|_{L^r})^p \to 0, \text{ quando } t \downarrow 0,$$

desde que $u \in E$.

Para mostrar (iii) basta fazer como no caso anterior. Considere

$$\widetilde{K}(T) = \left\{ u \in \widetilde{E}; \|u(t)\|_{L^q} \leq M+1, \ t^{\alpha}\|u(t)\|_{L^r} \leq \delta \text{ para } t \in (0,T) \text{ e } u(t) \geq 0 \right\}.$$

□

4.3.3 Unicidade

Para cada $u_0 \in L^q(\Omega)$, denotamos por $U(t)u_0$ a solução obtida nas seções 4.3.1 ou 4.3.2 e definidas em algum intervalo $[0, T(u_0)]$.

Precisaremos do seguinte resultado.

Lema 4.9. *Sejam $u_0 \in L^{\infty}(\Omega)$ e $\widetilde{u}$ a solução clássica de (4.1) definida no intervalo maximal $[0, T_{max}(u_0))$. Então $T(u_0) < T_{max}(u_0)$ e $\widetilde{u}(t) = U(t)u_0$ para todo $t \in [0, T(u_0)]$.*

Demonstração. É claro que $\widetilde{u} \in K(\tau)$ para algum $0 < \tau < T(u_0)$ suficientemente pequeno. Pela unicidade em $K(\tau)$ temos $\widetilde{u}(t) = U(t)u_0,$ para $0 \leq t \leq \tau$. Após um tempo τ, $\widetilde{u}(t)$ e $U(t)u_0$ são soluções clássicas e, portanto, coincidem. □

Agora retornaremos à demonstração da unicidade. Aqui, usaremos a mesma idéia que [10]. Primeiro vamos demonstrar o caso crítico $q = N(p-1)/2$ e $q > 1$; o outro caso é mais simples. Seja $v \in C([0,T], L^q(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega))$ uma solução de (4.1) com $v(0) = u_0$. Lembre-se que v é uma solução clássica de (4.1) em $(0,T) \times \overline{\Omega}$. Vamos mostrar que $v(t) = U(t)u_0$ em algum intervalo $[0, T')$. Então, $v(t) = U(t)u_0$ desde que ambos existam, pela unicidade em $L^\infty(\Omega)$.
Defina

$$\mathcal{K} = v([0,T]),$$

e

$$M = \sup_{0<t<T} \|v(t)\|_{L^q}.$$

Como $\mathcal{K}$ é um conjunto compacto em $L^q(\Omega)$, existe um $T_1 > 0$ uniforme, tal que $U(t)v_0$ está bem definido para todo $v_0 \in \mathcal{K}$ e para todo $t \in [0, T_1]$. Mais ainda, como $U(t)v(s) \in K(T_1)$ (considerado como uma função de t), temos que

$$\|U(t)v(s)\|_{L^q} \leq M + 1, \tag{4.25}$$

$$t^\alpha \|U(t)v(s)\|_{L^r} \leq \delta, \tag{4.26}$$

para todo $s \in (0,T)$ e todo $t \in (0, T_1)$.
Fixando qualquer $0 < s < T$. Segue do Lema 4.9 que

$$v(t+s) = U(t)v(s) \quad \text{para } 0 \leq t \leq \min\{T-s, T_1\}. \tag{4.27}$$

Combinando (4.25), (4.26) e (4.27) obtemos

$$\|v(t+s)\|_{L^q} \leq M + 1,$$

$$t^\alpha \|v(t+s)\|_{L^r} \leq \delta, \tag{4.28}$$

para $t + s < T$ e $t < T_1$. Calculando o limite $s \downarrow 0$, deduzimos que

$$\|v(t)\|_{L^q} \leq M + 1,$$

$$t^\alpha \|v(t)\|_{L^r} \leq \delta, \tag{4.29}$$

para $0 < t < \min\{T, T_1\}$. Portanto, $v(t) \in \widetilde{K}(T')$ onde $T' = \min\{T, T_1\}$. Argumentando como na Observação 4.3, temos que

$$v(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)|v(s)|^{p-1}v(s)ds, \tag{4.30}$$

i.e. $v = \Phi(v)$. Por (4.22), deduzimos que $v(t) = U(t)u_0$ em $[0, T']$.

Para mostrar o caso não crítico, basta trocar $\|\cdot\|_{L^r}$ por $\|\cdot\|_{L^{pq}}$ em (4.26), (4.28) e em (4.29), logo $v(t) \in K(T')$. Analogamente v satisfaz a equação (4.30) e, por (4.17), deduzimos que $v(t) = U(t)u_0$ em $[0, T']$. □

4.3.4 Regularidade e dependência contínua

Mostraremos a regularidade da solução, obtida nas seções 4.3.1 e 4.3.2, ou seja, que $u \in L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\Omega))$. Para isso, precisaremos do seguinte resultado técnico.

Lema 4.10. *Sejam $p, q \geq 1$, $r_1 > r_0$ tais que $\frac{N}{2q}\left(\frac{p}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right) = \delta \in (0,1)$, e defina a seqüência $(r_k)_{k\geq 0}$, indutivamente pela relação $\frac{N}{2q}\left(\frac{p}{r_k} - \frac{1}{r_{k+1}}\right) = \delta$. Então, a seqüência é estritamente crescente e $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$.*

Demonstração. Temos por hipótese que $\frac{p}{r_0} - \frac{1}{r_1} = \frac{p}{r_1} - \frac{1}{r_2}$, logo $p\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$, ou seja $r_2 > r_1$. Suponha o resultado válido para $n > 2$, ou seja $r_n > r_{n-1} > \ldots > r_0$, assim temos que $p\left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n}\right) = \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n+1}}$, logo $r_{n+1} > r_n$, e portanto temos que a seqüência é estritamente crescente. Agora vamos mostrar que não é limitada. Suponha que $r_k \to r$ para algum $r \in \mathbb{R}$, então $\frac{N}{2q}\left(\frac{p-1}{r}\right) = \delta$, logo $\frac{p}{r_0} - \frac{1}{r_1} = \frac{p-1}{r}$ e como $r_1 > r_0$ temos que $\frac{p-1}{r_1} < \frac{p}{r_0} - \frac{1}{r_1} = \frac{p-1}{r}$ e portanto $r < r_1$ o que é uma contradição. □

Seja $r_0 = p$(resp. $r_0 = r/p$, onde $r \in (q, pq), r > p$). Pelo argumento do ponto fixo, temos que $t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{qr_0}\right)}\|u(t)\|_{L^{qr_0}} \leq C$ para $t \in [0,1]$. Usando as propriedades do semigrupo do calor $(T(t))_{t\geq 0}$, temos

$$u(t) = T(t/2)u(t/2) + \int_{\frac{t}{2}}^t T(t-s)|u(s)|^{p-1}u(s)ds.$$

Então,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^{qr_1}} &\leq (t/2)^{-\frac{N}{2q}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right)}\|u(t/2)\|_{L^{qr_0}} + \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{N}{2q}\left(1 - \frac{1}{r_1}\right)}\|u(s)\|^p_{L^{qr_0}}ds, \\ &\leq Ct^{-\frac{N}{2q}\left(1 - \frac{1}{r_1}\right)} + Ct^{1 - \frac{N}{2q}\left(p - \frac{1}{r_1}\right)}\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s)^{-\frac{N}{2q}\left(1 - \frac{1}{r_1}\right)}s^{-\frac{N(p-1)}{2q}}ds, \end{aligned} \tag{4.31}$$

logo

$$t^{\frac{N}{2q}\left(1-\frac{1}{r_1}\right)}\|u(t)\|_{L^{qr_1}} \leq C + Ct^{1-\frac{N(p-1)}{2q}} \leq \widetilde{C}.$$

Considere agora o resultado válido para k. Então

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^{qr_{k+1}}} &\leq (t/2)^{-\frac{N}{2q}\left(\frac{1}{r_k}-\frac{1}{r_{k+1}}\right)}\|u(t/2)\|_{L^{qr_k}} \\
&\quad + \int_{\frac{t}{2}}^{t}(t-s)^{-\frac{N}{2q}\left(\frac{p}{r_k}-\frac{1}{r_{k+1}}\right)}\|u(s)\|^p_{L^{qr_k}}ds \\
&\leq Ct^{-\frac{N}{2q}\left(1-\frac{1}{r_{k+1}}\right)} + \int_{\frac{t}{2}}^{t}(t-s)^{-\frac{N}{2q}\left(\frac{p}{r_k}-\frac{1}{r_{k+1}}\right)}s^{-\frac{Np}{2q}\left(1-\frac{1}{r_k}\right)}ds \\
&\leq Ct^{-\frac{N}{2q}\left(1-\frac{1}{r_{k+1}}\right)} + Ct^{1-\frac{N}{2q}\left(p-\frac{1}{r_{k+1}}\right)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$t^{\frac{N}{2q}\left(1-\frac{1}{r_{k+1}}\right)}\|u(t)\|_{L^{qr_{k+1}}} \leq C + Ct^{1-\frac{N(p-1)}{2q}} \leq \widetilde{C}.$$

Entretanto, pelo Lema 4.10 existe $k > 0$ tal que $\frac{Np}{2qr_n} < 1$. Assim, temos que

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq (t/2)^{-\frac{N}{2qr_k}}\|u(t/2)\|_{L^{qr_k}} + \int_{\frac{t}{2}}^{t}(t-s)^{-\frac{Np}{2qr_k}}\|u(s)\|^p_{L^{qr_k}}ds.$$

Portanto,

$$t^{\frac{N}{2q}}\|u(t)\|_{L^\infty} \leq C + Ct^{1-\frac{N(p-1)}{2q}} \leq \widetilde{C}. \tag{4.32}$$

□

Agora vamos tratar a dependência contínua. Para demonstrar (4.2), vamos nos concentrar no caso $q > N(p-1)/2$, já que o mesmo argumento pode ser aplicado no caso $q = N(p-1)/2$.

Sejam $u, v \in K$, pontos fixos de Φ com valor inicial u_0 e v_0 respectivamente, definidos para $t \in [0, T]$ com $T \leq \min\{T(u_0), T(v_0)\}$. Logo,

$$\|u\|^{p-1}_{L^{pq}} + \|v\|^{p-1}_{L^{pq}} \leq Cs^{-\alpha(p-1)}(M+1)^{p-1}.$$

Assim, temos

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^q} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^q} + C\int_0^t(\|u\|^{p-1}_{L^{pq}} + \|v\|^{p-1}_{L^{pq}})\|u - v\|_{L^{pq}}.$$

Portanto,

$$\sup_{0<t<T}\|u(t) - v(t)\|_{L^q} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^q} + C(M+1)^{p-1}\sup_{0<t<T}t^\alpha\|u(t) - v(t)\|_{L^{pq}}. \tag{4.33}$$

Aqui, usamos que $p\alpha < 1$. Ainda mais, usando o efeito regularizante $L^q(\Omega) \to L^{pq}(\Omega)$, temos

$$\|u(t)-v(t)\|_{L^{pq}} \leq t^{-\alpha}\|u_0-v_0\|_{L^q} + CA\int_0^t (t-s)^{-\alpha}s^{-\alpha(p-1)}\|u-v\|_{L^{pq}},$$

onde $A = \sup_{0<s<T} s^{\alpha(p-1)}(\|u(s)\|_{L^{pq}}^{p-1} + \|v(s)\|_{L^{pq}}^{p-1})$. Pelo Lema Singular de Gronwall 1.2, deduzimos que

$$\sup_{0<t<T} t^{\alpha}\|u(t)-v(t)\|_{L^{pq}} \leq C\|u_0-v_0\|_{L^q}. \tag{4.34}$$

Combinando (4.33) e (4.34) temos a estimativa L^q de (4.2).

Para mostrar a estimativa L^∞, usaremos o mesmo raciocínio que foi usado para mostrar (4.32). Temos

$$u(t)-v(t) = T(t/2)(u(t/2)-v(t/2)) + \int_{\frac{t}{2}}^t T(t-s)(|u|^{p-1}u(s) - |v|^{p-1}v(s))ds.$$

Procedendo como em (4.31), temos que

$$\begin{aligned}
\|u(t)-v(t)\|_{L^{qr_1}} &\leq (t/2)^{-\frac{N}{2q}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right)}(\|u(t/2)-v(t/2)\|_{L^{qr_0}}) + \\
&\quad \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{N}{2q}\left(1-\frac{1}{r_1}\right)}(\|u\|_{L^{qr_0}}^p + \|v\|_{L^{qr_0}}^p)ds \\
&\leq C\left(t^{-\frac{N}{2q}\left(1-\frac{1}{r_1}\right)} + t^{1-\frac{N}{2q}\left(p-\frac{1}{r_1}\right)}\right)\|u_0-v_0\|_{L^q}.
\end{aligned}$$

De maneira análoga, é possível concluír que

$$t^{\frac{N}{2q}\left(1-\frac{1}{r_{k+1}}\right)}\|u(t)-v(t)\|_{L^{qr_{k+1}}} \leq C\left(1+t^{1-\frac{N(p-1)}{2q}}\right)\|u_0-v_0\|_{L^q}.$$

E daí,

$$t^{\frac{N}{2q}}\|u(t)-v(t)\|_{L^\infty} \leq C\left(1+t^{1-\frac{N(p-1)}{2q}}\right)\|u_0-v_0\|_{L^q}. \tag{4.35}$$

Usando a desigualdade (4.35), vamos mostrar o item (ii) do Teorema 4.1. Sejam $u_0 \in L^q(\Omega)$, $v_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$, u e v soluções de (4.1) com valor inicial u_0 e v_0, respectivamente. Daí,

$$t^{N/2q}\|u(t)\|_{L^\infty} \leq C(T)\|u_0-v_0\|_{L^q} + t^{N/2q}\|v(t)\|_{L^\infty}.$$

Pela densidade de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$, fazendo $t \downarrow 0$, temos o resultado. $\square$

4.4 Explosão na norma L^q

Sejam $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ e u a solução correspondente de (4.1). Assuma que $T_{max} < \infty$, sabemos que $\lim_{t\uparrow T_{max}} \|u(t)\|_{L^\infty} = +\infty$. É natural perguntarmos quando

$$\lim_{t\uparrow T_{max}} \|u(t)\|_{L^q} = +\infty, \quad \text{para algum } q < \infty.$$

O seguinte resultado responde à nossa pergunta.

Corolário 4.11. *Sejam $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, u a solução correspondente de (4.1) e assuma que $T_{max} < \infty$. Então,*

$$\lim_{t\uparrow T_{max}} \|u(t)\|_{L^q} = +\infty, \tag{4.36}$$

para qualquer $q \geq 1, q > N(p-1)/2$. Se $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\Delta u_0 + |u_0|^{p-1}u_0 \geq 0$, q.t.p. em Ω e $\frac{N(p-1)}{2} > 1$, então

$$\lim_{t\uparrow T_{max}} \|u(t)\|_{L^{N(p-1)/2}} = +\infty.$$

Demonstração. Suponha por contradição que $\liminf_{t\uparrow T_{max}} \|u(t)\|_{L^q} < \infty$. Seja $(t_n)_{n\geq 0}$ uma seqüência tal que $t_n \uparrow T_{max}$ quando $n \to \infty$ e $\sup_{n\geq 0} \|u(t_n)\|_{L^q} < \infty$. Aplicando o Teorema 4.1 com $u(t_n)$ como condição inicial, obtemos um $T > 0$ uniforme. Portanto $T_{max} \geq t_n + T$. Isto é impossível quando $n \to \infty$, o que mostra (4.36).

Argumentando como acima, exceto pelo fato de estarmos no caso crítico, sabemos que $u(t_n)$ está contido em um subconjunto compacto de $L^{N(p-1)/2}(\Omega)$. Pelo Princípio de Comparação, $u_t(t,x) \geq 0$ em $(0, T_{max}) \times \Omega$. Portanto $(u(t_n))_{n\geq 0}$ é uma seqüência não crescente e tem limite em $L^{N(p-1)/2}(\Omega)$. □

4.5 Não existência local e explosão

Lema 4.12. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ o semigrupo do calor e $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geq 0$. Então,*

$$T(t)u_0^p \geq [T(t)u_0]^p.$$

Demonstração. Defina $u(t) = T(t)u_0^p$ e $v(t) = [T(t)u_0]^p$, então u satisfaz a equação do calor linear

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{para todo } t > 0, \\ u(0) = u_0^p. \end{cases} \tag{4.37}$$

Derivando v, temos

$$v_t = p[T(t)u_0]^{p-1}\frac{d}{dt}T(t)u_0$$

e

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = p(p-1)[T(t)u_0]^{p-2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}T(t)u_0\right]^2 + p[T(t)u_0]^{p-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}T(t)u_0.$$

Portanto,

$$\Delta v = p(p-1)[T(t)u_0]^{p-2}|\nabla T(t)u_0|^2 + p[T(t)u_0]^{p-1}\Delta T(t)u_0,$$

logo

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = -p(p-1)[T(t)u_0]|\nabla T(t)u_0|^2 \leq 0 \\ v(0) = u_0^p \end{cases} \tag{4.38}$$

e, pelo Princípio de Comparação, temos o resultado. □

Proposição 4.13. *Suponha que* $u \in C([0,T], L^q(\Omega))$ *seja uma solução de (4.3) e que* $u(t) \geq 0$ *para todo* $t \in [0,T]$. *Então,*

$$\lim_{t\downarrow 0} t^{\frac{1}{p}}\|T(t)u_0\|_{L^{pq}} = 0.$$

Demonstração. Como $u(t)$ satisfaz a equação (4.3) e cada parcela do lado direito da igualdade é não negativa, temos que $u(t) \geq T(t)u_0$ para todo $t \in [0,T]$. Usando isto e o Lema 4.12, temos que

$$\begin{aligned} u(t) - T(t)u_0 &\geq \int_0^t T(t-s)[T(s)u_0]^p ds \\ &\geq \int_0^t [T(t-s)T(s)u_0]^p ds \\ &\geq t[T(t)u_0]^p. \end{aligned}$$

Pela continuidade de u, dado um $\varepsilon > 0$ temos que

$$\varepsilon > \|u(t) - T(t)u_0\|_{L^q}^{1/p} \geq t^{\frac{1}{p}}\|T(t)u_0\|_{L^{pq}}.$$

Se t é suficientemente pequeno. □

Teorema 4.14. *Suponha que* $u : [0,T] \to L^p$ *seja uma solução de (4.3) em* L^q *e que* $u \geq 0$ *para todo* $t \in [0,T]$. *Então, existe uma constante* C_p, *dependendo apenas de* p, *tal que*

$$\|t^{1/(p-1)}T(t)u_0\|_{L^\infty} \leq C_p \quad \textit{para todo} \;\; t \in [0,T]. \tag{4.39}$$

Demonstração. Da equação integral (4.3) temos que $u(t) \geq T(t)u_0$. Logo,

$$u(t) \geq \int_0^t T(t-s)[u(s)^p]ds, \tag{4.40}$$

e portanto,

$$T(t-s)[u(s)^p] \geq T(t-s)[(T(s)u_0)^p] \geq [T(t-s)T(s)u_0]^p = [T(t)u_0]^p.$$

Assim, por (4.40), $u(t) \geq t[T(t)u_0]^p$. Substituindo esta estimativa em (4.40), obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &\geq \int_0^t T(t-s)[s(T(s)u_0)^p]^p ds \\ &\geq \int_0^t s^p [T(t)u_0]^{p^2} ds \\ &\geq (t)^{1+p}(1+p)^{-1}[T(t)u_0]^{p^2}. \end{aligned}$$

Repetindo este procedimento, temos por indução que

$$u(t) \geq \frac{(t)^{1+p+\ldots+p^{K-1}}[T(t)u_0]^{p^K}}{(1+p)^{p^{K-2}}(1+p+p^2)^{p^{K-3}}\ldots(1+p+\ldots+p^{k-1})},$$

ou seja

$$t^{(p^K-1)/p^K(p-1)}T(t)u_0 \leq u(t)^{1/p^K} \prod_{j=2}^{K} \left[\frac{p^j-1}{p-1}\right]^{1/p^j}.$$

Fazendo $K \to \infty$, temos

$$t^{1/(p-1)}T(t)u_0 \leq \prod_{j=2}^{\infty} \left[\frac{p^j-1}{p-1}\right]^{1/p^j}.$$

Desde que

$$\begin{aligned} \log \prod_{j=2}^{\infty} \left[\frac{p^j-1}{p-1}\right]^{1/p^j} &= \sum_{j=2}^{\infty} p^{-j} \log \left[\frac{p^j-1}{p-1}\right] \\ &\leq \sum_{j=2}^{\infty} p^{-j} \log(jp^j) < \infty, \end{aligned}$$

temos o Teorema. □

Corolário 4.15. *Se $q < N(p-1)/2$, então existe $u_0 \in L^q(\Omega)$ não negativo tal que não existe $T > 0$ e u contínua de $[0,T]$ em $L^q(\Omega)$, com $u(t) \geq 0$, satisfazendo a equação integral (4.3) em $[0,T]$.*

Demonstração. Suponha que para cada $u_0 \in L^q(\Omega)$ existe uma solução $u \in C([0,T], L^q(\Omega))$ não negativa. Consideramos o operador potência fracionária

$$(-\Delta)^{-\beta}u_0 = \Gamma(\beta)^{-1}\int_0^\infty t^{\beta-1}T(t)u_0 dt.$$

Mostramos que está bem definida. Da Proposição 4.13,

$$\begin{aligned}\|(-\Delta)^{-\beta}u_0\|_{L^{pq}} &\leq \Gamma(\beta)^{-1}\int_0^\infty t^{\beta-1}\|T(t)|u_0|\|_{L^{pq}}dt,\\ &\leq C\left(\int_0^\delta t^{\beta-1}t^{-\frac{1}{p}}dt + \int_\delta^\infty t^{\beta-1}\|T(t)|u_0|\|_{L^{pq}}dt\right).\end{aligned}$$

Pelo Corolário 2.24, o lado direito desta desigualdade é limitado se $\beta > \frac{1}{p}$. Então $(-\Delta)^{-\beta}$ leva $L^q(\Omega)$ em $L^{pq}(\Omega)$. Afirmamos que $(-\Delta)^{-\beta}$ é um operador linear limitado. Claramente é linear e, tomando $u_n \to u_0$ em L^q, temos

$$\begin{aligned}\|(-\Delta)^{-\beta}u_n - (-\Delta)^{-\beta}u_0\|_{L^{pq}} &= \left\|\Gamma(\beta)^{-1}\int_0^\infty t^{\beta-1}T(t)(u_n-u_0)dt\right\|_{L^{pq}},\\ &\leq \Gamma(\beta)^{-1}\int_0^\infty t^{\beta-1}\|T(t)(u_n-u_0)\|_{L^{pq}}dt.\end{aligned}$$

Como

(i) $t^{\beta-1}\|T(t)(u_n-u_0)\|_{L^{pq}} \leq t^{\beta-1}t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{pq}\right)}\|u_n-u_0\|_{L^q} \to 0$ para cada t fixo

(ii) $t^{\beta-1}\|T(t)(u_n-u_0)\|_{L^{pq}} \leq f(t)$

onde

$$f(t) = \begin{cases} Ct^{\beta-1}t^{-1/p} \text{ se } 0 \leq t \leq \delta, \\ Ce^{-\lambda_1 t} \text{ se } t \geq \delta, \end{cases} \tag{4.41}$$

pelo teorema da convergência dominada $(-\Delta)^{-\beta}u_n \to (-\Delta)^{-\beta}u_0$. Logo, o operador é contínuo. Daí, $(-\Delta)^{-\beta} : L^q \to L^{pq}$ é limitado. Desde que $q < N(p-1)/2$, existe β satisfazendo $N/2q - N/2pq > \beta > 1/p$. O que contradiz o resultado seguinte. □

Lema 4.16. *Se $(-\Delta)^{-\beta} : L^p \to L^q$ é limitado, então $N/2p - N/2q \leq \beta$.*

Demonstração. Assuma que $0 \in \Omega$. Para $\alpha > 0$, seja $\Omega_\alpha = \alpha^{-1}\Omega$ e seja Δ_α o Laplaciano de Dirichlet em Ω_α. Defina $(T_\alpha u_0)(x) = u_0(\alpha x)$. Então $T_\alpha : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega_\alpha)$ é sobrejetiva e

$$\|T_\alpha u_0\|_{L^p(\Omega_\alpha)} = \alpha^{-N/p}\|u_0\|_{L^p(\Omega)}.$$

Também podemos verificar que

$$e^{t\alpha^2\Delta} = T_\alpha^{-1} e^{t\Delta_\alpha} T_\alpha,$$

$$(-\Delta)^{-\beta} = \alpha^{2\beta} T_\alpha^{-1} (-\Delta_\alpha)^{-\beta} T_\alpha.$$

Para α pequeno, temos que $\Omega \subset \Omega_\alpha$. Sejam $u_0 \in L^p(\Omega)$ e $v_0 \in L^p(\Omega_\alpha)$ não negativos, com $0 \leq u_0 \leq v_0$ em Ω. Pelo princípio da comparação para a equação do calor, segue que $e^{t\Delta} u_0 \leq e^{t\Delta_\alpha} v_0$ e, portanto,

$$(-\Delta)^{-\beta} u_0 \leq (-\Delta_\alpha)^{-\beta} v_0, \tag{4.42}$$

para todo $\beta > 0$ e $\alpha > 0$ pequeno.

Agora, suponha que $(-\Delta)^{-\beta} : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ seja limitado. Então,

$$\|(-\Delta)^{-\beta} u_0\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u_0\|_{L^p(\Omega)}, \quad u_0 \in L^p(\Omega),$$

$$\|\alpha^{2\beta} T_\alpha^{-1} (-\Delta_\alpha)^{-\beta} T_\alpha u_0\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|T_\alpha^{-1} T_\alpha u_0\|_{L^p(\Omega)},$$

$$\alpha^{2\beta} \alpha^{N/q} \|(-\Delta_\alpha)^{-\beta} v_0\|_{L^q(\Omega_\alpha)} \leq C \alpha^{N/p} \|v_0\|_{L^p(\Omega_\alpha)},$$

com $v_0 = T_\alpha u_0$. Em outras palavras,

$$\|(-\Delta_\alpha)^{-\beta} v_0\|_{L^q(\Omega_\alpha)} \leq C \alpha^{N/p - N/q - 2\beta} \|v_0\|_{L^p(\Omega_\alpha)} \tag{4.43}$$

para todo $v_0 \in L^p(\Omega_\alpha)$. Agora, seja $v_0 \in L^p(\Omega)$ não negativo e estenda v_0 como zero em $\Omega_\alpha - \Omega$. Então, por (4.42) e (4.43), temos

$$\|(-\Delta)^{-\beta} v_0\|_{L^q(\Omega)} \leq C \alpha^{N/p - N/q - 2\beta} \|v_0\|_{L^p(\Omega)}.$$

Se $N/p - N/q - 2p > 0$, fazendo $\alpha \to 0$ obtemos uma contradição. Isto mostra o resultado. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] H. Brézis e T. Cazenave, *A nonlinear heat equation with singular initial data*, Jour. Anal. Math. (68), 1996, 277-304.

[2] F. Weissler, *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in* L^p, Indiana Univ. Math. J. 29 1980, 79-102.

[3] H. Brézis e T. Cazenave, *Nonlinear Evolution Equations*, in preparation.

[4] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag.

[5] Robert A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press.

[6] H. Brézis, *Análisis funcional Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial.

[7] G. B. Folland, *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, Inc.

[8] F. Weissler, *Semilinear evolution equations in Banach spaces*, J. Funct. Anal. 32 (1979), 277-296.

[9] S. Snoussi, S. Tayachi, F. Weissler, *Asymptotically self-similar global solution of a semilinear parabolic equation with a nonlinear gradient term*, Proc. Royal Soc. Edinburgh 129, 1999, 1291-1307.

[10] H. Brézis, *Remarks on the preceding paper by M. Ben-Artzi "Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations"*, Archive Rat. Mech. Anal. 128 (1994), 359-360.

[11] T. Cazenave, F. Dickstein and M. Escobedo, *A semilinear heat equation with concaveconvex nonlinearity*, Rend. Mat. Appl. (7),19, 1999, pp. 211-242.

[12] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag

Índice Remissivo