



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Filipe Dantas dos Santos

**A TRANSFORMADA DE RETROESPALHAMENTO
GENERALIZADA E MODIFICADA EM DIMENSÃO $n > 2$ ÍMPAR**

Recife
2010



Filipe Dantas dos Santos

**A TRANSFORMADA DE RETROESPALHAMENTO
GENERALIZADA E MODIFICADA EM DIMENSÃO $n > 2$ ÍMPAR**

*Dissertação apresentada ao Departamento de
Matemática da UFPE, como requisito para a
obtenção do grau de MESTRE em Matemática.*

Orientador: Prof. Ramón Orestes Mendoza Ahumada

Recife
2010

Santos, Filipe Dantas dos

A transformada de retroespalhamento generalizada e modificada em dimensão $n > 2$ ímpar / Filipe Dantas dos Santos - Recife: O Autor, 2010.

40 folhas : il., fig.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2010.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Análise (Matemática). 2. Equações diferenciais parciais. 3. Teoria de espalhamento. I. Título.

515

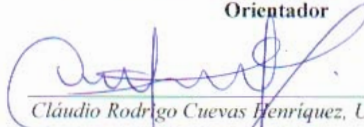
CDD (22. ed.)

MEI2010 – 0168

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: 
Ramón Orestes Mendoza Ahumada, UFPE

Orientador


Cláudio Rodrigo Cuevas Henríquez, UFPE


Cláudio Benedito Silva Furtado, UFPB

A TRANSFORMADA DE RETROESPALHAMENTO GENERALIZADA E MODIFICADA
EM DIMENSÃO $N \geq 3$ ÍMPAR

Por

Filipe Dantas dos Santos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Outubro – 2010

Agradecimentos

- A Deus, pelo dom da vida e por sempre estar comigo nos momentos em que eu fraquejei e/ou parecia fraquejar;
- Aos meus pais (Hortencia e João Bosco), meus irmãos (Gabriel e Clara) e toda a minha família, que sempre me apoiaram;
- A Ramón Mendoza, pela orientação. Ao professor doutor Antônio Sá Barreto pela atenção de sempre e pela importante ajuda;
- A todos os professores do DMAT-UFPE. Em especial, aos professores doutores Aron Simis, Henrique, Ramón Mendoza (novamente) e Pedro Gómes Venegas (este último do DMA-UFPB), por participarem diretamente da minha formação ao ministrarem as disciplinas que cursei ao longo do mestrado;
- Aos amigos do DMAT-UFPE, pelo bom convívio de sempre. Em especial, aos seguintes: Bruno, Bruna, Lucas, Alejandro, Zaqueu, Joedson, Marcelo, Luíz, Felipe Wergete e o quase membro do DMAT Marcelo “Maiden”;
- Aos professores Alan Almeida, Kalasas e Natanael, pelas cartas de recomendação e pela confiança. Agradeço também a todos os professores do DMA-UFS;
- Aos meus amigos Fábio, Naldisson, Unaldo, Ana e família por todos os bons momentos e por sempre acreditarem em mim;
- Aos meus amigos do estado de Sergipe; a David e a Rodrigo, que moraram comigo em Recife;
- À Tânia, por tudo que faz aos discentes do DMAT-UFPE;
- À CAPES, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Nessa dissertação, temos por objetivo principal definir uma Transformada de Retroespalhamento “Modificada”, que como o nome sugere, trata-se de uma modificação de uma ferramenta que tem grande importância na Teoria de Espalhamento: A Transformada de Retroespalhamento. Para isso, usaremos a Representação por Translação de Lax-Phillips em dimensão $n \geq 3$ ímpar para definir primeiramente o Núcleo de Espalhamento, que nada mais é do que o resultado final de quando uma onda unidimensional sai do contato de um potencial dado. Como aplicação, apresentaremos o Problema Inverso de Espalhamento no caso dois corpos, mas com uma restrição apropriada nas direções das ondas planas (restrição esta que é dada pela própria transformada), seguido dos seus principais resultados obtidos até então.

Palavras-chave: Transformada de Radon, Potenciais, Núcleo de Espalhamento, Retroespalhamento, Espaço de Sobolev.

Abstract

In this dissertation, the main purpose is to define a “Modified” Backscattering Transform, which as the name suggests, it’s a modification of a tool which has great importance in the Scattering Theory: the Backscattering Transform. For this, we will use the Translation Representation of Lax-Phillips in odd dimension $n \geq 3$ to first define the Scattering Kernel, which is the final result when a unidimensional wave moves away from the region where a given potential is confined. As an application, we will introduce Inverse Scattering Problem in the two body case, but with an appropriate restriction on the directions of plane waves (restriction which is given by transform itself), and it’s main results obtained so far.

Keywords: Radon Transform, Potentials, Scattering Kernel, Backscattering, Sobolev Space.

Sumário

Introdução	7
1 A Transformada de Radon	9
1.1 O Espaço de Schwartz	9
1.2 A Transformada de Radon	11
1.3 A Aplicação $D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}$	16
2 O Núcleo de Espalhamento	20
2.1 O Grupo de Onda	20
2.2 O Núcleo de Espalhamento	23
3 A Transformada de Retroespalhamento Modificada	29
3.1 Espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$	29
3.2 A Transformada de Retroespalhamento Generalizada e “Modificada”	33
3.3 O Problema Inverso de Retroespalhamento no caso dois corpos	34
A Noções de Distribuições	36
A.1 Definição e Exemplos	36
A.2 Operações com Distribuições	39
Bibliografia	40

Introdução

O Problema Inverso de Espalhamento no caso dois corpos funda-se em determinar um potencial V (de suporte compacto) medindo a amplitude de espalhamento $a_V(\lambda, \omega, \theta)$, definida a partir da frequência λ e das direções de “entrada” ω e “saída” θ de uma onda plana. Sabe-se que, se a dimensão for $n \geq 2$, então podemos recuperar o potencial medindo a amplitude de espalhamento, sem fazer (é claro) restrições nas direções das ondas planas.

Mas, será que é necessário medir a amplitude de espalhamento de todas as ondas planas para recuperar tal potencial?

Se considerarmos, por exemplo, apenas as ondas planas cujas direções satisfazem a condição $\omega = -\theta$, o problema torna-se complicado. Não se sabe, nesse caso, se $a_V(\lambda, -\theta, \theta)$ determina V . Mais geralmente, esse é um caso particular da situação em que consideramos uma transformação $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ortogonal de tal forma que $\mathcal{I} - S$ seja invertível ($\mathcal{I}$ representa a identidade), o qual também não sabemos se a aplicação $V \mapsto a_V(\lambda, S\theta, \theta)$ é injetiva.

Nesta dissertação, temos por objetivo modificar de forma apropriada a aplicação $V \mapsto a_V(\lambda, S\theta, \theta)$. Porém, para tal, não o faremos diretamente na mesma, mas sim no que chamamos o Núcleo de Espalhamento. Tal mudança tem o objetivo de descartar o “excesso” de informações que essa aplicação possui, como afirmam Richard Melrose e Gunther Uhlmann na referência [9].

O capítulo 1 é dedicado à Transformada de Radon $\mathcal{R}$. Em 1917, o matemático Johann Radon (Tetschen, 16 de dezembro de 1887 - Viena, 25 de maio de 1956) definiu-a como sendo a aplicação que associa uma função diferenciável em $\mathbb{R}^n$ (por simplicidade) de suporte compacto (ou seja, a função é nula fora de um conjunto limitado) a uma outra função, em $\mathcal{P}^n$ (a variedade diferenciável de todos os hiperplanos do $\mathbb{R}^n$), que associa, por sua vez, cada hiperplano à integração da função no mesmo. Tal ferramenta foi estudada à fundo por matemáticos como P. Lax, R. Phillips e S. Helgason. Respostas acerca da imagem, inversão e aplicações podem ser encontradas (além daqui) em [1] e em [11], os quais serviram de base para elaborarmos esse

capítulo. Ainda, na última seção desse capítulo, falaremos da aplicação $D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}$, com o objetivo de extendê-la isometricamente para todo $L^2(\mathbb{R}^n)$.

No capítulo 2, modificaremos a Transformada de Radon para obtermos uma outra: a Transformada de Lax-Phillips. Além disso, usaremos a existência e unicidade de soluções para o Problema de Cauchy da equação da onda perturbada por um potencial compactamente suportado para definirmos um grupo de operadores: O Grupo de Onda. Então, mostraremos uma relação entre este e a Transformada de Lax-Phillips e, a partir da chamada Representação por Translação de Lax-Phillips (que “nasce” dessa relação), obtemos o Núcleo de Espalhamento. Este é uma peça-chave para o nosso trabalho, pois definiremos a Transformada de Retroespalhamento “modificada” diretamente dele. Em [12], é mostrado que a Transformada de Lax-Phillips pode ser estendida para um isomorfismo isométrico de H_0 em $L^2(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$, H_0 denotando o espaço-energia, dado por $H_0 = H_D(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$, com $H_D(\mathbb{R}^n)$ sendo o fecho de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com respeito à norma $\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 dx \right)^{1/2}$. Detalhes sobre o Núcleo de Espalhamento e sobre a Amplitude de Espalhamento (este último não será tratado aqui) podem ser encontrados em [8], que foi a nossa principal fonte em todo esse capítulo.

No capítulo 3, definiremos, a partir do Núcleo de Espalhamento, a Transformada de Retroespalhamento Generalizada e “Modificada”. Como aplicação, apresentaremos os principais resultados, obtidos até então, do Problema Inverso de Espalhamento no caso dois corpos (com a restrição dita anteriormente). Para tais resultados, são considerados potenciais com determinada regularidade de Sobolev e, portanto, falaremos a respeito disso. Como o título da dissertação sugere, consideraremos aqui $n \geq 3$ ímpar. Para o caso $n > 2$ par, sugerimos ao leitor a referência [4].

Na parte final desta dissertação, temos um apêndice que tem como objetivo apresentar algumas noções básicas da teoria de distribuições (ou funções generalizadas). Para um curso mais completo, sugerimos ao leitor os livros [2] e [3].

Capítulo 1

A Transformada de Radon

Nesse capítulo, introduziremos alguns dos importantes conceitos de uma ferramenta relativamente simples, mas de grande importância no estudo de equações a derivadas parciais: a Transformada de Radon $\mathcal{R}$. Ela é um pré-requisito indispensável na Teoria de Espalhamento.

A seção 1.1 será voltada para o Espaço de Schwartz, na qual daremos a definição, exemplos e algumas maneiras de caracterizá-lo. Na seção 1.2, definiremos a Transformada de Radon, seguida de algumas propriedades e a Fórmula de Inversão. Por fim, na seção 1.3, falaremos da aplicação $D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}$, mostrando a Fórmula de Plancherel e que a mesma pode ser estendida por continuidade para um isomorfismo isométrico em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

1.1 O Espaço de Schwartz

Definição 1.1.1. Uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é de decrescimento rápido se, para cada $\alpha \in \mathbb{N}$ e $\beta \in \mathbb{N}^n$, existe uma constante $C_{\alpha,\beta}$ tal que

$$||x|^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq C_{\alpha,\beta} < \infty, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Aqui, ∂^β denota $\partial_1^{\beta_1} \dots \partial_n^{\beta_n}$, na qual $\partial_i = \frac{\partial}{\partial_i}$ é a i -ésima derivada parcial.

Notemos que, se f e g são de decrescimento rápido, então também o são as funções $f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{C}$). Logo, o conjunto

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) / ||x|^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq C_{\alpha,\beta} < \infty, \forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N} \text{ e } \beta \in \mathbb{N}^n\}$$

é um espaço vetorial complexo se munido com essas operações. O espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é chamado o *Espaço de Schwartz*¹ das funções infinitamente diferenciáveis rapidamente decrescentes.

Exemplo 1.1.1. Toda função de decrescimento rápido é integrável à Lebesgue. Com efeito, seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Temos que, $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\forall j \in \{1, \dots, n\}$,

$$|x_j^k f(x)| \leq |x|^k |f(x)| \leq C_k < \infty.$$

Logo, existe $0 < K < \infty$ tal que

$$|(1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2) f(x)| \leq K < \infty.$$

Então, devemos ter que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} [(1 + x_1^2)^{-1} \dots (1 + x_n^2)^{-1}] |(1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2) f(x)| dx \leq \\ &K \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2)} dx = K \pi^n < \infty. \end{aligned}$$

Mais geralmente, usando a Regra de Leibniz (Regra do Produto), garantimos que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra, isto é:

$$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Logo, pelo mesmo argumento acima, temos que f^p é integrável à Lebesgue, donde $[f] \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 \leq p < \infty$ natural.

Exemplo 1.1.2. Seja $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções em $\mathbb{R}^n$ infinitamente diferenciáveis que têm suporte compacto. Então, temos $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Uma informação adicional é que existe um isomorfismo natural entre o completamento (com o produto interno de $L^2(\mathbb{R}^n)$) de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um Espaço Pré-Hilbert denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Observação 1.1.1. Um resultado interessante que usaremos aqui é que a Transformada de Fourier $\mathcal{F}$, definida em $L^1(\mathbb{R}^n)$ por

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x \rangle} f(x) dx,$$

é um automorfismo linear de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, com inversa dada por

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x \rangle} \mathcal{F}g(\xi) d\xi.$$

¹Laurent Schwartz (Paris, 5 de março de 1915 - Paris, 4 de julho de 2002) foi um matemático francês que recebeu, em 1950, a Medalha Fields por desenvolver a Teoria de Distribuições.

Além disso, usaremos as seguintes propriedades:

- $\partial^\beta \hat{f}(\xi) = (-i)^{|\beta|} \widehat{(M^\beta f)}(\xi)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $(M^\beta f)(x) = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} f(x)$;
- $\xi_j^\alpha \hat{f}(\xi) = (-i)^\alpha \widehat{\partial_j^\alpha f}(\xi)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Para a demonstração dessas propriedades da Transformada de Fourier, sugerimos ao leitor o livro [3].

1.2 A Transformada de Radon

Definição 1.2.1. Seja $\mathcal{P}^n$ a variedade diferenciável de todos os hiperplanos do $\mathbb{R}^n$. A Transformada de Radon é a aplicação

$$\mathcal{R} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{P}^n)$$

dada por:

$$\mathcal{R}f(\zeta) = \int_{\zeta} f(x) dx.$$

Observação 1.2.1. Cada hiperplano pode ser descrito por $\{x \in \mathbb{R}^n / \langle \omega, x \rangle = s\}$, com $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $s \in \mathbb{R}$. Usaremos a notação $H_{(\omega, s)}$ para nos referirmos ao hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^n / \langle \omega, x \rangle = s\}$. Com essa identificação e com o fato de que $H_{(\omega, s)} = H_{(-\omega, -s)}$, podemos “associar” funções contínuas em $\mathcal{P}^n$ a funções contínuas f , em $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, que satisfazem $f(\omega, s) = f(-\omega, -s)$. Logo, podemos supor que a Transformada de Radon de f é dada por

$$\mathcal{R}f(\omega, s) = \int_{H_{(\omega, s)}} f(x) dx.$$

A Proposição seguinte permite relacionar as Transformadas de Radon e Fourier. Tal relação será de grande utilidade mais adiante na dedução da fórmula de inversão da Transformada de Radon.

Proposição 1.2.1. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{R}f(\omega, \cdot))(s) = \mathcal{F}f(s\omega) = \hat{f}(s\omega), \quad (1.1)$$

onde a Transformada de Fourier está sendo tomada em $\mathbb{R}$ no primeiro membro.

Demonstração: Fixado $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(s\omega) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-is\langle x, \omega \rangle} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} dr \int_{H_{(\omega, r)}} e^{-is\langle x, \omega \rangle} f(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-isr} \left[\int_{H_{(\omega, r)}} f(x) dx \right] dr = \int_{\mathbb{R}} e^{-isr} \mathcal{R}f(\omega, r) dr = \mathcal{F}_s(\mathcal{R}f(\omega, \cdot))(s).\end{aligned}$$

■

Proposição 1.2.2. A Transformada de Radon goza das seguintes propriedades:

- a) Se $f_h(x) = f(x + he_j)$, com $h \in \mathbb{R}$, então $\mathcal{R}f_h(\omega, s) = \mathcal{R}f(\omega, s + h\omega_j)$;
- b) $\mathcal{R}(\partial_j f)(\omega, s) = \omega_j \frac{\partial \mathcal{R}f}{\partial s}(\omega, s)$, com $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;
- c) $\mathcal{R}(\Delta f)(\omega, s) = \frac{\partial^2 \mathcal{R}f}{\partial s^2}(\omega, s)$, com $\Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração:

Usando mudança de variáveis, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{R}f_h(\omega, s) &= \int_{H_{(\omega, s)}} f_h(x) dx = \int_{H_{(\omega, s+h\omega_j)}} f_h(y - he_j) dy = \\ &= \int_{H_{(\omega, s+h\omega_j)}} f(y) dy = \mathcal{R}f(\omega, s + h\omega_j),\end{aligned}$$

o que prova o item a).

Para provar o item b), observemos que, como (1.1) vale, então $\mathcal{F}_s(\mathcal{R}f(\omega, \cdot))$ (e portanto $\mathcal{R}f(\omega, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$). Logo, $\partial_s \mathcal{R}f$ existe. Concluimos pelo item a) que, se $\omega_j = 0$, então

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\partial_j f)(\omega, s) &= \int_{H_{(\omega, s)}} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} \right] dx = \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\int_{H_{(\omega, s)}} f(x + te_j) dx - \int_{H_{(\omega, s)}} f(x) dx \right] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\mathcal{R}f(\omega, s + t\omega_j) - \mathcal{R}f(\omega, s)] = 0,\end{aligned}$$

donde a igualdade do item b) é válida. No caso $\omega_j \neq 0$, façamos

$$\mathcal{R}(\partial_j f)(\omega, s) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega_j}{t\omega_j} [\mathcal{R}f(\omega, s + t\omega_j) - \mathcal{R}f(\omega, s)] = \omega_j \frac{\partial \mathcal{R}f}{\partial s}(\omega, s).$$

Por fim, pelo item b), temos que

$$\mathcal{R}(\Delta f)(\omega, s) = \sum_{i=1}^n \mathcal{R}(\partial_i^2 f)(\omega, s) = \frac{\partial^2 \mathcal{R}f}{\partial s^2}(\omega, s) \sum_{i=1}^n \omega_i^2 = \frac{\partial^2 \mathcal{R}f}{\partial s^2}(\omega, s),$$

o que demonstra o item c).



A propriedade *c*) da Proposição 1.2.2 é de grande importância no estudo do Problema de Cauchy da Equação da Onda

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta)u(t, x) &= 0 \\ u(0, \cdot) &= u_0 \text{ e } \partial_t u(0, \cdot) = u_1, \end{aligned}$$

no qual $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ e $u_0, u_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

De fato, notemos que se u satisfaz a equação acima naquelas condições iniciais, então

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{R}(\partial_t^2 u(t, \cdot) - \Delta u(t, \cdot))(\omega, s) = \partial_t^2 \mathcal{R}u(\omega, s) - \partial_s^2 \mathcal{R}u(\omega, s) \\ \mathcal{R}(u(0, \cdot))(\omega, s) &= \mathcal{R}u_0(\omega, s) \text{ e } \partial_t \mathcal{R}(u(0, \cdot))(\omega, s) = \mathcal{R}u_1(\omega, s). \end{aligned}$$

Em outras palavras, a Transformada de Radon reduz o problema n -dimensional para o unidimensional. Naturalmente, uma pergunta a ser feita está na possibilidade de tomarmos a Transformada de Radon de u nas condições acima. Mais adiante, no Capítulo 2, veremos que, de fato, podemos integrar u em cada hiperplano do $\mathbb{R}^n$ sob certas hipóteses feitas para o tempo.

Uma vez que (1.1) vale para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, é de se esperar que a injetividade da Transformada de Radon definida nesse espaço seja consequência da injetividade da Transformada de Fourier. O que não é tão claro é no que diz respeito à imagem da mesma. Para caracterizá-la, definamos o seguinte espaço:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_H(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) &= \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) / \int_{\mathbb{R}} f(\omega, s) s^k ds \text{ seja um polinômio homogêneo de grau} \\ &\quad k \text{ em } \omega_1, \dots, \omega_n, \text{ para cada } k \in \mathbb{Z}^+ \text{ e } f(\omega, s) = f(-\omega, -s)\}, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{S}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$ é definido de maneira análoga a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Temos então o seguinte resultado:

Teorema 1.2.1 (Helgason). A Transformada de Radon $\mathcal{R} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}_H(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$ é uma aplicação injetiva.

Demonstração: Como já fora dito, a injetividade é uma consequência direta de (1.1):

$$\mathcal{R}f \equiv 0 \Rightarrow 0 = \mathcal{F}_s(\mathcal{R}f(\omega, \cdot))(s) = \mathcal{F}f(s\omega), \text{ para cada } (\omega, s) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \Rightarrow f \equiv 0,$$

pois $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo.

Provaremos agora que $\mathcal{R}f \in \mathcal{S}_H(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$. Fixemos $\epsilon > 0$ pequeno e seja $N_{n,\epsilon} \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ o aberto tal que

$$(\omega_1, \dots, \omega_n) \in N_{n,\epsilon} \Leftrightarrow |\omega_n| > \epsilon, \omega \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Fazendo

$$u_i = s\omega_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \text{ e } u_n = s(1 - \omega_1^2 - \dots - \omega_{n-1}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.2)$$

temos que

$$\frac{\partial}{\partial \omega_i}(\hat{f}(s\omega)) = s \frac{\partial \hat{f}}{\partial u_i}(s\omega) - s\omega_i(1 - \omega_1^2 - \dots - \omega_{n-1}^2)^{-1/2} \frac{\partial \hat{f}}{\partial u_n}(s\omega).$$

$$\text{Então, se } \partial_\omega^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial \omega_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial \omega_n^{\beta_n}},$$

$$\sup_{\omega \in N_{n,\epsilon}, s \in \mathbb{R}} \left| s^k \frac{\partial^l}{\partial s^l}(\partial_\omega^\beta \hat{f}(s\omega)) \right| < \infty.$$

Usando ∂_ω^β na inversão de (1.1)

$$\mathcal{R}f(\omega, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\omega) e^{isr} ds,$$

temos que:

$$(1 + r^{2k}) \frac{\partial^l}{\partial r^l} \partial_\omega^\beta \mathcal{R}f(\omega, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (1 + (-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial s^{2k}}) \left((is)^l \partial_\omega^\beta(\hat{f}(s\omega)) \right) e^{isr} ds.$$

Concluimos então que

$$\sup_{\omega \in N_{n,\epsilon}, s \in \mathbb{R}} \left| (1 + r^{2k}) \frac{\partial^l}{\partial r^l} \partial_\omega^\beta \mathcal{R}f(\omega, r) \right| < \infty.$$

Sendo

$$|(\omega, r)|^k \left| \frac{\partial^l}{\partial r^l} \partial_\omega^\beta \mathcal{R}f(\omega, r) \right| \leq \left| (1 + r^{2k}) \frac{\partial^l}{\partial r^l} \partial_\omega^\beta \mathcal{R}f(\omega, r) \right|$$

segue que $\mathcal{R}f \in \mathcal{S}(N_{n,\epsilon} \times \mathbb{R})$ (definido de maneira óbvia).

Como

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}f(\omega, s) s^k ds = \int_{\mathbb{R}} s^k ds \left[\int_{H(\omega, s)} f(x) dx \right] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \langle x, \omega \rangle^k dx$$

é um polinômio homogêneo em $\omega_1, \dots, \omega_n$ de grau k , $\mathcal{R}f \in \mathcal{S}_H(N_{n,\epsilon} \times \mathbb{R})$. Repetindo os mesmos argumentos para as outras coordenadas em $\mathbb{S}^{n-1}$, garantimos que $\mathcal{R}f \in \mathcal{S}_H(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$.

■

Observação 1.2.2. Na verdade, pode-se provar que a imagem da Transformada de Radon no Teorema 1.2.1 é precisamente $\mathcal{S}_H(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$. O leitor que se interessar, poderá encontrar tal demonstração em [11].

O nosso próximo passo será inverter a Transformada de Radon $\mathcal{R}$. Inicialmente, computaremos o operador transposto de $\mathcal{R}$, o qual denotaremos por $\mathcal{R}^t$. Aqui, usaremos o fato de que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ (confira o Exemplo 1.1.1).

Proposição 1.2.3. O operador transposto de $\mathcal{R}$ é a aplicação (limitada)

$$\mathcal{R}^t : C_c^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

dada por

$$\mathcal{R}^t g(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(\omega, \langle x, \omega \rangle) dS_\omega.$$

Demonstração: Tomemos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C_c^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$. Temos que:

$$\begin{aligned} \langle f, \mathcal{R}^t g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \langle \mathcal{R} f, g \rangle_{L^2(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left[\int_{H(\omega, s)} f(x) dx \right] g(\omega, s) dS_\omega ds = \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(\omega, \langle x, \omega \rangle) dx \right] dS_\omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(\omega, \langle x, \omega \rangle) dS_\omega \right] dx. \end{aligned}$$

■

Observação 1.2.3. Usando o operador transposto $\mathcal{R}^t$ (respectivamente, $\mathcal{R}$), podemos definir a Transformada de Radon (respectivamente, $\mathcal{R}^t$) para distribuições da seguinte maneira:

$$\langle \mathcal{R} u, v \rangle = \langle u, \mathcal{R}^t v \rangle^2 \text{ (respectivamente, } \langle \mathcal{R}^t v, u \rangle = \langle v, \mathcal{R} u \rangle^3).$$

Teorema 1.2.2 (Fórmula de Inversão). Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$f = c_n \mathcal{R}^t(\partial_s^{n-1} \mathcal{R} f)^4,$$

$$\text{com } c_n = \frac{1}{2(2i\pi)^{n-1}}.$$

²Aqui, devemos supor que a distribuição u seja de suporte compacto, pois não garantimos que $\mathcal{R}^t \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ se $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$.

³Notemos que, se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\mathcal{R} u \in C_c^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$.

⁴Aqui, extendemos por continuidade a aplicação $\mathcal{R}^t$ para todo $L^2(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$, fazendo sentido então a notação no segundo membro da igualdade.

Demonstração: Notemos que, usando coordenadas polares na fórmula de inversão da Transformada de Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{+\infty} e^{i\langle s\omega, x \rangle} \hat{f}(s\omega) s^{n-1} ds dS_\omega. \quad (1.3)$$

Usando (1.1) e o fato de que n é ímpar em (1.3), temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\langle s\omega, x \rangle} \hat{f}(s\omega) s^{n-1} ds dS_\omega = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} e^{is\langle \omega, x \rangle} \mathcal{F}_s(\mathcal{R}f(\omega, \cdot))(s) s^{n-1} ds dS_\omega \end{aligned}$$

Das propriedades da Transformada de Fourier,

$$s^{n-1} \mathcal{F}_s(\mathcal{R}(\omega, \cdot))(s) = (-i)^{n-1} \mathcal{F}_s(\partial_s^{n-1} \mathcal{R}f(\omega, \cdot))(s),$$

donde segue que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} e^{is\langle \omega, x \rangle} \mathcal{F}_s(\mathcal{R}f(\omega, \cdot))(s) s^{n-1} ds dS_\omega = \\ &= \frac{(-i)^{n-1}}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{is\langle \omega, x \rangle} \mathcal{F}_s(\partial_s^{n-1} \mathcal{R}f(\omega, \cdot))(s) ds \right] dS_\omega = \\ &= \frac{2\pi(-i)^{n-1}}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \partial_s^{n-1} \mathcal{R}f(\omega, \langle \omega, x \rangle) dS_\omega = \frac{1}{2(2i\pi)^{n-1}} \mathcal{R}^t(\partial_s^{n-1} \mathcal{R}f)(x), \end{aligned}$$

demonstrando o teorema. ■

Observação 1.2.4. Em [1], Antônio Sá Barreto destacou uma propriedade interessante dessa fórmula de inversão: para se obter a imagem de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ por f , basta conhecer apenas as integrais de f ao longo dos planos que distam no máximo $|x_0|$ da origem (pois $|\langle x_0, \omega \rangle| \leq |x_0|$).

1.3 A Aplicação $D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}$

Em 1910, o matemático suíço Michel Plancherel (16 de Janeiro de 1885 - 4 de Março de 1967) mostrou que se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então vale a fórmula (a chamada Fórmula de Plancherel)

$$(2\pi)^n \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Ou seja, $\mathcal{F}f$ é um múltiplo de uma isometria em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

O próximo teorema nos garante que a aplicação $D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}$, na qual $D_s = -i\partial_s$ ⁵, possui uma Fórmula de Plancherel.

Teorema 1.3.1 (Fórmula de Plancherel). Para $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \left\langle D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}f, D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}g \right\rangle_{L^2(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})}.$$

Demonstração: Da fórmula de Plancherel da Transformada de Fourier, temos

$$(2\pi)^n \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

Usando coordenadas polares, temos:

$$(2\pi)^n \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\omega) \overline{\hat{g}(s\omega)} s^{n-1} ds d\omega.$$

De (1.1) e de $s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{F}h(s) = (-i)^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{F}(\partial_s^{\frac{n-1}{2}} h)(s)$, se $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, temos:

$$\begin{aligned} (2\pi)^n \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = \\ &= \frac{(-i)^{\frac{n-1}{2}} \overline{(-i)^{\frac{n-1}{2}}}}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{F}_s(\partial_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}f(\omega, \cdot))(s)] \overline{[\mathcal{F}_s(\partial_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}g(\omega, \cdot))(s)]} ds d\omega. \end{aligned}$$

Usando a fórmula de Plancherel da Transformada de Fourier para uma dimensão, obtemos:

$$\begin{aligned} (2\pi)^n \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \\ &= \frac{(-i)^{\frac{n-1}{2}} \overline{(-i)^{\frac{n-1}{2}}}}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{F}_s(\partial_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}f(\omega, \cdot))(s)] \overline{[\mathcal{F}_s(\partial_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}g(\omega, \cdot))(s)]} ds d\omega = \\ &= \pi \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} [\partial_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}f(\omega, s)] \overline{[\partial_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}g(\omega, s)]} ds d\omega = \pi \left\langle \partial_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}f, \partial_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}g \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \\ &= \pi \left\langle D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}f, D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}g \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

o que demonstra o teorema. ■

Observação 1.3.1. A densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ nos permite estender isometricamente (por continuidade) a Transformada de Fourier para todo $L^2(\mathbb{R}^n)$ (ou seja, herdando também a Fórmula de Plancherel). Então, pelas mesmas razões, podemos estender isometricamente (por continuidade) a aplicação $D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}$ para todo $L^2(\mathbb{R}^n)$.

⁵A razão do uso da derivação $D_s = -i\partial_s$ é simplesmente para “retirar” o número complexo i dos coeficientes das fórmulas e propriedades utilizadas nessa dissertação.

O nosso próximo objetivo será mostrar que a extensão da aplicação $D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}$ para $L^2(\mathbb{R}^n)$, dita na Observação 1.3.1, é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem. Para isso, será conveniente reescrevermos a fórmula de inversão do Teorema 1.2.2 como

$$f = d_n \mathcal{R}^t (D_s^{n-1} \mathcal{R} f),$$

na qual $d_n = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}}$.

Começaremos definindo o espaço $\mathcal{S}^m(\mathbb{R}^n)$ ($m \in \mathbb{Z}$, por simplicidade):

$$f \in \mathcal{S}^m(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow |D_\xi^\alpha f(\xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

A vantagem de trabalharmos com esses espaços está descrita nesse próximo lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [8]:

Lema 1.3.1. Para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{R}^t D_s^k : C_c^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}^{-1-k}(\mathbb{R}^n).$$

De acordo com o Lema 1.3.1, temos que

$$\mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-1}{2}} : C_c^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}^{-1-\frac{n-1}{2}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

Agora, notemos que, das propriedades da Transformada de Fourier,

$$\mathcal{F}_s D_s^{\frac{n-1}{2}} (g(\omega, \cdot))(\rho) = \rho^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{F}_s (g(\omega, \cdot))(\rho).$$

Logo, se $h(\omega, \rho) = \rho^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{F}_s (g(\omega, \cdot))(\rho)$, temos que $h \in C_c^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$. Ainda, se $g \in C_c^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$ satisfizer $g(-\omega, -s) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} g(\omega, s)$, então:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s (g(\omega, \cdot))(\rho) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ir\rho} g(\omega, r) dr = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ir\rho} g(-\omega, -r) dr = \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{F}_s (g(-\omega, \cdot))(-\rho), \end{aligned}$$

donde $h(\omega, \rho) = h(-\omega, -\rho)$.

Sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-1}{2}} g(x) &= \mathcal{R}^t \mathcal{F}_s^{-1} h(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{-\infty}^0 e^{ir\langle \omega, x \rangle} h(\omega, r) dr d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{+\infty} e^{ir\langle \omega, x \rangle} h(\omega, r) dr d\omega \end{aligned}$$

e

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{-\infty}^0 e^{ir\langle \omega, x \rangle} h(\omega, r) dr d\omega = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{+\infty} e^{ir\langle \omega, x \rangle} h(\omega, r) dr d\omega,$$

concluimos usando coordenadas polares que

$$\mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-1}{2}} g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, y \rangle} [|y|^{-\frac{n-1}{2}} \mathcal{F}_s g(y/|y|, |y|)] dy. \quad (1.4)$$

Pela Fórmula de Plancherel “generalizada” (ver Observação 1.3.1) da Transformada de Fourier, sabemos que $\mathcal{F}f = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0, \forall f \in L^2$.

Como $\mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-1}{2}} g \in \mathcal{S}^{-1-\frac{n-1}{2}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, então, de acordo com (1.4)

$$\mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-1}{2}} g(x) = 0 \Leftrightarrow g \equiv 0.$$

Mais geralmente, a continuidade de $\mathcal{R}^t$ e a “densidade” de $C_c^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$ nos permite estender a aplicação $\mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-1}{2}}$ para $L^2(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$ e, se $g \in L^2(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$ satisfaz $g(-\omega, -s) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} g(\omega, s)$, então devemos ter $\mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-1}{2}} g(x) = 0 \Leftrightarrow g \equiv 0$. Usaremos esses argumentos para demonstrar o:

Teorema 1.3.2. A aplicação $D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}$ estende por continuidade para um isomorfismo isométrico

$$D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{I}_{\frac{n-1}{2}}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) / f(-\omega, -s) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} f(\omega, s)\}$$

e $d_n \mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-1}{2}}$ estende por continuidade como sua inversa.

Demonstração: A continuidade, a isometria e a injetividade de $D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}$ seguem diretamente da Fórmula de Plancherel “generalizada”. Além disso,

$$\mathcal{R}f(\omega, s) = \mathcal{R}f(-\omega, -s) \Rightarrow D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}f(\omega, s) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}f(\omega, s)$$

(D_s sendo tomada no sentido fraco) garante que a imagem de $L^2(\mathbb{R}^n)$ por $D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}$ está em $\mathcal{I}_{\frac{n-1}{2}}$.

Pela Fórmula de Inversão do Teorema 1.2.2 e pelo fato de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ ser denso, temos que $d_n \mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-1}{2}}$ (em $\mathcal{I}_{\frac{n-1}{2}}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$) é uma inversa à esquerda de $D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-1}{2}}$ é injetiva em $\mathcal{I}_{\frac{n-1}{2}}$, o teorema está demonstrado. ■

Capítulo 2

O Núcleo de Espalhamento

O objetivo principal desse capítulo será definir o Núcleo de Espalhamento, que desempenha um papel bem relevante no nosso estudo, pois será a partir dele que definiremos a principal ferramenta de nosso trabalho: A Transformada de Retroespalhamento Modificada.

Na seção 2.1, faremos uso da existência e unicidade de soluções da equação da onda perturbada para definir o semigrupo $\{U_V(t)\}_{t \geq 0}$, o qual chamamos O Grupo de Onda. Na seção 2.2, apresentaremos a Transformada de Lax-Phillips, que é uma modificação da Transformada de Radon (definida no capítulo anterior). Mostraremos que a mesma interliga o Grupo de Onda Livre $\{U_0(t)\}_{t \geq 0}$ com o Grupo de Translação. Por fim, usaremos a chamada Representação por Translação de Lax-Phillips para definir o Núcleo de Espalhamento.

2.1 O Grupo de Onda

Consideremos o problema de Cauchy da equação da onda “perturbada” por um potencial $V \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$(D_t^2 - \Delta - V(x))u(t, x) = 0 \quad (2.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), D_t u(0, x) = u_1(x),$$

com $\Delta = D_1^2 + \dots + D_n^2 = -(\partial_1^2 + \dots + \partial_n^2)$ ¹.

A demonstração do teorema seguinte (de existência e unicidade de soluções para (2.1)) pode ser encontrada em [8].

Teorema 2.1.1. Se $u_0, u_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então existe uma única $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo (2.1), com $u(0, x) = u_0(x)$ e $D_t u(0, x) = u_1(x)$. Além disso,

¹A partir de agora, Δ sempre representará o Laplaciano “positivo” $\Delta = D_1^2 + \dots + D_n^2$.

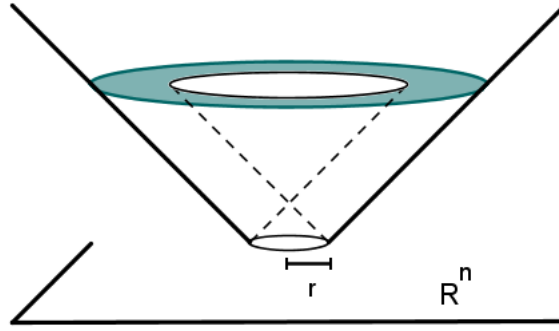


Figura 2.1: O Princípio de Huygens.

$$\text{supp}(u) \cap ([-T, T] \times \mathbb{R}^n) \subset\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \forall T \in \mathbb{R}^+.$$

É interessante comentar que no caso $V \equiv 0$, o suporte de u no Teorema 2.1.1 está confinado na região

$$S = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n / |t| - r \leq |x| \leq |t| + r\},$$

na qual u_0 e u_1 têm seus suportes contidos na bola $B(r)$. Esse fenômeno é conhecido como o *Princípio de Huygens*² (ver Figura 2.1).

A unicidade da solução u em (2.1) nos permite definir, para cada $t \geq 0$, a aplicação

$$U_V(t) : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

como:

$$U_V(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t, \cdot) \\ D_t u(t, \cdot) \end{pmatrix},$$

com u satisfazendo (2.1) nas condições

$$u(0, x) = u_0(x) \text{ e } D_t u(0, x) = u_1(x).$$

A família $\{U_V(t)\}_{t \geq 0}$ é chamada o *Grupo de Onda*. No caso de $V \equiv 0$, chamamos o *Grupo de Onda Livre* e denotamos por $\{U_0(t)\}_{t \geq 0}$.

Observação 2.1.1. Com o intuito de simplificar, diremos que u satisfaz (2.1) com as condições iniciais (u_0, u_1) quando

$$\begin{aligned} (D_t^2 - \Delta - V(x))u(t, x) &= 0 \\ u(0, x) &= u_0(x) \text{ e } D_t u(0, x) = u_1(x). \end{aligned}$$

²Christiaan Huygens (Haia, 14 de abril de 1629 - Haia, 8 de julho de 1695) foi o matemático, físico e astrônomo neerlandês que descobriu os anéis de Saturno, em 1655.

O nome dado a $\{U_V(t)\}_{t \geq 0}$ foi de uma maneira bastante sugestiva, pois além de ser definida a partir de soluções da equação da onda perturbada (unicamente determinadas pelas condições iniciais), essa família é de fato um semigrupo uniformemente contínuo, como mostra a proposição seguinte:

Proposição 2.1.1. Para $V \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, o Grupo de Onda $\{U_V t\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo e tem gerador infinitesimal

$$G = i \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \Delta + V & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração: A continuidade de u nos garante que $\lim_{t \rightarrow 0^-} |U_V(t) - \mathcal{I}| = 0$. Por outro lado, dados $r, s \geq 0$, temos:

$$U_V(r) \circ U_V(s) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = U_V(r) \begin{pmatrix} u(s, \cdot) \\ D_t u(s, \cdot) \end{pmatrix},$$

no qual u satisfaz (2.1) com as condições iniciais (u_0, u_1) .

Então, segue que:

$$U_V(r) \begin{pmatrix} u(s, \cdot) \\ D_t u(s, \cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(r, \cdot) \\ v(r, \cdot) \end{pmatrix},$$

com v satisfazendo (2.1) com as condições iniciais $(u(s, \cdot), D_t u(s, \cdot))$.

Notemos que $u_s(t, x) = u(t + s, x)$ satisfaz (2.1) com as condições iniciais

$$(u(s, \cdot), D_t u(s, \cdot)).$$

Logo, pela unicidade, segue que $v(t, x) = u(t + s, x)$, e então:

$$U_V(r) \circ U_V(s) = U_V(r + s).$$

Observemos também que $U_V(0) = \mathcal{I}$ de maneira óbvia.

Por fim, se G é o gerador infinitesimal de $\{U_V(t)\}_{t \geq 0}$, então:

$$\begin{aligned} G \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} \left[U_V(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \right] = \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} \left[\begin{pmatrix} u(t, \cdot) \\ D_t u(t, \cdot) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(0, \cdot) \\ D_t u(0, \cdot) \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} i D_t u(0, \cdot) \\ i D_t^2 u(0, \cdot) \end{pmatrix} = \\ i \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \Delta + V & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

2.2 O Núcleo de Espalhamento

Consideremos o problema de Cauchy da equação da onda sem perturbação:

$$(D_t^2 - \Delta)u(t, x) = 0 \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_0(x), \quad D_t u(0, x) = u_1(x) \\ (u_0, u_1) &\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Se o problema for o unidimensional ($n = 1$), fazendo as mudanças de coordenadas $z = x + y$ e $t = x - y$, temos que

$$h(t, z) = u\left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2}\right) \quad (2.3)$$

satisfaz $\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial t} \equiv 0$ e então possui uma decomposição do tipo

$$h(t, z) = F(t) + G(z),$$

na qual $F, G \in C^\infty(\mathbb{R})$. Logo, de (2.3), obtemos

$$u(t, x) = F(x+t) + G(x-t).$$

Voltemos agora para o caso n -dimensional, com $n > 1$. Se $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfaz (2.2), então, pelo item c) da Proposição 1.1.2, a Transformada de Radon $\mathcal{R}(u(t, \cdot))(\omega, s) = v(t, s, \omega) = \int_{H(\omega, s)} u(t, x) dx$ ³ satisfaz

$$(D_t^2 - D_s^2)v(t, s, \omega) = 0.$$

Logo, existem $f, g \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ tais que

$$v(t, s, \omega) = f(s+t, \omega) + g(s-t, \omega).$$

Além disso, pelas condições iniciais em (2.2),

$$\begin{aligned} \mathcal{R}u_0(\omega, s) &= v(0, s, \omega) = f(s, \omega) + g(s, \omega) \\ \mathcal{R}u_1(\omega, s) &= D_t v(0, s, \omega) = D_s f(s, \omega) - D_s g(s, \omega). \end{aligned}$$

³Notemos, pelo Teorema 2.1.1, que as soluções da equação da onda são compactamente suportadas no $\mathbb{R}^n$ (num intervalo de tempo limitado), sempre que as condições iniciais também o forem. Logo, podemos tomar a Transformada de Radon das mesmas.

Aplicando D_s à primeira equação e subtraindo com a segunda, temos que

$$D_s g(s, \omega) = \frac{1}{2} [D_s \mathcal{R}u_0(\omega, s) - \mathcal{R}u_1(\omega, s)]. \quad (2.4)$$

Definimos então a Transformada de Lax-Phillips, como uma tentativa de generalizar (2.4):

Definição 2.2.1. A Transformada (de Radon modificada) de Lax-Phillips é a aplicação LP , definida em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ por:

$$LP \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} (\omega, s) = 2^{\frac{1}{2}} (\pi)^{\frac{n-1}{2}} \left[D_s^{\frac{n+1}{2}} \mathcal{R}u_0(\omega, s) - D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}u_1(\omega, s) \right]$$

Proposição 2.2.1. A Transformada de Lax-Phillips

$$LP : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$$

é uma aplicação injetiva e interliga o Grupo de Onda Livre e o Grupo de Translação $\tau_t v(s, \omega) = v(s - t, \omega)$:

$$LP \circ U_0(t) = \tau_t \circ LP.$$

Demonstração: Seja $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ satisfazendo (2.2) nas condições iniciais $(u_0, u_1) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como já fora argumentado anteriormente, existem $f, g \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ tais que

$$\mathcal{R}(u(t, \cdot))(\omega, s) = v(t, s, \omega) = f(s + t, \omega) + g(s - t, \omega).$$

Então, devemos ter que (usando Regra da Cadeia):

$$\begin{aligned} D_s^{\frac{n+1}{2}} \mathcal{R}(u(t, \cdot))(\omega, s) &= D_s^{\frac{n+1}{2}} v(t, s, \omega) = D_s^{\frac{n+1}{2}} f(s + t, \omega) + D_s^{\frac{n+1}{2}} g(s - t, \omega) \\ D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}(D_t u(t, \cdot))(\omega, s) &= D_s^{\frac{n-1}{2}} D_t v(t, s, \omega) = D_s^{\frac{n+1}{2}} f(s + t, \omega) - D_s^{\frac{n+1}{2}} g(s - t, \omega). \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } LP \circ U_0(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} (\omega, s) = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} (\pi)^{\frac{n-1}{2}} D_s^{\frac{n+1}{2}} g(s - t, \omega).$$

Por outro lado, fazendo $t = 0$ nas duas equações acima, temos

$$\begin{aligned} D_s^{\frac{n+1}{2}} \mathcal{R}u_0(\omega, s) &= D_s^{\frac{n+1}{2}} f(s, \omega) + D_s^{\frac{n+1}{2}} g(s, \omega) \\ D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}u_1(\omega, s) &= D_s^{\frac{n+1}{2}} f(s, \omega) - D_s^{\frac{n+1}{2}} g(s, \omega). \end{aligned}$$

$$\text{Então, } LP \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} (\omega, s) = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} (\pi)^{\frac{n-1}{2}} D_s^{\frac{n+1}{2}} g(s, \omega), \text{ donde concluímos que}$$

$$LP \circ U_0(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \tau_t \circ LP \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Para provarmos a injetividade, suponhamos que $LP \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = 0$. Então, temos que

$$0 = LP \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}(\omega, s) = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} (\pi)^{\frac{n-1}{2}} D_s^{\frac{n+1}{2}} g(s, \omega) \Rightarrow D_s^{\frac{n+1}{2}} g(s, \omega) = 0.$$

De uma maneira semelhante de como encontramos (2.4), obtemos uma relação para $D_s f(s, \omega)$:

$$D_s f(s, \omega) = \frac{1}{2} [D_s \mathcal{R}u_0(\omega, s) + \mathcal{R}u_1(\omega, s)].$$

Uma vez que $\mathcal{R}u_1(\omega, s) = \mathcal{R}u_1(-\omega, -s)$ e $D_s \mathcal{R}u_0(\omega, s) = -D_s \mathcal{R}u_0(-\omega, -s)$, segue que $D_s f(s, \omega) = -D_s g(-s, -\omega)$ e, então, $D_s^{\frac{n+1}{2}} f(s, \omega) = 0$.

Logo, temos que $D_s^{\frac{n+1}{2}} \mathcal{R}(u(t, \cdot))(\omega, s) = D_s^{\frac{n+1}{2}} f(s + t, \omega) + D_s^{\frac{n+1}{2}} g(s - t, \omega) = 0$ e, como $\frac{n+1}{2} \leq n-1$, concluímos que $D_s^{n-1} \mathcal{R}(u(t, \cdot)) \equiv 0$.

Usando a fórmula de inversão do Teorema 1.1.2, temos que

$$u(t, \cdot) = d_n \mathcal{R}^t D_s^{n-1} \mathcal{R}u(t, \cdot) = 0, \forall t \in \mathbb{R},$$

donde $u_0 = u_1 \equiv 0$.

■

Apresentaremos agora uma sequência de argumentos⁴ e resultados, com o intuito de definir o que chamamos de o Núcleo de Espalhamento.

Inicialmente, notemos que, se u é a solução de (2.2) com as condições iniciais $(u_0, u_1) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e se definirmos

$$k(t, s, \omega) = LP \circ U_0(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}(\omega, s), \quad (2.5)$$

temos pela Proposição 2.2.1 que $k(t, s, \omega) = k_0(s - t, \omega)$ é uma solução da EDP de primeira ordem

$$(D_t + D_s)k(t, s, \omega) = 0.$$

⁴Chamamos essa sequência de argumentos de a *Representação por Translação de Lax-Phillips*.

Uma pergunta natural seria: Se fosse no caso da equação da onda perturbada, qual seria o efeito nessa EDP?

Se definirmos, por analogia a (2.5),

$$k_V(t, s, \omega) = LP \circ U_V(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} (\omega, s) = 2^{\frac{1}{2}}(\pi)^{\frac{n-1}{2}} \left[D_s^{\frac{n+1}{2}} \mathcal{R}(u(t, \cdot))(\omega, s) - D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}(D_t u(t, \cdot))(\omega, s) \right],$$

temos que:

$$(D_t + D_s)k_V(t, s, \omega) = 2^{\frac{1}{2}}(\pi)^{\frac{n-1}{2}} \left[-D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}(D_t^2 u(t, \cdot))(\omega, s) + D_s^{\frac{n+3}{2}} \mathcal{R}(u(t, \cdot))(\omega, s) \right]$$

Pelo item c) da Proposição 1.2.2, devemos ter:

$$(D_t + D_s)k_V(t, s, \omega) = 2^{\frac{1}{2}}(\pi)^{\frac{n-1}{2}} D_s^{\frac{n-1}{2}} [-\mathcal{R}(D_t^2 u(t, \cdot))(\omega, s) + D_s^2 \mathcal{R}(u(t, \cdot))(\omega, s)] = 2^{\frac{1}{2}}(\pi)^{\frac{n-1}{2}} D_s^{\frac{n-1}{2}} [-\mathcal{R}(D_t^2 u(t, \cdot) - \Delta u(t, \cdot))(\omega, s)] = -2^{\frac{1}{2}}(\pi)^{\frac{n-1}{2}} D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}(V(\cdot)u(t, \cdot))(\omega, s).$$

Tomando novamente a decomposição

$$\mathcal{R}(u(t, \cdot))(\omega, s) = f(s + t, \omega) + g(s - t, \omega),$$

temos que

$$u_0(x) = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} D_s^{n-1} \mathcal{R}u_0(\omega, \langle x, \omega \rangle) d\omega = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} D_s^{n-1} [f(\langle \omega, x \rangle, \omega) + g(\langle \omega, x \rangle, \omega)] d\omega.$$

Como $D_s f(s, \omega) = -D_s g(-s, -\omega)$, segue que

$$u_0(x) = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} D_s^{n-1} [g(-\langle \omega, x \rangle, -\omega) + g(\langle \omega, x \rangle, \omega)] d\omega = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} D_s^{n-1} g(\langle \omega, x \rangle, \omega) d\omega.$$

Uma vez que

$$k_0(s, \omega) = LP \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} (\omega, s) = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} D_s^{\frac{n+1}{2}} g(s, \omega),$$

temos que

$$D_s^{\frac{n-3}{2}} k_0(s, \omega) = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} D_s^{n-1} g(s, \omega),$$

e então

$$u_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} D_s^{\frac{n-3}{2}} k_0(\langle \omega, x \rangle, \omega) d\omega.$$

Por argumentos análogos, recuperamos u_1 pela fórmula:

$$u_1(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} D_s^{\frac{n-1}{2}} k_0(\langle \omega, x \rangle, \omega) d\omega.$$

Então, a solução para (2.1), nas condições (u_0, u_1) pode ser escrita como

$$u(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \frac{1}{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} D_s^{\frac{n-3}{2}} k_V(t, \langle \omega, x \rangle, \omega) d\omega.$$

Usando essa fórmula de inversão, temos que

$$(D_t + D_s)k_V(t, s, \omega) + V_{LP}k_V(t, s, \omega) = 0, \quad (2.6)$$

na qual V_{LP} é um operador em $C_c^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$:

$$V_{LP} = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}} D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R} V \mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-3}{2}}.$$

A proposição seguinte afirma que o problema de continuação de (2.6) pode ser resolvido. A demonstração da mesma pode ser encontrada em [8].

Proposição 2.2.2. Para cada $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, existe uma única distribuição

$$\alpha(t, s, \omega; \theta) \in C^{-\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1})$$

satisfazendo (2.6) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$, com

$$\alpha(t, s, \omega; \theta) = \delta(s - t) \delta_\theta(\omega), \text{ em } t < -\rho,$$

na qual $\rho = \sup \{|x| \mid x \in \text{supp}(V)\}$. Além disso, α pode ser expandida como

$$\alpha = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \alpha_j,$$

$$\alpha_0(t, s, \omega; \theta) = \delta(s - t) \delta_\theta(\omega) \text{ e } \alpha_j = [(D_t + D_s)^{-1} V_{LP}]^j \alpha_0, j \geq 1,$$

na qual

$$(D_t + D_s)u = f, \text{ com } f = 0 \text{ e } u = 0 \text{ em } s < -\rho \implies u = (D_t + D_s)^{-1} f$$

e, $\forall j \in \{1, 2, \dots\}$,

$$\text{supp}(\alpha_j) \subseteq \{t \geq -\rho\} \cap \{s \geq -\rho\} \cap \{t - s \geq -2\rho\} \cap \{t - s \leq 2\rho j\},$$

se $\text{supp}(V) \subseteq B(\rho)$.

Temos então que existe uma distribuição $\kappa_V \in C^{-\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1})$ tal que, em $s > \rho$,⁵

$$\alpha(t, s, \omega, \theta) = \kappa_V(t - s, \omega, \theta). \quad (2.7)$$

Definição 2.2.2. A distribuição $\kappa_V \in C^{-\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1})$ em (2.7) é chamada o *Núcleo de Espalhamento*.

Proposição 2.2.3. O Núcleo de Espalhamento κ_V é suportado em

$$\text{supp}(\kappa_V) \subseteq [-2\rho, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1},$$

se $\text{supp}(V) \subseteq B(\rho)$. Além disso,

$$\text{singsupp}(\kappa_V) \subseteq \{(s, \omega, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} / s = 0 \text{ e } \theta = \omega\}.$$

O leitor interessado na demonstração da Proposição 2.2.3 poderá encontrá-la em [8].

Podemos interpretar κ_V como o resultado final de quando a onda livre

$$\alpha_0(t, s, \omega, \theta) = \delta(s - t)\delta_\theta(\omega),$$

que se propaga da esquerda, entra na região $|s| \leq \rho$, onde o “potencial” V_{LP} está confinado e depois propaga-se livremente para a direita.

⁵Notemos que, em $|s| > \rho$, $V_{LP} = 0$, donde $\alpha(t, s, \omega, \theta)$ satisfaz $(D_t + D_s)\alpha = 0$.

Capítulo 3

A Transformada de Retroespalhamento Modificada

Nesse capítulo, definiremos, na seção 3.2, a Transformada de Retroespalhamento Generalizada e “Modificada”. Para isso, falaremos, na seção 3.1, dos espaços de Sobolev H^k e mostraremos que as aplicações $\mathcal{R}_n$ e V_{LP} , definidas nos capítulos anteriores, possuem esse tipo de regularidade. Então, apresentaremos (na seção 3.3) como aplicação a “versão” associada a essa transformada do Problema Inverso de Espalhamento no caso dois corpos.

3.1 Espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$

Para definirmos a Transformada de Retroespalhamento Generalizada e “Modificada” e apresentarmos a principal aplicação da mesma (que é o Problema Inverso de Espalhamento, com certas restrições nas direções das ondas planas), será conveniente tomarmos potenciais em apropriados Espaços de Hilbert. Estes serão os Espaços de Sobolev ¹ $H^s(\mathbb{R}^n)$ (para $s \in \mathbb{R}$), definidos por

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) / (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

com produto interno

$$\langle f, g \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

O dual de $H^s(\mathbb{R}^n)$ pode ser identificado com o espaço $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. No caso particular $k \in \mathbb{N}$, $H^k(\mathbb{R}^n)$ pode ser expresso como

¹Sergei Lvovich Sobolev (6 de outubro de 1908 - 3 de janeiro de 1989) foi um matemático russo. Além dos espaços que levam o seu nome, Sobolev foi quem introduziu a noção de distribuições, em 1935.

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) / D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall |\alpha| \leq k\}$$

com norma $\|f\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ equivalente à norma induzida pelo produto interno anterior e D^α sendo a derivação no sentido fraco. Ainda no caso $k \in \mathbb{N}$

$$u \in H^{-k}(\mathbb{R}^n)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$u \text{ é uma distribuição que pode ser escrita como } u = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u_\alpha, \text{ com } u_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

O leitor poderá encontrar mais detalhes sobre esses Espaços de Sobolev em [3].

Usaremos a notação $\dot{H}^s$ quando quisermos “focar” o suporte das funções, no seguinte sentido: se $X \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\dot{H}^s(X) = \{f \in H^s(\mathbb{R}^n) / f(x) = 0 \text{ se } x \notin X\}.$$

Observação 3.1.1. Usaremos o fato de que a distribuição $\delta(t-s)\delta_\theta(\omega) \in H_{loc}^{-\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1})$, na qual

$$\begin{aligned} H_{loc}^{-\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}) = \\ \{u \in C^{-\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}) / fu \in H^{-\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}), \\ \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1})\}. \end{aligned}$$

Notemos que, se $f, g \in H^k(\mathbb{R}^n)$, então $f+g, fg \in H^k(\mathbb{R}^n)$ ($k \in \mathbb{N}$). Logo, $H^k(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra.

A proposição seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em [6], afirma que, sob certas condições para $k \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um $H^k(\mathbb{R}^n)$ -módulo.

Proposição 3.1.1 (Gagliardo-Nirenberg). Dados $k \in \mathbb{N}$, com $k > \frac{n}{2}$, e $s \in \mathbb{R}$, com $-k \leq s \leq k$,

$$H^k(\mathbb{R}^n).H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq H^s(\mathbb{R}^n).$$

Em particular,

$$\dot{H}^k(X).H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq \dot{H}^s(X),$$

onde $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Usando a Proposição 3.1.1 e os conceitos dados acima, “ajustaremos” as aplicações $\mathcal{R}_n = D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}$ e V_{LP} para os espaços H^k .

Proposição 3.1.2. Dado $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}_n = D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}$ é uma aplicação limitada

$$\mathcal{R}_n : \dot{H}^k(B(\rho)) \longrightarrow \dot{H}^k(\mathbb{S}^{n-1} \times [-\rho, \rho]).$$

Demonstração: O caso $k = 0$ é consequência direta do Teorema 1.3.2 (do Capítulo 1). Para o caso $k > 0$, tomemos $f \in \dot{H}^1(B(\rho))$. Temos que $D_j f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, donde pelo Teorema 1.3.2 segue que $\mathcal{R}_n D_j f \in L^2(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$. Então, o item b) da Proposição 1.2.2 nos dá

$$|\omega_j D_s \mathcal{R}_n f(\omega, s)| = |\mathcal{R}_n D_j f(\omega, s)| \leq |\mathcal{R}_n D_j f(\omega, s)|,$$

donde $D_s \mathcal{R}_n f \in L^2(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$.

Como $f(x) = 0$ em $|x| > \rho$ implica $\mathcal{R}_n f(\omega, s) = 0$ em $|s| > \rho$, segue que $\mathcal{R}_n f(\omega, \cdot) \in \dot{H}^1([-\rho, \rho])$.

Repetindo esse argumento k vezes, concluímos que

$$f \in \dot{H}^k(B(\rho)) \Rightarrow \mathcal{R}_n f(\omega, \cdot) \in \dot{H}^k([-\rho, \rho]).$$

Por outro lado, notemos que a Transformada de Radon $\mathcal{R}$ pode ser escrita na forma

$$\mathcal{R}f(\omega, s) = \langle \delta(s - \langle \omega, x \rangle), f(x) \rangle.$$

Logo, se $f \in \dot{H}^1(B(\rho))$, temos que:

$$|D_{\omega_j} \mathcal{R}_n f(\omega, s)| = |D_s^{\frac{n-1}{2}} D_{\omega_j} \langle \delta(s - \langle \omega, x \rangle), f(x) \rangle| = |D_s \mathcal{R}_n(x_j f)(\omega, s)|.$$

Então, $\mathcal{R}_n f \in H^1(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$ é consequência direta de $\mathcal{R}_n(x_j f)(\omega, \cdot) \in \dot{H}^1([-\rho, \rho])$.

Repetindo os argumentos k vezes, concluímos que

$$f \in \dot{H}^k(B(\rho)) \Rightarrow \mathcal{R}_n f \in H^k(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}).$$

Agora, tomemos $u = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u_\alpha \in \dot{H}^{-k}(B(\rho))$. Temos, por definição, que:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_n(D^\alpha u), v \rangle &= \left\langle D_s^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}(D^\alpha u), v \right\rangle = (-1)^{|\alpha| + \frac{n-1}{2}} \left\langle u, D^\alpha \mathcal{R}^t(D_s^{\frac{n-1}{2}} v) \right\rangle = \\ &= (-1)^{|\alpha| + \frac{n-1}{2}} \left\langle u, \mathcal{R}^t(D_s^{|\alpha|} D_s^{\frac{n-1}{2}} \varphi_\alpha v) \right\rangle = \left\langle D_s^{|\alpha|} \varphi_\alpha \mathcal{R}_n u, v \right\rangle, \end{aligned}$$

na qual $\varphi_\alpha(\omega) = \omega_1^{\alpha_1} \dots \omega_n^{\alpha_n}$.

Logo,

$$\mathcal{R}_n u = \sum_{|\alpha| \leq k} D_s^{|\alpha|} (\varphi_\alpha \mathcal{R}_n u_\alpha),$$

e, como $\varphi_\alpha \mathcal{R}_n u_\alpha \in L^2(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$ (de acordo com o Teorema 1.3.2), temos que $\mathcal{R}_n u \in \dot{H}^{-k}(\mathbb{S}^{n-1} \times [-\rho, \rho])$. Isto demonstra a proposição. ■

Proposição 3.1.3. Dados $k \in \mathbb{Z}$, com $-\frac{n+3}{2} \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, e um potencial $V \in \dot{H}^{\frac{n+1}{2}}(B(\rho))$, V_{LP} é uma aplicação limitada

$$V_{LP} : H^k(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) \longrightarrow H^{k+1}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}).$$

Demonstração: Seja $f \in H^k(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$. Escrevendo $\mathcal{R}^t f$ como

$$\mathcal{R}^t f(x) = \langle \delta(s - \langle x, \omega \rangle), f(\omega, s) \rangle,$$

e usando os mesmos argumentos da demonstração da Proposição 3.1.2, garantimos que

$$\mathcal{R}_n^t = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-1}{2}} : H^k(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) \longrightarrow H^k(\mathbb{R}^n),$$

na qual $k \in \mathbb{Z}$. Ainda, se $0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ e $|\alpha| \leq k+1$,

$$|D^\alpha \mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-3}{2}} f(x)| \leq |D^\beta \mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-1}{2}} f(x)|$$

(no qual $|\beta| \leq k$), donde segue que $\mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-3}{2}} f \in H^{k+1}(\mathbb{R}^n)$.

Se $-\frac{n+3}{2} \leq k < 0$, usamos o mesmo argumento da demonstração da Proposição 3.1.2 para concluir que $\mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-3}{2}} f \in H^{k+1}(\mathbb{R}^n)$.

Uma vez que $-\frac{n+1}{2} \leq k+1 \leq \frac{n+1}{2}$, temos pela Proposição 3.1.1 que $V \mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-3}{2}} f \in \dot{H}^{k+1}(B(\rho))$. Por fim, pela Proposição 3.1.2,

$$V_{LP} f = d_n \mathcal{R}_n V \mathcal{R}^t D_s^{\frac{n-3}{2}} f \in \dot{H}^{k+1}(\mathbb{S}^{n-1} \times [-\rho, \rho]).$$
■

Para finalizar essa seção, enunciaremos um resultado que garante a convergência da expansão de α na Proposição 2.2.2, se $V \in \dot{H}^{\frac{n+1}{2}}(B(\rho))$. A demonstração do mesmo poderá ser encontrada em [8].

Proposição 3.1.4. Dados $V \in \dot{H}^{\frac{n+1}{2}}(B(\rho))$, $T < \infty$ e $k \in \mathbb{Z}$, com $-\frac{n+3}{2} \leq k \leq \frac{n+1}{2}$, $(D_t + D_s)^{-1} V_{LP}$ é um operador limitado em

$$\dot{H}_{T,\rho}^k = \left\{ f \in \dot{H}^k([-\infty, T]_t \times [-\rho, \rho]_s \times \mathbb{S}^{n-1}) / f = 0 \text{ em } t < -\rho \right\}$$

e para alguma constante $C = C(T)$,

$$\|[(D_t + D_s)^{-1} V_{LP}]^j\|_{H^k} \leq \frac{C^{j+1} \|V\|_{H^{\frac{n+1}{2}}}^j}{j!}.$$

3.2 A Transformada de Retroespalhamento Generalizada e “Modificada”

Agora estamos em condições necessárias para concluirmos o objetivo principal desse trabalho: definir a Transformada de Retroespalhamento Generalizada e “Modificada”. Sejam $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação ortogonal, $\pi_{S,\rho}$ a projeção ortogonal de $H^2(\mathbb{S}^{n-1} \times [-2\rho, 2\rho])$ no fecho da imagem de $(\mathcal{I} - S)^* \dot{H}^{\frac{n+1}{2}}(B(\rho)) = \dot{H}^{\frac{n+1}{2}}((\mathcal{I} - S)B(\rho))$ por $D_s^{\frac{n-3}{2}} \mathcal{R}_n$ e $P_{S,\rho}$ a imagem de $\pi_{S,\rho}$. Consideremos então a composição da aplicação $D_s^{\frac{n-3}{2}}$ (restringindo também o domínio) com $\pi_{S,\rho}$

$$\chi_\rho : C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{D_s^{\frac{n-3}{2}}} C^\infty([-2\rho, 2\rho] \times \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\pi_{S,\rho}} \overline{D_s^{\frac{n-3}{2}} \mathcal{R}_n(\dot{H}^{\frac{n+1}{2}}((\mathcal{I} - S)B(\rho)))} \subseteq \dot{H}^2(\mathbb{S}^{n-1} \times [-2\rho, 2\rho]).$$

De acordo com a Proposição 2.2.3, temos que se $V \in \dot{C}^\infty(B(\rho))$ (ou seja, $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e tem suporte compacto contido em $B(\rho)$), então κ_V tem suporte singular

$$\text{singsupp}(\kappa_V) \subseteq \{(s, \omega, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} / s = 0 \text{ e } \omega = \theta\}.$$

Logo, se $\mathcal{I} - S$ for invertível, temos que $\kappa_V(s, S\theta, \theta) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1})$.

Definição 3.2.1. Seja $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação tal que $\mathcal{I} - S$ seja invertível. A Transformada de Retroespalhamento Modificada (e generalizada²) é a aplicação

$$\beta_S : \dot{C}^\infty(B(\rho)) \ni V \mapsto \chi_\rho(\kappa_V(s, S\theta, \theta)) \in P_{S,\rho} \subseteq \dot{H}^2(\mathbb{S}^{n-1} \times [-2\rho, 2\rho]). \quad (3.1)$$

²Generalizada no sentido de aplicarmos uma transformação S qualquer, tal que $\mathcal{I} - S$ seja invertível. No caso $S = -\mathcal{I}$, temos a Transformada de Retroespalhamento Modificada abordada em [8].

3.3 O Problema Inverso de Retroespalhamento no caso dois corpos

Como já fora comentado, o Problema Inverso de Retroespalhamento no caso dois corpos funda-se em determinar um potencial V através da Transformada de Espalhamento³ (ou seja, medindo a_V) e que, para $n \geq 3$ ímpar, a_V determina V (ou seja, a Transformada de Espalhamento é injetiva).

Porém, ainda não se sabe se podemos recuperar V a partir da Transformada de Retroespalhamento, que é na verdade a Transformada de Espalhamento com a restrição na direção de “entrada” $\omega = S\theta$ de uma onda plana, na qual $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear tal que $\mathcal{I} - S$ é invertível e θ é a direção de “saída”. Aqui, consideraremos a Transformada de Retroespalhamento Generalizada e “Modificada” definida em (3.1) ao invés da transformada “original”. Apresentaremos dois dos principais resultados (seguidos de comentários pertinentes à respeito dos mesmos) obtidos para essa “versão” do problema. O primeiro é:

Teorema 3.3.1. Se $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ for uma transformação ortogonal tal que $\mathcal{I} - S$ seja invertível, então a Transformada de Retroespalhamento Generalizada e “Modificada” (3.1) estende por continuidade para

$$\beta_S : \dot{H}^{\frac{n+1}{2}}(B(\rho)) \longrightarrow P_{S,\rho} \subseteq \dot{H}^2(\mathbb{S}^{n-1} \times [-2\rho, 2\rho]),$$

e é inteiramente analítica. Mais precisamente, ela pode ser escrita como

$$\beta_S(V) = \beta_S^1(V) + \sum_{j=2}^{\infty} \beta_S^j(V, \dots, V), \quad (3.2)$$

na qual

$$\beta_S^1 : \dot{H}^{\frac{n+1}{2}}(B(\rho)) \longrightarrow P_{S,\rho} \subseteq \dot{H}^2(\mathbb{S}^{n-1} \times [-2\rho, 2\rho])$$

é um isomorfismo linear e, para cada $j \geq 2$,

$$\beta_S^j : \dot{H}^{\frac{n+1}{2}}(B(\rho)) \times \dots \times \dot{H}^{\frac{n+1}{2}}(B(\rho)) \longrightarrow P_{S,\rho} \cap \dot{H}^{\frac{5}{2}}(\mathbb{S}^{n-1} \times [-2\rho, 2\rho])$$

é simétrica e satisfaz, para todo $0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{2}$,

³Que é a aplicação que associa um potencial $V \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ à amplitude de espalhamento a_V , definida por

$$a_V(\omega, \theta, \lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t} [\kappa_V(t, \omega, \theta) - \delta(t)\delta_\theta(\omega)] dt.$$

$$\|\beta_S^j(V, \dots, V)\|_{\dot{H}^{\frac{n+1}{2}-\epsilon}} \leq \frac{C^{j+1} \|V\|_{\dot{H}^{\frac{n+1}{2}}}^j}{(j!)^{2\epsilon}}.$$

O Teorema 3.3.1 é o principal resultado da referência [9]. Para conseguirmos a expansão (3.2), usamos a expansão de α da Proposição 2.2.2, que converge se $V \in \dot{H}^{\frac{n+1}{2}}(B(\rho))$, de acordo com a Proposição 3.1.4. De fato, sendo

$$\delta(t-s)\delta_\theta(\omega) \in H_{loc}^{-\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}),$$

temos que $\alpha_j \in H_{loc}^{-\frac{n+1}{2}+j}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1})$.

Logo, se

$$\kappa_j(s, \omega, \theta) = \alpha_j(s + \rho, \rho, \omega, \theta)$$

devemos ter

$$\kappa_j \in H^{-\frac{n+1}{2}+j}([-2\rho, T] \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}), \text{ para qualquer } T > -2\rho.$$

Aplicando a transformação S , segue que

$$\kappa_j(s, S\theta, \theta) \in H^{-\frac{n+1}{2}+j}([-2\rho, T] \times \mathbb{S}^{n-1})$$

e finalmente,

$$\beta_S^j(V) = \chi_\rho(\kappa_j(s, S\theta, \theta)) \quad ^4.$$

Usando a extensão analítica de β_S , temos o segundo resultado:

Teorema 3.3.2. Existe um subconjunto fechado $G(\rho) \subset \dot{H}^{\frac{n+1}{2}}(B(\rho))$, que tem codimensão pelo menos dois, tal que para cada

$$V' \in \dot{H}^{\frac{n+1}{2}}(B(\rho)) \setminus G(\rho),$$

existe $r > 0$ de tal forma que a aplicação

$$\beta_S : \{V \in \dot{H}^{\frac{n+1}{2}}(B(\rho)) \mid \|V - V'\|_{\dot{H}^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)} < r\} \longrightarrow \dot{H}^2(\mathbb{S}^{n-1} \times [-2\rho, 2\rho])$$

é um isomorfismo sobre sua imagem.

O conjunto $G(\rho)$ consiste de todos os potenciais $V \in \dot{H}^{\frac{n+1}{2}}(B(\rho))$ tais que a derivada de β_S com respeito a V não é um isomorfismo. A derivação aqui é no sentido de Fréchet, que é uma generalização da derivação em $\mathbb{R}^n$, só que para Espaços Vetoriais Topológicos localmente convexos (por exemplo, Espaços de Banach). Então o resultado é garantido pelo Teorema da Função Inversa aplicado ao espaço $H^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$.

⁴Pode-se mostrar que $\mathcal{S}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$ é denso em $H^s(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$, com $s \in \mathbb{R}$. Logo, a continuidade de χ_ρ nos permite falar em $\chi_\rho(\kappa_j(s, S\theta, \theta))$.

Apêndice A

Noções de Distribuições

A.1 Definição e Exemplos

Consideremos a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Temos que H é diferenciável, com exceção da origem, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x) - H(0)}{x - 0} = +\infty.$$

Uma pergunta natural seria: podemos generalizar o conceito de funções para termos H' bem definida? Para responder essa pergunta, recorreremos à integração por partes:

$$\int_a^b g'(x)h(x)dx = g.h|_a^b - \int_a^b g(x)h'(x)dx, \quad (\text{A.1})$$

na qual $g, h \in C^1([a, b])$. Então, se $g \notin C^1([a, b])$, podemos definir $\int_{[a, b]} g'h$ como em (A.1), $\forall h \in C^1([a, b])$. Notemos que essa definição de g' só é válida se sempre “testarmos” a mesma com funções $C^1([a, b])$ (no sentido da integração em (A.1)) e, portanto, não podemos garantir que g' seja uma função. Além disso, no caso de o intervalo ser todo o $\mathbb{R}$, podemos definir g' da mesma forma, só que usando funções em $C_c^1(\mathbb{R}) = \{f \in C^1(\mathbb{R}) / \text{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}\}$ ¹ como testes.

Voltando ao exemplo acima, temos que, $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$,

¹A notação $K \subset\subset \mathcal{X}$ significa que K é um subconjunto de $\mathcal{X}$ e é compacto.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H'(x)\varphi(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)dx = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0).$$

Ou seja, podemos encarar H' como um funcional

$$\begin{aligned} H' : C_c^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ \langle H', \varphi \rangle &= \varphi(0). \end{aligned}$$

Essa é a idéia intuitiva do que chamamos de *funções generalizadas* (ou *distribuições*). Na prática, o espaço $C_c^1(\mathbb{R})$ é substituído pelo espaço

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / \text{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}\},$$

o qual chamamos de o *Espaço das Funções-Testes*.

A fim de formalizar esse conceito, vamos definir convergência de sequências em C_c^∞ . Aqui, $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ sempre representará um aberto.

Definição A.1.1. Uma sequência $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, na qual $\varphi_j \in C_c^\infty(\mathcal{X})$, $\forall j \in \mathbb{N}$, converge para zero em $C_c^\infty(\mathcal{X})$ se

- i) existe $K \subset\subset \mathcal{X}$ tal que $\text{supp}(\varphi_j) \subseteq K$, para todo $j \in \mathbb{N}$;
- ii) Para todo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha \varphi_j \rightarrow 0$ uniformemente.

Definição A.1.2. Uma *distribuição* (ou *função generalizada*) é um funcional linear

$$u : C_c^\infty(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

que satisfaz

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle u, \varphi_j \rangle = 0,$$

para toda sequência $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\mathcal{X})$ que convirja para zero. Denotaremos por $C^{-\infty}(\mathcal{X})$ o espaço vetorial complexo das distribuições (munido com as operações usuais).

Exemplo A.1.1. O delta de Dirac, que é uma generalização da derivada “fraca” (ou seja, no sentido de como foi feito acima) da função de Heaviside,

$$\begin{aligned} \delta : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \langle \delta, \varphi \rangle &= \varphi(0) \end{aligned}$$

é uma distribuição. Mais geralmente, se $a \in \mathcal{X}$, então

$$\begin{aligned}\delta_a : C_c^\infty(\mathcal{X}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \langle \delta_a, \varphi \rangle &= \varphi(a)\end{aligned}$$

é também uma distribuição.

Exemplo A.1.2. Se x e y forem parâmetros, o delta de Dirac definido como

$$\begin{aligned}\delta(x - y) : C_c^\infty(\mathcal{X} \times \mathcal{X}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \langle \delta(x - y), \varphi \rangle &= \int_{\mathcal{X}} \varphi(y, y) dy\end{aligned}$$

é uma distribuição. Notemos que $\delta(x - y)$ satisfaz

$$\langle I(\psi), \varphi \rangle_{L^2(\mathcal{X})} = \langle \delta(x - y), \psi \otimes \varphi \rangle,$$

na qual $I : C_c^\infty(\mathcal{X}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X})$ denota a aplicação inclusão. Isso não é uma coincidência. Trata-se de uma teoria de grande importância no estudo das equações diferenciais: O Núcleo de Schwartz. O leitor interessado, poderá encontrar detalhes em [2].

Exemplo A.1.3. Uma função $f \in L_{loc}^1(\mathcal{X}) = \{f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ é mensurável e } \forall K \subset\subset \mathcal{X}, \int_K |f(x)| dx < \infty\}$ pode ser vista como uma distribuição T_f se definirmos

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathcal{X}} f(x) \varphi(x) dx.$$

Baseando-nos no Exemplo A.1.3, definimos:

Definição A.1.3. Dizemos que $u \in C^{-\infty}(\mathcal{X})$ é uma distribuição regular se $\exists f \in L_{loc}^1(\mathcal{X})$ tal que $u = T_f$. Do contrário, u é dita uma distribuição singular.

Definição A.1.4. Seja $u \in C^{-\infty}(\mathcal{X})$. O suporte de u , o qual denotaremos por $\text{supp}(u)$, é o complemento do conjunto

$$\{x \in \mathcal{X} / u = 0 \text{ numa vizinhança aberta de } x\},$$

no qual

$$u = 0 \text{ num aberto } V \subseteq \mathcal{X} \iff \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathcal{X}) \text{ com } \text{supp}(\varphi) \subset V, \langle u, \varphi \rangle = 0.$$

Definição A.1.5. Seja $u \in C^{-\infty}(\mathcal{X})$. O suporte singular de u , o qual denotaremos por $\text{singsupp}(u)$, é o complemento do conjunto

$$\{x \in \mathcal{X} / u \in C^\infty \text{ numa vizinhança aberta de } x\}.$$

A.2 Operações com Distribuições

As definições de operações com distribuições são feitas a partir do conceito de dualidade de operadores em C_c^∞ , isto é: se $T : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é um operador linear sequencialmente contínuo em zero (ou seja, $T(\varphi_j) \rightarrow 0$ sempre que $\varphi_j \rightarrow 0$), então $T^* : C^{-\infty}(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz

$$\langle T^*u, \varphi \rangle = \langle u, T(\varphi) \rangle,$$

na qual $u \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Obviamente, $T^*u = u \circ T$ é linear e sequencialmente contínuo em zero.

Definição A.2.1 (Multiplicação por uma função C^∞). Se $f \in C^\infty(\mathcal{X})$ e $u \in C^{-\infty}(\mathcal{X})$, definimos uma nova distribuição fu por

$$\langle fu, \varphi \rangle = \langle u, f\varphi \rangle,$$

na qual $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{X})$. No caso de u ser uma distribuição regular, digamos $u = T_h$, na qual $h \in L_{loc}^1(\mathcal{X})$, devemos ter

$$fu = fT_h = T_{fh}.$$

Definição A.2.2 (Diferenciação). Consideremos, para $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, o operador $\partial^\alpha : C_c^\infty(\mathcal{X}) \rightarrow C_c^\infty(\mathcal{X})$. Então, se $u \in C^{-\infty}(\mathcal{X})$, definimos a derivação “fraca” $\partial^\alpha u$ como

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle,$$

na qual $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{X})$ e $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$. Ainda, se u for uma distribuição regular, digamos $u = T_h$, com $h \in C^\infty(\mathcal{X})$, então $\partial^\alpha u$ e $\partial^\alpha h$ coincidem.

Definição A.2.3 (Translações e Dilatações). Se as aplicações $\tau_y : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\mu_\lambda : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fixados, denotam, respectivamente a translação e a dilatação do $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\tau_y \varphi(x) = \varphi(x - y)$$

$$\mu_\lambda \varphi(x) = \varphi(\lambda x),$$

então definimos, para $u \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, as distribuições $\tau_y u$ e $\mu_\lambda u$ como

$$\begin{aligned} \langle \tau_y u, \varphi \rangle &= \langle u, \tau_{-y} \varphi \rangle \\ \langle \mu_\lambda u, \varphi \rangle &= \frac{1}{|\lambda|^n} \langle u, \mu_{1/\lambda} \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] BARRETO, A. Sá. *Introdução às Transformadas de Radon*. 2003. Lecture notes available.
- [2] FRIEDLANDER, F. G.; JOSHI, M. *Introduction to the theory of distributions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
- [3] HOUNIE, J. *Teoria elementar das distribuições*. XII Colóquio brasileiro de Mat. IMPA, (1979).
- [4] WANG, J-N. *Inverse backscattering in even dimensions*. Math. Z., 239(2002), 365-379.
- [5] CASTRO, N.; MENDOZA, R.; ROJAS, J. *A Quantum Mechanical Proof of the Fourier Inversion Formula*. (pre-print).
- [6] ADAMS, R. *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press, 1975. V.65.
- [7] MELROSE, R. B. *Geometric Scattering Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [8] MELROSE, R. B.; UHLMANN, G. *Introduction to microlocal analysis*, lecture notes available.
- [9] ———. *Generalized backscattering and the Lax-Phillips transform*. Serdica Math. J., **34**(2008), 115-126.
- [10] MENDOZA, R. *O Desenvolvimento assintótico para a integral oscilatória*. 1980. 163f. Dissertação (Mestrado em Matemática). UFPE, Recife, 1980.
- [11] HELGASON, S. *Radon Transform*. Second Edition. Boston: Birkhäuser Boston, 1999.
- [12] PETKOV, V. *Scattering Theory for Hyperbolic Operators*. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1989.