



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Duplo Oscilador Acoplado Não-Linear Ressonante com Frequências Unitárias

por

Eudes Naziazeno Galvão

sob orientação do

Prof. Dr. César Castilho

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Recife - PE
Fevereiro/2007

Galvão, Eudes Naziazeno

Duplo oscilador acoplado não-linear ressonante
com frequências unitárias / Eudes Naziazeno Galvão.

- Recife: O autor, 2007.

63 folhas : il., fig.

Dissertação : (mestrado) - Universidade Federal
de Pernambuco. CCEN. Matematica, 2007.

Inclui bibliografia e apêndices.

1. Sistemas Hamiltonianos. 2. Osciladores
com ressonância. 3. Soluções Periódicas. 4. Formas
Normais I. Título.

515.39

CDD (22.ed.)

MEI2007-039



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA
NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Duplo oscilador acoplado não-linear ressonante com
frequências unitárias**

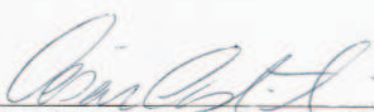
Eudes Naziazeno Galvão

Dissertação de Mestrado

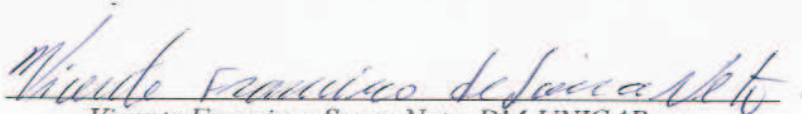
Recife
26/02/2007

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado:


César Augusto Rodrigues Castilho, DMAT-UFPE
Orientador


Hildeberto Eulálio Cabral, DMAT-UFPE


Vicente Francisco Souza Neto, DM-UNICAP

**DUPLO OSCILADOR ACOPLADO NÃO-LINEAR
RESSONANTE COM FREQUÊNCIAS UNITÁRIAS**

Por

Eudes Naziazeno Galvão

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro - 2007

Dedicatória

*Blast
oxygen masks,
smoke filled cabin
Depressurize,
don't be afraid,
hold onto me
We're goin down,
but not our love.*

*Death
don't seem so bad,
when I'm with you
My only love,
so close your eyes
Kiss me one last time,
We're gonna die,
but not our love,
not our love...*

NOFX, Falling in Love.



Agradecimentos

Primeiro, agradeço a Deus e à minha mãe, que foram fundamentais para que eu chegasse até aqui. A Tida, por seu carinho. Ao meu pai e às minhas irmãs, também me deram muita força. À minha família, Os *Naziazenos* e Os *Galvão*, em especial à Dona Zeza, que acompanhou de perto.

Aos meus amigos do Janga, uma outra família, Binho, Joãozinho, Fredoso, Mago, Rafael e Rodrigo Barradas, Tauã, Tainá, Guilherme, Aids, Carlos, Dirac, Cristiano, Alison, Júnior Cabelo, Paulo, Jairo, Gustavo e Branca, Marilena Breda (obrigado por cobrar!), Dona Ana e Angélica Louca, Elbe e Vicente, Hugo e Eric, Érica, os fundadores do Rotaract CPJ, Iago, Petrus, Paula, Kamila, Luana, Ganso, Cléo, Hugão, Ramon, Sônia a Álvaro, Sueli e João, Alice Lopes (a mãezona!), Yves ("Você quer?") e René, e mais... (e as famílias!)

Aos amigos da ETFPE, que admiro muito, Mioshi, Galo, Tio Brad, Doug, Porco, Mateus, Marcus, Inhame, Panda, Alison El Diablo, Erica, Ruth, W.C., Madiel, Íris, Júlio César, Fred, Paulo Rodrigo, Jefferson, Sapulha, Simone, ao Prof. Rosemar, com quem muito aprendi, e mais...

Aos amigos do DMAT-UFPE, os "companheiros de trabalho", Jesus-Sama, Even, Vovô, Bebê, o Estranho, Anete, o Víglío, Gersonilo, Flávio Tunico, Henrique Vitória, Elihimas, Gondim, Lito, Tarciana, Fábio Santos, Éder, Hugo, Adriano, Ricardo "Beleza", C.T.C., Abbas, a Pirraia, o Pirraia, Ricatti, Macarrão, Cauchy-Schwartz, Só, a Véia, Formiga, Adventure, Siracusa, Cinésio, os novados da pós, e mais...

Ao CVI, em especial ao Prof. Israel. Aos professores do DMAT, em especial ao meu amigo César Castilho, a Fernando Cardoso, Fernando Souza, Antônio Carlos, Manoel Lemos, Sóstenes Lins, Cláudio Cuevas, Cláudio Vidal, Hildeberto Cabral, Eduardo Leandro, Sérgio Santa Cruz, e mais...

Às secretarias do DMAT em geral, pela amizade e paciência de me aturar tantas vezes, e a Oscar Neto ("ten dollars for information").

Agradeço também ao Prof. Antônio Sá Barreto, pela motivação que tem me dado nesses anos. Ao Prof. Vicente Neto da UNICAP, pelo apoio.

Às minhas amigas/tia-avós Nita e Mocinha que, apesar da minha distância, sempre torceram por mim.

Agradeço à *NONADA*, *NOFX*, *Bad Religion* e *The Acappella Company*, por terem gerado pra mim vários momentos de satisfação e tranquilidade.

E agradeço ao grande mestre Raphael Falcão da Hora (e sua fabulosa família) por ser um grande amigo e me ensinado o verdadeiro sentido de "Querer é poder!". (Se eu esqueci alguém, peço perdão. Minha memória é triste!).

Sumário

Introdução	3
1 O Teorema das Formas Normais	7
1.1 Sistemas Hamiltonianos e Transformações Canônicas	7
1.2 Funções Geradoras	10
1.3 Forma Normal de Birkhoff	12
2 Teorema do Centro (Lyapunov)	21
2.1 Formulação Hamiltoniana	21
2.1.1 Exemplos de Sistemas Hamiltonianos	22
2.1.2 Soluções Periódicas, Pontos Fixos e Secções Transversais	24
2.2 Continuação de Pontos de Equilíbrio e Soluções Periódicas	29
2.3 Teorema do Centro (Lyapunov)	31
3 O duplo oscilador ressonante 1:1	33
3.1 Fluxo em $\mathbb{R}^4$ induzido por $H = H_2(q, p) + \mathcal{O}_3$	33
3.2 O Fluxo do Hamiltoniano Truncado	48
4 O Fluxo do Hamiltoniano Original	57
4.1 O teorema principal	57
Bibliografia	63

Introdução

Uma pergunta bastante comum no estudo dos *Sistemas Mecânicos* é sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio, outra é sobre a existência de órbitas periódicas em torno do mesmo. O objetivo principal desta dissertação é estudar detalhadamente o fluxo induzido por

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \mathcal{O}_3$$

em $\mathbb{R}^4$, no qual $\mathcal{O}_3$ representa uma série de potências convergente com o primeiro termo não-nulo com grau maior ou igual a 3, discussão estimulada por um caso especial do hamiltoniano de Hénon-Heiles (Ref.[5]). O trabalho de Kummer (Ref.[2]) se utiliza de vários teoremas fortes sobre fluxos induzidos por hamiltonianos. Na verdade, estudamos aqui a existência e a estabilidade de órbitas periódicas em torno do ponto crítico. Começamos por estabelecer definições e resultados pré-requisitados para a leitura indubitável neste trabalho sobre *sistemas hamiltonianos*, tais como *transformações simpléticas* e o *teorema da forma normal de Gustavson*, que servem pra deixar o nosso hamiltoniano mais operável, isto é, para termos em mãos mais ferramentas na hora de estabelecer os resultados. Para dar uma idéia do estudo de famílias de órbitas periódicas, seguimos com o capítulo *Teorema do centro de Lyapunov*, no qual exibimos conceitos como a *secção transversal* e o *mapa de Poincaré*, necessários para a demonstração do teorema principal do capítulo. Na sequência (cap. 3), entramos com o estudo do hamiltoniano truncado

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \mathcal{K}_n(x, y, z)$$

no qual $\mathcal{K}_n$ é o primeiro termo não-nulo de $\mathcal{O}_3$. Para isso, definimos os *Ângulos de Euler* e os *Parâmetros de Cayley-Klein* para esboçar a demonstração do isomorfismo $SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2$ e utilizá-lo para definir o nosso sistema de coordenadas no $\mathbb{R}^4$. E, assim, obtemos resultados concretos sobre a existência de tais órbitas ao estudar as *equações de Hamilton*. Para concluir o trabalho, analisamos o hamiltoniano inicial, fazendo-se os pequenos ajustes na inclusão do termo perturbativo e demonstrando o resultado principal.

Resumo

Nesta dissertação, trabalhamos com *Sistemas Mecânicos*, sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio, e sobre a existência de órbitas periódicas em torno do mesmo. Além disso, há questionamentos sobre a existência de famílias de órbitas periódicas numa vizinhança de tal ponto. Lyapunov estabeleceu o *Teorema do Centro de Lyapunov*, o qual dá condições suficientes para garantirmos a existência desta família. Mas, infelizmente (ou felizmente!) tal teorema não se aplica ao problema discutido pelo Martin Kummer no artigo *On Resonant Non Linearly Coupled Oscillators with Two Equal Frequencies*, problema sugerido por um caso especial do hamiltoniano de Hénon-Heiles (Ref.[5]). Tal trabalho se utiliza de vários teoremas fortes sobre fluxos induzidos por hamiltonianos. O *Teorema do Twist (de Moser)* aparece como protagonista na decisão de estabelecer uma condição suficiente para que a família de órbitas seja estável.

Palavras Chave: 1. Sistemas Hamiltonianos. 2. Osciladores com ressonância. 3. Soluções Periódicas. 4. Formas Normais.

Abstract

This thesis is a detailed report about the flow induced by the Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \mathcal{O}_3$$

in $\mathbb{R}^4$, with $\mathcal{O}_3$ representing a power series with first nonvanishing term at least cubic. Actually, we study the existence and the stability of periodic orbits surrounding the critical point. We start by establishing definitions and results required for the undoubted reading of this report about hamiltonian systems. Such as *symplectic transformation* and the *Gustavson Normal Form Theorem*, which serve to get the hamiltonian easier to one operates, i.e. to have in hands more tools when producing the results. To have an idea of the study of existence of families of periodic orbits, we go ahead with the chapter *Lyapunov Center Theorem*, in which we state concepts like the *cross section* and the *Poincaré Map*, needed to prove the main theorem of the chapter. After these considerations, we follow with the study of the flow induced by the truncated (or unperturbed) hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \mathcal{K}_n(x, y, z)$$

in $\mathbb{R}^4$, in which $\mathcal{K}_n$ is the first nonvanishing term of $\mathcal{O}_3$. To do this, we define the *Euler Angles* and the *Cayley-Klein Parameters* to sketch the proof of $SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2$ and use this isomorphism to define our coordinate system in $\mathbb{R}^4$. And then we get solid results about the existence of these orbits by studying the *Hamilton equations*. To conclude this report, we analyze the original hamiltonian, adjusting arguments when including the perturbative term, and demonstrating the main assertion.

Key Words: 1. Hamiltonian Systems. 2. Oscillators with ressonance. 3. Periodic solutions. 4. Normal Forms.

Capítulo 1

O Teorema das Formas Normais

1.1 Sistemas Hamiltonianos e Transformações Canônicas

Nesta seção, vamos dar uma breve descrição dos objetos de estudo deste trabalho.

Seja (M, ω^2) uma $2n$ -variedade simplética. Seja $T_x M$ o plano tangente à variedade M no ponto x . Cada campo vetorial ξ tangente a M em x , ou seja $\xi \in T_x M$, pode ser associado a uma 1-forma através da aplicação

$$\omega_\xi^1 = \iota(\xi)\omega^2$$

onde $\iota : TM \times T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $(\iota(\xi)\omega^2)\chi = \omega^2(\xi, \chi)$ para todo campo de vetores χ . Defina J como sendo a matriz $2n \times 2n$ dada por

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Definição 1.1.1 *Seja*

$$\Psi : O^{ab} \subseteq \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

uma função suave. Ψ é dita μ -simplética se

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^T J \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = \mu J \tag{1.1.1}$$

e é dita simplética se $\mu = 1$.

Definição 1.1.2 Dada uma função $H : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, o sistema de equações hamiltoniano associado ao hamiltoniano H é dado por

$$\dot{x} = J\nabla_x H(x, t)$$

Naturalmente, faremos a seguinte pergunta: Se temos o sistema hamiltoniano $\dot{x} = J\nabla_x H(x, t)$ para o $\mathbb{R}^{2n}$, por exemplo, então será que Ψ , sendo simplética, levará tal sistema em um sistema hamiltoniano? A resposta é afirmativa pelo

Teorema 1.1.1 Uma transformação de variáveis simplética leva sistemas hamiltonianos em sistemas hamiltonianos.

Demonstração: Suponha que Ψ seja uma mudança de coordenadas $z \mapsto \zeta$ (ζ como coordenadas simpléticas), ou seja

$$\zeta = \Psi(z, t)$$

Por 1.1.1, vemos que toda transformação μ -simplética é localmente invertível. Seja $z = Z(\zeta, t)$ uma inversa local. Logo, $H(z, t) \longrightarrow \hat{H}(\zeta, t)$, com $\hat{H}(\zeta, t) = H(Z(\zeta, t), t)$. Então, derivando $\zeta = \Psi(z, t)$ chegamos a

$$\frac{d\zeta}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial z_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_{2n}}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \Psi_{2n}}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dz_{2n}}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Psi_{2n}}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Mas,

$$\begin{pmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dz_{2n}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix} = J \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)^T \quad e \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \frac{\partial \Psi}{\partial z} J \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)^T + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ \dot{\zeta} &= \frac{\partial \Psi}{\partial z} J \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^T + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ \dot{\zeta} &= \frac{\partial \Psi}{\partial z} J \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^T \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial \zeta} \right)^T + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \end{aligned}$$

Como Ψ é simplética, simplificamos a

$$\dot{\zeta} = J\nabla_{\zeta}\widehat{H} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big|_{z=Z(\zeta,t)} \quad (1.1.2)$$

Se Ψ for independente de t , então acaba aqui a demonstração, pois $\dot{\zeta} = J\nabla_{\zeta}\widehat{H}$ é um sistema hamiltoniano. Suponha que Ψ depende de t . Seja $\mathbb{O} \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ tal que $Z(\mathbb{O}) \subseteq \mathbb{O}$. Considere $\mathbb{O}_t = \{\zeta ; (\zeta, t) \in \mathbb{O}\}$. Vamos procurar por uma função $R : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ que seja $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$ com $J\nabla_{\zeta}R(\zeta, t) = \frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big|_{z=Z(\zeta,t)}$

Observação: R é definido localmente, id est, dado $p \in \mathbb{O} \exists R$ definida numa vizinhança de $p \sqcap J\nabla_{\zeta}R(\zeta, t) = \frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big|_{z=Z(\zeta,t)}$

Usaremos um dos vários corolários do

Teorema 1.1.2 (Lema de Poincaré) *Seja $\mathbb{O}$ um conjunto estrelado do $\mathbb{R}^n$ e F uma k -forma fechada, $dF=0$. Então F é exata, id est, existe uma $(k-1)$ -forma f definida em $\mathbb{O} \sqcap F = df$*

Corolário 1.1.1 *Seja $F = (F^1, \dots, F^m)$ um campo vetorial definido num conjunto estrelado $\mathbb{O} \subseteq \mathbb{R}^m$. Então,*

$$\exists f : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{R} \sqcap F = \nabla f \Leftrightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^T = \frac{\partial F}{\partial x}$$

Demonstração: Considere $F = F^1 dx_1 + \dots + F^m dx_m$. Diferenciando F , temos

$$dF = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial F^i}{\partial x_j} - \frac{\partial F^j}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j$$

Vemos, por essa expressão, a equivalência entre $\frac{\partial F}{\partial x}$ ser simétrica e $dF = 0$. Mas, o Lema de Poincaré afirma que F fechada $\Rightarrow F$ é fechada. Logo, se $\frac{\partial F}{\partial x}$ é simétrica, então existe f tal que $\nabla f = F$. A recíproca é imediata. ■

Pelo corolário, basta provar que

$$\left(J \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}(z, t) \right) \Big|_{z=Z(\zeta,t)} \right)^T = J \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}(z, t) \right) \Big|_{z=Z(\zeta,t)}$$

Ou seja, temos que mostrar que

$$\Gamma = J \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \Psi(z, t) \Big|_{z=Z(\zeta,t)} \frac{\partial Z}{\partial \zeta}$$

é simétrica. Com efeito, Ψ é simplética, logo

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^T J \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = J$$

Derivando com relação ao tempo, temos

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial z}^T J \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}^T J \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial z} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^T}{\partial z}\right)^{-1} \frac{\partial^2 \Psi^T}{\partial t \partial z} J + J \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial z} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^{-1} = 0$$

Mas $\frac{\partial \Psi}{\partial z}^{-1} = \frac{\partial Z}{\partial \zeta}$ pois $Z \circ \Psi = id \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} = id$. Portanto,

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right)^T \frac{\partial^2 \Psi^2}{\partial t \partial z} J + J \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial z} \frac{\partial Z}{\partial \zeta} = 0$$

$$-\Gamma^T + \Gamma = 0$$

Com isso, garantimos a existência da função $R : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{R}$. A equação 1.1.2, portanto, resulta em

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= J \nabla_{\zeta} \hat{H} - J J \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ \dot{\zeta} &= J \nabla_{\zeta} \hat{H} - J \nabla_{\zeta} R \\ \dot{\zeta} &= J \nabla_{\zeta} (\hat{H} - R) \\ \dot{\zeta} &= J \nabla_{\zeta} \tilde{H} \end{aligned}$$

onde $\tilde{H} = \hat{H} - R$ ■

1.2 Funções Geradoras

Suponha uma mudança de coordenadas $(q, p) \mapsto (Q, P)$ de $B \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ com $Q = Q(q, p)$, $P = P(q, p)$ e B aberto. Seja ω a 2-forma simplética canônica definida por

$$\omega = dq \wedge dp = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$$

Um condição necessária e suficiente para tal mudança ser um symplectomorfismo, ou transformação canônica, é preservar a forma simplética. Isto é

$$dq \wedge dp = dQ \wedge dP$$

Isto é o mesmo que afirmar que $d(qdp - QdP) = 0$. A transformação é dita μ -*simplética* se $dq \wedge dp = \mu dQ \wedge dP$. Chamemos de $dqp - Qdp = \rho_1$. Então, $(q, p) \mapsto (Q, P)$ é simplética se e somente se ρ_1 é exata. Analogamente, a mudança é simplética se uma das formas

$$\begin{aligned}\rho_1 &= qdp - QdP, & \rho_2 &= qdp + PdQ, \\ \rho_3 &= pdq - PdQ & \text{ou} & \rho_4 = pdq + QdP.\end{aligned}$$

for exata. Considerando que todas essas $(2n-1)$ -formas estão definidas numa bola aberta, então, pelo lema de Poincaré, estas formas são exatas, pois a bola aberta é estrelada. Logo, a mudança de coordenadas é simplética se existir uma função, $S_1(p, P)$ ou $S_2(p, Q)$ ou $S_3(q, Q)$ ou $S_4(q, P)$, que satisfaça a uma das equações

$$\begin{aligned}dS_1(p, P) &= \rho_1, & dS_2(p, Q) &= \rho_2, \\ dS_3(q, Q) &= \rho_3 & \text{ou} & dS_4(q, P) = \rho_4.\end{aligned}$$

Assim, nós temos uma forma de construir uma mudança de coordenadas simplética se uma das quatro equações acima for satisfeita. Por exemplo, suponha que existe uma função $S_4(q, P)$ tal que $dS_4 = \rho_4$. Então,

$$dS_4 = \frac{\partial S_4}{\partial q} dq + \frac{\partial S_4}{\partial P} dP = pdq + QdP$$

De onde resulta nossa mudança de coordenadas $p = \frac{\partial S_4}{\partial q}(q, P)$ e $Q = \frac{\partial S_4}{\partial P}(q, P)$. Se $\frac{\partial^2 S_4}{\partial q \partial P}$ for não-singular, então o *teorema da função implícita* garante que podemos resolver P em função de p e q , e q em função de P e Q , numa vizinhança de p e q e numa de P e Q . Este raciocínio serve também para S_1 , S_2 e S_3 . Vamos resumir isso tudo com o

Teorema 1.2.1 *As seguintes equações definem uma mudança de variáveis simpléticas*

$$\begin{aligned}q &= \frac{\partial S_1}{\partial p}(p, P) \quad Q = -\frac{\partial S_1}{\partial P}(p, P) \quad \text{quando } \frac{\partial^2 S_1}{\partial p \partial P} \text{ é não-singular;} \\ q &= \frac{\partial S_2}{\partial p}(p, Q) \quad P = \frac{\partial S_2}{\partial Q}(p, Q) \quad \text{quando } \frac{\partial^2 S_2}{\partial p \partial Q} \text{ é não-singular;} \\ p &= \frac{\partial S_3}{\partial q}(q, Q) \quad P = -\frac{\partial S_3}{\partial Q}(q, Q) \quad \text{quando } \frac{\partial^2 S_3}{\partial q \partial Q} \text{ é não-singular;} \\ p &= \frac{\partial S_4}{\partial q}(q, P) \quad Q = \frac{\partial S_4}{\partial P}(q, P) \quad \text{quando } \frac{\partial^2 S_4}{\partial q \partial P} \text{ é não-singular.}\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

1.3 Forma Normal de Birkhoff

Nosso objetivo nesta secção é encontrar uma mudança de coordenadas simplética $(q, p) \mapsto (Q, P)$ numa vizinhança de um ponto de equilíbrio (que vamos considerar, sem perda de generalidade, que é a origem) tal que o hamiltoniano

$$H(z, t) = H_2(z, t) + H_3(z, t) + \dots$$

do sistema hamiltoniano

$$\dot{z} = J \nabla_z H(z, t)$$

seja mandado num hamiltoniano

$$\Gamma(Z, t) = \Gamma_2(Z, t) + \Gamma_3(Z, t) + \dots$$

onde os Γ_k 's são polinômios homogêneos 2π -periódicos em t (ou autônomos) de grau k relativo a $Z = (Q, P)$. Dividiremos a nossa busca em duas partes.

Caso 1: *Sistemas Hamiltonianos Lineares*

Vamos considerar, inicialmente, que o sistema hamiltoniano é linear, ou seja, que H é uma forma quadrática em $z = (q, p)$

$$H = H(z, t) = \frac{1}{2} z^T S(t) z$$

para a qual $S(t)$ é uma matriz simétrica. Então, as equações canônicas $q = \frac{\partial H}{\partial p}$ e $p = -\frac{\partial H}{\partial q}$ equivalem a

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = JS(t)z$$

para o qual $J = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}$. A fim de diagonalizar JS , estabelecemos, primeiramente, o seguinte lema

Lemma 1.3.1 *O polinômio característico de JS é par. Consequentemente, se λ é autovalor de $A = JS$, então $-\lambda$ também é.*

Demonstração: Segue-se diretamente da definição que

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det(JS - \lambda I) = \det(JS - \lambda I)^T = \det(S^T J^T - \lambda I) = \\ &= \det(-SJ - \lambda I) = \det(J^2 S J + \lambda J^2) = \det(J(JS + \lambda I)J) = \\ &= \det J^2 \det(A + \lambda I) = \det(A + \lambda I) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Daremos na seqüência uma demonstração do teorema 1.1.1 para este caso particular. Sejam $S_p(n, \mathbb{R}) = \{M_{2 \times 2} ; M^T J M = J\}$, o conjunto das *matrizes simpléticas*, e $s_p(n, \mathbb{R}) = \{M_{2 \times 2} ; M^T J + J M = 0\}$ o conjunto das *matrizes hamiltonianas* ($\equiv$ " M é hamiltoniana $\Leftrightarrow M = JS$, com S simétrica"). Seja $P \in S_p(n, \mathbb{R})$. Efetue a transformação simplética $z \mapsto P^{-1}z = w$. Então,

$$\dot{w} = P^{-1}\dot{z} = P^{-1}Az = \overbrace{P^{-1}AP}^B w$$

Mas $B^T J + JB = P^T A^T P^{-T} P^T J P + P^T J P P^{-1} A P = P^T (A^T J P + J A P) = P^T (A^T J + J A) P = 0$, pois $A^T J + J A = S^T J^T J + J(JS) = -S J^2 - S = S - S = 0$. Logo, $B = JR$, com R simétrica. Com isso, P é tal que $P : \dot{z} = Az \longrightarrow \dot{w} = Bw$. Portanto, provamos o

Lemma 1.3.2 *Uma transformação simplética linear leva sistemas hamiltonianos lineares em sistemas hamiltonianos lineares.*

Vamos agora definir uma classe de hamiltonianos e, a seguir, questionar sobre condições suficientes para um hamiltoniano poder ser escrito como pré-imagem por uma transformação simplética da sua *forma normal de Birkhoff*.

Definição 1.3.1 *Seja $H(q, p)$ uma hamiltoniana quadrática. H é dito estar na Forma Normal de Birkhoff se*

$$H(q, p) = \sum \frac{\omega_k}{2} (q_k^2 + p_k^2)$$

com $q = (q_1, \dots, q_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$ e $\omega_k \in \mathbb{R}$ $k = 1, \dots, n$.

Com esses dois lemas, estamos preparados para enunciar o primeiro teorema, que diz respeito à forma normal da parte quadrática do hamiltoniano.

Teorema 1.3.1 *(da Forma Normal de Birkhoff para Sistemas hamiltonianos Lineares Autônomos Reais com valores característicos distintos) Suponha que os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ da matriz $A = JS$ são distintos. Então, existe T uma transformação simplética que leva o hamiltoniano associado a $\dot{z} = Az$ em*

$$\tilde{H}(u, v) = \tilde{H}(w) = \sum \lambda_k u_k v_k$$

com $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$.

Demonstração: Esta demonstração resume-se em procurar, de forma bem engenhosa, tal transformação simplética. Começemos por notar que $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j \implies A$ ser diagonalizável. Portanto $\exists C$ invertível $\square \square C J S C^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n) =: L$. Considere $P = (J^{-1} C^T J)^{-1}$. Então,

$$\begin{aligned} P J S P^{-1} &= (J^{-1} C^T J)^{-1} J S J^{-1} C^T J = J^{-1} (C^{-1})^T J J S J^{-1} C^T J = \\ &= (-J) (C^{-1})^T (-I) S (-J) C^T J = -J (C^{-1})^T S J C^T J = (-J^T C J^T S C^{-1} J^T)^T = \\ &= (J C (-J) S C^{-1} (-J))^T = (J C J S C^{-1} J)^T = (J L J)^T = J^T L J^T = J L J = L \end{aligned}$$

Portanto, P diagonaliza JS também. Os autovalores de JS são todos distintos, então os autoespaços têm dimensão 1. Ora, se P e C diagonalizam JS , então as colunas de uma são múltiplas das colunas da outra. Ou seja, $c_j = a_j p_j$, para $a_j \in \mathbb{R}$ e c_j, p_j são as colunas de C e P , respectivamente. Logo,

$$c_j = a_j p_j \implies C = P \cdot \text{diag}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n})$$

Seja $B := \text{diag}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n})$. Provemos agora que JB é anti-simétrico. Com efeito, temos que

$$C = (J^{-1} C^T J)^{-1} B = J^{-1} (C^T)^{-1} J B \implies C^T J C = J B$$

Portanto,

$$(JB)^T = (C^T J C)^T = C^T J^T C = -C^T J C = -JB$$

$\therefore JB$ é antissimétrico, e isto implica que, se considerarmos $B = \begin{pmatrix} a_{\leq n} & 0 \\ 0 & a_{>n} \end{pmatrix}$, temos

$$JB = \begin{pmatrix} 0 & a_{>n} \\ -a_{\leq n} & 0 \end{pmatrix} \implies a_{>n} = a_{\leq n}$$

Portanto, B é da forma $B = \text{diag}(a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n) =: \begin{pmatrix} B_n & 0 \\ 0 & B_n \end{pmatrix}$.

Considere agora $D = \begin{pmatrix} B_n^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Segue diretamente que $D^{-1} = \begin{pmatrix} B_n & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

Seja $E := CD$. Provemos que E também diagonaliza JS e é simplética. Temos que

$$E^{-1} J S E = D^{-1} \overbrace{C^{-1} J S C}^{A \text{ matriz } C \text{ diagonaliza } JS} D = D^{-1} L D = L$$

e

$$E^T J E = D^T C^T J C D = D J B D = \begin{pmatrix} B_n^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_n \\ -B_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_n^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B_n^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_n \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = J$$

Portanto, E é a transformação simplética procurada, pois a transformação $z = Ew$ é simplética e leva $\dot{z} = Az$ em $E\dot{w} = JSEw \therefore \dot{w} = E^{-1}JSEw = Lw$. Se considerarmos $\tilde{H} = -JL$ e $w = (u, v)$, temos que $\dot{w} = J\tilde{H}w$ e

$$\tilde{H}(u, v) = \sum \lambda_k u_k v_k$$

■

Um hamiltoniano escrito da forma acima é dito estar na sua *forma normal de Gustavson*. Ademais, supondo que os autovalores são imaginários puros $\lambda_j = i\omega_j$ com $\omega_j \in \mathbb{R}^*$ $j = 1, \dots, n$, podemos compor a transformação anterior com a aplicação simplética $(u_j, v_j) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2i}}(Q_j - iP_j, Q_j + iP_j)$, para obtermos o hamiltoniano na sua forma normal de Birkhoff

$$\overline{H}(Q, P) = \sum \frac{\omega_k}{2}(Q_k^2 + P_k^2)$$

Para hamiltonianos 2π -periódicos, utilizamos o *Teorema de Floquet-Liapunov*¹, para, primeiramente, levá-lo num sistema autônomo, e em seguida possivelmente aplicar o teorema anterior. Portanto, esta primeira parte desta secção nos leva a considerar, sem perda de generalidade, que a parte quadrática de um hamiltoniano já está normalizada (quando na linearização tivermos autovalores distintos). A partir daqui consideraremos este fato e incluiremos agora os termos cúbicos, quadricos *et cetera*.

Caso 2 *Sistemas Autônomos ou 2π -periódico.*

Suponha que o sistema é autônomo. Suponha ainda que a transformação é tal que $\Gamma(Z)$ dependa funcionalmente apenas do produto $R_k = Q_k P_k$. Neste caso, escrevemos $\dot{Z} = J\nabla_Z \Gamma(Z)$ obtendo

$$\begin{cases} \dot{Q}_k = \frac{\partial \Gamma}{\partial R_k} Q_k \\ \dot{P}_k = -\frac{\partial \Gamma}{\partial R_k} P_k \end{cases} \quad k=1, \dots, n.$$

Segue que $\dot{R}_k = \dot{Q}_k P_k + Q_k \dot{P}_k = \frac{\partial \Gamma}{\partial R_k} (Q_k P_k - Q_k P_k) = 0$. Teremos, então, n integrais primeiras linearmente independentes para o sistema. A conclusão que tiramos deste comentário é que achar tal transformação simplética implica na resolução total do sistema (o sistema é integrável). O problema que surge é o apresentado por Siegel[1941]: O processo de obtenção do novo

¹ver Dos Santos, F. [6]

hamiltoniano (método dos coeficientes a determinar) só converge para sistemas integráveis, ou seja, para uma pequena classe de problemas. Descreveremos, no fim da secção, tal procedimento. Até lá, prosseguimos com algumas definições importantes

Seja $\Gamma(Z, t) = \Gamma_2(Z, t) + \Gamma_3(Z, t) + \dots$ um hamiltoniano nas coordenadas (Q, P) , tal que os Γ_k são polinômios homogêneo de grau k . Realizemos a seguinte mudança de coordenadas $2i$ -simplética

$$\begin{cases} x_j = Q_j + iP_j \\ \bar{x}_j = Q_j - iP_j \end{cases} \quad j=1, \dots, n$$

Logo, definindo como $\mathcal{H}$ o novo hamiltoniano, temos

$$\mathcal{H}(x, \bar{x}, t) = 2i\Gamma\left(\frac{x + \bar{x}}{2}, \frac{x - \bar{x}}{2}, t\right) = \mathcal{H}_2(x, \bar{x}, t) + \mathcal{H}_3(x, \bar{x}, t) + \dots$$

Portanto, $\mathcal{H}(x, \bar{x}, t)$ é imaginário puro. Escrevemos ainda que

$$\begin{array}{ccc} \Gamma = \Gamma(Z, t) = \Gamma(Q, P, t) & & \mathcal{H} = \mathcal{H}(x, \bar{x}, t) \\ & \longmapsto & \\ \Gamma_j = \sum_{|k|+|l|=j} \gamma_{kl}(t) Q^k P^l & & \mathcal{H}_j = \sum_{|h|+|l|=j} g_{kl} x^k \bar{x}^l \end{array}$$

onde $k = (k_1, \dots, k_n)$ e $l = (l_1, \dots, l_n)$ são n -uplas de inteiros positivos com $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $\gamma_{kl} = \gamma_{k_1 \dots k_n l_1 \dots l_n}$ os coeficientes do hamiltoniano Γ , $g_{kl} = g_{k_1 \dots k_n l_1 \dots l_n}$ os coeficientes do hamiltoniano transformado $\mathcal{H}$ e $Q^k = Q_1^{k_1} \dots Q_n^{k_n}$.

Considere $M_\omega = \{k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n ; \langle k, \omega \rangle = k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n = 0\}$ (no caso não-autônomo, substituir $\equiv 0$ por $\equiv 0 \pmod{1}$)

Definição 1.3.2 $\Gamma(Q, P, t)$ está na Forma Normal de Gustavson se, quando exposto em série de potências de x e $\bar{x}$, os termos são da forma $(x\bar{x})^k$, ou seja, $g_{kl} = 0$ se $\{k - l\} \not\subseteq M_\omega$

Definição 1.3.3 Dizemos que $\lambda_i = \omega_j i$ não apresentam ressonâncias até a ordem s , inclusive, se $\sum m_i \omega_i \neq 0 \quad \forall (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n \cap k = \sum |m_i|, \quad k = 1, \dots, s$. (ou $\equiv 0 \pmod{1}$ no caso 2π -periódico).

Observação: Se $\omega_1, \dots, \omega_n$ são LI sobre $\mathbb{Q}$, então $M_\omega = 0$ e, com isso, $\Gamma(Q, P, t)$ só tem termos da forma

$$x^k \bar{x}^k = (Q_1^2 + P_1^2)^{k_1} + \dots + (Q_n^2 + P_n^2)^{k_n}$$

Definição 1.3.4 $\Gamma(Q, P, t)$ como descrito na observação acima é dito estar na Forma Normal de Birkhoff

Finalmente, enunciemos o teorema principal do capítulo

Teorema 1.3.2 *Existe uma transformação de coordenadas simplética $(q, p) \mapsto (Q, P)$ que leva o hamiltoniano 2π -periódico em t (ou autônomo)*

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \omega_k (q_k^2 + p_k^2) + H_3(q, p, t) + \dots$$

na sua forma normal de Birkhoff/Gustavson.

Demonstração: Procuremos tal transformação por uma função geradora $S(q, P, t)$ dada por

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \quad e \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P} \quad (1.3.1)$$

, com $S(q, P, t) = qP + S_3(q, P, t) + S_4(q, P, t) + \dots$, sendo S_j polinômios homogêneos de grau j em (q, P) e 2π -periódico em t . Faremos isto, estipulando condições sobre os coeficientes da função geradora. Considere

$$S_j(q, P, t) = \sum_{|k|+|l|=j} s_{kl} q^k P^l$$

No caso autônomo, $s_{kl} = \text{cte}$, se for 2π -periódico, $s_{kl}(t) = s_{kl}(t + 2\pi)$. É sabido, da secção anterior que

$$H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = \Gamma\left(\frac{\partial S}{\partial P}, P, t\right) \quad (1.3.2)$$

Lembre que $\frac{\partial S}{\partial t}$ é proveniente da função resto (na demonstração do 1.1.1). Procedendo com os cálculos da substituição das equações 1.3.1 em 1.3.2, vem

$$\begin{aligned} H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) &= H\left(q, P + \frac{\partial S_3}{\partial q} + \dots, t\right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum \omega_k (q_k^2 + (P_k + \frac{\partial S_3}{\partial q_k} + \dots)^2) + H_3\left(q, P + \frac{\partial S_3}{\partial q} + \dots, t\right) \end{aligned}$$

E

$$\Gamma\left(\frac{\partial S}{\partial P}, P, t\right) = \sum \frac{\omega_k}{2} ((q_k + \frac{\partial S_3}{\partial P_k} + \dots)^2 + P_k^2) + \Gamma_3\left(q + \frac{\partial S_3}{\partial P_k} + \dots, t\right)$$

Por 1.3.2, substituímos os termos da forma

$$\begin{aligned} \sum \frac{\omega_k}{2} (q_k^2 + (P_k + \frac{\partial S_3}{\partial q_k} + \dots)^2) + H_3(q, P + \frac{\partial S_3}{\partial q} + \dots, t) + \dots + \frac{\partial S}{\partial t} = \\ = \sum \frac{\omega_k}{2} ((q_k + \frac{\partial S_3}{\partial P_k} + \dots)^2 + P_k^2) + \Gamma_3(q + \frac{\partial S_3}{\partial P_k} + \dots, t) \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Olhemos agora exclusivamente para os termos de grau 3. Temos que

$$\sum \omega_k P_k \frac{\partial S_3}{\partial q_k} + H_3(q, p, t) + \frac{\partial S_3}{\partial t} = \sum \omega_k q_k \frac{\partial S_3}{\partial P_k} + \Gamma(q, p, t) \quad (1.3.4)$$

Seja D o operador linear definido por

$$D = \sum \omega_j (P_j \frac{\partial}{\partial q_j} - q_j \frac{\partial}{\partial P_j}) + \frac{\partial}{\partial t}$$

No caso autônomo, a expressão $\frac{\partial}{\partial t}$ é nulo, logo descartado. Reescrevendo a equação 1.3.4, chegamos a

$$\Gamma_3(q, P, t) - DS_3(q, P, t) = H_3(q, P, t) \quad (1.3.5)$$

Vamos agora utilizar o princípio da indução finita na 1ª forma para concluir que podemos chegar a uma expressão análoga a 1.3.5 para todos os polinômios homogêneos de S . Suponha que os termos de grau n satisfazem a

$$\begin{aligned} \sum \omega_k P_k \frac{\partial S_n}{\partial q_k} + C_1(H_3, \dots, H_{n-1}, S_3, \dots, S_{n-1}) + H_n(q, P, t) + \frac{\partial S_n}{\partial t} = \\ = \sum \omega_k q_k \frac{\partial S_n}{\partial P_k} + C_2(\Gamma_3, \dots, \Gamma_{n-1}, S_3, \dots, S_{n-1}) + \Gamma_n(q, P, t) \end{aligned}$$

para a qual C_1 e C_2 são funções que dependem dos termos anteriores a n já conhecidos na sequência. Em função do operador D , vem:

$$\Gamma_n(q, P, t) - DS_n(q, P, t) = E_n(q, P, t) \quad (1.3.6)$$

para a qual $E_n = H_n + C_{n-1}(H_3, \dots, H_{n-1}, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{n-1}, S_3, \dots, S_{n-1})$ Em coordenadas complexas $x_j = q_j + iP_j$ e $\bar{x}_j = q_j - iP_j$ o operador D será expresso por termos

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{\partial P_j}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} - i \frac{\partial}{\partial P_j}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} = \frac{\partial q_j}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{\partial P_j}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} + i \frac{\partial}{\partial P_j}$$

da forma

$$D = -i \sum \omega_j (\bar{x}_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j}) + \frac{\partial}{\partial t}$$

Também devemos estabelecer as novas formas dos hamiltonianos

$$\Gamma_n(\frac{x_j + \bar{x}_j}{2}, \frac{x_j - \bar{x}_j}{2}, t) = \sum_{|k|+|l|=n} g_{kl} x^k \bar{x}^l$$

$$S_n(\frac{x_j + \bar{x}_j}{2}, \frac{x_j - \bar{x}_j}{2}, t) = \sum_{|k|+|l|=n} f_{kl} x^k \bar{x}^l$$

$$E_n(\frac{x_j + \bar{x}_j}{2}, \frac{x_j - \bar{x}_j}{2}, t) = \sum_{|k|+|l|=n} a_{kl} x^k \bar{x}^l$$

Nestas considerações, a equação 1.3.5 equivale a

$$\Gamma_n(x, \bar{x}, t) - DS_n(x, \bar{x}, t) = E_n(x, \bar{x}, t) \quad (1.3.7)$$

$$\text{Mas, } -DS_n = \sum i \sum \omega_j f_{kl} (l_j x^k \bar{x}^l - k_j x^k \bar{x}^l) + \frac{df_{kl}}{dt} = \sum_{|k|+|l|=n} i < \omega, l - k >$$

$\cdot f_{kl} x^k \bar{x}^l + \frac{df_{kl}}{dt}$. Logo, a equação 1.3.7 pode ser vista diretamente pelos coeficientes das somas

$$\frac{df_{kl}}{dt} + i < \omega, l - k > f_{kl} - g_{kl} = -a_{kl}$$

Analisemos, a partir daqui, os dois casos separadamente. Suponha que o sistema é autônomo. Então, a equação anterior torna-se

$$i < \omega, l - k > f_{kl} - g_{kl} = -a_{kl} \quad (1.3.8)$$

Queremos eliminar os termos para os quais $< \omega, l - k > \neq 0$. Se $< \omega, l - k > = 0$, então teremos que tomar $g_{kl} = a_{kl}$, ou seja, o coeficiente g_{kl} será combinação dos termos já conhecidos, mas não poderá ser eliminado. Mas, se $< \omega, l - k > \neq 0$, então podemos fazer com que os coeficientes da função geradora sejam

$$f_{kl} = \frac{-a_{kl}}{i < \omega, l - k >}$$

e teremos eliminado o termo indesejado.

Suponha agora que o hamiltoniano é periódico. Procuramos agora por coeficientes 2π -periódicos da função geradora para que Γ_n esteja na sua forma

normal. Multiplicando a equação 1.3.8 pelo fator integrante $e^{-i\langle\omega, l-k\rangle}$, chegamos a

$$f_{kl}(t) = f_{kl}(0)e^{-b_{kl}t} + e^{ib_{kl}t} \int_0^t e^{-ib_{kl}\theta} (g_{kl} - a_{kl}) d\theta$$

com $b_{kl} = \langle \omega, l - k \rangle$. Logo, se $\{b_{kl}\} \not\subseteq \mathbb{Z}$, então $f_{kl}(t)$ é 2π -periódica se $f_{kl}(2\pi) = f_{kl}(0)$, ou seja, se

$$f_{kl}(0) = \frac{\int_0^{2\pi} e^{ib_{kl}\theta} (g_{kl} - a_{kl}) d\theta}{e^{2\pi ib_{kl}} - 1}$$

como f_{kl} não depende de g_{kl} para ser periódica, então podemos eliminar os termos indesejados fazendo $g_{kl} = 0$. Se $b_{kl} \in \mathbb{Z}$, então teremos que considerar $g_{kl} = \frac{e^{imt}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} a_{kl} d\theta$ para que $f_{kl}(t)$ seja periódica independentemente de $f_{kl}(0)$. Substituindo este g_{kl} na equação de $f_{kl}(t)$ obtemos o coeficiente da função geradora. Aqui acabamos a indução, mostrando que encontramos os coeficientes do termo de grau n da função geradora. ■

Vimos, portanto, que é forte a dependência deste teorema ao fato dos autovalores não admitirem ressonâncias até a ordem n . Portanto, ao realizar este processo para a normalização dos termos do hamiltoniano, somos obrigados a parar quando atingirmos uma ordem tal que apareça uma ressonância. No caso do duplo oscilador ressonante 1:1, ou seja, quando $H = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \sum K_{j \geq 3}(x_1, y_1, x_2, y_2)$ para o qual K_j são polinômios homogêneos de grau j (nosso objeto de estudo), temos uma ressonância de ordem 2. Considerando este fato, não poderemos seguir adiante com a normalização do termo cúbico.

Finalizando o nosso estudo sobre formas normais de Birkhoff/Gustavson, seguiremos agora com o estudo do fluxo em torno do ponto de equilíbrio, estabelecendo resultados sobre a existência de famílias de órbitas periódicas em torno do mesmo.

Capítulo 2

Teorema do Centro (Lyapunov)

2.1 Formulação Hamiltoniana

O objetivo desta secção é familiarizar o leitor com os sistemas hamiltonianos, dando mais detalhes, definições e alguns exemplos. A segunda lei de Newton estabelece equações diferenciais de segunda ordem em $\mathbb{R}^n$, e de primeira em $\mathbb{R}^{2n}$

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^n F_{ij} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ou

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i \\ \dot{y}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^n F_{ij} \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$$

O formalismo Hamiltoniano é a maneira natural de se desenvolver teorias sobre sistemas mecânicos conservativos, pois os sistemas de força provenientes de campos potenciais podem ser escritos como *Sistemas Hamiltonianos*.

Definição 2.1.1 (*Sistema Hamiltoniano*) *Um sistema de $2n$ equações diferenciais ordinárias da forma*

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \quad (2.1.1)$$

ou

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, q, p) \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(t, q, p) \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1.2)$$

para o qual $H : \mathbb{O}^{ab} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave é chamado de sistema hamiltoniano.

Os q_i são chamados de posição (no $\mathbb{R}^n$), os p_i são os vetores velocidade, t é o tempo e n é o número de graus de liberdade.

Considerando $Z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ e $\nabla_Z H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial Z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial Z_{2n}} \end{pmatrix}$ podemos achar a forma matricial do sistema hamiltoniano

$$\dot{Z} = J \nabla_Z H \quad \text{onde} \quad J = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{n \times n} & \mathbb{I}_{n \times n} \\ -\mathbb{I}_{n \times n} & \mathbb{O}_{n \times n} \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

O teorema da existência e unicidade das EDO's suporta que $\forall (t_0, Z_0) \in \mathbb{O} \exists ! Z = \phi(t, Z_0)$ solução definida numa vizinhança de (t_0, Z_0) que satisfaz a condição inicial $Z_0 = \phi(t_0, Z_0)$.

Se $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, então as equações são *autônomas* e o sistema é dito *conservativo*. O teorema da existência e unicidade também garante que duas curvas em $\mathbb{O}$ que são soluções do sistema autônomo nunca se cruzam. $\mathbb{O}$ é chamado de espaço de fase.

Uma *integral das equações* é uma função $F : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ que é constante ao longo das soluções do sistema 2.1.3, $F(\phi(t, Z_0)) = cte = F(Z_0)$ (*exempli gratia*, a energia total do sistema e o momento). Se são conhecidas $n-1$ integrais independentes, então o sistema é dito integrável, por que as superfícies de nível das integrais são $(n-1)$ -*variedades*, ou seja, você baixa uma dimensão para cada integral.

2.1.1 Exemplos de Sistemas Hamiltonianos

Exemplo 1 *O Oscilador Harmônico.*

Considere a equação

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad ; \quad \omega = cte \in \mathbb{R}^* .$$

Escreveremos

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \omega \end{pmatrix} + \omega x = 0$$

para ficar clara a seguinte formulação

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\omega x = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (2.1.4)$$

do qual tiramos que $H = \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2)$ e

$$\dot{Z} = \omega JZ \quad \therefore \quad Z = Z_0 e^{\omega t J}$$

Mas,

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Deduz-se de forma direta que $(\omega J)^{2n} = (-1)^n \omega^{2n} I$ e $(\omega J)^{2n+1} = (-1)^n \omega^{2n+1} J$. Portanto,

$$e^{\omega t J} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n} I}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n+1} J}{(2n+1)!} = \cos \omega t I + \sin \omega t J$$

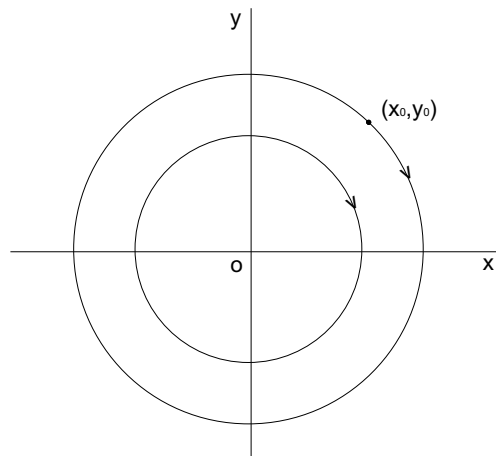
$$e^{\omega t J} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

Logo,

$$Z = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} Z_0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Para melhor visualizar as curvas no plano de fase, utilizaremos coordenadas polares $r^2 = x^2 + y^2$ e $\tan \theta = \frac{y}{x}$. Logo, $\dot{r} \cdot r = 0 \quad \therefore \quad \dot{r} = 0$ e $\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \dot{\theta} = \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2} = -\omega \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \quad \therefore \quad \dot{\theta} = -\omega$. E, portanto, as soluções estão contidas em círculos do plano de fase



Exemplo 2: *O Problema dos n -corpos.*

Considere a equação

$$m_i \ddot{q}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|^3} (q_j - q_i) = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

com $U = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}$ sendo a energia potencial. Podemos transformá-lo num sistema hamiltoniano se definirmos

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{1}{m_i} p_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|^3} (q_j - q_i) = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

do qual, fazendo-se as devidas transformações, chegamos ao hamiltoniano

$$H = \sum \frac{\|p_i\|^2}{2m_i} - U$$

2.1.2 Soluções Periódicas, Pontos Fixos e Secções Transversais

Vamos agora definir os principais objetos de estudo desta secção. Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1.5)$$

para a qual $f : \mathbb{O}^{ab} \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é $\mathcal{C}^\infty$.

Definição 2.1.2 *Um ponto de equilíbrio é uma solução $\phi(t, x_0) \sqcap \phi(t, x_0) = x_0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.*

Deduz-se imediatamente que x_0 é ponto de equilíbrio $\Leftrightarrow f(x_0) = 0$.

Definição 2.1.3 *Seja x_0 um ponto de equilíbrio. Os autovalores de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ são chamados de expoentes característicos de x_0 .*

Definição 2.1.4 *Se os expoentes característicos são não-nulos, chamamos x_0 de ponto de equilíbrio elementar.*

Definição 2.1.5 Uma solução $\phi(t, x_0)$ de 2.1.5 é dita *periódica* se $\exists T \in \mathbb{R} \cap \phi(t + T, x_0) = \phi(t, x_0) \forall t \in \mathbb{R}$. Chamamos de *período* de $\phi(t, x_0)$ o menor $T \in \mathbb{R}_+^*$ que tem a propriedade acima, ou dizemos que $\phi(t, x_0)$ é *T-periódica*.

Estamos considerando aqui que os pontos de equilíbrio não são soluções periódicas. Enunciemos uma equivalência para essa definição.

Lemma 2.1.1 $\phi(t, x_0)$ é T-periódica $\Leftrightarrow \phi(T, x_0) = x_0$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Escolha $t = 0$ na equação $\phi(t + T, x_0) = \phi(t, x_0)$ para chegarmos a $\phi(T, x_0) = x_0 = \phi(0, x_0)$.

($\Leftarrow$) $\phi(T, x_0) = x_0 \Rightarrow \phi(t, x_0) = \phi(t, \phi(T, x_0)) = \phi(t + T, x_0)$. ■

Em relação às soluções T-periódicas temos mais uma definição importante.

Definição 2.1.6 Seja $\phi(t, x_0)$ T-periódica. A matriz $\frac{\partial \phi}{\partial x}(T, x_0)$ é chamada de *matriz de monodromia* de $\phi(t, x_0)$, e seus autovalores são chamados de *multiplicadores característicos* de $\phi(t, x_0)$.

Estabeleceremos agora um resultado que nos levará ao conceito de *soluções periódicas elementares*.

Lemma 2.1.2 Soluções periódicas nunca são isoladas, isto é, dado um aberto que contém uma solução periódica, então esse aberto contém outra solução periódica. Além disso, 1 sempre é um multiplicador. Mais precisamente, $f(x_0)$ é um autovalor da matriz de monodromia com autovalor 1.

Demonstração: Primeiramente, como o sistema 2.1.5 é autônomo, então as translações de uma solução no tempo também é uma solução do sistema ($\frac{d}{dt}\phi(t + s) = f(\phi(t + s))$). Logo, soluções periódicas não são isoladas, pois para todo aberto que contém uma solução, podemos deslocar um pouco a solução no tempo de forma que achemos uma solução ainda neste aberto. Com isso, concluímos a primeira parte do lema. Para a segunda parte, diferenciamos a expressão $\phi(\tau, \phi(t, x)) = \phi(\tau + t, x)$, e temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}(\tau, \phi(t, x_0)) \dot{\phi}(t, x_0) = \dot{\phi}(\tau + t, x_0) \quad \text{com } \zeta = \phi(t, x_0)$$

fazendo $t = 0$ e $\tau = T$, ficamos com

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}(T, x_0) \dot{\phi}(0, x_0) = \dot{\phi}(T, x_0)$$

e como ϕ é solução, temos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}(T, x_0) f(x_0) = f(x_0)$$

como estamos considerando que soluções periódicas não são pontos de equilíbrio, então $f(x_0) \neq 0$ é um autovetor da matriz de monodromia. ■

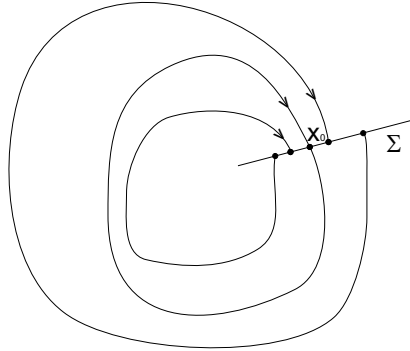
Já que todas as soluções periódicas têm 1 como autovalor, então coloquemos em evidência aquelas cujo autovalor 1 tem multiplicidade 1.

Definição 2.1.7 *Uma solução periódica $\phi(t, x_0)$ é dita elementar se 1 é autovalor com multiplicidade 1.*

Portanto, ficamos impossibilitados de estudar uma solução periódica isoladamente. Para "driblar" esta dificuldade, vamos fazer a seguinte definição

Definição 2.1.8 (*Secção Transversal*) *Seja $\phi(t, x_0)$ uma solução periódica. Uma secção transversal de ϕ é um hiperplano Σ que contém x_0 e é transversal a $f(x_0)$.*

Uma forma de explicitar a *secção transversal* seria da forma $\Sigma = \{x ; a^T(x - x_0) = 0\}$, sendo a constante com $a^T f(x_0) \neq 0$. A solução $\phi(t, x_0)$, portanto, sai de Σ ; e depois de um tempo T , retorna a Σ . Então, pela dependência contínua que existe entre soluções de um sistema e os valores iniciais, temos que soluções próximas a x_0 também vão cruzar a secção transversal. Ou seja, se x é próximo de x_0 , então existe um tempo $\tau(x)$, próximo de T , tal que $\phi(\tau(x), x) \in \Sigma$. τ é chamado de *tempo de primeiro retorno*.



Com isso, podemos definir o mapa

Definição 2.1.9 *O Mapa de Poincaré é dado pela aplicação*

$$P : x \mapsto \phi(\tau(x), x)$$

ou seja, $P : N_{x_0} \subseteq \Sigma \longrightarrow \Sigma$

Como estamos assumindo que f é uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$, temos que

Lemma 2.1.3 *Numa vizinhança muito pequena de x_0 contida em Σ , o mapa de Poincaré e o tempo de primeiro retorno são $\mathcal{C}^\infty$.*

Demonstração: Considere $\Sigma = \{x ; a^T(x - x_0) = 0\}$, sendo a constante com $a^T f(x_0) \neq 0$. Seja a função $g(t, x) = a^T(\phi(t, x) - x_0)$. Temos, então, que $g(T, x_0) = 0$ e $\frac{\partial g}{\partial x}(T, x_0) = a^T \dot{\phi}(T, x_0) = a^T f(x_0) \neq 0$. Agora utilizamos o teorema da função implícita para construir a função tempo de primeiro retorno $\tau(x)$ numa vizinhança N_{x_0} de $x_0 \in \Sigma$ tal que $g(\tau(x), x) = 0 \forall x \in N_{x_0}$. Esta expressão define Σ (compare com $\Sigma = \{x ; a^T(x - x_0) = 0\}$) e τ é $\mathcal{C}^\infty$ por construção. Como o mapa de Poincaré é composição de funções $\mathcal{C}^\infty$, então é $\mathcal{C}^\infty$. ■

Perceba agora que as soluções periódicas são *pontos fixos* do mapa de Poincaré. Se o sistema admitir uma integral primeira, então temos um novo conceito de solução periódica elementar, devido ao seguinte lema:

Lemma 2.1.4 *Seja F uma integral não-degenerada na solução periódica $\phi(t, x_0)$. Então o multiplicador 1 tem multiplicidade algébrica maior ou igual a 2. Além disso, o vetor linha $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)$ é um autovalor à esquerda da matriz de monodromia com autovalor 1 associado.*

Demonstração: Começamos por derivar a equação de conservação de F em relação a x

$$F(\phi(t, x)) = F(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{com} \quad \zeta = \phi(t, x)$$

Fazendo $x = x_0$, ficamos com

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0) \frac{\partial \phi}{\partial x}(T, x_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)$$

o que já garante a segunda parte do lema. Agora, escolha um sistema de coordenadas tal que $f(x_0)$ seja o vetor coluna e_1^T e $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0) = e_2$. Completando para uma base de $\mathbb{R}^m$, temos que $B = \frac{\partial \phi}{\partial x}(T, x_0)$ fica representada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & \dots & b_{3,m} \\ 0 & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} & \dots & b_{4,m} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & b_{m,2} & b_{m,3} & b_{m,4} & \dots & b_{m,m} \end{pmatrix} \quad (2.1.6)$$

Com isso, o polinômio característico $p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = (1 - \lambda) \det(B_1 - \lambda I)$, para o qual

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & \dots & b_{3,m} \\ b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} & \dots & b_{4,m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{m,2} & b_{m,3} & b_{m,4} & \dots & b_{m,m} \end{pmatrix}$$

Repetindo a operação, temos que $p(\lambda) = (1 - \lambda) \det(B_1 - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 \det(B_2 - \lambda I)$, para o qual

$$B_2 = \begin{pmatrix} b_{3,3} & b_{3,4} & \dots & b_{3,m} \\ b_{4,3} & b_{4,4} & \dots & b_{4,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m,3} & b_{m,4} & \dots & b_{m,m} \end{pmatrix}$$

Portanto, concluímos o resultado ■

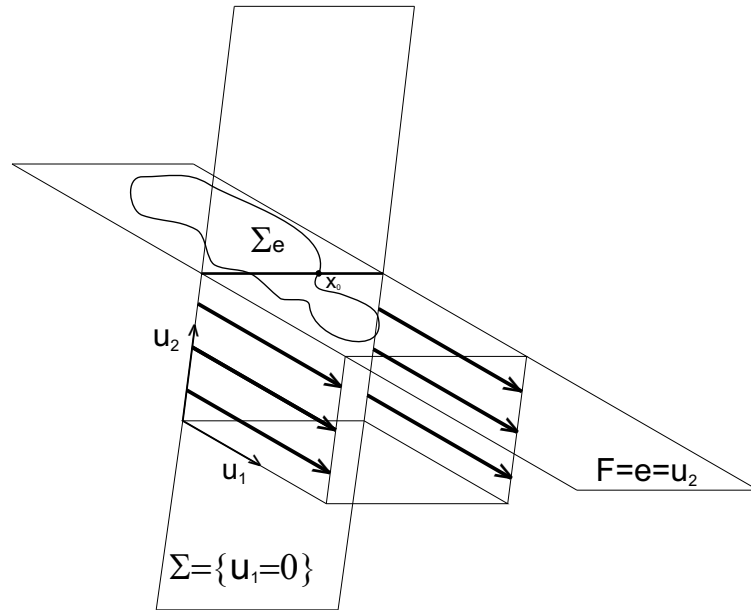
Com isso, seguimos com a seguinte definição:

Definição 2.1.10 *Suponha que 2.1.5 admite a integral $F : \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{R}$. Seja $\phi(t, x_0)$ uma solução periódica de 2.1.5. Suponha que $\nabla F(x_0) \neq 0$, ou seja, que a integral é não-degenerada na solução periódica. $\phi(t, x_0)$ é dita elementar se 1 é autovalor com multiplicidade 2.*

Nos sistemas hamiltonianos, H sempre é não-degenerada ($\nabla H(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ é ponto de equilíbrio). Vamos introduzir um novo conceito de mapa de Poincaré:

O *teorema da existência do flow box*¹ garante que existe um sistema de coordenadas $u = (u_1, \dots, u_n)$ tal que $\dot{u}_1 = 1$, $\dot{u}_j = 0$ $j = 2, \dots, n$ e $F = u_2 = cte$. Portanto, a solução agora está na superfície $u_2 = cte$. Considere o mapa de Poincaré $P : N \longrightarrow \Sigma$, para o qual N é uma vizinhança de x_0 em $\Sigma = \{u_1 = 0\}$. Seja Σ_e a intersecção de Σ e a superfície de nível $F = u_2 = e = cte$. Como nesta superfície u_1 e u_2 são constantes, então o mapa de Poincaré será definido apenas nas últimas $n - 2$ coordenadas, ou seja $Q(e, y) = \phi(\tau(y), y)$ com $y = (u_3, \dots, u_n)$. Então defina $Q(e, \cdot) : N_e \subseteq \Sigma_e \longrightarrow \Sigma$ como o *mapa de Poincaré numa superfície de nível*.

¹ver Meyer, Kenneth R. [4]



2.2 Continuação de Pontos de Equilíbrio e Soluções Periódicas

Considere um sistema de EDO's que depende de um conjunto de k parâmetros, isto é,

$$\dot{x} = f(x, v) \quad (2.2.1)$$

para o qual $f : \mathbb{O} \times Q \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é $\mathcal{C}^\infty$. Seja x_0 um ponto de equilíbrio para $v = v_0$ (id est $f(x_0, v_0) = 0$)

Definição 2.2.1 A continuação do ponto de equilíbrio x_0 é uma função suave $u : Q_0 \longrightarrow \mathbb{O}$, definida numa vizinhança Q_0 de v_0 , tal que $u(v_0) = x_0$ e $u(v)$ é ponto de equilíbrio, $\forall v \in Q_0$ $f(u(v), v) = 0 \forall v \in Q_0$.

Temos o mesmo conceito para soluções periódicas. Considere que $\phi(t, x, v)$ é suave em v e que $\phi(t, x_0, v_0)$ é uma solução periódica com período T .

Definição 2.2.2 A continuação de uma solução periódica $\phi(t, x_0, v_0)$ é um par de funções suaves $v \mapsto u(v)$ e $v \mapsto \tau(v)$, definidas para v perto de v_0 tal que $u(v_0) = x_0$, $\tau(v_0) = T$ e $\phi(t, u(v), v)$ é $\tau(v)$ -periódica

Observação Diz-se também que a solução periódica pode ser "continuada". Isto significa que a solução persiste quando os parâmetros são mudados, e a solução periódica não se distancia muito de ϕ .

Com esses parâmetros, vamos relembrar os conceitos da secção anterior. Um ponto de equilíbrio x_0 de 2.2.1, quando $v = v_0$ é *elementar* se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, v_0)$ é não-singular, ou seja, quando zero não é um expoente. É dita *elementar* se, $\phi(t, x_0, v_0)$ é T -periódica se, e só se, $\phi(T, x_0, v_0) = x_0$. É dita *elementar* se, no caso geral de um sistema autônomo, 1 é autovalor da matriz de monodromia $\frac{\partial \phi}{\partial x}(T, x_0, v_0)$ com multiplicidade 1, ou, no caso do sistema ter integral não-degenerada, com multiplicidade 2. Os autovalores de $\frac{\partial \phi}{\partial x}(T, x_0, v_0)$ são chamados de multiplicadores da solução periódica.

A pergunta natural que se faz é, dados estes conceitos, se existem continuções para tais *soluções elementares*. Responde-se provando-se a

Proposição 2.2.1 *Pontos de equilíbrio elementares, soluções periódicas elementares, e soluções periódicas elementares em sistemas com uma integral não-degenerada podem ser continuados.*

Demonstração: Para o caso dos pontos de equilíbrio elementar, usamos o teorema da função implícita (TFI), pelo fato de $f(x_0, v_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, v_0) \neq 0$. Já no caso de soluções periódicas a prova será um pouco mais longa. Como o tempo de primeiro retorno e o mapa de Poincaré dependem diretamente do TFI, então dependem suavemente de v . No caso geral, queremos aplicar o TFI para resolver a equação $\Psi(x, v) = P(x, v) - x = 0$ em termos de v , para o qual $P(x, v)$ é o mapa de Poincaré da *secção transversal* da solução periódica para $v = v_0$. Para isso, temos que provar que $\Psi(x_0, v_0) = 0$ e que $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x_0, v_0) \neq 0$. Com efeito,

$$\Psi(x_0, v_0) = P(x_0, v_0) - x_0 = \phi(\tau(x_0), x_0, v_0) - x_0 = x_0 - x_0 = 0$$

e

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \xi = \frac{\partial}{\partial x}(\phi(\tau(x), x, v) - x) \cdot \xi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla_x \tau + \frac{\partial \phi}{\partial x} - \mathbf{I} \right) \cdot \xi$$

o termo $\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla_x \tau \xi = f(x_0) \nabla_x \tau \xi$ é nulo, pois podemos considerar uma base ortonormal $\mathcal{B} = \{b_2, \dots, b_n\}$ de Σ de forma que $\{f(x_0), b_2, \dots, b_n\}$ é base ortonormal do espaço todo. Logo, escreveremos $\nabla_x \tau \xi$ como combinação linear dos elementos que são ortogonais a $f(x_0)$. Portanto, o produto $f(x_0) \nabla_x \tau \xi = 0$. Com isso,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \xi = \frac{\partial}{\partial x}(\phi(\tau(x), x, v) - x) \cdot \xi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \mathbf{I} \right) \cdot \xi \neq 0$$

caso contrário, $\xi = \alpha f(x_0)$ para algum $\alpha \in \mathbb{R} \rightarrow | \leftarrow$. Logo, dado um $v \in \mathbb{R}^k$ temos que $\phi(\tau(v), x(v), v) = x(v)$, isto é, $\phi(\tau(v), x(v), v)$ é uma solução τ -periódica de 2.2.1. No caso do sistema admitir uma integral $I(x, v)$, vimos também que o mapa de Poincaré também é $\mathcal{C}^\infty$. Portanto, basta aplicar o teorema da função implícita à equação $\chi(x, v) = Q(x, v) - x = 0$, onde $Q(x, v)$ é o mapa de Poincaré na superfície integral da *secção transversal* da solução periódica $\phi(t, x_0, v_0)$. Analogamente, $(\frac{\partial \chi}{\partial x} - \mathbf{I}) \cdot \xi = 0$ se, e somente se $\xi = \alpha f(x_0) + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, x_0, v_0)$ que não está na *secção transversal* Σ_e . O que nos fornece a mesma conclusão anterior ■

2.3 Teorema do Centro (Lyapunov)

Estamos prontos agora para enunciar o teorema principal do capítulo

Teorema 2.3.1 *Considere que um sistema com uma integral não-degenerada tem um ponto de equilíbrio com expoentes $\pm \omega i$, $\lambda_3, \dots, \lambda_m$, onde $i\omega \neq 0$ é imaginário puro. Se $\{\frac{\lambda_j}{i\omega}\} \not\subseteq \mathbb{Z}$; $j = 3, \dots, m$, então existe uma família uniparamétrica de órbitas periódicas emanando (saindo) do ponto de equilíbrio. Além disso, quando se aproxima do ponto de equilíbrio ao longo da família, os períodos tendem a $\frac{2\pi}{\omega}$ e os multiplicadores não-triviais tendem a $\exp(\frac{2\pi\lambda_j}{\omega})$; $j = 3, \dots, m$.*

Demonstração: Note que o hamiltoniano é uma integral não-degenerada para uma solução periódica não-constante. Sem perda de generalidade, suponha que $x = 0$ é tal ponto de equilíbrio. Logo, podemos reescrever

$$\dot{x} = Ax + g(x)$$

com $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$ e $g(x) = f(x) - Ax$ ($\therefore g(0) = 0$ e $\frac{\partial g}{\partial x}(0) = 0$). Procuramos por funções periódicas numa vizinhança da origem. Então, considere $x \mapsto \varepsilon y$, $0 \leq |\varepsilon| \ll 1$. Com isso, o sistema fica resumido a

$$\dot{y} = Ay + o(\varepsilon)$$

Pois $\varepsilon^2 \Phi(x, \varepsilon) := g(\varepsilon x)$ depende quadraticamente de ε e, ao fazermos tal substituição, cancelamos um ε e chegamos à expressão acima para $o(\varepsilon) = \varepsilon \Phi(x, \varepsilon)$. Para $\varepsilon = 0$, o sistema é linear. Mas, $\dot{y} = Ay$ tem expoentes $\pm \omega i$. Logo, admite solução periódica, de período $\frac{2\pi}{\omega}$, da forma $a \exp(At)$, $a^t = (1, 1, 0, \dots, 0)$. Os multiplicadores desta solução periódica são os autovalores

de $\exp(A\frac{2\pi}{\omega})$, ou seja 1,1 e $\exp(\frac{2\pi\lambda_i}{\omega})$ $i = 3, \dots, m$. Por hipótese, os multiplicadores são $\neq 1$. Logo, tal solução periódica é elementar. Pela Proposição anterior, existe uma solução periódica da forma $a \exp(At) + o(\varepsilon)$. Voltando-se às antigas coordenadas, a solução fica da forma $\varepsilon a \exp(At) + o(\varepsilon^2)$ ■

Capítulo 3

O duplo oscilador ressonante 1:1

O teorema do centro de Lyapunov se mostra, de fato, uma grande ferramenta no estudo de fluxos numa vizinhança do ponto de equilíbrio. Porém, quando se trata do duplo oscilador ressonante 1:1, isto é, o sistema hamiltoniano com $H = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \sum H_k(x_1, y_1, x_2, y_2)$, ficamos impossibilitados de utilizar o teorema, pois dependemos fortemente da incomensurabilidade de $\frac{2\pi}{i\omega} \lambda_j$, no qual (como vimos) os λ_i 's são os expoentes característicos do ponto de equilíbrio. Portanto, até o fim desta tese descreveremos o método de Kummer[2] para estabelecer um teorema a respeito do fluxo induzido neste caso.

3.1 Fluxo em $\mathbb{R}^4$ induzido por $H = H_2(q, p) + \mathcal{O}_3$

Pretendemos agora fazer o estudo do fluxo induzido em $\mathbb{R}^4$ por um Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \sum_{k=3}^{\infty} H_k(x_1, y_1, x_2, y_2) \quad (3.1.1)$$

onde H_k são polinômios homogêneos de grau k em x_1, y_1, x_2 e y_2 , e $\sum H_k$ analítica na origem do $\mathbb{R}^4$.

Seja a 2-forma simplética standard

$$\omega = \sum_{k=1}^2 dy_k \wedge dx_k \quad (3.1.2)$$

e a transformação i^{-1} -simplética

$$Z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_k + iy_k) \quad ; \quad k = 1, 2 \quad (3.1.3)$$

Logo,

$$\begin{aligned} dZ_k &= \frac{1}{\sqrt{2}}(dx_k + idy_k) \\ d\bar{Z}_k &= \frac{1}{\sqrt{2}}(dx_k - idy_k) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} dZ_k \wedge d\bar{Z}_k &= \frac{1}{(\sqrt{2})^2}(dx_k \wedge dx_k - idx_k \wedge dy_k + idy_k \wedge dx_k + dy_k \wedge dy_k) \\ \Rightarrow \quad dy_k \wedge dx_k &= \frac{1}{i} dZ_k \wedge d\bar{Z}_k \\ \therefore \quad \omega &= \frac{1}{i} \sum_{k=1}^2 dZ_k \wedge d\bar{Z}_k \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Considerando $N_k = |Z_k|^2$, $k = 1, 2$; e $\frac{\pi}{2} - \alpha_k$ o argumento de Z_k , podemos escrever

$$\begin{aligned} dZ_k &= \frac{dN_k}{2\sqrt{N_k}} e^{(\frac{\pi}{2} - \alpha_k)i} - i\sqrt{N_k} e^{(\frac{\pi}{2} - \alpha_k)i} d\alpha_k \\ d\bar{Z}_k &= \frac{dN_k}{2\sqrt{N_k}} e^{-(\frac{\pi}{2} - \alpha_k)i} + i\sqrt{N_k} e^{-(\frac{\pi}{2} - \alpha_k)i} d\alpha_k \end{aligned}$$

com isso,

$$\begin{aligned} dZ_k \wedge d\bar{Z}_k &= i \left(\frac{dN_k \wedge d\alpha_k}{2} + \frac{dN_k \wedge d\alpha_k}{2} \right) \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{i} (dZ_k \wedge d\bar{Z}_k) &= dN_k \wedge d\alpha_k \\ \omega &= \sum_{k=1}^2 dN_k \wedge d\alpha_k \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Agora, seja $M = (\mathbb{R}^4, \omega)$ e $\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ o *Colchete de Poisson*:

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial Z_k} \frac{\partial g}{\partial \bar{Z}_k} - \frac{\partial g}{\partial Z_k} \frac{\partial f}{\partial \bar{Z}_k} \right) \quad (3.1.6)$$

Expressemos agora $\dot{f}$, a derivada de f ao longo do fluxo gerado pelo hamiltoniano H , usando o colchete de Poisson. Com efeito, suponha que H é o Hamiltoniano que induz o fluxo $(\dot{q}, \dot{p})$ em $\mathbb{R}^4$. Logo, $\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}$ e $\dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} \right) \\ \dot{f} &= \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial y_k} - \frac{\partial f}{\partial y_k} \frac{\partial H}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Agora, utilizando as identidades $\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial Z_k} + \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_k} \right)$ e $\frac{\partial}{\partial y_k} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial Z_k} - \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_k} \right)$, temos que 3.1.7 se escreve como

$$\dot{f} = \{H, f\} \quad (3.1.8)$$

O estudo do fluxo em $\mathbb{R}^4$ correspondente ao Hamiltoniano H é facilitado se colocarmos H na sua forma normal de Gustavson. Para isso, começamos introduzindo as seguintes expressões quadráticas nas coordenadas:

$$M_k = \frac{1}{2} z^\dagger \sigma_k z \quad (3.1.9)$$

onde $z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$, $z^\dagger = (\bar{Z}_1 \quad \bar{Z}_2)$ e σ_k são as *Matrizes de Pauli* dadas por $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Com isso,

$$M_0 = \frac{1}{2} (\bar{Z}_1 \quad \bar{Z}_2) \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (N_1 + N_2)$$

$$M_1 = \frac{1}{2} (\bar{Z}_1 \quad \bar{Z}_2) \begin{pmatrix} -iZ_2 & iZ_1 \end{pmatrix} = -i(\overline{Z_1 Z_2} - Z_1 \bar{Z}_2) = \text{Im}(\bar{Z}_1 Z_2)$$

$$M_2 = \frac{1}{2} (\bar{Z}_1 Z_2 + \bar{Z}_2 Z_1) = \text{Re}(\bar{Z}_1 Z_2)$$

$$M_3 = \frac{1}{2} (\bar{Z}_1 \quad \bar{Z}_2) \begin{pmatrix} -Z_1 & Z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (N_2 - N_1)$$

Considere $M_0 = \mathcal{J}$. Note que $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = \mathcal{J}^2$, e além disso

$$\{M_1, M_2\} = \frac{i}{2} \bar{Z}_2 \frac{1}{2} Z_2 - \frac{1}{2} \bar{Z}_2 \frac{i}{2} (-Z_2) + \frac{i}{2} (-\bar{Z}_1) \frac{1}{2} Z_1 - \frac{1}{2} \bar{Z}_1 \frac{i}{2} Z_1 =$$

$= \frac{i}{4}(|Z_2|^2 + |Z_2|^2 - |Z_1|^2 - |Z_1|^2)$. Portanto,

$$\{M_1, M_2\} = iM_3 \quad (3.1.10)$$

Os M_k satisfazem as "relações do colchete de Poisson" que são isomorfas àquelas de $u(2)$. Logo, por 3.1.10 concluímos que os M_k geram $su(2) \approx so(3) \approx T_1SO(3)$. O Teorema da Forma Normal de Gustavson garante a existência de uma transformação simplética $z_k \mapsto \hat{z}_k$ tal que o Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \sum_{k=3}^{\infty} H_k(Z_1, Z_2) \quad (3.1.11)$$

tem a forma $2\mathcal{J} + \mathcal{K}$, onde $\mathcal{K}$ é uma série de potências (nas variáveis $\hat{z}_k$ que tem colchete nulo com $\mathcal{J} \equiv M_0 = \frac{1}{2}(\hat{x}_1^2 + \hat{y}_1^2) + \frac{1}{2}(\hat{x}_2^2 + \hat{y}_2^2)$) da forma

$$K = \sum_{m=2}^{\infty} \mathcal{K}_m(\mathcal{J}, M_1, M_2, M_3) \quad (3.1.12)$$

onde $\mathcal{K}_m$ são polinômios homogêneos de grau m definidos na Álgebra de Lie $u(2)$. Para fazer o estudo do Hamiltoniano 3.1.11, não utilizaremos a forma 3.1.12, e sim truncaremos a transformação simplética a uma parcela finita da série, de forma que possamos garantir a analiticidade do Hamiltoniano (e da própria transformação) numa vizinhança da origem do $\mathbb{R}^4$.

Portanto vamos considerar que a transformação simplética que leva H em sua forma normal de Gustavson foi truncada de maneira que 3.1.11 nas novas variáveis fica

$$H = 2\mathcal{J} + \mathcal{K}_n(\mathcal{J}, M_1, M_2, M_3) + \mathcal{O}_{2n+1} \quad (3.1.13)$$

onde $\mathcal{K}_n$ é o primeiro termo da forma normal 3.1.12 que não é identicamente nulo, e $\mathcal{O}_{2n+1}$ é uma série de potências convergente nas novas variáveis que começa com um pol. hom. de grau $2n + 1$.

Primeiramente, vamos deletar $\mathcal{O}_{2n+1}$ e estudar o fluxo do Hamiltoniano truncado (ou não perturbado) e só depois procurar condições necessárias e/ou suficientes sob as quais o fluxo mantenha algumas características do fluxo induzido em $\mathbb{R}^4$ pelo Hamiltoniano 3.1.12

Observação (1) Note que os coeficientes de $\mathcal{K}_n$ não são unicamente determinados. Com efeito, se n é par, o polinômio $P(\mathcal{J}, M_1, M_2, M_3) = (\mathcal{J}^2 -$

$M_1^2 - M_2^2 - M_3^2)^{n/2}$ que é identicamente nulo sob as condições 3.1.9. Portanto, podemos somar estes zeros a $\mathcal{K}_n$ de forma que os coeficientes de $\mathcal{K}_n$ fiquem diferentes. Ademais, seja $\mathbf{a}_{k_0 k_1 k_2 k_3}$ o coeficiente de $M_0^{k_0} M_1^{k_1} M_2^{k_2} M_3^{k_3}$ em $\mathcal{K}_n$ e $\mathbf{c}_{k_0 k_1 k_2 k_3}$ seu coeficiente em P . Qualquer translação $\mathbf{a}_{k_0 k_1 k_2 k_3} \mapsto \mathbf{a}_{k_0 k_1 k_2 k_3} + t \mathbf{c}_{k_0 k_1 k_2 k_3}$, com $t \in \mathbb{R}$, mantém $\mathcal{K}_n$ inalterado, mas, obviamente, os seus coeficientes não.

Observação (2) $SU(2) \subset Sp(2)$, i.e. qualquer $U \in SU(2)$ além de induzir uma rotação do vetor $M = (M_1, M_2, M_3)$ ($\hat{M} := R(U)M$) mantém $\omega = dN_k \wedge d\alpha_k$ invariante. Obviamente, o espaço dos polinômios homogêneos em $u(2)$ é levado em si mesmo por U .

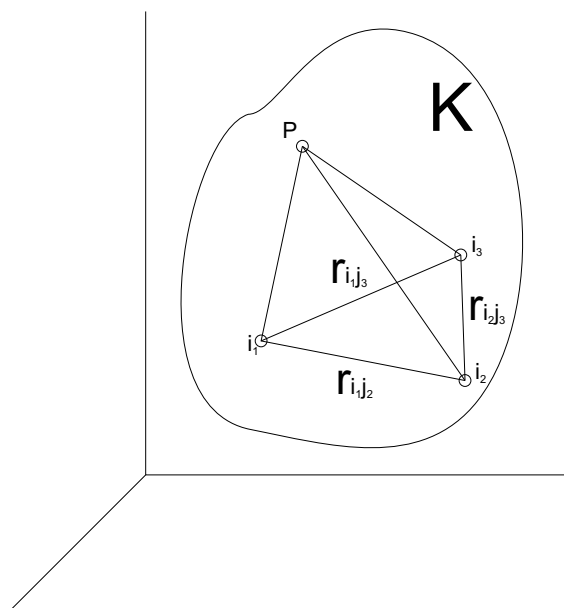
Apêndice A(da secção 2.1)

Os Ângulos de Euler

Seja $K \in \mathbb{R}^3$ um corpo rígido. Questionamos: Qual o numero mínimo de variáveis necessário para descrever a posição deste corpo rígido? Primeiramente, como corpo rígido, K é tal que seus pontos satisfazem

$$r_{ij} = c_{ij} \quad ; \text{ com } i \neq j \text{ e } i, j = 1, \dots, N \quad (3.1.14)$$

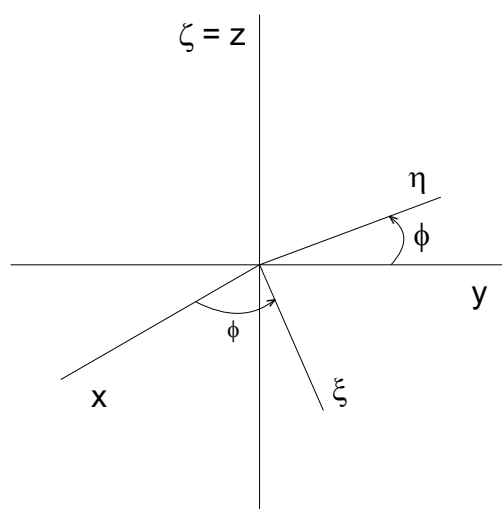
com c_{ij} constantes reais. Claramente, as equações 3.1.14 não são independentes. Logo, fica desnecessário "salvar" todas as $3N$ coordenadas, pois a partir da determinação de algumas podemos determinar a posição de outras. Com efeito, para situar um partícula arbitrária do corpo basta informar a sua distancia a três partículas não-colineares diferentes dela. Portanto, o número mínimo de variáveis é menor ou igual a 9. Podemos cortar 3 variáveis dependentes se usarmos as equações 3.1.14 que dizem respeito a estas partículas, ou seja $r_{i_1 j_2} = c_{i_1 j_2}$, $r_{i_2 j_3} = c_{i_2 j_3}$ e $r_{i_1 j_3} = c_{i_1 j_3}$.



Com isso, concluímos que são necessárias no mínimo seis variáveis independentes para descrever a configuração. Sem perda de generalidade, consideremos que as primeiras três coordenadas são usadas para descrever o lugar da primeira partícula. As três restantes descrevem a orientação do sistema inercial de K . Vamos agora exibir os *ângulos de Euler*, que fazem referência à determinação da orientação de K .

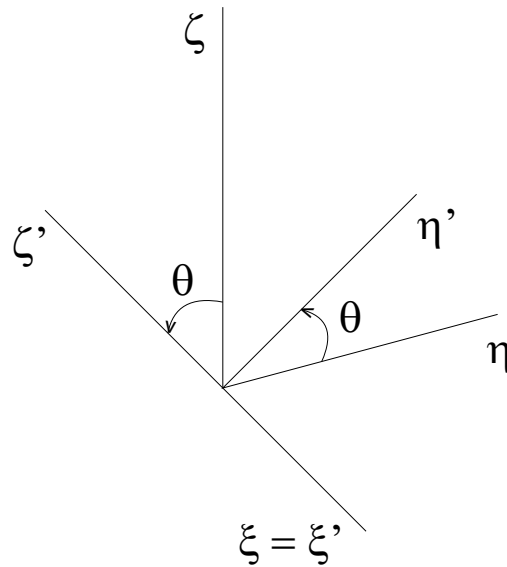
Segue a sequência que descreve a definição de tais variáveis:

1º) Rotação de ϕ em relação ao eixo z , antihorária.



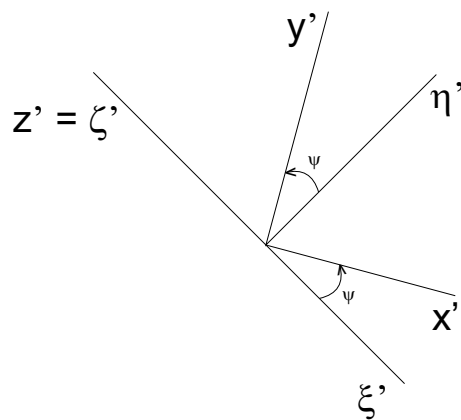
Chamemos de $\xi\eta\zeta$ o novo sistema de coordenadas.

2º) Rotação de θ do novo sistema em relação ao eixo ξ , anti-horária.



Chamemos de $\xi'\eta'\zeta'$ o novo sistema.

3º) Rotação de ψ em relação a ζ' do novo sistema $\xi'\eta'\zeta'$, anti-horária



definindo o sistema $x'y'z'$. Fica, então, claro que $x'y'z'$ tem orientação completamente especificada por ϕ , θ e ψ . Portanto, a determinação de ϕ , θ e ψ é suficiente para definir a orientação do corpo rígido. Vamos agora definir a matriz de passagem A do sistema xyz para o $x'y'z'$. Sejam A_1 , A_2 e A_3 as

matrizes correspondentes aos passos 1, 2 e 3. Então,

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{giro em torno de } z) \quad (3.1.15)$$

após isso

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{giro em torno de } \xi') \quad (3.1.16)$$

e finalmente

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{giro em torno de } \zeta') \quad (3.1.17)$$

Efetutando-se os cálculos chegamos a formula de $A := A_3 A_2 A_1 =$

$$\begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.1.18)$$

Assim, introduzimos os ângulos de Euler descrevendo a orientação de um corpo rígido por uma transformação ortogonal A em $SO(3)$, ou seja $A^t A = A A^t = \mathbf{1}$ e $\det A = +1$. Verificamos isso via cálculos diretos, confirmando o fato de que são necessárias, no mínimo, 3 variáveis independentes (neste caso ϕ , θ e ψ).

Apêndice B(da seccão 2.1)

Os Parâmetros de Cayley-Klein

Comecemos por tomar uma nova notação.

Notação:

$$x_i x_i := \sum_i x_i^2 \quad (3.1.19)$$

$$x'_j = a_{ij} x_j := \sum_i a_{ji} x_i \quad (3.1.20)$$

Sabemos que, apesar de descrever completamente as orientações e coordenadas do corpo rígido, as expressões das matrizes do movimento em termos dos ângulos de Euler são difíceis de serem calculadas explicitamente. Com isso, surge a necessidade de utilizar os *Parâmetros de Cayley-Klein*, que são bem mais simples de lidar.

Consideremos, então, o plano (u, v) , com u e v complexos. Suponha uma transformação linear de (u, v) em (u', v') descrita por

$$\begin{cases} u' = \alpha u + \beta v \\ v' = \gamma u + \delta v \end{cases}$$

com matriz associada

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (3.1.21)$$

Queremos encontrar a matriz geral de uma transformação unitária, ou seja, uma matriz que satisfaça

$$\mathbf{Q}^\dagger \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^\dagger = \mathbf{1} \quad , \quad \text{onde } \mathbf{Q}^\dagger = \overline{\mathbf{Q}}^T \quad (3.1.22)$$

Definição 3.1.1 Uma matriz $A \in M_{n \times n}$ é dita unimodular se $\det A = 1$

Lemma 3.1.1 A forma geral de uma matriz unitária unimodular é

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad , \quad \text{com } \alpha \bar{\alpha} + \beta \bar{\beta} = 1. \quad (3.1.23)$$

Demonstração:

Substituindo 3.1.21 na segunda igualdade de 3.1.22, chegamos a

$$\begin{cases} \alpha \bar{\alpha} + \gamma \bar{\gamma} = 1 \\ \beta \bar{\beta} + \delta \bar{\delta} = 1 \\ \bar{\alpha} \beta + \bar{\gamma} \delta = 0 \end{cases} \quad (3.1.24)$$

Como o determinante do sistema linear em β e δ definido pelas duas últimas equações tem determinante $\bar{\beta} \bar{\gamma} - \bar{\alpha} \bar{\delta} = -1$, a regra de Cramer nos dá

$$\beta = - \begin{vmatrix} 1 & \bar{\delta} \\ 0 & \bar{\gamma} \end{vmatrix} = -\bar{\gamma} \quad e \quad \delta = - \begin{vmatrix} \bar{\beta} & 1 \\ \bar{\alpha} & 0 \end{vmatrix} = \bar{\alpha}$$

o que prova que $\mathbf{Q}$ é da forma 3.1.23 ■

Por enquanto, considere $\mathbf{Q}$ apenas unitária, num espaço bidimensional complexo. Todo operador hermitiano de traço nulo é da forma

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$$

onde $x, y, z \in \mathbb{R}$. Para toda matriz unitária $\mathbf{Q}$, o operador

$$\mathbf{P}' = \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^\dagger$$

também é hermitiano e tem traço nulo, pois $\mathbf{Q}^\dagger = \mathbf{Q}^{-1}$. Portanto, $\mathbf{P}'$ é da forma

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}$$

onde $x', y', z' \in \mathbb{R}$. Note que se $\mathbf{x} = (x, y, z)$, então

$$\mathbf{P}\mathbf{P}' = \|\mathbf{x}\|^2 \mathbf{I}$$

logo, a transformação linear $T_{\mathbf{Q}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T_{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$ é ortogonal, pois $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}'\|$, uma vez que

$$\|\mathbf{x}'\|^2 = \mathbf{P}'\mathbf{P}^\dagger = \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{P}^\dagger\mathbf{Q}^\dagger = \|\mathbf{x}\|^2\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\dagger = \|\mathbf{x}\|^2\mathbf{I}$$

Mostraremos abaixo que $T_{\mathbf{Q}}$ não é uma reflexão e tem determinante positivo. Obtemos, assim, uma aplicação

$$T : SU(2) \rightarrow SO(3)$$

que associa a cada $Q \in SU(2)$ o operador ortogonal $T_{\mathbf{Q}}$. Ademais, provaremos a sobrejetividade de T .

Com as relações $\beta = -\bar{\gamma}$ e $\delta = \bar{\alpha}$ temos que a matriz da adjunta de $\mathbf{Q}$ é dada por

$$\mathbf{Q}^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \quad (3.1.25)$$

Para simplificar a notação de $\mathbf{P}$, considere $x_+ = x + iy$ e $x_- = x - iy$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' &= \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z' & x'_- \\ x'_+ & -z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha\delta + \beta\gamma)z - \alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+ & -2\alpha\beta z + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+ \\ 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+ & -(\alpha\delta + \beta\gamma)z + \alpha\gamma x_- - \beta\delta x_+ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x'_+ &= 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+ \\ x'_- &= -2\alpha\beta z + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+ \\ z' &= (\alpha\delta + \beta\gamma)z - \alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+ \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Logo, pela notação introduzida no início do apêndice, a condição de ortogonalidade equivale a $x'_j x'_j = x_j x_j$. Da terceira equação de 3.1.26 resulta que

$$\begin{aligned} z' &= (\alpha\delta + \beta\gamma)z - \alpha\gamma(x - iy) + \beta\delta(x + iy) \\ z' &= \overbrace{(\alpha\delta + \beta\gamma)}^{a_{33}} z + \overbrace{(-\alpha\gamma + \beta\delta)}^{a_{31}} x + i \overbrace{(\alpha\gamma + \beta\delta)}^{a_{32}} y \end{aligned}$$

Da segunda equação de 3.1.26 temos que

$$\begin{aligned} x'_- &= -2\alpha\beta z + \alpha^2 x_- - \beta^2 x_+ \\ x' - iy' &= -2\alpha\beta z + \alpha^2(x - iy) - \beta^2(x + iy) \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Da primeira conclui-se que

$$x' + iy' = 2\gamma\delta z - \gamma^2(x - iy) + \delta^2(x + iy) \quad (3.1.28)$$

Somando 3.1.27 a 3.1.28 chegamos a

$$\begin{aligned} 2x' &= 2(\gamma\delta - \alpha\beta)z + (\alpha^2 - \gamma^2)(x - iy) + (\delta^2 - \beta^2)(x + iy) \\ x' &= \overbrace{(\gamma\delta - \alpha\beta)}^{a_{13}} z + \overbrace{\frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2)}^{a_{11}} x + \overbrace{\frac{i}{2}(\gamma^2 + \delta^2 - \beta^2 - \alpha^2)}^{a_{12}} y \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Subtraindo 3.1.27 de 3.1.28, chegamos a

$$\begin{aligned} 2iy' &= 2(\alpha\beta + \gamma\delta)z - (\alpha^2 + \gamma^2)(x - iy) + (\beta^2 + \delta^2)(x + iy) \\ 2iy' &= 2(\alpha\beta + \gamma\delta)z + (\beta^2 + \delta^2 - \alpha^2 - \gamma^2)x + i(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)y \\ y' &= \overbrace{-i(\alpha\beta + \gamma\delta)}^{a_{23}} z - \overbrace{\frac{i}{2}(\beta^2 + \delta^2 - \alpha^2 - \gamma^2)}^{a_{21}} x + \overbrace{\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)}^{a_{22}} y \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

Portanto, a matriz de passagem $A = (a_{ij})$ de (x, y, z) para (x', y', z') é da forma

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 + \delta^2 - \beta^2) & \frac{i}{2}(\gamma^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2) & \gamma\delta - \alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2) & -i(\alpha\beta + \gamma\delta) \\ \beta\delta - \alpha\gamma & i(\alpha\gamma + \beta\delta) & \alpha\delta + \beta\gamma \end{pmatrix} \quad (3.1.31)$$

Portanto, para cada matriz $\mathbf{Q} \in SU(2)$ existe uma matriz A que especifica a posição de um corpo rígido no $\mathbb{R}^3$, e que provaremos agora que está em $SO(3)$. As variáveis α , β , γ , e δ são chamados de *Parâmetros de Cayley-Klein*, que estão relacionados por 3.1.24 e 3.1.25. Como foi mostrado que $\beta = -\gamma^*$ e $\delta = \alpha^*$, então considerando $\begin{cases} \alpha = e_0 + ie_3 \\ \beta = e_2 + ie_3 \end{cases}$, podemos expressar $A = A(e_0, e_1, e_2, e_3)$, pois $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1 \Rightarrow e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 + \delta^2 - \beta^2) &= \frac{1}{2}[(e_0 + ie_3)^2 - (-e_2 + ie_1)^2 + (e_0 - ie_3)^2 - (e_2 + ie_1)^2] = \\ &= \frac{1}{2}(2e_0^2 - 2e_3^2 - 2e_2^2 + 2e_1^2) = e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}(\gamma^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2) &= \frac{i}{2}[(e_2 - ie_1)^2 - (e_0 + ie_3)^2 + (e_0 - ie_3)^2 - (e_2 + ie_1)^2] = \\ &= \frac{i}{2}(-4ie_1e_2 - 4ie_0e_3) = 2e_1e_2 + 2e_0e_3 \end{aligned}$$

.

E assim, ao fazer as mudanças para todas as entradas de $A = (a_{ij})$, temos

$$\begin{pmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & 2(e_1e_3 - e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 - e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 + e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 + e_0e_2) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{pmatrix} \quad (3.1.32)$$

Os valores e_0 , e_1 , e_2 e e_3 são chamados de *Parâmetros de Euler*. As condições de ortogonalidade já dizem que $\det A = 1$. Basta agora provar que A não pode ser uma inflexão. Suponha que A é uma inflexão. Então,

$$\begin{cases} e_1e_3 + e_0e_2 = 0 \\ e_1e_3 - e_0e_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} e_1e_3 = 0 \\ e_0e_2 = 0 \end{cases}$$

O que resulta nos seguintes resultados:

$$\begin{cases} e_1 = e_0 = 0 \Rightarrow e_2 = 0 \text{ ou } e_3 = 0; \\ e_1 = e_2 = 0 \Rightarrow e_0 = 0 \text{ ou } e_3 = 0; \\ e_0 = e_3 = 0 \Rightarrow e_1 = 0 \text{ ou } e_2 = 0; \\ e_2 = e_3 = 0 \Rightarrow e_0 = 0 \text{ ou } e_1 = 0; \end{cases}$$

Portanto, para que A seja uma inflexão da forma $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ é necessário que pelo menos três Parâmetros de Euler sejam nulos. Portanto, temos quatro possibilidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_0 = e_1 = e_2 = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -e_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -e_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3^2 \end{pmatrix}; \\ e_0 = e_1 = e_3 = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -e_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & e_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -e_2^2 \end{pmatrix}; \\ e_0 = e_2 = e_3 = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} e_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -e_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & -e_1^2 \end{pmatrix}; \\ e_1 = e_2 = e_3 = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} e_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & e_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & e_0^2 \end{pmatrix}; \end{array} \right.$$

Visto que numa reflexão teríamos, exatamente, apenas um valor negativo na diagonal, concluímos que A não é uma reflexão. Logo, $A \in SO(3)$.

Façamos agora o processo inverso. Daremos uma orientação de um corpo rígido no $\mathbb{R}^3$ definida pelos Ângulos de Euler e procuremos por uma matriz em $SU(2)$ que representa as três rotações que definem tais ângulos. Primeiramente, temos um giro de ϕ do sistema em torno do eixo z . Portanto, a fase de x_+ diminui de ϕ e a fase de x_- aumenta de ϕ . Se chamarmos de $\mathbf{Q}_\phi$ tal transformação com entradas α, β, γ e δ , como em 3.1.21, chegaremos a relações entre os parâmetros e os ângulos. *Per summa capita*, temos:

$$\begin{aligned} x'_+ &= e^{-i\phi}x_+ = 2\gamma\delta z - \gamma^2x_- + \delta^2x_+ \\ x'_- &= e^{i\phi}x_- = -2\alpha\beta z + \alpha^2x_- - \beta^2x_+ \\ z' &= z = (\alpha\delta + \beta\gamma)z - \alpha\gamma x_- + \beta\delta x_+ \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

De 3.1.33 concluímos facilmente que $\gamma = \beta = 0$, $\alpha^2 = e^{i\phi}$ e $\delta^2 = e^{-i\phi}$. Logo,

$$\mathbf{Q}_\phi = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\phi}{2}} \end{pmatrix} \quad (3.1.34)$$

representa tal giro. Agora, procuremos por uma matriz $\mathbf{Q}_\theta$ que represente uma rotação de θ em torno do eixo x . De forma análoga, fazemos

$$\begin{aligned} x' &= x = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 + \delta^2 - \beta^2)x + \frac{i}{2}(\gamma^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2)y + (\gamma\delta - \alpha\beta)z \\ y' &= \cos\theta y + \sin\theta z = \frac{i}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2)x + \frac{1}{2}\|(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\|^2 y - i(\alpha\beta + \gamma\delta)z \\ z' &= -\sin\theta y + \cos\theta z = (\beta\delta - \alpha\gamma)x + i(\alpha\gamma + \beta\delta)y + (\alpha\delta + \beta\gamma)z \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

donde tiramos as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 - \gamma^2 + \delta^2 - \beta^2 = 2 \\ \gamma^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 = 0 \\ \gamma\delta - \alpha\beta = 0 \\ \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2 = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 2 \cos\theta \\ \alpha\beta + \gamma\delta = i \sin\theta \\ \beta\delta - \alpha\gamma = 0 \\ \alpha\gamma + \beta\delta = i \sin\theta \\ \alpha\delta + \beta\gamma = \cos\theta \end{array} \right. \quad (3.1.36)$$

Somando-se a segunda e a quarta equações de 3.1.36, chegamos a $\gamma^2 = \beta^2 \Rightarrow \gamma = \beta$ ou $\gamma = -\beta$. Unindo este resultado à sétima equação de 3.1.36 ao quadrado, temos que $\delta = \alpha$ ou $\delta = -\alpha$. Com estes dois resultados, podemos olhar para a terceira equação de 3.1.36 e concluir que $\delta = \alpha \Leftrightarrow \gamma = \beta$. Agora, suponha que $\delta = \alpha$. Então, a oitava e a nona equações se resumem a

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\alpha\beta = i \sin\theta \\ \alpha^2 + \beta^2 = \cos\theta \end{array} \right. \quad (3.1.37)$$

Somar as duas equações de 3.1.37 resulta em $(\alpha + \beta)^2 = \cos\theta + i \sin\theta \Rightarrow \alpha + \beta = \cos\frac{\theta}{2} + i \sin\frac{\theta}{2}$. Mas, $\alpha = \delta = \bar{\alpha}$ e $\beta = \gamma = -\bar{\beta}$. Logo, α é real puro e β é imaginário puro. Com isso, $\alpha = \cos\frac{\theta}{2}$ e $\beta = i \sin\frac{\theta}{2}$. Se considerarmos que $\delta = -\alpha$, então chegaremos a uma contradição. Com efeito, a oitava e a nona equações se resumem a

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\alpha\beta = i \sin\theta \\ -\alpha^2 - \beta^2 = \cos\theta \end{array} \right. \quad (3.1.38)$$

Analogamente, vamos somar as equações de 3.1.38 para encontrar a relação $(i\alpha + i\beta)^2 = \cos\theta + i \sin\theta$. Logo, $\alpha + \beta = \sin\frac{\theta}{2} - i \cos\frac{\theta}{2}$. Mais uma vez, $\alpha = -\delta = -\bar{\alpha}$ e $\beta = -\gamma = \bar{\beta} \Rightarrow \alpha$ é imaginário puro e β é real puro. Portanto, $\alpha = -i \cos\frac{\theta}{2}$ e $\beta = \sin\frac{\theta}{2}$. Isto implica que $\alpha\beta + \gamma\delta = -2i \sin\theta$, o que não é verdade para todo valor de θ (compare com a sexta equação de

3.1.36). Finalmente, podemos expressar $\mathbf{Q}_\theta$ como

$$\mathbf{Q}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (3.1.39)$$

Para finalizar, temos uma rotação de ψ em torno do eixo z , que tem forma igual à de $\mathbf{Q}_\phi$:

$$\mathbf{Q}_\psi = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\psi}{2}} \end{pmatrix} \quad (3.1.40)$$

Logo, pela observação feita na página 17, temos que a matriz procurada é o produto das matrizes de 3.1.34, 3.1.39 e 3.1.40, obtendo

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_\psi \mathbf{Q}_\theta \mathbf{Q}_\phi = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\psi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\phi}{2}} \end{pmatrix} \\ \mathbf{Q} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{(\psi+\phi)}{2}} & i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{(\psi-\phi)}{2}} \\ i \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{(\psi-\phi)}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{(\psi+\phi)}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.41)$$

Com isso, os parâmetros de Cayley-Klein em termos dos ângulos de Euler são escritos

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{(\psi+\phi)}{2}} & \beta &= i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{(\psi-\phi)}{2}} \\ \gamma &= i \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{(\psi-\phi)}{2}} & \delta &= \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{(\psi+\phi)}{2}} \end{aligned}$$

E os parâmetros de Euler

$$\begin{aligned} e_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi+\phi}{2} & e_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi-\phi}{2} \\ e_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi-\phi}{2} & e_3 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi+\phi}{2} \end{aligned} \quad (3.1.42)$$

Considere σ_j , $j = 1, 2, 3$, as matrizes de Pauli. Então, a transformação hermitiana $\mathbf{P}$ é dada por $\mathbf{P} = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3$. Definindo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, podemos escrever

$$\mathbf{P} = \langle \mathbf{r}, \sigma \rangle$$

Usando a mesma idéia para $\mathbf{Q}$, encontramos

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{(\psi+\phi)}{2}} & i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{(\psi-\phi)}{2}} \\ i \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{(\psi-\phi)}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{(\psi+\phi)}{2}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \phi}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \left(\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \phi}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \phi}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \phi}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$\therefore \mathbf{Q} = e_0 \sigma_0 + i(e_1 \sigma_1 + e_2 \sigma_2 + e_3 \sigma_3) = e_0 \sigma_0 + i \langle \mathbf{e}, \sigma \rangle$, com $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$.

A relação acima deixa mais clara a relação entre os parâmetros de Euler e a matriz $\mathbf{Q} \in SU(2)$, pois dá a idéia de como a matriz é gerada a partir dos mesmos.

Note que $\mathbf{Q}_{\phi=2\pi} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{2\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1}$

Isto quer dizer que um giro de 2π em torno do eixo z está relacionado com $-\mathbf{1}$. Mas, uma rotação de 2π corresponde à identidade. Logo, $\mathbf{1}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ está associada, desta forma, a $\mathbf{1}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ e $-\mathbf{1}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$. Pela observação feita em ??, temos que uma matriz $Q_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ corresponder a uma matriz $A_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \Rightarrow -Q_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ também corresponder a $A_{3 \times 3}$. Portanto, concluímos que para termos um isomorfismo, teremos que identificar toda matriz de $SU(2)$ com o seu "simétrico" em $SU(2)$. Em outros termos, provamos que

$$SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$$

ou seja, que $SU(2)$ é topologicamente uma dupla cobertura de $SO(3)$.

3.2 O Fluxo do Hamiltoniano Truncado

Nesta secção vamos estudar algumas propriedades do fluxo correspondente ao hamiltoniano

$$H_0 = 2\mathcal{J} + \mathcal{K}_n(\mathcal{J}, M_1, M_2, M_3) \quad (3.2.1)$$

onde $\mathcal{K}_n$ é um polinômio homogêneo de grau n nas variáveis M_k . Seja $\mathbf{x}$ o unitário na direção de M

$$M = \mathcal{J}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x, y, z). \quad (3.2.2)$$

Considere $\mathcal{K}^{(n)}(\mathbf{x}) := \mathcal{J}^{-n} \mathcal{K}_n(\mathcal{J}, M)$ onde $\mathcal{K}^{(n)}(\mathbf{x}) := \mathcal{K}_n(\mathbf{1}, \mathbf{x})$. Isto é, $\mathcal{K}_n(\mathcal{J}, M_1, M_2, M_3) = \mathcal{K}_n(\mathcal{J}, \mathbf{1}, \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}} M_1, \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}} M_2, \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}} M_3) = \mathcal{J}^n \mathcal{K}_n(\mathbf{1}, \frac{M_1}{\mathcal{J}}, \frac{M_2}{\mathcal{J}}, \frac{M_3}{\mathcal{J}}) = \mathcal{J}^n \mathcal{K}^{(n)}(\mathbf{1}, \mathbf{x})$. $\mathcal{K}^{(n)}(x)$ é um polinômio de grau n , definido na esfera S^2 , e,

portanto, tem uma representação¹

$$\mathcal{K}^{(n)}(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^n \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\mathbf{x}) \quad (3.2.3)$$

onde $Y_{lm}(\mathbf{x})$ são os *Harmônicos Esféricos*

$$Y_{lm} \sim e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) \quad (3.2.4)$$

onde P_l^m são os *Polinômios de Legendre*

$$P_l^m(\xi) = \frac{(-1)^m (l+m)!}{2^l l! (l-m)!} (1-\xi^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{l-m}}{d\xi^{l-m}} (1-\xi^2)^l$$

Devido ao fato de $\mathcal{K}^{(n)}(\mathbf{x})$ e $\mathcal{J}$ serem integrais do Hamiltoniano H_0 , segue que este Hamiltoniano induz um fluxo em S^2 , cujas órbitas são curvas de nível de $\mathcal{K}^{(n)}(\mathbf{x})$. Mostraremos, mais adiante, que este fluxo em S^2 determina completamente o fluxo no espaço de fase original $\mathbb{R}^4$. Note que os pontos críticos do fluxo induzido por H_0 em S^2 são os pontos críticos de $\mathcal{K}^{(n)}$ em S^2 . O vetor unitário $\mathbf{e}$ é ponto crítico se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla_x \mathcal{K}^{(n)}|_{x=\mathbf{e}} = \lambda \mathbf{e} \quad (3.2.5)$$

Como uma transformação $U \in SO(3)$ mantém a 2-forma, então, sem perda de generalidade, podemos considerar que $-e_3 = (0, 0, -1)$ é um ponto crítico. Com isso, temos que $\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{K}^{(n)}|_{x=-e_3} = \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{K}^{(n)}|_{x=-e_3} = 0$. *Observamos também que a transformação ortogonal das variáveis que leva $\mathbf{e}$ em $-e_3$ pode ser escolhida de forma que $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathcal{K}^{(n)}|_{x=-e_3} = 0$.*

Vamos agora efetuar uma transformação $(N_k, \alpha_k)_{k=1,2} \mapsto (\mathcal{J}, \psi, M_3, \phi)$, com $(\mathcal{J}, M_3)$ definido como anteriormente mais $\psi := \alpha_2 + \alpha_1$ e $\phi := \alpha_2 - \alpha_1$, para seguir com a determinação do fluxo induzido por H_0 . Portanto, a 2-forma torna-se

$$\begin{aligned} \omega &= dN_1 \wedge d\alpha_1 + dN_2 \wedge d\alpha_2 = 2^{-1} d(\mathcal{J} - M_3) \wedge d(\psi - \phi) + 2^{-1} d(\mathcal{J} + M_3) \wedge d(\psi + \phi) = \\ &= 2^{-1} (d\mathcal{J} \wedge d\psi - d\mathcal{J} \wedge d\phi - dM_3 \wedge d\psi + dM_3 \wedge d\phi + d\mathcal{J} \wedge d\psi + d\mathcal{J} \wedge d\phi + dM_3 \wedge d\psi + \\ &\quad + dM_3 \wedge d\phi) = d\mathcal{J} \wedge d\psi + dM_3 \wedge d\phi. \end{aligned}$$

Além disso, $\overline{Z}_1 Z_2 = \sqrt{N_1 N_2} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} = \sqrt{N_1 N_2} e^{-i\phi}$. Pela definição de M_1 , temos que $M_1 = \text{Im}(\overline{Z}_1 Z_2) = \sqrt{N_1 N_2} \sin \phi$. Mas, $\mathcal{J}^2 = 4^{-1}(N_1^2 + 2N_1 N_2 +$

¹ ver Morse, Philip [3]

$+N_2^2$) e $M_3^2 = 4^{-1}(N_1^2 + 2N_1N_2 + N_2^2) \Rightarrow N_1N_2 = \mathcal{J}^2 - M_3^2$. Na sequência, $M_1 = \sqrt{\mathcal{J}^2 - M_3^2} \sin \phi$. Analogamente, concluímos que $M_2 = \sqrt{\mathcal{J}^2 - M_3^2} \cos \phi$. Em S^2 , temos que

$$x = \sqrt{1 - z^2} \sin \phi \quad , \quad y = \sqrt{1 - z^2} \cos \phi$$

e se introduzirmos $\theta \in \mathbb{R}$ de forma que $\cos \theta = z$, temos que $2\sqrt{\mathcal{J}}$, ϕ , θ e ψ servem de coordenadas polares no $\mathbb{R}^4$. Desta forma, S^3 pode ser visto como sendo um dupla cobertura do espaço $SO(3)$, onde ϕ , θ e ψ são os ângulos de Euler com seus valores restritos a $[0, 2\pi)$, $[0, \pi)$ e $[0, 4\pi)$, respectivamente. Pelo Apêndice B da secção 2.1, temos que a matriz

$$Z = 2^{-1}\sqrt{\mathcal{J}} \begin{pmatrix} y_2 + ix_2 & x_1 + iy_1 \\ -x_1 + iy_1 & y_2 - ix_2 \end{pmatrix} = (2\mathcal{J})^{1/2} \begin{pmatrix} i\bar{z}_2 & z_1 \\ -\bar{z}_1 & -iz_2 \end{pmatrix}$$

pode ser escrita em termos dos ângulos de Euler, ou seja

$$Z = \begin{pmatrix} e^{i(\phi+\psi)/2} \cos \frac{1}{2}\theta & ie^{i(\phi-\psi)/2} \sin \frac{1}{2}\theta \\ ie^{i(\psi-\phi)/2} \sin \frac{1}{2}\theta & e^{-i(\phi+\psi)/2} \cos \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}$$

Em outros termos, temos uma relação entre as coordenadas (x_1, y_1, x_2, y_2) e as novas coordenadas $(\mathcal{J}, \phi, \theta, \psi)$ com

$$\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{\mathcal{J}} \sin(\frac{1}{2}(\psi - \phi)) \sin \frac{1}{2}\theta \\ y_1 = 2\sqrt{\mathcal{J}} \cos(\frac{1}{2}(\psi - \phi)) \sin \frac{1}{2}\theta \\ x_2 = 2\sqrt{\mathcal{J}} \sin(\frac{1}{2}(\psi + \phi)) \cos \frac{1}{2}\theta \\ y_2 = 2\sqrt{\mathcal{J}} \cos(\frac{1}{2}(\psi + \phi)) \cos \frac{1}{2}\theta \end{cases} \quad (3.2.6)$$

E a 2-forma $\omega = d\mathcal{J} \wedge d\psi + dM_3 \wedge d\psi$, nos novos parâmetros, considerando que $M_3 = \mathcal{J} \cos \theta$, fica $\omega = d\mathcal{J} \wedge d\psi + d(\cos \theta d\mathcal{J} - \mathcal{J} \sin \theta d\theta) \wedge d\psi$. Verifiquemos quais são as *Equações de Hamilton* nestes termos, visto que $\omega(\chi_H, \cdot) = dH(\cdot)$. Com efeito,

$$\begin{cases} \omega = d\mathcal{J} \wedge d\psi + d(\cos \theta d\mathcal{J} - \mathcal{J} \sin \theta d\theta) \wedge d\psi \\ \chi_H = \dot{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}} + \dot{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ H = 2\mathcal{J} + \mathcal{J}^n \mathcal{K}^{(n)} \end{cases} \quad , \text{ com } \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}} \mathcal{K}^{(n)} = 0$$

Por um lado,

$$\omega(\chi_H, \cdot) = (d\mathcal{J} \wedge d\psi + d(\cos \theta d\mathcal{J} - \mathcal{J} \sin \theta d\theta) \wedge d\psi) \left(\dot{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}} + \dot{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \dot{\mathcal{J}} d\psi - \dot{\psi} d\mathcal{J} + \cos \theta \dot{\mathcal{J}} d\phi - \cos \theta \dot{\phi} d\mathcal{J} - \mathcal{J} \sin \theta \dot{\theta} d\phi + \mathcal{J} \sin \theta \dot{\phi} d\theta. \\
\therefore \omega(\chi_H, \cdot) &= (-\dot{\psi} - \cos \theta \dot{\phi}) d\mathcal{J} + \dot{\mathcal{J}} d\psi + \mathcal{J} \sin \theta \dot{\phi} d\theta + (\cos \theta \dot{\mathcal{J}} - \mathcal{J} \sin \theta \dot{\theta}) d\phi.
\end{aligned}$$

Enquanto que

$$dH = (2 + n\mathcal{J}^{n-1}\mathcal{K}^{(n)})d\mathcal{J} + \mathcal{J}^n \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \mathcal{K}^{(n)} d\psi + \frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{K}^{(n)} d\theta + \frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{K}^{(n)} d\phi \right).$$

Logo,

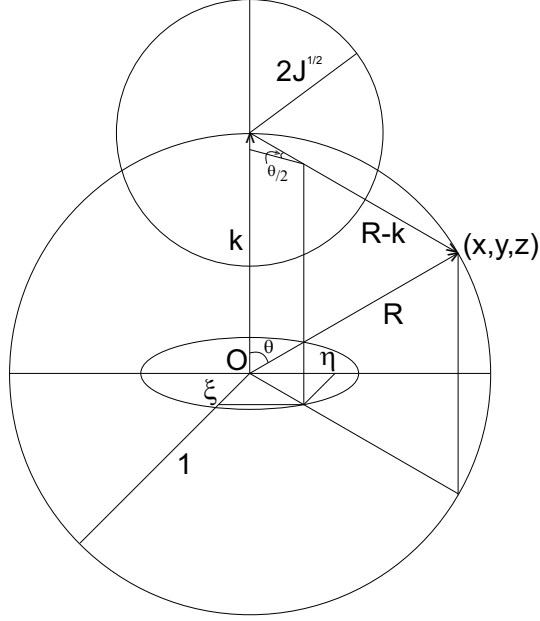
$$\begin{aligned}
-\dot{\psi} - \cos \theta \dot{\phi} &= 2 + n\mathcal{J}^{n-1}\mathcal{K}^{(n)} &\Rightarrow &\dot{\psi} = -2 - \mathcal{J}^{n-1}(n\mathcal{K}^{(n)} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{K}^{(n)}) \\
\dot{\mathcal{J}} = \mathcal{J}^n \frac{\partial}{\partial \psi} \mathcal{K}^{(n)} &= 0 &\Rightarrow &\dot{\mathcal{J}} = 0 \\
\mathcal{J} \sin \theta \dot{\phi} &= \mathcal{J}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{K}^{(n)} &\Rightarrow &\dot{\phi} = \frac{\mathcal{J}^{n-1}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{K}^{(n)} \\
\cos \theta \dot{\mathcal{J}} - \mathcal{J} \sin \theta \dot{\theta} &= \mathcal{J}^n \frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{K}^{(n)} &\Rightarrow &\dot{\theta} = -\frac{\mathcal{J}^{n-1}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{K}^{(n)}
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Vamos agora analisar 3.2.7 para descrever a relação entre o fluxo em $\mathbb{R}^4$ e o fluxo em S^2 . O $\mathbb{R}^4$ é decomposto em esferas concêntricas de raio $2\mathcal{J}^{1/2}$ que são invariantes pelo fluxo, e o fluxo em cada uma delas é completamente determinado pelas duas últimas equações de 3.2.7 (sabendo que temos ainda o escalar $\mathcal{J}^{n-1}$). Note que a primeira equação de 3.2.7 é determinada pelas outras duas (só depende de ϕ e θ). Vale ressaltar que esse sistema de coordenadas local não cobre os pólos ($x_1 = y_1 = 0$) e ($x_2 = y_2 = 0$). Existe uma família uniparamétrica de soluções periódicas com período $1 + \frac{1}{2}n\mathcal{J}^{n-1}\mathcal{K}^{(n)}(\mathbf{e})$ para cada ponto crítico (a menos dos pólos) que satisfazem $\mathcal{K}_\theta^{(n)}(\mathbf{e}) = \mathcal{K}_\phi^{(n)}(\mathbf{e}) = 0$ e cujo índice, o que determina sua natureza, é o determinante

$$\begin{vmatrix} \mathcal{K}_{\theta\theta}^{(n)} & \mathcal{K}_{\phi\theta}^{(n)} \\ \mathcal{K}_{\phi\theta}^{(n)} & \mathcal{K}_{\phi\phi}^{(n)} \end{vmatrix}$$

Se considerarmos que $\mathcal{K}^{(n)}$ é independente de ϕ , então $\mathcal{K}^{(n)}$ é combinação dos primeiros polinômios de legendre (ver 3.2.4). E então, pela quarta equação de 3.2.7, temos que θ é uma integral, isto é, as órbitas na esfera unitária são os paralelos, e movimento em $\mathbb{R}^4$ relacionado é quasi-periódico com frequências $1 + \frac{1}{2}\mathcal{J}^{n-1}[n\mathcal{K}^{(n)} + \cot \theta \mathcal{K}_\theta^{(n)}]$ e $(\mathcal{J}^{n-1}/\sin \theta)\mathcal{K}_\theta^{(n)}$ respectivamente. Os únicos pontos críticos em S^2 são os pólos. Eles representam duas famílias uniparamétricas de órbitas periódicas estáveis com período $1 + \frac{1}{2}\mathcal{J}^{n-1}n\mathcal{K}^{(n)}(\pm e_3)$. Verifica-se tal fato usando coordenadas que são regulares nos pólos. Antes de introduzirmos a perturbação $\mathcal{O}_{2n+1}$, vamos fazer tal mudança de coordenadas, para então podermos entrar no próximo capítulo com o teorema principal. Tais coordenadas são uma variação das projeções estereográficas. Primeiro, colocamos uma casca esférica centrada no polo

norte de raio $2\mathcal{J}^{1/2}$. Traçamos a reta que passa pelo polo norte da esfera unitária e pelo ponto $(x, y, z) \in S^2$. Depois, encontramos a intersecção de tal reta com a esfera centrada no polo e projetamos o ponto no plano xy . Projetamos em seguida o ponto no eixo x para definir a coordenada ξ , e projetamos o ponto no eixo y pra definir a coordenada η .



Sejam R o vetor posição (x, y, z) e $k = (0, 0, 1)$. Então, o ponto projetado no plano xy , como definido acima, é dado por

$$2\sqrt{\mathcal{J}} \frac{R - k}{\|R - k\|} - \langle 2\sqrt{\mathcal{J}} \frac{R - k}{\|R - k\|}, k \rangle k$$

Substituindo $R = (x, y, z)$ e $k = (0, 0, 1)$, vem

$$\begin{aligned} & \frac{2\sqrt{\mathcal{J}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}}(x, y, z-1) - (0, 0, \frac{2\sqrt{\mathcal{J}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}}(z-1)) = \\ & = (\frac{2\sqrt{\mathcal{J}}x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}}, \frac{2\sqrt{\mathcal{J}}y}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}}, 0) = \\ & = (\frac{2\sqrt{\mathcal{J}}x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1}}, \frac{2\sqrt{\mathcal{J}}y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1}}, 0) = \\ & = (\frac{2\sqrt{\mathcal{J}}x}{\sqrt{2-2z}}, \frac{2\sqrt{\mathcal{J}}y}{\sqrt{2-2z}}, 0) = (\frac{\sqrt{2\mathcal{J}}x}{\sqrt{1-z}}, \frac{\sqrt{2\mathcal{J}}y}{\sqrt{1-z}}, 0). \end{aligned}$$

Portanto, definimos $\xi := \frac{\sqrt{2\mathcal{J}}x}{\sqrt{1-z}}$ e $\eta := \frac{\sqrt{2\mathcal{J}}y}{\sqrt{1-z}}$. Como $x = \sqrt{1-z^2} \cos \phi$ e $y = \sqrt{1-z^2} \sin \phi$, podemos expressar

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\sqrt{2\mathcal{J}(1+z)(1-z)} \cos \phi}{\sqrt{1-z}} = \sqrt{2\mathcal{J}(1+z)} \cos \phi . \\ \eta &= \frac{\sqrt{2\mathcal{J}(1+z)(1-z)} \sin \phi}{\sqrt{1-z}} = \sqrt{2\mathcal{J}(1+z)} \sin \phi .\end{aligned}\tag{3.2.8}$$

Definimos o novo sistema de coordenadas como (L, α_1, ξ, η) , onde $L = 2\mathcal{J}$. Vejamos agora como ficará a 2-forma $\omega = d\mathcal{J} \wedge d\psi + (\cos \theta d\mathcal{J} - \mathcal{J} \sin \theta d\theta) \wedge d\phi$. Mas,

$$\begin{aligned}d\xi &= \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{2\mathcal{J}}} \sin \phi d\mathcal{J} + \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{2(1+\cos \theta)}} (-\sin \theta) \sin \phi d\theta + \\ &\quad + \sqrt{2\mathcal{J}(1+\cos \theta)} \cos \phi d\theta .\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}d\eta &= \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{2\mathcal{J}}} \cos \phi d\mathcal{J} + \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{2(1+\cos \theta)}} (-\sin \theta) \cos \phi d\theta - \\ &\quad - \sqrt{2\mathcal{J}(1+\cos \theta)} \sin \phi d\phi .\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}d\eta \wedge d\xi &= \frac{1}{2} (-\sin \theta) \sin \phi \cos \phi d\mathcal{J} \wedge d\theta + (1+\cos \theta) \cos^2 \phi d\mathcal{J} \wedge d\phi + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin \theta \sin \phi \cos \phi d\mathcal{J} \wedge d\theta + \mathcal{J} \sin \theta \cos^2 \phi d\phi \wedge d\theta + \\ &\quad + (1+\cos \theta) \sin^2 \phi d\mathcal{J} \wedge d\phi + \mathcal{J} \sin \theta \sin^2 \phi d\phi \wedge d\theta .\end{aligned}$$

E assim,

$$d\eta \wedge d\xi = (1+\cos \theta) d\mathcal{J} \wedge d\phi + \mathcal{J} \sin \theta d\phi \wedge d\theta$$

Mas,

$$\begin{aligned}\omega - d\eta \wedge d\xi &= \\ &= d\mathcal{J} \wedge d\psi + (\cos \theta d\mathcal{J} - \mathcal{J} \sin \theta d\theta) \wedge d\phi - (1+\cos \theta) d\mathcal{J} \wedge d\phi + \mathcal{J} \sin \theta d\theta \wedge d\phi = \\ &= d\mathcal{J} \wedge d\psi - \mathcal{J} \sin \theta d\theta \wedge d\phi - d\mathcal{J} \wedge d\phi + \mathcal{J} \sin \theta d\theta \wedge d\phi = \\ &= d\mathcal{J} \wedge d(\psi - \phi) = d\mathcal{J} \wedge d(2\alpha_1) = d(2\mathcal{J}) \wedge d\alpha_1 . \\ \therefore \quad \omega &= dL \wedge d\alpha_1 + d\eta \wedge d\xi\end{aligned}\tag{3.2.9}$$

Definimos o novo sistema de coordenadas, e achamos a 2-forma no mesmo. Resta agora achar a expressão do hamiltoniano 3.2.1 nas novas coordenadas e achar as equações de hamilton correspondentes. De 3.2.8, temos que

$$\begin{aligned}\xi^2 &= L(1+z) \sin^2 \phi \\ \eta^2 &= L(1+z) \cos^2 \phi\end{aligned}\tag{3.2.10}$$

Somando as equações de 3.2.10 chegamos a

$$\xi^2 + \eta^2 = L(1+z) \Rightarrow z = \frac{((\sqrt{\frac{2}{L}}\xi)^2 + (\sqrt{\frac{2}{L}}\eta)^2)}{2} - 1$$

Consideremos $\hat{\xi} = \sqrt{\frac{2}{L}}\xi$ e $\hat{\eta} = \sqrt{\frac{2}{L}}\eta$ para não carregar muito a notação. Então $z = \frac{(\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2)}{2} - 1$. Com isso, vamos substituir em $\xi^2 = \frac{Lx}{1-z}$ para obter

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\xi\right)^2 &= \frac{2x}{1 - \frac{(\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2)}{2} + 1} = \hat{\xi}^2 = \frac{4x}{4 - (\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2)} \\ \hat{\xi}^2 &= \frac{x}{1 - \frac{(\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2)}{4}} \Rightarrow x = \left(1 - \frac{(\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2)}{4}\right)^{1/2} \hat{\xi}\end{aligned}$$

E em $\eta^2 = \frac{Ly}{1-z}$ para analogamente chegar a

$$y = \left(1 - \frac{(\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2)}{4}\right)^{1/2} \hat{\eta}$$

Logo, podemos considerar que o hamiltoniano 3.2.1 é da forma

$$H_0 = L + \left(\frac{L}{2}\right)^n F(\hat{\xi}, \hat{\eta})$$

onde

$$F(\xi, \eta) = \mathcal{K}^{(n)}\left(\left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4}\right)^{1/2} \xi, \left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4}\right)^{1/2} \eta, \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - 1\right)$$

com $\hat{\xi} = \sqrt{\frac{2}{L}}\xi$ e $\hat{\eta} = \sqrt{\frac{2}{L}}\eta$. Suponha, como fizemos antes, que $\mathcal{K}^{(n)}$ não depende de ϕ . Logo, $\mathcal{K}^{(n)}$ é combinação linear dos primeiros $n+1$ polinômios de Legendre em função de $z = \cos \theta$. Portanto, podemos considerar $P(\rho) :=$

$K^{(n)}$, onde P é um polinômio de grau $\geq n + 1$ e $\rho = \frac{\xi^2 + \eta^2}{L}$. Resumindo, temos agora

$$\begin{cases} \omega = dL \wedge d\alpha_1 + d\eta \wedge d\xi \\ \chi_H = \dot{L} \frac{\partial}{\partial L} + \dot{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \dot{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \dot{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ H = L + \left(\frac{L}{2}\right)^n P(\rho) \end{cases}, \quad \rho = \frac{\xi^2 + \eta^2}{L} \quad (3.2.11)$$

Pela terceira equação de 3.2.11, achamos a 1-forma

$$dH = \left(1 + \frac{n}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^{n-1} P(\rho) - \frac{P'(\rho)\rho}{L}\right) dL + (\dots) d\alpha_1 + \left(\frac{L}{2}\right)^n (2P' \frac{\eta}{L}) d\eta + \left(\frac{L}{2}\right)^n (2P' \frac{\xi}{L}) d\xi$$

E as equações de Hamilton ficam

$$(dL \wedge d\alpha_1 + d\eta \wedge d\xi) \left(\dot{L} \frac{\partial}{\partial L} + \dot{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \dot{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \dot{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) = \dot{L} d\alpha_1 - \dot{\alpha}_1 dL + \dot{\eta} d\xi - \dot{\xi} d\eta = (-\dot{\alpha}_1) dL + (-\dot{\xi}) d\eta + \dot{\eta} d\xi.$$

$$\therefore \begin{cases} -\dot{\alpha}_1 = 1 + \frac{n}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^{n-1} P(\rho) - P' \frac{\rho}{L} \\ -\dot{\xi} = 2P' \frac{\eta}{L} \left(\frac{L}{2}\right)^n = \left(\frac{L}{2}\right)^{n-1} P' \eta \\ \dot{\eta} = 2P' \frac{\xi}{L} \left(\frac{L}{2}\right)^n = \left(\frac{L}{2}\right)^{n-1} P' \xi \end{cases}$$

Análogo ao que comentamos anteriormente, o movimento é quasi-periódico com períodos

$$\left(\frac{L}{2}\right)^{n-1} P' \quad e \quad 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^{n-1} (nP - \rho P') \quad (3.2.12)$$

Agora estamos em condições de reafirmar o que havíamos dito em relação ao polo norte, pois este sistema de coordenadas é regular em $(\xi, \eta) = (0, 0)$. Tal polo é um ponto crítico que representa uma solução periódica estável com frequência $1 + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^{n-1} nP(0)$. E para finalizar o capítulo, vamos estabelecer as equações que definem as coordenadas (x_1, y_1, x_2, y_2) do $\mathbb{R}^4$. Da figura anterior (que ilustra a projeção que define ξ e η) tiramos facilmente que $\sqrt{2L - (\xi^2 + \eta^2)} = 2\sqrt{\mathcal{J}} \sin \frac{\theta}{2}$. Com isso, as duas primeiras equações de 3.2.6 se tornam $x_1 = \sqrt{2L - (\xi^2 + \eta^2)} \sin \alpha_1$ e $y_1 = \sqrt{2L - (\xi^2 + \eta^2)} \cos \alpha_1$. A terceira equação de 3.2.6 se torna

$$\begin{aligned} x_2 &= 2\sqrt{\mathcal{J}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \left(\frac{\psi + \phi}{2} \right) = 2\sqrt{\mathcal{J}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\cos \frac{\psi}{2} \sin \left(\phi - \frac{\phi}{2} \right) + \sin \frac{\psi}{2} \cos \left(\phi - \frac{\phi}{2} \right) \right] = \\ &= 2\sqrt{\mathcal{J}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\cos \frac{\psi}{2} \left(\sin \phi \cos \frac{\phi}{2} - \cos \phi \sin \frac{\phi}{2} \right) + \sin \frac{\psi}{2} \left(\sin \phi \sin \frac{\phi}{2} + \cos \phi \cos \frac{\phi}{2} \right) \right] = \\ &= 2\sqrt{\mathcal{J}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\sin \phi \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\phi}{2} - \cos \phi \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\phi}{2} + \sin \phi \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\phi}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \cos \phi \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \right] = 2\sqrt{\mathcal{J}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\sin \phi \left(\cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\phi}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \cos \phi \left(\sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\phi}{2} - \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\phi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad x_2 &= \overbrace{2\sqrt{\mathcal{J}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \phi}^{\xi} \cos\left(\overbrace{\frac{\psi - \phi}{2}}^{\alpha_1}\right) + \overbrace{2\sqrt{\mathcal{J}} \cos \frac{\theta}{2} \cos \phi}^{\eta} \sin\left(\overbrace{\frac{\psi - \phi}{2}}^{\alpha_1}\right) \\ \therefore \quad x_2 &= \xi \cos \alpha_1 + \eta \sin \alpha_1 \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

De forma análoga à dedução de 3.2.13, acha-se que a quarta equação de 3.2.6 se torna

$$\therefore \quad y_2 = -\xi \sin \alpha_1 + \eta \cos \alpha_1 \quad (3.2.14)$$

Juntando, equivale a

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2L - (\xi^2 + \eta^2)} \sin \alpha_1 \\ y_1 = \sqrt{2L - (\xi^2 + \eta^2)} \cos \alpha_1 \\ x_2 = \xi \cos \alpha_1 + \eta \sin \alpha_1 \\ y_2 = -\xi \sin \alpha_1 + \eta \cos \alpha_1 \end{cases} \quad (3.2.15)$$

Capítulo 4

O Fluxo do Hamiltoniano Original

4.1 O teorema principal

Vamos nesta secção estudar o fluxo quando o termo de perturbação $\mathcal{O}_{2n+1}$ é adicionado a H_0 . Continuemos a considerar que $\mathbf{e} = -e_3$ é um ponto crítico do fluxo induzido por H_0 e que $A_{12} := \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathcal{K}^{(n)} = 0$. Sejam $x_1 := x$, $x_2 := y$ e $x_3 := z$. Considere

$$A_{ij} := \frac{\partial^2 \mathcal{K}^{(n)}}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=-e_3}$$

De (2.2.4) chegamos a $\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{K}^{(n)}|_{\mathbf{x}=-e_3} = -\lambda e_3 \quad \therefore \lambda = -\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{K}^{(n)}|_{\mathbf{x}=-e_3}$. Considere também

$$A = \lambda - A_{11}, \quad B = \lambda - A_{22}, \quad C = \lambda - A_{33} \quad e \quad D = \begin{vmatrix} A & 0 & -A_{13} \\ 0 & B & -A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & C \end{vmatrix}$$

ou seja, D é o polinômio característico do Hessiano de $\mathcal{K}^{(n)}$ avaliado em λ . Sobre a existência de famílias de órbitas periódicas em torno do ponto de equilíbrio, podemos estabelecer o seguinte teorema:

Teorema 4.1.1 *(i) Cada ponto crítico não-degenerado instável do fluxo que o Hamiltoniano não-perturbado induz em S^2 corresponde a uma família uniparamétrica de soluções periódicas instável das equações associadas ao hamiltoniano original (a energia representa tal família.)*

(ii) Se o ponto crítico é estável com

$$12(A^3A_{23}^2 + B^3A_{13}^2) + (AB)^2(A + B + C) - 3D(A + B)^2 \neq 0$$

então temos o mesmo resultado para órbitas periódicas estáveis.

Demonstração: Na secção anterior definimos e estudamos

$$H_0 = L + \left(\frac{L}{2}\right)^n F(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = L + \left(\frac{L}{2}\right)^n F\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\xi, \sqrt{\frac{2}{L}}\eta\right)$$

Portanto considere $H = H_0 + \mathcal{O}(L^{n+\frac{1}{2}})$, com $L^{n+\frac{1}{2}}$ sendo função de $L^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{2}{L}}\xi$, $\sqrt{\frac{2}{L}}\eta$ e α_1 , após a divisão por $L^{n+\frac{1}{2}}$. Fazendo $L = \varepsilon^2 \hat{L}$, $\xi = \varepsilon \hat{\xi}$ e $\eta = \varepsilon \hat{\eta}$, temos

$$\begin{aligned} H &= \varepsilon^2 \hat{L} + \left(\frac{\varepsilon^2 \hat{L}}{2}\right)^n F\left(\sqrt{\frac{2}{\varepsilon^2 \hat{L}}}\varepsilon \hat{\xi}, \sqrt{\frac{2}{\varepsilon^2 \hat{L}}}\varepsilon \hat{\eta}\right) + \mathcal{O}((\varepsilon^2 \hat{L})^{n+\frac{1}{2}}) \\ H &= \varepsilon^2 \underbrace{\frac{\hat{L}}{2} \left(2 + \left(\frac{\varepsilon \hat{L}}{2}\right)^{n-1} F\left(\sqrt{\frac{2}{\hat{L}}}\hat{\xi}, \sqrt{\frac{2}{\hat{L}}}\hat{\eta}\right) + \mathcal{O}((\varepsilon^2 \hat{L})^{n-\frac{1}{2}})\right)}_{\hat{H}(\hat{L}, \hat{\xi}, \hat{\eta}, \varepsilon)} \end{aligned}$$

Considere a superfície de nível $\hat{H} = 2$, i.e., $H = 2\varepsilon^2$. Temos que L torna-se função de ξ , η , α_1 e ε (pela equação do $\hat{H} = 2$), e é analítica em α_1 e $L = 2$ se $\varepsilon = 0$. Para estudar o fluxo sobre $\hat{H} = 2$, enunciaremos agora o

Lemma 4.1.1 *Sejam $H_1, H_2 : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ dois Hamiltonianos. Então, temos que $\{H_1 = \epsilon_1; \epsilon_1 \in \mathbb{R}\} = \{H_2 = \epsilon_2; \epsilon_2 \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ o fluxo induzido por H_1 em $\{H_1 = \epsilon_1\}$ coincide com o fluxo induzido por H_2 em $\{H_2 = \epsilon_2\}$, a menos de uma reparametrização s .*

Então, o fluxo induzido por $\hat{H}$ em $\{\hat{H} = 2\}$ é coincidente ao fluxo induzido por $\Lambda(\xi, \eta, \alpha_1, \varepsilon)$ em $\{L = 2\}$, onde Λ é dada por

$$\hat{H}(L = 2, \xi, \eta, \varepsilon) = L(0, 0, \alpha_1, 0) + \varepsilon^{2(n-1)}[F(\xi, \eta) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2n-1})]$$

$$L(0, 0, \alpha_1, 0) - \hat{H} = \varepsilon^{2(n-1)}[-F(\xi, \eta) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2n-1})]$$

e definimos

$$\Lambda(\xi, \eta, \alpha_1, \varepsilon) := \varepsilon^{2(n-1)}[-F(\xi, \eta) + \mathcal{O}(\varepsilon)] \quad (4.1.1)$$

Com a forma $d\xi \wedge d\eta$, definimos o fluxo sobre $\hat{H} = 2$ utilizando as equações de hamilton

$$\begin{cases} \dot{L} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha_1} = 0 \\ \dot{\alpha}_1 = -\frac{\partial \Lambda}{\partial L} = -1 \\ \dot{\eta} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi} \\ \dot{\xi} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} \end{cases}$$

Fazendo $\xi' = \frac{d\xi}{d\alpha_1} = \frac{d\xi}{dt} \frac{dt}{d\alpha_1} = -\dot{\xi}$ e $\eta' = \frac{d\eta}{d\alpha_1} = \frac{d\eta}{dt} \frac{dt}{d\alpha_1} = -\dot{\eta}$, temos que o sistema acima é equivalente a

$$\begin{cases} \xi' = -\varepsilon^{2(n-1)} \frac{\partial F}{\partial \eta} \\ \eta' = \varepsilon^{2(n-1)} \frac{\partial F}{\partial \xi} \end{cases}$$

Integrando de $\alpha_1 = 0$ até $\alpha_1 = 2\pi$, temos que

$$M : \begin{cases} \xi = \xi_0 + 2\pi \varepsilon^{2(n-1)} f(\xi, \eta, \varepsilon) \\ \eta = \eta_0 + 2\pi \varepsilon^{2(n-1)} g(\xi, \eta, \varepsilon) \end{cases}$$

com $f(\xi, \eta, 0) = F_\eta(\xi, \eta)$ e $g(\xi, \eta, 0) = -F_\xi(\xi, \eta)$. Vamos expandir $\mathcal{K}^{(n)}(x, y, z)$ em séries de Taylor para achar uma expansão para $-F(\xi, \eta)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(n)}(x, y, z) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{K}^{(n)}\right)x + \left(\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{K}^{(n)}\right)y + \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{K}^{(n)}\right)z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{K}^{(n)}\right)x^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathcal{K}^{(n)}\right)y^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{K}^{(n)}\right)z^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathcal{K}^{(n)}\right)xy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \mathcal{K}^{(n)}\right)xz + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \mathcal{K}^{(n)}\right)yz + \dots \quad (\text{Aqui estamos considerando as derivadas avaliadas} \\ &\text{no ponto de equilíbrio. Omitimos para não carregar as notações}) \end{aligned}$$

Como $F(\xi, \eta) = \mathcal{K}^{(n)}\left(\sqrt{1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4}}\xi, \sqrt{1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4}}\eta, -1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right)$, temos que

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) &= -\mathcal{K}_z^{(n)} + \frac{1}{2}\mathcal{K}_z^{(n)}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{2}\mathcal{K}_{xx}^{(n)}\left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4}\right)\xi^2 + \frac{1}{2}\mathcal{K}_{yy}^{(n)}\left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4}\right)\eta^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\mathcal{K}_{zz}^{(n)}\left(-1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\mathcal{K}_{xz}^{(n)}\sqrt{1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4}}\left(-1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right)\xi + \\ &+ \frac{1}{2}\mathcal{K}_{yz}^{(n)}\sqrt{1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4}}\left(-1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right)\eta + \dots \end{aligned}$$

Mas, $\sqrt{1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4}} = 1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{8} - \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2}{32} + \mathcal{O}_6$. Logo, substituindo na equação de $F(\xi, \eta)$ e simplificando, vem

$$\begin{aligned} -F(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}[(\lambda - A_{11})\xi^2 + (\lambda - A_{22})\eta^2] + \frac{1}{8}(A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2) - \\ &\quad - \frac{A_{33}}{8}(\xi^2 + \eta^2)^2 - \frac{1}{2}[A_{13}\xi + A_{23}\eta](\xi^2 + \eta^2) + \mathcal{O}_5 \end{aligned}$$

Com $\lambda = \mathcal{K}_z^{(n)}|_{-e_3}$ e

$$\begin{aligned} f_\xi(0, 0, 0) &= g_\eta(0, 0, 0) = 0 \\ f_\eta(0, 0, 0) &= F_{\eta\eta}(0, 0) = \lambda - A_{22} = B \\ g_\xi(0, 0, 0) &= -F_{\xi\xi}(0, 0) = -(\lambda - A_{11}) = -A \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Note agora que $f(0, 0, 0) = 0$ e $g(0, 0, 0) = 0$ e que a matriz $\Omega = \begin{pmatrix} f_\xi & f_\eta \\ g_\xi & g_\eta \end{pmatrix}$ tem determinante $\det \Omega = AB$. Mas, AB é exatamente o polinômio característico da matriz Hessiana de $\mathcal{K}^{(n)}$. Como se trata de um ponto crítico não-degenerado, temos que $\det \Omega \neq 0$. Logo, pelo teorema da função implícita, existem duas funções reais analíticas $\xi_0(\varepsilon)$ e $\eta_0(\varepsilon)$ tais que $f(\varepsilon\xi_0(\varepsilon), \varepsilon\eta_0(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ e $g(\varepsilon\xi_0(\varepsilon), \varepsilon\eta_0(\varepsilon), \varepsilon) = 0$. Segue diretamente que $(\varepsilon\xi_0(\varepsilon), \varepsilon\eta_0(\varepsilon))$ é um ponto fixo da aplicação M . Portanto, mostramos que para cada ponto crítico do hamiltoniano truncado correspondente existe uma família de órbitas periódicas do hamiltoniano original. Fazendo-se a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} \hat{\xi} = \xi - \varepsilon\xi_0 \\ \hat{\eta} = \eta - \varepsilon\eta_0 \end{cases}$$

Temos que 4.1.1 é levado em

$$\Lambda(\hat{\xi}, \hat{\eta}, \alpha_1, \varepsilon) = \Lambda(\xi + \varepsilon\xi_0, \eta + \varepsilon\eta_0, \alpha_1, \varepsilon) + \varepsilon(\eta'_0\xi - \xi'_0\eta) = \varepsilon^{2(n-1)}[-F(\hat{\xi}, \hat{\eta}) + \mathcal{O}(\varepsilon)]$$

Podemos desconsiderar os sinais $\wedge$ agora. Com isso, para identificar as soluções periódicas em qualquer superfície $H = 2\varepsilon^2$, basta fazer $\xi = \eta = 0$. Logo, a expansão de Λ começa pela parte quadrática que depende de α_1 e de ε . A parte quadrática de Λ é definida ou indefinida, dependendo se $p_{Hess\mathcal{K}^{(n)}}(\lambda) = (\lambda - A_{11})(\lambda - A_{22}) > 0$ ou $p_{Hess\mathcal{K}^{(n)}}(\lambda) < 0$, respectivamente. Como Λ é periódica em α_1 , então o resultado anterior vale para todo α_1 e $|\varepsilon|$ pequeno. Se $p_{Hess\mathcal{K}^{(n)}}(\lambda) < 0$, então afirmamos que o mapa $M : \begin{cases} \xi = \xi_0 + 2\pi\varepsilon^{2(n-1)}f(\xi, \eta, \varepsilon) \\ \eta = \eta_0 + 2\pi\varepsilon^{2(n-1)}g(\xi, \eta, \varepsilon) \end{cases}$ e a família de órbitas periódicas são instáveis.

Agora seguiremos pelo caminho mais árduo. Considere que $p_{Hess\mathcal{K}^{(n)}}(\lambda) > 0$ e uma mudança de coordenadas normais ($\xi = r \cos \gamma, \eta = r \sin \gamma$), tal que 4.1.1, para ε pequeno, tenha expansão

$$\Lambda(r, \gamma, \alpha_1, \varepsilon) = \frac{1}{2}[\nu(\alpha_1, \varepsilon)r^2 - \frac{1}{2}\kappa(\alpha_1, \varepsilon)r^4 + \mathcal{O}_5]$$

com $\mathcal{O}_5$ analítica em $(r = 0, \alpha_1, \gamma, \varepsilon = 0)$. Depois desta mudança de coordenadas, temos a 2-forma transformada $rdr \wedge d\gamma = d\xi \wedge d\eta$. E as equações de Hamilton ficam

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon^{2(n-1)}\mathcal{O}_4 \\ \dot{\gamma} = \varepsilon^{2(n-1)}(\nu - \kappa r^2) + \mathcal{O}_3 \end{cases}$$

Integrando em α_1 ,

$$\begin{cases} r = r_0 + \varepsilon^{2(n-1)}\mathcal{O}_4 \\ \gamma = \gamma_0 + \varepsilon^{2(n-1)}(\nu^* - \kappa^* r^2) + \mathcal{O}_3 \end{cases}$$

para o qual ν^* e κ^* foram obtidas por integração em α_1 e, portanto, não dependem mais de α_1 , nem $\mathcal{O}_3$ temos que a aplicação M fica expressa como uma perturbação de uma aplicação twist que preserva a forma simplética. Tirando

as perturbações, teremos uma aplicação twist $M_0 : \begin{cases} r = r_0 \\ \gamma = \gamma_0 + \varepsilon^{2(n-1)}(\nu^* - \kappa^* r^2) \end{cases}$

que é não-degenerada se $\kappa^*(\varepsilon) \neq 0$. Com cálculo bastante extenso¹, consegue-se concluir que

$$\nu(\alpha_1, 0) = \nu^*(0) = \sqrt{\Delta(\lambda)}$$

$$\kappa^*(0) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[12(A^3 A_{23}^2 + B^3 A_{13}^2) + (AB)^2(A + B + C) - 3D(A + B)^2 \right]$$

com $\Delta(\lambda) := P_{Hess\mathcal{K}^{(n)}}(\lambda)$

Por hipótese (do teorema), temos que $\nu^*(0) \neq 0$ e $\kappa^*(0) \neq 0$. Logo, o twist M_0 é não-degenerado para $|\varepsilon|$ pequeno. Para provar a estabilidade da solução periódica, utilizaremos, primeiramente, um resultado interessante de análise na reta.

Proposição 4.1.1 ² *O subconjunto dos reais dado por $B = \{\alpha \in \mathbb{R} ; \text{ existem dois números positivos, } \varepsilon(\alpha) \text{ e } \mu(\alpha), \text{ tal que para todo natural } n \text{ e todo inteiro } m \text{ tem-se } |n\alpha - m| > \varepsilon^{-\mu}\}$ é denso em } \mathbb{R}. Um número de B é chamado de fortemente irracional.*

¹ver Kummer, M. [2]

²ver Siegel, Moser [7]

Portanto, pela proposição, para cada número $\delta > 0$ escolha ω_δ fortemente irracional no intervalo

$$(\varepsilon_0^{2(n-1)} [\nu^*(\varepsilon_0) - \delta^2 |\kappa^*(\varepsilon_0)|] , \varepsilon_0^{2(n-1)} \nu^*(\varepsilon_0))$$

tal que $|\omega q - p| \geq \frac{c_0}{q^\mu}$ (com $p, q = 1, 2, \dots$) para algum $c_0 > 0$ e algum $\mu \geq 2$.

Existe um intervalo aberto I_δ que contém ε_0 que não contém $\varepsilon = 0$ tal que para todo $\varepsilon \in I_\delta$ tem-se que ω_δ também está no intervalo $(\varepsilon^{2(n-1)} [\nu^*(\varepsilon) - \delta^2 |\kappa^*(\varepsilon)|] , \varepsilon^{2(n-1)} \nu^*(\varepsilon))$.

Pelo *Teorema do Twist (de Moser)*³ para cada $\varepsilon \in I$ existe uma curva analítica $r = r_\delta(\gamma, \varepsilon)$ que é ponto fixo da aplicação twist perturbada M pela passagem de $\gamma \mapsto \gamma + \omega_\delta$. Como a curva é obtida a partir de uma deformação contínua de do círculo de raio $[\nu^*(\varepsilon) - \omega_\delta / \varepsilon^{2(n-1)}]^{1/2} |\kappa^*(\varepsilon)|^{-1/2} \in (0, \delta)$, tem-se que $r_\delta(\gamma, \varepsilon) < 2\delta$ para todo $\varepsilon \in I_\delta$ e δ pequeno.

Seja U uma vizinhança aberta do ponto $(r = 0, \varepsilon = \varepsilon_0)$. Então, podemos escolher um $\delta > 0$ muito pequeno tal que a vizinhança de $(r = 0, \varepsilon = \varepsilon_0)$ dada por $\{(r, \gamma, \varepsilon) ; r < r_\delta(\gamma, \varepsilon)\}$ esteja contida em U e seja invariante por M . Logo, temos que a aplicação M é estável. Portanto, a família de órbitas periódicas é estável. ■

³ver Siegel , Moser [7]

Referências Bibliográficas

- [1] Goldstein, Herbert *Classical Mechanics* , Columbia, 1922.
- [2] Kummer, Martin *On Resonant Non Linearly Coupled Oscillators with Two Equal Frequencies* , Commun. Math. Phys. 48, 53-79 (1976).
- [3] Morse, Philip and Feshbach, Herman *Methods of Theoretical Physics - International Student Edition* , McGraw-Hill Book Company Inc., 1953.
- [4] Meyer, Kenneth R. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-body Problem* , Springer-Verlag, 1937.
- [5] Braum, M. *On the Applicability of the third integral of motion* , J. Diff. Eq.13, 300-318,1973.
- [6] Dos Santos, F. *Formas Normais e Estabilidade de Equilíbrios para Sistemas Hamiltonianos*,
http://www.dmat.ufpe.br/posgraduacao/teses/teses_mestrado.htm , 2004.
- [7] Siegel, C.L. ; Moser, J.K. *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, 1991.
- [8] Oliveira, G. *Existência de soluções periódicas com período diferenciável no problema dos $N+1$ vórtices na esfera com um vórtice no pólo norte*,
http://www.dmat.ufpe.br/posgraduacao/teses/teses_mestrado.htm , 2006.
- [9] Abraham, Ralph. *Foundations of Mechanics - Second Edition*, Addison-Wesley Publishing Company, 1978.