Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

O PASSEIO DE CATALAN NA PRAIA E AS GRASSMANNIANAS DE RETAS

por

Hugo Leonardo de Andrade Guimarães

Recife

Janeiro - 2012

Hugo Leonardo de Andrade Guimarães

O PASSEIO DE CATALAN NA PRAIA E AS GRASSMANNIANAS DE RETAS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da UFPE, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luiz Meireles Araujo

Recife

Janeiro - 2012

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Guimarães, Hugo Leonardo de Andrade
O passeio de Catalan na praia e as grassmannianas de retas / Hugo Leonardo de Andrade Guimarães. - Recife: O Autor, 2012.
87 folhas : il., fig.
Orientador: André Luiz Meireles Araujo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2012.
Inclui bibliografia.

1. Álgebra. 2. Geometria algébrica. 3. Cálculo de Schubert. I. Araujo, André Luiz Meireles (orientador). II. Título.

512 CDD (23. ed.) MEI2012 – 051

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: _____

André Luiz Meireles de Araújo, UFPE
Orientador

Eduardo Shirlippe Góes Leandro, UFPE

Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia, UFPB

O PASSEIO DE CATALAN NA PRAIA E AS GRASSMANNIANAS DE RETAS

POR

Hugo Leonardo de Andrade Guimarães

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Janeiro – 2012

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a meus pais Miguel e Marleide(In memoriam) por sempre terem me incentivado a estudar e, de fato, é o que sei fazer de melhor, também agradeço aos demais familiares que estiveram presentes nesse meu projeto.

Agradeço também aos meus professores que, sem dúvida, foram e são essênciais nessa minha caminhada. Ao Professor Jorge, no ensino básico, que mostrou importância do exercício e da prática no processo de aprendizagem, ao professor Ednaldo Ernesto que, além de me fazer enxergar a matemática como um organismo vivo, foi decisivo nessa minha escolha pela carreira de matemático. E agora os professores da graduação : Paulo Figueiredo, Airton Castro, Antônio Carlos, Cleide Martins, Paulo Santiago, Fernando Cardoso, Sóstenes Lins, Marcus Vinícius, Sérgio Santa Cruz, Hildeberto Cabral e Manoel Lemos, que têm participação fundamental na minha base matemática me permitindo prosseguir os estudos no mestrado. Também agradeço aos professores do mestrado, que foram fundamentais nessa minha retomada depois de uma breve pausa: Aron Simis, Sóstenes Lins, Fernando Souza e André Meireles (orientador). Ao meu orientador André Meireles meu muito obrigado pela atenção e paciência nessa reta final. Finalizando a extensa lista de professores, meu sincero obrigado aos professores da banca Eduardo Leandro, Jaqueline Rojas e André Meireles que tiveram a paciência de ler e terem feitos valiosíssimas observações e correções à minha dissertação. E não poderia faltar Tânia, obrigado Tânia! :)

Em especial agradeço aos professores Antônio Carlos, Manoel Lemos, Fernando Cardoso, Eduardo Leandro, Sérgio Santa Cruz e Tânia Maranhão que foram muito solicitos quando externei minha intenção de retomar os estudos da matemática após uns anos afastado. Para aqueles que por uma razão ou outra tentaram dificultar minha caminhada meu muito obrigado. Vocês me fizeram ser forte.

Agora chegou a hora de agradecer aos irmão de caminhada. Aos pirraias Tiago e Karla e ao pirrainha Chico por terem tido tempo, paciência e algumas garrafas de vinho para conversar e algumas vezes estudar Álgebra Comutativa. À Ives, Isabelli, André, Gabriel Guedes e Tiago Pirraia que além de terem me aguentado esses meses ainda tiveram

paciência de ler esta dissertação e sugerido algumas correções. À Rodrigo Gondam, Antônio Macarrão e Hélio Baiba pelas conversas e "estudos" ora matemáticos ora sobre amenidades regados também a alguma cerveja estupidamente gelada. Também agradeço a Ricati juinu e Rafael neto du pelas ideias trocadas quando estava cogitando retornar à matemática e também pela arte de Juinu na figura do mapa da praia. E a todos os demais que de uma forma ou de outra foram importantes nessa caminhada.

Até a próxima.

O mergulho maior se da antes do salto
quando ainda olhamos os flancos do penhasco,
quando ainda firmados sobre nossos pés não saltamos ainda para o espaço.
Depois disso,
nesse especial momento exato
num momento chamado de coragem, de força,
o só despreendimento intenso nesse mágico momento,
da-se o ato.

Lula Côrtes

Resumo

O objetivo desse trabalho é mostrar que os Top Intersection Numbers das Grassmannianas de retas G(2,n+2) satisfazem a relação de recorrência apresentada no artigo "Catalan Traffic at the Beach" e a conexão desses dois com os números de Catalan. Tudo isso será feito com a teoria das Derivações de Schubert e sua conexão com as Grassmannianas de retas.

Palavras Chave : Catalan Traffic at the beach, Números de Catalan, Grassmannianas de retas,G(2,4),G(2,n+2), Derivações de Hasse Schmidt, Derivações de Schubert, Cálculo de Schubert, Álgebra de Grassmann, Polinômio de Giambelli, Top Intersection Number, Mergulho de Plücker.

Abstract

The objective of this paper is to show that the Top Intersection Numbers in the Grassmannian of lines, $G(2, n+2)$, satisfy the recurrence relation presented in the article "Catalan Traffic at the Beach " and the connection of these two with the Catalan numbers. All this will be done with the theory of Schubert derivations and the connection with the Grassmannians of lines.

Keywords: Catalan Traffic at the beach, Catalan Numbers, Grassmannian of lines, $G(2,4)$, $G(2,n+2)$, Hasse-Schmidt Derivations, Schubert Derivations, Schubert Calculus, Grassmann Algebra, Exterior Algebra, Giambelli's Problem, Giambelli's Polinomial, Top Intersection Number, Plücker Embedding.

Sumário

Resumo **6**

Abstract **7**

Introdução **10**

Introdução 10

1 Números de Catalan **12**

1.1 Coeficientes Binomiais 12

1.2 Um Pouco de História 19

1.3 Recorrência de Segner(Recorrência de Ordem 2) 22

1.4 Recorrência de ordem 1 e a Expressão Binomial dos Números de Catalan . 24

1.5 Função Geradora Ordinária e a Expressão Binomial dos Números de Catalan 26

1.6 Outro Modo de Obter a Expressão Binomial dos Números de Catalan . . . 29

2 Geometria Algébrica **32**

2.1 Espaço Projetivo $\mathbb{P}^n$ 32

2.2 Grassmanniana de retas 37

2.3 Variedades de Schubert 43

2.4 Ciclos de Schubert e Anel de Chow 45

3 Cálculo de Schubert numa Álgebra de Grassmann 47

3.1 Derivações de Hasse-Schmidt em uma Álgebra Exterior 48

3.1.1 Endomorfismo Shift 51

3.2 O anel $A^*(M, \mathcal{D})$ 52

3.3 Derivações de Schubert 55

3.4 Fórmula de Pieri para Derivações de Schubert 58

3.5 O Problema de Giambelli 59

3.6 Uma Apresentação para $A^*(\bigwedge^k M, D)$ 68

3.6.1 Relação entre $A^*(G(k,n))$ e $\mathcal{A}^*(\bigwedge^k M_n, D)$ 69

3.7 Cálculo de $A^*(\bigwedge^2 M_4, D_t)$ 70

3.7.1 Interpretação Geométrica de $A^*(\bigwedge^2 M_4, D_t)$ 74

4 O Passeio de Catalan na Praia e as Integrais das Grassmanianas de retas 75

4.1 O Passeio de Catalan na Praia 75

4.1.1 O Passeio na Praia e os Top Intersection Number de $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^{n+1})$ . . 77

4.2 Grau de Plücker de G(2,n+2) 80

4.3 Top Intersection Number em G(2,n+2) 80

Referências Bibliográficas 81

Introdução

O objetivo dessa dissertação de mestrado é mostrar que os Top Intersection Number satisfazem a relação de recorrência obtida por Niederhausen em [41], que é solução do "Catalan Traffic at the Beach" , criado e resolvido pelo próprio Niederhausen, e também a conexão desses dois com os números de Catalan. Tudo isso será feito à la teoria das Derivações de Schubert em Grassmanianas de retas.

O capítulo 1 será destinado ao estudo dos números de Catalan. Começaremos com alguns resultados clássicos dos coeficientes binomiais, do triâgulo aritmético (muitas vezes chamado de "Triângulo de Pascal") e algumas propriedades do coeficiente binomial central das linhas de ordem par do triângulo aritmético. Em seguida traçaremos uma linha do tempo da aparição dos números de Catalan juntamente com os questionamentos que fizeram tal sequência surgir. Também estudaremos as diferentes expressões que descrevem a sequência de Catalan.

No segundo capítulo, iremos fazer uma breve exposição sobre Geometria Algébrica com alguns resultados clássicos (algumas demonstrações serão indicadas nas referências), com o objetivo de chegarmos ao espaço de parâmetros conhecido como Grassmanniana das retas de um certo espaço projetivo, também veremos o mergulho de Plücker que nos permite ver a Grassmanniana como uma subvariedade de um certo espaço projetivo, em seguida faremos o estudo das variedades de Schubert. Para finalizar o capítulo 2, iremos expor de modo suscinto os ciclos de Schubert, o grupo de Chow e o anel de Chow.

O capítulo 3 será voltado para o estudo do cálculo de Schubert numa Álgebra de Grassmann (também conhecida com o álgebra exterior). No século 19, Schubert foi um dos matemáticos que mais trabalharam em questões de geometria enumerativa, o mesmo fazia uso de argumentos heurísticos como está registrado no seu livro [51]. Para um melhor entendimento do que é a geometria enumerativa e o Cálculo de Schubert temos o ótimo artigo de Kleiman e Laksov [25]. O questionamento sobre um embasamento sólido para o Cálculo de Schubert, é o problema 15 da lista de Hilbert, que está parcialmente resolvido. Entre as ferramentas matemáticas hoje utilizadas para estruturar o Cálculo de Schubert, temos a Teoria de Intersecção (para maiores detalhes consultar as obras de William Fulton

[12], [13]) e também temos a teoria das derivações. Esta última nos permite efetuar manipulações menos trabalhosas que na Teoria da Intersecção. Inicialmente falaremos das Derivações de Hasse-Schmidt numa álgebra exterior de um módulo, dos endomorfismos Shift de um módulo livre e exibiremos o anel de derivações de um módulo livre. Com os endomorfismos Shift iremos definir o que vêm a ser as Derivações de Schubert (que são um caso particular das Derivações de Hasse-Schmidt). Depois falaremos da fórmula de Pieri para Derivações de Schubert e passaremos para o estudo do problema de Giambelli o qual está intimamente ligado às "integrações por partes" e será de fundamental importâcia para nosso trabalho. Exibiremos uma apresentação do anel de derivações, $A^*(\bigwedge^k M, D)$, de um módulo livre M e também a conexão do anel de Chow, $A^*(G(k,n))$, da Grassmanniana $G(k,n)$ com o anel de derivações, $\mathcal{A}^*(\bigwedge^k M_n, D)$, de uma k-ésima potência exterior de um módulo livre de posto n. Para finalizar iremos obter, de modo explícito, o anel de derivações $\mathcal{A}^*(\bigwedge^2 M_4, D_t)$ e a conexão com a Grassmanniana $G(2,4)$ via a interpretação geométrica de $\mathcal{A}^*(\bigwedge^2 M_4, D_t)$.

No último capítulo iremos descrever o passeio de Catalan na praia. Falaremos dos Top Intersection Numbers na Grassmanniana das retas de $\mathbb{P}^{n+1}$, $G(2,n+2)$. Também iremos obter o grau de Plücker de $G(2,n+2)$ via a teoria das derivações de Schubert e faremos a conexão desses dois. Para finalizar nossos trabalhos, iremos demonstrar que a relação de recorrência obtida por Niederhausen em [41] é satisfeita pelos Top Intersection Numbers, com uma leve mudança de indexação, assim como os números que aparecem na beira da praia são os números da sequência de Catalan.

Obrigado pela atenção e boa leitura.

Capítulo 1

Números de Catalan

Neste capítulo $\mathbb{N}$ denotará o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

1.1 Coeficientes Binomiais

Os binômios e suas potências inteiras não negativas ocorrem com certa frequência em matemática.

Binômios de Newton			Triângulo Aritmético
$(a+b)^0$	$=$	1	1
$(a+b)^1$	$=$	$1 \cdot a + 1 \cdot b$	$1 \quad 1$
$(a+b)^2$	$=$	$1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$	$1 \quad 2 \quad 1$
$(a+b)^3$	$=$	$1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3$	$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$
$(a+b)^4$	$=$	$1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4$	$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$
	$\vdots$		$\vdots$

De modo sistemático, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos a expansão:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^i b^{n-i}$$

com $\binom{n}{i} \in \mathbb{N}$ o coeficiente de $a^i b^{n-i},\ i = 0, \ldots, n$, que é a essência do Teorema Binomial.

De modo geral, temos que

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \cdot a^i b^{n+1-i}$$

$$||$$

$$(a+b)^n \cdot (a+b) = \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^i b^{n-i}\right] \cdot (a+b) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \cdot a^i b^{n+1-i} \; + \; \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^i b^{n+1-i}$$

Assim, $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \cdot a^i b^{n+1-i} = \binom{n}{0} \cdot b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right] \cdot a^i b^{n+1-i} + \binom{n}{n} \cdot a^{n+1}$

e, consequentemente, temos que $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\forall\, i \in \{1, \cdots, n\}$.
O que acabamos de fazer foi demonstrar a conhecida Relação de Stiefel.

Teorema. 1.1.1. (Relação de Stiefel)
Para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ temos que

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}.$$

Os coeficientes $\binom{n}{i}$ de cada monômio $a^i b^{n-i}$ da expansão do binômio de Newton $(a+b)^n$ são chamados de Coeficientes Binomiais. Ao expandir $(a+b)^n$ como produto de n-fatores

$$(a+b)(a+b)\ldots(a+b)$$

vemos que podemos produzir monômios $a^i b^{n-i}$ por escolha de $n!$ sequências de a's e b's, a menos de $i!$ repetições dos a's e $(n-i)!$ repetições dos b's. Intuitivamente temos que o coeficiente $\binom{n}{i}$ de $a^i b^{n-i}$ é dado pela fração $\frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$. Tais frações são conhecidas como números binomiais. Deste modo, temos estabelecido o Teorema Binomial, isto é, a correspondência entre os coeficientes da expansão de uma potência de um binômio e os números binomiais.

Observação. 1.1.2. (Coeficientes Trinomiais e Coeficientes Multinomiais)
Se ao invés de trabalharmos com potências binômios trabalharmos com potências de trinômios, os coeficientes dos termos da expansão de $(x+y+z)^n$ *serão chamados de coeficientes trinomiais. Por argumentos combinatórios temos que o coeficiente do termo* $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ *tal que* $\alpha+\beta+\gamma=n$ *é dado por :*

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}=\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$$

que também pode ser denotado por

$$\binom{n}{\alpha,\beta,\gamma}=\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$$

com $\alpha+\beta+\gamma=n$.

Ao trabalhamos com a potência $(x_1,x_2,\ldots,x_r)^n$ *, os coeficientes da expansão serão chamados de coeficientes multinomiais. Por argumentos combinatórios temos que o coeficiente do termo* $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_r^{\alpha_r}$ *na expansão de* $(x_1,x_2,\ldots,x_r)^n$ *com* $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r=n$ *é dado por :*

$$\binom{n}{\alpha_1}\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}\cdots\binom{n-\alpha_1\ldots-\alpha_{r-1}}{\alpha_r}=\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_r!}$$

que também pode ser denotado por

$$\binom{n}{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}=\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_r!}$$

com $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r=n$.

Teorema. 1.1.3. (Teorema Binomial)
Dados $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{0, \ldots, n\}$, temos que

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}.$$

Demonstração. A demostração será por indução em n. Note que nos casos $i = 0$ ou $i = n$ temos que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 = \frac{n!}{0!n!}$. Assim, temos demonstrado os casos $n = 0$ e $n = 1$. Admita que é verdade para n e para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, ou seja, $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$. Logo, pela Relação de Stiefel,

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} + \frac{n!}{(i-1)! \cdot (n+1-i)!)} =$$

$$= \frac{n! \cdot (n+1-i+i)}{i! \cdot (n+1-i)!} = \frac{(n+1)!}{i!((n+1-i)!)}$$

para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Os casos $i = 0$ e $i = n+1$ seguem da afirmação inicial. □

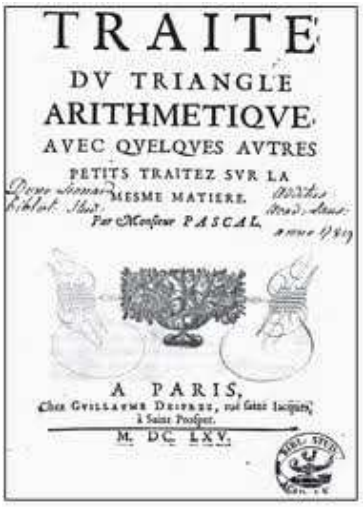
Corolário. 1.1.4.
Dados $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{0, \ldots, n\}$, temos que

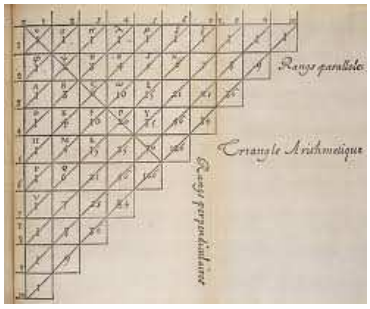
$$\frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \in \mathbb{N}.$$

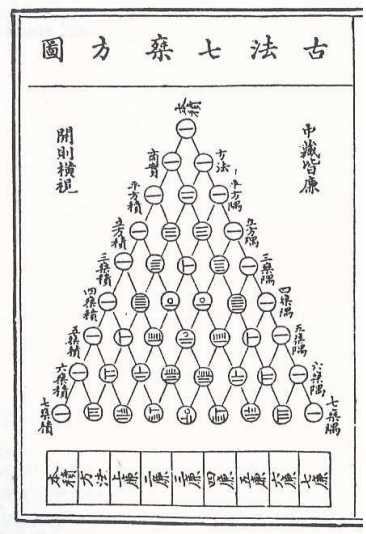
Observação. 1.1.5.

- *A terminologia "número binomial" foi introduzida pelo matemático alemão Michel Stiefel (1486 - 1567).*
- *A notação $\binom{n}{r}$ foi introduzida pelo matemático e físico alemão Barão Andreas Von Ettinghausen (1796 - 1878), a parte de cima é chamada de numerador e a parte de baixo de denominador do número binomial.*
- *A Relação de Stiefel também é chamada de Identidade de Pascal em homenagem ao matemático francês Blaise Pascal (1623 - 1662) como se pode verificar em [26].*

Com esses resultados em mãos, é possível realizar uma construção conhecida como Triângulo Aritmético ou "Triângulo de Pascal", pois tal estrutura aparece no trabalho de Blaise Pascal, publicado *post mortem* em 1665, cujo título é *Traité du Triangle Arithmétique*. É importante ressaltar que tal estrutura já era conhecida no mundo oriental. Em 1303, o matemático chinês Chu Shih-Chieh (±1260 - ±1320) publicou um trabalho chamado de *Siyuan yujian (O Precioso Espelho dos 4 Elementos)*. Vejamos a seguir a capa do tratado de Pascal, o Triângulo Aritmético desenhado por Pascal e o Triângulo Aritmético desenhado por Chu Shih-Chieh respectivamente.


TRAITE
DV TRIANGLE
ARITHMETIQVE.
AVEC QVELQVES AVTRES
PETITS TRAITEZ SVR LA
MESME MATIERE.
Par Monsieur PASCAL.
A PARIS,
M. DC. LXV.




古法七乘方圖

Atualmente escrevemos o Triângulo Aritmético do seguinte modo.

n =											
0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		4		1	
5	1		5		10		10		5		1
6		1		6		15		20		15		6		1	
7	1		7		21		35		35		21		7		1
⋮	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮

Todo elemento é soma dos dois elementos que estão imediatamente acima dele, que é exatamente a relação de Stiefel.

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

O numerador indexa a linha do triângulo e o denominador a posição do elemento na respectiva linha. Começamos a indexar a partir do 0(zero). Perceba que toda linha de ordem par possui uma quantidade ímpar de termos (assim como as potências pares de $(a+b)$), logo há um elemento central. Na linha $2n$ o elemento central é $\binom{2n}{n}$. Note que os elementos centrais das linhas de ordem par, a excessão do primeiro, são números pares. O fato que $\binom{2n}{n} \equiv 0 \ mod\ 2;\ \forall\ n\ \in\ \mathbb{N}$ é corolário do seguinte teorema :

Teorema. 1.1.6.
Sejam m,n $\in \mathbb{N}$ *tais que* $m \geq n \geq 1$ *e* $(m,n) = mdc(m,n)$*, então*

$$\binom{m}{n}\ \equiv\ 0\ mod\ \left(\frac{m}{(m,n)}\right).$$

Demonstração. Seja $d = (m,n)$. Pela identidade de Bézout existem inteiros α e β tais que $d = \alpha m + \beta n$. Multiplicando ambos os membros por $\binom{m}{n}$, temos que :

$$d\binom{m}{n} = \alpha m\binom{m}{n} + \beta n\binom{m}{n} = m\left[\alpha\binom{m}{n} + \beta\binom{m-1}{n-1}\right]$$

$$\alpha,\ \beta,\ \binom{m}{n} \text{ e } \binom{m-1}{n-1} \in \mathbb{Z} \implies \alpha\binom{m}{n} + \beta\binom{m-1}{n-1} \in \mathbb{Z}.$$

Denotemos $\alpha\binom{m}{n} + \beta\binom{m-1}{n-1}$ por γ. Logo, $\binom{m}{n} = \frac{m}{d}\gamma$ e disso concluimos que

$$\binom{m}{n}\ \equiv\ 0\ mod\ \left(\frac{m}{(m,n)}\right).$$

□

Corolário. 1.1.7.
Para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\binom{2n}{n} \equiv 0\ mod\ 2.$$

Demonstração. Basta fazer $m = 2n$ no teorema anterior e usar o fato que $(2n,n) = n$. □

Note também que esses elementos centrais, inclusive o primeiro, também são divisíveis por metade da ordem da linha mais 1, ou seja, $\binom{2n}{n}\ \equiv\ 0\ mod(n+1)$ para todo $n \geq 0$. Tal fato é corolário do teorema que segue.

Teorema. 1.1.8.

Sejam m, $n \in \mathbb{N}$ tais que $m \geq n \geq 1$ e $(m+1, n) = mdc(m+1, n)$, então

$$\binom{m}{n} \equiv 0 \ mod \left(\frac{m-n+1}{(m+1,n)} \right).$$

Demonstração. Seja $d' = (m+1, n)$. Pela identidade de Bézout existem inteiros α' e β', tais que $d' = \alpha'(m+1) + \beta' n$. Tal equação pode ser reescrita como

$$d' = \alpha'(m+1-n) + n(\beta' + \alpha').$$

Agora multipliquemos essa última equação por $\frac{m!}{n!((m+1-n)!)}$, disso resulta que

$$d' \frac{m!}{n!((m+1-n)!)} = \alpha'(m+1-n) \frac{m!}{n!((m+1-n)!)} + n(\alpha' + \beta') \frac{m!}{n!((m+1-n)!)} =$$

$$= \alpha' \binom{m}{n} + (\alpha' + \beta') \binom{m}{n-1}.$$

Como α', β', $\binom{m}{n}$ e $\binom{m}{n-1} \in \mathbb{Z}$, então $\alpha' \binom{m}{n} + \beta' \binom{m}{n-1} \in \mathbb{Z}$. Denotemos $\alpha' \binom{m}{n} + (\alpha' + \beta') \binom{m}{n-1}$ por γ'. Logo $d' \frac{m!}{n!((m+1-n)!)} = \gamma' \in \mathbb{Z}$, e disso segue que

$$d' \frac{m!}{n!((m-n)!)} \frac{1}{(m-n+1)} = \gamma' \iff d' \frac{m!}{n!((m-n)!)} = (m-n+1)\gamma' \iff$$

$$\iff \binom{m}{n} = \frac{(m-n+1)}{d'} \gamma' \iff \frac{\binom{m}{n}}{\frac{m-n+1}{d'}} = \gamma' \in \mathbb{Z}.$$

Como $d' = (m+1, n)$, nós temos que

$$\binom{m}{n} \equiv 0 \ mod \left(\frac{m-n+1}{(m+1,n)} \right).$$

□

Corolário. 1.1.9.

Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{2n}{n} \equiv 0 \ mod(n+1).$$

Demonstração. Basta fazer $m = 2n$ e usar o fato que $(2n+1, n) = 1$. □

Com esse último corolário podemos tirar a seguinte conclusão :

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \ ; \ \forall \ n \ \in \ \mathbb{N}.$$

Essa última expressão é exatamente a forma binomial do n-ésimo número de Catalan.

1.2 Um Pouco de História

Os números de Catalan formam uma sequência de números naturais que aparecem em muitos problemas de contagem. Tais números recebem o nome de Números de Catalan em homenagem ao matemático francês Eugene Catalan (1814 - 1894) o qual obteve a expressão binomial dos termos dessa sequência.

Vamos à ordem cronológica dos fatos.

De acordo com o artigo [35], de 1988, do matemático chinês J. J. Luo, o chinês Antu Ming ($\pm$ 1692 - $\pm$1763) obteve tal sequência por volta de 1730 através de alguns modelos geométricos. Entre outros resultados, Antu Ming obteve uma expansão de $sen(2\alpha)$ em série de potências de $sen(\alpha)$ como pode ser verificado em [32]:

$$sen(2\alpha) = 2\left\{sen(\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{C_{n-1}}{2^{2n-1}}\right] sen^{2n+1}(\alpha)\right\};$$

onde C_n é o n-ésimo número de Catalan.

No século XVIII o Matemático suíço Leonhard Paul Euler (1707-1783) trabalhara no problema de triangulação de um polígono convexo de n lados em $n-2$ triângulos, utilizando diagonais que não se intersectam, à excessão dos vértices. Consideremos os polígonos com os vértices rotulados. Vejamos alguns casos.

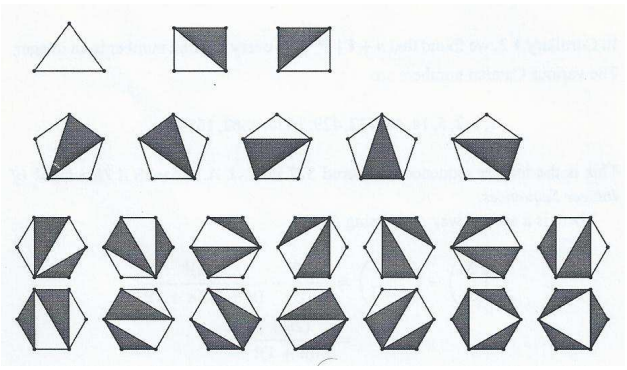


Figura 1.1: Triangulações.

- No caso do triângulo há 1 triangulação possível, $E_3 = 1$.

- No caso do quadrilátero convexo, há 2 triangulações possíveis, $E_4 = 2$.
- No caso do pentágono convexo, há 5 triangulações possíveis, $E_5 = 5$.
- No caso do hexágono convexo, há 14 triangulações possíveis, $E_6 = 14$.
- Quando trabalhamos com o heptágono, obtemos $E_7 = 42$.
- Para o Octógono, $E_8 = 132$.
- Para o Eneágono, $E_9 = 429$.

Os números da sequência começam a crescer muito rápido, o que torna praticamente impossível continuar a descrever caso a caso. Em 1751, Euler trocou correspondências com o matemático prussiano Christian Goldbach (1690-1764) sobre o problema de triangulação, onde revela a obtenção da seguinte expressão:

$$E_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-10)}{(n-1)!}$$

a qual fornece o número de triangulações de um polígono de n lados. Segundo Euler "*...o processo indutivo que apliquei foi bastante trabalhoso...*" . Euler também trocou correspondências com o matemático húngaro Johann Andreas Von Segner (1704-1777) e comunicou-lhe os sete primeiros números da sequência: 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429 (ver [11] página 21). Em 1758, Segner publicou em [50] a seguinte relação de recorrência de ordem 2 para obter os elementos da sequência

$$E_n = E_2E_{n-1} + E_3E_{n-2} + \ldots + E_{n-2}E_3 + E_{n-1}E_2$$

atualmente escrita como

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0$$

chamada de Recorrência de Segner. Passados 80 anos, em 1838, tal sequência surge novamente, agora nos trabalhos de Catalan publicados em 1838 e 1839 no Journal the Mathématiques (ver [6], [7] e [8]). Um problema abordado por Catalan, diferente do problema atacado por Euler, Segner e Goldbach, e que também faz surgir a mesma sequência

de números, foi o seguinte.
De quantos modos podemos multiplicar n fatores efetuando multiplicação aos pares, com uma sequência fixada de fatores?
Por exemplo, podemos multiplicar um fator, efetuando *multiplicação aos pares* com uma sequência fixada de fatores, de 1 modo. Apenas escrevemos o fator

$$(a).$$

Podemos multiplicar dois fatores, efetuando *multiplicação aos pares* com uma sequência fixada de fatores, de 1 modo :

$$(a.b).$$

Podemos multiplicar três fatores, efetuando *multiplicação aos pares* com uma sequência fixada de fatores, de 2 modos :

$$((a.b).c), (a.(b.c)).$$

Podemos multiplicar quatro fatores, efetuando *multiplicação aos pares* com uma sequência fixada de fatores, de 5 modos :

$$((a.b).(c.d)), (((a.b).c).d), ((a.(b.c)).d), (a.((b.c).d)), (a.(b.(c.d))).$$

Podemos multiplicar cinco fatores, efetuando *multiplicação aos pares* com uma sequência fixada de fatores, de 14 modos. Seis fatores de 42 modos...

Veja que, a partir do segundo, são os mesmos números obtidos por Euler a cerca de 80 anos. A expressão binomial obtida por Catalan foi a seguinte:

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

No mesmo ano de 1838, também no Journal the Mathématiques [45], o matemático judeu Olinde Rodrigues (1794-1851) propôs o seguinte problema:
De quantos modos podemos multiplicar n fatores, efetuando multiplicação aos pares, de modo que os fatores podem trocar de posição, ou seja, não há uma sequência fixada dos fatores?

Ao relacionar o problema proposto por Catalan e o proposto por Rodrigues, obtemos a relação de recorrência de ordem 1 abaixo :

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}.$$

Como veremos mais adiante, ao expandirmos a expressão acima iremos obter

$$C_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}{(n+1)!}$$

a expressão que Euler comunicou a Goldbach com a alteração $E_{n+2} = C_n$.

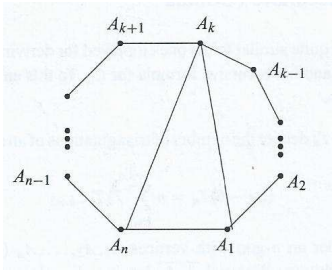
Para ver mais situações, onde os números de Catalan aparecem, consultar as obras [53], [54] e [26].

1.3 Recorrência de Segner(Recorrência de Ordem 2)

Segner trabalhou no seguinte problema:
Quantas são as triangulações de um polígono de n lados em n - 2 triângulos, utilizando diagonais que não se intersectam?
Os primeiros 7 resultados que Euler enviou para Segner no século 18, segundo [11], foram

$$E_3 = 1, E_4 = 2, E_5 = 5, E_6 = 14, E_7 = 42, E_8 = 132 \text{ e } E_9 = 429.$$

Segner obteve tal recorrência do seguinte modo:
Considere um polígono convexo de n lados.



Podemos particionar o conjunto das triangulações de um polígono convexo de n lados nos seguintes conjuntos:

- O conjunto, $\triangle 1n2$, das triangulações onde aparece o triângulo $A_1A_nA_2$.
- O conjunto, $\triangle 1n3$, das triangulações onde aparece o triângulo $A_1A_nA_3$.
- E assim sucessivamente até o conjunto, $\triangle 1n(n-1)$, das triangulações onde aparece o triângulo $A_1A_nA_{(n-1)}$.

Esses conjuntos são disjuntos pois nas triangulações as diagonais não podem se intersectar e em qualquer triangulação de um polígono convexo de n lados aparece apenas um desses triângulos mencionados anteriormente. Logo, pelo princípio aditivo, o número de triangulações de um polígono convexo de n lados é igual à soma dos cardinais desses conjuntos. Quando, na triangulação, tivermos o triângulo $A_1A_nA_k$ com $k \in \{2, \ldots, n-1\}$ iremos decompor o polígono inicial em um triângulo, um polígono de k lados à direita e um polígono de $n-k+1$ lados à esquerda, logo, pelo princípio multiplicativo, o número de triangulações onde aparece o triângulo $A_1A_nA_k$ é igual ao número de triangulações de um polígono convexo de k lados multiplicado pelo número de triangulações de um polígono convexo de $n-k+1$ lados. Se denotarmos por E_n o número de triangulações de um polígono convexo de n lados, podemos expressar o número de triangulações de um polígono convexo de n lados do seguinte modo :

$$E_n = E_{n-1} + E_3E_{n-2} + \ldots + E_{n-2}E_3 + E_{n-1}.$$

Para escrever tal expressão de modo mais sintético definamos $E_2 = 1$, e a expressão acima poderá ser reescrita como :

$$E_n = E_2E_{n-1} + E_3E_{n-2} + \ldots + E_{n-2}E_3 + E_{n-1}E_2 = \sum_{k=2}^{n-1} E_kE_{n-k+1}.$$

Nessas expressões E_n é o número de triangulações de um polígono convexo de n lados, em $n-2$ triângulos utilizando diagonais que não se intersectam. Passemos para a notação atual C_n que é o número de triangulações de um polígono de $n+2$ lados em n triângulos utilizando diagonais que não se intersectam. Com isso podemos reescrever a relação de recorrêcia de Segner, utilizando o fato que $E_{n+2} = C_n$, como

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_kC_{n-k-1}.$$

1.4 Recorrência de ordem 1 e a Expressão Binomial dos Números de Catalan

Problema de Catalan:
De quantos modos podemos multiplicar n fatores efetuando multiplicação aos pares, com uma sequência fixada de fatores?
Problema de Rodrigues:
De quantos modos podemos multiplicar n fatores, efetuando multiplicação aos pares, de modo que os fatores podem trocar de posição (ou seja, não há uma sequência fixada dos fatores)?
Os números obtidos por Catalan serão denotados por $\mathbb{C}_n$ e números obtidos por Rodrigues são denotados por R_n, onde n é a quantidade de fatores da multiplicação. Podemos relacionar o problema proposto por Catalan com o problema proposto por Rodrigues do seguinte modo:
Para cada disposição de n fatores obtida por Catalan podemos gerar $n!$ *disposições para o problema de Rodrigues, logo* $R_n = n!\mathbb{C}_n$.

Vamos agora obter a relação de recorrência para R_n, e em seguida obter a relação de recorrência para $\mathbb{C}_n$. Há R_{n-1} modos de multiplicar $n-1$ fatores, aos pares sem uma ordem fixada dos fatores. Numa dada multiplicação de $n-1$ fatores há $n-2$ multiplicações (A.B), em cada multiplicação dessa podemos introduzir o n-ésimo fator α de quatro modos diferentes

$$((\alpha A)\cdot B) \text{ ou } ((A\alpha)\cdot B) \text{ ou } (A\cdot(\alpha B)) \text{ ou } (A\cdot(B\alpha)).$$

Como são $n-2$ multiplicações, de uma dada disposição de $n-1$ fatores já obtivemos $4(n-2)$ disposições de n fatores, mas ainda faltam 2 casos. Se P é a multiplicação dos $n-1$ fatores, também podemos introduzir o n-ésimo fator α de mais dois modos $(\alpha\cdot(P))$ ou $((P)\cdot\alpha)$. Com isso temos que de uma dada disposição de $n-1$ fatores para o problema de Rodrigues, podemos obter $4(n-2)+2 = 4n-6$ disposições de n fatores para o problema de Rodrigues. Como há R_{n-1} disposições de $n-1$ fatores temos a seguinte relação de recorrêcia :

$$R_n = (4n-6)R_{n-1}$$

que é uma relação de recorrência de primeira ordem. Como já sabíamos que $R_n = n!\mathbb{C}_n$ temos a seguinte relação de recorrência de primeira ordem para os números de Catalan

$$\mathbb{C}_n = \frac{4n-6}{n}\mathbb{C}_{n-1}.$$

De modo a uniformizar nossa notação, façamos uma pequena alteração na indexação da expressão $\mathbb{C}_n = \frac{4n-6}{n}\mathbb{C}_{n-1}$, na qual n é a quantidade de fatores na multiplicação. Seja C_n a quantidade de modos de multiplicar $n+1$ fatores efetuando n multiplicações aos pares com uma ordem fixada dos fatores. Temos a seguinte relação $\mathbb{C}_{n+1} = C_n$, logo

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1}.$$

Aí está a relação de recorrência de ordem 1 para os números de Catalan.

Dessa relação de recorrência também podemos obter a expressão de Euler do seguinte modo :

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1} = \frac{(4n-2)(4n-6)}{(n+1)n}C_{n-2} = \frac{(4n-2)(4n-6)(4n-10)}{(n+1)n(n-1)}C_{n-3} = \dots$$

$$\dots = \frac{(4n-2)(4n-6)(4n-10)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 2}{(n+1)n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2}C_0$$

e como $C_0 = 1$

$$C_n = \frac{(4n-2)(4n-6)\cdot\ldots\cdot 2}{(n+1)!}$$

que é a expressão obtida por Euler. Também podemos obter a expressão binomial do seguinte modo:

$$C_n = \frac{(4n-2)\cdot(4n-6)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 2}{(n+1)n\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2} = \frac{2(2n-1)\cdot 2(2n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{(n+1)!}\cdot 2^n.$$

Perceba que $(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1\cdot 2^n\cdot(n!) = (2n)!$

Logo, multipliquemos numerador e denominador por $2^n\cdot(n!)$ e assim iremos obter

$$C_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1\cdot 2^n\cdot(n!)}{(n+1)!\cdot 2^n\cdot(n!)}\cdot 2^n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\cdot 2^n\cdot(n!)}\cdot 2^n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)}$$

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

que é a expressão binomial obtida por Catalan nos idos do século 19.

1.5 Função Geradora Ordinária e a Expressão Binomial dos Números de Catalan

A técnica das funções geradoras teve origem nos trabalhos do matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754), tendo sido muito utilizada por Leonhard Euler (1707-1783) em problemas de teoria aditiva dos números, especificamente na teoria das partições, o francês Pierre Simon Laplace (1749-1827) utilizou essa técnica no estudo de probabilidade e o matemático suíço Nicolau I Bernoulli (1687-1759) utilizou as funções geradoras no estudo das permutações caóticas. Dada uma sequência de números reais (a_r), para $r \in \mathbb{N}$, a função geradora ordinária dessa sequência é dada pela seguinte série de potências:

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Dada a sequência dos números de Catalan (C_n), para $n \geq 0$, a função geradora ordinária da sequência dos números de Catalan é dada por

$$f(x) = C_0 + C_1x + \ldots + C_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n.$$

Realizemos algumas manipulações algébricas com o intuito de obter, explicitamente, os coeficientes C_n da função geradora ordinária em questão. Vamos lá...
Primeiro multipliquemos $f(x)$ por si mesmo

$$[f(x)]^2 = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + ...) \cdot (C_0 + C_1x + C_2x^2 + ...) =$$

$$= C_0C_0 + (C_1C_0 + C_0C_1)x + \ldots + (C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0)x^{n-1} + \ldots$$

Fazendo uso da recorrência de Segner obtemos a seguinte expressão

$$[f(x)]^2 = C_1 + C_2x + \ldots + C_nx^{n-1} + \ldots$$

Multipliquemos toda a equação por x

$$[f(x)]^2x = C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n + \ldots$$

Agora adicionemos C_0 a ambos os membros da equação

$$C_0 + [f(x)]^2x = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n + \ldots$$

Logo,

$$C_0 + [f(x)]^2 x = f(x)$$

é uma equação do segundo grau em $f(x)$, e como $C_0 = 1$

$$xf^2 - f + 1 = 0$$

resolvendo essa equação na variável f iremos obter

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Não podemos ter

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}$$

pois nesse caso, quando $x \to 0$, nós teremos que $f(x) \to \infty$, e de

$$f(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_n x^n + ... = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

nós temos que

$$f(0) = C_0 = 1.$$

Então, podemos concluir que

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Vamos agora fazer uso do Teorema Binomial para expressar $\sqrt{1-4x}$ como uma série de potências e, enfim, obter uma expressão de $f(x)$ como série de potências com os coeficientes bem determinados. Do Teorema Binomial

$$(1-4x)^{1/2} = 1 - \frac{(\frac{1}{2})}{1}4x + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2 \cdot 1}(4x)^2 - \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3 \cdot 2 \cdot 1}(4x)^3 + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{1!}2x - \frac{1}{2!}4x^2 - \frac{3 \cdot 1}{3!}8x^3 - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{4!}16x^4 - \ldots$$

logo,

$$1 - (1-4x)^{1/2} = \frac{1}{1!}2x + \frac{1}{2!}4x^2 + \frac{3 \cdot 1}{3!}8x^3 + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{4!}16x^4 + \cdots$$

então

$$f(x) = \frac{\frac{1}{1!}2x + \frac{1}{2!}4x^2 + \frac{3 \cdot 1}{3!}8x^3 + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{4!}16x^4 + \ldots}{2x}$$

daí chegamos à seguinte expressão

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2!}2x + \frac{3 \cdot 1}{3!}2^2x^2 + \ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{(n+1)!} \cdot 2^n x^n + \ldots$$

Ao multiplicarmos por $n!$, numerador e denominador da parcela que contém a potência x^n, iremos obter

$$1 \cdot (\frac{0!}{0!}) + \frac{1 \cdot 2^1(1!)}{(2!)(1!)}x + \frac{3 \cdot 1 \cdot 2^2(2!)}{(3!)(2!)}x^2 + \ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots 3 \cdot 1 \cdot 2^n(n!)}{(n+1)!(n!)}x^n + \ldots$$

usando o fato de que $(2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2^n(n!) = (2n)!$, podemos reescrever $f(x)$ como sendo

$$f(x) = 1 + \left(\frac{2!}{2!1!}\right)x + \left(\frac{4!}{3!2!}\right)x^2 + \ldots + \left(\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}\right)x^n + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2!}{1!1!}\right)x + \frac{1}{3}\left(\frac{4!}{2!2!}\right)x^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}\left(\frac{(2n)!}{n!n!}\right)x^n + \ldots$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\binom{2}{1}x + \frac{1}{3}\binom{4}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n + \ldots$$

Como inicialmente tínhamos que

$$f(x) = C_0 + C_1x + \ldots + C_nx^n + \ldots$$

ao comparar os coeficientes dos termos de mesmo grau podemos concluir que

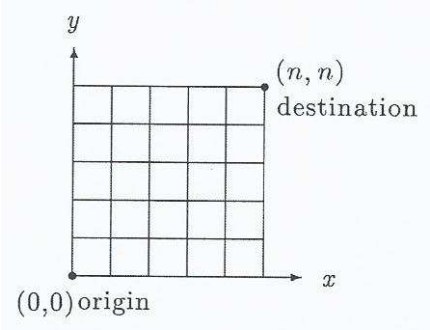
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \; ; \; \forall \; n \; \in \; \mathbb{N}.$$

1.6 Outro Modo de Obter a Expressão Binomial dos Números de Catalan

Pensemos no seguinte problema :
Dado o reticulado $\mathbb{Z}^2$ em $\mathbb{R}^2$, de quantos modos podemos ir da origem $A = (0, 0)$ até o ponto $B = (n, n)$, onde $n \in \mathbb{N}$, nos deslocando pelos pontos do reticulado com dois tipos de movimentos permitidos:

- *um passo para o norte (N)*
- *um passo para o leste (L)*

e de modo que nunca fiquemos no semiquadrante superior à reta $y = x$, ou seja, nunca fiquemos na região de $\mathbb{R}^2$ determinada pela inequação $y > x$.

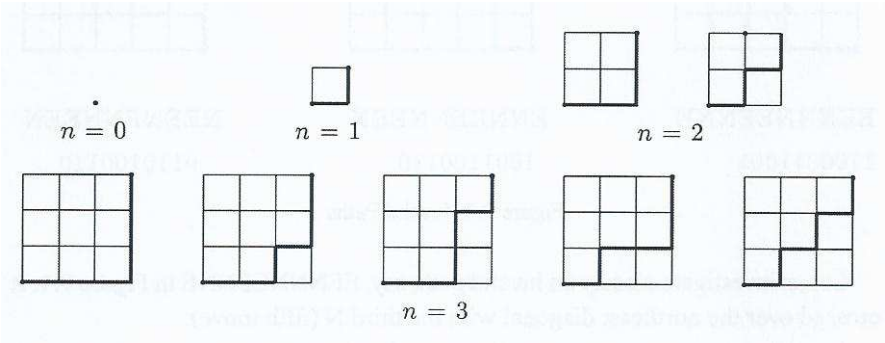


Perceba que podemos identificar cada trajeto de A até B (satisfazendo as condições estabelecidas acima) com um anagrama onde aparecem os símbolos L e N (L significa um passo para o leste, N significa um passo para o norte) em quantidades iguais e quando percorremos o anagrama da esquerda para a direita a quantidade de símbolos L é maior ou igual que a quantidade de símbolos N. Em combinatória diz-se que é uma Palavra de Dick, de tamanho par. Vamos descrever alguns casos...

- Por convenção, quando $n = 0$, há um único modo de realizar o trajeto que é ficar onde está, pois nesse caso A e B coincidem.
- Quando $n = 1$ só há um modo: LN.

- Quando $n = 2$ há dois modos: $LNLN$ ou $LLNN$.
- Para $n = 3$ há 5 modos: $LNLNLN$, $LNLLNN$, $LLNLNN$, $LLNNLN$ e $LLLNNN$.
- Para $n = 4$ já são 14 modos.
- Para $n = 5$ são 42 modos ...

Exatamente os números de Catalan!



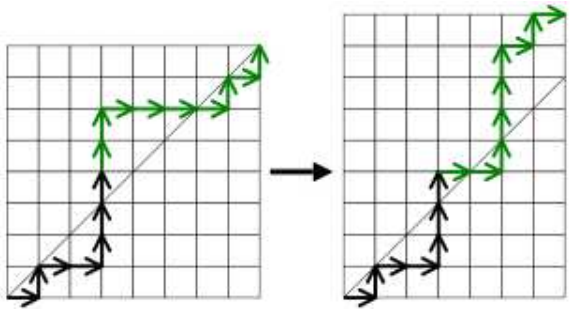
Para contar o número de trajetos da origem $A = (0, 0)$ até o ponto $B = (n, n)$ nas condições dadas, podemos pensar do seguinte modo. Primeiro obtemos a quantidade total de trajetos da origem $A = (0, 0)$ até o ponto $B = (n, n)$ (sem a restrição de nunca ficar na porção superior à reta $y = x$) e desse valor subtraimos a quantidade de trajetos que transgridem as condições dadas.

O total de trajetos de A até B igual à quantidade de anagramas onde L aparece n vezes e N aparece n vezes

$$\frac{(2n)!}{(n!)(n!)} = \binom{2n}{n}.$$

Vamos agora obter o número de trajetos transgressores. O método utilizado é atribuído ao matemático francês Désiré André que viveu nos séculos 18 e 19. Basicamente o que iremos fazer é associar a cada trajeto transgressor, da origem $A = (0, 0)$ até o ponto $B = (n, n)$, um trajeto de $A = (0, 0)$ até o ponto $B' = (n - 1, n + 1)$ do seguinte modo.

Em todo trajeto transgressor existe o primeiro ponto P onde ele cruza a reta $y = x$, nesse momento a quantidade de deslocamentos para o norte é uma unidade maior que a quantidade de deslocamentos para o leste, ou seja, nesse momento teremos r deslocamentos



para leste e $r+1$ deslocamentos para o norte. Restando $n-r$ deslocamentos para o leste e $n-(r+1)$ deslocamentos para o norte. O que iremos fazer é, a partir do ponto P, inverter os deslocamentos. O norte se transforma em leste e vice-versa. Com isso teremos mais $(n-r)$ deslocamentos norte e $n-(r+1)$ deslocamentos leste. Totalizando $r+(n-(r+1))=n-1$ deslocamentos leste e $r+1+(n-r)=n+1$ deslocamentos norte. E assim teremos um trajeto de $A=(0,0)$ até $B'=(n-1,n+1)$. Como para cada trajeto transgressor de $A=(0,0)$ até $B=(n,n)$ podemos associar um único trajeto de $A=(0,0)$ até $B'=(n-1,n+1)$ e vice-versa, o número de trajetos transgressores é igual ao número de trajetos de $A=(0,0)$ até $B'=(n-1,n+1)$, que por sua vez ao total de anagramas onde o L aparece $n+1$ vezes e o N aparece $n-1$ vezes que é dado por

$$\frac{(2n)!}{((n-1)!)((n+1)!)}=\binom{2n}{n-1}.$$

Logo, o número de trajetos que satisfazem as condições iniciais é dado por

$$C_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

E assim obtemos a expressão binomial para os números de Catalan.

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\ ;\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Observação. 1.6.1.

No capítulo 4 iremos ver outra situação problema onde os números de Catalan aparecem, é exatamente o problema que dá título a esta dissertação. O problema do passeio de Catalan na praia criado por Niederhausen (ver [41]).

Capítulo 2

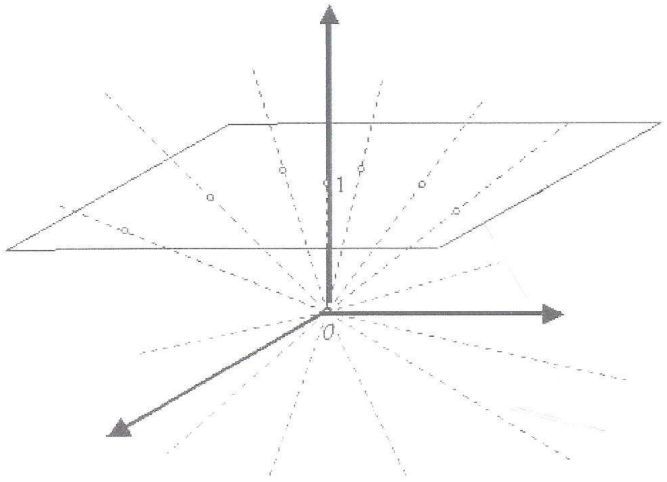
Geometria Algébrica

Nesse capítulo o corpo K será infinito, de característica zero e algebricamente fechado, que naturalmente pode ser o corpo dos número complexos $\mathbb{C}$.

2.1 Espaço Projetivo $\mathbb{P}^n$

O espaço projetivo de dimensão n sobre o corpo K é o conjunto de todas as retas, em K^{n+1}, que passam pela origem de K^{n+1} e será denotado por $\mathbb{P}^n_K$ ou $\mathbb{P}^n$. Vendo K^{n+1} como um espaço vetorial de dimensão $n+1$, sobre o corpo K, $\mathbb{P}^n_K$ é a reunião de todos os subespaços vetoriais unidimensionais do espaço vetorial K^{n+1}. Lembremos que uma reta que passa pela origem de K^{n+1} pode ser representada por infinitos pontos de K^{n+1} (no caso de K infinito). Dois pontos, $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $(x'_0, x'_1, \ldots, x'_n) \in K^{n+1} \setminus (0, 0, \ldots, 0)$, representam a mesma reta que passa pela origem de K^{n+1} se, e somente se, $\exists \lambda \in K^*$ tal que $(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lambda(x'_0, x'_1, \ldots, x'_n)$. Como os elementos de $\mathbb{P}^n_K$ são as retas de K^{n+1} que passam pela origem, podemos reescrever tal fato na linguagem da geometria algébrica do seguinte modo: um ponto $x \in \mathbb{P}^n_K$ pode ser representado por um $(n+1)$-upla $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ em K^{n+1}. $(x'_0, x'_1, \ldots, x'_n) \in K^{n+1}$ define o mesmo ponto em $\mathbb{P}^n_K$ se, e somente se, $\exists \lambda \in K^*$ tal que $(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lambda(x'_0, x'_1, \ldots, x'_n)$. Uma $(n+1)$-upla representando $x \in \mathbb{P}^n_K$ é chamada de um sistema de **coordenadas homogêneas** de

x e será denotada por $x = [x_0 : \ldots : x_n]$.



E agora surge uma pergunta :
Quando um elemento de $\mathbb{P}^n_K$ é raiz de um polinômio $F \in K[X_0, \ldots, X_n]$?

- $x \in \mathbb{P}^n_K$ é dito ser uma raiz do polinômio F se, e somente se, $F(x) = 0$ para todo sistema de coordenadas homogêneas de x.

E agora surge outra pergunta...
Quais polinômios $F \in K[X_0, \ldots, X_n]$ possuem raizes em $\mathbb{P}^n_K$?

- Se F é um polinômio homogêneo é suficiente que a condição seja satisfeita para um sistema de coordenadas homogêneas de $x = [x_0 : \ldots : x_n]$. Pois se F é um polinômio homogêneo de grau d, então $F(\lambda \cdot x) = \lambda^d F(x)$. Disso concluimos que

$$F(x) = 0 \iff F(\lambda \cdot x) = 0 \ \ \forall \lambda \in K^*.$$

- Analisemos agora o caso em que F não é um polinômio homogêneo e $deg(F) = d$. Seja $F = F_0 + \ldots + F_d$ a decomposição de F na soma de polinômios homogêneos F_k de grau $k \in \{0, \ldots, d\}$.

$$F(x) = 0 \text{ se, e somente se,}$$

$F_k(x_0, \ldots, x_n) = 0 \, \forall k \in \{0, \ldots, d\}$ e um $(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1}$ tal que $x = [x_0 : \ldots : x_n]$.

Realmente :

$$F(\lambda X) = F_0(X) + \lambda F_1(X) + \ldots + \lambda^d F_d(X)$$

se anula para infinitos $\lambda \in K$ se, e somente se,

$$F_k(x_0, \ldots, x_n) = 0 \quad \forall k \in \{0, \ldots, d\}.$$

Com isso podemos concluir que um polinômio não homogêneo $F \in K[X_0, \ldots, X_n]$ possui $X \in \mathbb{P}^n_K$ como raiz se, e somente se, todas as partes homogêneas de F possuem $X \in \mathbb{P}^n_K$ como raiz.

Definição. 2.1.1. (Graduação de um Anel)
Uma graduação de um anel G é uma família $\{G_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de subgrupos G_k do grupo aditivo do anel G tais que

1. $G = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} G_k$;
2. $G_i \cdot G_j \subset G_{i+j} \; \forall i, j \in \mathbb{Z}$.

Definição. 2.1.2. (Anel Graduado)
Um anel G é chamado de anel graduado se G for provido de uma graduação $\{G_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Se $G_k = 0$ para $k < 0$, o anel G é chamado de positivamente graduado. Os elementos de G_k são os elementos homogêneos de grau k do anel G. Pelo item 1 da definição 2.1.1, $g \in G$ é escrito como $g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k$ com $g_k \in G_k$, $\forall \; k \in \mathbb{Z}$ e g_k é chamado de componente homogênea de grau k de g.

Exemplo. 2.1.3. (Graduações de um Anel de Polinômios)

1. *Qualquer anel de polinômios $G = R[X_0, \ldots, X_n]$ sobre o anel R é positivamente graduado. Os elementos homogêneos de grau k são os polinômios homogêneos de grau k*

$$\sum_{v_0+\ldots+v_n=k} \rho_{v_0\ldots v_n} X_0^{v_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{v_n}$$

Chamamos essa graduação de Graduação Canônica do anel de polinômios.

2. *Dado um ponto* $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, *o conjunto* G_k *dos polinômios quasehomogêneos de tipo* $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n)$ *e grau* k

$$\sum_{\alpha_0 v_0 + \ldots + \alpha_n v_n = k} \rho_{v_0 \cdots v_n} X_0^{v_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{v_n}$$

define uma graduação no anel de polinômios $R[X_0, \ldots, X_n]$.

Definição. 2.1.4. (Transformação Projetiva de Coordenadas ou Projetividade)
Uma transformação projetiva de coordenadas é uma aplicação linear de $\mathbb{P}_K^n$ *em* $\mathbb{P}_K^n$ *dada pela matriz* $A \in GL(n+1, K)$.

$$\mathbb{P}_K^n \longrightarrow \mathbb{P}_K^n$$

$$[x_0 : \ldots : x_n] \longrightarrow [x_0 : \ldots : x_n]A$$

Definição. 2.1.5. (Variedade Projetiva)
Seja $V \subseteq \mathbb{P}_K^n$. *Se existem uma família de índices* $\mathcal{I}$ *e um conjunto de polinômios homogêneos* $S = \{f_i \mid \ f_i \in K[X_1, \ldots, X_n] \ ; \ \forall \ i \in \mathcal{I}\}$, *tais que* V *é o conjunto solução do sistema de equações*

$$f_i(X_1, \ldots, X_n) = 0, \quad \textit{para todo} \ \ i \in \mathcal{I},$$

V *é chamado de Variedade Algébrica Projetiva. Tal sistema de equações polinomiais é chamado de um sistema de equações definidoras da variedade algébrica projetiva* V.

Observação. 2.1.6.
Devido ao Teorema da Base de Hilbert, podemos, de antemão, considerar que tal família de índices $\mathcal{I}$ *é finita.*

Observação. 2.1.7.
O conceito de variedade projetiva é invariante por transformações afins de coordenadas.

Vejamos alguns exemplos de variedades projetivas.

Exemplo. 2.1.8. (Hipersuperfície Projetiva)
Uma hipersuperfície projetiva é dada pelo conjunto solução de um sistema polinomial com uma única equação $F = 0$, *onde* F *é um polinômio homogêneo não constante. Se o polinômio homogêneo* F *for linear então a hipersuperfície projetiva será chamada de hiperplano projetivo.*

Exemplo. 2.1.9. (Variedade Linear)
É o conjunto solução de um sistema de equações lineares homogêneas. Se um sistema de equações lineares homogêneas tem posto r, então temos uma variedade linear de dimensão $dim = n - r$. Em particular, se $dim = 1$ (ou seja, se o sistema tem posto $n - 1$) temos um reta projetiva.

Um fato interessante a respeito do espaço projetivo $\mathbb{P}^n$, é que algumas vezes ele pode ser visto como um Espaço de Parâmetros, como é o caso de $\mathbb{P}^5$ que pode ser visto como um espaço de parâmetros das quádricas de $\mathbb{P}^2$, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo. 2.1.10.
Uma quádrica em $\mathbb{P}^2$ é dada por um polinômio quadrático homogêneo irredutível em 3 variáveis,

$$F(X : Y : Z) = a_0X^2 + a_1XY + a_2XZ + a_3Y^2 + a_4YZ + a_5Z^2$$

como cF , com $c \in K^*$, define a mesma quádrica, podemos pensar em F como um ponto de $\mathbb{P}^5$. Mais precisamente, um elemento $\overline{v} \in \mathbb{P}^5$ é uma classe de equivalência onde qualquer representante é da forma cv, com $c \in K^*$. Portanto $\overline{v}$ pode ser identificado com uma quádrica dada pelo polinômio quadrático homogêneo F. Podemos identificar uma quádrica de $\mathbb{P}^2$ com um ponto de $\mathbb{P}^5$ do seguinte modo

$$F = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5]$$

onde $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ são os coeficientes dos monômios de F. Cada ponto de $\mathbb{P}^5$ corresponde a uma única quádrica F. Dizemos que $\mathbb{P}^5$ parametriza as quádricas do plano projetivo, ou seja, $\mathbb{P}^5$ é o espaço de parâmetros das quádricas de $\mathbb{P}^2$.

Para maiores detalhes consultar [27], [20] e [22].

2.2 Grassmanniana de retas

Vamos agora estudar o espaço de parâmetros conhecido como a Grassmanniana de retas. Nesta secção a palavra dimensõ faz referência à dimensão de um objeto visto como espaço vetorial.

Definição. 2.2.1. (Grassmanniana)
Seja V um espaço vetorial. A Grassmanniana $G(r, V)$ é definida como sendo o conjunto dos subespaços lineares de dimensão r do espaço vetorial V. No caso da dimensão de V ser n, podemos denotar tal Grassmanniana por $G(r, n)$.

Observação. 2.2.2.
$\mathbb{P}^n = G(1, n+1)$.

No nosso caso estamos interessados em estudar as Grassmannianas de retas de um certo espaço projetivo associado ao espaço vetorial V. Vamos agora "brincar" um pouco com a Grassmanniana das retas de $\mathbb{P}^3$.

Definição. 2.2.3. (Grassmanniana das Retas de $\mathbb{P}^3$)
A Grassmanniana das retas de $\mathbb{P}^3$ é o conjunto dos subespaços vetoriais bidimensionais de K^4, tais subespaços são chamados de planos do espaço vetorial K^4. A Grassmanniana das retas de $\mathbb{P}^3$ será denotada por $G(2,4)$ ou $\mathbb{G}(1,3)$.

Observação. 2.2.4. (Dimensão de $G(2,4)$)
Lembremos que dados $U_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n$ tal que $x_i \neq 0\}$ onde $i \in \{0, 1, ..., n\}$, podemos cobrir $\mathbb{P}^n$ com esses $U_i's$ do seguinte modo

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{0 \leq i \leq n} U_i.$$

Façamos o mesmo com $G(2,4)$. Seja α um plano de K^4, tomemos $a_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$ e $a_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24})$ como dois geradores do plano α. Logo a_1 e a_2 são linearmente independentes. Representemos o plano α pela seguinte matriz :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Seja $U_{12} = \{\alpha \in G(2,4)$ *tal que* $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{21} \neq 0\}$. *Sabemos da Álgebra Linear que, independetemente da base escolhida, cada plano* $\alpha \in U_{12}$ *possui uma representação única do seguinte modo :*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}.$$

Reciprocamente, a cada matriz como acima corresponde um único plano de U_{12}. *Com isso, fica estabelecida uma bijeção entre os planos de* U_{12} *e os pontos de* K^4. *Logo* U_{12} *tem dimensão 4. Seja* $U_{ij} = \{\alpha \in G(2,4)$ *tal que* $a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j} \neq 0\}$ *com* $i < j$. *Há* $\binom{4}{2} = 6$ U_{ij}*'s, são eles* $U_{12}, U_{13}, U_{14}, U_{23}, U_{24}, U_{34}$. *E estes cobrem* $G(2,4)$ *pois*

$$G(2,4) = \bigcup_{1 \leq i < j \leq 4} U_{ij}.$$

Como cada U_{ij} *tem dimensão 4 e foi utilizada uma quantidade finita de* U_{ij}*'s para cobrir* $G(2,4)$ *podemos afirmar que a dimensão de* $G(2,4)$ *é 4.*

Um fato interessante com relação à Grassmanniana de retas de $\mathbb{P}^3$, $G(2,4)$, é que a mesma pode ser vista como uma quádrica de $\mathbb{P}^5$. Para tal consideremos o plano $\alpha \in K^4$ dado pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

e sejam $p_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j}$ com $1 \leq i < j \leq 4$, os menores 2×2 da matriz acima considerando as colunas i e j.

Teorema. 2.2.5.
Existe uma bijeção entre os pontos de $G(2,4)$ *e os pontos* $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5] \in \mathbb{P}^5$ *que são raízes da quádrica de* $\mathbb{P}^5$ *dada pelo polinômio*

$$F = X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3.$$

Demonstração. Dado o plano $\alpha \in G(2,4)$, seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

uma matriz que o representa. Consideremos a aplicação

$$\Phi : G(2,4) \longrightarrow \mathbb{P}^5$$

$$\alpha \longrightarrow \Phi(\alpha) = [p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}]$$

onde os p_{ij}'s são os menores 2×2 da matriz que representa o plano $\alpha \in G(2,4)$. Como $a_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$ e $a_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24})$ são linearmente independentes então algum dos p_{ij}'s é diferente de zero. Se

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & a'_{22} & a''_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

é outra representação do plano $\alpha \in G(2,4)$, da álgebra linear sabemos que existe uma matriz T 2×2 invertível tal que

$$A' = AT.$$

Ao olhar para os menores 2×2 vemos que $A'_{ij} = A_{ij}T$, considerando as colunas i e j, logo $det(A'_{ij}) = det(A_{ij}T)$. Isto quer dizer que $p'_{ij} = p_{ij}det(T)$; $\forall\ 1 \leq i < j \leq 4$. Como $det(T) \neq 0$ podemos garantir que

$$[p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}] = [p'_{12} : p'_{13} : p'_{14} : p'_{23} : p'_{24} : p'_{34}].$$

Logo Φ está bem definida. Vamos agora verificar que Φ é, de fato, uma bijeção entre $G(2,4)$ e a quádrica de $\mathbb{P}^5$ dada pela equação

$$F = X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3.$$

Primeiro verifiquemos que

$$\alpha \in G(2,4) \Longrightarrow F(\Phi(\alpha)) = 0.$$

Como $\Phi(\alpha) = [p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}]$, ao substituirmos as coordenadas de $\Phi(\alpha)$ na equação da quádrica de $\mathbb{P}^5$

$$F = X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3$$

teremos que

$$F(\Phi(\alpha)) = p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})$$

$$-(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})(a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22}) + (a_{11}a_{24} - a_{14}a_{21})(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}).$$

Desse modo temos a garantia que

$$F(\Phi(\alpha)) = 0.$$

Agora verifiquemos que, dado um ponto

$$P = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5] \in \mathbb{P}^5$$

satisfazendo a equação

$$X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3 = 0$$

existe um elemento $\alpha_0 \in G(2,4)$ tal que $\Phi(\alpha_0) = P$. Seja $x_0 \neq 0$ (a demonstração dos outros casos é análoga). Logo podemos supor que $x_0 = 1$. Como P é raiz do polinômio

$$F = X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3$$

temos que $x_5 = x_1x_4 - x_2x_3$ e perceba que o plano $\alpha_0 \in G(2,4)$ dado pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_3 & -x_4 \\ 0 & 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

é tal que

$$\Phi(\alpha_0) = [1 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5].$$

Além disso, se $\alpha_1 \in G(2,4)$ é tal que $\Phi(\alpha_1) = P$, temos que α_1 é dado pela mesma base acima. Logo $\alpha_0 = \alpha_1$. Com isso fica estabelecida a bijeção entre $G(2,4)$ (a Grassmanniana das retas de $\mathbb{P}^3$) e a quádrica de $\mathbb{P}^5$ dada pelo polinômio

$$F = X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3.$$

□

Definição. 2.2.6. (Mergulho de Plücker em $\mathbb{P}^5$)
A aplicação

$$\Phi : G(2,4) \longrightarrow \mathbb{P}^5$$

$$\alpha \longrightarrow \Phi(\alpha) = [p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}]$$

é chamada de mergulho de Plücker em $\mathbb{P}^5$, onde $p_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j}$ com $1 \leq i < j \leq 4$, são menores 2×2 da matriz que representa α considerando as colunas i e j.

Definição. 2.2.7. (Coordenadas de Plücker)
Dado um plano $\alpha \in G(2,4)$, as coordenadas da imagem de α pelo mergulho de Plücker são chamadas de coordenadas de Plücker em $\mathbb{P}^5$.

Definição. 2.2.8. (Quádrica de Plücker-Klein)
A quádrica em questão $X_0X_5 - X_1X_4 + X_2X_3$ é conhecida como quádrica de Plücker-Klein.

Fazendo analogia com $G(2,4)$, vamos estudar um pouco a Grassmanniana das retas de $\mathbb{P}^{n-1}$, $G(2,n)$.

Definição. 2.2.9. (Grassmanniana das Retas de $\mathbb{P}^{n-1}$)
A Grassmanniana das retas de $\mathbb{P}^{n-1}$ é o conjunto dos subespaços vetoriais bidimensionais de K^n, tais subespaços são chamados de planos de K^n. A Grassmanniana das retas de $\mathbb{P}^{n-1}$ será denotada por $G(2,n)$ ou por $\mathbb{G}(1,n-1)$.

Os elementos de $G(2,n)$ são os subespaços bidimensionais do espaço vetorial K^n, logo podem ser descritos por matrizes $2 \times n$ de posto 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, $G(2,n)$ pode ser coberta por $\binom{n}{2}$ subespaços U_{ij} , com $1 \leq i < j \leq n$, de dimensão $2(n-2)$, onde U_{12} é o conjunto das matrizes da forma

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \end{pmatrix}$$

os outros U_{ij}'s s ao obtidos de U_{12} por permutação das colunas.
Sejam

$$p_{ij}(A) = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix} \ , \ 1 \leq i < j \leq n$$

os menores 2×2 da matriz A. Como a razão $\frac{p_{ij}(A)}{p_{rs}(A)}$ independe do representante do subespaço gerado por A,

$$\Phi(A) = [p_{12}(A) : \ldots : p_{ij}(A) : \ldots : p_{(n-1)(n)}(A)] \in \mathbb{P}^{\binom{n}{2}-1} \ , \ 1 \leq i < j \leq n,$$

depende unicamente do subespaço em questão e não do representante. Chamamos as coordenadas $p_{ij}(A) \in \mathbb{P}^{\binom{n}{2}-1}$, $1 \leq i < j \leq n$, de coordenadas de Plücker da Grassmanniana $G(2, n)$.

Definição. 2.2.10. (Mergulho de Plücker em $\mathbb{P}^{\binom{n}{2}-1}$)
A aplicação

$$\Phi : G(2, n) \longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{2}-1}$$

$$[A] \longrightarrow \Phi(A) = [p_{12}(A) : \ldots : p_{ij}(A) : \ldots : p_{(n-1)(n)}(A)]$$

é chamada de mergulho de Plücker.

$G(2, n)$ é o conjunto dos pontos $[x_0 : \ldots : x_{\binom{n}{2}-1}] \in \mathbb{P}^{\binom{n}{2}-1}$ que são raízes do sistema de equações polinomiais

$$X_{r_1r_2}X_{r_3r_4} - X_{r_1r_3}X_{r_2r_4} + X_{r_1r_4}X_{r_2r_3} = 0 \ , \text{ tal que } 0 \leq r_1 < r_2 < r_3 < r_4 \leq n$$

Observação. 2.2.11.
$X_{r_ir_j}$ são as coordenadas em $\mathbb{P}^{\binom{n}{2}-1}$ e r_ir_j, com $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, são pares de inteiros distindos escritos em ordem lexicográfica. Teremos um total de $\binom{n+1}{4}$ equações.

Um fato curioso a respeito da Grassamaniana $G(2, n+2)$ é que o grau, via o mergulho de Plücker, dessa Grassmanniana é dado pelo n-ésimo número de Catalan,

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \ ; \ \forall \ n \ \in \ \mathbb{N}.$$

Observação. 2.2.12.
Se $X \subset \mathbb{P}^N$ é uma variedade de codimensão s (ou seja, dimensão $N - s$), então o grau de X é o número de pontos de intersecção de X com um s-plano em posição geral.

Para maiores detalhes ver [20], [2], [58], [40] e [46].

2.3 Variedades de Schubert

Espaços vetoriais de mesma dimensão são isomorfos, do ponto de vista da Álgebra Linear. Por conta disso se faz necessário um outro modo de distinguir os elementos de uma Grassmanniana $G(k, n)$. Nesta direção vamos definir o que vêm a ser as Variedades de Schubert. Por uma questão didática, comecemos nosso estudo pela Grassmanniana das retas de $\mathbb{P}^3$, $G(2, 4) = \mathbb{G}(1, 3)$.

Definição. 2.3.1.
Sejam $\Lambda_0 \subsetneqq \Lambda_1$ dois subespaços vetorias do espaço vetorial $\mathbb{P}^3$. O conjunto:

$$\Omega(\Lambda_0, \Lambda_1) := \{L \in \mathbb{G}(1, 3) \mid dim(L \cap \Lambda_0) \geq 0 \text{ e } dim(L \cap \Lambda_1) \geq 1\}$$

é chamado de Variedade de Schubert associada ao par (Λ_0, Λ_1).

Note que podemos reescrever o conjunto acima do seguinte modo:

$$\Omega(\Lambda_0, \Lambda_1) := \{L \in \mathbb{G}(1, 3) \mid L \cap \Lambda_0 \neq \phi \text{ e } L \subset \Lambda_1\}$$

Observação. 2.3.2.
Mais adiante o par (Λ_0, Λ_1) será chamado de bandeira.

Analisemos todas as possibilidades dependendo das dimensões de Λ_0 e Λ_1.

1. $\Lambda_0 \cong \mathbb{P}^2$ e $\Lambda_1 \cong \mathbb{P}^3$. Neste caso cada reta $L \in \mathbb{P}^3$ intersecta o plano projetivo $\Lambda_0 \cong \mathbb{P}^2$ e está contida em $\Lambda_1 \cong \mathbb{P}^3$. Com isso podemos concluir que

$$\Omega(\Lambda_0, \Lambda_1) = \Omega(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^3) = \mathbb{G}(1, 3).$$

2. $\Lambda_0 \cong \mathbb{P}^1$ e $\Lambda_1 \cong \mathbb{P}^3$. Neste caso $\Omega(\Lambda_0, \mathbb{P}^3)$ é o conjunto das retas de $\mathbb{P}^3$ que intersectam a reta projetiva $\Lambda_0 \cong \mathbb{P}^1$.

3. $\Lambda_0 \cong \mathbb{P}^0$ e $\Lambda_1 \cong \mathbb{P}^3$. A variedade $\Omega(\Lambda_0, \Lambda_1) = \Omega(\mathbb{P}^0, \mathbb{P}^3)$ é o conjunto das retas de $\mathbb{P}^3$ que passam pelo ponto $\Lambda_0 \cong \mathbb{P}^0$.

4. $\Lambda_0 \cong \mathbb{P}^1$ e $\Lambda_1 \cong \mathbb{P}^2$. Agora, a variedade de Schubert $\Omega(\Lambda_0, \Lambda_1) = \Omega(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2)$ é o conjunto das retas de $\mathbb{P}^3$ que estão contidas no plano projetivo $\Lambda_1 \cong \mathbb{P}^2$.

5. $\Lambda_0 \cong \mathbb{P}^0$ e $\Lambda_1 \cong \mathbb{P}^2$. Esta variedade de Schubert é o conjunto das retas projetivas contidas no plano projetivo $\Lambda_1 \cong \mathbb{P}^2$ e que passam pelo ponto $\Lambda_0 \cong \mathbb{P}^0 \in \Lambda_1 \cong \mathbb{P}^2$.

6. $\Lambda_0 \cong \mathbb{P}^0$ e $\Lambda_1 \cong \mathbb{P}^1$. A variedade de Schubert associada ao par (Λ_0, Λ_1) é o conjunto das retas projetivas de $\mathbb{P}^3$ que passam pelo ponto $\Lambda_0 \cong \mathbb{P}^0$ e estão contidas na reta $\Lambda_1 \cong \mathbb{P}^1$, ou seja, este conjunto possui apenas a reta projetiva $\Lambda_1 \cong \mathbb{P}^1$.

De modo geral temos o seguinte.

Definição. 2.3.3. (Bandeira de Subespaços Vetoriais)
Uma bandeira associada a um espaço vetorial V é uma sequência encaixada de subespaços vetoriais de V. Por exemplo, uma bandeira de $k+1$ subespaços vetoriais de V é dada pela seguinte sequência:

$$\Lambda_0 \subsetneqq \Lambda_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \Lambda_k.$$

Definição. 2.3.4. (Variedade de Schubert)
Definimos a Variedade de Schubert, associada à bandeira

$$\Lambda_0 \subsetneqq \Lambda_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \Lambda_k,$$

como sendo o conjunto

$$\Omega(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_k) = \{\Lambda \in \mathbb{G}(k,n) \mid dim(\Lambda \cap \Lambda_i) \geq i; \forall i = 0, \ldots, k\}.$$

Como as projetividades de $\mathbb{P}^n$ atuam transitivamente no conjunto das bandeiras de mesma dimensão, consequentemente isto ocorre com as correspondentes variedades de Schubert. Com isso temos que uma classe de equivalência por projetividades é chamada

de um ciclo de Schubert e será denotado por $\Omega(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$, onde $\alpha_i = dim(\Lambda_i)$ para todo representante da classe.

Definição. 2.3.5. (Ciclo Especial de Schubert)
Um ciclo especial de Schubert associado à Grassmanniana $\mathbb{G}(k, n)$ é definido como

$$\sigma_a = \Omega(n-k-a, n-k+1, \ldots, n)$$

ou seja, o ciclo dos k-planos que intersectam um subespaço vetorial de dimensão $n-k-a$. Claro que só faz sentido se $0 \leq a \leq n-k$.

2.4 Ciclos de Schubert e Anel de Chow

Vamos nesta secção descrever, de modo suscinto, a construção do Anel de Chow. Para maiores detalhes consultar [21] apêndice A, [18] secção 2.3, [59], também os clássicos da teoria de intersecção escritos por William Fulton [12] e [13].

No que segue X será uma variedade algébrica irredutível de dimensão N.

Definição. 2.4.1.
Um ciclo de codimensão r sobre X é um elemento do grupo abeliano livremente gerado pelas subvariedades de X de codimensão r. Logo, um ciclo Y pode ser escrito como

$$Y = \sum n_i Y_i,$$

onde $n_i \in \mathbb{Z}$ e Y_i são subvariedades de codimensão r, para todo i.

Definição. 2.4.2.
Dizemos que duas variedades Y e Y' de codimensão r são racionalmente equivalentes se existir uma subvariedade $Z \subset Y$ de codimensão $r-1$ e um morfismo $f : Z \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tal que $Y = f^{-1}(0)$ e $Y' = f^{-1}(\infty)$.

Denoteremos por $[Y]$ a classe de equivalência da subvariedade Y. Esta relação de equivalência extendível aos ciclos de X. Para cada r seja $A_r(X)$ o grupo dos ciclos de codimensão r módulo equivalência racional. Temos que $A_0(X) = \mathbb{Z}$, gerado pela classe da variedade X e $A_r(X) = 0$ se $r > N$.

Definição. 2.4.3. (Grupo de Chow)
O grupo de Chow de X se denota por $A_*(X)$ e é definido como a seguinte soma direta:

$$A_*(X) := \bigoplus_{r=0}^{N} A_r(X).$$

Para dar uma estrutura de anel ao grupo de Chow $A_*(X)$, temos que definir um produto entre os ciclos. A idéia é que se temos duas subvariedades Y e W de codimensão r e s respectivamente, a intersecção em geral é uma subvariedade de codimensão $r + s$. Passando às classes de equivalência dos ciclos podemos definir uma multiplicação

$$A_r(X) \times A_s(X) \longrightarrow A_{r+s}(X).$$

Definição. 2.4.4. (Anel de Chow)
O anel de Chow de X é definido como o grupo de Chow juntamente com o produto explicado anteriormente. Denotaremos o anel de Chow por $A^*(X)$.

Observação. 2.4.5.
O anel de Chow também é chamado de Anel de Intersecção de Chow.

Capítulo 3

Cálculo de Schubert numa Álgebra de Grassmann

Nesse capítulo, será assumido o conhecimento prévio de alguns resultados básicos de Álgebra exterior (sinônimo de Álgebra de Grassmann), produto exterior e também sobre módulos livres. Uma exposição suscinta e objetiva para nossos propósitos pode ser encontrada em [18] e em [22].

No que segue, A é um anel comutativo com identidade e M um A-módulo, não necessariamente finitamente gerado sobre A, mas nosso caso de interesse é $A = \mathbb{Z}$ e $M = \mathbb{Z}^n$ um $\mathbb{Z}$ módulo livre de posto $n > 0$. Seja t uma indeterminada sobre A e $A[[t]]$ o anel das séries formais de potências em t a coeficientes em A. Seja

$$\bigwedge M[[t]] := \bigwedge (M \otimes_A A)[[t]]$$

Um elemento de $\bigwedge M[[t]]$ é uma série de potências em t a coeficientes em $\bigwedge M$, onde

$$\bigwedge M = \bigoplus_{k \geq 0} \bigwedge^k M$$

é a álgebra exterior associada ao A-módulo M.

3.1 Derivações de Hasse-Schmidt em uma Álgebra Exterior

Definição. 3.1.1. (Derivação de Hasse-Schmidt)
Uma derivação de Hasse-Schmidt $\mathfrak{D}_t$ em $\bigwedge M$, ou simplesmente uma HS-derivação em $\bigwedge M$, é um homomorfismo de A-álgebras

$$\mathfrak{D}_t : \bigwedge M \longrightarrow \bigwedge M[[t]]$$

definido do seguinte modo:

$$\mathfrak{D}_t(\alpha) = \sum_{i\geq 0} \mathfrak{D}_i(\alpha)t^i, \ \forall\ \alpha \in \bigwedge M; \quad \textit{onde } \mathfrak{D}_i : \bigwedge M \longrightarrow \bigwedge M.$$

Note que, uma derivação de Hasse-Schmidt determina e é determinada por seus coeficientes $\mathfrak{D}_i$, que são aplicações como descritas.

Surge agora uma pergunta natural: O que sabemos sobre cada aplicação $\mathfrak{D}_i$?
Nós temos a chamada regra de Leibniz generalizada.

Proposição. 3.1.2. (Regra de Leibniz Generalizada)

$$\mathfrak{D}_k(\alpha \wedge \beta) = \sum_{i=0}^{k} \mathfrak{D}_i(\alpha) \wedge \mathfrak{D}_{k-i}(\beta), \ \forall\ \alpha, \beta \in \bigwedge M \ e \ \forall\ k \geq 0. \tag{3.1}$$

Demonstração. Pela definição de $\mathfrak{D}_t$, temos que

$$\mathfrak{D}_t(\alpha \wedge \beta) = \sum_{i\geq 0} \mathfrak{D}_i(\alpha \wedge \beta)t^i.$$

Como $\mathfrak{D}_t$ é um homomorfismo de A-álgebras

$$\mathfrak{D}_t(\alpha \wedge \beta) = \mathfrak{D}_t(\alpha) \wedge \mathfrak{D}_t(\beta) = \left(\sum_{i\geq 0} \mathfrak{D}_i(\alpha)t^i\right) \wedge \left(\sum_{j\geq 0} \mathfrak{D}_j(\beta)t^j\right).$$

Logo, $\mathfrak{D}_k(\alpha \wedge \beta)$ é o coeficiente de t^k em ambas as expressões, com isso podemos concluir que

$$\mathfrak{D}_k(\alpha \wedge \beta) = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\geq 0}} \mathfrak{D}_i(\alpha) \wedge \mathfrak{D}_j(\beta) = \sum_{i=0}^{k} \mathfrak{D}_i(\alpha) \wedge \mathfrak{D}_{k-i}(\beta), \ \forall\ k \geq 0.$$

□

Exemplo. 3.1.3. $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$

(i) $\mathfrak{D}_0 : \bigwedge M \longrightarrow \bigwedge M$ *é um homomorfismo de A-álgebras, pois pela regra de Leibniz generalizada temos que*

$$\mathfrak{D}_0(\alpha \wedge \beta) = \mathfrak{D}_0(\alpha) \wedge \mathfrak{D}_0(\beta), \ \forall \ \alpha, \beta \in \bigwedge M.$$

(ii) $\mathfrak{D}_1(\alpha \wedge \beta) = \mathfrak{D}_1(\alpha) \wedge \mathfrak{D}_0(\beta) + \mathfrak{D}_0(\alpha) \wedge \mathfrak{D}_1(\beta), \ \forall \ \alpha, \beta \in \bigwedge M.$
Note que, quando $\mathfrak{D}_0 = id_{\bigwedge M}$, $\mathfrak{D}_1$ *funcionará como derivação usual de ordem* 1*:*

$$\mathfrak{D}_1(\alpha \wedge \beta) = \mathfrak{D}_1(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathfrak{D}_1(\beta).$$

Consequentemente

$$\mathfrak{D}_1^k(\alpha \wedge \beta) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathfrak{D}_1^i(\alpha) \wedge \mathfrak{D}_1^{k-i}(\beta), \ \forall \ k \geq 0.$$

(iii) $\mathfrak{D}_2(\alpha \wedge \beta) = \mathfrak{D}_2(\alpha) \wedge \mathfrak{D}_0(\beta) + \mathfrak{D}_1(\alpha) \wedge \mathfrak{D}_1(\beta) + \mathfrak{D}_0(\alpha) \wedge \mathfrak{D}_2(\beta), \ \forall \ \alpha, \beta \in \bigwedge M.$

Observação. 3.1.4.
Como $\mathfrak{D}_t = \sum_{i \geq 0} \mathfrak{D}_i t^i$, *a sequência dos coeficientes de* $\mathfrak{D}_t$, $\mathfrak{D} := (\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots)$, *será também chamada de derivação de Hasse-Schmidt. Os* $\mathfrak{D}_i$*'s serão chamados de componentes de* $\mathfrak{D}$. *Os símbolos* $\mathfrak{D}_t$ *e* $\mathfrak{D}$ *serão ambos utilizados para denotar as HS-derivações.*

Proposição. 3.1.5.
Seja $\delta_t : M \longrightarrow M[[t]]$, *um homomorfismo de A-módulos. Existe uma única HS-derivação:*

$$\mathfrak{D}_t : \bigwedge M \longrightarrow \bigwedge M[[t]] \quad \textit{tal que} \ \ \mathfrak{D}_{t|_M} = \delta_t.$$

Demonstração. Como M é um A-módulo, sua álgebra exterior é dada por

$$\bigwedge M := \bigoplus_{k \geq 0} \bigwedge^k M = \bigwedge^0 M + \bigwedge^1 M + \bigwedge^2 M + \ldots = A + M + \bigwedge^2 M + \ldots$$

$\forall \ \mu \in \bigwedge M$, μ é soma finita de elementos homogêneos, $\mu = \mu_{k_1} + \ldots + \mu_{k_h}$, onde $\mu_{k_j} \in \bigwedge^{k_j} M$ e $j \in \{1, \ldots, h\}$. Logo, verifiquemos que tal propriedade é válida $\forall \ \mu \in \bigwedge^k M$

($\forall\ k \geq 1$). Portanto, μ é soma finita de elementos da forma $m_{i_1} \wedge \ldots \wedge m_{i_k}$, onde $m_{i_1}, \ldots, m_{i_k} \in M$:

$$\mu = \sum_{i_1,\ldots,i_k} m_{i_1} \wedge \ldots \wedge m_{i_k}.$$

Vamos agora provar a existência da extensão $\mathfrak{D}_t$ de δ_t. Definamos $\mathfrak{D}_t : \bigwedge M \longrightarrow \bigwedge M[[t]]$ do seguinte modo:

$$\mathfrak{D}_t(\mu) = \mathfrak{D}_t\left(\sum_{i_1,\ldots,i_k} m_{i_1} \wedge \ldots \wedge m_{i_k}\right) = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \mathfrak{D}_t(m_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \mathfrak{D}_t(m_{i_k}) =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_k} \delta_t(m_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \delta_t(m_{i_k}).$$

Assim fica definida uma extensão de $\delta_t : M \longrightarrow M[[t]]$ à álgebra exterior de M, $\bigwedge M$, dada por $\mathfrak{D}_t$. Provemos agora a unicidade. Suponha que $\mathfrak{C}_t$ é outra extensão de δ_t, ou seja, $\mathfrak{C}_{t|_M} = \delta_t$. Então, $\forall\ m_{i_1} \wedge \ldots \wedge m_{i_k} \in \bigwedge^k M$,

$$\mathfrak{C}_t(m_{i_1} \wedge \ldots \wedge m_{i_k}) = \mathfrak{C}_t(m_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \mathfrak{C}_t(m_{i_k}) = \delta_t(m_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \delta_t(m_{i_k}) =$$

$$= \mathfrak{D}_t(m_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \mathfrak{D}_t(m_{i_k}) = \mathfrak{D}_t(m_{i_1} \wedge \ldots \wedge m_{i_k}).$$

Fica assim provada a unicidade. □

Vejamos agora mais algumas definições que nos serão úteis para definir uma estrutura de grupo num subconjunto das HS-derivações.

Definição. 3.1.6. (HS-Derivação regular e HS-Derivação normalizada)
Seja $\mathfrak{D}_t = \sum_{i\geq 0} \mathfrak{D}_i t^i$ uma derivação de Hasse-Schmidt.

- *Se $\mathfrak{D}_0 \in End_A(\bigwedge M)$ é um automorfismo, $\mathfrak{D}_t$ é chamada de derivação de Hasse-Schmidt regular.*
- *Se $\mathfrak{D}_0 = id_{\wedge M}$, $\mathfrak{D}_t$ é chamada de derivação de Hasse-Schmidt normalizada.*

Para podermos definir uma operação num subconjunto das HS-derivações vejamos o seguinte: seja $\mathfrak{D}_t : \bigwedge M \longrightarrow \bigwedge M[[t]]$ uma HS-derivação, denotemos por $\overline{\mathfrak{D}}_t$ a aplicação definida por

$$\overline{\mathfrak{D}}_t : \bigwedge M[[t]] \longrightarrow \bigwedge M[[t]]$$

$$\overline{\mathfrak{D}}_t(\sum_{i\geq 0}\alpha_i t^i) = \sum_{i\geq 0}\left(\mathfrak{D}_t \otimes_A \mathbf{1}_{A[[t]]}\right)(\alpha_i t^i) = \sum_{i\geq 0}\mathfrak{D}_t(\alpha_i)t^i.$$

Como é facilmente demonstrado em [17] e [18], a aplicação $\overline{\mathfrak{D}}_t$ é um endomorfismo de $\bigwedge M[[t]]$. Seja agora $HS_t(\bigwedge M)$ o conjunto de todas as HS-derivações regulares em $\bigwedge M$. Sejam $\mathfrak{C}_t, \mathfrak{D}_t \in HS_t(\bigwedge M)$. Definimos a operação $*$ em $HS_t(\bigwedge M)$ do seguinte modo

$$\mathfrak{C}_t * \mathfrak{D}_t = \sum_{h\geq 0}\left(\sum_{i+j=h}(\mathfrak{C}_i \circ \mathfrak{D}_j)\right)t^h$$

e disso, temos que $\mathfrak{C}_t * \mathfrak{D}_t = (\overline{\mathfrak{C}}_t \circ \overline{\mathfrak{D}}_t)_{|\bigwedge M}$, ou seja,

$$(\mathfrak{C}_t * \mathfrak{D}_t)(\alpha) = (\overline{\mathfrak{C}}_t \circ \overline{\mathfrak{D}}_t)(\alpha),\ \forall\ \alpha \in \bigwedge M.$$

Agora, enfim, podemos definir uma estrutura de grupo em $HS_t(\bigwedge M)$. Temos a seguinte proposição.

Proposição. 3.1.7.
O par $(HS_t(\bigwedge M), *)$ é um grupo.

Demonstração. ver [18] páginas 65 e 66. □

3.1.1 Endomorfismo Shift

De agora em diante M será um $\mathbb{Z}$-módulo livremente gerado por $\mathcal{E} := (\epsilon^1, \epsilon^2, \ldots)$, uma base com uma quantidade enumerável de elementos, isto é,

$$M := \bigoplus_{j\geq 1}\mathbb{Z}\cdot\epsilon^j.$$

Definição. 3.1.8. (Endomorfismo Shift)
O i-ésimo endomorfismo Shift ($i \in \mathbb{N}$)

$$\mathcal{D}_i : M \longrightarrow M$$

é o único $\mathbb{Z}$-endomorfismo tal que $\mathcal{D}_i(\epsilon^j) = \epsilon^{i+j}$.

Observação. 3.1.9.

(i) *Como* $\mathcal{D}_0(\epsilon^j) = \epsilon^j, \forall\ j \geq 1$. *Temos que* $\mathcal{D}_0 = id : M \longrightarrow M$.

(ii) $\forall\ i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \mathcal{D}_i = \mathcal{D}_1^i$. *Logo, os homomorfismos shift em* M *comutam dois a dois,* $D_iD_j = D_jD_i\ \forall\ i, j \in \mathbb{N}$.

(iii) $\mathcal{D} := (\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots)$ *é a chamada sequência de endomorfismos shift de* M.

(iv) *O homomorfismo* $\mathcal{D}_t : M \longrightarrow M[[t]]$, *definido por* $\mathcal{D}(\alpha) := \sum_{i\geq 0} \mathcal{D}_i(\alpha)t^i$, *é a HS-derivação associada à sequência de endomorfismos shift* $\mathcal{D} := (\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots)$.

(v) *Se* M *é um módulo finitamente gerado com base* $\mathcal{E} := (\epsilon^1, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^n)$, $\mathcal{D}_i(\epsilon^j) = 0$ *sempre que* $i + j > n$.

3.2 O anel $A^*(M, \mathcal{D})$

Seja M um $\mathbb{Z}$-módulo livremente gerado por $\mathcal{E} := (\epsilon^1, \epsilon^2, \ldots)$, $\mathcal{D} := (\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots)$ a sequência de endomorfismos Shift de M. Seja $\underline{\lambda} = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots)$ uma partição, codificada do seguinte modo: 1 aparece m_1 vezes, 2 aparece m_2 vezes e assim sucesivamente. Definimos $\mathcal{D}^{\underline{\lambda}}$ como sendo

$$\mathcal{D}^{\underline{\lambda}} = \mathcal{D}_1^{m_1} \circ \ldots \circ \mathcal{D}_k^{m_k} = \mathcal{D}_1^{m_1+2m_2+\ldots+km_k} \in End_{\mathbb{Z}}(M)$$

onde $\circ$ é a composição em $End_{\mathbb{Z}}(M)$. Seja $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \ldots)$ uma sequência infinita de indeterminadas sobre $\mathbb{Z}$. Denotaremos por $\mathbb{Z}[\mathbf{T}]$ o anel $\mathbb{Z}[T_1, T_2, \ldots]$ de polinômios nas indeterminadas $T_1, T_2, \ldots$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Definimos $\mathbf{T}^{\underline{\lambda}}$ por

$$\mathbf{T}^{\underline{\lambda}} = T_1^{m_1} \ldots T_k^{m_k}$$

e $T_0 = \mathbf{1}$. Seja $ev_{\mathcal{D}} : \mathbb{Z}[\mathbf{T}] \longrightarrow End_{\mathbb{Z}}(M)$ o homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos definido por

$$\mathbf{T}^{\underline{\lambda}} \longmapsto ev_{\mathcal{D}}(\mathbf{T}^{\underline{\lambda}}) := \mathcal{D}^{\underline{\lambda}}$$

O conjunto imagem de $ev_{\mathcal{D}}$ é o $\mathbb{Z}$-submódulo de $End_{\mathbb{Z}}(M)$ dado por

$$A^*(M,\mathcal{D}) := \left\{ \sum_{\underline{\lambda}\in L} a_{\underline{\lambda}} \mathcal{D}^{\underline{\lambda}} \mid L \text{ é um conjunto finito de partições e } a_{\underline{\lambda}} \in \mathbb{Z} \right\}$$

Se $P(\mathbf{T}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{T}]$, iremos simplesmente escrever $P(\mathcal{D})$ ao invés de escrever $ev_{\mathcal{D}}(P(\mathbf{T}))$. Com isso em mãos, temos a seguinte proposição:

Proposição. 3.2.1.
O conjunto $A^*(M,\mathcal{D})$ é a menor subálgebra comutativa de $End_{\mathbb{Z}}(M)$ contendo todos os $\mathcal{D}_i$'s.

Demonstração. Ver [18] página 69. □

Devido à comutatividade de $A^*(M,\mathcal{D})$, o natural epimorfismo de avaliação:

$$ev_{\mathcal{D}} : \mathbb{Z}[\mathbf{T}] \longrightarrow A^*(M,\mathcal{D})$$

$$\mathbf{T}^{\underline{\lambda}} \longmapsto ev_{\mathcal{D}}(\mathbf{T}^{\underline{\lambda}}) = \mathcal{D}^{\underline{\lambda}}$$

se extende a um homomorfismo de $\mathbb{Z}$-álgebras que, por abuso de notação, será denotado também por $ev_{\mathcal{D}}$. Tal extensão pode ser definida nos geradores por: $ev_{\mathcal{D}}(T_i) = \mathcal{D}_i$.

Vejamos agora mais um homomorfismo de avaliação ev_{ϵ^1} que será igualmente importante para nós. Seja

$$ev_{\epsilon^1} : A^*(M,\mathcal{D}) \longrightarrow M$$

$$P(\mathcal{D}) \longmapsto P(\mathcal{D}) \cdot \epsilon^1.$$

Claramente ev_{ϵ^1} é sobrejetiva, visto que $\mathcal{D}_{i-1} \cdot \epsilon^1 = \mathcal{D}_1^{i-1} \cdot \epsilon^1 = \epsilon^i,\ \forall\ i \geq 1$. De modo geral, para qualquer $m = a_1\epsilon^1 + a_2\epsilon^2 + \ldots + a_n\epsilon^n \in M$, tome $G_m(\mathcal{D}) = a_1 id_M + a_2\mathcal{D}_1 + \ldots + a_n\mathcal{D}_{n-1}$ e teremos que $ev_{\epsilon^1}(G_m(\mathcal{D})) = m$. O polinômio $G_m(\mathcal{D})$ é o que mais à frente será chamado de um Polinômio de Giambelli associado a $m \in M$. Além disso,

$$ev_{\mathcal{D},\epsilon^1} := (ev_{\epsilon^1}) \circ (ev_{\mathcal{D}}) : \mathbb{Z}[\mathbf{T}] \longrightarrow M$$

é um epimorfismo, e a igualdade $ker(ev_{\mathcal{D},\epsilon^1}) = ker(ev_{\mathcal{D}})$ é válida. Por definição de $ev_{\mathcal{D},\epsilon^1}$, temos que $ker(ev_{\mathcal{D}}) \subseteq ker(ev_{\mathcal{D},\epsilon^1})$. Reciprocamente, temos que se $P(\mathbf{T}) \in ker(ev_{\mathcal{D},\epsilon^1})$ então

$$ev_{\mathcal{D},\epsilon^1}(P(\mathbf{T})) = ev_{\mathcal{D}}(P(\mathbf{T}))\epsilon^1 = 0_M.$$

Logo, $\forall\ m \in M$

$$ev_{\mathcal{D}}(P(\mathbf{T}))m = ev_{\mathcal{D}}(P(\mathbf{T}))G_m(\mathcal{D})\epsilon^1 = G_m(\mathcal{D})ev_{\mathcal{D}}(P(\mathbf{T}))\epsilon^1 = 0$$

pois, por hipótese, $ev_{\mathcal{D}}(P(\mathbf{T}))\epsilon^1 = 0_M$. Com isso concluímos que

$$ev_{\mathcal{D}}(P(\mathbf{T}))m = 0, \forall\ m \in M,$$

ou seja,

$$ev_{\mathcal{D}}(P(\mathbf{T})) = 0_{A^*(M,\mathcal{D})}$$

que equivale a dizer que

$$P(\mathbf{T}) \in ker(ev_{\mathcal{D}}).$$

Assim fica provado que $ker(ev_{\mathcal{D},\epsilon^1}) \subseteq ker(ev_{\mathcal{D}})$ e temos a seguinte conclusão:

$$ker(ev_{\mathcal{D},\epsilon^1}) = ker(ev_{\mathcal{D}}).$$

Com esses resultados e aplicando o teorema do isomorfismo temos demonstrada a seguinte proposição:

Proposição. 3.2.2.

$$\frac{\mathbb{Z}[\boldsymbol{T}]}{ker(ev_{\mathcal{D}})} \simeq A^*(M,\mathcal{D}) \simeq M. \tag{3.2}$$

E, como se pode conferir em [18] página 70, temos ainda o seguinte resultado interessante:

$$ker(ev_{\mathcal{D}}) = (T_2 - T_1^2, T_3 - T_1^3, \ldots).$$

Observação. 3.2.3. (Sobre o módulo extendido $\overline{M} = \mathbb{Z} \oplus M$)
Os endomorfismos Shift

$$\mathcal{D}_i : M \longrightarrow M$$

claramente se extendem a endomorfismos Shift em $\overline{M}$

$$\mathcal{D}_i : \overline{M} \longrightarrow \overline{M}$$

definindo $\mathcal{D}_i\epsilon^0 = \epsilon^i$, *onde* $\epsilon^0 = 1 \in \mathbb{Z}$. *Por economia de notação utilizaremos o mesmo símbolo para denotar esses dois endomorfismos.*

3.3 Derivações de Schubert

Seja $\mathcal{D} := (\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots)$ a sequência de endomorfismos Shift de M. Seja

$$\mathcal{D}_t : M \longrightarrow M[[t]]$$

$$\mathcal{D}_t(\alpha) = \sum_{i \geq 0} \mathcal{D}_i(\alpha) t^i$$

a HS-derivação associada. Como $\mathcal{D}_t$ é um homomorfismo (proposição 3.1.5), há uma única extensão para uma HS-derivação

$$D_t : \bigwedge M \longrightarrow \bigwedge M[[t]]$$

Definição. 3.3.1. (Derivação de Schubert)
A única extensão de $\mathcal{D}_t : M \longrightarrow M[[t]]$ para uma HS-derivação

$$D_t : \bigwedge M \longrightarrow \bigwedge M[[t]]$$

é chamada de Derivação de Schubert (ou S-Derivação).

Ao fazer uso dos resultados das secções anteriores, tiramos as seguintes conclusões a respeito das derivações de Schubert.

(i) $D_t(\alpha) = \sum_{i \geq 0} D_i(\alpha) t^i$, $\forall\ \alpha \in \bigwedge M$.

(ii) É válida a regra de Leibniz generalizada

$$D_k(\alpha \wedge \beta) = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} D_i(\alpha) \wedge D_j(\beta), \forall\ \alpha, \beta \in \bigwedge M,\ \forall\ k \geq 0$$

onde D_k é a k-ésima derivação de Schubert.

(iii) Como $D_0 = id_{\bigwedge M}$,$\forall\ \alpha, \beta \in \bigwedge M$ temos que:

- $D_0(\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge \beta$.
- $D_1(\alpha \wedge \beta) = D_1(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge D_1(\beta)$, uma derivação usual.
- $D_1^k(\alpha \wedge \beta) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D_1^i(\alpha) \wedge D_1^{k-i}\beta$.

(iv) A derivação de Schubert é então o único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-álgebras

$$D_t : \bigwedge M \longrightarrow \bigwedge M[[t]]$$

tal que

$$D_t(\epsilon^j) = \sum_{i\geq 0} D_i(\epsilon^j)t^i = \sum_{i\geq 0} \epsilon^{j+i}t^i.$$

Observação. 3.3.2.
Para cada $i \geq 0$, $D_i : \bigwedge M \longrightarrow \bigwedge M$ é um endomorfismo homogêneo de grau zero em $\bigwedge M$, com respeito à graduação $\bigwedge M := \bigoplus_{k\geq 0} \bigwedge^k M$. Isto é, $D_i(\bigwedge^k M) \subseteq \bigwedge^k M$. Por abuso de notação, o endomorfismo induzido $D_{i|_{\bigwedge^k M}} : \bigwedge^k M \longrightarrow \bigwedge^k M, i \geq 0$, também será denotado por D_i ao invés de $D_{i|_{\bigwedge^k M}}$

Proposição. 3.3.3.
Os endomorfismos induzidos $D_i : \bigwedge^k M \longrightarrow \bigwedge^k M, i \geq 0$ comutam dois a dois.

Demonstração. A demonstração do caso geral pode ser encontrada em [18], página 71. Vamos demonstrar o caso $k = 2$, que para nosso trabalho será suficiente. Assim, $\forall m \in \bigwedge^2 M$, m é soma de termos da forma $\alpha \wedge \beta$ com $\alpha, \beta \in M$. Sem perda de generalidade, verifiquemos que a propriedade é válida para todo $m \in \bigwedge^2 M$ da forma $\alpha \wedge \beta$, com $\alpha, \beta \in M$. Desse modo:

$$D_iD_h(\alpha \wedge \beta) = D_i(D_h(\alpha \wedge \beta)) = D_i(D_h(\alpha \wedge \beta) = D_i\left(\sum_{\substack{h_1+h_2=h\\ h_1,h_2\geq 0}} D_{h_1}(\alpha) \wedge D_{h_2}(\beta)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1+i_2=i\\ i_1,i_2\geq 0}} \sum_{\substack{h_1+h_2=h\\ h_1,h_2\geq 0}} D_{i_1}(D_{h_1}(\alpha)) \wedge D_{i_2}(D_{h_2}(\beta)) = \sum_{\substack{h_1+h_2=h\\ h_1,h_2\geq 0}} \sum_{\substack{i_1+i_2=i\\ i_1,i_2\geq 0}} D_{h_1}(D_{i_1}(\alpha)) \wedge D_{h_2}(D_{i_2}(\beta)) =$$

$$= D_h\left(\sum_{\substack{i_1+i_2=i\\ i_1,i_2\geq 0}} D_{i_1}(\alpha) \wedge D_{i_2}(\beta)\right) = D_h(D_i(\alpha \wedge \beta)).$$

Com isso fica garantido que os endomorfismos Shift

$$D_i, D_h : \bigwedge^2 M \longrightarrow \bigwedge^2 M$$

comutam dois a dois $\forall\ i, h \geq 0$. □

Como consequência, temos que a imagem do homomorfismo natural de avaliação

$$ev_D : \mathbb{Z}[\mathbf{T}] \longrightarrow End_{\mathbb{Z}}(\bigwedge^k M)$$

$$ev_D(\mathbf{T}^{\underline{\lambda}}) = D^{\underline{\lambda}}$$

é dada pelo seguinte subanel comutativo de $End_{\mathbb{Z}}(\bigwedge^k M)$

$$A^*(\bigwedge^k M, D) := \left\{ \sum_{\underline{\lambda} \in L} a_{\underline{\lambda}} \mathcal{D}^{\underline{\lambda}} \mid L \text{ é um conjunto finito de partições e } a_{\underline{\lambda}} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Para efeito de manipulações algébricas com os $D_i's$, temos os seguintes resultados.

Proposição. 3.3.4.

$$D_i(\epsilon^{j_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{j_k}) = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=i \\ i_1,\ldots,i_k \geq 0}} \epsilon^{j_1+i_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{j_k+i_k}.$$

Demonstração. A demonstração do caso geral pode ser encontrada em [18] página 73. Vamos demonstrar o caso $k = 2$, suficiente para nossas aplicações. Pela definição dos endomorfismos Shift em M temos que

$$D_h(\epsilon^{j_1} \wedge \epsilon^{j_2}) = \sum_{\substack{h_1+h_2=h \\ h_1,h_2 \geq 0}} D_{h_1}(\epsilon^{j_1}) \wedge D_{h_2}(\epsilon^{j_2}) = \sum_{\substack{h_1+h_2=h \\ h_1,h_2 \geq 0}} \epsilon^{j_1+h_1} \wedge \epsilon^{j_k+h_2}.$$

□

Corolário. 3.3.5.

A identidade

$$D_i(\epsilon^j \wedge \alpha) = \epsilon^j \wedge D_i(\alpha) + D_{i-1}(\epsilon^{j+1} \wedge \alpha)$$

é válida $\forall\ i \geq 0, \forall\ j \geq 0$ *e* $\forall\ \alpha \in \bigwedge M$.

Demonstração. Basta escrever α como combinação de termos da forma $\epsilon^{j_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{j_k}$ e aplicar a proposição anterior. □

3.4 Fórmula de Pieri para Derivações de Schubert

Definição. 3.4.1. (k-schindex)
Sejam $\mathcal{I}^k = \{(i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k / 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k\}$ *e* $\mathcal{I}_n^k = \{I \in \mathcal{I}^k / i_k \leq n\}$. *Em outras palavras,* $\mathcal{I}_n^k$ *é o conjunto de todas as k-uplas com as entradas no conjunto* $\{1, \ldots, n\}$ *e ordenadas de modo estritamente crescente. Toda k-upla desse tipo será chamada, por comodidade, de* ***k-shindex****, uma contração das palavras Schubert e Index.*

A razão para essa terminologia é que para cada k-shindex I existe uma Variedade de Schubert na Grassmanniana $G(k, n)$ com precisamente aquele índice de Schubert.

Teorema. 3.4.2. (Fórmula de Pieri para Derivações de Schubert)
Seja $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_k^n$ *um k-schindex. A fórmula de Pieri para derivações de Schubert*

$$D_h(\epsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{i_k}) = \sum_{(h_1,\ldots,h_k) \in H(I,h)} \epsilon^{i_1+h_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{i_k+h_k} \tag{3.3}$$

é válida para todo $h \in \mathbb{N}$, *onde* $H(I, h)$ *é o conjunto de todas k-uplas* $(h_1, \ldots, h_k) \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$1 \leq i_1 \leq i_1+h_1 < i_2 \leq i_2+h_2 < \ldots \leq i_{k-1}+h_{k-1} < i_k \leq i_k+h_k, \text{ com } h_1+h_2+\ldots+h_k = h.$$

Demonstração. A demonstração para o caso geral pode ser encontrada em [18] página 74, vamos agora demonstrar o caso de nosso interesse: $k = 2$.

Para cada $h \geq 0$, utilizamos a regra de Leibniz generalizada e obtemos o seguinte resultado:

$$D_h(\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2}) = \sum_{\substack{h_1+h_2=h \\ h_1,h_2 \geq 0}} \epsilon^{i_1+h_1} \wedge \epsilon^{i_2+h_2}$$

Agora reescrevemos o somatório acima do seguinte modo

$$D_h(\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2}) = \sum_{\substack{h_1+h_2=h \\ h_1,h_2 \geq 0}} \epsilon^{i_1+h_1} \wedge \epsilon^{i_2+h_2} = P + \overline{P}.$$

onde

$$P = \sum_{\substack{h_1+h_2=h \\ h_1,h_2 \geq 0 \\ i_1+h_1<i_2}} \epsilon^{i_1+h_1} \wedge \epsilon^{i_2+h_2}$$

e

$$\overline{P} = \sum_{\substack{h_1+h_2=h \\ h_1,h_2\geq 0 \\ i_1+h_1\geq i_2}} \epsilon^{i_1+h_1} \wedge \epsilon^{i_2+h_2}.$$

Para que tenhamos nosso teorema demonstrado, no caso $k = 2$, precisamos provar que $\overline{P} = 0$. Nessa direção iremos utilizar o seguinte fato: no conjunto

$$A := \{a \in \mathbb{Z} \mid i_2 - i_1 \leq a \leq i_2 - i_1 + h\}$$

definimos a bijeção $\rho(a) = i_2 - i_1 + h - a$. Com isso temos que

$$2\overline{P} = \overline{P} + \overline{P} = \sum_{h_1=i_2-i_1}^{h} \epsilon^{i_1+h_1} \wedge \epsilon^{i_2+h-h_1} + \sum_{h_1=i_2-i_1}^{h} \epsilon^{i_1+\rho(h_1)} \wedge \epsilon^{i_2+h-\rho(h_1)} = 0,$$

consequentemente $\overline{P} = 0$. Desse modo chegamos a

$$D_h(\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2}) = P = \sum_{\substack{h_1+h_2=h \\ h_1,h_2\geq 0 \\ i_1+h_1<i_2}} \epsilon^{i_1+h_1} \wedge \epsilon^{i_k+h_2},$$

somatório esse que podemos reescrever como

$$D_h(\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2}) = \sum_{\substack{h_1+h_2=h \\ h_1,h_2\geq 0 \\ 1\leq i_1\leq i_1+h_1<i_2\leq i_2+h_2}} \epsilon^{i_1+h_1} \wedge \epsilon^{i_2+h_2}$$

que é exatamente a fórmula de Pieri para derivações de Schubert, no caso $k = 2$. □

3.5 O Problema de Giambelli

Relembremos alguns fatos a respeito do $\mathbb{Z}$-módulo M. O homomorfismo de avaliação

$$ev_{\epsilon^1} : A^*(M, D) \longrightarrow M$$

$$ev_{\epsilon^1}(P(D)) = P(\mathcal{D})\epsilon^1$$

é sobrejetivo. Isto é, $\forall\ m \in M\ \exists\ G_m(D) \in A^*(M, D)$ tal que $ev_{\epsilon^1}(G_m(D)) = m$. O polinômio $G_m(D)$ é dito um Polinômio de Giambelli de m. O caso análogo para

quando trabalharmos com $\bigwedge^k M \ \forall \ k \geq 1$ é o que chamamos de Problema de Giambelli.
Continuando a analogia com o caso $k = 1$, dados os homomorfismos de avaliação

$$ev_D : \mathbb{Z}[\mathbf{T}] \longrightarrow A^*(\bigwedge^k M, D)$$
$$ev_D(P(\mathbf{T})) = P(D)$$

e

$$ev_{\epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^k} : A^*(\bigwedge^k M, D) \longrightarrow \bigwedge^k M$$
$$ev_{\epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^k}(P(D)) = P(D)(\epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^k).$$

Denotemos por $ev_{D,\epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^k}$ a composição

$$ev_{\epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^k} \circ ev_D : \mathbb{Z}[\mathbf{T}] \longrightarrow \bigwedge^k M.$$

Uma pergunta natural que surge, ao relacionarmos com o caso $k = 1$, é se $ev_{D,\epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^k}$ ou, equivalentemente, se $ev_{\epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^k}$ é sobrejetiva?
Para começar vejamos a seguinte definição.

Definição. 3.5.1. (Polinômio de Giambelli)
Sejam $m \in \bigwedge^k M$ e $G_m \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{T}]$ tais que $G_m(D)(\epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^k) = m$. $G_m(D)$ é chamado um Polinômio de Giambelli de m.

Observação. 3.5.2. (A não unicidade do polinômio de Giambelli)
Por exemplo

$$T_2^2 - T_1T_3,\ T_1^4 - 2T_1^2 + T_2^2,\ T_1^4 - T_2^2 \ e\ 2T_1^2 + 2T_2^2 - 2T_1T_3 - T_1^4$$

são polinômios de Giambelli de $\epsilon^3 \wedge \epsilon^4 \in \bigwedge^2 M$. Pois

$$ev_{D,\epsilon^1 \wedge \epsilon^2}(T_2^2 - T_1T_3) = (D_2^2 - D_1D_3)(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^4) - D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^5) =$$
$$= (\epsilon^3 \wedge \epsilon^4 + \epsilon^2 \wedge \epsilon^5 + \epsilon^1 \wedge \epsilon^6) - (\epsilon^2 \wedge \epsilon^5 + \epsilon^1 \wedge \epsilon^6) = \epsilon^3 \wedge \epsilon^4$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned} \epsilon^3 \wedge \epsilon^4 &= ev_{D,\epsilon^1 \wedge \epsilon^2}(T_1^4 - T_2^2); \\ &= ev_{D,\epsilon^1 \wedge \epsilon^2}(T_1^4 - 2T_1^2 + T_2^2); \\ &= ev_{D,\epsilon^1 \wedge \epsilon^2}(2T_1^2 + 2T_2^2 - 2T_1T_3 - T_1^4). \end{aligned}$$

De agora em diante, por uma questão de brevidade, a notação $G_{i_1\ldots i_k}$ irá simbolizar um polinômio de Giambelli de $\epsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{i_k}$.

O Problema de Giambelli

Encontrar um polinômio $G_{i_1\ldots i_k} \in \mathbb{Z}[\mathbf{T}]$ tal que

$$G_{i_1\ldots i_k}(D)(\epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^k) = \epsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{i_k}$$

para todo k-schindex $(i_1, \ldots, i_k)$.

Provar a sobrejetividade de $ev_{\epsilon^1\wedge\ldots\wedge\epsilon^k}$ significa resolver o problema de Giambelli para todo $\epsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{i_k} \in \bigwedge^k M$, onde $(i_1, \ldots, i_k)$ é um k-schindex. O que podemos sugerir para obter tal polinômio de Giambelli é uma sutil de *integração por partes* como será mostrado no exemplo a seguir.

Observação. 3.5.3.

Utiliza-se tal terminologia pois a "ginástica" feita para a obtenção da derivação de Schubert, que quando aplicada ao gerador da k-ésima potência exterior resulta no elemento que já se tem em mãos, se assemelha muito ao método de integração por partes para a obtenção da primitiva de uma função real de uma variável. A identidade do corolário 3.3.5 é a fórmula correspondente ao método da integração por partes. Para maiores detalhes ver [18] página 10.

Exemplo. 3.5.4. (Integração por Partes para obtenção de um Polinômio de Giambelli de $\epsilon^3 \wedge \epsilon^4$)
Perceba que

$$D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^2 \wedge \epsilon^2 + \epsilon^1 \wedge \epsilon^3 = \epsilon^1 \wedge \epsilon^3;$$

$$D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^3 \wedge \epsilon^2 + \epsilon^2 \wedge \epsilon^3 + \epsilon^1 \wedge \epsilon^4 = \epsilon^1 \wedge \epsilon^4.$$

Do mesmo modo,

$$D_1^2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_1 D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^3) = \epsilon^2 \wedge \epsilon^3 + \epsilon^1 \wedge \epsilon^4.$$

Portanto,

$$D_1^2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^2 \wedge \epsilon^3 + \epsilon^1 \wedge \epsilon^4 \implies \epsilon^2 \wedge \epsilon^3 = D_1^2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) - \epsilon^1 \wedge \epsilon^4.$$

Logo,

$$\epsilon^2 \wedge \epsilon^3 = D_1^2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) - D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = (D_1^2 - D_2)(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2).$$

Agora vejamos o seguinte:

$$D_1(\epsilon^2 \wedge \epsilon^3) = \epsilon^3 \wedge \epsilon^3 + \epsilon^2 \wedge \epsilon^4 = \epsilon^2 \wedge \epsilon^4$$

$$D_1^2(\epsilon^2 \wedge \epsilon^3) = D_1 D_1(\epsilon^2 \wedge \epsilon^3) = D_1(\epsilon^2 \wedge \epsilon^4) = \epsilon^3 \wedge \epsilon^4 + \epsilon^2 \wedge \epsilon^5,$$

que nos fornece:

$$\epsilon^3 \wedge \epsilon^4 = D_1^2(\epsilon^2 \wedge \epsilon^3) - \epsilon^2 \wedge \epsilon^5$$

e como

$$D_2(\epsilon^2 \wedge \epsilon^3) = \epsilon^2 \wedge \epsilon^5$$

chegamos a

$$\epsilon^3 \wedge \epsilon^4 = (D_1^2 - D_2)(\epsilon^2 \wedge \epsilon^3).$$

Podemos enfim obter um polinômio de Giambelli de $\epsilon^3 \wedge \epsilon^4$, pois:

$$\epsilon^3 \wedge \epsilon^4 = (D_1^2 - D_2)(\epsilon^2 \wedge \epsilon^3),$$

$$\epsilon^2 \wedge \epsilon^3 = (D_1^2 - D_2)(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2).$$

Logo,

$$\epsilon^3 \wedge \epsilon^4 = (D_1^2 - D_2)(D_1^2 - D_2)(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = (D_1^2 - D_2)^2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2),$$

$$\epsilon^3 \wedge \epsilon^4 = (D_1^4 - 2D_1 D_2 + D_2^2)(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2).$$

Ou seja, $G_{34}(D) = D_1^4 - 2D_1 D_2 + D_2^2$ é um polinômio de Giambelli de $\epsilon^3 \wedge \epsilon^4$.

Para provar sobrejetividade de $ev_{\epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^k}$, e consequentemente resolver o Problema de Giambelli, precisamos de alguns lemas.

Lema. 3.5.5.
Para cada k-schindex $(i_1, \ldots, i_k)$, existe um polinômio $P(\boldsymbol{T}) \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{T}]$ tal que:

$$\epsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{i_k} = P(D)(\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_1+1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{i_1+(k-1)}).$$

Demonstração. ver [18] página 79. □

Lema. 3.5.6.
O problema de Giambelli tem solução para:

$$\epsilon^{n-(k-1)} \wedge \epsilon^{n-(k-2)} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{n}, \ \forall \ k \geq 1.$$

Demonstração. A demonstração do caso geral pode ser encontrada em [18] página 80. Vamos agora exibir uma solução para o caso $k = 2$, ou seja, vamos obter um polinômio de Giambelli para $\epsilon^{n-1} \wedge \epsilon^{n}$. Fazendo uso do exemplo anterior, podemos tirar as seguintes conclusões:

$$\epsilon^2 \wedge \epsilon^3 = (D_1^2 - D_2)(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2),$$

$$\epsilon^3 \wedge \epsilon^4 = (D_1^2 - D_2)(\epsilon^2 \wedge \epsilon^3) = (D_1^2 - D_2)^2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2).$$

Isso quer dizer que $D_1^2 - D_2$ é um polinômio de Giambelli de $\epsilon^2 \wedge \epsilon^3$. Também temos que:

$$\epsilon^{n-1} \wedge \epsilon^{n} = (D_1^2 - D_2)(\epsilon^{n-2} \wedge \epsilon^{n-1}).$$

Logo, por indução, podemos concluir que

$$\epsilon^{n-1} \wedge \epsilon^{n} = (D_1^2 - D_2)^{n-2}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2).$$

□

Observação. 3.5.7. (O endomorfismo $\Delta_{11} = D_1^2 - D_2$)
O polinômio $D_1^2 - D_2$ nos será muito útil e será denotado por Δ_{11}. Note que, quando aplicamos tal polinômio em termos da forma $\epsilon^i \wedge \epsilon^j$ com $1 \leq i < j$, temos o seguinte:

$$(D_1^2 - D_2)(\epsilon^i \wedge \epsilon^j) = D_1 D_1(\epsilon^i \wedge \epsilon^j) - D_2(\epsilon^i \wedge \epsilon^j) =$$

$$= D_1(\epsilon^{i+1} \wedge \epsilon^j + \epsilon^i \wedge \epsilon^{j+1}) - (\epsilon^{i+2} \wedge \epsilon^j + \epsilon^{i+1} \wedge \epsilon^{j+1} + \epsilon^i \wedge \epsilon^{j+2}) =$$

$$= (\epsilon^{i+2} \wedge \epsilon^j + \epsilon^{i+1} \wedge \epsilon^{j+1} + \epsilon^{i+1} \wedge \epsilon^{j+1} + \epsilon^i \wedge \epsilon^{j+2}) - (\epsilon^{i+2} \wedge \epsilon^j + \epsilon^{i+1} \wedge \epsilon^{j+1} + \epsilon^i \wedge \epsilon^{j+2}) =$$

$$= \epsilon^{i+1} \wedge \epsilon^{j+1}.$$

Ou seja,

$$\Delta_{11}(\epsilon^i \wedge \epsilon^j) = (D_1^2 - D_2)(\epsilon^i \wedge \epsilon^j) = D_1(\epsilon^i) \wedge D_1(\epsilon^j) = \epsilon^{i+1} \wedge \epsilon^{j+1}, \quad \forall\ 1 \leq i < j.$$

Surge agora uma pergunta: Qual é a importância dos endomorfismos $D_1,\ D_2$ e Δ_{11} ?
Resposta: Podemos obter todos os outros endomorfismos

$$D_h : \bigwedge^2 M \longrightarrow \bigwedge^2 M \text{ com } h \geq 3$$

em termos de $D_1,\ D_2$ e Δ_{11}. Para tal utilizaremos o fato que $\bigwedge^2 M$ é um $\mathbb{Z}[D]$-módulo principal gerado por $\epsilon^1 \wedge \epsilon^2$ (como será verificado mais adiante no teorema 3.5.10 e no corolário 3.5.11).

Exemplo. 3.5.8. (Obtenção de D_3 em função de $D_1,\ D_2$ e Δ_{11})
A estratégia a ser utilizada será a seguinte:
Passo 1: *Calcular $D_3(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)$, pois $\epsilon^1 \wedge \epsilon^2$ é o gerador do $\mathbb{Z}[D]$-módulo $\bigwedge^2 M$.*

$$D_3(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^1 \wedge \epsilon^5 + \epsilon^2 \wedge \epsilon^4 + \epsilon^3 \wedge \epsilon^3 + \epsilon^4 \wedge \epsilon^2 = \epsilon^1 \wedge \epsilon^5.$$

Passo 2: *Obter um polinômio de Giambelli de $\epsilon^1 \wedge \epsilon^5$ em termos de $D_1,\ D_2$ e Δ_{11}.*
Vamos nessa...

$$D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^4) = \epsilon^1 \wedge \epsilon^5 + \epsilon^2 \wedge \epsilon^4 \Longrightarrow \epsilon^1 \wedge \epsilon^5 = D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^4) - \epsilon^2 \wedge \epsilon^4,$$

como

$$\epsilon^1 \wedge \epsilon^4 = D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)$$

e também

$$epsilon^2 \wedge \epsilon^4 = \Delta_{11}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^3) = \Delta_{11} D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2),$$

temos que

$$\epsilon^1 \wedge \epsilon^5 = D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^4) - \epsilon^2 \wedge \epsilon^4 = D_1 D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) - (\Delta_{11} D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)),$$

$$\epsilon^1 \wedge \epsilon^5 = (D_1D_2 - \Delta_{11}D_1)(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_1(D_2 - \Delta_{11})(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2).$$

Passo 3: *Como os polinômios quando avaliados no gerador do $\mathbb{Z}[D]$-módulo $\bigwedge^2 M$, $\epsilon^1 \wedge \epsilon^2$, são iguais, podemos concluir que os polinômios são iguais.*

$$D_3(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^1 \wedge \epsilon^5 = (D_1D_2 - \Delta_{11}D_1)(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_1(D_2 - \Delta_{11})(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2),$$

com isso concluimos que

$$D_3 = D_1D_2 - \Delta_{11}D_1 = D_1(D_2 - \Delta_{11}) = -D_1^3 + 2D_1D_2.$$

Desse modo conseguimos escrever D_3 em função de $D_1,\ D_2$ e Δ_{11}.

Exemplo. 3.5.9. (Obtenção de D_4 em função de $D_1,\ D_2$ e Δ_{11})
Passo 1: *Calcular $D_4(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)$, pois $\epsilon^1 \wedge \epsilon^2$ é o gerador do $\mathbb{Z}[D]$-módulo $\bigwedge^2 M$.*

$$D_4(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^1 \wedge \epsilon^6 + \epsilon^2 \wedge \epsilon^5 + \epsilon^3 \wedge \epsilon^4 + \epsilon^4 \wedge \epsilon^3 + \epsilon^5 \wedge \epsilon^2 = \epsilon^1 \wedge \epsilon^6.$$

Passo 2: *Obter um polinômio de Giambelli de $\epsilon^1 \wedge \epsilon^6$ em termos de $D_1,\ D_2, D_3$ e Δ_{11} e em seguida em termos de $D_1,\ D_2$ e Δ_{11}.*

Vamos nessa...

$$D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^5) = \epsilon^1 \wedge \epsilon^6 + \epsilon^2 \wedge \epsilon^5 \Longrightarrow \epsilon^1 \wedge \epsilon^6 = D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^5) - \epsilon^2 \wedge \epsilon^5$$

como

$$\epsilon^1 \wedge \epsilon^5 = D_3(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)$$

e também

$$epsilon^2 \wedge \epsilon^5 = \Delta_{11}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^4) = \Delta_{11}D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2),$$

temos que

$$\epsilon^1 \wedge \epsilon^6 = D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^5) - \epsilon^2 \wedge \epsilon^5 = D_1D_3(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) - (\Delta_{11}D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2));$$

$$\epsilon^1 \wedge \epsilon^6 = (D_1D_3 - \Delta_{11}D_2)(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2).$$

Lembremos que

$$D_3 = D_1D_2 - \Delta_{11}D_1 = D_1(D_2 - \Delta_{11}) = -D_1^3 + 2D_1D_2,$$

logo

$$\epsilon^1 \wedge \epsilon^6 = (D_1D_3 - \Delta_{11}D_2)(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = (D_1^2(D_2 - \Delta_{11}) - \Delta_{11}D_2)(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) =$$

$$= (D_2^2 + D_1^2D_2 - D_1^4)(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2).$$

Passo 3: *Como os polinômios quando avaliados no gerador $\epsilon^1 \wedge \epsilon^2$ do $\mathbb{Z}[D]$-módulo $\bigwedge^2 M$ são iguais, podemos concluir que os polinômios são iguais.*

$$D_4(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^1 \wedge \epsilon^6 = (D_1D_3 - \Delta_{11}D_2)(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = (D_1^2(D_2 - \Delta_{11}) - \Delta_{11}D_2)(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) =$$

$$= (D_2^2 + D_1^2D_2 - D_1^4)(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2).$$

Com isso concluimos que

$$D_4 = D_1D_3 - \Delta_{11}D_2 = D_1^2(D_2 - \Delta_{11}) - \Delta_{11}D_2 = D_2^2 + D_1^2D_2 - D_1^4.$$

Desse modo conseguimos escrever D_4 em função de $D_1,\ D_2$ e Δ_{11}.

Seguindo o mesmo procedimento iremos obter:

$$D_5 = D_1D_4 - \Delta_{11}D_3 = D_1^3(D_2 - \Delta_{11}) - \Delta_{11}D_2(\Delta_{11} - 2D_1) = 3D_1D_2^2 - 2D_1^5.$$

A relação que nos fornece o endomorfismo D_h, para $h \geq 3$, em termos dos endomorfismos anteriores é dada por

$$D_h = D_1D_{h-1} - \Delta_{11}D_{h-2} \ \forall\ h \geq 3.$$

Com o que temos em mãos podemos, enfim, enunciar o teorema que resolve o problema de Giambelli.

Teorema. 3.5.10.
O homomorfismo de avaliação

$$ev_{D,\epsilon^1\wedge\ldots\wedge\epsilon^k} : \mathbb{Z}[\boldsymbol{T}] \longrightarrow \bigwedge^k M$$

é sobrejetivo para todo $k \geq 1$. Equivalentemente, o homomorfismo $ev_{\epsilon^1\wedge\ldots\wedge\epsilon^k}$ é sobrejetivo.

Demonstração. A demonstração do caso geral pode ser encontrada em [18] páginas 80 e 81. Vamos agora demonstrar o caso $k = 2$, como de praxe. Para tal, demonstremos o seguinte fato:

$$D_h(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^1 \wedge \epsilon^{2+h} \quad ;\forall\ h\ \geq 1.$$

Pela regra de Leibniz generalizada, temos que

$$D_h(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \sum_{i=0}^{h} \epsilon^{1+i} \wedge \epsilon^{2+(h-i)}.$$

Assim como fizemos na demonstração da Fórmula de Pieri para S-Derivações, vamos expandir o somatório acima e ver como as parcelas se comportam:

$$D_h(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^1 \wedge \epsilon^{h+2} + \epsilon^2 \wedge \epsilon^{h+1} + \epsilon^3 \wedge \epsilon^h + \ldots + \epsilon^h \wedge \epsilon^3 + \epsilon^{h+1} \wedge \epsilon^2.$$

Perceba que, a excessão da primeira parcela, para cada parcela aparece o seu simétrico no somatório. Se h for ímpar, além de ter para cada parcela aparece o seu simétrico no somatório, haverá um termo da forma $\epsilon^{1+\frac{h+1}{2}} \wedge \epsilon^{2+n-\frac{h+1}{2}} = \epsilon^{\frac{h+3}{2}} \wedge \epsilon^{\frac{h+3}{2}} = 0$. Logo restará um único termo nesse somatório: $\epsilon^1 \wedge \epsilon^{2+h}$. Disso concluimos que:

$$D_h(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^1 \wedge \epsilon^{2+h};\ \forall\ h\ \geq 1.$$

Para demonstrar a sobrejetividade de

$$ev_{\epsilon^1 \wedge \epsilon^2} : A^*(\bigwedge^2 M, D) \longrightarrow \bigwedge^2 M,$$

vamos exibir um algoritmo para a obtenção do polinômio de Giambelli de $\epsilon^i \wedge \epsilon^j$, qualquer que seja $j - i = h > 0$, em termos de $D_1,\ D_2$ e Δ_{11}.

1. Aplicar D_{h-1} a $\epsilon^1 \wedge \epsilon^2$ e teremos

$$D_{h-1}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^1 \wedge \epsilon^{h+1}.$$

2. Aplicar o endomorfismo Δ_{11} $(i-1)$ vezes a $D_{h-1}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^1 \wedge \epsilon^{h+1}$ e teremos

$$\Delta_{11}^{i-1}(D_{h-1}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)) = \Delta_{11}^{i-1}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^{h+1}) = \epsilon^{1+(i-1)} \wedge \epsilon^{(h+1)+(i-1)} = \epsilon^i \wedge \epsilon^{h+1},$$

como $j - i = h$ temos que

$$\Delta_{11}^{i-1} D_{h-1}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^i \wedge \epsilon^j.$$

Senhoras e senhores... aí está um polinômio de Giambelli de $\epsilon^i \wedge \epsilon^j$ qualquer que seja $j - i = h > 0$. Fica assim demonstrada a sobrejetividade da aplicação $ev_{\epsilon^1 \wedge \epsilon^2}$. □

Corolário. 3.5.11.

$$\frac{\mathbb{Z}[\boldsymbol{T}]}{ker(ev_{D,\epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^k})} \simeq A^*(\bigwedge^k M, D) \simeq \bigwedge^k M.$$

Demonstração. A demonstração desse corolário é consequência dos seguinte fatos:

(i) Os homomorfismos de avaliação $ev_{\epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^k}$ e ev_D são sobrejetivos.

(ii) $ker(ev_{D,\epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^k}) = ker(ev_D)$.

Como pode ser verificado em [18] página 81. □

Observação. 3.5.12.
Seja M_n o módulo finitamente gerado por $\mathcal{E}_n = \{\epsilon^1, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^n\}$. Lembremos que $D_h(\epsilon^i) = \epsilon^{i+h}$ e também que

$$D_h(\epsilon^i) = 0 \Longleftrightarrow i + h > n.$$

Com isso podemos concluir que

$$D_{n-1}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^1 \wedge \epsilon^{2+(n-1)} = 0.$$

Logo

$$D_{n-1} \equiv 0,$$

e pelo mesmo motivo

$$D_n \equiv 0.$$

3.6 Uma Apresentação para $A^*(\bigwedge^k M, D)$

Nessa secção iremos omitir todas as demonstrações, que podem ser encontradas em [18] páginas 81, 82, 83 e 84.

Definição. 3.6.1. (Função de Giambelli)
Seja $\mathcal{I}^k$ o conjunto dos k-schindex. Uma função $G : \mathcal{I}^k \longrightarrow \mathbb{Z}[\boldsymbol{T}]$, que associa a cada k-schindex $I = (i_1, \ldots, i_k)$ um polinômio de Giambelli de $\epsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{i_k}$, é dita uma função de Giambelli. O conjunto imagem, $Im(G) = \mathcal{G}$, será chamado de um conjunto de Giambelli.

Proposição. 3.6.2.
Qualquer conjunto de Giambelli $\mathcal{G}$ é uma $\mathbb{Z}$-base para $\mathbb{Z}[\boldsymbol{T}]$.

Proposição. 3.6.3.
Seja $\phi \in \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_k] \subseteq \mathbb{Z}[\boldsymbol{T}]$ tal que $\phi(D_1, \ldots, D_k)(\epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^k) = 0$ então

$$\phi \equiv 0.$$

Como consequência dessas duas proposições temos o seguinte teorema:

Teorema. 3.6.4. (Apresentação de $A^*(\bigwedge^k M, D)$)
O anel $A^*(\bigwedge^k M, D)$ é isomorfo ao anel de polinômios $\mathbb{Z}[D_1, \ldots, D_k]$.

Ao considerarmos o caso $k = 2$, temos o seguinte:

$$A^*(\bigwedge^2 M, D) \simeq \mathbb{Z}[D_1, D_2].$$

Ou seja, todos os endomorfismos shift $D_h : \bigwedge^2 M \longrightarrow \bigwedge^2 M$, para $h \geq 3$, podem ser escritos como combinação linear, com coeficientes em $\mathbb{Z}$, de D_1 e D_2.

3.6.1 Relação entre $A^*(G(k,n))$ e $\mathcal{A}^*(\bigwedge^k M_n, D)$

Existe um isomorfismo σ entre o anel de interseção da grassmanniana $G(k,n)$, dado por$A^*(G(k,n))$, e a subálgebra comutativa de $End_{\mathbb{Z}}(\bigwedge^k M)$, dada por, $\mathcal{A}^*(\bigwedge^k M_n, D)$.

$$\sigma : \mathcal{A}^*(\bigwedge^k M_n, D) \longrightarrow A^*(G(k,n))$$

$$\sigma(D_i) = \sigma_i$$

E existe um isomorfismo Ω entre o grupo de Chow da grassmanniana $G(k,n)$, dado por$A_*(G(k,n))$, e $\bigwedge^k M_n$

$$\Omega : \bigwedge^k M_n \longrightarrow A_*(G(k,n))$$

$$\Omega(\epsilon^{1+r_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{k+r_k}) = \Omega_{(r_k,\ldots,r_1)} = [\epsilon^{1+r_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{k+r_k}]$$

Conforme pode ser visto em [18] página 87.

No caso em questão, ou seja, $k = 2$ este isomorfismo induz um isomorfismo:

$$\Omega : \bigwedge^2 M_n \longrightarrow A_*(G(2,n))$$

3.7 Cálculo de $A^*(\bigwedge^2 M_4, D_t)$

Para exemplificar o método desenvolvido, vamos obter o módulo de derivações da grassmanniana $G(2,4)$ pensada como a variedade que parametriza os planos de $\mathbb{C}^4$ que passam pela origem ou, equivalentemente, que parametriza as retas de $\mathbb{P}^3$. O modelo da teoria de intersecção de $G(2,4)$ é dado pelo par $(\bigwedge^2 M_4, D_t)$, onde M_4 é visto como um $\mathbb{Z}$-módulo livre de posto 4 gerado por, digamos, $(\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3, \epsilon^4)$ e D_t é uma derivação de Schubert na álgebra exterior $\bigwedge M_4$ de M_4. O anel de intersecção de $G(2,4)$ será então isomorfo a $A^*(\bigwedge^2 M_4, D_t)$. Vamos lá...
A derivação de Schubert D_t é dada por $D_t = 1 + D_1 t + D_2 t^2 + D_3 t^3$. Onde $D_i = D_1^i$ e $D_1^i = 0$, $\forall\ i \geq 4$, quando aplicados nos elementos da base de M_4. Então,

$$D_t : \bigwedge^2 M_4 \longrightarrow \bigwedge^2 M_4[[t]]$$

avaliado em $\epsilon^1 \wedge \epsilon^2$, é dado por

$$D_t(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \sum_{i=0}^{3} D_i(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)t^i.$$

Ou, usando o fato que D_t é um homomorfismo entre módulos e as propriedades do produto exterior, temos que
$D_t(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_t(\epsilon^1) \wedge D_t(\epsilon^2) = (D_0 + D_1 t + D_2 t^2 + D_3 t^3)\epsilon^1 \wedge (D_0 + D_1 t + D_2 t^2 + D_3 t^3)\epsilon^2 =$

$(D_0(\epsilon^1) + D_1(\epsilon^1)t^1 + D_2(\epsilon^1)t^2 + D_3(\epsilon^1)t^3) \wedge (D_0(\epsilon^2) + D_1(\epsilon^2)t^1 + D_2(\epsilon^2)t^2 + D_3(\epsilon^2)t^3) =$
$(\epsilon^1 + \epsilon^2 t + \epsilon^3 t^2 + \epsilon^4 t^3) \wedge (\epsilon^2 + \epsilon^3 t + \epsilon^4 t^2) = \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + \epsilon^1 \wedge \epsilon^3 t + \epsilon^1 \wedge \epsilon^4 t^2$.
Esses cálculos mostram que D_t restrito a $\bigwedge^2 M_4$ tem apenas 3 componentes, são elas:

$$D_0 = id_{\bigwedge^2 M_4}\ ,\ D_1 \text{ e } D_2.$$

Pois $D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^1 \wedge \epsilon^3$ e $D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^1 \wedge \epsilon^4$, ou seja,

$$D_t(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_0(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) + D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)t + D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)t^2.$$

Logo, a derivação de Schubert para $\bigwedge^2 M_4$ é dada por

$$D_t = 1 + D_1 t + D_2 t^2.$$

Vamos agora verificar que $\bigwedge^2 M_4$ é um $\mathbb{Z}[D_t] \cong \mathbb{Z}[D_1, D_2]$-módulo principal gerado por $\epsilon^1 \wedge \epsilon^2$, ou seja, iremos mostrar que para cada elemento da base de $\bigwedge^2 M_4$ existe um polinômio em $\mathbb{Z}[D_1, D_2]$ que quando aplicado a $\epsilon^1 \wedge \epsilon^2$ nos fornece o dado elemento da base de $\bigwedge^2 M_4$.
Vamos lá...

- $\epsilon^1 \wedge \epsilon^2 = D_1^0(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = id_{\bigwedge^2 M_4}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)$;
- $\epsilon^1 \wedge \epsilon^3 = D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)$;
- $\epsilon^1 \wedge \epsilon^4 = D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)$;
- $\epsilon^2 \wedge \epsilon^3 = D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^3) - \epsilon^1 \wedge \epsilon^4 = D_1^2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) - D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = (D_1^2 - D_2)(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)$;
- $\epsilon^2 \wedge \epsilon^4 = D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^4) = D_1 D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)$;
- $\epsilon^3 \wedge \epsilon^4 = D_1(\epsilon^2 \wedge \epsilon^4) = D_1 D_1 D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_1^2 D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)$.

De fato $\bigwedge^2 M_4$ é um $\mathbb{Z}[D_t] \cong \mathbb{Z}[D_1, D_2]$-módulo principal gerado por $\epsilon^1 \wedge \epsilon^2$. Consequentemente, por definição,

$$D_0, D_1, D_2, D_1^2 - D_2, D_1 D_2 \text{ e } D_1^2 D_2$$

são polinômios de Giambelli de

$$\epsilon^1 \wedge \epsilon^2, \epsilon^1 \wedge \epsilon^3, \epsilon^1 \wedge \epsilon^4, \epsilon^2 \wedge \epsilon^3, \epsilon^2 \wedge \epsilon^4 \text{ e } \epsilon^3 \wedge \epsilon^4$$

respectivamente. Perceba que uma "integração por partes" diferente fornece outro polinômio de Giambelli de $\epsilon^3 \wedge \epsilon^4$. Observe que

$$\epsilon^3 \wedge \epsilon^4 = D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^4)$$

e

$$\epsilon^1 \wedge \epsilon^4 = D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2).$$

Com isso temos:

$$\epsilon^3 \wedge \epsilon^4 = D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^4) = D_2 D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_2^2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2).$$

Logo, D_2^2 é outro polinômio de Giambelli de $\epsilon^3 \wedge \epsilon^4$. E agora:

$$D_0, D_1, D_2, D_1^2 - D_2, D_1 D_2 \text{ e } D_2^2$$

também são polinômios de Giambelli de

$$\epsilon^1 \wedge \epsilon^2, \epsilon^1 \wedge \epsilon^3, \epsilon^1 \wedge \epsilon^4, \epsilon^2 \wedge \epsilon^3, \epsilon^2 \wedge \epsilon^4 \text{ e } \epsilon^3 \wedge \epsilon^4$$

respectivamente. E mais...
$D_1^2 - D_2 = \begin{vmatrix} D_1 & D_2 \\ D_0 & D_1 \end{vmatrix}$, $D_1 D_2 = \begin{vmatrix} D_2 & D_3 \\ D_0 & D_1 \end{vmatrix}$, $D_2^2 =$ e $\begin{vmatrix} D_2 & D_3 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix}$.

Observação. 3.7.1.
Foi usado o fato que $D_3 = 0$ em $\bigwedge^2 M_4$, pois
$D_3(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^4 \wedge \epsilon^2 + \epsilon^3 \wedge \epsilon^3 + \epsilon^2 \wedge \epsilon^4 + \epsilon^1 \wedge 0 = 0.$

Com isso já temos uma relação em $A^*(\bigwedge^2 M_4, D_t)$: a igualdade entre os polinômios de Giambelli associados a $\epsilon^3 \wedge \epsilon^4$. Tal relação pode ser expressa como $D_1^2 D_2 - D_2^2 = 0$. Vamos agora obter as outras relações. Claramente não pode haver relações de grau 2. De fato, os únicos polinômios de grau 2 são D_1^2 e D_2. Como $\bigwedge^2 M_4$ é um $\mathbb{Z}[D_1, D_2]$-módulo principal gerado por $\epsilon^1 \wedge \epsilon^2$, basta avaliar os polinômios de grau 2 no elemento gerador.
Vamos nessa...
$D_1^2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_1 D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^3) = \epsilon^2 \wedge \epsilon^3 + \epsilon^1 \wedge \epsilon^4$;
$D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_2(\epsilon^1) \wedge \epsilon^2 + D_1(\epsilon^1) \wedge D_1(\epsilon^2) + \epsilon^1 \wedge D_2(\epsilon^2) = \epsilon^3 \wedge \epsilon^2 + \epsilon^2 \wedge \epsilon^3 + \epsilon^1 \wedge \epsilon^4 = \epsilon^1 \wedge \epsilon^4$.
Logo, $D_1^2 \neq D_2$.

Verifiquemos agora as relações de grau 3. Temos os seguintes polinômios de grau 3: D_1^3 , D_1D_2. Avaliemo-os no elemento gerador $\epsilon^1 \wedge \epsilon^2$.
Vamos nessa...

$$D_1^3(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_1D_1^2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_1(\epsilon^2 \wedge \epsilon^3 + \epsilon^1 \wedge \epsilon^4) = \epsilon^3 \wedge \epsilon^3 + \epsilon^2 \wedge \epsilon^4 + \epsilon^2 \wedge \epsilon^4 + \epsilon^1 \wedge 0 = 2\epsilon^2 \wedge \epsilon^4;$$

$D_1D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_1(\epsilon^1 \wedge \epsilon^4) = D_1(\epsilon^1) \wedge \epsilon^4 + \epsilon^1 \wedge D_1(\epsilon^4) = \epsilon^2 \wedge \epsilon^4 + \epsilon^1 \wedge 0 = \epsilon^2 \wedge \epsilon^4$.
Com isso podemos obter a seguinte relação de grau 3:

$$2D_1D_2 - D_1^3 = 0.$$

De grau 4 temos os polinômios D_1^4, D_2^2 e $D_1^2D_2$. Tínhamos obtido a seguinte relação $D_1^2D_2 - D_2^2 = 0$, ou seja, $D_1^2D_2 = D_2^2$. Vamos agora relacionar D_1^4 com D_2^2 e $D_1^2D_2$. Já sabemos que $2D_1D_2 = D_1^3$ e como $D_1^2D_2 - D_2^2 = 0$, chegamos a $2D_1^2D_2 - 2D_2^2 = 0$. Logo, $D_1(2D_1D_2) - 2D_2^2 = 0$, então $D_1^4 - 2D_2^2 = 0$. E assim teremos as seguintes relações entre os polinômios de grau 4:

$$D_1^4 = 2D_2^2 = 2D_1^2D_2.$$

Tomaremos como relação de grau 4 para apresentação do anel de interseção de $G(2,4)$ a seguinte:

$$D_1^4 - 2D_2^2 = 0.$$

Todos os polinômios de grau 5 em diante anulam o gerador $\epsilon^1 \wedge \epsilon^2$ do $\mathbb{Z}[D_1, D_2]$-módulo $\bigwedge^2 M_4$. Com isso nos temos as seguintes relações no anel $\mathbb{Z}[D_1, D_2]$

$$D_1^3 - 2D_1D_2 = 0 \text{ e } D_1^4 - 2D_2^2 = 0.$$

Consequentemente, a apresentação do anel de derivações $A^*(\bigwedge^2 M_4, D_t)$ é dada por

$$A^*(\bigwedge^2 M_4, D_t) = \frac{\mathbb{Z}[D_1, D_2]}{(D_1^3 - 2D_1D_2, D_1^4 - 2D_2^2)}.$$

De modo geral, como $D_h = D_1D_{h-1} - \Delta_{11}D_{h-2}$; $\forall\ h \geq 3$, temos que

$$A^*(\bigwedge^2 M_n, D_t) = \frac{\mathbb{Z}[D]}{(D_1^3 - 2D_1D_2, D_1^4 - 2D_2^2, D_h - D_1D_{h-1} + \Delta_{11}D_{h-2})_{h\geq 3}}.$$

Como foi visto na observação 3.5.12, em $A^*(\bigwedge^2 M_n, D_t)$ também temos que $D_{n-1} \equiv 0$ e $D_n \equiv 0$, consequentemente podemos concluir que $D_h \equiv 0,\ \forall\ h \geq n-1$.
Pois $D_h = D_1 D_{h-1} - \Delta_{11} D_{h-2}\ ;\ \forall\ h \geq 3$.

3.7.1 Interpretação Geométrica de $A^*(\bigwedge^2 M_4, D_t)$

Vamos lá...

1. $[\epsilon^1 \wedge \epsilon^2]$ é a classe fundamental $[G(2,4)]$.

2. $[\epsilon^1 \wedge \epsilon^3]$ é a classe dos planos de $\mathbb{C}^4$ que intersectam um dado plano ao longo de uma reta ou, equivalentemente, a classe das retas projetivas de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ que intersectam uma dada reta projetiva de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

3. $[\epsilon^1 \wedge \epsilon^4]$ é a classe dos planos de $\mathbb{C}^4$ que contêm uma certa reta ou, equivalentemente, das retas projetivas de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ que passam por um certo ponto de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

4. $[\epsilon^2 \wedge \epsilon^3]$ é a classe dos planos de $\mathbb{C}^4$ contidos num certo subespaço tridimensional $\mathbb{C}^4$ ou, equivalentemente, a classe das retas projetivas de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ contidas num certo plano projetivo de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

5. $[\epsilon^2 \wedge \epsilon^4]$ é a classe dos planos de $\mathbb{C}^4$ que intersectam dois planos fixados de ao longo de duas retas e que intersectam uma dada reta fixada de $\mathbb{C}^4$ ou, equivalentemente, a classe das retas projetivas de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ que passam por um ponto dado e que intersectam 2 retas projetivas dadas.

6. $[\epsilon^3 \wedge \epsilon^4]$ é a classe de um ponto, isto é, a classe de todos os planos que coincidem com um dado plano de $\mathbb{C}^4$ ou da classe das retas projetivas de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ que coincidem com uma dada reta.

Para maiores detalhes ver [18] página 95.

Capítulo 4

O Passeio de Catalan na Praia e as Integrais das Grassmanianas de retas

Iremos neste capítulo fazer a conexão entre o problema do Passeio de Catalan na Praia, criado e resolvido por Niederhausen [41], e os Top Intersection Number de $G(2, n+2)$ via a teoria das derivações.

4.1 O Passeio de Catalan na Praia

Em seu artigo [41], Niederhausen nos apresenta o seguinte problema:
Dado o reticulado $\mathbb{Z}^2$ em $\mathbb{R}^2$, estamos inicialmente na origem e nos deslocamos para $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ com as seguintes restrições:

1. *Nenhum caminho pode ficar abaixo da reta $m = n$ (a diagonal dos quadrantes ímpares)*
2. *Para os pontos do reticulado abaixo da reta $2m+n = 0$, podemos nos deslocar apenas para o norte $\uparrow$ ou para o oeste $\leftarrow$*
3. *Para os pontos acima da reta $2m+n = 0$, podemos nos deslocar apenas para o leste $\rightarrow$ ou para o nordeste $\nearrow$*

4. *Todos os pontos do reticulado que estão na reta* $2m + n = 1$ *são inacessíveis.*

5. *Para os pontos do reticulado que estão na reta* $2m + n = 0$ *podemos nos deslocar apenas para o oeste* $\leftarrow$*, para o leste* $\rightarrow$ *ou para o nordeste* $\nearrow$

As restrições estão ilustradas na figura abaixo:

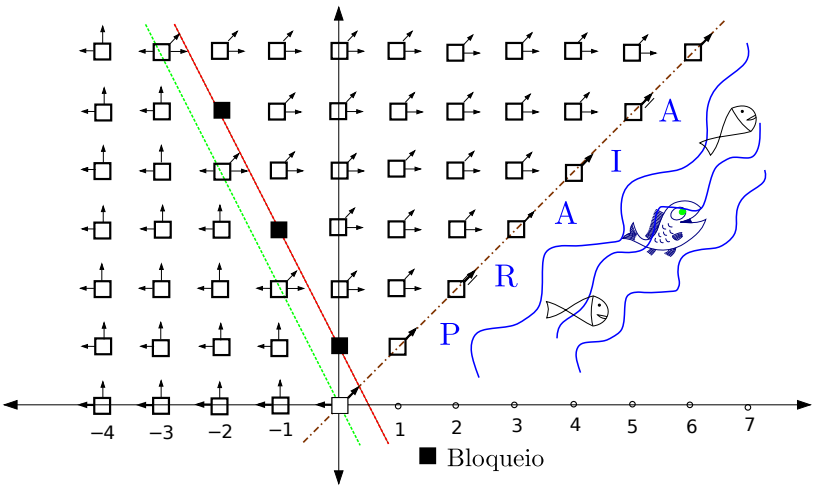


Figura 4.1: Mapa do Passeio de Catalan

O problema resolvido por Niederhausen, consiste em obter a quantidade de modos de atingir um ponto (m, n) do reticulado com as condições acima. O principal resultado de [41] é que os valores obtidos ao longo da praia (ao longo da reta $m = n$) são os números de Catalan. Deste modo, denotemos por $\Gamma(m, n) \in \mathbb{N}$ a quantidade de modos de partindo da origem $(0, 0)$ se chegar ao ponto (m, n). Uma das demonstrações de Niederhausen se baseia na seguinte recursão:

$$\begin{cases} \Gamma(m,n) &= \Gamma(m+1,n) - \Gamma(m,n-1), \\ \Gamma(n,n) &= C_n, \end{cases}$$

válida no domínio $\Omega = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 / - n \leq 2m \leq 2n\}$. Ao atribuir a cada ponto do reticulado, onde a recursão é válida, o valor de $\Gamma(m, n)$ teremos a seguinte figura:

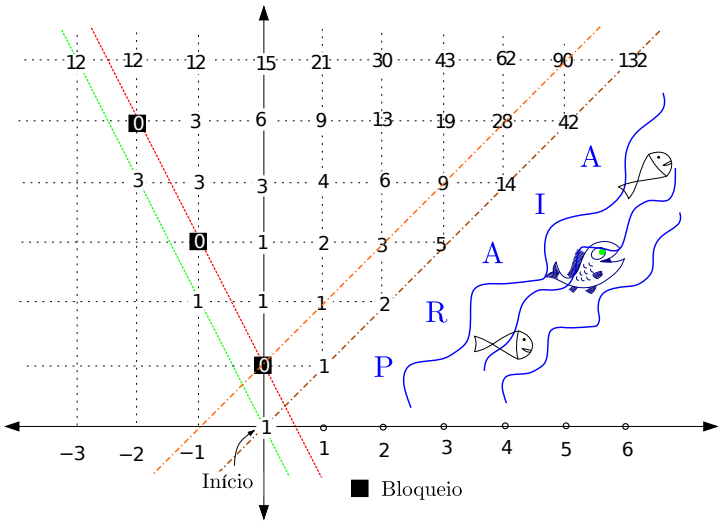


Figura 4.2: Mapa de Números de Caminhos

4.1.1 O Passeio na Praia e os Top Intersection Number de $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^{n+1})$

Definição. 4.1.1. *Definimos o top intersection number $k_{2m,n-m}$ como o coeficiente de $\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}$ na expansão de $D_1^{2m} D_2^{n-m}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)$.*

Vamos mostrar que os top intersection numbers da grassmanniana $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^{n+1}) = G(2, n+2)$ das retas de $\mathbb{P}^{n+1}$ satisfazem a relação de recorrência obtida por Niederhausen. Denotemos o top intersection number $k_{2m,n-m}$ por $K(m, n)$.

Teorema. 4.1.2.
A recursão $K(m, n) = K(m+1, n) - K(m, n-1)$ é válida para todo $0 \leq m \leq n$.

Demonstração.

$$K(m, n)(\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}) = D_1^{2m} D_2^{n-m}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2).$$

Podemos reescrever o lado direito da equação acima do seguinte modo:

$$D_1^{2m} D_2^{n-m}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_1^{2m} D_2^{n-m-1} D_2(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2).$$

Do endomorfismo $\Delta_{11} = D_1^2 - D_2$ temos que $D_2 = D_1^2 - \Delta_{11}$, logo

$$K(m, n)(\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}) = D_1^{2m} D_2^{n-m-1}(D_1^2 - \Delta_{11})(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) =$$

$$= D_1^{2m+2} D_2^{n-m-1}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) - D_1^{2m} D_2^{n-m-1} \Delta_{11}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2).$$

Como

$$\Delta_{11}(\epsilon^i \wedge \epsilon^j) = D_1\epsilon^i \wedge D_1\epsilon^j = \epsilon^{i+1} \wedge \epsilon^{j+1}$$

segue que

$$\Delta_{11}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \epsilon^2 \wedge \epsilon^3,$$

logo

$$K(m,n)(\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}) = D_1^{2m+2} D_2^{n-m-1}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) - D_1^{2m} D_2^{n-m-1}(\epsilon^2 \wedge \epsilon^3).$$

Assim, de acordo com a notação, temos que

$$D_1^{2m+2} D_2^{n-m-1}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = K(m+1,n)(\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2});$$

$$D_1^{2m} D_2^{n-m-1}(\epsilon^2 \wedge \epsilon^3) = K(m,n-1)(\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}).$$

Com isso chegamos à seguinte equação

$$K(m,n)(\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}) = (K(m+1,n) - K(m,n-1))(\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}).$$

Tal igualdade é válida se, e somente se,

$$K(m,n) = K(m+1,n) - K(m,n-1).$$

□

Proposição. 4.1.3.
Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$K(n,n) = C_n$$

Demonstração. Com a notação adotada temos que $K(n,n) = k_{2n,0}$ que é o coeficiente de

$$\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}$$

na expansão de

$$D_1^{2n} D_2^0(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = D_1^{2n}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2).$$

Sabemos que D_1 satisfaz a regra de Leibniz ,ou seja,

$$D_1^{2n}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} (D_1^i \epsilon^1 \wedge D_1^{2n-i} \epsilon^2)$$

e como

$$D_1^r \epsilon^j = \epsilon^{j+r}$$

temos que

$$D_1^{2n}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} (\epsilon^{1+i} \wedge \epsilon^{2+2n-i}).$$

Os termos não nulos da expansão acima são aqueles nos quais o expoente dos ϵ's nunca ultrapassa $n+2$, isto quer dizer que, $1+i \leq n+2$ e $2+2n-i \leq n+2$. Ou seja, para $i = n$ ou $i = n+1$ os expoentes nunca são maiores que $n+2$, daí podemos concluir que

$$D_1^{2n}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \binom{2n}{n} (\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}) + \binom{2n}{n+1} \epsilon^{n+2} \wedge \epsilon^{n+1}$$

e como $\epsilon^{n+2} \wedge \epsilon^{n+1} = -\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}$, chegamos a

$$D_1^{2n}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \binom{2n}{n} (\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}) - \binom{2n}{n+1} (\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}) =$$

$$= (\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1})(\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}(\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}) = C_n(\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}),$$

ou seja,

$$K(n,n) = C_n \ ; \ \forall \ n \ \in \ \mathbb{N}.$$

□

4.2 Grau de Plücker de G(2,n+2)

O grau de Grassmanniana $G(k,n)$ no mergulho de Plücker é, por definição, dado pelo coeficiente do gerador $\epsilon^{n-k+1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^n$ de $\wedge^k M_n$ na expansão da derivação abaixo

$$D_1^{k(n-k)}(\epsilon^1 \wedge \ldots \wedge \epsilon^k).$$

Com isso vamos obter o grau de Plücker de $G(2,n+2)$. Para tal basta expandir a expressão

$$D_1^{2(n)}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)$$

que é um múltiplo inteiro de $\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}$. Como foi visto no fim da seção anterior

$$D_1^{2(n)}(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}.$$

Com isso podemos, finalmente, concluir que o grau de Plücker de $G(2,n+2)$ é

$$d_{2,n+2} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

exatamente o n-ésimo número de Catalan

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

4.3 Top Intersection Number em G(2,n+2)

Seja M_{n+2} um $\mathbb{Z}$-módulo livre onde $(\epsilon^1, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{n+1}, \epsilon^{n+2})$ é uma base e seja $(\bigwedge^2 M_{n+2}, D_1)$ o cálculo de Schubert na 2^a potência exterior do módulo M_{n+2}. Sejam $a, b \geq 0$ tais que $a + 2b = 2n$. Então, em $(\bigwedge^2 M_{n+2}, D_1)$, vale a seguinte igualdade

$$D_1^a D_2^b(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = k_{a,b} \cdot \epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}.$$

Vamos agora obter uma expressão para $k_{a,b}$, via o coeficiente de $\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}$ na expansão de $D_1^a D_2^b(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)$.

$$D_1^a D_2^b(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2) = \sum \binom{a}{a_0, a_1}\binom{b}{b_0, b_1, b_2}\prod_{i=0}^{1} D_i^{a_{1-i}}\prod_{i=0}^{2} D_i^{b_{2-i}}\epsilon^1 \wedge \prod_{i=0}^{1} D_i^{a_i}\prod_{i=0}^{2} D_i^{b_i}\epsilon^2 =$$

$$= \sum \binom{a}{a_0, a_1}\binom{b}{b_0, b_1, b_2} D_1^{a_0} D_1^{b_1} D_2^{b_0} \epsilon^1 \wedge D_1^{a_1} D_1^{b_1} D_2^{b_2} \epsilon^2 =$$

$$= \sum \binom{b}{b_0, b_1, b_2}\binom{a}{a_0, a_1} \epsilon^{1+a_0+2b_0+b_1} \wedge \epsilon^{2+a_1 b_1+2b_2} =$$

$$= \sum_{b_0=0}^{b} \sum_{a_0=0}^{2n-2b} \binom{2n-2b}{a_0, 2n-2b-a_0} C_{a_0,b_0} \epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}.$$

Onde

$$C_{a_0,b_0} = \binom{b}{b_0, n-a_0-2b_0, b+b_0+a_0-n} - \binom{b}{b_0, n-a_0-2b_0+1, b+b_0+a_0-n-1} =$$

$$= \frac{b!}{b_0!(n-a_0-2b_0)!(b+b_0+a_0-n)!} - \frac{b!}{b_0!(n-a_0-2b_0+1)!(b+b_0+a_0-n-1)!} =$$

$$= \frac{b![(n-a_0-2b_0+1)-(b+b_0+a_0-n)]}{b_0!(n-a_0-2b_0+1)!(b+b_0+a_0-n)!} = \frac{b!(2n-b-2a_0-3b_0+1)}{b_0!(n-a_0-2b_0+1)!(b+b_0+a_0-n)!} =$$

$$= \binom{b+1}{b_0, n-a_0-2b_0+1, b+b_0+a_0-n} \frac{2n-b-2a_0-3b_0+1}{b+1}.$$

Ao substituir na expansão de $D_1^a D_2^b(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2)$ teremos que o coeficiente de $\epsilon^{n+1} \wedge \epsilon^{n+2}$ é dado por

$$k_{a,b} = \sum_{b_0=0}^{b} \sum_{a_0=0}^{a} \binom{a}{a_0} \binom{b+1}{b_0, n-a_0-2b_0+1, b+b_0+a_0-n} \frac{2n-b-2a_0-3b_0+1}{b+1}.$$

Observação. 4.3.1. (Conexão entre o Top Intersection Number e o Grau de Plücker de $G(2, n+2)$)

Como por hipótese $a+2b = 2n$, se tomarmos $b = 0$ obrigatoriamente teremos que $a = 2n$. Verifiquemos que, de fato, $k_{2n,0} = C_n$ substituindo a por $2n$ e b por 0 na expressão obtida para $k_{a,b}$

$$k_{2n,0} = \sum_{b_0=0}^{0} \sum_{a_0=0}^{2n} \binom{2n}{a_0} \binom{1}{b_0, n-a_0-2b_0+1, b_0+a_0-n} \frac{2n-2a_0-3b_0+1}{1} =$$

$$= \sum_{a_0=0}^{2n} \binom{2n}{a_0} \binom{1}{0, n-a_0+1, a_0-n} \frac{2n-2a_0+1}{1} = -\binom{2n}{n+1}\binom{1}{0,0,1} + \binom{2n}{n}\binom{1}{0,1,0} =$$

$$= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$$

Como era de se esperar...

$$k_{2n,0} = C_n.$$

Referências Bibliográficas

[1] ARRONDO, E. *Subvarieties of Grassmannians* - Curso ministrado na Universidade de Trento, Itália, 1996.

[2] AVRITZER, D. *Introdução à Geometria Enumerativa via Teoria das Deformações* - Curso ministrado na Segunda bienal da SBM, 2004, em Salvador.

[3] BINET, J. P. M. *Sur un probleme traite autrefois par Euler et par Segner, ayant pour objet la determination du nombre des manieres dont un polygone plan et rectiligne peut etre partage en triangles par ses diagonales* - In Extraits des Proces-Verbaux des Sciences de la Societe Philomatique de Paris, pp. 127-129, 1838.

[4] BINET, J. P. M. *Reflexions sur le probleme de determiner le nombre de manieres dont une figure rectiligne peut etre partagee en triangles au moyen de ses diagonales* - Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (Journal de Liouville) 4, pp. 79-90, 1839.

[5] CAJORI, F. *A History of Mathematics* - The MacMillan, 2nd ed, 1919.

[6] CATALAN, E. C. *Note sur une equation aux differences finies* - Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (Journal de Liouville) 3, pp. 508-516, 1838.

[7] CATALAN, E. C. *Solution nouvelle de cette question: Un polygone étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales* - Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (Journal de Liouville) 4, pp. 91-94, 1839.

[8] CATALAN, E. C. *Addition à la note sur une équation aux différences finies* - Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (Journal de Liouville) 4, pp. 95-99, 1839.

[9] CONWAY, J. H. ; GUY, R. K. *The Book of Numbers* - Copernicus, New York, pp. 97-106, 1996.

[10] DAVIS, T. *Catalan Numbers* - http://www.geometer.org/mathcircles/.

[11] DORRIE, H. 100 *Great Problems Of Elementary Mathematics, Their History and Solution - Translated by David Antin* - Dover Publications, New York, 1965.

[12] FULTON, W. *Intersection Theory* - Springer-Verlag, 1984.

[13] FULTON, W. *Introduction to intersection theory in algebraic geometry* - CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 54, AMS, Providence, RI, 1984.

[14] GARDNER, M. *Mathematical Games* - Scientific American 215, pp. 131, Dec. 1966.

[15] GARDNER, M. *Catalan Numbers: An Integer Sequence that Materializes in Unexpected Places* - Scientific American 234, pp. 120-125, June 1976.

[16] GATTO, L. ; SANTIAGO, T. *Schubert Calculus on a Grassmann Algebra* - Canadian Mathematical Bulletin; Bulletin Canadien De Mathematiques - vol. 52, no. 2, 2009.

[17] GATTO, L. *Schubert Calculus via Hasse Schmidt Derivations* - Asian J. Math. 9, No. 3, pp. 315-322, 2005.

[18] GATTO, L. *Schubert Calculus: an Algebraic Introduction* - 25° Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto de Matemática Pura Aplicada(IMPA), Rio de Janeiro, 2005.

[19] GULLBERG, J. *Mathematics : From the birth of numbers* - W.W.Norton e Company 1997.

[20] HARRIS, J. *Algebraic Geometry: A First Course* - Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, 2010.

[21] HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry* - Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, 1977.

[22] HITCHIN, N. *Projective Geometry* - b3 course, 2003.
http://www.science.uva.nl/ geer/Ch1.pdf

[23] JARVIS, F. *Catalan Numbers*.
http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/maths/jarvisspec01.pdf.

[24] KATZ, V. J. *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: a sourcebook* - Princeton University Press 2007.

[25] KLEIMAN, S. L. ; LAKSOV, D. *Schubert Calculus* - The American Mathematical Monthly 79, pp. 1061-1082, 1972.

[26] KOSHY, T. *Catalan Numbers with Applications* - Oxford University Press, 2009.

[27] KUNZ, E. *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry* - Birkhäuser, 1985.

[28] LANG, S. *Undergraduate Algebra- 3rd ed* - Undergraduate texts in mathematics - Springer-Verlag, 2005.

[29] LANG, S. *Algebra - 3rd. ed.* - Graduate texts in mathematics - Springer-Verlag, 2002.

[30] LANG, S. *Álgebra Linear* - Editora Ciência Moderna - 2003.

[31] LAMÈ, G. *Extrait d'une lettre de M. Lamè a M. Liouville sur cette question: Un polygone convexe etant donne, de combien de manieres peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales?* - Journal de Mathématiques Pures et Appliquées(Journal de Liouville) 3, pp. 505-507, 1838.

[32] LARCOMBE, P.J. *The 18th Century Chinese Discovery of the Catalan Numbers* - Published by The Applied Probability Trust, 1999.

[33] LI, C. ; ZHAO, J. *Some identities of classical Catalan Numbers* - Journal of Shangluo Teachers College, 2004.

[34] LIU, J.J. *Ming Antu and Catalan Numbers* - Journal of Mathematical Research and Exposition, 2002.

[35] LUO, J. *Ming Antu, the First Inventor of Catalan Numbers in the World* - Institute for the History of Science Nei Monggol Normal University; Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Neimongol, 1988.

[36] LUO, J. *Catalan numbers in the history of mathematics in China* - Conference on Combinatorics, 1992.

[37] MA, X.R. *Notes on a Result Made by Ming Antu* - Journal of Mathematical Research and Exposition, 2002.

[38] MANTOVAN, E. *Catalan Numbers* - http://www.math.harvard.edu/ mantovan/ADMIN/catalan2.pdf

[39] MATSUMURA, H. *Commutative Rings theory* - Cambridge University Press, 1996.

[40] MUKAI, S. *Curves and Grassmannians* - Dedicated to Prof. Hideyuki Matsumura on his 60th Birthday.
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ mukai/paper/inha.pdf

[41] NIEDERHAUSEN, H. *Catalan Traffic at the Beach* - The Eletronical Journal of Combinatorics, 9, R33, pp. 1-17, 2002.

[42] PENNA, F. X. *Folheações e a Grassmanniana de retas de* $\mathbb{CP}^n$ - Dissertação de Mestrado - UFMG - 2005.

[43] RIBEMBOIM, P. *Conjectura de Catalan* - Revista Matemática Universitária, número 20/21, junho/dezembro 1996.

[44] RODRIGUES, O. *Sur le nombre de manières de décomposer un polygone en triangles au moyen de diagonales* - Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (Journal de Liouville) 3, pp. 547-548, 1838.

[45] RODRIGUES, O. *Sur le nombre de manieres d'effectuer un produit de n facteurs* - Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (Journal de Liouville) 3, pp. 549, 1838.

[46] SANTIAGO, T. *Degree of Grassmannians of Lines* - 2005. http://calvino.polito.it/ taise/Articles/DegreeGL.pdf

[47] SANTIAGO, T. *Schubert Calculus on a Grassmann Algebra* - Doctoral Thesis, Politecnico di Torino, 2006.

[48] SANTIAGO, T. *"Catalan traffic"and integrals on the Grassmannian of lines* - Discrete Mathematics 308, pp. 148-152, 2008.

[49] SARAIVA, A. G. *Complexo Quadrático de Retas* - Dissertação de Mestrado, UFMG, 2007.

[50] SEGNER, A. *Enumeratio modorum, quibus figurae planae rectilineae per diagonales dividuntur in triangula* - Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 7, pp. 203-209, 1758/59.

[51] SCHUBERT, H.C.H. *Kalkul der abzahlenden Geometrie* - 1879.

[52] SOARES, A. S. *A Grassmanniana e a Dimensão da Variedade de Fano de uma Hipersuperfície* - Dissertação de Mestrado, UFMG, 2011.

[53] STANLEY, R.P. *Catalan Addendum.* www-math.mit.edu/ rstan/ec/catadd.pdf

[54] STANLEY, R.P. *Enumerative Combinatorics Volume 2* - Cambridge University Press, 2000.

[55] SUNDER, V.S. *Catalan numbers, Wonders of Science* - CESCI, Madurai, August 25 2009, Institute of Mathematical Sciences, Chennai, India. www.imsc.res.in/ sunder/catalan.pdf

[56] UGAGLIA, L. *Una Introducción a las Grassmannianas* - http://dmat.cfm.cl/colloquium/2009-06-12-10:30.pdf

[57] VALLEJO, A.A. *Números de Catalan.* http://www.utm.mx/ mtello/Extensos/extenso140509.pdf

[58] VAINSENCHER, I. *Geometria Algébrica I - (Versão muuuuuuuuuuuuuuuito preliminar)* - 2010.

[59] VAINSENCHER, I. *Classes Características em Geometria Algébrica* - 15° Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto de Matemática Pura Aplicada(IMPA), Poços de Caldas, 1985.

[60] VUN, I. ; BELCHER, P. *Catalan Numbers* - Published by the Applied Probability Trust, 1997.

[61] WILF, H.S. *Generatingfunctionology* - Academic Press Inc. www.math.upenn.edu/ wilf/gfologyLinked2.pdf