

TESE DE MESTRADO



Departamento de Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Cobertura e empacotamento
por circuitos através de um
elemento em matróides
por João Paulo Costalonga

sob orientação do prof. Dr.

Manoel José Machado Soares Lemos

RECIFE - BRASIL

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática
Universidade Federal de Pernambuco

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Cobertura e empacotamento
por circuitos através de um
elemento em matróides**

João Paulo Costalonga

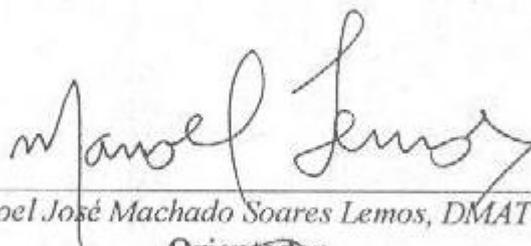
Sob orientação do Prof. Dr.

Manoel José Machado Soares Lemos

Recife, 2007.

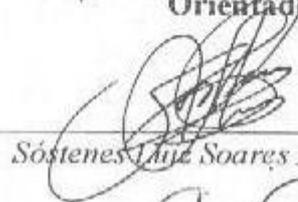
Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado:



Manoel José Machado Soares Lemos, DMAT-UFPE

Orientador



Sóstenes Luiz Soares Lins DMAT-UFPE



Silvio de Barros Melo, CIN-UFPE

**EMPACOTAMENTO E COBERTURA POR CIRCUITOS
ATRAVÉS DE UM ELEMENTO EM MATRÓIDES**

Por

João Paulo Costalonga

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro - 2007

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática
Universidade Federal de Pernambuco

Cobertura e empacotamento
por circuitos através de um
elemento em matróides

João Paulo Costalonga

Sob orientação do Prof. Dr.

Manoel José Machado Soares Lemos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Recife, 2007.

Costalonga, João Paulo.

Cobertura e empacotamento por circuitos através de um elemento em matróides / João Paulo Costalonga. – Recife: O autor, 2007.

75 folhas.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2007.

Inclui bibliografia.

1. Matróides. 2. Conectividade. 3. Cobertura. 4. Empacotamento. I. Título.

511.6

CDD (22.ed.)

MEI2007-030

*A Vontade e o Desejo duelavam
Para manter o ser
No caminho do sonho
Mas próximo à alma*

*O brilho do sol refete
na majestade entre as armas
As lâminas dançam
e lambem as feridas
Sobre essas sopra o vento
e cai a chuva
O beijo suave da neve
congela o sangue fluente.*

*O resurgir do sol refaz os campos em verde
Enquanto os guerreiros continuam a dança
A cada nova cicatriz, um novo talho.*

*Enquanto a luta for justa,
o caminho será o do meio.
Os guerreiros estarão saciados de luz
e livres de ferrugem e tédio
Dando o melhor de si
Lutando sem lutar
Se entregando ternamente
em nunca se entregar.*

O Autor.

Agradecimentos

Ao meu pai, Agemiro, minha mãe, Carmem e às minhas irmãs, Hermínia, Márcia, Marleci e Neide.

Aos amigos de antes da graduação dentre os quais destaco, Breno Fajardo, Bruno Fajardo, Darcy Alcântra, Evângelo Franco (Fei), Felipe Gaze e Wolmir Alcântra.

Aos amigos que conheci na graduação, dentre os quais: Alan César (Tchê), Andréia Ségua, Antré Pizzaia (Pacato), Átila Pianca (Huguinho), Daniel Caxias, Diogo Guimarães, Daniella Deppizol, Estevão Cellin (Chitão), Fabrício Veloso (Azeite), Fábio Lima (Toddy), Fábio Simas, Fernanda Buback (Fernandão), Gabriel (Serguei), Gabriel Lavagnoli, Igor Messina (Nerdcore), Jessana Martins, Leonardo Secchin, Márcia Helena (Marcinha), Matheus Brioschi, Robson da Silva (Barba), Rodrigo Emmanuel e Valmor Machado.

Aos amigos que conheci na pós-graduação, dentre os quais: Abbas Nejad, Adriano Régis, Ademakson Araújo, Alysson Oliveira (Vovô), Anete Soares, André Vinícius (Bebê), Antônio (Macarrão), César, Cláudio Cristino, Débrora Lopes (Even), Eder Mateus, Eudes Naziazeno (Eudes-Sama, pronuncia-se Óides-Sama), Evaneide Carneiro, Fabio dos Santos (Sidão), Giovana Siracusa, Hélio Porto (Lito), Hugo Leonardo, Humberto Viglioni (Mão no Bolso), Lucas Lapa (Estranho), Joilson (Donzelão), Karla Ferreira, Marcelo Fernandes, Marcelo (Maiden), Murilo Sampaio, Raphael Falcão, Ricardo de Oliveira, Ricardo Machado, Rodrigo Gondin, Thadeu, Tiago (Pirraio), Ton Severo, Wallisson Rosa, Wilberclay e Zaqueu Ramos.

Aos amigos que deveriam estar listados nos parágrafos anteriores e foram esquecidos, a estes peço desculpas e peço desculpas também aos amigos listados pelos possíveis erros nas grafias de seus nomes.

Ao Professor Severino e aos amigos de kung fu de longa data, Bozo, Eduardo, Ítalo, Johnnison, Leandro, Orleans, Popó, Renan e Willians. E aí? Vai chorar?.

Aos professores da graduação Ana Cláudia Locateli, Leonardo Câmara, José Gilvan e Moacir Rosado.

Aos professores da pós-graduação Aron Simis, Cláudio Cuevas, Pablo Brás e Silva e Sóstenes Lins.

Ao professor, orientador, e co-autor de resultados do presente trabalho, o qual em muito me ajudou, Manoel Lemos.

Aos desenvolvedores de softwares livres, em especial, Latex, Linux, KDE e Kile, sem os quais o trabalho de digitação seria muito mais enfadonho.

A Lao Tsé, Buda e Jesus Cristo, por terem dito coisas muito legais.

Ao Seu Madruga por me ensinar que as pessoas boas devem amar seus inimigos e que a vingança nunca é plena, mata a alma e a envenena. Ao Santos Dumont, porque ficar indo de ônibus de Pernambuco para o Espírito Santo direto já ser Ph***, aos Mamonas Assassinas por terem começado essa onda de agradecimentos prolixos e engraçadinhos e ao Kenny McCormick, por ter ressuscitado mais vezes que o próprio Jesus Cristo.

Resumo

Seja M uma matróide conexa e e um elemento de M tal que M/e seja conexa. Seja $\mathcal{C}_e M$ o conjunto dos elementos de M que contém e , $\nu_e M$ o tamanho de uma maior subfamília \mathcal{C}_e na qual cada dois membros se encontram somente em e e $\theta_e M$ o tamanho de uma maior subfamília de $\mathcal{C}_e M$ que cobre M . Lemos e Oxley demonstraram que $\nu_e M + \theta_e M \leq r^* M + 2$, e, em particular, $\nu_e M + \theta_e M \leq r^* M + 1$ se M não possui um menor F_7 usando e . O objetivo deste trabalho é apresentar a prova para tal teorema, bem como a teoria necessária para seu entendimento e algumas de suas consequências. Em particular, o trabalho inclui alguns resultados importantes em conectividade em matróides (especialmente em 3-connectividade), e, como consequência do teorema principal, um teorema de Seymour, o qual diz que, em uma matróide conexa M , a soma do tamanho de uma maior família de circuitos disjuntos com o tamanho de uma menor família cobrindo M é, no máximo, $r^* M + 1$.

Palavras-Chave: Matróides, Conectividade, Cobertura, Empacotamento.

Abstract

Let M be a connected matroid and e be an element of M such that M/e is connected. Let $\mathcal{C}_e M$ be the set of circuits of M containing the element e , $\nu_e M$ be the maximum size of a subfamily of \mathcal{C}_e in which each two members meet only in e and $\theta_e M$ be the minimum size of a subfamily of $\mathcal{C}_e M$ that covers M . Lemos and Oxley proved that $\nu_e M + \theta_e M \leq r^* M + 2$, and, in particular, $\nu_e M + \theta_e M \leq r^* M + 1$ if M has no F_7 -minor using e . The aim of this work is present the proof for such theorem, the required theory for its understanding and a few of its consequences. In particular, the work includes several important results in matroid connectivity (specially in 3-connectivity) and, as a corollary of the main theorem, a theorem of Seymour, which says that, in a connected matroid M , the sum of the maximum number of disjoint circuits and the minimum number of circuits needed to cover a connected matroid M is, at most, $r^* M + 1$.

keywords: Matroids, Connectivity, Covering, Packing.

Introdução

“Se não conseguirmos resolver um problema matemático, o motivo frequentemente consiste em não vermos o aspecto mais global, do qual o nosso problema é apenas um elo numa cadeia de problemas correlatos. Uma vez, encontrado esse aspecto, o problema, não somente, torna-se mais acessível às nossas investigações, mas, também, ganhamos um método aplicável a outros problemas que se relacionam com o original.”

David Hilbert

O texto acima é um trecho do lendário discurso de Hilbert no Segundo Congresso Internacional de Matemática, em Paris no ano de 1900. Diferentemente da maioria das teorias em matemática, as matróides não nasceram, em essência, na tentativa de solucionar um problema, mas na filosofia das palavras supracitadas. Aproximadamente 35 anos após o discurso de Hilbert, Hassler Whitney, num trabalho intitulado “On the abstract properties of linear dependence”, introduziu o termo “matróide”. O trabalho de Whitney relaciona os conceitos de dependência em espaços vetoriais e grafos. Em 1937, na segunda edição do clássico “Moderne Algebra”, de van Der Waerden, estão relacionados os conceitos de dependência linear a e algébrica.

Em analogia ao conceito de conectividade para grafos, nasceu a idéia de conectividade para matróides. Seymour, em [Seymour, 1980], provou uma conjectura de Welsh, uma inequação que relaciona, em uma matróide conexa, o tamanho da maior família de circuitos disjuntos, o tamanho da menor família de circuitos que cobre a matróide e o seu coposto. Em [Lemos, Oxley, 2006], Manoel Lemos e James Oxley apresentaram uma versão para esse teorema que em vez de famílias de circuitos quaisquer, trabalha com famílias de circuito com um elemento em comum. Este último teorema é o objetivo central do presente trabalho.

No primeiro capítulo, juntamente com a primeira seção do segundo capítulo, estão os pré-requisitos para o teorema principal que geralmente constam no conteúdo de cursos introdutórios sobre matróides. Essa parte do trabalho tem o objetivo de ser um resumo para tal conteúdo, no intuito de dispensar possíveis consultas a textos introdutórios, para lembrar detalhes aqui e acolá durante a leitura do trabalho. A fim de evitar delongas, as demonstrações estão omitidas nessa parte do texto.

No capítulo 2, está apresentada o básico da teoria que se refere a matróides de mais alta conectividade e aos processos de construção de matróides por ligações em série, paralelo e 2-somas, com ponto culminante no teorema que relaciona 2-separações de matróides conexas e 2-somas e no teorema de decomposição Cunningham e Edmonds, o qual apresenta uma caracterização das matróides conexas.

No capítulo 3, temos resultados mais direcionados à demonstração do teorema principal, onde nos deparamos com alguns resultados consagrados da teoria de conectividade em matróides, como o Lema do Triângulo de Tutte e uma caracterização das matróides de Sylvester.

No último capítulo temos a demonstração do teorema principal, um tanto longa e minuciosa, mas que faz uso de técnicas interessantes, o que se é de esperar, já que os valores envolvidos na inequação atestada pelo teorema se comportam de forma pouco previsível quanto a deleções e contrações. Na segunda seção desse capítulo temos algumas consequências do teorema principal, dentre as quais, se destaca o supracitado teorema de Seymour, que ganha, com isso uma nova demonstração.

A grande maioria das demonstrações seguem [Lemos, Oxley, 2006] e [Oxley, 1992], algumas apresentam adaptações à linguagem e ao corpo do trabalho, pequenas correções e esclarecimentos, umas poucas simplificações, e possivelmente, alguns erros.

Boa Leitura!

Sumário

1	Teoria Básica	11
1.1	Primeiras definições e notações	11
1.2	Exemplos mais relevantes	12
1.3	Bases, circuitos e novas axiomatizações	14
1.4	Restrição e Posto	16
1.5	Fecho e Geradores	17
1.6	Dualidade	18
1.7	Menores	18
1.8	Simplicidade e elementos em série e paralelo	20
2	Conectividade	21
2.1	Conectividade e Soma	21
2.2	k-conectividade	22
2.3	2-somas e Ligações em Série e Paralelo	26
2.4	2-somas e 3-conectividade	32
3	Preliminares do Resultado Principal	39
3.1	Alguns resultados em 3-conectividade	39
3.2	Matróides de Sylvester	46
3.3	Spikes	48
4	Empacotamento e cobertura por circuitos	53
4.1	Demonstração do teorema principal	53
4.2	Consequências do Teorema Principal	73

Capítulo 1

Teoria Básica

1.1 Primeiras definições e notações

Usaremos a notação $|X|$ para indicar a cardinalidade de um conjunto X e o sinal de subtração, “ $-$ ”, para denotar a operação diferença de conjuntos e um conjunto da forma $\{e\}$ será denotado simplesmente por e a menos que haja risco de confusão, o conjunto potência de X será denotado por 2^X . Quando a interseção de dois conjuntos X e Y é vazia dizemos que eles se evitam, caso contrário dizemos que eles se encontram, analogamente, se $x \in X$ dizemos que x e X se encontram, ou que X passa por x , caso contrário dizemos que eles se evitam.

Definição 1.1.1 *Uma matróide M é um par (E, \mathcal{I}) , onde E é um conjunto finito e $\mathcal{I} \subseteq 2^E$, que satisfaz os seguintes axiomas:*

I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

I2) Se $X \subseteq Y$ e $Y \in \mathcal{I}$, então $X \in \mathcal{I}$

I3) Se $X, Y \in \mathcal{I}$ e $|X| < |Y|$ então existe $e \in Y - X$ tal que $X \cup e \in \mathcal{I}$

Poderíamos relaxar a condição da finitude do conjunto E e trabalhar com uma família de independentes finitos, mas isso acarretaria na perda de incalculáveis propriedades interessantes das matróides.

Os elementos de \mathcal{I} serão chamados os **independentes** da matróide M , os outros subconjuntos de E serão ditos os **dependentes** de M . Em especial os independentes maximais e dependentes minimais (da ordem de inclusão) de uma matróide serão chamados respectivamente de **circuitos** e **bases** da

matróide. O conjunto E como na definição acima é dito o **conjunto base** da matróide M , em geral, dada uma matróide M denotaremos seu conjunto base por E_M . As famílias dos independentes, dependentes, bases e circuitos de uma matróide M serão denotadas respectivamente por: $\mathcal{I}_M, \mathcal{D}_M, \mathcal{C}_M$ e \mathcal{B}_M .

Ao longo de todo o presente trabalho, M representará uma matróide arbitrária, $E = E_M, \mathcal{I} = \mathcal{I}_M, \mathcal{D} = \mathcal{D}_M, \mathcal{C} = \mathcal{C}_M$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_M$, e no caso de alguma acentuação aplicada a M , essas famílias receberão o mesmo respectivo acento. Por exemplo: $\mathcal{I}^* := \mathcal{I}_{M^*}, \tilde{\mathcal{I}} := \mathcal{I}_{\tilde{M}}$, etc.

Isso economizará o trabalho de repetir inúmeras vezes frases do tipo: seja M uma matróide ... e seja \mathcal{I}' a família de independentes de M' , etc.

Em nome da praticidade, ao longo do presente trabalho, essa política de abuso de notação se estenderá às novas estruturas definidas.

Sejam M e N matróides, uma bijeção $\varphi : E_M \longrightarrow E_N$ é um **isomorfismo** entre as matróides M e N quando $X \subseteq E_M$ é independente em M se e somente se $\varphi(X)$ é independente em N . Quando existe um isomorfismo entre M e N , dizemos que M e N são **isomorfos** e denotamos: $M \cong N$.

1.2 Exemplos mais relevantes

O termo “matróide” significa “falsa matriz” ou “matriz fraca” e foi introduzido em 1935 por Whitney em um trabalho intitulado *On the abstract properties of linear dependence*. O fato é que num espaço vetorial n -dimensional, a família \mathcal{I} dos conjuntos linearmente independentes satisfaz os axiomas da definição 1.1.1. A demonstração de tal fato é simples e pode ser encontrada em textos básicos de álgebra linear ou então em [Oxley, 1992]. Na verdade, mais geralmente:

Exemplo 1.2.1 *Considere uma matriz $m \times n$, com entradas em um corpo, e considere os rótulos $1, 2, \dots, n$ para as respectivas colunas da matriz. Então (E, \mathcal{I}) é uma matróide, onde $E := \{1, \dots, n\}$ e um subconjunto X de E está em \mathcal{I} se e somente se o conjunto dos vetores-coluna rotulados por elementos de X é linearmente independente e quaisquer dois elementos de X rotulam colunas distintas.*

Definição 1.2.2 *Uma matróide, como no exemplo acima, é dita uma matróide **vetorial**. Uma matróide M é dita **representável** sobre um corpo F se*

existe uma matriz com entradas em F que, tendo as colunas rotuladas por elementos de M , nos fornece M como matroide vetorial.

Em especial, quando uma matroide M é representável sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$), dizemos que M é **binária** (resp. **ternária**).

Exemplo 1.2.3 Considere, em específico, a seguinte matriz com colunas rotuladas:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

As colunas de rótulos 4, 5 e 6 são dependentes se e somente se o corpo em questão possui característica 2, neste caso, dizemos que a matroide associada à matriz é a **matroide de Fano**, denotada por F_7 , caso a característica considerada seja distinta de 2 dizemos que a matroide é a matroide **não fano**, F_7^- . F_7 (resp. F_7^-) é representável sobre um corpo k se e somente se $\text{car}(k) = 2$ (resp. $\text{car}(k) \neq 2$).

Exemplo 1.2.4 Dado um corpo F , considere o espaço projetivo n -dimensional $\mathbb{P}^n(F)$ formado pelo conjunto dos subespaços vetoriais 1-dimensionais de F^{n+1} . Dado um subconjunto finito $E \subseteq \mathbb{P}^n(F)$, temos uma matroide de conjunto base E na qual um conjunto $I \subseteq E$ é independente quando um conjunto formado por um vetor não nulo de cada elemento de I forma um conjunto linearmente independente em F^{n+1} . Observe que essa matroide é isomorfa a matroide vetorial associada a uma matrix que tem como conjunto de colunas um conjunto formado por um vetor não nulo de cada elemento de E .

Exemplo 1.2.5 Considere um grafo finito G com um conjunto de arestas E . Defina $\mathcal{I} := \{X \subseteq E; \text{as arestas de } X \text{ não formam ciclos}\}$. Então (E, \mathcal{I}) é uma matroide. A demonstração desse fato se dará como corolário do primeiro teorema da seção seguinte. Tal matroide denotada por M_G é dita a **matroide associada a G** . Uma matroide M é dita **gráfica** quando existe um grafo G tal que $M = M_G$.

Observe que, se uma aresta e de G é um laço, então $\{e\}$ é um circuito de M_G . Em geral, se um conjunto da forma $\{e\}$ é um circuito de uma matroide,

então dizemos que e é um **laço** da matróide. Observe que e é um laço se e somente se e não está contido em nenhum independente (resp. base).

Exemplo 1.2.6 *Seja $E := \{1, \dots, n\}$ e $\mathcal{I} := \{I; |I| \leq m\}$, com $m \leq n$, (E, \mathcal{I}) é uma matróide, chamada a **matróide uniforme** em n elementos com posto m e é denotada por $U_{m,n}$.*

1.3 Bases, circuitos e novas axiomatizações

Até agora a única forma que temos de conhecer uma matróide é através da família de seus independentes, mas neste capítulo veremos que as famílias de bases e circuitos podem desenvolver esse papel e nos proporcionar novos sistemas de axiomas para definir o que é uma matróide.

Teorema 1.3.1 (Axiomatização através de circuitos) *A família \mathcal{C} , dos circuitos de M satisfaz os seguintes axiomas:*

C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$

C2) *Se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ e $C_1 \subseteq C_2$, então $C_1 = C_2$*

C3) *Se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \neq C_2$ e $e \in C_1 \cap C_2$, então existe $C_3 \in \mathcal{C}$, tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.*

Reciprocamente, se temos um conjunto E e uma família \mathcal{C} de subconjuntos de E satisfazendo C1), C2) e C3), então existe uma única matróide com conjunto base E e família de circuitos \mathcal{C} . Essa matróide tem a seguinte família de independentes:

$$\{I \subseteq E; \text{ não existe } C \in \mathcal{C} \text{ tal que } C \subseteq I\}.$$

Proposição 1.3.2 *O axioma C3) pode ser substituído no teorema acima por uma versão mais forte:*

C3') *Se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $e \in C_1 \cap C_2$ e $f \in C_1 - C_2$ então existe $C_3 \in \mathcal{C}$, tal que $f \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.*

Proposição 1.3.3 *Se $I \in \mathcal{I}$ e $I \cup e \in \mathcal{D}$, então existe um único circuito contido em $I \cup e$, que, naturalmente, contém e .*

Corolário 1.3.4 *Se $B \in \mathcal{B}$ e $e \notin B$, então existe um único circuito contido em $B \cup e$, este circuito contém e .*

Definição 1.3.5 *Os circuitos como na proposição e no corolário, recém-enunciados serão denotados respectivamente por $C(I, e)$ e $C(B, e)$ e são denominados os **circuitos fundamentais de e com respeito a I e B** , respectivamente.*

Lema 1.3.6 *Os elementos de \mathcal{B} são equicardinais.*

Teorema 1.3.7 (Axiomatização através de bases) *A família \mathcal{B} , das bases de M satisfaz os seguintes axiomas:*

B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

B2) *Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 - B_2$, então existe $y \in B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.*

Reciprocamente, se temos um conjunto E e uma família \mathcal{B} de subconjuntos de E satisfazendo B1) e B2), então existe uma única matróide com conjunto base E e família de bases \mathcal{B} . Essa matróide tem a seguinte família de independentes:

$$\{X \subseteq E; \text{ existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } X \subseteq B\}.$$

Proposição 1.3.8 (Axiomatização por bases, segunda forma) *O sistema de axiomas formado por B1) e B2) acima é equivalente ao sistema B1), B2)*, onde:*

B2)* *Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $y \in B_2 - B_1$, então existe $x \in B_1 - B_2$ tal que $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.*

Observação 1.3.9 *Uma boa descrição coloquial da diferença entre B2) e B2)* é que em B2) se escolhe o elemento de B_1 do qual se desfaz para formar uma nova base sem liberdade de escolha de qual elemento será acrescentado no lugar. Enquanto em B2)*, se escolhe qual elemento será acrescentado sem liberdade de escolha do elemento que será descartado.*

1.4 Restrição e Posto

Definimos o **posto** de M como sendo o número de elementos de uma base de M e denotamos por rM .

Dado um subconjunto $X \subseteq E$ podemos definir uma estrutura de matróide com conjunto base X , com a família de independentes $\mathcal{I} \cap 2^X$. Essa matróide será chamada a restrição de M a X e denotada por $M|X$.

Definimos a **função posto** em M como:

$$\begin{aligned} r_M : 2^E &\longrightarrow \mathbb{Z}_+ \\ X &\longmapsto rX := rM|X \end{aligned}$$

Quando não houver risco de confusão denotaremos r_M simplesmente por r .

Segue da equicardinalidade das bases em $M|X$ que o conjunto dos independentes maximais contidos em X , que coincide com $\mathcal{B}_{M|X}$, tem elementos os equicardinais e a cardinalidade de um elemento desse conjunto coincide com rX . Algumas vezes dizemos que um independente maximal contido em X é uma base de X .

Teorema 1.4.1 (Axiomatização através do posto)

A função posto de uma matróide satisfaz as seguintes propriedades:

- R1)** $0 \leq rX \leq |X|$, para todo $X \subseteq E$
- R2)** Se $X \subseteq Y \subseteq E$, então $rX \leq rY$
- R3) (Semimodularidade)** Para todos $X, Y \subseteq E$, $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq rX + rY$

Reciprocamente, se uma função $r : 2^E \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ satisfaz R1), R2) e R3), então r é a função posto de uma matróide com conjunto base E , cujos independentes são aqueles conjuntos I tais que $rI = |I|$.

Teorema 1.4.2 (Axiomatização através do posto, segunda forma)

O sistema formado por R1), R2) e R3) é equivalente a:

- R1)'** $r\emptyset = 0$
- R2)'** Se $X \subseteq E$ e $x \in E$ então $rX \leq r(X \cup x) \leq rX + 1$

R3)' Se $X \subseteq E$, $x, y \in E$ e $r(X \cup y) = r(X \cup x) = rX$, então $r(X \cup x \cup y) = rX$.

1.5 Fecho e Geradores

Dizemos que um conjunto X **gera** e se $r(X \cup e) = r(X)$. Denotamos o conjunto de todos os elementos de M gerados por X por clX e o chamamos **fecho** de X . Se $clX = X$, então dizemos que X é um **fechado** de M . A família dos fechados de M será denotada por \mathcal{F} . Se $Y \subseteq clX$, dizemos que Y é gerado por X e X é um gerador de Y . Quando um conjunto X gera E , dizemos que X gera M . O conjunto dos **geradores** de M será denotado por \mathcal{S} . Quando H é um fechado de posto $rM - 1$ dizemos que H é um **hiperplano** de M . O conjunto do hiperplanos de M será denotado por \mathcal{H} .

Teorema 1.5.1 Para todos conjuntos $X, Y \subseteq E$:

CL1) $X \subseteq clX$,

CL2) Se $X \subseteq Y$, então $clX \subseteq clY$,

CL3) $cl(cl(X)) = clX$; i.e: $clX \in \mathcal{F}$,

CL4) Se $x \in E$ e $y \in cl(X \cup x) - clX$ então $x \in cl(X \cup y)$

Teorema 1.5.2 Para todos os subconjuntos $X, Y \subseteq E$:

(i) Se $X, Y \in \mathcal{F}$, então $X \cap Y \in \mathcal{F}$

(ii) $clX = \bigcap_{X \subseteq F \in \mathcal{F}} F$

(iii) $r(clX) = rX$

(iv) Se $e \in clX$ e $f \in cl(X \cup e)$ então $f \in clX$

(v) $e \in clX$ se, e somente se, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $e \in C \subseteq X \cup e$

1.6 Dualidade

Teorema 1.6.1 *Dada uma matr oide M , a família $\mathcal{B}^* := \{E - B; B \in \mathcal{B}\}$   a família de bases de uma matr oide M^* , denominada a matr oide **dual** de M .*

Ao se referir a algum objeto relativo   matr oide dual, utilizamos o prefixo ‘‘co’’: Os independentes, bases, circuitos, laços, fechados, a função posto, etc, da matr oide M^* são os coindependentes, cobases, cocircuitos, colaços, cofechados, função coposto, etc. de M .

Observe que um elemento   um laço se e somente se não está em nenhuma base, assim como um elemento   um colaço se, e somente se, está em toda base.

Teorema 1.6.2 (i) $\mathcal{I}^* = \{E - S; S \in \mathcal{S}\}$

(ii) $\mathcal{C}^* = \{E - H; H \in \mathcal{H}\}$

(iii) $r^*(X) = |X| - rM + r(E - X)$

Teorema 1.6.3 (Ortogonalidade) *Se C   um circuito e C^* um cocircuito de M , então $|C \cap C^*| \neq 1$.*

A seguinte proposição   uma generalização do lema anterior.

Proposição 1.6.4 *Um subconjunto $D \subseteq E$   um circuito de M se e somente se D   minimal não-vazio na propriedade de que $|D \cap C^*| \neq 1$ para todo cocircuito C^* de M .*

1.7 Menores

Definição 1.7.1 *Seja $T \subseteq E$, definimos a **deleção** de T em M por $M|(E - T)$, e denotamos $M \setminus T$. Definimos também a **contração** de T em M por $(M^* \setminus T)^*$ e denotamos M/T . Também denotamos $M/(E - T)$ por $M \cdot T$.*

A proposição que segue diz que há uma forma de associatividade e comutatividade para deleções e contrações.

Proposição 1.7.2 *Se X e Y são subconjuntos disjuntos de E , então:*

$$(M \setminus X) \setminus Y = M \setminus (X \cup Y) = (M \setminus Y) \setminus X;$$

$$(M/X)/Y = M/(X \cup Y) = (M/Y)/X; e:$$

$$M \setminus X/Y = M/Y \setminus X;$$

Definição 1.7.3 *Uma matróide da forma $M \setminus X/Y$ é dita um **menor** de M .*

Proposição 1.7.4 *Os independentes, dependentes e circuitos de $M \setminus T$ são respectivamente os independentes, dependentes e circuitos de M que evitam T , $r_{M \setminus T} = r|_{2^{(E-T)}}$, $cl_{M \setminus T} : X \mapsto clX - T$ e os geradores de $M \setminus T$ são os subconjuntos de $E - T$ que geram $E - T$ em M .*

Teorema 1.7.5 *Seja $B_T \in \mathcal{B}_{M|T}$, então:*

$$(i) r_{M/T} : X \mapsto r(X \cup T) - rT;$$

$$(ii) \mathcal{I}_{M/T} = \{I \subseteq E - T; I \cup B_T \in \mathcal{I}\} = \\ = \{I \subseteq E - T; \text{ existe } B \in \mathcal{B}_{M|T} \text{ com } B \cup I \in \mathcal{I}\};$$

$$(iii) \mathcal{B}_{M/T} = \{B \subseteq E - T; B \cup B_T \in \mathcal{B}\} = \\ = \{B \subseteq E - T; \text{ existe } B' \in \mathcal{B}_{M|T} \text{ com } B' \cup B \in \mathcal{B}\};$$

$$(iv) \mathcal{C}_{M/T} \text{ é a família dos membros minimais e não vazios de } \{C - T; C \in \mathcal{C}\}; \\ e$$

$$(v) \text{ Se } C \in \mathcal{C}, \text{ então } C - T \text{ é uma união de circuitos de } M/T.$$

Corolário 1.7.6 $r(M/e) = r(M) - 1$ a menos que e seja um laço e $r(M \setminus e) = r(M)$, a menos que e seja um colaço.

Proposição 1.7.7 $M \setminus T = M/T$ se, e somente se, $rT + r(E - T) = rM$.

Corolário 1.7.8 $M \setminus e = M/e$ se, e somente se, e é um laço ou colaço.

1.8 Simplicidade e elementos em série e paralelo

Definição 1.8.1 Dizemos que dois elementos estão em **paralelo** quando formam um circuito de tamanho 2. Dizemos que $X \neq \emptyset$ é uma **classe em paralelo** de M se X é maximal na propriedade de que cada dois elementos distintos de X estejam em paralelo em M . Definimos uma **classe em série** de M como sendo uma classe em paralelo de M^* . Uma classe em série ou paralelo é dita *trivial* se possui um único elemento. Quando dois elementos pertencem à mesma classe em série de uma matróide dizemos que estes elementos estão **em série**.

Uma matróide é dita **simples** se não possui laços ou elementos em paralelo e dita **cossimples** se M^* é simples, i.e.: se não possui colaços ou elementos em série.

A cada matróide M podemos associar sua **simplificação** $\text{sim}M$, que é uma matróide obtida a partir de M pela deleção de seus laços e pela deleção de todos, exceto um elemento de cada classe em paralelo. Analogamente, definimos a **cossimplificação** de M por $\text{co}M := (\text{sim}(M^*))^*$, i. e.: $\text{co}M$ é obtida a partir de M através da deleção de seus colaços e pela contração de todos, exceto um elemento de cada classe em série.

Proposição 1.8.2 Dois elementos e e f estão em série se e somente se estão exatamente nos mesmos circuitos.

Capítulo 2

Conectividade

2.1 Conectividade e Soma

Lema 2.1.1 *A relação \sim definida em $E \times E$ que relaciona x e y se, e somente se, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $\{x, y\} \subseteq C$ é uma relação de equivalência.*

Definição 2.1.2 *Cada classe de equivalência da relação definida no lema anterior é dita uma **componente conexa** de M . Se todos os elementos de E estão na mesma componente conexa então dizemos que M é **conexa**. Se não existem $x \in X$ e $y \in E - X$ tais que $x \sim y$, então X é um **separador** de M e $(X, E - X)$ é uma **separação** de M .*

Proposição 2.1.3 *Um conjunto $X \subseteq E$ é um separador de M se e somente se $rX + r(E - X) = rM$.*

Teorema 2.1.4 (Tutte, 1966) *Se M é conexa e $e \in E$, então $M \setminus e$ é conexa ou M/e é conexa.*

Lema 2.1.5 *Suponha que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, então existe uma matróide de conjunto base $E_1 \cup E_2$ e família de circuitos $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.*

Definição 2.1.6 *A matróide cuja existência é afirmada pelo lema acima é dita a **soma** de M_1 e M_2 e é denotada por $M_1 \oplus M_2$. Dessa forma está definido um operador soma de matróides, que podemos verificar que funciona de forma associativa e comutativa.*

Corolário 2.1.7 *Um conjunto $X \subseteq E$ é um separador de M se e somente se :*

$$M = M|X \oplus M \setminus X.$$

Se X_1, \dots, X_n são as diferentes componentes conexas de M , então:

$$M = M|X_1 \oplus \dots \oplus M|X_n.$$

Proposição 2.1.8 *Seja $M = M_1 \oplus M_2$, então:*

- (i) $\mathcal{I} = \{I_1 \cup I_2; I_1 \in \mathcal{I}_1 \text{ e } I_2 \in \mathcal{I}_2\}$;
- (ii) $\mathcal{B} = \{B_1 \cup B_2; B_1 \in \mathcal{B}_1 \text{ e } B_2 \in \mathcal{B}_2\}$;
- (iii) $\mathcal{H} = \{H_1 \cup E_2; H_1 \in \mathcal{H}_1\} \cup \{H_2 \cup E_1; H_2 \in \mathcal{H}_2\}$;
- (iv) $\mathcal{F} = \{F; F \cap E_1 \in \mathcal{F}_1 \text{ e } F \cap E_2 \in \mathcal{F}_2\}$; e:
- (v) $\mathcal{S} = \{S_1 \cup S_2; S_1 \in \mathcal{S}_1 \text{ e } S_2 \in \mathcal{S}_2\}$.

Proposição 2.1.9

- (i) $(M_1 \oplus M_2)^* = M_1^* \oplus M_2^*$;
- (ii) $(M_1 \oplus M_2) \setminus X = (M_1 \setminus (X \cap E_1)) \oplus (M_2 \setminus (X \cap E_2))$; e:
- (iii) $(M_1 \oplus M_2) / X = (M_1 / (X \cap E_1)) \oplus (M_2 / (X \cap E_2))$.

2.2 k-conectividade

Nessa seção apresentaremos uma generalização dos conceitos a respeito de conectividade introduzidos na seção anterior.

Definição 2.2.1 *Uma partição (X, Y) de E é uma **k-separação** de M se:*

- (i) $\min\{|X|, |Y|\} \geq k$ e
- (ii) $rX + rY - rM \leq k - 1$.

Quando a igualdade ocorre em (ii), dizemos que (X, Y) é uma **k-separação exata** de M e quando a igualdade ocorre em (i) (X, Y) é uma **k-separação minimal** de M . Quando existe uma k-separação de M , dizemos que M é **k-separável** ou **k-separada**.

Se M é k-separada para algum k , então definimos a **conectividade** de M (notação: λM) por $\min\{k; M \text{ é k-separada}\}$, caso contrário, definimos $\lambda M = \infty$. Se $\lambda M \geq k$, dizemos que M é **k-conexa**.

Note que os conceitos de separação e conectividade dados na seção anterior coincidem com os conceitos de 1-separação e 2-conectividade há pouco definidos.

Dada uma matr ode M , definimos sua **fun o conectividade**:

$$\begin{aligned}\kappa : 2^E &\longrightarrow \mathbb{Z}_+ \\ X &\longmapsto rX + r(E - X) - rM\end{aligned}$$

Lema 2.2.2 *A fun o conectividade de M coincide com a fun o conectividade de M^* .*

Demonstra o: Para $X \subseteq E$:

$$\begin{aligned}\kappa_{M^*}X &= r^*X + r^*(E - X) - r^*M \\ &= |X| - rM + r(E - X) + |E - X| - rM + rX - |E| + rM \\ &= rX + r(E - X) - rM \\ &= \kappa_M X\end{aligned}$$

□

Corolário 2.2.3

$$\lambda M = \lambda M^*.$$

O último corolário nos diz que os argumentos relativos   conectividade podem ser dualizados.

Proposi o 2.2.4 *Se M   n -conexa e $|E| \geq 2(n - 1)$, então todos os circuitos (e , portanto, por dualidade, os cocircuitos) de M têm, no mínimo, n elementos.*

Demonstra o: Por contradi o, suponha que M tem um circuito C com $j < n$ elementos. Vamos checar que $(C, E - C)$   uma j -separa o de M :   fácil verificar que $\min\{|C|, |E - C|\} \geq j$ (pelo o que a hipótese afirma sobre a cardinalidade de E). Agora, note que:

$$rC + r(C - E) - rM = j - 1 + r(C - E) - rM \leq j - 1 \leq k - 1.$$

Isso completa a demonstra o. □

Proposi o 2.2.5 *Seja M n -conexa com pelo menos $2n - 1$ elementos. Então M não tem um circuito-cocircuito de n elementos.*

Demonstração: Suponha que exista tal circuito-cocircuito, o denominemos C . Como $E - C$ é um hiperplano de M ,

$$\min\{|C|, |E - C|\} \geq n - 1, \text{ e:}$$

$$rC + r(E - C) - rM = n - 1 + rM - 1 - rM = n - 2 \leq n - 1,$$

ou seja: M tem uma $(n - 1)$ -separação, uma contradição. \square

Proposição 2.2.6 *Se $\lambda M = \infty$, então M é uniforme, e, mais precisamente:*

$$\lambda U_{r,n} = \begin{cases} r + 1 & \text{se } n \geq 2r + 2; \\ n - r + 1 & \text{se } n \leq 2r - 2; \\ \infty & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Demonstração: Podemos nos limitar a caracterizar os casos em que $rM \leq \frac{|E|}{2}$. Os outros seguem por dualidade.

Suponha que $\lambda M = \infty$. Seja (X, Y) uma partição de E , com $|X| \leq \frac{|E|}{2}$. Então:

$$rX = rX + r(E - X) - rM \geq \min\{|X|, |Y|\} = |X| \geq rX.$$

Então $rY = rM$ e $rX = |X|$. Portanto X é independente sempre que $|X| \leq \frac{|E|}{2}$ e M é uniforme. Em particular $|E| \leq 2rM + 1$.

Se $M \cong U_{r,n}$ e $n \leq 2r + 1$, então, dado $|X| \subseteq E$, com, no máximo, r elementos, da mesma forma, $rX + r(E - X) - rM = rX = |X| > \min\{|X|, |E - X|\}$. Segue que M não é $|X|$ -separável, além disso, verifica-se, neste caso, que M não é k -separada se $k > r$. Portanto, $\lambda M = \infty$.

Se $M \cong U_{r,n}$ e $n \geq 2r + 2$, dado $X \subseteq E$ com $|X| \leq |E - X|$, então $|E - X| \geq r + 1$ e

$$rX + r(E - X) - rM = rX.$$

Mas verificamos que $rX \leq |X| - 1 = \min\{|X|, |E - X|\} - 1$ se, e somente se $|X| \geq r + 1$, segue que $\lambda M = r + 1$. \square

Proposição 2.2.7 *Sejam M e N matróides tais que $M \setminus e = N$. Suponha que N é n -conexa e M não. Então, ou e é colaço de M , ou M possui um circuito com menos de n elementos contendo e .*

Demonstração: Sendo M não n -conexa, então M é $(n - j)$ -separada para algum $j > 0$. I.e.: Existe uma partição (X, Y) de E tal que:

$$\min\{|X|, |Y|\} \geq n - j \text{ e } rX + rY - rM \leq n - j - 1.$$

Suponha, s.p.g., que $e \in X$, suponha também que e não é colaço de M , o que implica que $rM = rN$. Então:

$$r(X - e) + rY - rN \leq n - j - 1.$$

Mas N não é $(n - j)$ -separada, então $|X - e| < n - j$, o que implica que $|X - e| = n - j - 1$ e, como N também não é $(n - j - 1)$ -separada, então $rX = r(X - e)$, ou seja $e \in cl(X - e)$ e existe um circuito C contido em X contendo e e $|X| < n$. \square

Proposição 2.2.8 *Seja M k -conexa e (X, Y) uma k -separação de M com $|X| = k$, então X é um circuito coindependente ou um cocircuito independente de M .*

Demonstração: Se X é dependente, então, por 2.2.4 (note que $|E| = |X| + |Y| \geq 2k$), X é um circuito, e, pelo mesmo motivo, se X contém um cocircuito este deve ser o próprio X , mas isso contraria 2.2.5, então, se X é dependente, X é um circuito coindependente. Por dualidade, se X é codependente, então X é um cocircuito independente.

Falta mostrar que X não pode ser independente e coindependente, suponha o contrário, então Y é um gerador e, como (X, Y) é uma k -separação de M :

$$k - 1 \geq rX + rY - rM = |X| + rM - rM = k,$$

uma contradição. \square

Proposição 2.2.9 *Seja (X, Y) uma k -separação de M e suponha que $|Y| \geq k + 1$. Então: ou X é fechado e cofechado de M , ou, para algum elemento e em Y , $(X \cup e, Y - e)$ é uma k -separação de M .*

Demonstração: Suponha que X não é fechado ou cofechado, digamos que não seja um fechado, e seja $e \in cl(X) - X$, então $rX = r(X \cup e)$ e:

$$r(X \cup e) + r(Y - e) - rM \leq rX + rY - rM \leq k - 1.$$

Além disso, como $|Y| \geq k+1$, então $\min\{|X \cup e|, |Y - e|\} \geq k$ e isso completa a demonstração. \square

Proposição 2.2.10 *Se M é n -conexa, $|E| \geq 2(n-1)$, então $M \setminus e$ e M/e são ambas $(n-1)$ -conexas.*

Demonstração: Suponha que $M \setminus e$ tenha uma $(n-j)$ -separação (X, Y) para algum $j > 2$, digamos que $|X| \geq |Y|$. Pela cardinalidade de E , se $|X| = n-j$, então $|Y| > n-j$. Temos que:

$$rX + rY - rM \setminus e \leq n - j - 1 \text{ e, portanto:}$$

$$r(X \cup e) + rY - rM \leq rX + 1 + rY - rM \setminus e \leq n - j.$$

Como $\min\{|X \cup e|, |Y|\} \geq n-j+1$, então $(X \cup e)$ é uma $(n-j)$ -separação de M , uma contradição. Então $M \setminus e$ é $(n-1)$ -conexa e, por dualidade, o mesmo vale para M/e . \square

2.3 2-somas e Ligações em Série e Paralelo

Lema 2.3.1 *Dadas matróides M_1 e M_2 tais que $E_{M_1} \cap E_{M_2} = \{p\}$, onde p não é laço ou colaço de M ou N , os conjuntos abaixo são famílias de circuitos de matróides com conjunto base $E := E_{M_1} \cup E_{M_2}$:*

$$\mathcal{C}_P := \mathcal{C}_{M_1} \cup \mathcal{C}_{M_2} \cup \{(C_1 \cup C_2) - p; p \in C_1 \in \mathcal{C}_{M_1} \text{ e } p \in C_2 \in \mathcal{C}_{M_2}\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_S := & \{C_1 \in \mathcal{C}_{M_1}; p \notin C_1\} \cup \{C_2 \in \mathcal{C}_{M_2}; p \notin C_2\} \\ & \cup \{C_1 \cup C_2; p \in C_1 \in \mathcal{C}_{M_1} \text{ e } p \in C_2 \in \mathcal{C}_{M_2}\} \end{aligned}$$

Demonstração: Os axiomas C1) e C2) são facilmente verificados para \mathcal{C}_P e \mathcal{C}_S , verifiquemos C3) para:

(i) \mathcal{C}_P : Sejam $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_P$, suponha que $C_1 \neq C_2$ e $e \in C_1 \cap C_2$. Se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_{M_1}$ ou $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_{M_2}$, a demonstração é direta. Temos os seguintes casos a considerar:

(i.i) $C_1 \in \mathcal{C}_{M_1}$ e $C_2 \in \mathcal{C}_{M_2}$, neste caso, $e = p$ e temos o circuito $(C_1 \cup C_2) - p$.

- (i.ii) Se $C_1 \in \mathcal{C}_{M_1}$ e $C_2 = (D_2 \cup D_1) - p$, com $p \in D_1 \in \mathcal{C}_{M_1}$ e $p \in D_2 \in \mathcal{C}_{M_2}$, então, necessariamente, $e \neq p$ e $e \in C_1 \cap D_1$, logo, existe um circuito $C \in \mathcal{C}_{M_1} \subseteq \mathcal{C}_P$, tal que $C \subseteq (C_1 \cup D_1) - e$. Se $p \notin C$, então C é o circuito que procuramos, caso contrário o circuito procurado é $(C \cup D_2) - p$.
- (i.iii) Se $C_1 = (D_1 \cup D_2) - p$ e $C_2 = (D'_1 \cup D'_2) - p$, com $p \in D_2, D'_2 \in \mathcal{C}_{M_2}$ e $p \in D_1, D'_1 \in \mathcal{C}_{M_1}$. Podemos supor, s.p.g. que $e \in C_1 \cap D_1$, então, existe $C \in \mathcal{C}_{M_1}$, tal que $C \subseteq (D_1 \cap D_2) - e$. Se $p \notin C$, então C é o circuito que procuramos, caso contrário o circuito procurado é $(C \cup D'_2) - p$.

(ii) \mathcal{C}_S : Sejam $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_P$. Suponha que $C_1 \neq C_2$ e $e \in C_1 \cap C_2$. Se $C_1, C_2 \in \{C_1 \in \mathcal{C}_{M_1}; p \notin C_1\}$, a demonstração é direta, o mesmo vale para M_2 no lugar de M_1 . Os casos a se considerar são:

- (ii.i) Quando $C_1 \in \mathcal{C}_{M_1}$, com $p \notin C_1$, e $C_2 = D_1 \cup D_2$, com $p \in D_1 \in \mathcal{C}_{M_1}$ e $p \in D_2 \in \mathcal{C}_{M_2}$. Neste caso, existe $C \in \mathcal{C}_{M_1}$ tal que $C \subseteq (C_1 \cap D_1) - e$, se $p \notin C$, então C é o circuito que procuramos, caso contrário um circuito que vai satisfazer C3) neste caso é $(D_2 \cup C) - p$.
- (ii.ii) Se $C_1 = D_1 \cup D_2$ e $C_2 = D'_1 \cup D'_2$, com $p \in D_2, D'_2 \in \mathcal{C}_{M_2}$ e $p \in D_1, D'_1 \in \mathcal{C}_{M_1}$. Podemos supor, s.p.g. que $e \in D_1 \cap D'_1$, então, existe $C \in \mathcal{C}_{M_1}$ tal que $C \subseteq (D_1 \cap D'_1) - e$. Novamente, se $p \notin C$, então C é o circuito que procuramos, caso contrário um circuito que vai satisfazer C3) neste caso é $(C_2 \cup C) - p$.

□

Definição 2.3.2 No lema acima, a matróide com família de circuitos \mathcal{C}_P (resp. \mathcal{C}_S) é chamada a **ligação em paralelo** (resp. **ligação em série**) de M_1 e M_2 e é denotada por $M_1 \oplus_P M_2$ (resp. $M_1 \oplus_S M_2$).

Observação 2.3.3 Essas operações podem ser extendidas para o caso no qual p é laço ou colaço de alguma das matróides M ou N da seguinte forma:

Se p é laço de M_1 :

$$M_1 \oplus_P M_2 := M_2 \oplus_P M_1 := M_1 \oplus (M_2/p); e$$

$$M_1 \oplus_S M_2 := M_2 \oplus_S M_1 := (M_1/p) \oplus M_2.$$

Se p é colaço de M_1 :

$$M_1 \oplus_P M_2 := M_2 \oplus_P M_1 := (M_1 \setminus p) \oplus M_2; e$$

$$M_1 \oplus_S M_2 := M_2 \oplus_S M_1 := M_1 \oplus (M_2 \setminus p).$$

Mas o objetivo do presente trabalho é trabalhar com matróides conexas, então vamos desconsiderar estes casos.

Note que $M_1 \oplus_P M_2 = M_2 \oplus_P M_1$ e $M_1 \oplus_S M_2 = M_2 \oplus_S M_1$.

As matróides $M_1 \oplus_P M_2$ e $M_1 \oplus_S M_2$ foram definidas em termos das famílias de circuitos, a próxima proposição dá uma caracterização em termos de bases:

Proposição 2.3.4 *Suponha que $E_1 \cap E_2 = p$ e seja $E = E_1 \cup E_2$, suponha também que p não é laço ou colaço em M_1 ou M_2 , então:*

- (i) $\mathcal{B}_{M_1 \oplus_S M_2} = \{B_1 \cup B_2; B_1 \cap B_2 = \emptyset \text{ e } B_i \in \mathcal{B}_i; i \in \{1, 2\}\}$; e:
- (ii) $\mathcal{B}_{M_1 \oplus_P M_2}$ é o conjunto dos elementos $B \in 2^E$, tais que $p \in B \cap E_i \in \mathcal{B}_i$ para todo $i \in \{1, 2\}$ ou $p \notin B$ e $B \cap E_i \in \mathcal{B}_i$ e $(B \cap E_j) \cup p \in \mathcal{B}_j$ para algum $i \neq j$ em $\{1, 2\}$.

Demonstração:

(i) Sejam B_1 e B_2 bases disjuntas de M_1 e M_2 . Verificamos diretamente que $B_1 \cup B_2$ não contém nenhum circuito de $M_1 \oplus_S M_2$. Como temos bases disjuntas B_1 e B_2 , então $r(M_1 \oplus_S M_2) \geq |B_1 \cup B_2| = rM_1 + rM_2$. Por outro lado, dada uma base B de $M_1 \oplus_S M_2$. Suponha que $B_1 := B \cap E_1$ e $B_2 := B \cap E_2$ não são bases para M_1 e M_2 . S.p.g., podemos supor que B_1 é dependente. Como $B_1 \subseteq B$, B_1 não contém circuito de M_1 evitando p , então existe um circuito C , de M_1 , tal que $p \in C \subseteq B_1$, portanto, $B_1 - p$ é independente em M_1 . Nestas circunstâncias, B_2 é independente em M_2 , pois caso contrário, assim como argumentado para B_1 existiria $D \in \mathcal{C}_2$ tal que $p \in D \subseteq B_2$, logo $C \cup D \in \mathcal{C}_{M_1 \oplus_S M_2}$ estaria contido em B . Ou seja: B é união disjunta dos independentes $B_1 - p$ e B_2 de M_1 e M_2 . Logo, como $r(M_1 \oplus_S M_2) \geq rM_1 + rM_2$ por cardinalidade, $B_1 - p \in \mathcal{B}_1$ e $B_2 \in \mathcal{B}_2$.

(ii) Se B_1 e B_2 são bases de M_1 e M_2 contendo p , então, verifica-se que, em $M_1 \oplus_P M_2$, $B := B_1 \cup B_2$ não contém nenhum circuito. Então $r(M_1 \oplus_P M_2) \geq rM_1 + rM_2 - 1$. Por outro lado, seja $B \in \mathcal{B}_{M_1 \oplus_P M_2}$ contendo p . Como não existe circuito de M_1 ou M_2 contido em B , então $B_1 := B \cap E_1$ e $B_2 := B \cap E_2$ são independentes em M_i e, como $r(M_1 \oplus_P M_2) \geq rM_1 + rM_2 - 1$, por cardinalidade, são bases. Se $p \notin B_1, B_2$, $B_1 \cup p \in \mathcal{B}_1$ e $B_2 \in \mathcal{B}_2$, então $B_1 \cup B_2$ é independente em $M_1 \oplus_P M_2$. Por outro lado, seja $B \in \mathcal{B}_{M_1 \oplus_P M_2}$.

Verificamos que $B_1 := B \cap E_1$ e $B_2 := B \cap E_2$ são independentes de M_1 e M_2 . Se $B_i \cup p$, $i = 1, 2$ são ambos dependentes em M_i , então, em M_i , existem circuitos $C_i \subseteq B_i \cup p$ contendo p , o que implica que $(C_1 \cup C_2) - p \in \mathcal{C}_{M_1 \oplus_P M_2}$ está contido em B , uma contradição. Então supomos, s.p.g., que $B_1 \cup p \in \mathcal{I}_1$, por cardinalidade, como $r(M_1 \oplus_P M_2) \geq rM_1 + rM_2 - 1$, então $B_1 \cup p \in \mathcal{B}_1$ e $B_2 \in \mathcal{B}_2$, completando a demonstração. \square

A próxima proposição mostra uma relação de dualidade entre as operações de ligação em série e paralelo.

Proposição 2.3.5

$$(M_1 \oplus_S M_2)^* = M_1^* \oplus_P M_2^*$$

Demonstração:

Se $B \in \mathcal{B}_{M_1 \oplus_S M_2}$, digamos que $B = B_1 \cup B_2$ tal que: $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ e $B_i \in \mathcal{B}_i$; $i \in \{1, 2\}$.

Se $p \in B$, digamos que $p \in B_1 - B_2$. Temos que

$$E - B = (E_1 - B_1) \cup ((E_2 - B_2) - p).$$

$E_1 - B_1 \in \mathcal{B}_{M_1}^*$ e $((E_2 - B_2) - p) \cup p = E_2 - B_2 \in \mathcal{B}_{M_2}^*$. Pela proposição anterior, $B \in \mathcal{B}_{M_1^* \oplus_P M_2^*}$.

Se $p \notin B$, então $E - B = (E_1 - B_1) \cup (E_2 - B_2)$, que é união de bases de M_1^* e M_2^* contendo p .

Por outro lado, as bases de $M_1^* \oplus_P M_2^*$ contendo p são da forma $E - B := (E_1 - B_1) \cup (E_2 - B_2)$, onde $p \notin B_i \in \mathcal{B}_i$, então $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ e $B = B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}_{M_1 \oplus_S M_2}$.

As bases de $M_1^* \oplus_P M_2^*$ não contendo p , podemos assumir, s.p.g., que são da forma $(E_1 - B_1) \cup (E_2 - B_2)$, onde $E_1 - B_1 \in \mathcal{B}_{M_1}^*$ e $(E_2 - B_2) \cup p \in \mathcal{B}_{M_2}^*$ com $p \notin E_2 - B_2$, então $B := B_1 \cup B_2$ é união disjunta de bases de M_1 e M_2 . \square

Seguem algumas propriedades “aritméticas” das ligações em série e paralelo:

Proposição 2.3.6 *Suponha que $E_1 \cap E_2 = p$, $E_2 \cap E_3 = q$ e $E_1 \cap E_3 = \emptyset$ e p e q não são laços ou colaços de M_1 , M_2 ou M_3 , então:*

$$(i) \quad r(M_1 \oplus_S M_2) = rM_1 + rM_2; \quad e$$

$$r(M_1 \oplus_P M_2) = rM_1 + rM_2 - 1.$$

$$(ii) \quad M_1 = (M_1 \oplus_S M_2)/(E_2 - p); \quad e$$

$$M_1 = (M_1 \oplus_P M_2) \setminus (E_2 - p).$$

$$(iii) \quad (M_1 \oplus_S M_2) \setminus p = (M_1 \setminus p) \oplus (M_2 \setminus p); \quad e$$

$$(M_1 \oplus_P M_2) / p = (M_1 / p) \oplus (M_2 / p).$$

$$(iv) \quad (M_1 \oplus_S M_2) / p = (M_1 \oplus_P M_2) \setminus p.$$

$$(v) \quad \text{Para } e \in E_1 - p:$$

Se e não está em série com p em M₁:

$$(M_1 \oplus_S M_2) \setminus e = (M_1 \setminus e) \oplus_S M_2;$$

$$(M_1 \oplus_P M_2) \setminus e = (M_1 \setminus e) \oplus_P M_2; \quad e$$

Se e não está em paralelo com p em M₁.

$$(M_1 \oplus_S M_2) / e = (M_1 / e) \oplus_S M_2;$$

$$(M_1 \oplus_P M_2) / e = (M_1 / e) \oplus_P M_2.$$

$$(vi) \quad (M_1 \oplus_S M_2) \oplus_S M_3 = M_1 \oplus_S (M_2 \oplus_S M_3);$$

$$(M_1 \oplus_P M_2) \oplus_P M_3 = M_1 \oplus_P (M_2 \oplus_P M_3);$$

$$(M_1 \oplus_S M_2) \oplus_P M_3 = M_1 \oplus_S (M_2 \oplus_P M_3); \quad e$$

$$(M_1 \oplus_P M_2) \oplus_S M_3 = M_1 \oplus_P (M_2 \oplus_S M_3).$$

Demonstração: As afirmação (i) decorre diretamente da proposição 2.3.4, enquanto (iv) segue de 2.3.5 só se faz necessária a constatação de algumas das afirmações, as outras seguem por dualidade, segundo a proposição

2.3.5.

Basta observar o formato de $\mathcal{C}(M_1 \oplus_P M_2)$ para concluir que $M_1 = (M_1 \oplus_P M_2) \setminus (E_2 - p)$ e $(M_1 \oplus_P M_2) \setminus e = (M_1 \setminus e) \oplus_P M_2$. Idem para $\mathcal{C}(M_1 \oplus_S M_2)$, $(M_1 \oplus_S M_2) \setminus p = (M_1 \setminus p) \oplus (M_2 \setminus p)$ e $(M_1 \oplus_S M_2) \setminus e = (M_1 \setminus e) \oplus_S M_2$. \square

Definição 2.3.7 Se $E_M \cap E_N = p$, introduzimos uma nova operação entre M e N : a **2-soma**, definida por:

$$M \oplus_2 N := (M \oplus_S N) / p = (M \oplus_P N) \setminus p.$$

O elemento p é dito o **ponto base** da 2-soma $M \oplus_2 N$.

Proposição 2.3.8 $(M_1 \oplus_2 M_2)^* = M_1^* \oplus_2 M_2^*$, $r(M_1 \oplus_2 M_2) = rM_1 + rM_2 - 1$ e os itens (iii)-(vi) da proposição anterior permanecem válidos se quaisquer símbolos \oplus_S e \oplus_P forem substituídos por \oplus_2 .

Proposição 2.3.9

- (i) $\mathcal{C}(M_1 \oplus_2 M_2) = \{C_1 \in \mathcal{C}_{M_1}; p \notin C_1\} \cup \{C_2 \in \mathcal{C}_{M_2}; p \notin C_2\} \cup \{(C_1 \cup C_2) - p; p \in C_i \in \mathcal{C}_{M_i}\}$.
- (ii) $\mathcal{B}_{M_1 \oplus_2 M_2}$ é o conjunto dos elementos $B \in 2^{(E_1 \cup E_2) - p}$, tais que $B \cap E_i \in \mathcal{B}_i$ e $(B \cap E_j) \cup p \in \mathcal{B}_j$ para algum i e j distintos em $\{1, 2\}$.

Proposição 2.3.10 São equivalentes:

- (i) M_1 e M_2 são conexas;
- (ii) $M_1 \oplus_S M_2$ é conexa;
- (iii) $M_1 \oplus_P M_2$ é conexa; e
- (iv) $M_1 \oplus_2 M_2$ é conexa.

Demonstração: Vamos começar demonstrando que (i) implica (iv). Suponha (i), sejam e e f em $M_1 \oplus_2 M_2$. Se $e \in E_1$ e $f \in E_2$, então seja $p, e \in C_1 \in \mathcal{C}_1$ e $p, f \in C_2 \in \mathcal{C}_2$, $e, f \in C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}(M_1 \oplus_2 M_2)$, se $e, f \in E_1$, então $e, f \in C \in \mathcal{C}_1$, se $p \notin C$, então e, f estão na mesma componente conexa, caso contrário, tome $C_2 \in \mathcal{C}_2$ contendo p , então, $e, f \in (C_1 \cup C_2) - p \in \mathcal{C}(M_1 \oplus_2 M_2)$ e o resultado segue. Vamos mostrar que (iv) implica (iii), para isso basta observar que, se $M_1 \oplus_2 M_2$ é conexa, então: dado $e \in M_1 \oplus_2 M_2$,

em $M_1 \oplus_P M_2$, e e p estão na mesma componente conexa. Supondo (iii), veja que, em M_1 ou M_2 todo elemento está na mesma componente conexa que p . Para completar a demonstração: M_1 e M_2 são conexas se e somente se M_1^* e M_2^* são conexas se e somente se $M_1^* \oplus_P M_2^* = (M_1 \oplus_S M_2)^*$ é conexa se e somente se $M_1 \oplus_S M_2$ é conexa. falta mostrar que (ii) implica em (i). Suponha (ii), sejam e e f em M_1 , então existe um circuito C de $M_1 \oplus_S M_2$ contendo $\{e, f\}$, se C é circuito de M_1 a prova está completa, caso contrário C é um circuito da forma $C_1 \cup C_2$ com $C_i \in \mathcal{C}_i$. então $\{e, f\} \subseteq C_1$. Logo M_1 é conexa e, da mesma forma, M_2 também o é. \square

2.4 2-somas e 3-conectividade

Vimos que (X, Y) é uma 1-separação de M se e somente se $M = (M|X) \oplus (M|Y)$, veremos um resultado análogo para 2-separações e 2-somas.

Teorema 2.4.1 *Seja M conexa. Então (X_1, X_2) é uma 2-separação de M se e somente se $\min\{|X_1|, |X_2|\} \geq 2$ e $M = M_1 \oplus_2 M_2$, onde M_1 e M_2 são matrôides de conjuntos base $X_1 \cup p$ e $X_2 \cup p$, com $p \notin E$. Além disso as matrôides M_1 e M_2 são unicamente determinadas em função de (X_1, X_2) , a menos, é claro, do rótulo do elemento p .*

Demonstração: Suponha que uma matrôide conexa M seja a 2-soma $M_1 \oplus_2 M_2$, com $p = E_i - E$ e $|E_i| \geq 3$. Um conjunto $X \subseteq E_i - p$ é independente em M se e somente se X é independente em M_i . Como M_i é conexa (portanto sem colaços), existe um independente maximal contido em E_i que evita p . Então $rM_i = rE_i = r_i(E_i - p)$, portanto:

$$r(E_1 - p) + r(E_2 - p) - rM = r_1(E_1 - p) + r_2(E_2 - p) - (rM_1 + rM_2 - 1) = 1$$

Portanto $(E_1 - p, E_2 - p)$ é uma 2-separação de M .

Por outro lado, suponha que (X_1, X_2) seja uma 2-separação de M . Vamos precisar de dois lemas para construir a matrôides M_1 e M_2 , cuja 2-soma é M .

Lema 2.4.2 *Sejam C_1 e C_2 circuitos de M que encontram tanto X_1 como X_2 . Então $C_1 \cap X_1$ não está contido propriamente em $C_2 \cap X_1$.*

Demonstração: Suponha o contrário e escolha $x_1 \in C_1 \cap X_1$ e $x_2 \in (C_2 \cap X_1) - (C_1 \cap X_1)$. Como $C_2 \cap X_1$ é independente de M , $C_2 \cap X_1$ está contido em uma base B_1 de X_1 . Seja B_2 uma base para X_2 . Como $B_2 \subseteq (B_1 \cup B_2) - \{x_1, x_2\}$, então $X_2 \subseteq cl((B_1 \cup B_2) - \{x_1, x_2\})$. Pela existência de C_1 e C_2 , $\{x_1, x_2\} \subseteq cl((B_1 \cup B_2) - \{x_1, x_2\})$, ou seja: $(B_1 \cup B_2) - \{x_1, x_2\}$ é um gerador de M e:

$$rM = r((B_1 \cup B_2) - \{x_1, x_2\}) \leq |B_1| + |B_2| - 2 = rX_1 + rX_2 - 2$$

Então $rX_1 + rX_2 - rM \geq 2$ contrariando o fato de (X_1, X_2) ser uma 2-separação de M . \square

Lema 2.4.3 *Seja $\emptyset \subsetneq Y_i \subseteq X_i$, $i = 1, 2$. Suponha que, para $i = 1, 2$, C_i seja circuito de M tal que $C_i \cap X_i = Y_i$ e $C_j \cap X_i \neq \emptyset$ para $i, j \in \{1, 2\}$. Então $Y_1 \cup Y_2 \in \mathcal{C}_M$.*

Demonstração: Suponha que o lema não seja válido sejam C_1 e C_2 um contra-exemplo com $C_1 \cup C_2$ minimal, observe que se $C_1 = C_2$ o lema é válido, então $C_1 \neq C_2$.

Afirmção: $(C_1 \cup C_2) \cap X_i$ é independente para $i = 1, 2$.

De fato, suponha, s.p.g., que $i = 1$ e suponha, por contradição, que exista um circuito C contido em $(C_1 \cup C_2) \cap X_i$. Temos que $C \neq C_1$, pois C_1 , ao contrário de C , encontra X_2 . Seja $x \in C - C_1$, o que implica que $x \in C_2$. Seja $y \in C_2 \cap X_2$. Aplicamos C3') a C , C_2 , x e y , de forma a obter um circuito $C'_2 \subseteq (C \cup C_2) - x$ contendo y . Temos que: $y \in C'_2 \cap X_2 \subseteq C_2 \cap X_2$ e C'_2 contém, necessariamente, um elemento de C . Portanto C'_2 encontra tanto X_1 como X_2 e está contido em $(C_1 \cup C_2) - x \subsetneq C_1 \cup C_2$. Vamos mostrar que $C'_2 \cap X_2 = Y_2$ para entrar em contradição com a minimalidade de $C_1 \cup C_2$. Para isso, basta aplicar o lema 2.4.2 em C_2 e C'_2 que diz que $C'_2 \cap X_2$ não pode estar contido propriamente em $C_2 \cap X_2$, como $C'_2 \cap X_2 \subseteq C_2 \cap X_2$, então $C'_2 \cap X_2 = C_2 \cap X_2$. Isso demonstra a afirmação.

Para $i = 1, 2$, seja B_i uma base para X_i contendo $(C_1 \cup C_2) \cap X_i$. Se $C_1 \cap X_2 = Y_2$ então a demonstração está completa, pois, neste caso, $C_1 = Y_1 \cup Y_2$. Suponha que $C_1 \cap X_2 \neq Y_2$. Pelo lema anterior, $C_1 \cap X_2 \not\subseteq Y_2$. Seja $x_2 \in (C_1 \cap X_2) - Y_2$ e, analogamente, podemos tomar $x_1 \in (C_2 \cap X_1) - Y_1$. Dessa forma $x_i \in B_i$ e $(B_1 \cup B_2) - \{x_1, x_2\}$ contém $C_1 - x_2$ e $C_2 - x_1$. Então $(B_1 \cup B_2) - \{x_1, x_2\}$ é gerador de M . Portanto:

$$rM \leq |B_1| + |B_2| - 2 = rX_1 + rX_2 - 2,$$

o que contradiz o fato de (X_1, X_2) ser uma 2-separação de M . A demonstração deste lema está concluída. Note a semelhança nos desfechos das demonstrações do presente lema e do lema anterior. \square

Vamos à construção de M_1 e M_2 de conjuntos base $X_1 \cup p$ e $X_2 \cup p$, que serão caracterizadas através de suas famílias de circuitos. No que se refere à heurística, se invertermos o processo de construção da família de circuitos de uma 2-soma, chegamos, necessariamente, a:

$$\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_{M \setminus X_i} \cup \{(C \cap X_i) \cup p; C \text{ é circuito de } M \text{ encontrando } X_1 \text{ e } X_2\}$$

Vamos verificar que estes argumentos heurísticos se concretizam. Se tais matróides com as famílias de circuitos acima existem, verificamos que $M = M_1 \oplus_2 M_2$. além disso, observe que, não poderiam existir outras matróides com essa propriedade. Falta verificar que \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , como definidas acima, obedecem a C1), C2) e C3):

- (i) C1) é trivialmente satisfeito.
- (ii) O único caso um pouco mais problemático para se verificar C2) é quando temos dois circuitos da forma $(C_1 \cap X_i) \cup p$ e $(C_2 \cap X_i) \cup p$, mas neste caso 2.4.2 nos garante o resultado.
- (iii) Digamos que $i = 1$. Se um dos circuitos está em $\mathcal{C}(M_1 \setminus p)$ a verificação é imediata. Suponha a não verificação de C3). Então os circuitos que servem de contra-exemplo são da forma $(C_1 \cap X_i) \cup p$ e $(C_2 \cap X_i) \cup p$, em particular, escolha tais circuitos C_1 e C_2 com $C_2 \cap X_2$ minimal. Seja $x \in (C_1 \cap C_2 \cap X_i) \cup p$. Por 2.4, $(C_1 \cap X_1) \cup (C_2 \cap X_2)$ é um circuito de M contendo x . Seja $y \in (C_1 \cap X_1) - (C_2 \cap X_1)$ e $z \in C_2 \cap X_2$. Por C3') existe um circuito C de M contido em $[(C_1 \cap X_1) \cup C_2] - z$ contendo y , e, portanto, interceptando X_1 . Pela minimalidade de C_1 e C_2 , $C \subseteq X_1$. Então $x \neq p$, ou seja, $x \in C_1 \cap C_2 \cap X_1$. Então, por C3'), temos $D \in [(C_1 \cap X_1) \cup C_2] - x$ contendo y , que é um membro de \mathcal{C}_1 atestando a veracidade de C3) nessa situação, uma contradição.

\square

Definição 2.4.4 *No enunciado do teorema precedente, as matróides de conjunto base $X_1 \cup p$ e $X_2 \cup p$ são denominadas 2-fatores de M com respeito a X_1 e X_2 , respectivamente.*

A próxima proposição mostra que cada 2-fator é naturalmente isomorfo a um menor próprio de uma 2-soma. Sua demonstração é de fácil verificação.

Proposição 2.4.5 *Seja $M = M_1 \oplus_2 M_2$ com $E_1 \cap E_2 = p$. Seja C um circuito de M encontrando E_1 e E_2 e e um elemento de $C \cap E_2$. Então $M_1 \cong M \setminus (E_2 - C) / [(C \cap E_2) - e]$. Além disso tal isomorfismo consiste apenas na troca do rótulo do elemento p em M_1 por e .*

Definição 2.4.6 *Dada M conexa, uma **árvore de decomposição** de M é um grafo árvore T com arestas rotuladas por e_1, \dots, e_{k-1} e vértices rotulados por matróides M_1, \dots, M_k de forma que:*

- (i) *Cada M_i é 3-conexa com, ao menos, 4 elementos ou é um circuito ou cocircuito com, pelo menos 3 elementos;*
- (ii) $E_1 \cup \dots \cup E_k = E \cup \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$;
- (iii) *Se a aresta e_i incide aos vértices M_j e M_k , então $E_j \cap E_k = e_i$;*
- (iv) *Se os vértices M_i e M_j não são adjacentes, então $E_i \cap E_j = \emptyset$; e*
- (v) *M é obtida exaustivamente pelo seguinte processo: Cada aresta rotulada por e ligando os vértices rotulados por M_i e M_j é contraída no grafo T e os vértices M_i e M_j dão lugar a um novo vértice rotulado por $M_1 \oplus_2 M_2$. Tal processo é repetido até que se obtenha um único vértice, rotulado por M .*

Teorema 2.4.7 (Cunningham e Edmonds) *Toda matróide conexa M tem uma decomposição em árvore $T(M)$ na qual dois vértices adjacentes não são rotulados ambos por circuitos ou ambos por cocircuitos. Tal árvore é única, a menos de rotação de arestas.*

Definição 2.4.8 *A árvores $T(M)$ cuja existência é atestada pelo teorema acima é chamada a **árvore de decomposição canônica** de M e denotada por $T(M)$. O conjunto das matróides que rotulam os vértices de $T(M)$ será denotado por $\Lambda_2^u(M)$.*

Demonstração do teorema 2.4.7: A existência de uma árvore de decomposição de M pode ser demonstrada aplicando-se o teorema 2.4 sucessivas vezes.

Vamos à demonstração da unicidade. Suponha que M seja um contra-exemplo para o teorema minimizando $|E_M|$. Sejam T e T' árvores de decomposição de M distintas conforme o enunciado do teorema. Sejam e e e'

arestas de T e T' , respectivamente.

A remoção de e de T , divide essa árvore em duas outras, considere as matróides M_X e M_Y , resultantes do processo em 2.4.6, (v) aplicado a essas duas árvores menores. Sejam $X := E_{M_X} - e$ e $Y := E_{M_Y} - e$. Pelo teorema 2.4, (X, Y) é uma 2-separação de M . Analogamente, a partir de e' e T' definimos matróides $M_{X'}$ e $M_{Y'}$ e uma 2-separação (X', Y') de M .

Como, pela escolha de M , o teorema vale para as matróides $M_X, M_Y, M_{X'}$ e $M_{Y'}$, então as 2-separações (X, Y) e (X', Y') são distintas. Além disso T e T' não podem possuir subárvore terminal em comum, isso segue da unicidade atestada pelo teorema 2.4 e da minimalidade de M .

Seja

$$\mathcal{Q} := \{X \cap X', X \cap Y', Y \cap X', Y \cap Y'\}.$$

Lema 2.4.9 *Existe um 2-separador de M em \mathcal{Q} .*

Demonstração: Se $\emptyset \in \mathcal{Q}$, então a verificação é direta. Vamos assumir que $\emptyset \notin \mathcal{Q}$. Primeiro provaremos que:

2.4.10 *Se $Z \in \mathcal{Q}$, então $|Z| = 1$ ou Z é 2-separador de M .*

Podemos supor que $Z = X \cap X'$. Temos que:

$$(rX + rY - rM) + (rX' + rY' - rM) \leq 2,$$

ou seja,

$$(rX + rX' - rM) + (rY + rY' - rM) \leq 2.$$

Por submodularidade:

$$(rX \cup X' + rX \cap X' - rM) + (rY \cup Y' + rY \cap Y' - rM) \leq 2,$$

ou seja:

$$(rX \cup X' + rY \cap Y' - rM) + (rY \cup Y' + rX \cap X' - rM) \leq 2.$$

Como $\emptyset \notin \mathcal{Q}$, então $\min\{|X \cup X'|, |Y \cup Y'|\} \geq 1$. Da última equação:

$$rX \cup X' + rY \cap Y' - rM = rY \cup Y' + rX \cap X' - rM = 1$$

2.4.10 está, portanto, demonstrado.

Suponhamos que $|Z| = 1$ para todo $Z \in \mathcal{Q}$. Então $|E_M| = 4$, e como M é conexa $rM = 2$. Podemos supor também que $rX \leq rY$. Então, como $rX + rY - rM = 1$, X é um par de elementos em paralelo, da mesma forma, podemos supor que X' também é um par de elementos em paralelo. Chegamos, portanto, à conclusão de que M possui uma classe em paralelo com 3 elementos, então, como $rM = 2$, o quarto elemento deve ser um colaço, uma contradição. Isso finaliza a demonstração do lema. \square

Podemos supor que um 2-separador de M em \mathcal{Q} é $X \cap X'$. Definimos $Z = X' \cap X$ e $W = Y \cup Y'$. Vamos mostrar agora dois lemas.

Lema 2.4.11 *Numa matróide N , se $U \subseteq V \subseteq E_N$ e se $T \subseteq E_N$ não intercepta $U \cup V$, então $rU - rV \leq rU \cup T - rU \cup V$.*

Demonstração: Basta observar que, se U gera $t \in T$ então, V também o gera, logo $rU - rV \leq rU \cup t - rU \cup t$. O resultado segue indutivamente. \square

Lema 2.4.12 *(Z, W) é uma 2-separação de M_X .*

Demonstração: Temos que $Z \subseteq X$ e $Y \subseteq W$. Como as 2-separações diferem, temos que $X \cap W \neq \emptyset$. Temos que:

$$rM = rM_X + rM_Y - 1 \quad (2.1)$$

Se $r_{M_X}(W \cap X) \cup e = r_{M_X}W \cap X + 1$, então $W \cap X$ não gera e em M_X , ou seja, não há um circuito contendo e e contido em $(W \cap X) \cup e$, portanto $M|W = M|W \cap X \oplus M|Y$. Neste caso por (2.1) por 2.4.11:

$$\begin{aligned} & r_{M_X}Z + r_{M_X}(W \cap X) \cup e - rM_X \\ &= r_{M_X}Z + r_{M_X}W \cap X + 1 - (rM - rM_Y - 1) \\ &= rZ + rW \cap X + rY - rM \\ &= rZ + rW - rM \leq 1. \end{aligned}$$

Agora, no caso em que $r_{M_X}(W \cap X) \cup e = r_{M_X}W \cap X$, então temos que e não é colaço de $M_X|(W \cap X) \cup e$. Segue que $M|W = M_Y \oplus_2 M_X|(W \cap X) \cup e$ e $rW = r_{M_Y} + r_{M_X}|(W \cap X) \cup e - 1$. Portanto:

$$\begin{aligned} & r_{M_X}Z + r_{M_X}(W \cap X) \cup e - rM_X \\ &= r_{M_X}Z + r_{M_X}W \cap X - (rM - rM_Y - 1) \\ &= rZ + rW \cap X + rM_Y - 1 - rM \\ &= rZ + rW - rM \leq 1. \end{aligned}$$

Em todo caso Z é 2-separador de M_X . □

Temos que $X \cap X'$ é 2-separador de M_X , e, simetricamente, este conjunto também é 2-separador de M'_X . Decompomos M_X como $M_X = M_{XZ} \oplus_2 M_{XW}$, onde M_{XZ} e M_{XW} são os 2-fatores de M_X com respeito a $(X \cap W) \cup e$ e Z , respectivamente. Analogamente, temos $M'_X = M_{X'Z} \oplus_2 M_{X'W}$.

Temos, então:

$$M = M_Y \oplus_2 M_{XW} \oplus_2 M_{XZ} = M_{Y'} \oplus_2 M_{X'W} \oplus_2 M_{X'Z}.$$

Pela unicidade atestada no teorema 2.4, M_{XZ} e $M_{X'Z}$ são iguais a menos do rótulo do ponto base das 2-somas. Como vale a unicidade das árvores de decomposição para M_X e M_{XZ} , temos que $T(M_{XZ})$ é subárvore terminal de $T(M_X)$ que, por sua vez é subárvore terminal de T . Analogamente $T(M_{X'Z})$ também é subárvore terminal de T' . Uma contradição. □

Capítulo 3

Preliminares do Resultado Principal

3.1 Alguns resultados em 3-conectividade

Lema 3.1.1 *A única matróide 3-conexa com exatamente 4 elementos é $U_{2,4}$.*

Demonstração: Suponha que $|E| = 4$ e M seja 3-conexa. Então, como M deve ser simples e cossimples $rM \geq 2$ e $r^*M \geq 2$, logo $rM = 2$. Novamente, pela simplicidade de M , todo conjunto de tamanho menor ou igual a 2 será independente. \square

Definição 3.1.2 *Um triângulo (resp., tríade) de M é um 3-circuito (resp. 3-cocircuito) de M . Se M é 3-conexa, dizemos que uma **reta** de M é um conjunto $L \subseteq E$ maximal na propriedade de que $M|L \cong U_{2,|L|}$.*

Lema 3.1.3 *Se L é uma reta de M e existe um triângulo contido em $L \cup e$, então $e \in L$.*

O lema que segue é de grande utilidade para se trabalhar com matróides 3-conexas, o lema foi publicado num trabalho de Tutte, em 1966.

Lema 3.1.4 (Lema do triângulo de Tutte) *Seja M 3-conexa com, pelo menos, 4 elementos na qual $\{e, f, g\}$ é um triângulo tal que $M \setminus e$ e $M \setminus f$ sejam ambas não 3-conexas. Então M possui uma tríade que contém e e exatamente um dos elementos f e g .*

Demonstração: Se $|E| = 4$, então $M \cong U_{2,4}$ e o resultado é válido. Podemos supor que M tem, pelo menos, 5 elementos. Se M possui uma triáde T , contendo e , então, por ortogonalidade, T encontra $\{f, g\}$. Mas como $|E| \geq 5$ e M é 3-conexa, então M não pode ter um circuito-cocircuito com 3 elementos, logo $T \neq \{e, f, g\}$ e o resultado é válido nesse caso. Tudo o que temos a demonstrar é que M tem uma triáde contendo e .

Suponha, primeiramente que, $M \setminus e, f$ seja desconexa e seja (X_1, X_2) uma separação dessa matróide com $g \in X_1$. Como $\{e, f, g\}$ é um triângulo de M , então $rX_1 \cup \{e, f\} \leq rX_1 + 1$. Como M é 3-conexa com, $|E| \geq 5$, então qualquer deleção ou contração de um elemento de M é conexa, isso implica que $rM = rM \setminus e = rM \setminus e, f$. Então, como:

$$rX_1 + rX_2 - rM = rX_1 + rX_2 - rM \setminus e, f = 0, \quad \text{logo:}$$

$$r(X_1 \cup \{e, f\}) + rX_2 - rM \leq 1.$$

Mas M não é 2-separável, logo $|X_2| = 1$. Escreva $X_2 = \{x\}$. Então x é um colaço de $M \setminus e, f$ e, pela cossimplicidade de M , $\{e, f, g\}$ é uma triáde de M .

Suponhamos então que $M \setminus e, f$ é conexa. Como, nem $M \setminus e$, nem $M \setminus f$ são 3-conexas, então, como $|E| \geq 5$, essas matróides são conexas, e, portanto, 2-separadas. Seja (E_1, E_2) uma 2-separação de $M \setminus e$ e idem para (F_1, F_2) e $M \setminus f$. Digamos que $f \in E_1$ e $e \in F_1$. Se $g \in E_1$, então $(E_1 \cup g, E_2)$ é uma 2-separação de M , uma contradição, similarmente $g \notin F_1$, i.e.: $g \in E_2 \cap F_2$. Veja que, $rM \setminus e, f = rM \setminus e = rM \setminus f = rM$, portanto:

$$r(E_1) + r(E_2) \leq rM + 1; \quad \text{e} \quad (3.1)$$

$$r(F_1) + r(F_2) \leq rM + 1. \quad (3.2)$$

Observe que $|E_1|, |F_1| \geq 3$, caso contrário, pelas inequações acima e pela simplicidade e $M \setminus e$ e $M \setminus f$, teríamos $(E_1 - f, E_2)$ ou $(F_1 - e, F_2)$ como 2-separação de $M \setminus e, f$. Se adicionarmos (3.1) e (3.2) e aplicarmos semimodularidade, obtemos:

$$r(E_1 \cup F_1) + r(E_1 \cap F_1) + r(E_2 \cup F_2) + r(E_2 \cap F_2) \leq 2rM + 2; \quad \text{e} \quad (3.3)$$

$$r(E_1 \cup F_2) + r(E_1 \cap F_2) + r(E_2 \cup F_1) + r(E_2 \cap F_1) \leq 2rM + 2. \quad (3.4)$$

Da segunda dessas desigualdades:

$$r(E_1 \cup F_2) + r(E_2 \cap F_1) \leq rM + 1; \quad \text{ou:} \quad (3.5)$$

$$r(E_2 \cup F_1) + r(E_1 \cap F_2) \leq rM + 1. \quad (3.6)$$

Mas $e, g \in E_2 \cup F_1$ e $f, g \in E_1 \cup F_2$, logo $f \in cl(E_2 \cup F_1)$ e $e \in cl(E_1 \cup F_2)$, portanto:

$$r(E_1 \cup F_2 \cup e) + r(E_1 \cap F_2) \leq rM + 1; \quad \text{ou:} \quad (3.7)$$

$$r(E_2 \cup F_1 \cup f) + r(E_2 \cap F_1) \leq rM + 1. \quad (3.8)$$

Como M não é 2-separada, então: $|E_1 \cap F_2| \leq 1$ ou $|E_2 \cap F_1| \leq 1$, então, como $|E_1|, |F_1| \geq 2$, $E_1 \cap F_1 \neq \emptyset$.

$(E_1 \cap F_1, E_2 \cup F_2)$ é uma partição de $E_{M \setminus e, f}$, que é uma matróide conexa, além disso $\min\{|E_1 \cap F_1|, |E_2 \cup F_2|\} \geq 1$, então:

$$r(E_1 \cap F_1) + r(E_2 \cup F_2) \geq rM + 1.$$

Este resultado combinado com (3.3) nos dá:

$$r(E_1 \cup F_1) + r(E_2 \cap F_2) \leq rM + 1.$$

Mas $(E_1 \cup F_1, E_1 \cap F_1)$ é uma partição de E_M , e como M é 3-conexa, então $|E_2 \cap F_2| \leq 1$, mas $g \in E_2 \cap F_2$, logo:

$$|E_2 \cap F_2| = 1, \quad (3.9)$$

mas isso implica que:

$$|E_2 \cap F_1| \geq 1 \quad (3.10)$$

$$|E_1 \cap F_2| \geq 1. \quad (3.11)$$

Como $(E_1 \cup F_2, E_2 \cap F_1)$ particiona $E_{M \setminus e}$ e $(E_2 \cup F_1, E_1 \cap F_2)$ particiona $E_{M \setminus f}$, então:

$$r(E_1 \cup F_2) + r(E_2 \cap F_1) \geq rM + 1, \quad \text{e} \quad (3.12)$$

$$r(E_2 \cup F_1) + r(E_1 \cap F_2) \geq rM + 1. \quad (3.13)$$

Por (3.4) vale a igualdade em (3.12) e (3.13), e, portanto, em (3.5) e (3.6), e, por consequência, também em (3.7) e (3.8). De (3.7), temos que $|E_2 \cap F_1| \leq 1$, então, por (3.10), $|E_2 \cap F_1| = 1$, e, portanto, por (3.9), $|E_2| = 2$. Logo (E_1, E_2) é uma 2-separação minimal de $M \setminus e$. Por 2.2.8, E_2 é circuito ou cocircuito de $M \setminus e$. Mas $M \setminus e$ não possui 2-circuitos, então E_2 é cocircuito de $M \setminus e$ e $E_2 \cup e$ é uma tríade de M . Isso finaliza a demonstração. \square

Lema 3.1.5 *Seja M conexa com, ao menos dois elementos e $C = \{e_1, \dots, e_m\}$ um circuito de M com a propriedade de que $M \setminus e_i$ seja desconexa para $i = 1, \dots, m - 1$. Então C contém um 2-cocircuito evitando e_m .*

Demonstração: Suponha que o lema não seja válido e considere m como o menor valor para o qual o teorema não vale, é fácil observar que $m \geq 3$.

Se $2 \leq j \leq m - 1$ e $M \setminus e_j / e_1$ é conexa, então, como $M \setminus e_j$ é desconexa, podemos escrever $M \setminus e_j = M_1 \oplus M_2$ com e_1 sendo elemento de M_1 . Então $M \setminus e_j / e_1 = (M_1 / e_1) \oplus M_2$, ou seja, M_1 / e_1 é vazia e e_1 é um colaço de $M \setminus e_j$, então e_1 e e_j estão em série em M e o teorema vale. Logo $M \setminus e_j / e_1$ é desconexa para todo $2 \leq j \leq m - 1$.

Vamos ver que $m > 3$, para isso suponha que $m = 3$, então M / e_1 é conexa, pois $M \setminus e_1$ é desconexa e e_2 e e_3 estão em paralelo em M / e_1 , logo $M / e_1 \setminus e_2$ é conexa e o teorema vale como atestado acima.

Então o teorema vale para $C - e$ em M / e_1 , pois, como $M \setminus e_1$ é desconexa M / e_1 é conexa. Logo, temos um 2-cocircuito de M / e_1 (e , portanto de M) contido em $\{e_2, \dots, e_{m-1}\}$. \square

Lema 3.1.6 *Seja (X, Y) uma 2-separação de uma matróide conexa e cossimples M e C um circuito de M encontrando X e Y . Então C tem um 2-subconjunto A com $M \setminus A$ conexa.*

Demonstração: Suponha que o lema não seja válido e seja $M = M_X \oplus_2 M_Y$ com $E_{M_X} = X \cup p$ e $E_{M_Y} = Y \cup p$ para algum $p \notin E$. Se para $Z = X, Y$, M_Z possui um elemento $e_Z \in C$ tal que $M \setminus e_Z$ é conexa então $\{e_X, e_Y\}$ é o conjunto A que faz o teorema valer, digamos então que $M_Y \setminus e$ é desconexa para todo $e \in C \cap Y$. Então pelo lema anterior aplicado a M_Y e $C \cup p$, temos um 2-cocircuito A contido em C , que também será cocircuito de M , contrariando a cossimplicidade de M . \square

Definição 3.1.7 *A matróide associada ao grafo de vértices $\{0, \dots, n\}$ com uma aresta incidente a cada par $(1, 2), (2, 3), \dots, (n - 1, n), (n, 1), (0, 1), (0, 2), \dots, (0, n)$ é chamada a **roda** de tamanho n : \mathcal{W}_n e dizemos que o circuito formado pelas arestas $(1, 2), (2, 3), \dots, (n - 1, n), (n, 1)$ é sua **calota** e os elementos fora da calota serão chamados de **raios**.*

O próximo resultado é um teorema de [Akkari, 1992]:

Teorema 3.1.8 *Seja M uma matr oide 3-conexa com, pelo menos 4 elementos e C um circuito de M . Suponha que, no caso de M ser isomorfa uma roda de posto maior que ou igual a 4, C não seja sua calota. Se $M \setminus A$   desconexa para cada 2-subconjunto A de C , então cada 2-subconjunto de C está em uma triáde de M .*

O próximo lema   uma variante desse último teorema:

Lema 3.1.9 *Seja M uma matr oide 3-conexa com, pelo menos, 4 elementos e C um circuito de M . Suponha que, no caso de M ser isomorfa uma roda de posto maior que ou igual a 4, C não seja sua calota. Se $M \setminus A$   desconexa para cada subconjunto $A \subseteq C$, com $r^*A = 2$, então cada 2-subconjunto de C está em uma triáde de M com terceiro elemento fora de C .*

Demonstra o: Suponha a não validade do lema e escolha um contra-exemplo M minimizando $|E|$. Se $|E| = 4$, então $M \cong U_{2,4}$, mas as hipóteses do lema não são válidas para essa matr oide. Então $|E| \geq 5$. Como M   um contra-exemplo, temos um 2-subconjunto Y de C que não está contido em nenhuma triáde com terceiro elemento fora de C . Por 3.1.9, Y está contido em um a triáde T^* de M , que estará, portanto contida em C . Vamos provar o seguinte.

3.1.10 *Se $e \in T^*$, então M/e não   isomorfa a uma roda com posto maior que ou igual a 4 de calota $C - e$.*

Suponha que $T^* := \{e, f, g\}$. Veja que g está num triângulo T , de M/e com dois raios. Observe que, por ortogonalidade com T^* , T não   circuito de M/e , portanto $T \cup e$ o  . Seja A um 2-subconjunto de $C - e$ evitando g e formado por elementos de $C - e$ não adjacentes se olharmos M/e como um grafo tipo roda. Veja que $T \cup e$   um circuito de $M \setminus A$, portanto e não   colaço dessa matr oide. Observe que $M/e \setminus A$ não possui colaços. Portanto $M \setminus A$ não possui colaços. Observe que todo elemento de $M \setminus A$ fora de $C - e$ está em um circuito com um elemento de $C - (A \cup e)$. Para mostrar que $M \setminus A$   conexa, basta mostrar que todos os elementos de $C - (A \cup e)$ estão numa mesma componente, sejam $f_1, f_2 \in C - A$. Por 3.1.8 existe uma triáde $T_1^* := \{f_1, f_2, f_3\}$ de M . como $M \setminus A$ não possui colaços, então T_1^*   triáde de $M \setminus A$ ou seus elementos estão em série em nessa matr oide, que  , portanto conexa. O que contraria o fato de M ser um contra-exemplo para o teorema.

3.1.11 M/e é não 3-conexa para todos elementos $e \in T^*$.

Suponha que tenhamos $e \in T^*$ tal que M/e seja 3-conexa. Seja $A \subseteq C - e$ tal que $r^*A = 2$. Se $M/e \setminus A$ é conexa, como, por hipótese, $M \setminus A$ é desconexa, então e é um colaço de $M \setminus A$ e A gera e em M^* . Logo $r^*A \cup e = 2$ e $M \setminus (A \cup e) = M/e \setminus A$ é conexa, uma contradição. Portanto $M/e \setminus A$ é desconexa para todo $A \subseteq C$ com $r^*A = 2$. Pela escolha de M , o lema vale para M/e , ou seja, por 3.1.10, para cada 2-subconjunto $X \subseteq C - e$ existe uma tríade, T_X^* de M/e tal que $X \subseteq T_X^*$ e $T_X^* \not\subseteq C - e$. Evidentemente, T_X^* também é uma tríade de M . Então $M^*|(T^* \cup T_{T^*-e}^*) \cong U_{2,4}$ e $T^* \cup T_{T^*-e}^*$ contém Y e o elemento f de $T_{T^*-e}^*$ fora de C . Portanto $Y \cup f$ é uma tríade de M ; uma contradição. Concluimos a validade de 3.1.11.

Pelo lema do triângulo de Tutte, os elementos e, f e g de T^* podem ser ordenados de forma que $E - T^*$ contenha elementos d e h tais que $\{d, e, f\}$ e $\{f, g, h\}$ são triângulos de M . Chegamos a uma contradição, pois podemos ver que $M \setminus T^*$ é conexa, $T^* \subseteq C$, e $r^*T^* = 2$. \square

Lema 3.1.12 *Seja C um circuito com, pelo menos 3 elementos em uma matróide conexa e cossimples M . Se $M \setminus A$ é desconexa para cada subconjunto $A \subseteq C$, com $r^*A = 2$, então existe uma matróide 3-conexa H em $\Lambda_2^u(M)$, com pelo menos 4 elementos, onde C é um circuito de H , e:*

- (i) H é isomorfa a uma roda na qual C é a calota; ou
- (ii) cada 2-subconjunto de C está contido em uma tríade de H não contida em C .

Além disso, existe um subconjunto $W \subseteq E - C$ e uma família \mathcal{M} de matróides conexas $\{N_b; b \in W\}$, tal que M é a 2-soma de H com todos os elementos de \mathcal{M} .

Demonstração: Observe que o lema 3.1.6 implica que:

3.1.13 *Para cada 2-separação (X, Y) de M , $C \subseteq X$ ou $C \subseteq Y$.*

Por 3.1.13, existe uma matróide $H \in \Lambda_2^u(M)$ da qual C é um circuito, H não é um cocircuito, pois $|C| \geq 3$, e H não é um circuito, pois M é cossimples. Então H é 3-conexa com pelo menos 4 elementos. Dado $A \subseteq C$,

com $r_{H^*}A = 2$, como $H^*|A = M^*|A$, temos que $r_{M^*}A = 2$, então $M \setminus A$ é desconexa. Consequentemente $H \setminus A$ também é desconexa.

Então, pelo lema 3.1.9, ou H é uma roda de calota C , ou cada 2-subconjunto de C está contido em uma tríade de H não contida em C . As outras afirmações do lema seguem da estrutura da árvore de de composição de M : $W = E_H - E_M$, ou seja: W é o conjunto dos elementos que rotulam as arestas adjacentes a H na árvore de de composição de M e N_b é a matróides adjacentes a b na árvore obtida pela contração de todas as arestas da árvore de de composição de M que não estão em W (segundo o processo descrito em 2.4.6, (v)). \square

Lema 3.1.14 *Seja M 3-conexa com, pelo menos, 4 elementos e C um circuito de M . Suponha que $M \setminus A$ é desconexa para cada $A \subseteq C$ tal que $r^*A = 2$. Seja $Z := \{e \in E - C; A \cup e \text{ é tríade de } M \text{ para algum 2-subconjunto } A \subseteq C\}$. Então:*

(i) $|Z| = 1$ e $M \cong U_{|C|-1, |C|+1}$; ou:

(ii) M não possui um circuito D tal que $|D \cap Z| = 1$.

Demonstração:

Supondo a validade de (i), é fácil observar a existência do circuito D que contraria (ii).

Se M é uma roda de posto, pelo menos, 4 com calota C , então Z é o conjunto de seus raios e a interseção e cada circuito de M distinto de C tem pelo menos dois raios. Então, pelo lema 3.1.9, podemos assumir que cada 2-subconjunto $\{a, b\}$ de C está contido em uma tríade de M com o terceiro elemento fora de C , denotaremos uma tal tríade por T_{ab}^* .

Suponha a não validade de (ii), seja D um circuito com $D \cap Z = \{e\}$. Temos $a_0, b_0 \in C$ tais que $T_{a_0b_0}^* = \{a_0, b_0, e\}$. Por ortogonalidade, digamos que $a_0 \in D$, por ortogonalidade novamente, qualquer que seja $b \in C - D$, necessariamente $e \in T_{a_0b}^*$. Então $\{a_0, e\} \cup (C - D)$ está contido em uma reta L^* de M^* . Como o processo pode ser feito para qualquer $a_0 \in D - e$, concluímos que $C \cup e$ está contido em L^* . Mas como todo elemento de Z está numa tríade com dois elementos de $C \subseteq L^*$ então $C \cup Z \subseteq L^*$. Por ortogonalidade, $Z = \{e\}$, pois se tivéssemos outro elemento f em Z , e e f estariam numa tríade com terceiro elemento em C , uma contradição. Observe que:

$$r(C \cup e) + r(E - (C \cup e)) - rM = r(C \cup e) + r^*(C \cup e) - |C \cup e| \leq |C| + 2 - (|C| + 1) = 1.$$

Como M não é 2-separada, então $|E - (C \cup e)| \leq 1$. Caso existir um elemento em $E - (C \cup e)$ este estaria em L^* , mas isso contraria o fato deste elemento não estar em Z . Logo $E - (C \cup e) = \emptyset$. Segue que $E = L^*$ e $M \cong U_{|C|-1, |C|+1}$. \square

3.2 Matróides de Sylvester

O seguinte resultado está em [oxley,10.2.5], e parte de sua demonstração foi omitida por ser demasiadamente longa.

Lema 3.2.1 *As seguintes condições são equivalentes se M possui, ao menos 4 elementos.*

- (i) *Cada par de elementos distintos de M está em uma tríade;*
- (ii) *M é conexa e para cada par de elementos distintos e e f , $M \setminus e$ é conexa e $M \setminus e, f$ desconexa.*
- (iii) *M é 3-conexa e $M \setminus e, f$ é desconexa para cada par de elementos e e f distintos.*

Demonstração: Vamos mostrar que (i) implica (ii) e (ii) implica (iii), mas vamos omitir a demonstração de que (iii) implica (i):

Suponha que (i) vale, então M não possui elementos em série. Os menores cocircuitos de $M \setminus e$ são os pares de elementos em série, que são, justamente aqueles que estavam em tríade com e em M . Estes elementos estão todos numa mesma componente conexa, enquanto as outras tríades de M que não continham e continuam sendo tríades em $M \setminus e$. Logo dois elementos estão em uma mesma tríade ou estão em série. Portanto, $M \setminus e$ é conexa. Por outro lado, dados elementos e e f de M , como e e f estão em uma mesma tríade, digamos $\{e, f, g\}$, então g será um colaço de $M \setminus e, f$.

Suponha que M não seja 3-conexa, e (ii) continue valendo. Então podemos escrever $M = M_1 \oplus_2 M_2$ com o elemento p sendo a interseção dos elementos de M_1 e M_2 . Tome $e \in M_1$ e $f \in M_2$ como $M \setminus e = (M_1 \setminus e) \oplus_2 M_2$ e $M \setminus f = M_1 \oplus_2 (M_2 \setminus f)$ são conexas, então $M_1 \setminus e$ e $M_2 \setminus f$ também o são, assim como $M \setminus e, f = (M_1 \setminus e) \oplus_2 (M_2 \setminus f)$, uma contradição. \square

Definição 3.2.2 Se a dual de uma matróide atende às condições (i)-(iii) do teorema acima, esta matróide é dita uma **matróide de Sylvester**. Observe que uma matróide é de Sylvester se e somente se cada par de elementos distintos está em um triângulo.

Corolário 3.2.3 Uma matróide N , com pelo menos 4 elementos, é dual de uma matróide de Sylvester se, e somente se, é cossimples, conexa e, para cada 2-subconjunto A , de E_N , $N \setminus A$ é desconexa.

Definição 3.2.4 Dizemos que uma subfamília $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ cobre $X \subseteq E$ **duplamente** se cada elemento de X está em, pelo menos dois elementos de \mathcal{C}' .

Lema 3.2.5 Suponha que N^* é uma matróide de Sylvester com, ao menos 4 elementos, ou $N \cong U_{1,m}$ para algum $m \geq 3$. Então, dado um circuito C_1 de N e $g \in C_1$, existem circuitos C_2, \dots, C_{n+1} de N tais que:

- (i) C_1, \dots, C_{n+1} são distintos;
- (ii) $\{C_1, \dots, C_{n+1}\}$ cobre E_N duplamente;
- (iii) $C_i - (C_{i-1} \cup C_{i-2} \cup \dots \cup C_1) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{2, \dots, n\}$;
- (iv) $g \notin C_2 \cup \dots \cup C_n$; e:
- (v) $n = r^*N$.

Demonstração: Se, $N \cong U_{1,m}$, seja $a_1 := g$, $E_N := \{a_1, \dots, a_m\}$, $n := m - 1$, $C_i := \{a_i, a_{i+1}\}$ para $1 \leq i \leq n$ e $C_m := \{a_1, a_m\}$. Então o lema vale com essa família de circuitos.

Seja N^* uma matróide de Sylvester, com $|E_N| \geq 4$ e $g \in C_1 \in \mathcal{C}_N$, seja $b_1 := g$ e $\{b_1, \dots, b_n\}$ uma cobase para o cohiperplano $E - C_1$, então $B := \{b_2, \dots, b_n\}$ é uma cobase de N e $E - B$ uma base de N . Para $i = 2, \dots, n$ seja C_i o circuito fundamental de b_i com respeito a $E - B$ em N , note que C_1 é o circuito fundamental de b_1 com respeito a $E - B$ em N .

Para cada $i \in \{2, \dots, n\}$, $\{b_1, b_2\}$ está contido numa tríade $\{b_1, b_i, b'_i\}$, então $\{b_1, b'_2, \dots, b'_n\}$ gera B em N^* , e é, portanto, uma cobase de N , considere o hiperplano H^* gerado por $\{b'_2, \dots, b'_n\}$ em N^* e seja $C_{n+1} := E - H^*$.

Vamos verificar que C_1, \dots, C_{n+1} satisfaz (i)-(v):

(iii), (iv) e (v) se verificam por construção.

(i): C_1, \dots, C_n são distintos pois, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $b_i \in C_j$ se e somente se $i = j$. Como b_1 não está em H^* (isso implicaria que $b_1, \dots, b_n \in H^*$) e, para $2 \leq i \leq n$, $b_i \notin H^*$ (isso implicaria que $b_1 \in H^*$), então $C_{n+1} := E - H^*$ é distinto dos circuitos anteriores pois contém B .

(ii): No item anterior, vimos que a família de circuitos escolhida cobre B duplamente, falta verificar essa propriedade para os elementos de $E - B$: Suponha, por contradição, que $e \in E - B$ esteja num único circuito da família construída: C_i . Então, para $j \neq i$, $C_j \subseteq E - B - e$, ou seja: $E - B - e$ gera b_j em N , mas $E - B - e$ não gera b_i em $N \setminus e$, pois o único circuito de N contido em $(E - B) \cup b_i$ é C_i . Então $cl_{M \setminus e}(E - B - e) = E - \{e, b_i\}$ e b_i é colaço de $N \setminus e$, o que contraria o lema anterior.

□

3.3 Spikes

Definição 3.3.1 Para $r \geq 3$, M é um **spike** de posto r , **pernas** L_1, \dots, L_r e **tip** e se:

(i) cada L_i é um triângulo contendo e ;

(ii) para $1 \leq k \leq r - 1$ a união de k conjuntos distintos dentre L_1, \dots, L_r tem posto $k + 1$; e:

(iii) L_1, \dots, L_r cobre E .

Segue, diretamente da definição, que duas pernas se encontram somente no tip, e M é uma matróide simples.

Durante esta seção, M denotará um spike arbitrário de posto r , tip e e pernas L_1, \dots, L_r e $L_i := \{a_i, b_i, e\}$.

Proposição 3.3.2

(i) Para $i \neq j$ $(L_i \cup L_j) - e$ é um circuito e cocircuito de M .

- (ii) Com exceção das pernas e dos circuitos listados no item anterior, os circuitos de M são hiperplanos ou geradores.
- (iii) M/e pode ser obtida de um circuito pelo acréscimo de um elemento em paralelo a cada elemento do circuito.
- (iv) Existe um circuito $D = \{e, d_1, \dots, d_r\}$ com $e \neq d_i \in L_i$.
- (v) Os únicos possíveis hiperplanos de M são aqueles formados pela união de $r - 2$ pernas, os circuitos-hiperplanos do item (ii) e conjuntos formados por $r - 1$ elementos distintos do tip de um circuito da forma $\{e, d_1, \dots, d_r\}$.
- (vi) Para cada $i = 1, \dots, r$, $M \setminus e/a_i$ e $(M \setminus e \setminus a_i)^*$ são spikes de posto $r - 1$ e tip b_i .

Demonstração: (i) Por C3) em L_i, L_j e e , temos a existência de um circuito $C \subseteq \{a_i, b_i, a_j, b_j\}$. Suponha por contradição que $|C| < 4$, então C intersecta, digamos, L_i em somente um elemento, digamos a_i , então, como e e a_i são gerados por L_j , logo b_i, e , portanto, L_i, o são. Uma contradição com o item (ii) da definição de spike. Digamos que $i = 1$ e $j = 2$. Se $L_3 \cup \dots \cup L_k$ gera algum elemento de L_1 (resp. L_2) então $L_3 \cup \dots \cup L_k$ gera L_1 (resp. L_2), e, conseqüentemente, gera M . Uma contradição, pois $rM = r$ e $r(L_3 \cup \dots \cup L_k) = r - 1$.

(ii) Suponha que C é um circuito que não esteja listado no item (i) nem seja uma perna. Dogamos que C encontre exatamente as pernas L_1, \dots, L_k fora do tip, conforme o que foi analisado no item anterior, temos que $k \geq 3$ e que C encontra, no máximo, uma perna em mais de um elemento. Pela existência de C , $L_1 \cup \dots \cup L_{k-1}$ gera L_k segue, por 3.3.1, (ii), que $k = r$. Então $|C| = r + 1$ ou $|C| = r$. No primeiro caso C encontra uma perna em dois elementos, logo C gera o tip, e gera, por conseqüência, E_M . No segundo caso, observe que C não pode gerar um elemento de $E_M - C$, pois isso implicaria que C gera o tip e, portanto a matróide, uma contradição com $|C| = r$. C é, portanto, nesse caso, um hiperplano.

(iii) Como M é simples, então $r(M/e) = r - 1$. Seja $X := \{a_1, \dots, a_r\}$, como $|X| = r$, $X \in \mathcal{D}_{M/e}$, ou seja, existe um circuito $C \in \mathcal{C}_M$ tal que $C - e \subseteq X$, segue da classificação dos circuitos de M dada pelos itens anteriores que $C - e = X$ e: $C = X$ ou $C = X \cup e$, nos dois casos verificamos que $X \in \mathcal{C}_{M/e}$, como cada b_i é paralelo a a_i em M/e , segue o resultado.

(iv) Observe que $D := \{e, a_1, \dots, a_r\}$ é dependente e gerador de M , logo contém um circuito C , se $C \neq D$, então, pelo item (ii), $C = D - e$. Por C3'), temos um circuito C' contido em $(L_1 \cup C) - a_1$ que contém e , pelo item (ii), segue que $C' = (D - \{e, a_1\}) \cup b_1$. Isso finaliza a demonstração de (iv).

(v) Suponha que o tip está em um hiperplano H . Complete o tip até um independente I gerador do hiperplano. Observe que em I , além do tip, só pode haver mais um elemento de cada perna. Então I é formado pelo tip mais $r - 2$ elementos de $r - 2$ pernas distintas: $L_{i_1}, \dots, L_{i_{r-2}}$. Mas $H = cI = L_{i_1} \cup \dots \cup L_{i_{r-2}}$. Por outro lado, se $e \notin H$, então H pode ter, no máximo, um elemento de cada perna, ou seja: o H conterà $r - 1$ elementos de $r - 1$ pernas distintas, se o conjunto X destes $r - 1$ elementos não estiver contido num circuito-hiperplano listado em (ii), então X é um hiperplano, pois podemos verificar que $X \in \mathcal{I}$ (não contém circuito). Logo $rX = r - 1$ e X não pode evitar exatamente um elemento de um dos circuitos de M . Portanto X é um fechado.

(vi) Digamos que $i = r$, quando deletamos o elemento e de M os únicos circuitos que restam são aqueles nas formas $\{a_i, a_j, b_i, b_j\}$ e $\{d_1, \dots, d_r\}$, conforme itens (i) e (ii); quando conbtraímos a_r obtemos os triângulos $K_j := \{b_r, a_j, b_j\}$ que são as pernas de $M \setminus e/a_r$, de fato, elas cobrem $E - x - e$:

$$\begin{aligned} r_{M/a_r}(K_{j_1} \cup \dots \cup K_{j_k}) &= r(K_{j_1} \cup \dots \cup K_{j_k} \cup a_r) - r a_r = \\ &= r((L_r \cup L_{j_1} \cup \dots \cup L_{j_k}) - e) - 1 = k + 1 \end{aligned}$$

Portanto, $M \setminus e/a_1$ é spike de tip b_1 . Do item (v) concluímos que os cocircuitos, por serem complementos dos hiperplanos podem ter cardidnalidade 4, $r + 1$ ou $r + 2$, os cocircuitos de 4 elementos são aqueles listados em (i) e não encontram o tip. Então qualquer elemento de $\{C^* - \{e, a_1\}; C^* \in \mathcal{C}^*\}$ com 3 elementos é minimal nessa família e é, portanto, um circuito de $(M \setminus e \setminus a_1)^* = M^*/e/a_1$ e estes são os conjuntos da forma $K_j := b_1, b_j, a_j$, que são as pernas de $(M \setminus e \setminus a_1)^*$, de fato, dada uma família $\mathcal{L} \subseteq \{2, \dots, r\}$:

$$\begin{aligned} r_{M^*/a_1/e}(\cup_{j \in \mathcal{L}} K_j) &= r_{M^*}((\cup_{j \in \mathcal{L}} K_j) \cup \{e, a_1\}) - r_{M^*}\{e, a_1\} = \\ &= r^*(\cup_{j \in \mathcal{L} \cup 1} L_j) - 2 = |\cup_{j \in \mathcal{L} \cup 1} L_j| - r + r(E - (\cup_{j \in \mathcal{L} \cup 1} L_j)) - 2 = \\ &= 2|\mathcal{L} \cup 1| + 1 - r + r((\cup_{j \in \{2, \dots, r\} - \mathcal{L}} L_j) - e) - 2 = \\ &= 2|\mathcal{L}| + 1 - r + r(\cup_{j \in \{2, \dots, r\} - \mathcal{L}} L_j) = \end{aligned}$$

$$= 2|\mathcal{L}| + 1 - r + |\{2, \dots, r\} - \mathcal{L}| + 1 = |\mathcal{L}| + 1$$

□

O spike livre de posto r é aquele cujos únicos circuitos não geradores são as pernas e aqueles listados no item (i) da proposição.

No caso binário, existe apenas um único spike de posto r : Considere um circuito D como no item (iv) da proposição, digamos que $D = \{e, a_1, \dots, a_r\}$, podemos representar $a_1 \dots, a_n$ por I_r , conseqüentemente, e será representado por $(1, 1, \dots, 1)$ e b_i será representado pelo vetor cuja única entrada nula é a i -ésima. M é a matróide vetorial associada pela matriz $[I_r | J_r - I_r | \mathbb{1}]$, onde J_r é a matriz $r \times r$ com todas as entradas iguais a 1 e $\mathbb{1}$ o vetor coluna com entradas iguais a 1, com os respectivos rótulos $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, e$.

Definição 3.3.3 *Sejam C e D circuitos de uma matróide N , onde $D = \{e, a, b\}$ e $C \cap D = \{e, a\}$, dizemos que C é indiferente com respeito a $D - e$ em N , se $(C - a) \cup b$ também é um circuito de M .*

Lema 3.3.4 *Se M tem um menor spike em $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ não isomorfo a F_7 , então existe um circuito D , como no item (iv) da última proposição, que é indiferente com respeito a L_i em M , para $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Demonstração: Seja M_1 um menor spike de M em $L_1 \cup L_2 \cup L_3$. Então M_1 tem um 4-circuito C conforme item (iv) da última proposição, o qual podemos assumir que é $\{e, a_1, a_2, a_3\}$. Digamos que $M_1 = M \setminus X/Y$. Então $X \cup Y = (L_4 \cup \dots \cup L_r) - e$. Podemos assumir que $Y = \{a_4, \dots, a_r\}$ e $X = \{b_4, \dots, b_r\}$, pois se deletássemos dois elementos da mesma perna perderíamos todos os circuitos não listados em (i), impossibilitando a existência de C , e se contraíssemos dois elementos da mesma perna transformaríamos o tip num laço. O circuito C teve de ser originado de um circuito de M pela exclusão de elementos de Y , pela caracterização dos circuitos de M que a proposição precedente nos deu, podemos esgotar as possibilidades e concluir que o único possível circuito que originou C foi $D := C \cup Y$, que é, portanto um circuito de M .

Suponha que D não seja indiferente com respeito a nenhum dos conjuntos $L_i - e = \{a_i, b_i\}$, $i = 1, 2, 3$, i.e.: $\{e, a_i, a_j, b_k\}$ não é circuito para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, o que implica que $\{a_i, a_j, b_k\}$ é circuito para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ (item (ii) da proposição). Suponha agora que M_1 não é isomorfa a F_7 . Então $\{b_1, b_2, b_3\} \notin \mathcal{C}_1$, logo $\{e, b_1, b_2, b_3\} \in \mathcal{C}_1$ (observe que chegamos a conclusão de que $M_1 \cong F_7^-$). Assim como mostramos que $D := Y \cup C \in \mathcal{C}$, verifica-se que $\{e, b_1, b_2, b_3\} \cup Y$ é circuito de M . e o mesmo para $\{e, a_i, b_j, b_k\} \cup Y$,

com $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Então $\{e, b_1, b_2, b_3\} \cup Y$ é o circuito indiferente com respeito a $L_i - e$ em M que desejávamos. \square

O seguinte lema será usado na próxima demonstração, é um resultado de [Seymour, 1981].

Lema 3.3.5 *Se M é uma matróide 3-conexa não binária e e e f são elementos de M , então M possui um menor isomorfo a $U_{2,4}$ utilizando e e f .*

Lema 3.3.6 *M possui circuitos D_1 e D_2 que contém o tip e $L_2 \cup \dots \cup L_r \subseteq D_1 \cup D_2$. Além disso a menos que M seja um spike binário de posto ímpar. Tais circuitos D_1 e D_2 podem ser escolhidos de forma que $L_1 \subseteq D_1 \cup D_2$.*

Demonstração: Vejamos, primeiramente, o caso no qual M é um spike binário, olhe para os elementos de M como sendo vetores de $GF(2)^r$: e tem todas as coordenadas iguais a 1, a_i tem somente a i -ésima coordenada igual a 1 e b_i , somente a i -ésima coordenada igual a 0. Se r é par, então $a_i = \sum_{j \neq i} b_j$ ou seja: b_1, \dots, b_r é uma base de M e, como $b_1 + \dots + b_r = e$, $\{e, b_1, \dots, b_r\}$ é um circuito D_2 então basta escolher $D_1 = \{e, a_1, \dots, a_r\}$. Se r for ímpar, então $\sum_{i=1, \dots, r} b_i = 0$, em particular, $\{b_1, \dots, b_r\}$ é um circuito (pela caracterização dos circuitos de um spike). Como $\{b_2, \dots, b_r\}$ é um independente e $a_1 + \sum_{i=2, \dots, r} b_i = e$, então $\{a_1, b_2, \dots, b_r\}$ não é circuito e não pode ser dependente por causa da estrutura de spike, então os circuitos que buscamos são: $\{e, a_1, b_2, \dots, b_r\}$ e $\{e, a_1, \dots, a_r\}$.

Suponha que M é não binária, então M tem um menor $N \cong U_{2,4}$ que usa e e a_1 . Podemos assumir que N usa b_1 , pois b_1 não pode ser contraído no processo de obtenção de N como menor de M . Digamos que o quarto elemento usado em N seja a_2 e que $N = M \setminus X / Y$. Note que nem Y ou X podem conter dois elementos de uma mesma perna e $b_2 \in X$, digamos que $Y = \{a_3, \dots, a_r\}$ e $X = \{b_2, \dots, b_r\}$. Observe que $Y \cup a_2$ é uma classe em série de $M/e \setminus X$ e portanto de $M \setminus X$, isso implica que $Y \cup \{e, a_1, a_2\}$ e $Y \cup \{e, b_1, a_2\}$ são circuitos de $M \setminus X$, logo de M . Então $\{e, a_1, \dots, a_r\}$ é um circuito de M indiferente com respeito a $L_1 - e$. Se $\{e, b_1, \dots, b_r\}$ é um circuito de M não temos mais o que mostrar, então, podemos assumir que $\{b_1, \dots, b_r\}$ é circuito e portanto $\{e, a_1, b_2, \dots, b_r\}$ é um circuito, por C3'), juntamente com $\{e, b_1, a_2, \dots, a_r\}$, temos os circuitos que procurávamos. \square

Capítulo 4

Empacotamento e cobertura por circuitos

4.1 Demonstração do teorema principal

Nesta seção vamos apresentar e demonstrar o teorema-alvo do trabalho, um resultado de James Oxley e Manoel Lemos, publicado em 2006.

Definição 4.1.1 *Seja M conexa e e um elemento de M , denotamos por $c_e M$ e $c_e^* M$ o tamanho de um maior circuito e de um maior cocircuito de M contendo e , respectivamente.*

Denotamos por $\mathcal{C}_e M$ a família dos circuitos de M contendo e . Denotamos por $\theta_e M$ o tamanho da menor subfamília de $\mathcal{C}_e M$ cuja união é E e por $\nu_e M$ o tamanho da menor subfamília de $\mathcal{C}_e M$ na qual quaisquer dois circuitos se encontram somente em e .

Teorema 4.1.2 *Seja M conexa com pelo menos dois elementos e seja e um elemento de M tal que M/e seja conexa. Então:*

$$\nu_e M + \theta_e M \leq r^* M + 2.$$

Se M não tem um menor F_7 usando e , então:

$$\nu_e M + \theta_e M \leq r^* M + 1.$$

Demonstração:

Suponha que o teorema não seja válido e seja M um contra-exemplo minimizando $|E|$.

Note que M não é um spike de tip e pois, neste caso:

- $r_M^* = r_M + 1$.
- $\nu_e M = r_M$
- Pelo lema 3.3.6, $\theta_e M = 2$, a menos que M seja um spike binário de posto ímpar, mas neste caso M tem um menor Fano usando e e $\theta_e M \leq 3$.

Definição 4.1.3 *Dado um menor conexo M' de M usando e e diferente de um colaço, definimos $sM' = 2$ se M' tem um menor Fano usando e e $sM' = 1$ caso contrário. Observe que se M'' é menor de M' , então $sM'' \leq sM'$, em particular $sM' \leq sM$.*

Como M desrespeita o teorema:

$$\nu_e M + \theta_e M \geq r^* M + sM + 1.$$

Observe que M não é um circuito, o que implica que $r^* M > 1$.

Seja C_1, \dots, C_m uma família de tamanho máximo de elementos de $\mathcal{C}_e M$ tais que a interseção de dois elementos da família seja e . Então $m = \nu_e M$.

Vamos ver que:

4.1.4 : $m \geq 2$

Para isso, vamos precisar do seguinte lema, um resultado em [Lemos, Oxley, 2001].

Lema 4.1.5 *Seja M conexa com pelo menos dois elementos e seja e um elemento de M . Então $\theta_e M^* \leq c_e M - 1$. Onde $c_e M$ é o tamanho de um circuito de tamanho máximo contendo e .*

Demonstração: A demonstração será por indução em $n := c_e M$. Se $c_e M = 2$, então, como M é conexa, dado $f \in E$, $\{e, f\}$ está contido em um circuito de tamanho 2, então M é uma classe de elementos em paralelo com e , i.e: $M \cong U_{1,|e|}$.

Suponha que $n \geq 3$ e o lema seja válido para todo natural em $\{2, \dots, n-1\}$. Seja C^* um cocircuito de M contendo e . Podemos assumir que $C^* \neq E$, pois neste caso o lema já está provado.

Usando o teorema 2.1.4 $|C^*| - 1$ vezes, nos elementos de $C^* - e$, chegamos à existência de uma partição (X, Y) de C^* tal que $N := M \setminus X/Y$ seja conexa.

Por ortogonalidade, cada circuito de M contendo e encontra X ou Y , então todos os circuitos contendo e serão eliminados durante a deleção ou reduzidos de tamanho durante a contração. Então:

$$c_e N < c_e M.$$

Como $C^* \neq E$, $|E_N| \geq 2$. Então, pela hipótese de indução, existem $k \leq c_e N - 1$ cocircuitos C_1^*, \dots, C_k^* de N contendo e cuja união cobre E_N . Para cada C_i^* existe um cocircuito D_i^* de M tal que $C_i^* = D_i^* - X$. Então C^*, D_1^*, \dots, D_k^* são $k + 1 \leq c_e M - 1$ cocircuitos de M contendo e e cobrindo E e o resultado segue. \square

Se $m = 1$ então:

$$1 + \theta_e M = \nu_e M + \theta_e M \geq r^* M + sM + 1.$$

Portanto: $\theta_e M \geq r^* M + sM \geq r^* M + 1 > c_e^* M - 1$, contrariando o lema que acabamos de demonstrar.

Lema 4.1.6 *M não possui cocircuito D^* contendo e e contido em algum C_i .*

Demonstração: Suponha o contrário, por ortogonalidade, $\{e\} \subsetneq D^* \cap C_j$ para todo $j = 1, \dots, m$. Mas, para $i \neq j$, $C_i \cap C_j = e$ e, como $m \neq 1$, então $D^* \cap C_j = \{e\}$, contrariando a ortogonalidade. \square

Lema 4.1.7 *M é cossimples.*

Demonstração: Suponha o contrário, então M , por não ter colaços, possui uma classe em série não trivial S . Pelo lema anterior, e não está em S . Seja $f \in S$. Observe que, como f está numa classe em série não trivial, então $\mathcal{C}_e M / f = \{C - f; C \in \mathcal{C}_e M\}$. Daí segue que M/f contraria a escolha de M . \square

Lema 4.1.8 *Para todo $f \in E - (C_1 \cup \dots \cup C_m)$, $M/e \setminus f$ é desconexa.*

Demonstração: Suponha que exista f contrariando o teorema, sendo $M/e \setminus f$ conexa, então, por argumentação análoga à apresentada na demonstração anterior, $M \setminus f$ é conexa, pois $\{e, f\}$ não é cocircuito de M e este fato

é a chave da demonstração:

Pelas minimalidade de M :

$$\nu_e M \setminus f + \theta_e M \setminus f \leq r^* M \setminus f + s M \setminus f.$$

Observe que:

- (i) $\nu_e M \setminus f = \nu_e M$, pois $f \notin C_1 \cup \dots \cup C_m$;
- (ii) $\theta_e M \setminus f \geq \theta_e M - 1$, pois dada um subfamília de $\mathcal{C}_e M \setminus f$ cobrindo $E - f$ basta acrescentar um circuito de M contendo f e e para chegar a uma subfamília de $\mathcal{C}_e M$ cobrindo E ;
- (iii) $r^* M \setminus f = r^* M - 1$; e
- (iv) $s M \setminus f \leq s M$.

Por (i)-(iv):

$$\nu_e M + \theta_e M - 1 \leq \nu_e M \setminus f + \theta_e M \setminus f \leq r^* M \setminus f + s M \setminus f \leq r^* M - 1 + s M,$$

contrariando a minimalidade de M . □

Lema 4.1.9 *Para todo $i = 1, \dots, m$, $M/e \setminus A$ é desconexa para todo $A \in C_i - e$, com $|A| \geq 2$.*

Demonstração: A demonstração desse lema segue a idéia anterior.

Dado um conjunto $A \subseteq C_i - e$ com, pelo menos, 2 elementos, então:

- (i) $r^* M \setminus A \leq r^* M - 2$, pois M é cossimples;
- (ii) $\nu_e M \setminus A \geq \nu_e M - 1$, pois se $j \neq i$, então $C_j \in \mathcal{C}_{M \setminus A}$;
- (iii) $\theta_e M \setminus A \geq \theta_e M - 1$, pois uma subfamília de $\mathcal{C}_e M \setminus A$ que cobre $E - A$ unida com C_i cobre E ; e
- (iv) $s M \setminus A \leq s M$.

Pelas desigualdades acima e pela minimalidade de M :

$$\nu_e M + \theta_e M - 2 \leq \nu_e M \setminus A + \theta_e M \setminus A \leq s M \setminus A + r^* M \setminus A \leq s M + r^* M - 2,$$

contrariando a própria minimalidade de M . □

Lema 4.1.10

$$E = C_1 \cup \dots \cup C_m$$

Demonstração:

Suponha a não validade do lema e escolha $f \in E - (C_1 \cup \dots \cup C_m)$. Por 4.1.8, $M/e \setminus f$ é desconexa. Como M/e é, por hipótese, conexa, temos que $M/e, f$ é conexa. Como e não é laço ou colaço de M , então M/f é conexa e, portanto:

$$\nu_e M/f + \theta_e M/f \leq r^* M/f + sM/f.$$

Temos que $r^* M/f = r^* M$ e $sM/f \leq sM$, além disso cada C_i contém um circuito de M/f , pois se o próprio C_i não for circuito de M/f , então existem um circuito C'_i de M tal que $C'_i - f \subseteq C_i$, então por C3*), existe $C''_i \subseteq C_i \cup C'_i = C_i \cup f$ contendo e e, por consequência, f neste caso, tal circuito de M/f contido em C_i é $C''_i - f$. Portanto $\nu_e M/f \geq \nu_e M$. Ou seja:

$$\nu_e M + \theta_e M/f \leq r^* M + sM,$$

o que implica que $\theta_e M/f > \theta_e M$. Seja $n = \theta_e M/f$ e seja D_1, \dots, D_n uma subfamília de $\mathcal{C}_e M/f$ cobrindo $E - f$. Então, para cada i , ou $D_i \cup f$ é circuito de M , ou D_i é circuito de M . Como $\theta_e M/f > \theta_e M$, então D_i é circuito de M para cada i . Como $M/e \setminus f$ é desconexa podemos supor que $D_1 - e$ e $D_2 - e$ estão em componentes conexas distintas de $M/e \setminus f$. Seja C' um circuito de M/e minimal em $C' - (D_1 \cup D_2)$ na propriedade de encontrar tanto D_1 quanto D_2 , o que implica que $f \in C'$, mais precisamente, $f \in C' - (D_1 \cup D_2)$. Vamos nos utilizar da seguinte afirmação mais à frente:

4.1.11 $C' - (D_1 \cup D_2)$ e uma classe em série de $(M/e) | [(D_1 \cup D_2 \cup C') - e]$.

Vamos demonstrar essa última afirmação por contradição. Se os elementos de $C' - (D_1 \cup D_2)$ não estão em série, então existe um circuito C'' que contém um, mas não todos, os elementos de $C' - (D_1 \cup D_2)$. Pela minimalidade de C' , digamos que C'' não encontra D_1 , mas somente D_2 . Seja $c \in (C' \cap C'') - D_2$ e $d_1 \in D_1 \cap C$. Por C3*) em C' , C'' , c e d_1 , temos um circuito $C''' \subseteq (C' \cup C'') - c \subseteq (C' \cup D_2) - c$, que contém $d_1 \in D_1$ e, por não estar contido em C' , deve encontrar também D_2 , e por não conter c , contraria a minimalidade de C' .

$M | (D_1 \cup D_2 \cup C')$ é conexa e tem $C' - (D_1 \cup D_2)$ como classe em série. Seja N a cossimplificação dessa matróide: $N := co[M | (D_1 \cup D_2 \cup C')]$ podemos assumir que f é elemento de N . Sejam D'_1, D'_2 e C'' os circuitos formados

pelos elementos de, respectivamente, D_1 , D_2 e C' em N . Se $|D'_1| = 2$, então como D_1 consiste em duas classes em série unidas em $M|(D_1 \cup D_2 \cup C')$. Mas nessa matróide, $D_1 \cap D_2 = e$, logo e não pode estar em série com nenhum outro elemento. Então $D_1 - e$ é uma classe em série em $M|(D_1 \cup D_2 \cup C')$, o que implica que $D_2 - e$ é circuito classe em série de $(M/e)|[(D_1 \cup D_2 \cup C') - e]$, mas esta última matróide não possui $D_1 - e$ como componente conexa, uma contradição, então $|D'_1|, |D'_2| \geq 3$. Vamos reunir informações sobre N :

- (i) N é conexa e cossimples;
- (ii) N tem circuitos D'_1 e D'_2 cuja interseção é e e cuja união evita um único elemento f de M ;
- (iii) Cada um desses dois circuitos acima tem, ao menos 3 elementos; e:
- (iv) $M \setminus f / e$ possui duas componetes conexas nos conjuntos $D'_1 - e$ e $D'_2 - e$.

Vamos fazer uso do seguinte fato:

4.1.12 *Uma matróide N que satisfaz (i)-(iv) tem o conjunto base escrito como união de dois circuitos, ambos contendo e e f .*

De fato, (sugiro que comece a desenhar) observe que $rN^* \setminus e / f =$, este fato, juntamente com (iv) implica que $N^* \setminus e / f$ tem as componetes conexas de posto 1, i.e.: cada componente é uma classe em paralelo, mas $N^* \setminus e$ é conexa e cossimples, então, cada par de arestas em paralelo de $rN^* \setminus e / f =$ unido com f é um triângulo em $N^* \setminus e$, e, como $rN^* \setminus e = 3$, então cada 4-conjunto dessa matróide que evita f é um circuito, concluímos então que $N^* \setminus f$ é a conexão em paralelo de duas retas nos conjuntos $(D'_1 - e) \cup f$ e $(D'_2 - e) \cup f$. Sejam a_i, b_i elemento distintos de $C_i - e$. Considere as retas em N^* geradas por $\{a_1, a_2\}$, $\{a_2, b_1\}$, $\{b_1, b_2\}$, e $\{b_2, a_1\}$. Como N^* é simples, então e não pode estar na interseção de duas dessas retas consecutivas na ordem cíclica dada, mas isso implica que e evita duas dessas retas não consecutivas: r_1 e r_2 . Observe que $E = (E - r_1) \cup (E - r_2)$ e, como $rM^* = 3$, então r_1 e r_2 são hiperpalnos de M^* e $E - r_1$ e $E - r_2$ são os circuitos que procuramos (pode parar de desenhar).

Então E_N é escrito como a união de dois circuitos, ambos contendo e e f : $E_N := D''_1 \cup D''_2$, i.e.: $M|(D_1 \cup D_2 \cup C')$ tem circuitos \tilde{D}_1 e \tilde{D}_2 que cobrem

$D_1 \cup D_2 \cup C'$ e cuja interseção contém $\{e, f\}$. Então $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, D_3, \dots, D_n$ cobrem E , então, $\theta_e M \leq \theta_e M/f$, uma contradição. \square

Como, por hipótese M/e é conexa, então e não está em paralelo com nenhum outro elemento de M . Podemos supor que existe um inteiro não negativo l tal que $(1 \leq i \leq l \Rightarrow |C_i| \geq 4)$ e $(1 + l \leq i \leq m \Rightarrow |C_i| = 3)$.

Para cada $i \in \{1, \dots, l\}$, $C_i - e$ é um circuito de M/e e $|C_i - e| \geq 3$. Como M/e é conexa e cossimples e, pelo lema 4.1.9, $M/e \setminus A$ é desconexa para cada 2-subconjunto $A \subseteq C_i - e$. Então, pelo lema 3.1.12, existe uma matróide 3-conexa, com, ao menos 4 elementos, $H_i \in \Lambda_2^u M/e$, a qual tem $C_i - e$ como circuito e:

4.1.13 (i) H_i é uma roda com C_i como calota, ou:

(ii) Cada 2-subconjunto de $C_i - e$ está contido em uma tríade de H_i não contida em $C_i - e$.

Além disso, existe um subconjunto $W_i \subseteq E_{H_i} - (C_i - e)$ e uma família \mathcal{M}_i de matróides conexas $\{N_b; b \in W_i\}$, tal que M/e é a 2-soma de H_i com todos os elementos de \mathcal{M}_i .

Defina: $Z_i = \{f \in E_{H_i} - C_i; A \cup f \text{ é uma tríade de } H_i \text{ para algum } 2\text{-subconjunto } A \subseteq C_i - e\}$.

Lema 4.1.14 Para $1 \leq i \leq l$, $Z_i \subseteq W_i$.

Demonstração: Suponha o contrário, e tome f em $Z_i - W_i$ (O que implica que $f \notin C_i$). Seja T^* uma tríade de M/e (e , conseqüentemente, de M) contendo f e tal que $T^* - f \subseteq C_i - e$. Pelo último lema, $f \in C_j - e$ para algum $j \in \{1, \dots, m\} - i$. Como $C_i \cap C_j = \emptyset$, então $T^* \cap C_j = f$, uma contradição à ortogonalidade. \square

Lema 4.1.15 Se $i \in \{1, \dots, l\}$ e $z \in Z_i$, então $r^*(H_i \cdot [(C_i - e) \cup z]) \geq 3$.

Demonstração: Como H_i é 3-conexa com, ao menos 4 elementos, então $r^* H_i \cdot [(C_i - e) \cup z] \geq 2$. Suponha que $r^* H_i \cdot [(C_i - e) \cup z] = 2$. Como $H_i \cdot [(C_i - e) \cup z]$ é cossimples, então $H_i \cdot [(C_i - e) \cup z] \cong U_{|C_i - e| - 2, |C_i - e|}$, ou seja, cada 3-conjunto nessa matróide é uma tríade. Seja $f \in C_i - e$. Como H_i é 3-conexa com, pelo menos 4 elementos, então, H_i/f é conexa. Como H_i é uma componente 3-conexa de M/e , então $M/e, f$ é conexa. Se M/f fosse

desconexa, então f estaria em paralelo com e , uma contradição. Então M/f é conexa. Pela minimalidade de M :

$$\nu_e M/f + \theta_e M/f \leq r^* M/f + sM/f \leq r^* M + sM.$$

Como $\nu_e M/f \geq \nu_e M$, $r^* M/f = r^* M$, $sM/f \leq sM$ e M contraria o teorema, concluímos que $\theta_e M/f < \theta_e M$. Seja D_1, \dots, D_n uma subfamília com tamanho mínimo de $\mathcal{C}_e M/f$ cobrindo $E_{M/f}$. Para cada i , ou D_i ou $D_i \cup f$ é um circuito de M , mas como $\theta_e M > \theta_e M/f$, então, cada D_i é um circuito de M , e, assim sendo, nenhum D_i pode conter $C_i - \{e, f\}$. Agora, ou $|C_i - \{e, f\}| = 2$ ou cada 3-subconjunto de $C_i - \{e, f\}$ está em é uma tríade de H_i , e portanto, de M/e e de M . Como $C_i - \{e, f\} \subseteq D_1 \cup \dots \cup D_n$, podemos supor que $D_1 \cap (C_i - \{e, f\}) \neq \emptyset$, i.e.: existe $x_1 \in (C_i - \{e, f\}) \cap D_1$. Mas $(C_i - \{e, f\}) \not\subseteq D_1$, ou seja, existe $x_2 \in (C_i - \{e, f\}) - D_1$. Então, por ortogonalidade $\{x_1, x_2, f\}$ é um coindependente de M . Mas $\{x_1, x_2, f\}$ está contido em $(C_i - e)$, logo é uma tríade de $H_i \cdot [(C_i - e) \cup z]$, e, conseqüentemente, de H_i , de M/e e de M , uma contradição. \square

Lema 4.1.16 *Se $i \in \{1, \dots, l\}$ e C é um circuito de H_i , então $|C \cap Z_i| \neq 1$ e $|Z_i| \geq 2$.*

Demonstração: Se $|Z_i| = 1$, então como H_i é conexa essa matróide tem um circuito C tal que $|C \cap Z_i| = 1$, tudo o que temos de fazer é mostrar que a existência de tal circuito C é contraditória, para isso suponha tal existência. Pelo lema 3.1.14 temos que $H_i \cong U_{|C_i|-1, |C_i|+1}$, o que implica que $r^*(H_i) = 2$, contradizendo o lema 4.1.15. \square

Para cada $i \in \{l+1, \dots, m\}$, denotamos $C_i = \{e, a_i, b_i\}$. Como M é cossimples, então M/e também é cossimples. Então, cada classe em série não trivial de $M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_n\}$ contém, no máximo, um elemento fora de $\{b_{l+1}, \dots, b_n\}$. De fato, sejam f e g distintos em $E - \{e, a_{l+1}, \dots, a_n\}$, estes elementos não estão em série em M/e e existe um cocircuito C^* contendo f , mas não g . Se f e g estão em série em $M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_n\}$, então C^* intercepta $\{a_{l+1}, \dots, a_n\}$, em, digamos, $\{a_{l+1}, \dots, a_k\}$. Então $(C^* - \{a_{l+1}, \dots, a_k\}) \cup \{b_{l+1}, \dots, b_k\}$ é um cocircuito de $M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_n\}$ contendo f , mas não g , logo, este elementos não estão em série em $M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_n\}$. Mas, de acordo com 4.1.10, $C_1 - e, \dots, C_n - e$ é uma família de circuitos disjuntos de M/e cobrindo $E - e$. Portanto, por ortogonalidade com $C_1 - e, \dots, C_l - e$, cada classe em série não trivial de $M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_n\}$ está contida em $\{b_{l+1}, \dots, b_m\}$.

Seja:

$$N := co(M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_m\}).$$

Então N é conexa e tem $C_1 - e, \dots, C_m - e$ dentre seus circuitos. Defina também:

$$X := (C_1 \cup \dots \cup C_l) - e.$$

Então:

$$E_N - X \subseteq \{b_{l+1}, \dots, b_m\}.$$

Observe que:

$$rN > 0.$$

Considere a árvore de decomposição canônica $T(M/e)$ de M/e . Para cada $i \in \{1, \dots, l\}$, H_i está em $\Lambda_2^u(M/e)$. Então, se necessário, mudando os rótulos de alguns elementos dos conjuntos W_i , podemos assumir que os elementos de W_i rotulam as arestas de $T(M/e)$ incidentes a H_i . Vamos frisar que H_1, \dots, H_l não são necessariamente distintas. Agora, em $T(M/e)$, contraímos, sucessivamente, as arestas que ligam dois vértices que estão ambos fora de $\{H_1, \dots, H_l\}$ até que não haja mais vértices adjacentes dessa forma. Em cada contração desse processo, rotulamos o novo vértice pela 2-soma das matróides que rotulavam os vértices relacinados com a resta contraída. No final desse processo vamos obter uma árvore $T'(M/e)$ com conjunto de arestas $W_1 \cup \dots \cup W_l$. Mais especificamente, como, para cada $i \in \{1, \dots, l\}$, $Z_i \subseteq W_i$ e $|Z_i| \geq 2$, nenhum H_i é um vértice terminal de $T'(M/e)$ e, além disso, $|E_{H_i}| \geq |C_i - e| + |Z_i| \geq 3 + 2 = 5$. Note que, se $l = 0$, então, $T'(M/e)$ consiste de um único vértice, rotulado por M/e . Como H_1, \dots, H_l são simples, não existem dois vértices adjacentes que evitam $\{H_1, \dots, H_l\}$, e os $C_i - e$ cobrem $E - e$, então dado um vértice H que não esteja em $\{H_1, \dots, H_l\}$, este vértice é uma união disjunta de 2-circuitos entre $C_{l+1} - e, \dots, C_m - e$.

De $T'(M/e)$, contruímos uma árvore de decomposição $T'(N)$ para N , induzindo as contrações e deleções que nos dão N a partir de M/e nos respectivos vértices que contém os elementos deletados ou contraídos. Se no final desse processo sobrarem vértices rotulados por *matrôides* com 2 elementos, estes serão vértices terminais, os eliminamos contraindo a aresta que o liga ao resto da árvore e rotulando o novo vértice pela 2-soma dos antigos. A árvore resultante desse processo será $T'(N)$. Para cada $i \in \{1, \dots, l\}$ existe um vértice H'_i obtido a partir de H_i , por, possivelmente, uma 2-soma com uma matróide constituída por 2 elementos, i.e., pela troca de rótulo de alguns elementos de W_i por membros de $\{b_{l+1}, \dots, b_m\}$. Seja Z'_i o conjunto Z_i após essa mudança de rótulos.

Lema 4.1.17 *Se C é um circuito de N , então $|C - X| \neq 1$.*

Demonstração: Como $rN > 0$ e N é conexa, o resultado é válido para $l = 0$. Suponha que $l > 0$ e que haja um circuito C de N tal que $|C - X| = 1$. Para cada subárvore T' de $T'(N)$, associamos uma matróide conexa $M(T')$ formada pela 2-soma de cada par de vértices adjacentes exaustivamente. Seja T' uma tal subárvore com número mínimo de vértices na qual $M(T')$ possua um circuito C' com $|C' - X| = 1$. Como $|C'| > 1$, segue que $C' \cap (C_j - e) \neq \emptyset$ para algum $j \in \{1, \dots, l\}$, digamos que $j = 1$. Então $C_1 - e$ encontra $E_{M(T')}$, e, pela construção de $T'(N)$, $C_1 - e \subseteq E_{M(T')}$. Suponha, primeiramente, que $M(T')$ é 3-conexa, ou seja $M(T') = H'_1$. Por ortogonalidade, ou $C_1 - e \subseteq C'$, ou $C' \cap Z'_1 \neq \emptyset$. No primeiro caso, teríamos $C_1 - e \subseteq C'$, uma contradição. Portanto $C' \cap Z'_1 \neq \emptyset$. Como $C' \cap Z'_1 \subseteq C' - X$ e este último conjunto tem apenas um elemento, digamos f , então $C' \cap Z'_1 = C' - X = \{f\}$. Pelo lema 3.1.14, $|Z_1| = 1$, contradizendo 4.1.16. concluimos, dessa forma, que $M(T')$ não pode ser 3-conexa, ou seja, T' não é constituída de apenas um vértice e possui uma aresta b . Sejam T_1 e T_2 as componentes conexas de $T' - b$. Isso é, $M(T') = M(T_1) \oplus_2 M(T_2)$. Pela escolha de T' , nem $M(T_1)$, nem $M(T_2)$ possui C' como circuito. Então existem circuitos D_1 e D_2 de $M(T_1)$ e $M(T_2)$, ambos contendo b , tais que $C' = (D_1 \cup D_2) - b$. digamos que $f \in D_1$. Então $D_2 - b \subseteq X$, i.e., $\{b\} = D_2 - X$, contradizendo a minimalidade de T' . \square

Seja $B := \{b_{l+1}, \dots, b_m\} \cap E_N$.

Lema 4.1.18 *Se A é um 2-subconjunto de B e $N \setminus A$ é conexa, então A é um circuito de N .*

Demonstração: Seja A um contra-exemplo para lema. Então existe um circuito C de N , com ao menos 3 elementos, contendo A . Pela definição de N , existe um circuito D de $M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_m\}$ tal que $C = D \cap E_N$. Seja $A = \{s_1, s_2\}$. como $|C| \geq 3$, então D encontra ao meonos 3 (possivelmente triviais) classes em série de $M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_m\}$, incluído as classes de s_1 e s_2 , digamos, S_1 e S_2 , respectivamente. Como $N \setminus A$ é conexa, então $M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_m\} \setminus (S_1 \cup S_2)$ é conexa. Seja $S' = \{a_i, b_i; b_i \in S_1 \cup S_2\}$. Então $M/e \setminus S'$ é obtida de $M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_m\} \setminus (S_1 \cup S_2)$, adicionando-se, para cada $j \in \{l+1, \dots, m\}$ tal que $a_j \notin S'$, o elemento a_j em paralelo com b_j . Então $M/e \setminus S'$ é conexa. Além disso $M \setminus S'$ é conexa, de outra forma, e seria colaço de $M \setminus S'$ contradizendo o fato de que $E_{M \setminus S'}$ é a união dos circuito em $\{C_1, \dots, C_m\} - \{C_i; b_i \in S_1 \cup S_2\}$. Dessa forma, $M \setminus S'$ satisfaz as hipóteses do teorema. Então:

$$\nu_e M \setminus S' + \theta_e M \setminus S' \leq r^* M \setminus S' + s M \setminus S'. \quad (4.1)$$

Observe que $\nu_e M \setminus S' = \nu_e M - (|S_1| + |S_2|)$. Além disso, $r^* M \setminus S' = r^* M / e \setminus S'$, e, em M/e , os elementos de S' constituem duas classes em paralelo distintas, nas quais, cada elemento foi substituído por dois elementos em paralelo. Então $r^* M / e \setminus S' = r^* M / e - (|S_1| + 1) - (|S_2| + 1)$ e, portanto $r^* M \setminus S' = r^* M - (|S_1| + |S_2| + 2)$. Como $sM \setminus S' \leq SM$, de (4.1), temos:

$$\nu_e M - (|S_1| + |S_2|) + \theta_e M \setminus S' \leq r^* M - (|S_1| + |S_2| + 2) + sM.$$

ou seja,

$$\nu_e M + (\theta_e M \setminus S' + 2) \leq r^* M + sM.$$

Para completar a demonstração, precisaremos do seguinte:

4.1.19 *M possui dois circuitos, ambos contendo e e cuja união contém S'.*

Admitindo-se 4.1.19, teremos que

$$\theta_e M \leq \theta_e M \setminus S' + 2,$$

o que contradiz o fato de M ser um contra-exemplo para o teorema.

Para provar 4.1.19, basta mostrar que:

4.1.20 *M possui um menor spike M' com tip e cujas pernas incluem os conjuntos C_i tais que b_i ∈ S_1 ∪ S_2, juntamente com, pelo menos, um outro conjunto.*

Pois assim, na validade de 4.1.20, o lema 3.3.6 nos garante a existência dos circuitos que validam 4.1.19.

Para demonstrar 4.1.20, vamos considerar duas possibilidades para o circuito C :

- (i) $C \cap (B - A) \neq \emptyset$; e
- (ii) $C \cap B = A$.

Suponha a validade de (i). Seja s_3 um elemento de $C \cap (B - A)$. Então o circuito D contém S_1 , S_2 e a classe em série na qual está s_3 , digamos, S_3 . Seja $D' = D \cup \{a_i; b_i \in S_1 \cup S_2 \cup S_3\}$. O menor com estrutura de spike desejado será $M' := [M|(D' \cup e)]/[D - (S_1 \cup S_2 \cup S_3)]$. Observe que os conjuntos $\{e, a_i, b_i\}$ tais que $b_i \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$ são um a família de triângulos que só se

encontram em e e cobrem E'_M , estes conjuntos serão as pernas do spike. Verificamos que a união de k dessas “pernas” tem o posto desejado pela existência do circuito $D \cap E'_M = \{b_i \in S_1 \cup S_2 \cup S_3\}$. Então, na validade de (i), vale 4.1.20.

Suponha agora a validade (ii). Segue da definição de N que $C - X = C \cap B$ e estamos supondo que $C \cap B = \{s_1, s_2\}$, então, como $C \not\subseteq A$, C encontra X . Portanto C encontra $C_j - e$ para algum $1 \leq j \leq l$.

Vamos mostrar que $S_1 \cup S_2$ é uma classe em série de $(M/e) \parallel [C \cup (C_j - e)]$. Suponha o contrário. Como $C \cap B = \{s_1, s_2\}$, então:

$$N \parallel [C \cup (C_j - e)] = [(M/e) \parallel (C \cup (C_j - e))] \parallel [(S_1 - s_1) \cup (S_2 - s_2)].$$

Então S_1 e S_2 não estão em série em $N \parallel [C \cup (C_j - e)]$. Então N possui um circuito C' que contém exatamente um dos elementos entre s_1 e s_2 . Este circuito encontra $C_j - e$. Como $C - X = \{s_1, s_2\}$, então $|C' - X| = 1$, contradizendo o lema 4.1.17. Portanto, $S_1 \cup S_2$ está em uma classe em série de $(M/e) \parallel [D \cup (C_j - e)]$.

Seja D_1 um circuito de $(M/e) \parallel [C \cup (C_j - e)]$ contendo $S_1 \cup S_2$ tal que $D_1 - (C_j - e)$ seja um circuito de $((M/e) \parallel [C \cup (C_j - e)]) / (C_j - e)$. Observe que $D_1 - (C_j - e)$ é classe em série de $(M/e) \parallel D_1 \cup (C_j - e)$. Observe que os circuitos de $(M/e) \parallel D_1 \cup (C_j - e)$ são $C_j - e$ e aqueles que contém $D_1 - (C_j - e)$. Seja $c_j \in D_1 \cap (C_j - e)$ e D_2 um circuito de $(M/e) \parallel D_1 \cup (C_j - e)$ contido em $[C_1 \cup (C_j - e)] - c_j$. Seja $d_j \in D_2 - D_1$. Observe que

$$((M/e) \parallel [D_1 \cup (C_j - e)]) / (C_j - \{e, c_j, d_j\})$$

é um circuito em $[D_1 - (C_j - e)] \cup c_j$ com o elemento d_j em paralelo com c_j .

Seja

$$M'' = (M \parallel [D_1 \cup S' \cup C_j]) / (C_j - \{e, c_j, d_j\}).$$

Segue de 1.7.5,(v), que:

4.1.21 *Se T é um triângulo de M ou M'' contendo e e tal que $T - e$ seja um circuito de $M'' / (V \cup e)$ para algum V que evita e , então, ou e é um laço de M'' / V , ou T é um triângulo de M'' / V .*

É fácil ver que $\{e, c_j, d_j\}$ é um circuito de M'' . Então, segue de 4.1.21, que para cada $b_i \in S_1 \cup S_2$, $\{e, a_i, b_i\}$ é um circuito de M'' . Pela escolha de c_j e d_j , segue que $[D_1 - (C_j - e)] \cup c_j$ é um circuito de M'' / e . Seja

$Y = [D_1 - (C_j - e)] - (S_1 \cup S_2)$. Então $M''/e/Y$ tem entre seus circuitos $S_1 \cup S_2 \cup c_j$, $\{c_j, d_j\}$ e todos os conjunto $\{a_i, b_i\}$ tais que $b_i \in S_1 \cup S_2$.

Nossa intenção é provar que M''/Y é o spike desejado. Para tal, temos que provar que e não é um laço de M''/Y . Como $[D_1 - (C_j - e)] \cup c_j$ é um circuito de M''/e , então, ou $[D_1 - (C_j - e)] \cup c_j$, ou $[D_1 - (C_j - e)] \cup c_j \cup e$ é circuito de M'' . No primeiro caso, escolha $b_i \in S_1 \cup S_2$. Então $\{e, a_i, b_i\}$ é um circuito de M'' . Lembrando que M'' é um circuito em $[D_1 - (C_j - e)] \cup c_j$ com o elemento d_j em paralelo com c_j , temos que $[D_1 - (C_j - e)] \cup c_j$ é um circuito de M'' que contém b_i e não gera e . Logo $[(D_1 - b_i) - (C_j - e) \cup c_j] \cup \{e, a_i\}$ é um circuito de M'' . Para verificar que M''/Y é um spike, podemos então assumir que $[D_1 - (C_j - e)] \cup c_j \cup e$ é um circuito de M'' , se necessário, trocando os rótulos de a_i e b_i . Como $Y \subseteq [D_1 - (C_j - e)] \cup c_j \cup e$, então e não é um laço de M''/Y . Por 4.1.21, $\{e, c_j, d_j\}$ e todos os conjuntos $\{e, a_i, b_i\}$, tais que $b_i \in S_1 \cup S_2$ são triângulos (e as pernas) de M''/Y , a condição dos postos se verifica pela existência do circuito $([D_1 - (C_j - e)] \cup c_j \cup e) - Y$. Portanto, 4.1.20 se verifica e o mesmo para o lema. \square

Lema 4.1.22 *Ou $rN = 1$, ou N é 3-conexa, com, pelo menos, 4 elementos.*

Demonstração: Suponha que $rN \geq 2$. como N é cossimples e conexa, então N possui, no mínimo, 4 elementos. Para provar que N é 3-conexa vamos provar que $T'(N)$ possui um único vértice. Suponha que $T'(N)$ possui, ao menos dois vértices e sejam K_1 e K_2 vértices terminais de $T'(N)$. Sejam k_1 e k_2 as arestas de $T'(N)$ incidentes a K_1 e K_2 , respectivamente. Vamos provar, primeiramente que:

4.1.23 *Para cada $i \in \{1, 2\}$, existe um elemento e_i em $E_{K_i} \cap B$ tal que $K_i \setminus e_i$ é conexa e, quando $rK_i \neq 1$, $\{e_i, k_i\}$ não é um circuito de K_i .*

Suponha, primeiramente, que $K_i = H'_j$ para algum $j \in \{1, \dots, l\}$. Neste caso existe um elemento e_i em $Z'_j - k_i$, pois, por 4.1.16, $2 \leq |Z_i| = |Z'_i|$. Como K_i é 3-conexa com, no mínimo, quatro elementos, $M \setminus e_i$ é conexa e $\{e_i, k_i\}$ não é um circuito de K_i . Logo 4.1.23 vale neste caso.

Suponha agora que $K_i \notin \{H'_1, \dots, H'_l\}$. Pela construção de $T'(N)$, segue que $E_{K_i} \subseteq B \cup k_i$. Como N é cossimples, se K_i possui um 2-cocircuito, este 2-cocircuito deve conter k_i , além disso K_i pode ter, no máximo um 2-cocircuito, caso contrário teríamos um 2-cocircuito não contendo k_i . Então, se $rK_i \neq 1$, podemos escolher um circuito C de K_i , com, no mínimo, 3

elementos, que contenha k_i . Por 3.1.5, existe um elemento e_i em C , tal que $K_i \setminus e_i$ seja conexa. Se $rK_i = 1$, então qualquer $e_i \in E_{K_i} \cap B$ estará numa classe não trivial de elementos em paralelo e 4.1.23 segue de qualquer forma.

Temos que $N = K_1 \oplus_2 N' \oplus_2 K_2$ para alguma matróide conexa N' (no caso em que $N = K_1 \oplus_2 K_2$, N' é par de elementos em paralelo formado por k_1 e k_2). Como $K_i \setminus e_i$ é conexa para $i = 1, 2$, então $N \setminus e_1, e_2$ é conexa e, por 4.1.18, $\{e_1, e_2\}$ é um circuito de N . Ou seja, existem circuitos D_1 de K_1 e D_2 de $N' \oplus_2 K_2$, tais que $(D_1 \cup D_2) - k_1 = \{e_1, e_2\}$, por cardinalidade, isso implica que $D_1 = \{e_1, k_1\}$. Uma contradição.

O fato de que $rN > 1$ implicar que $N = H'_1 = \dots = H'_l$ segue do que acabamos de mostrar e da construção de $T'(N)$. \square

Lema 4.1.24 *Se C é um circuito de N e $C \notin \{C_1 - e, \dots, C_l - e\}$, então $C - X$ é um circuito de N/X . Além disso, $N|X$ é a soma direta dos l circuitos $C_1 - e, \dots, C_l - e$, em particular, $l < m$.*

Demonstração:

Se N é uma roda de posto maior do que ou igual a 4 com calota $C_j - e$, então, como $C - X \subseteq C - (C_j - e)$ verificamos que o lema vale. Vamos assumir então que N não é uma roda com calota em $\{C_1 - e, \dots, C_l - e\}$.

Podemos assumir que $l > 0$. Como $C_1 - e$ é um circuito de N com, ao menos 3 elementos, então $rN \geq 2$ e, pelo lema precedente, temos que N é 3-conexa, com, no mínimo, 4 elementos. Mais especificamente, $N = H'_1 = \dots = H'_l$.

Vamos mostrar, primeiramente, que $C \not\subseteq X$. Suponha que $C \subseteq X$. Então, digamos, $C \cap (C_1 - e) \neq \emptyset$. Por hipótese, $C \neq C_1 - e$. Sejam $a \in (C_1 - e) - C$ e $b \in C \cap (C_1 - e)$. Como $N = H'_1$, por 4.1.13, temos uma tríade T^* contendo $\{a, b\}$ e com o terceiro elemento, c , fora de C_1 . Por ortogonalidade em C e T^* , segue que $c \in C$. Como $C \subseteq X$, então $c \in C_i$ para algum $i \in \{2, \dots, l\}$; uma contradição à ortogonalidade, pois $C_i \cap T^* = \{c\}$. Portanto $C - X \neq \emptyset$.

Para completar a demonstração, basta provar que:

4.1.25 *N não possui circuito C' tal que $C' - X$ é um subconjunto próprio de $C - X$ não vazio.*

Para cada $i \in \{1, \dots, l\}$; tome $g_i \in \{C_i - e\} - C$. Suponha a não validade de 4.1.25 e seja C' um contra-exemplo que minimize $|C' \cap \{g_1, \dots, g_l\}|$. Suponha, primeiramente, que $C' \cap \{g_1, \dots, g_l\}$ é não vazio. Digamos que $g_1 \in C'$. Como $C' - X$ é não vazio, seja $c \in C' - X$. Então N possui um circuito C'' tal que $c \in C'' \subseteq [C' \cup (C_1 - e) - g_1]$. Claramente, $\emptyset \neq C'' - X \subseteq C' - X$, além disso, como $g_1 \in C' - C''$, então $C'' \cap \{g_1, \dots, g_l\} \subsetneq C' \cap \{g_1, \dots, g_l\}$, contrariando a escolha de C' . Portanto $C' \cap \{g_1, \dots, g_l\} = \emptyset$.

Se $C' \cap (C_1 - e) \subseteq C \cap (C_1 - e)$ para todo $j \in \{1, \dots, l\}$ então $C' \cap X \subseteq C \cap X$ e, portanto $C' \subsetneq C$, uma contradição. Então, digamos, $C' \cap (C_1 - e) \not\subseteq C \cap (C_1 - e)$. Tome $h \in (C' - C) \cap (C_1 - e)$. Como $N = H'_1$, existe, uma tríade T^* de N tal que $T^* \cap (C_1 - e) = \{g_1, h\}$ e $T^* - (C_1 - e) = \{f\}$ digamos. Como $g_1 \notin C'$, segue, por ortogonalidade em C' e T^* , que $f \in C'$. Como, por ortogonalidade, $f \notin X$, então $f \in C$. Mas $C \cap \{g_1, h\} = \emptyset$, uma contradição à ortogonalidade. Está completa a demonstração de 4.1.25, e portanto da primeira parte do lema.

Suponha que C é um circuito de N fora de $\{C_1 - e, \dots, C_l - e\}$. Então $C - X$ é circuito de N/X , logo $C \not\subseteq X$. Portanto, os únicos circuitos de N contidos em X são $C_1 - e, \dots, C_l - e$. Segue que $N|X = N|(C_1 - e) \oplus \dots \oplus N|(C_l - e)$.

Para finalizar, suponha que $l = m$. Então $N|X = M/e$. Como $m \geq 2$ e $N|X = N|(C_1 - e) \oplus \dots \oplus N|(C_l - e)$, então $N|X = M/e$ é desconexa, uma contradição. \square

Lema 4.1.26 N/X é cossimples e conexa.

Demonstração: Veja que N/X é cossimples, pois N o é. Sejam a e b elementos de N/X . Como N é conexa, existe um circuito C de N contendo a e b . Pelo lema 4.1.24, $C - X$ é um circuito de N/X contendo a e b . \square

Lema 4.1.27 Suponha que $rN/X \geq 2$. Se A é um 2-subconjunto de $E_N - X$, então $N/X \setminus A$ é desconexa.

Demonstração: Como $rN/X \geq 2$, por 4.1.22, N é 3-conexa, com, pelo menos, 4 elementos. Em particular $N = H'_1 = \dots = H'_l$. Suponha que $N/X \setminus A$ seja conexa. Como N é 3-conexa, A não é circuito de N . Como $A \subseteq E_N - X \subseteq B$, segue de 4.1.18, que $N \setminus A$ é desconexa. Como $N/X \setminus A$ é

conexa, então existe uma componente conexa H de $N \setminus A$ tal que $E_H \subseteq X$. Se H é um colaço h , então, como N é 3-conexa, $A \cup h$ é uma tríade de N que encontra X em somente um elemento, o que implica que essa tríade encontra um dos circuitos $C_i - e$ em somente um elemento, uma contradição. Então $|E_H| \geq 2$ e H contém um circuito de N . Mas como $E_H \subseteq X$, então, por 4.1.24, os únicos circuitos de N contidos em X são $C_1 - e, \dots, C_l - e$. Mas esses circuitos são disjuntos e H é conexa então, podemos supor que $E_H = C_1 - e$. Recordemos que estamos supondo que $N = H'_1$. Como $rN/X \geq 2$, então N não é uma roda com calota contida em X . Portanto, cada 2-subconjunto de $C_1 - e$ está contido numa tríade de N com terceiro elemento em Z'_1 . Vamos mostrar que $Z'_1 \subseteq A$, suponha o contrário, seja $z \in Z'_1 - A$. Como temos um 2-subconjunto $A' \subseteq C_i - e$ em tríade com z , e, em $N \setminus A$, A' é um 2-cocircuito e está numa componente conexa distinta de z , então z é um colaço de $M \setminus A$, e portanto, também de $M/(X \cup e) \setminus A$, que é conexa com, ao menos dois elementos, uma contradição. Portanto $Z'_1 \subseteq A$. Pelo lema 4.1.16, temos que $|Z'_1| = |Z_1| \geq 2$ e $Z'_1 = A$. Pelo lema 3.1.14, não temos um circuito de N que intercepte $Z'_1 = A$ em exatamente um elemento, então, pelo lema 1.6.4, como A possui um subconjunto minimal não vazio que não encontra qualquer circuito de N em, exatamente, um elemento, então A contém um cocircuito de N , uma contradição com a cossimplicidade de N . \square

Lema 4.1.28 $rN/X < 2$ ou N/X é dual de uma matróide de Sylvester com, pelo menos, 4 elementos.

Demonstração: Suponha que $rN/X \geq 2$. Pelo lema 4.1.26, N/X é conexa e cossimples e, portanto, possui, ao menos, 4 elementos. Então, por 4.1.27 e por 3.2.3 esta matróide é dual de uma matróide de Sylvester. \square

Lema 4.1.29 Seja X_1 um circuito de N que não esteja em $\{C_1 - e, \dots, C_l - e\}$. Seja g um elemento de $X_1 - X$. Então N possui circuitos X_2, \dots, X_{n+1} tais que:

- (i) X_1, \dots, X_{n+1} são distintos;
- (ii) $\{X_1, \dots, X_{n+1}\}$ cobre E_N ;
- (iii) $\{X_1, \dots, X_{n+1}\}$ cobre $E_N - X$ duplamente;
- (iv) $X_i - (X_1 \cup \dots \cup X_{i-1} \cup X) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{2, \dots, n\}$;
- (v) $g \notin X_2 \cup \dots \cup X_n \cup X$; e:

(vi) $n = r^*N/X$.

Demonstração:

Se N é uma roda com calota em $\{C_1 - e, \dots, C_l - e\}$ observamos que $l = 1$ e $X = C_1 - e$ é sua calota, então basta tomar os circuitos X_i como sendo os triângulos de N . Suponha então que N não é roda com calota em $\{C_1 - e, \dots, C_l - e\}$.

Pelo lema anterior, N/X é dual de uma matróide de Sylvester com, ao menos quatro elementos, ou $rN/X < 2$, se $rN/X < 2$ por 4.1.26, N/X sendo cossimples e conexa, ou é um laço, ou uma classe em paralelo. Mas, por 4.1.17, N/X não é um laço. Por 4.1.24, $X'_1 := X_1 - X$ é um circuito de N/X . Seja $g \in X'_1$. Pelo lema 3.2.5, existem circuitos X'_2, \dots, X'_{n+1} de N/X tais que:

- (a) X'_1, \dots, X'_{n+1} são distintos;
- (b) $\{X'_1, \dots, X'_{n+1}\}$ cobre $E_N - X$ duplamente;
- (c) $X'_i - (X'_{i-1} \cup X'_{i-2} \cup \dots \cup X'_1) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{2, \dots, n\}$;
- (d) $g \notin X'_2 \cup \dots \cup X'_n$; e:
- (e) $n = r^*N/X$.

Para cada $i \in \{2, \dots, n+1\}$, seja X_i um circuito de N tal que $X'_i - X = X_i$. Em especial, escolhemos X_2, \dots, X_{n+1} minimizando $|E_N - (X_1 \cup \dots \cup X_{n+1})|$. Observe que (i) e (ii)-(vi) seguem de (a)-(e), respectivamente. Só falta mostrar a validade de (ii).

Seja $x \in X$ tal que $x \notin X_1 \cup \dots \cup X_{n+1}$. Digamos que $x \in C_1 - e$. Por 4.1.13, existe uma tríade $T^* := \{x, y, z\}$ em N com z fora de $C_1 - e$. Por ortogonalidade, $z \notin C_j - e$ para $j \in \{2, \dots, l\}$. Então $z \in E_N - X$. Observe que y e z estão em série em $N \setminus x$. Como $x \notin X_1 \cup \dots \cup X_{n+1}$, estes circuitos de N ainda estão em $N \setminus x$. Por (iii) existem dois desses circuitos, digamos, X_1 e X_2 contendo z , e, portanto, contendo y também. Então todo elemento de $C_1 - \{e, x\}$ é coberto duplamente por X_1, \dots, X_{n+1} . Como $X_1 - X$ é um circuito de N/X , então $N|[(C_1 - e) \cup X_1]$ tem $X_1 - X$ como classe em série não trivial. Em particular uma base de $N|[(C_1 - e) \cup X_1]$ é formada pela união de uma base de $N|(X_1 \cap X)$ com $X_1 - (X \cup x_1)$, onde x_1 é um elemento arbitrário de $X_1 - X$. Daí, como $N|X$ é a soma direta das matróides $N|(C_i - e)$, segue que uma base de $N|[(C_1 - e) \cup X_1]$ será

$$(C_1 - \{e, x\}) \cup [(C_2 - e) \cap X_1] \cup \dots \cup [(C_l - e) \cap X_1] \cup [X_1 - (X \cup x_1)].$$

Segue que

$$rN|[(C_1 - e) \cup X_1] = |[X_2 \cup (C_1 - e)] - \{x, x_1\}|$$

e, conseqüentemente, que

$$r^*N|[X_1 \cup (C_1 - e)] = 2.$$

Como $X_1 - (C_1 - e)$ é classe em série da matróide conexa $N|[(C_1 - e) \cup X_1]$, então

$$r^*N|[(C_1 - e) \cup X_1]/(X_1 - X) = r^*N|[(C_1 - e) \cup X_1] = 2.$$

Logo $(C_1 - e) - X_1$ está contido num circuito de $N|[(C_1 - e) \cup X_1]/(X_1 - X)$ e, portanto, é classe em série de $N|[(C_1 - e) \cup X_1]$. Temos que

$$\tilde{X}_1 := [(C_1 - e) \cup X_1] - [(C_1 - e) \cap X_1]$$

é circuito de $N|[(C_1 - e) \cup X_1]$, e, portanto, de N . Como $x \in \tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_1 - X = X'_1$, então $\tilde{X}_1, X_2, \dots, X_{n+1}$ contraria a minimalidade de X_1, \dots, X_{n+1} . \square

Lema 4.1.30

$$\theta_e M \leq r^* M + sM = rN/X + sM.$$

Demonstração: Primeiro vamos mostrar que:

4.1.31 *Para todo $i \in \{l + 1, \dots, m\}$, o elemento b_i está numa classe em série não trivial de $M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_m\}$.*

Suponha que tenhamos b_i numa classe em série trivial de $M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_m\}$, então $b_i \in N$, além disso $M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_m\} \setminus b_i$ é uma extensão em série de $N \setminus b_i$. Pelo lema 4.1.22, ou N é 3-conexa com ao menos 4 elementos ou $rN = 1$. Portanto $N \setminus b_i$ é conexa. Mas por 4.1.9, $M/e \setminus \{a_i, b_i\}$ é desconexa, e como $M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_m\} \setminus b_i$ é uma extensão em paralelo dessa última matróide, então esta também é desconexa, uma contradição. Então vale 4.1.31.

Concluimos que M é obtida de N pelo seguinte processo:

- (i) Substitui-se, em N , cada elemento f fora de X por uma classe em série não trivial S_f de forma a abtermos $N_1 := M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_m\}$;

- (ii) adicionando-se um elemento em paralelo com cada elemento de cada série S_f em N_1 para obter M/e ;
- (iii) coextendendo-se M/e a M .

Se $rN > 1$, por 4.1.22, então $N = H'_1$. Logo, como $|Z'_i| \geq 2$, temos, ao menos, 2 elementos de B em N e, portanto, por 4.1.31 duas classes em série não triviais em N_1 . Seja D um circuito de N_1 cotendo duas classes em série não triviais. Então D é um circuito de M/e e D contém, no mínimo, quatro elementos de $\{b_{l+1}, \dots, b_m\}$, digamos que dentro os quais estejam b_m, b_{m-1}, b_{m-2} e b_{m-3} . Ou D ou $D \cup e$ é um circuito de M . Se D é circuito de M , então D não gera e em M e por conseqüência, também não gera a_{m-3} . Neste caso $(D - b_{m-3}) \cup \{e, a_{m-3}\}$ é um circuito de M . Mudando-se os rótulos, se necessário, temos que $D \cup e$ é um circuito de M . Verifica-se que

$$M' := (M | D \cup \{e, a_m, a_{m-1}, a_{m-2}\}) / (D - \{b_m, b_{m-1}, b_{m-2}\})$$

é um spike de posto 3. Se tal spike é isomorfo a F_7 deixamos D inalterado. Caso contrário, pelo lema 3.3.4, mudando os rótulos, se necessário, podemos escolher tal D , de forma que $D \cap E_{M'}$ indiferente com respeito a $\{a_m, b_m\}$ em M .

Seja $g = b_m$ e $X_1 = D \cap E_N$. Sejam X_2, \dots, X_{n+1} circuitos de N como no enunciado do lema 4.1.29. Para $i \in \{1, \dots, n+1\}$, seja $X'_i = \cup_{h \in X_i} S_h$. Observe que 4.1.29 (i)-(vi) continuam valendo, trocando-se X_i por X'_i e N por N_1 . Vamos “extender” essa cobertura para M/e , da seguinte forma. Indutivamente, seja $D_1 = X'_1$, uma vez definido D_{i-1} construímos D_i trocando-se em X'_i os elementos b_j com $l+1 \leq j \leq m$ tais que $b_j \in D_1 \cup \dots \cup D_{i-1}$, pelos respectivos a_j 's que estão em paralelo com tais b_j 's. Observe que $\{D_1, \dots, D_{n+1}\}$ é um conjunto de circuitos que cobre $E_{M/e}$. Vamos a partir destes contruir uma família de circuitos que cubra E_M .

Para cada $i \in \{1, \dots, n+1\}$, seja D'_i o circuito de M que está em $\{D_i, D_i \cup e\}$. Lembrando que $D'_1 = D_1 \cup e$, definimos $D''_1 = D'_1$. Vamos continuar o processo indutivamente. Suponha que D''_1, \dots, D''_{i-1} foram construídos em $\mathcal{C}_e M$ de forma que $\{D''_1 - e, \dots, D''_{i-1} - e, D_i, \dots, D_{n+1}\}$ seja um conjunto de circuitos de M/e que cubra $E_{M/e}$. Se $e \in D'_i$, então defina $D''_i = D'_i$. Agora, suponha que $e \notin D'_i$, neste caso a escolha de D''_i será condicionada ao valor de i . Em particular, temos que $i > 1$, pois $e \in D'_1$. Suponha que $i \leq n$. Como $i > 1$, por 4.1.29, (iii), podemos escolher um elemento $h \in X_i - (X_{i-1} \cup \dots \cup X_1 \cup X)$. Seja P_h a classe em paralelo de M/e que encontra S_h em h . Então $|P_h| = 2$ e P_h é uma classe em paralelo de $[M | (D'_i \cup P_h \cup e)]/e$ e $D'_i - (P_h \cup e)$ é uma classe em série dessa matróide

e, por consequência, uma classe em série de $M|(D'_i \cup P_h \cup e)$. Observe que $(P_h \cup e) - D'_i$ também é uma classe em série dessa última matróide. Como $|D'_i \cap (P_h \cup e)| = 1$, segue que $D'_i \Delta (P_h \cup e)$ é um circuito de M . Definimos $D''_i := D'_i \Delta (P_h \cup e)$. Note que o elemento pertencente a $P_h \cap D'_i$ que não está em D''_i não pode estar em nenhum dos conjuntos D_{i+1}, \dots, D_{n+1} . Como $i \leq n$, segue, da escolha de h e de 4.1.29, (ii), que, para algum $j > i$, temos que $h \in X_j$, portanto $P_h \cap D_j \neq \emptyset$. Se $P - h \cap D_j = P_h \cap D'_i$, então $\{D''_1 - e, \dots, D''_i - e, D_{i+1}, \dots, D_{n+1}\}$ é um conjunto de circuitos de M/e que cobre $E_{M/e}$.

Suponha agora que $i = n + 1$. Como estamos no caso em que $e \notin D'_i$, temos que $e \notin D'_{n+1}$. Por (v), $\{a_m, b_m\} \cap D_{n+1} \neq \emptyset$. Neste caso, D_{n+1} é um circuito de M e, consequentemente, $D_{n+1} \Delta \{a_m, b_m, e\}$ também o é. Definimos $D''_i := D_{n+1} \Delta \{a_m, b_m, e\}$. Seja $\mathcal{D} := \{D''_1, \dots, D_{n+1}\}$. Claramente, \mathcal{D} cobre $E_M - a_m$ e, se $a_m \in D''_{n+1}$, então \mathcal{D} cobre E_M . Suponhamos que a_m não esteja em D''_{n+1} . Então $b_m \in D''_{n+1}$. Se M não possui um menor F_7 usando e , então $D''_1 = D \cup e$ é indiferente com respeito a $\{a_m, b_m\}$ em M . Portanto $(D''_1 - b_m) \cup a_m$ é um circuito de M . Substituindo D''_1 por este último circuito, temos que \mathcal{D} cobre E_M .

Temos que \mathcal{D} cobre $E_m - a_m$ e, em especial, \mathcal{D} cobre E_M se M não possui um menor F_7 que usa e . Então $\theta_e M \leq n + sM$. Mas, por 4.1.29, (vi), $n = r^*N/X$. Está demonstrado o lema. \square

Vamos completar a prova do teorema. Pelo lema 4.1.24, $r^*N|X = l$, ou seja, $rN^* \cdot X = l$, então $rN^* - rN^*\setminus X = l$. Então

$$r^*N - r^*N/X = l. \quad (4.2)$$

Como $N := M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_m\}$ e, em M/e , a_i e b_i são paralelos para cada $i \in \{l+1, \dots, m\}$, temos que:

$$r^*N = r^*M/e \setminus \{a_{l+1}, \dots, a_m\} = r^*M/e - (m-l) = r^*M - (m-l).$$

Substituindo em (4.2), temos que $r^*M - (m-l) - r^*N/X = l$, ou seja, $r^*M - r^*N/X = m$. Então:

$$\nu_e M = r^*M - r^*N/X.$$

E, pelo último lema,

$$\nu_e M + \theta_e M \leq (r^*M - r^*N/X) + (r^*N/X + sM) = r^*M + sM.$$

O que contradiz o fato de M ser um contra-exemplo para o teorema e finaliza a demonstração.

4.2 Consequências do Teorema Principal

Definição 4.2.1 *definimos por νM o tamanho de um maior subconjunto de \mathcal{C}_M formado por elementos disjuntos e por θM o tamanho da menor família de circuitos de M cuja união contém E_M .*

Definição 4.2.2 *Seja M uma matróide e e um elemento que não esteja em M . Definimos a matróide $M + e$, chamada a extensão de M pela adição do elemento livre e e pela matróide com conjunto base $E_M \cup e$ e família de circuitos $\mathcal{C}_M \cup \{B \cup e; B \in \mathcal{B}_M\}$. É fácil verificar que este último conjunto é a família de circuitos de uma matróide em $E_M \cup e$. Observe que $(M + e) \setminus e = M$. Em geral, um elemento numa matróide M tal que $M = (M \setminus e) + e$ é dito um elemento **livre** de M , em outras palavras, se $C(B, e) = B \cup e$ para toda base B de M .*

O corolário que segue é uma conjectura de Welsh, demonstrada por Seymour, em [Seymour, 1980].

Corolário 4.2.3 *Se M é uma matróide distinta de um colaço, então:*

$$\nu M + \theta M \leq r^* M + 1.$$

Demonstração: Seja N^* a extensão de M pela adição de um elemento livre e . Observe que N^* não possui um menor F_7^* usando e , pois F_7^* não possui elementos livres. Veja que $M = N^*/e$, em particular, $r^* N^* = r^* M$, além disso:

$$\mathcal{C}_e N^* = e \cup C; C \in \mathcal{C}_M.$$

Observe que $\theta M = \theta_e N^*$ e $\nu M = \nu_e N^*$. Aplicando-se o teorema a N^* o corolário segue. \square

O próximo corolário é obtido pela aplicação do teorema principal à matróide associada a um grafo e sua dual.

Definição 4.2.4 *Seja G um grafo 2-conexo e sem laços. Sejam u e v vértices desse grafo. Denotamos por $\nu_{uv}G$ o maior conjunto de caminhos de u até v que não tenham arestas em comum. Denotamos por $\theta_{uv}G$ o maior número de caminhos de u até v necessários para cobrir E_G (o conjunto das arestas de G). Dizemos que um uv -corte é um conjunto de arestas de G minimal na propriedade de que u e v estejam em componentes distintas de sua deleção. Sejam ν_{uv}^*G e θ_{uv}^*G , respectivamente, o maior número de uv -cortes sem aresta em comum e o menor número de uv -cortes necessários para a cobertura de G .*

Corolário 4.2.5 *Sejam u e v vértices distintos e não adjacentes de um grafo G 2-conexo e sem laços, então:*

$$\nu_{uv}^* + \theta_{uv}^* \leq |V_G|.$$

E, se $G - \{u, v\}$ é conexo, temos que:

$$\nu_{uv} + \theta_{uv} \leq |E_G| + |V_G| + 3.$$

O próximo corolário estende o teorema para o caso em que M/e seja desconexa.

Corolário 4.2.6 *Seja e um elemento de uma matróide M , onde M não é um colarço. Sejam E_1, \dots, E_n os conjuntos bases das componentes conexas de M/e . Digamos que $i := 1, \dots, k$ sejam os índices para os quais $M|(E_i \cup e)$ possui um menor F_7 usando e . Então:*

$$\nu_e M + \theta_e M \leq r^* M + n + k$$

Demonstração: Observe que M é a ligação em paralelo das matróides $M|(E_1 \cup e), \dots, M|(E_n \cup e)$ e ν_e, θ_e e r^* são aditivos pela ligação em paralelo através de e . Basta usar o teorema em cada uma das matróides $M|(E_i \cup e)$ para concluir o resultado. \square

Referências Bibliográficas

- [Akkari, 1992] Akkari S., A minimal connectedness result for matroids, *Discrete Mathematics* **103**, 221-232.
- [Lemos, 1985] Lemos, M., On Seymour's question about packing and covering with matroid circuits, *Ars Combin.*, **20**, 27-34.
- [Lemos, Oxley, 2001] Lemos, M. e Oxley, J., A sharp bound on the size of a connected matroid, *Transactions of American Mathematical Society* **353**, 4039-4056.
- [Lemos, Oxley, 2006] Lemos, M. e Oxley, J., Matroid packing and covering with circuits through an element, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **96**, 135-158.
- [Oxley, 1992] Oxley, J.G., *Matroid Theory*, Oxford University Press, New York, 1992.
- [Seymour, 1980] Seymour, P. D., Packing and covering with matroid circuits, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **28**, 237-242.
- [Seymour, 1981] Seymour, P. D., On minors of non-binary matroids, *Combinatorica* **1**, 387-394.