UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Existência de soluções clássicas para as Equações de Burgers e Navier-Stokes

Wilberclay Gonçalves Melo

Recife, 2007.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Existência de soluções clássicas para as Equações de Burgers e Navier-Stokes

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Wilberclay Gonçalves Melo

Orientador: Pablo Braz e Silva

Recife, 2007.

Melo, Wilberclay Gonçalves
Existência de Soluções Clássicas para as Equações de Burguês e Navier-Stokes / Wilberclay Gonçalves Melo – Recife: O autor, 2007.
115 folhas

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2007.

Inclui bibliografia.

I. Equações Diferenciais Parciais. 2. Soluções. 3. Navier. 4. Stokes. I. Título.

515.353 CDD (22.ed.) MEI2007-078

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado: ______________________________

Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva, DMAT-UFPE
Orientador

____

Miguel Fidencio Loayza Lozano, DMAT-UFPE

____

Paulo Ricardo de Ávila Zingano, DM-UFRGS

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES CLÁSSICAS PARA AS EQUAÇÕES DE BURGERS E NAVIER-STOKES

Por
Wilberclay Gonçalves Melo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Julho - 2007

DEDICATÓRIA

A minha família.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Wilton e Edilma, por vários motivos que não vou explicitá-los aqui, pois gastaria muitas páginas; ao professor Pablo Braz por sua orientação, dedicação e disponibilidade; ao CNPQ pelo auxílio financeiro; aos professores Paulo Zingano e Miguel Loayza, por participarem da banca examinadora; a minha namorada Jamile pela amizade, companheirismo e compreensão; a minha irmã Gardênia, que sempre torceu por mim; a todos meus colegas do dmat-UFPE que contribuíram, direta ou indiretamente, para realização deste trabalho; aos meus amigos que compartilharam seus conhecimentos e suas amizades; a todos os professores e funcionários do UFPE e da UNIT que, direta ou indiretamente, tiveram um papel importante na minha formação; por todos os momentos da minha vida acadêmica, agradeço ao professor Genaro por seus conselhos, amizade, confiança e respeito; a todos os meus amigos sergipanos e pernambucanos, que sempre torceram por mim.

RESUMO

Discutimos existência e unicidade de soluções clássicas para a equação de Burgers com viscosidade e para o sistema de Navier-Stokes em duas e três dimensões espaciais. Provamos existência e unicidade de soluções locais no tempo para cada um dos modelos estudados. Além disso, para a equação de Burgers e para as equações de Navier-Stokes bidimensionais, utilizamos estimativas a priori para garantir a existência global de soluções. Indicamos por que o método não pode ser aplicado para o caso tridimensional.

Palavras-chave: soluções, Navier, Stokes.

ABSTRACT

We study existence and uniqueness of classical solutions for the viscous Burgers equation, as well as for the Navier-Stokes system for viscous incompressible fluids, in both two and three space dimensions. We prove local existence of solutions in all cases. Moreover, global existence is shown for two dimensional Navier-Stokes and Burgers. We show why one does not get global solutions for the Navier-Stokes in the three dimensional case.

keys-word: solutions, Navier, Stokes.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

O principal interesse dessa dissertação é identificar o que nos impede de encontrar uma solução global para o sistema de Navier-Stokes em três dimensões.

Nesse capítulo, enunciamos algumas notações, damos algumas definições, estudamos alguns resultados relevantes para o desenvolvimento da dissertação, e retratamos, brevemente, a descrição física do sistema de Navier-Stokes.

No segundo capítulo, consideramos que todas as funções são de classe C^∞ e 1-periódicas. Estudamos quando uma aplicação $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com condição inicial $u(x,0) = f(x)$ é (a única) solução da equação de Burgers $u_t = uu_x + \epsilon u_{xx}$. Inicialmente supomos que u, com as condições acima, satisfaz essa equação. Com isso, provamos que essa solução é única, ou seja, se uma solução existe, conseqüentemente é única. Logo em seguida, estimamos todas as derivadas de u em um intervalo de tempo fixo. O mesmo é feito com uma iteração definida indutivamente por $u^0 \equiv 0$ e $u_t^{n+1} u^n u_x^{n+1} + \epsilon u_{xx}^{n+1}$ para $n = 1, 2, 3, ...$ Com esses controles sobre as derivadas da iteração acima mostramos que uma solução existe localmente. Dessa forma, estendemos essa solução local a uma solução global.

No terceiro capítulo, também admitimos que todas as aplicações são de classe C^∞, todavia de período 2π. Primeiramente, supomos que existe uma solução para o sistema de Navier-Stokes. Assim sendo, provamos que essa solução é única. Em seguida, damos o conceito de vorticidade. Provamos que encontrar uma solução do sistema de Navier-Stokes é o mesmo que encontrar uma solução para o sistema da vorticidade. Realizamos um processo análogo ao que é feito no capítulo dois com esse último sistema. Com isso, encontramos uma solução global do sistema de Navier-Stokes.

No Capítulo 4 o principal interesse, além dos que foram relatados nos Capítulos anteriores, é mostrar por que não podemos utilizar o método relacionado ao caso bidimensional para encontrar uma única solução global do sistema de Navier-Stokes em três dimensões. Provamos que quando uma solução do sistema de Navier-Stokes é limitada então podemos estender o seu intervalo de existência.

Em toda a dissertação consideramos que a notação das constantes é mantida mesmo que essa seja modificada, por operações elementares, a uma nova constante. Por exemplo,

$$\| u \| \leq C \| u \| + K \| u \| \leq C \| u \| .$$

A nossa abordagem segue de perto [3]. Para abordagens utilizando técnicas mais fortes de Análise Funcional, ver [4, 5, 6, 7, 10, 2, 9].

1.1 Notações e definições para o Capítulo 2

Primeiramente, denotaremos as derivadas parciais para uma aplicação que depende de x e t pelos operadores

$$D_x^j := \frac{\partial^j}{\partial x^j},\ D_t^j := \frac{\partial^j}{\partial t^j}, \tag{1.1}$$

onde $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dadas duas aplicações $u = u(x,t)$ e $v = v(x,t)$ definiremos, para cada $p \in \mathbb{N}$, o seguinte produto interno

$$(u,v)_{H^p} := \sum_{j=0}^{p} (D_x^j u, D_x^j v). \tag{1.2}$$

Desse produto interno definimos, para cada $p \in \mathbb{N}$, a norma H^p de uma função $u = u(x,t)$ por

$$\| u \|_{H^p}^2 := \sum_{j=0}^{p} \| D_x^j u \|^2 . \tag{1.3}$$

Utilizaremos também o produto

$$(u(\cdot,t), v(\cdot,t)) := \int_0^1 u(x,t)v(x,t)dx. \tag{1.4}$$

Desse produto induzimos a grandeza

$$\| u(\cdot,t) \|^2 \ := \ \int_0^1 u^2(x,t)dx, \tag{1.5}$$

chamada a norma L^2 da aplicação $u = u(x,t)$. Definimos também para a função $u = u(x,t)$ a norma do supremo

$$| u(\cdot,t) |_\infty \ := \ \max\{| u(x,t) |; x \in [0,1]\}. \tag{1.6}$$

1.2 Notações e definições para o Capítulo 3

Denotemos o operador derivada para uma aplicação que depende de x, y e t por

$$D_x^j \ := \ \frac{\partial^j}{\partial x^j},\ D_y^j \ := \ \frac{\partial^j}{\partial y^j},\ D_t^j \ := \ \frac{\partial^j}{\partial t^j}, \tag{1.7}$$

onde $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dadas duas aplicações $u = u(x,y,t)$ e $v = v(x,y,t)$ definimos o seguinte produto interno

$$(u(\cdot,t), v(\cdot,t)) \ := \ \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y,t)v(x,y,t)dxdy. \tag{1.8}$$

Desse produto interno induzimos a seguinte norma para uma função $u = u(x,y,t)$

$$\| u(\cdot,t) \|^2 \ := \ \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u^2(x,y,t)dxdy. \tag{1.9}$$

Definimos a norma do supremo para uma função $u = u(x,y,t)$ por

$$| u(\cdot,t) |_\infty \ := \ \max\{|u(x,y,t)|; 0 \le x,y \le 2\pi\}. \tag{1.10}$$

Seja $\mathbf{u} = (u,v)$, então definimos a norma do supremo de $\mathbf{u}$ por

$$| \mathbf{u} |_\infty \ := \ \max\{| u |_\infty, | v |_\infty\}. \tag{1.11}$$

A norma L^2 de $\mathbf{u} = (u,v)$ é dada por

$$\| \mathbf{u} \|^2 \ := \ \| u \|^2 + \| v \|^2 . \tag{1.12}$$

Definimos o Laplaciano de uma aplicação $u = u(x, y, t)$ por

$$\Delta u \quad := \quad D_x^2 u + D_y^2 u. \tag{1.13}$$

Defina o operador

$$D^k \quad := \quad D_x^{k_1} D_y^{k_2}, \tag{1.14}$$

onde $k = (k_1, k_2)$ e $| \, k \, | = k_1 + k_2$. Definimos a norma H^j por

$$\| \, u(\cdot, t) \, \|_{H^j}^2 \quad := \quad \sum_{|k| \leq j} \| \, D^k u(x, y, t) \, \|^2, \tag{1.15}$$

onde $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se $\mathbf{u} = (u, v)$, definimos

$$\| \, \mathbf{u} \, \|_{H^j}^2 \quad := \quad \| \, u \, \|_{H^j}^2 + \| \, v \, \|_{H^j}^2 \, . \tag{1.16}$$

Também definimos

$$| \, u(\cdot, t) \, |_{H^j}^2 \quad := \quad \sum_{|k| = j} \| \, D^k u(x, y, t) \, \|^2 \, . \tag{1.17}$$

Para $\mathbf{u} = (u, v)$, temos

$$| \, \mathbf{u} \, |_{H^j}^2 \quad := \quad | \, u \, |_{H^j}^2 + | \, v \, |_{H^j}^2 \, . \tag{1.18}$$

1.3 Notações e definições para o Capítulo 4

Para aplicações de três variáveis defina

$$D_x^j \;:=\; \frac{\partial^j}{\partial x^j}, \; D_y^j \;:=\; \frac{\partial^j}{\partial y^j}, \;, \; D_z^j \;:=\; \frac{\partial^j}{\partial z^j}, \; D_t^j \;:=\; \frac{\partial^j}{\partial t^j}, \tag{1.19}$$

onde $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dadas duas funções reais $u = u(x, y, z, t)$ e $v = v(x, y, z, t)$ de classe C^∞ defina o seguinte produto

$$(u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \quad := \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, y, z, t) v(x, y, z, t) \; dxdydz. \tag{1.20}$$

Com isso, obtemos uma norma para $u = u(x, y, z, t)$;

$$\| \, u(\cdot, t) \, \|^2 \quad := \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u^2(x, y, z, t) \; dxdydz. \tag{1.21}$$

Definimos a norma do supremo para uma função $u = u(x, y, z, t)$ por

$$| u(\cdot, t) |_\infty \;\; := \;\; \max\{|u(x, y, z, t)|; 0 \leq x, y, z \leq 2\pi\}. \tag{1.22}$$

Seja $\mathbf{u} = (u, v, w)$, então definimos a norma do supremo de $\mathbf{u}$ por

$$| \mathbf{u} |_\infty \;\; := \;\; \max\{| u |_\infty, | v |_\infty, | w |_\infty\}, \tag{1.23}$$

e a norma L^2 por

$$\| \mathbf{u} \|^2 \;\; := \;\; \| u \|^2 + \| v \|^2 + \| w \|^2 . \tag{1.24}$$

O Laplaciano da função $u = u(x, y, z, t)$ é dado por

$$\Delta u \;\; := \;\; D_x^2 u + D_y^2 u + D_z^2 u. \tag{1.25}$$

Defina o operador

$$D^k \;\; := \;\; D_x^{k_1} D_y^{k_2} D_z^{k_3}, \tag{1.26}$$

onde $k = (k_1, k_2, k_3)$ e $| k |= k_1 + k_2 + k_3$. Definimos a norma H^j por

$$\| u(\cdot, t) \|_{H^j}^2 \;\; := \;\; \sum_{|k| \leq j} \| D^k u(x, y, z, t) \|^2, \tag{1.27}$$

onde $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para $\mathbf{u} = (u, v, w)$, definimos

$$\| \mathbf{u} \|_{H^j}^2 \;\; := \;\; \| u \|_{H^j}^2 + \| v \|_{H^j}^2 + \| w \|_{H^j}^2 . \tag{1.28}$$

Também definimos

$$| u(\cdot, t) |_{H^j}^2 \;\; := \;\; \sum_{|k| = j} \| D^k u(x, y, z, t) \|^2 . \tag{1.29}$$

Se $\mathbf{u} = (u, v, w)$, temos

$$| \mathbf{u} |_{H^j}^2 \;\; := \;\; | u |_{H^j}^2 + | v |_{H^j}^2 + | w |_{H^j}^2 . \tag{1.30}$$

Definimos a norma L^4 de uma aplicação u por

$$\| u \|_{L^4}^4 \;\; := \;\; \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u^4 \; dxdydz. \tag{1.31}$$

Seja $\mathbf{u} = (u, v, w)$. Então

$$\| \mathbf{u} \|_{L^4}^4 \ := \ \| u \|_{L^4}^4 + \| v \|_{L^4}^4 + \| w \|_{L^4}^4 \ . \tag{1.32}$$

Definimos

$$| \boldsymbol{\xi} |_{H^1,T} \ := \ \sup_{0 \le t < T} \{ \| \boldsymbol{\xi}(\cdot, t) \|_{H^1} \} \, , \tag{1.33}$$

onde $\boldsymbol{\xi}(\cdot, 0) = \mathrm{rot}\ \mathbf{u}(\cdot, 0)$, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ e $T > 0$ é uma constante. Para qualquer $j = 0, 1, 2, 3, ...$ denotamos

$$J_k^2(t) \ = \ \| D_x^k \mathbf{u}(\cdot, t) \|^2 + \| D_y^k \mathbf{u}(\cdot, t) \|^2 + \| D_z^k \mathbf{u}(\cdot, t) \|^2, \tag{1.34}$$

onde $\mathbf{u} = (u, v, w)$. A partir da norma do máximo definimos

$$| \mathbf{u} |_{\infty,T} \ := \ \sup_{0 \le t < T} \{ | \mathbf{u}(\cdot, t) |_\infty \} \, , \tag{1.35}$$

onde $\mathbf{u} = (u, v, w)$ e $T > 0$ é uma constante.

1.4 Resultados preliminares

Teorema 1.1 *Sejam p e q conjugados expoentes, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, onde $1 < p < \infty$. Seja X um espaço mensurável, com medida μ. Sejam f e g funções mensuráveis sobre X, com imagem $[0, \infty]$. Então*

$$\int_X fg \ d\mu \ \le \ \left\{ \int_X f^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_X g^q d\mu \right\}^{\frac{1}{q}} . \tag{1.36}$$

A desigualdade (1.36) *é denominada desigualdade de Hölder.*

Proposição 1.2 *Dados dois números reais positivos a e b. Então*

$$ab \ \le \ \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q, \tag{1.37}$$

onde p e q são expoentes conjugados. A desigualdade (1.37) *é conhecida como desigualdade de Young.*

Lema 1.3 *Seja $u \in C^1[0,1]$. Então*

$$| u |_\infty^2 \leq \| u \|^2 + 2 \| u \| \| u_x \| . \tag{1.38}$$

Demonstração: Existem números reais x_1 e x_2, tais que

$$\begin{cases} \min\{| u(x) | : 0 \leq x \leq 1\} & = | u(x_1) |, \\ \max\{| u(x) | : 0 \leq x \leq 1\} & = | u(x_2) | . \end{cases}$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x_1 < x_2$. Portanto,

$$\begin{aligned} u^2(x_1) - u^2(x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} u^2(x) dx \\ &= 2 \int_{x_1}^{x_2} u u_x dx \\ &\leq 2(u, u_x) \\ &\leq 2 \| u \| \| u_x \| . \end{aligned}$$

Para todo $x \in [0,1]$, temos

$$u^2(x_2) \leq u^2(x).$$

Integrando de 0 a 1,

$$\begin{aligned} u^2(x_2) &\leq \int_0^1 u^2(x) dx \\ &= \| u \|^2 . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} | u |_\infty^2 &\leq u^2(x_2) + 2 \| u \| \| u_x \| \\ &\leq \| u \|^2 + 2 \| u \| \| u_x \| . \end{aligned}$$

□

O Lema de Gronwall será muito utilizado. Portanto, nada é mais justo que prová-lo.

Lema 1.4 *Sejam $y \in C^1[0,T]$, $z \in C[0,T]$ tais que*

$$y'(t) \;\; \leq \;\; Cy(t) + z(t), \tag{1.39}$$

para todo $t \in [0,T]$, onde C é uma constante não-negativa. Então,

$$y(t) \;\; \leq \;\; e^{Ct}\left\{ y(0) + \int_0^t \mid z(\tau) \mid d\tau \right\}, \; \forall \; t \in [0,T].$$

Demonstração: Defina $f(t) = e^{-Ct}y(t)$. Pela desigualdade (1.39), temos

$$\begin{aligned} f'(t) &= -ce^{-Ct}y(t) + e^{-Ct}y'(t) \\ &= e^{-Ct}(y'(t) - Cy(t)) \\ &\leq e^{-Ct}z(t). \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$f(t) - f(0) \;\; \leq \;\; \int_0^t \mid z(\tau) \mid d\tau.$$

Conseqüentemente,

$$e^{-Ct}y(t) - e^{-C0}y(0) \;\; \leq \;\; \int_0^t \mid z(\tau) \mid d\tau,$$

ou seja,

$$y(t) \;\; \leq \;\; e^{Ct}\left\{ y(0) + \int_0^t \mid z(\tau) \mid d\tau \right\}, \; \forall \; t \in [0,T].$$

□

Em um determinado momento do Capítulo 2 precisaremos de uma versão não-linear do Lema de Gronwall. Essa versão é o

Lema 1.5 *Seja $\varphi \in C^1[0,\infty)$, e sejam $y(t)$ e $y_0(t)$ funções de classe C^1, não-negativas, definidas para todo $t \in [0,T]$. Se*

$$\begin{cases} y'(t) \leq \varphi(y(t)), \; y_0'(t) = \varphi(y_0(t)), \; \forall \; t \in [0,T], \\ y(0) \leq y_0(0), \end{cases} \tag{1.40}$$

então

$$y(t) \;\; \leq \;\; y_0(t), \; \forall \; t \in [0,T].$$

Demonstração: Sabemos pelo Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\begin{aligned}\varphi(y) - \varphi(y_0) &= \int_{y_0}^{y} \varphi'(v)dv \\ &= \left\{\int_0^1 \varphi'(y_0 + (y - y_0)s)ds\right\}\{y - y_0\}.\end{aligned}$$

Defina $\eta(t) = y(t) - y_0(t)$ e $c(t) \int_0^1 \varphi'(y_0(t) + (y(t) - y_0(t))s)ds$. Logo,

$$\begin{aligned}\eta'(t) &= y'(t) - y_0'(t) \\ &\leq \varphi(y(t)) - \varphi(y_0(t)) \\ &= c(t)\eta(t).\end{aligned}$$

Agora, defina $z(t) = e^{-\int_0^t c(\tau)d\tau}\eta(t)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}z'(t) &= -c(t)e^{-\int_0^t c(\tau)d\tau}\eta(t) + e^{-\int_0^t c(\tau)d\tau}\eta'(t) \\ &= [\eta'(t) - c(t)\eta(t)]e^{-\int_0^t c(\tau)d\tau} \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Logo, $z(t)$ é uma aplicação não-crescente. Usando o sistema (1.40), temos

$$\begin{aligned}z(0) &= e^{-\int_0^0 c(\tau)d\tau}\eta(0) \\ &= e^0\eta(0) \\ &= \eta(0) \\ &= y(0) - y_0(0) \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Assim,

$$z(t) \leq z(0) \leq 0, \ \forall\, t \in [0, T].$$

Utilizando a definição de $z(t)$ concluímos que $\eta(t) \leq 0, \ \forall\, t \in [0, T]$. Equivalentemente,

$$y(t) - y_0(t) = \eta(t) \leq 0 \Leftrightarrow y(t) \leq y_0(t), \ \forall\, t \in [0, T].$$

$\square$

O Lema a seguir é conhecido como Lema de Picard.

Lema 1.6 *Seja* $(\sigma^n(t))$ *uma seqüência de aplicações contínuas não-negativas tais que*

$$\sigma^{n+1}(t) \quad \leq \quad \alpha + \beta \int_0^t \sigma^n(\tau) d\tau, \ \forall \ t \in [0, T], \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

para α *e* β *constantes não-negativas. Então*

$$\sigma^n(t) \quad \leq \quad \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta^k t^k}{k!} + \frac{\beta^n t^n}{n!} \max_{0 \leq \tau \leq t} \sigma^0(\tau), \ \forall \ t \in [0, T], \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, a seqüência $\sigma^n(t)$ *é uniformemente limitada no intervalo* $[0, T]$*, para cada* $T > 0$*. Se* $\alpha = 0$*, então a seqüência* $\sigma^n(t)$ *converge a* 0 *uniformemente em* $[0, T]$*.*

Utilizaremos um resultado proviniente do Teorema de Arzela-Ascoli. Portanto, enunciaremos esse Teorema e em seguida sua aplicação.

Teorema 1.7 *Seja* $A \subseteq \mathbb{R}^s$ *um conjunto fechado, e denote uma seqüência de funções* $u_m : A \to \mathbb{C}^n$ *com as seguintes propriedades:*

1. *Para cada* $\epsilon > 0$*, existe um* $\delta > 0$ *independente de* m *tal que*

$$| \ u_m(\boldsymbol{y}) - u_m(\boldsymbol{y'}) \ | \quad \leq \quad \epsilon,$$

   se $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y'} \in A$ *e* $\| \ \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y'} \ \| \leq \ \delta$*.*

2. *Existe uma constante* $K > 0$*, independente de* m*, tal que*

$$| \ u_m(\boldsymbol{y}) \ | \quad \leq \quad K,$$

   para todo $\boldsymbol{y} \in A$ *e todo* $m \in \mathbb{N}$*.*

Então existe uma função $u : A \to \mathbb{C}^n$ *e uma seqüência de índices* $m_j \to \infty$ *tais que*

$$\lim_{m_j \to \infty} \max_{x,t} \left| u_{m_j}(\boldsymbol{x}, t) - u(\boldsymbol{x}, t) \right| \quad = \quad 0.$$

Corolário 1.8 *Seja* (u^m) *uma sequência de funções de classe* C^∞ *tais que* $u^m : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$ *e*

$$\max_{\boldsymbol{x},t} \left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} u_m(\boldsymbol{x}, t) \right| \quad \leq \quad C(p, q),$$

para cada $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*. Então existe uma função* $u : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R} \in C^\infty$ *e uma seqüência de índices* $m_j \to \infty$ *tais que*

$$\lim_{m_j \to \infty} \max_{\boldsymbol{x},t} \left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} u_m(\boldsymbol{x}, t) - \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} u(\boldsymbol{x}, t) \right| \quad = \quad 0,$$

para cada $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*. Em palavras, uma subseqüência de* (u_m) *converge uniformemente, juntamente com todas suas derivadas, a um limite* C^∞*.*

1.5 Alguns resultados para equações elípticas

Lema 1.9 *Se* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é uma função* 2π*-periódica (em* x, y*) com* $(1, F) = 0$ *então o sistema*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w = F, \\ (1, w) = 0, \end{array} \right.$$

tem uma única solução w 2π*-periódica (em* x, y*). Além disso, existe uma constante* $K > 0$*, independente de* F*, tal que*

$$\| w \|_{H^2}^2 \quad \leq \quad K \| F \|^2 .$$

Demonstração: Representando as aplicações F e w por suas respectivas séries de Fourier, obtemos

$$F(x, y) \quad = \quad \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \widehat{F}(\mathbf{k}) e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}, \;\; w(x, y) \quad = \quad \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \widehat{w}(\mathbf{k}) e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle},$$

onde $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$, $\mathbf{x} = (x, y)$, $\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle = k_1 x + k_2 y$. Observe que $\mathbf{k} \neq 0$, pois o coeficiente de Fourier de F, por exemplo, é dado por

$$\widehat{F}(\mathbf{k}) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x, y) e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} dx dy.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(\mathbf{0}) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x,y)e^{-i\langle \mathbf{0},\mathbf{x}\rangle}dxdy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x,y)dxdy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}(1,F) \quad = \quad 0.
\end{aligned}$$

Agora, note que,

$$\begin{aligned}
\Delta w &= w_{xx} + w_{yy} \\
&= D_x^2\left(\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\widehat{w}(\mathbf{k})e^{i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}\right) + D_y^2\left(\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\widehat{w}(\mathbf{k})e^{i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}\right) \\
&= D_x^1\left(\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\widehat{w}(\mathbf{k})e^{i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}i\cdot k_1\right) + D_y^1\left(\sum_{\mathbf{k}\neq 0}\widehat{w}(\mathbf{k})e^{i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}i\cdot k_2\right) \\
&= \sum_{\mathbf{k}\neq 0}\widehat{w}(\mathbf{k})e^{i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}(-k_1^2) + \sum_{\mathbf{k}\neq 0}\widehat{w}(\mathbf{k})e^{i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}(-k_2^2) \\
&= \sum_{\mathbf{k}\neq 0}\widehat{w}(\mathbf{k})(-k_1^2-k_2^2)e^{i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\Delta w = F &\Leftrightarrow \widehat{w}(\mathbf{k})(-k_1^2-k_2^2) = \widehat{F}(\mathbf{k}) \\
&\Leftrightarrow \widehat{w}(\mathbf{k}) = -\frac{\widehat{F}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2},
\end{aligned}$$

pois $\mathbf{k}\neq 0$. Daí, w está unicamente determinada pelo coeficiente de Fourier da função F. Resta-nos provar a estimativa enunciada no Lema 1.9. Primeiramente, observe que

$$
\begin{aligned}
(w_{xx}, w_{yy}) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} w_{xx}\cdot w_{yy}dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} [(w_{yy}w_x)\mid_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} w_x\cdot w_{yy}dx]dy \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} w_x\cdot w_{yyx}dxdy \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} w_x\cdot w_{yxy}dxdy \\
&= -\int_0^{2\pi} [(w_x w_{xy})\mid_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} w_{xy}\cdot w_{xy}dx]dy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} w_{xy}\cdot w_{xy}dxdy \\
&= \| w_{xy} \|^2 \\
&\geq 0,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
(w_{xx}, w_{yy}) \geq 0.
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\| w_{xx} \|^2 &\leq \| w_{xx} \|^2 + \| w_{yy} \|^2 + 2(w_{xx}, w_{yy}) \\
&= \| w_{xx} + w_{yy} \|^2 \\
&= \| \Delta w \|^2 \\
&= \| F \|^2 .
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\| w_{yy} \|^2 &\leq \| w_{xx} \|^2 + \| w_{yy} \|^2 + 2(w_{xx}, w_{yy}) \\
&= \| w_{xx} + w_{yy} \|^2 \\
&= \| \Delta w \|^2 \\
&= \| F \|^2 .
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\| w_{xy} \|^2 &= (w_{xy}, w_{xy}) \\
&= (w_{xx}, w_{yy}) \\
&\leq \| w_{xx} \| \| w_{yy} \| \\
&\leq \| F \|^2 .
\end{aligned}
$$

Utilizando a desigualdade de Poincaré, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\| w \|_{H^2}^2 &= \| w \|^2 + \| w_x \|^2 + \| w_y \|^2 + 2 \| w_{xy} \|^2 + \| w_{xx} \|^2 + \| w_{yy} \|^2 \\
&\leq 2 \| w_{xy} \|^2 + C \left(\| w_{xx} \|^2 + \| w_{yy} \|^2 \right) \\
&\leq (2 + 2C) \| F \|^2,
\end{aligned}
$$

onde C é uma constante positiva. E finalmente,

$$
(1, w) = 0,
$$

devido à relação comprovada acima entre os coeficientes de Fourier de F e w, e a hipótese que $(1, F) = 0$. Desta maneira, concluímos a prova do Lema 1.9. $\square$

Lema 1.10 *Sejam $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções 2π-periódicas (em x, y), de classe C^∞, tais que*

$$
\begin{cases} G_x - F_y = 0, \\ (1, F) = (1, G) = 0. \end{cases}
$$

Existe uma única solução $\varphi \in C^\infty$ de

$$
\begin{cases} \varphi_x = F, \;\; \varphi_y = G, \\ (1, \varphi) = 0, \end{cases} \tag{1.41}
$$

tendo-se φ 2π-periódica em x, y. A função φ é também única solução 2π-periódica de

$$
\begin{cases} \Delta \varphi = F_x + G_y, \\ (1, \varphi) = 0. \end{cases}
$$

Demonstração: Como na prova do Lema 1.9, representamos as aplicações F, G, φ por suas respectivas séries de Fourier, ou seja,

$$F(x,y) = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \widehat{F}(\mathbf{k})e^{i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle},\ G(x,y) = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \widehat{G}(\mathbf{k})e^{i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}\ e\ \varphi(x,y) = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \widehat{\varphi}(\mathbf{k})e^{i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle},$$

onde $\mathbf{k} = (k_1,k_2)$, $\mathbf{x} = (x,y)$, $\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle = k_1x + k_2y$. Por hipótese, sabemos que $G_x - F_y = 0$. Assim,

$$ik_1\widehat{G}(\mathbf{k}) - ik_2\widehat{F}(\mathbf{k}) = 0.$$

Logo,

$$k_1\widehat{G}(\mathbf{k}) - k_2\widehat{F}(\mathbf{k}) = 0. \tag{1.42}$$

Suponhamos que o sistema (1.41) é satisfeito. Então

$$\begin{cases} ik_1\widehat{\varphi}(\mathbf{k}) = \widehat{F}(\mathbf{k}), \\ ik_2\widehat{\varphi}(\mathbf{k}) = \widehat{G}(\mathbf{k}). \end{cases} \tag{1.43}$$

Multiplicando a primeira equação de (1.43) por $-ik_1$ e a segunda por $-ik_2$, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} k_1^2\widehat{\varphi}(\mathbf{k}) = -ik_1\widehat{F}(\mathbf{k}), \\ k_2^2\widehat{\varphi}(\mathbf{k}) = -ik_2\widehat{G}(\mathbf{k}). \end{cases} \tag{1.44}$$

Somando as equações do sistema (1.44), obtemos

$$k_1^2\widehat{\varphi}(\mathbf{k}) + k_2^2\widehat{\varphi}(\mathbf{k}) = -ik_1\widehat{F}(\mathbf{k}) - ik_2\widehat{G}(\mathbf{k}).$$

Por conseguinte,

$$(k_1^2 + k_2^2)\widehat{\varphi}(\mathbf{k}) = -i(k_1\widehat{F}(\mathbf{k}) + k_2\widehat{G}(\mathbf{k})).$$

Por fim,

$$\widehat{\varphi}(\mathbf{k}) = -i\frac{k_1\widehat{F}(\mathbf{k}) + k_2\widehat{G}(\mathbf{k})}{(k_1^2 + k_2^2)}, \tag{1.45}$$

pois $\mathbf{k} \neq 0$. Reciprocamente, se $\widehat{\varphi}(\mathbf{k})$ é solução de (1.45), temos

$$\begin{aligned} ik_1\widehat{\varphi}(\mathbf{k}) &= -i^2\frac{k_1^2\widehat{F}(\mathbf{k}) + k_1k_2\widehat{G}(\mathbf{k})}{(k_1^2+k_2^2)} \\ &= \frac{k_1^2\widehat{F}(\mathbf{k}) + k_2k_1\widehat{G}(\mathbf{k})}{(k_1^2+k_2^2)}. \end{aligned}$$

Pela equação (1.42), concluímos

$$\begin{aligned} ik_1\widehat{\varphi}(\mathbf{k}) &= \frac{k_1^2\widehat{F}(\mathbf{k}) + k_2k_2\widehat{F}(\mathbf{k})}{(k_1^2+k_2^2)} \\ &= \frac{k_1^2\widehat{F}(\mathbf{k}) + k_2^2\widehat{F}(\mathbf{k})}{(k_1^2+k_2^2)} \\ &= \frac{(k_1^2+k_2^2)\widehat{F}(\mathbf{k})}{(k_1^2+k_2^2)} \\ &= \widehat{F}(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Daí, $\varphi_x = F$. Analogamente, por (1.45), obtemos

$$\begin{aligned} ik_2\widehat{\varphi}(\mathbf{k}) &= -i^2\frac{k_1k_2\widehat{F}(\mathbf{k}) + k_2^2 2\widehat{G}(\mathbf{k})}{(k_1^2+k_2^2)} \\ &= \frac{k_1k_2\widehat{F}(\mathbf{k}) + k_2^2\widehat{G}(\mathbf{k})}{(k_1^2+k_2^2)}. \end{aligned}$$

Utilizando novamente (1.42), temos

$$\begin{aligned} ik_2\widehat{\varphi}(\mathbf{k}) &= \frac{k_1k_1\widehat{G}(\mathbf{k}) + k_2^2\widehat{G}(\mathbf{k})}{(k_1^2+k_2^2)} \\ &= \frac{k_1^2\widehat{G}(\mathbf{k}) + k_2^2\widehat{G}(\mathbf{k})}{(k_1^2+k_2^2)} \\ &= \frac{(k_1^2+k_2^2)\widehat{G}(\mathbf{k})}{(k_1^2+k_2^2)} \\ &= \widehat{G}(\mathbf{k}), \end{aligned}$$

ou seja, $\varphi_y = G$. Além disso, $(1,\varphi) = 0$, pois $(1,F) = (1,G) = 0$. Com isso, o sistema (1.41) tem solução única φ devido à unicidade dos coeficientes das séries de Fourier estabelecidas acima. Agora, note que,

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_{xx} + \varphi_{yy} \\ &= F_x + G_y. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta\varphi = F_x + G_y.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (1, F_x + G_y) &= (1, F_x) + (1, G_y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, pelo Lema 1.9, conclui-se que φ é a única solução do sistema

$$\begin{cases} \Delta\varphi = F_x + G_y, \\ (1, \varphi) = 0. \end{cases}$$

Logo o Lema 1.10 está demonstrado. $\square$

Lema 1.11 *Sejam $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($\in C^\infty$) 2π-periódicas (em x, y). Se $(1, F) = (1, G) = 0$, então o sistema*

$$\begin{cases} u_x + v_y = F, \\ v_x - u_y = G, \end{cases} \tag{1.46}$$

onde $(1, u) = (1, v) = 0$, admite uma única solução (u, v). Além disso, para $j = 1, 2, ...$ existe uma constante $K_j > 0$ independente de F, G, tal que

$$\| u \|_{H^j}^2 + \| v \|_{H^j}^2 \leq K_j \left(| F |_{H^{j-1}}^2 + | G |_{H^{j-1}}^2 \right). \tag{1.47}$$

Demonstração: Suponha que o sistema (1.46) tem solução. Provaremos que essa solução é única. Derivando a primeira equação de (1.46) em relação a x, temos

$$u_{xx} + v_{yx} = F_x. \tag{1.48}$$

Em seguida, derivando a segunda equação de (1.46) em relação a y, encontramos

$$v_{xy} - u_{yy} = G_y. \tag{1.49}$$

Subtraindo a equação (1.49) da (1.48), obtemos

$$u_{xx} + v_{yx} - v_{xy} + u_{yy} \quad = \quad F_x - G_y,$$

isto é,

$$\Delta u \quad = \quad F_x - G_y.$$

Analogamente, derivando a primeira equação de (1.46) em relação a y, chegamos a

$$u_{xy} + v_{yy} \quad = \quad F_y. \tag{1.50}$$

Derivando a segunda equação de (1.46) em relação a x, temos

$$v_{xx} - u_{yx} \quad = \quad G_x. \tag{1.51}$$

Somando as equações (1.50) e (1.51), concluímos que

$$u_{xy} + v_{yy} + v_{xx} - u_{yx} \quad = \quad F_y + G_x.$$

Logo,

$$\Delta v \quad = \quad F_y + G_x.$$

Dessa forma, se u e v são soluções do sistema (1.46), então u e v satisfazem os sistemas

$$\begin{cases} \Delta u = F_x - G_y, \\ (1, u) = 0, \end{cases} \tag{1.52}$$

e

$$\begin{cases} \Delta v = F_y + G_x. \\ (1, v) = 0, \end{cases} \tag{1.53}$$

Assim a unicidade de u e v são garantidas pelo Lema 1.9. Agora vamos provar que u e v existem, para isso encontraremos uma forma adeqüada de defini-las. Analogamente ao que foi feito na prova do Lema 1.9, trabalharemos com os coeficientes de Fourier de F, G, u e v. Utilizando a primeira equação do sistema (1.52), temos

$$-k_1^2\widehat{u}(\mathbf{k}) - k_2^2\widehat{u}(\mathbf{k}) \quad = \quad ik_1\widehat{F}(\mathbf{k}) - ik_2\widehat{G}(\mathbf{k}).$$

Conseqüentemente,

$$(k_1^2 + k_2^2)\widehat{u}(\mathbf{k}) \quad = \quad -i(k_1\widehat{F}(\mathbf{k}) - k_2\widehat{G}(\mathbf{k})).$$

Por fim,

$$\widehat{u}(\mathbf{k}) \;=\; -i\frac{k_1\widehat{F}(\mathbf{k}) - k_2\widehat{G}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2}.$$

O mesmo processo pode ser aplicado a primeira equação do sistema (1.53). Assim,

$$-k_1^2\widehat{v}(\mathbf{k}) - k_2^2\widehat{v}(\mathbf{k}) \;=\; ik_2\widehat{F}(\mathbf{k}) + ik_1\widehat{G}(\mathbf{k}).$$

Daí,

$$(k_1^2+k_2^2)\widehat{v}(\mathbf{k}) \;=\; -i(k_2\widehat{F}(\mathbf{k}) + k_1\widehat{G}(\mathbf{k})).$$

Por conseguinte,

$$\widehat{v}(\mathbf{k}) \;=\; -i\frac{k_2\widehat{F}(\mathbf{k}) + k_1\widehat{G}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2}.$$

Dessa forma, definimos u e v por seus coeficientes de Fourier

$$\begin{cases} \widehat{u}(\mathbf{k}) = -i\dfrac{k_1\widehat{F}(\mathbf{k}) - k_2\widehat{G}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2}; \\ \widehat{v}(\mathbf{k}) - i\dfrac{k_2\widehat{F}(\mathbf{k}) + k_1\widehat{G}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2}. \end{cases} \tag{1.54}$$

Logo, u e v solucionam o sistema (1.46). Com efeito,

$$k_1\widehat{u}(\mathbf{k}) \;=\; -i\frac{k_1^2\widehat{F}(\mathbf{k}) - k_1k_2\widehat{G}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2},$$

e

$$k_2\widehat{v}(\mathbf{k}) \;=\; -i\frac{k_2^2\widehat{F}(\mathbf{k}) + k_1k_2\widehat{G}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} ik_1\widehat{u}(\mathbf{k}) + ik_2\widehat{v}(\mathbf{k}) &= \frac{k_1^2\widehat{F}(\mathbf{k}) - k_1k_2\widehat{G}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2} + \frac{k_2^2\widehat{F}(\mathbf{k}) + k_1k_2\widehat{G}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2} \\ &= \frac{k_1^2\widehat{F}(\mathbf{k}) + k_2^2\widehat{F}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2} \\ &= \frac{(k_1^2+k_2^2)\widehat{F}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2} \\ &= \widehat{F}(\mathbf{k}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$u_x + v_y \;\; = \;\; F.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} ik_1\widehat{v}(\mathbf{k}) - ik_2\widehat{u}(\mathbf{k}) & \quad \frac{k_1k_2\widehat{F}(\mathbf{k}) + k_1^2\widehat{G}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2} - \frac{k_1k_2\widehat{F}(\mathbf{k}) - k_2^2\widehat{G}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2} \\ &= \frac{k_1^2\widehat{G}(\mathbf{k}) + k_2^2\widehat{G}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2} \\ &= \frac{(k_1^2+k_2^2)\widehat{G}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2} \\ &= \widehat{G}(\mathbf{k}), \end{aligned}$$

isto é,

$$v_x - u_y \;\; = \;\; G,$$

onde $(1,u) = (1,v) = 0$, pois, $(1,F) = (1,G) = 0$. Portanto, u e v solucionam o sistema (1.46) . Resta-nos provar a estimativa (1.47). Pelo sistema (1.54), obtemos

$$\begin{aligned} |\widehat{u}(\mathbf{k})|^2 + |\widehat{v}(\mathbf{k})|^2 &= \left| -i\frac{k_1\widehat{F}(\mathbf{k}) - k_2\widehat{G}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2}\right|^2 + \left| -i\frac{k_2\widehat{F}(\mathbf{k}) + k_1\widehat{G}(\mathbf{k})}{k_1^2+k_2^2}\right|^2 \\ &= \frac{1}{|\mathbf{k}|^2}\{|\widehat{F}(\mathbf{k})|^2 + |\widehat{G}(\mathbf{k})|^2\} \end{aligned}$$

Portanto, a estimativa segue. □

Lema 1.12 *Suponhamos que* $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(x,y,z) = (\xi_1(x,y,z), \xi_2(x,y,z), \xi_3(x,y,z))$ *satisfaz div* $\boldsymbol{\xi} = 0$, $(1,\xi_i) = 0$, $i = 1,2,3$. *Então o sistema*

$$L\boldsymbol{u} \;\; := \;\; \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \\ u_x + v_y + w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.55}$$

com condições laterais

$$(1,u) \;=\; (1,v) \;=\; (1,w) \;=\; 0$$

tem uma única solução $\boldsymbol{u}$. *Para cada* $j = 1,2,...,$ *existe uma constante* $K_j > 0$ *independente de* $\boldsymbol{\xi}$ *com*

$$\| \boldsymbol{u} \|^2_{H^j} \;\leq\; K_j \mid \boldsymbol{\xi} \mid^2_{H^{j-1}} .$$

Demonstração: Primeiro consideremos que há uma solução para o sistema acima. Assim sendo,

$$\Delta u \;=\; \xi_{2z} - \xi_{3y},\; \Delta v \;=\; \xi_{3x} - \xi_{1z},\; \Delta w \;=\; \xi_{1y} - \xi_{2x}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\xi_{2z} - \xi_{3y} &= (u_z - w_x)_z - (v_x - u_y)_y \\
&= u_{zz} - w_{xz} - v_{xy} + u_{yy} \\
&= -(w_z + v_y)_x + u_{yy} + u_{zz}.
\end{aligned}$$

Como $u_x + v_y + w_z = 0$, então

$$\begin{aligned}
\xi_{2z} - \xi_{3y} &= -(w_z + v_y)_x + u_{yy} + u_{zz} \\
&= -(-u_x)_x + u_{yy} + u_{zz} \\
&= u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \\
&= \Delta u.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\xi_{3x} - \xi_{1z} &= (v_x - u_y)_x - (w_y - v_z)_z \\
&= v_{xx} - u_{yx} - w_{yz} + v_{zz} \\
&= -(w_z + u_x)_y + v_{xx} + v_{zz} \\
&= -(-v_y)_y + v_{xx} + v_{zz} \\
&= v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} \\
&= \Delta v.
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
\xi_{1y} - \xi_{2x} &= (w_y - v_z)_y - (u_z - w_x)_x \\
&= w_{yy} - v_{zy} - u_{zx} + w_{xx} \\
&= -(v_y + u_x)_z + w_{xx} + w_{yy} \\
&= -(-w_z)_z + w_{xx} + w_{yy} \\
&= w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} \\
&= \Delta w.
\end{aligned}$$

Esses resultados permitem conhecer os coeficientes da série de Fourier de $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ em função dos de $u,\ v$ e w. De fato, suponha que os coeficientes de Fourier de $u,\ v,\ w$ e $\xi_j,\ j = 1, 2, 3$, sejam, respectivamente, dados por: $\widehat{u}(\mathbf{k}), \widehat{v}(\mathbf{k}), \widehat{w}(\mathbf{k}), \widehat{\xi_j}(\mathbf{k}), j = 1, 2, 3$. Logo,

$$\Delta u \ = \ \xi_{2z} - \xi_{3y} \ \Leftrightarrow \ -k_1^2\widehat{u}(\mathbf{k}) - k_2^2\widehat{u}(\mathbf{k}) - k_3^2\widehat{u}(\mathbf{k}) \ = \ ik_3\widehat{\xi_2}(\mathbf{k}) - ik_2\widehat{\xi_3}(\mathbf{k}).$$

Consequentemente,

$$\widehat{u}(\mathbf{k}) \ = \ -i\frac{k_3\widehat{\xi_2}(\mathbf{k}) - k_2\widehat{\xi_3}(\mathbf{k})}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2},$$

lembre que $\mathbf{k} \neq 0$ pelo mesmo motivo do caso bidimensional. Analogamente,

$$\Delta v \ = \ \xi_{3x} - \xi_{1z} \ \Leftrightarrow \ -k_1^2\widehat{v}(\mathbf{k}) - k_2^2\widehat{v}(\mathbf{k}) - k_3^2\widehat{v}(\mathbf{k}) \ = \ ik_1\widehat{\xi_3}(\mathbf{k}) - ik_3\widehat{\xi_1}(\mathbf{k}).$$

Daí,

$$\widehat{v}(\mathbf{k}) - i\frac{k_1\widehat{\xi_3}(\mathbf{k}) - k_3\widehat{\xi_1}(\mathbf{k})}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}.$$

Por fim,

$$\Delta w \ = \ \xi_{1y} - \xi_{2x} \ \Leftrightarrow \ -k_1^2\widehat{w}(\mathbf{k}) - k_2^2\widehat{w}(\mathbf{k}) - k_3^2\widehat{w}(\mathbf{k}) \ = \ ik_2\widehat{\xi_1}(\mathbf{k}) - ik_1\widehat{\xi_2}(\mathbf{k}).$$

Daí,

$$\widehat{w}(\mathbf{k}) - i\frac{k_2\widehat{\xi_1}(\mathbf{k}) - k_1\widehat{\xi_2}(\mathbf{k})}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}.$$

Com isso, pode-se concluir que se o sistema é solúvel é possível provar a unicidade deste através dos coeficientes de Fourier das aplicações $u,\ v,\ w\ e\ \xi_j,\ onde\ j1, 2, 3.$ Reciprocamente, se forem definidas estas mesmas aplicações em termos coeficientes de Fourier encontrados acima o sistema tem solução. A estimativa segue da relação existente entre os coeficientes de Fourier. $\square$

1.6 Descrição física do sistema de Navier-Stokes

Seja $\mathbf{x}$ a posição de uma partícula em um fluido contido em uma região $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Desejamos descrever a trajetória desta partícula neste fluido. Seja $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Assim, o campo velocidade $\mathbf{u}$ desta partícula é

$$\mathbf{u}(x(t), y(t), z(t), t) \quad = \quad (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)),$$

ou seja,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) \quad = \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t).$$

Dessa forma, a aceleração da partícula é dada por

$$\mathbf{a}(t) \quad = \quad \frac{d}{dt}\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t).$$

Pela regra de Leibniz, temos

$$\mathbf{a}(t) \quad = \quad \mathbf{u}_x\dot{x} + \mathbf{u}_y\dot{y} + \mathbf{u}_z\dot{z} + \mathbf{u}_t.$$

A partir deste momento utilizaremos a seguinte notação

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) \quad = \quad (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)).$$

Daí, a aceleração pode ser escrita como

$$\mathbf{a}(t) \quad = \quad u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y + w\mathbf{u}_z + \mathbf{u}_t,$$

isto é,

$$\mathbf{a}(t) \quad = \quad \partial_t\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u},$$

onde $\partial_t\mathbf{u} = \mathbf{u}_t$ e $\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} = u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y + w\mathbf{u}_z$.

Definição 1.13 *O operador*

$$\frac{D}{Dt} \quad = \quad \partial_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla$$

é denominado derivada material.

Deste modo, a aceleração de uma partícula em um fluido é dada por

$$\mathbf{a}(t) \;=\; \frac{D\mathbf{u}}{Dt}.$$

Para cada tempo $t > 0$, admita que o fluido tem uma densidade bem-definida $\rho(\mathbf{x}, t)$. Deste modo, se W é uma subregião de D, a massa do fluido em W é dada pela integral

$$m(W, t) \;=\; \int_W \rho(\mathbf{x}, t) dV.$$

Definição 1.14 *Um fluido é denominado ideal quando satisfaz a seguinte propriedade: para qualquer movimento do fluido existe uma aplicação $p(\boldsymbol{x}, t)$ chamada pressão tal que se S é uma superfície no fluido com um vetor normal unitário $\boldsymbol{n}$, a força de tensão exercida através da superfície S por unidade de área em $\boldsymbol{x} \in S$ no tempo t é $p(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{n}$.*

É importante ressaltar que, no nossso caso, estamos interessados em fluidos com viscosidade.

Proposição 1.15 *Seja W uma região no fluido ideal em um tempo particular $t > 0$. A força total exercida sobre o fluido dentro de W por meio da tensão sobre sua fronteira é*

$$\boldsymbol{S}_{\partial W} \;=\; -\int_{\partial W} p\boldsymbol{n}\, dA,$$

onde $\boldsymbol{S}_{\partial W}$ = força sobre W.

Seja $\mathbf{a}$ um vetor fixo. Pelo Teorema da divergência, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}_{\partial W} &= -\int_{\partial W} p\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dA \\
&= -\int_W \operatorname{div}(p\mathbf{a})\, dV \\
&= -\int_W \operatorname{div}(p\mathbf{a})\, dV \\
&= -\int_W (\text{grad p}) \cdot \mathbf{a}\, dV.
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{a}$ é arbitrário, então

$$\mathbf{S}_{\partial W} \;=\; -\int_W \text{grad p}\, dV.$$

Definição 1.16 *Seja $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)$ a força externa por unidade de massa atuando sobre o fluido. A força externa total numa região W do fluido devido ao campo $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)$ é dada por*

$$\boldsymbol{B} \;=\; -\int_W \rho \boldsymbol{b}\; dV.$$

Dessa forma, em qualquer ponto do fluido a força exercida por unidade de volume é dada por

$$-\text{grad p} + \rho \mathbf{b}.$$

Utilizando a segunda Lei de Newton obtemos uma forma diferenciada da Lei do Balanço do Momento

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \;=\; -\text{grad p} + \rho \mathbf{b}.$$

Descrevemos a trajetória de uma partícula em um fluido por uma aplicação suave $\varphi(\mathbf{x},t)$. Se W é uma subregião da região D, então $\varphi_t(W) = W_t$ é o volume de W movendo com o fluxo. A aplicação φ_t é definida por $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x},t)$, para um tempo $t \geq 0$ fixo. Com isso, estamos aptos a enunciar o Teorema do Transporte, isto é, o

Teorema 1.17 *Para qualquer aplicação $f = f(\boldsymbol{x},t)$, temos*

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho f\; dV \;=\; \int_{W_t} \rho \frac{Df}{Dt}\; dV.$$

Definição 1.18 *Dizemos que um fluido é incompressível quando div $\boldsymbol{u} = 0$.*

Definição 1.19 *Um fluido é homogêneo se $\rho =$ constante em todo espaço.*

Pelo Teorema do transporte, da divergência e o balanço do momento é possível provar que as equações de Navier-Stokes são

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \;=\; -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\text{div } \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u}, \tag{1.56}$$

onde λ e $\lambda + \dfrac{1}{3}\mu$ são constantes denominadas primeiro coeficiente de viscosidade e segundo coeficiente de viscosidade, respectivamente. Esta equação descreve o fluxo de um fluido viscoso. Se o fluxo em questão for incompressível e homogêneo, então $\rho = c = \textit{constante}$, e conseqüentemente, as equações de Navier-Stokes se tornam

$$\begin{cases} \dfrac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\text{grad p'} + \nu\Delta\mathbf{u}, \\ \\ \text{div } \mathbf{u} = 0, \end{cases} \tag{1.57}$$

onde $\nu = \dfrac{\mu}{c}$ é denominado coeficiente de viscosidade cinemática, e $p' = \dfrac{p}{c}$. Para uma discussão mais detalhada, ver [1].

Capítulo 2

Equação de Burgers com viscosidade

A Equação de Burgers que irá ser estudada é

$$u_t = uu_x + \epsilon u_{xx},$$

onde $u(x) \equiv u(x+1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e u é de classe C^∞. Consideremos o problema de valor inicial e de fronteira da Equação de Burgers

$$\begin{cases} u_t = uu_x + \epsilon u_{xx}, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $f \in C^\infty$, $f(x) \equiv f(x+1)$ e $\epsilon =$ constante > 0 é a viscosidade. Provaremos que esse problema tem uma única solução global.

2.1 Unicidade de soluções

Teorema 2.1 *O problema* (2.1) *tem no máximo uma solução clássica* (*periódica*).

Demonstração: Suponha que $u, v : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ são soluções do sistema (2.1). A intenção é provar que u e v são idênticas.

Seja $w = u - v$. Conseqüentemente, devemos provar que w é a função nula. Com efeito, já que u e v solucionam (2.1), temos

$$\begin{aligned} u_t &= uu_x + \epsilon u_{xx}, \\ v_t &= vv_x + \epsilon v_{xx}. \end{aligned}$$

Assim, subtraindo as duas equações acima concluímos que

$$\begin{aligned} w_t &= uu_x + \epsilon u_{xx} - (vv_x + \epsilon v_{xx}) \\ &= uu_x - vv_x + \epsilon(u_{xx} - v_{xx}). \end{aligned}$$

Defina $\alpha := u + v$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\alpha w)_x &= \frac{1}{2}[(u+v)(u-v)]_x \\ &= \frac{1}{2}[u^2 - v^2]_x \\ &= \frac{1}{2}[2uu_x - 2vv_x] \\ &= uu_x - vv_x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} w_t &= uu_x - vv_{xx} + \epsilon(u_{xx} - v_{xx}) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha w)_x + \epsilon w_{xx}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} (w, (\alpha w)_x) &= \int_0^1 w(\alpha w)_x dx \\ &= (\alpha w, w)|_0^1 - \int_0^1 w\alpha w_x dx \\ &= -\int_0^1 w\alpha w_x dx \\ &= -(w, \alpha w_x). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} (w, (\alpha w)_x) &= (w, \alpha_x w + \alpha w_x) \\ &= (w, \alpha_x w) + (w, \alpha w_x) \\ &= (w, \alpha_x w) - (w, (\alpha w)_x), \end{aligned}$$

então

$$(w, (\alpha w)_x) = \frac{1}{2}(w, \alpha_x w). \tag{2.2}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w,w) &= \frac{1}{2}[2\cdot(w,w_t)] \\
&= (w,w_t) \\
&= \left(w, \frac{1}{2}(\alpha w)_x + \epsilon w_{xx}\right) \\
&= \left(w, \frac{1}{2}(\alpha w)_x\right) + \epsilon\,(w,w_{xx}) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(w,\alpha_x w)\right] + \epsilon(w,w_{xx}) \\
&= \frac{1}{4}(w,\alpha_x w) + \epsilon(w,w_{xx}).
\end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned}
(w,w_{xx}) &= \int_0^1 w w_{xx} dx \\
&= (w,w_x)|_0^1 - \int_0^1 w_x w_x dx \\
&= -\int_0^1 w_x w_x dx \\
&= -(w_x,w_x).
\end{aligned}$$

Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w,w) &= \frac{1}{4}(w,\alpha_x w) + \epsilon(w,w_{xx}) \\
&= \frac{1}{4}(w,\alpha_x w) - \epsilon(w_x,w_x) \\
&\le \frac{1}{4}(w,\alpha_x w) \\
&\le \frac{1}{4} \mid \alpha_x \mid_\infty \| w \|^2 \\
&= \frac{1}{4} \mid \alpha_x \mid_\infty (w,w).
\end{aligned}$$

Seja $T > 0$ um tempo arbitrário, porém fixo. Assim sendo,

$$\mid \alpha_x(\cdot,t) \mid_\infty \;\le\; K(T), \text{ para } 0 \le t \le T,$$

onde $K(T)$ é uma constante dependendo de T. Por conseguinte,

$$\frac{d}{dt} \parallel w(\cdot,t) \parallel^2 \;\; \leq \;\; \frac{1}{2}K(T) \parallel w(\cdot,t) \parallel^2, \text{ para } 0 \leq t \leq T.$$

Pelo Lema de Gronwall, inferimos que

$$\parallel w(\cdot,t) \parallel^2 \;\; \leq \;\; e^{\frac{1}{2}K(T)t} \parallel w(\cdot,0) \parallel^2 = \; 0, \; para \; 0 \leq t \leq T,$$

pois

$$\begin{aligned} w(x,0) &= u(x,0) - v(x,0) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como T é arbitrário, concluímos que

$$w(\cdot,t) \;\; = \;\; 0, \; \forall \; t \geq 0.$$

Portanto,

$$u(\cdot,t) \;\; = \;\; v(\cdot,t), \; \forall \; t \geq 0.$$

□

2.2 Estimativas a priori

Supondo que existe uma solução u do sistema (2.1), provaremos algumas estimativas para u e suas derivadas.

Lema 2.2 *Existem um tempo $T > 0$ e uma constante $K_2 > 0$, ambas dependendo somente de $\parallel f \parallel_{H^2}$, com a seguinte propriedade: se uma solução $u(x,t)$ (periódica) do sistema* (2.1) *é definida para $0 \leq t \leq T$, então*

$$\parallel u(\cdot,t) \parallel_{H^2} \;\; \leq \;\; K_2, \; em \; 0 \leq t \leq T.$$

Demonstração: Suponhamos que u seja uma solução do sistema (2.1). Assim sendo, desejamos controlar as normas L^2 das aplicações u, u_x e u_{xx} por constantes, que dependem somente de $\| f \|_{H^2}$, em algum intervalo de tempo que será determinado no decorrer da demonstração. Para isso, tome o produto interno de u com a primeira equação do sistema (2.1). Daí,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u,u) &= (u,u_t)\\ &= (u, uu_x + \epsilon u_{xx})\\ &= (u,uu_x) + \epsilon(u,u_{xx}).\end{aligned}$$

Observe que

$$(u,uu_x) = -\frac{1}{2}(u,u_x u).$$

Logo,

$$(u,uu_x) = 0.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u,u) &= (u,uu_x) + \epsilon(u_{xx},u)\\ &= \epsilon(u_{xx},u)\\ &= -\epsilon(u_x,u_x)\\ &= -\epsilon \| u_x \|^2\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{d}{dt} \| u(\cdot,t) \|^2 \leq 0.$$

Integrando de 0 a t, obtemos

$$\| u(\cdot,t) \| \leq \| u(\cdot,0) \| = \| f \| . \tag{2.3}$$

Ou seja, conseguimos controlar a norma L^2 de u por uma constante que depende somente da norma H^2 de f. Como u é periódica, vale a seguinte desigualdade de Poincaré

$$\| u_x \| \leq C \| u_{xx} \|, \tag{2.4}$$

onde C é uma constante positiva. Assim, se controlarmos a norma L^2 da aplicação u_{xx} encontraremos uma cota superior para a norma L^2 da função u_x. Dessa forma, derivando a primeira equação do sistema (2.1) duas vezes em relação a x obtemos

$$u_{xxt} = (uu_x)_{xx} + \epsilon u_{xxxx}.$$

Logo, tomando o produto interno com u_{xx},

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_{xx}, u_{xx}) &= (u_{xx}, u_{xxt}) \\
&= (u_{xx}, (uu_x)_{xx} + \epsilon u_{xxxx}) \\
&= (u_{xx}, (uu_x)_{xx}) + \epsilon(u_{xx}, u_{xxxx}) \\
&= (u_{xx}, (uu_x)_{xx}) - \epsilon(u_{xxx}, u_{xxx}) \\
&= (u_{xx}, (uu_x)_{xx}) - \epsilon \parallel u_{xxx} \parallel^2 \\
&\leq (u_{xx}, (uu_x)_{xx}) \\
&= (u_{xx}, (u_x u_x + uu_{xx})_x) \\
&= (u_{xx}, u_{xx}u_x + u_x u_{xx} + u_x u_{xx} + uu_{xxx}) \\
&= (u_{xx}, 3u_x u_{xx} + uu_{xxx}), \\
&= 3(u_{xx}, u_x u_{xx}) + (u_{xx}, uu_{xxx}) \\
&= 3(u_{xx}, u_x u_{xx}) - \frac{1}{2}(u_{xx}, u_x u_{xx}) \\
&= \frac{5}{2}(u_{xx}, u_x u_{xx}).
\end{aligned}$$

Assim, utilizando a equação (1.38) e a desigualdade de Pincaré (2.4),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \parallel u_{xx} \parallel^2 &\leq 5(u_{xx}, u_x u_{xx}) \\
&\leq 5 \mid u_x \mid_\infty \parallel u_{xx} \parallel^2 \\
&\leq 5C \parallel u_{xx} \parallel (\parallel u_x \parallel^2 + 2 \parallel u_x \parallel \parallel u_{xx} \parallel)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 5C \parallel u_{xx} \parallel (C \parallel u_{xx} \parallel^2 + C \parallel u_{xx} \parallel^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 5C \parallel u_{xx} \parallel \parallel u_{xx} \parallel^2 \\
&\leq 5C \parallel u_{xx} \parallel^3 .
\end{aligned}$$

Para estimar $\parallel u_{xx} \parallel$, utilizaremos o Lema 1.5. Deste modo, defina

$$y(t) = \parallel u_{xx}(\cdot, t) \parallel^2, \ \varphi(y(t)) = 5Cy(t)^{\frac{3}{2}}.$$

Assim sendo,

$$y'(t) \;\leq\; \varphi(y(t)).$$

Agora, analisemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} y_0'(t) = 5Cy_0^{\frac{3}{2}}(t), \\ \\ y_0(0) = \| f_{xx} \|^2 . \end{cases} \tag{2.5}$$

Observe que $y_0(t)$ é não-decrescente. De fato,

$$y_0'(t) \;=\; 5Cy_0^{\frac{3}{2}}(t) \;\geq\; 0.$$

Logo, como $y_0(0) > 0$, temos que $y_0(t) > 0$ para $t \geq 0$. A solução do sistema (2.5) é

$$y_0(t) \;=\; \frac{1}{\left(-\dfrac{5Ct}{2} + \dfrac{1}{\| f_{xx} \|}\right)^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to T_\infty} y_0(t) \;&=\; \lim_{t \to \frac{2}{5C\|f_{xx}\|}} \frac{1}{\left(-\dfrac{5Ct}{2} + \dfrac{1}{\| f_{xx} \|}\right)^2} \\ &=\; \infty, \end{aligned}$$

onde $T_\infty := \dfrac{2}{5C \| f_{xx} \|} > 0$. Agora, defina

$$T \;:=\; \frac{1}{5C \| f_{xx} \|} < T_\infty, \tag{2.6}$$

note que T depende somente de $\| f \|_{H^2}$. Dessa forma pelo Lema 1.5 concluímos que

$$y(t) \;\leq\; y_0(t), \text{ para } 0 \leq t \leq T < T_\infty,$$

ou seja,

$$\| u_{xx}(\cdot, t) \| \;\leq\; \sqrt{y_0(t)}, \text{ para } 0 \leq t \leq T < T_\infty.$$

Como $y_0(t)$ é não-decrescente, então

$$\| u_{xx}(\cdot,t) \| \;\; \leq \;\; \sqrt{y_0(T)}.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\sqrt{y_0(T)} &= \frac{1}{-\frac{5C}{2}T + \frac{1}{\|f_{xx}\|}} \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{2\|f_{xx}\|} + \frac{1}{\|f_{xx}\|}} \\ &= 2 \| f_{xx} \| .\end{aligned}$$

Daí,

$$\| u_{xx}(\cdot,t) \| \;\; \leq \;\; 2 \| f_{xx} \|, \; \forall \; t \in [0,T]. \tag{2.7}$$

Portanto, a norma L^2 de u_{xx} é controlada por uma constante que depende somente da norma H^2 de f, conseqüentemente, a de u_x também é, pela desigualdade de Poincaré (2.4). Com isso, as desigualdades (2.3), (2.4) e (2.7) implicam

$$\begin{aligned}\| u(\cdot,t) \|_{H^2}^2 &= \| u \|^2 + \| u_x \|^2 + \| u_{xx} \|^2 \\ &\leq \| f \|^2 + C \| u_{xx} \|^2 + \| u_{xx} \|^2 \\ &\leq \| f \|^2 + C \| f_{xx} \|^2 \\ &\leq C \| f \|_{H^2}^2, \; \forall \; t \in [0,T].\end{aligned}$$

Desta maneira finalizamos a prova do Lema 2.2. □

A partir deste momento o nosso interesse é conseguir estimativas para todas as derivadas espaciais de u no mesmo intervalo de tempo do Lema 2.2. Assim sendo, enunciemos o

Lema 2.3 *Suponha que u é uma solução C^∞ (periódica) do sistema* (2.1) *definida para $0 \leq t \leq T$, onde T está definido em* (2.6)*. Para cada $j = 2, 3, \ldots$ existe uma constante $K_j > 0$ dependendo somente de $\| f \|_{H^j}$, com*

$$\| u(\cdot,t) \|_{H^j} \;\; \leq \;\; K_j, \; \forall \; t \in [0,T].$$

Demonstração: Para demonstrar esse resultado vamos utilizar indução sobre j. O caso $j = 2$ foi provado no Lema 2.2. Suponhamos que a desigualdade acima seja válida para $j-1$. Vamos provar que o Lema continua verdadeiro para j. Aplicando o operador D_x^j (ver notação (1.1)) ao sistema (2.1) obtemos

$$\begin{cases} D_x^j u_t &= D_x^j(uu_x) + \epsilon D_x^{j+2}u, \\ \\ D_x^j u_t(\cdot, 0) &= D_x^j f. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(D_x^j u, D_x^j u) &= (D_x^j u, D_x^j u_t) \\ &= (D_x^j u, D_x^j(uu_x) + \epsilon D_x^{j+2}u) \\ &= (D_x^j u, D_x^j(uu_x)) + \epsilon(D_x^j u, D_x^{j+2}u). \end{aligned}$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} (D_x^j u, D_x^{j+2}u) &= \int_0^1 D_x^j u D_x^{j+2} u dx \\ &= (D_x^j u, D_x^{j+1}u) \mid_0^1 - \int_0^1 D_x^{j+1} u D_x^{j+1} u dx \\ &= -\int_0^1 D_x^{j+1} u_x D_x^{j+1} u_x dx \\ &= -(D_x^{j+1}u, D_x^{j+1}u) \\ &= -(D_x^{j+1}u, D_x^{j+1}u) \\ &= - \| D_x^{j+1} u \|^2 . \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(D_x^j u, D_x^j u) = (D_x^j u, D_x^j(uu_x)) - \epsilon \| D_x^{j+1} u \|^2 . \tag{2.8}$$

A regra de Leibniz nos diz que

$$D_x^j(uu_x) = \sum_{\nu=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ \nu \end{pmatrix} D_x^\nu u D_x^{j+1-\nu} u, \ para\ todo\ j \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{2.9}$$

Dessa forma, para estimar $(D_x^j u, D_x^j(uu_x))$ analisaremos o produto interno

$$(D_x^j u, D_x^\nu u D_x^{j+1-\nu} u),$$

em três casos:

1. Primeiramente, consideremos que $\nu = 1, 2, ..., j-2$. Logo, pelas desigualdades (1.38) e (2.4), obtemos

$$\begin{aligned}
(D_x^j u, D_x^\nu u D_x^{j+1-\nu} u) &\leq \mid D_x^\nu u \mid_\infty \| D_x^j u \| \| D_x^{j+1-\nu} u \| \\
&\leq \mid D_x^\nu u \mid_\infty \| u \|_{H^j} \| u \|_{H^j} \\
&\leq \mid D_x^\nu u \mid_\infty \| u \|_{H^j}^2 \\
&\leq C \| D_x^{\nu+1} u \| \| u \|_{H^j}^2 .
\end{aligned}$$

Como $\nu \leq j-2$, então $\nu + 1 \leq j-1$. Por conseguinte,

$$(D_x^j u, D_x^\nu u D_x^{j+1-\nu} u) \leq C \| u \|_{H^{j-1}} \| u \|_{H^j}^2 .$$

2. Se $\nu = j-1$ ou $\nu = j$, temos

$$\begin{aligned}
(D_x^j u, D_x^\nu u D_x^{j+1-\nu} u) &\leq \mid D_x^{j+1-\nu} u \mid_\infty \| D_x^j u \| \| D_x^\nu u \| \\
&\leq \mid D_x^{j+1-\nu} u \mid_\infty \| u \|_{H^j}^2 .
\end{aligned}$$

Novamente pelas desigualdades (1.38) e (2.4), concluímos que

$$\begin{aligned}
(D_x^j u, D_x^\nu u D_x^{j+1-\nu} u) &\leq \mid D_x^{j+1-\nu} u \mid_\infty \| u \|_{H^j}^2 \\
&\leq C \| D_x^{j+2-\nu} u \| \| u \|_{H^j}^2 .
\end{aligned}$$

Como $\nu = j \geq 3$ ou $\nu = j-1 \geq 2$, então $\nu \geq 3$. Assim, $j+2-\nu \leq j-1$. Com isso,

$$(D_x^j u, D_x^\nu u D_x^{j+1-\nu} u) \leq C \| u \|_{H^{j-1}} \| u \|_{H^j}^2 .$$

3. Se $\nu = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
(D_x^j u, D_x^0 u D_x^{j+1-0} u) &= (D_x^j u, u D_x^{j+1} u) \\
&= -(((D_x^j u) u)_x, D_x^j u).
\end{aligned}$$

Esta última igualdade é facilmente verificada. De fato, integrando por partes,

$$\begin{aligned}
(D_x^j u, u D_x^{j+1} u) &= \int_0^1 (D_x^j u) u (D_x^j u) dx \\
&= ((D_x^j u) u, D_x^j u) \mid_0^1 - \int_0^1 ((D_x^j u) u)_x (D_x^j u) dx \\
&= -\int_0^1 ((D_x^j u) u)_x (D_x^j u) dx \\
&= -(((D_x^j u) u)_x, D_x^j u).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(D_x^j u, uD_x^{j+1}u) &= -(((D_x^j u)u)_x, D_x^j u)\\ &= -((D_x^{j+1}u)u + (D_x^j u)u_x, D_x^j u)\\ &= -((D_x^{j+1}u)u, D_x^j u) - ((D_x^j u)u_x, D_x^j u).\end{aligned}$$

Por isso,

$$2(D_x^j u, uD_x^{j+1}u) = -((D_x^j u)u_x, D_x^j u).$$

Deste modo, pelas desigualdades (1.38) e (2.4),

$$\begin{aligned}(D_x^j u, uD_x^{j+1}u) &= -\frac{1}{2}((D_x^j u)u_x, D_x^j u)\\ &\leq \frac{1}{2} \mid u_x \mid_\infty \| D_x^j u \|^2\\ &\leq C \| u_{xx} \| \| u \|_{H^j}^2\\ &\leq C \| u \|_{H^{j-1}} \| u \|_{H^j}^2,\end{aligned}$$

pois $j-1 \geq 2$. Dessa forma, fica estabelecido o caso 3. Agora, de posse das estimativas encontradas nos três casos, substituimos a expressão (2.8) em (2.9). Por conseguinte,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(D_x^j u, D_x^j u) &= \left(D_x^j u, \sum_{\nu=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ \nu \end{pmatrix} D_x^\nu u D_x^{j+1-\nu} u \right) - \epsilon \| D_x^{j+1} u \|^2\\ &\leq \sum_{\nu=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ \nu \end{pmatrix} (D_x^j u, D_x^\nu u D_x^{j+1-\nu} u)\\ &\leq C \sum_{\nu=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ \nu \end{pmatrix} \| u \|_{H^{j-1}} \| u \|_{H^j}^2 .\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \| D_x^j u \|^2 \leq C_j \| u \|_{H^{j-1}} \| u \|_{H^j}^2,$$

onde $C_j > 0$ depende de j. Pela hipótese de indução,

$$\| u \|_{H^{j-1}} \leq K_{j-1}, \text{ onde } K_{j-1} \text{ depende somente de } \| f \|_{H^{j-1}} .$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \parallel D_x^j u \parallel^2 &\leq C_j \parallel u \parallel_{H^{j-1}} \parallel u \parallel_{H^j}^2 \\
&= C_j \parallel u \parallel_{H^{j-1}} (\parallel u \parallel_{H^{j-1}}^2 + \parallel D_x^j u \parallel^2) \\
&\leq C_j K_{j-1} (K_{j-1}^2 + \parallel D_x^j u \parallel^2) \\
&\leq K_{j-1}(1 + \parallel D_x^j u \parallel^2), \ \forall\, t \in [0,T],
\end{aligned}$$

onde $K_{j-1} = K_{j-1}(\parallel f \parallel_{H^{j-1}})$. Note que, o tempo $T > 0$ é o definido em (2.6). Pelo Lema de Gronwall (Lema 1.4), temos

$$\begin{aligned}
\parallel D_x^j u(\cdot,t) \parallel^2 &\leq e^{K_{j-1}t} \left(\parallel D_x^j u(\cdot,0) \parallel^2 + \int_0^t K_{j-1} d\tau \right) \\
&\leq e^{K_{j-1}T} (\parallel D_x^j u(\cdot,0) \parallel^2 + K_{j-1}T) \\
&\leq e^{K_{j-1}T} (\parallel D_x^j f \parallel^2 + K_{j-1}T), \ \forall\, t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Por fim

$$\begin{aligned}
\parallel u \parallel_{H^j}^2 &= \parallel u \parallel_{H^{j-1}}^2 + \parallel D_x^j u \parallel^2 \\
&\leq K_{j-1}^2 + e^{K_{j-1}T} (\parallel D_x^j f \parallel^2 + K_{j-1}T) \\
&=: K_j^2, \ \forall\, t \in [0, T],
\end{aligned}$$

onde $K_j = K_j(\parallel f \parallel_{H^j})$, pois $T = T(\parallel f \parallel_{H^2})$ e $K_{j-1} = K_{j-1}(\parallel f \parallel_{H^{j-1}})$. Logo,

$$\parallel u(\cdot,t) \parallel_{H^j} \ \leq \ K_j, \ \forall\, t \in [0, T] \text{ e } K_j \text{ depende somente de } \parallel f \parallel_{H^j}.$$

Assim, encerramos a prova do Lema 2.3. □

Uma consequência importante do Lema 2.3 é que as derivadas mistas

$$\frac{\partial^{p+q} u(x,t)}{\partial x^p \partial t^q}, \ \forall\, p,q \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

também podem ser estimadas no intervalo de tempo $[0,T]$. Por exemplo, o sistema (2.1) nos diz que

$$u_t = u u_x + \epsilon u_{xx}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\ u_t\ | &= |\ uu_x + \epsilon u_{xx}\ | \\ &\leq |\ uu_x\ | + \epsilon\ |\ u_{xx}\ | \\ &\leq |\ u\ ||\ u_x\ | + \epsilon\ |\ u_{xx}\ | \\ &\leq C,\ \forall\ t \in [0,T], \end{aligned}$$

onde $C > 0$ depende somente de $\|\ f\ \|_{H^2}$. Derivando a primeira equação do sistema (2.1) em relação a x, temos

$$\begin{aligned} u_{tx} &= (uu_x)_x + \epsilon u_{xxx} \\ &= u_x u_x + uu_{xx} + \epsilon u_{xxx}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\ u_{tx}\ | &= |\ u_x u_x + uu_{xx} + \epsilon u_{xxx}\ | \\ &\leq |\ u_x u_x\ | + |\ uu_{xx}\ | + \epsilon\ |\ u_{xxx}\ | \\ &\leq |\ u_x\ ||\ u_x\ | + |\ u\ ||\ u_{xx}\ | + \epsilon\ |\ u_{xx}\ | \end{aligned}$$

Dessa forma, é possível estimar todas as derivadas mistas de u. Pelo Lema 1.3, temos

$$|\ u\ |_\infty^2 \leq \|\ u\ \|^2 + 2\ \|\ u\ \|\|\ u_x\ \|\ .$$

Daí,

$$\begin{aligned} |\ u\ |_\infty^2 &\leq C^2\ \|\ u_x\ \|^2 + 2C\ \|\ u_x\ \|^2 \\ &\leq C\ \|\ u_x\ \|^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|\ u\ |_\infty \leq C\ \|\ u_x\ \|\ . \tag{2.10}$$

A seguinte estimativa é importante:

$$\begin{aligned} |\ u\ |_\infty &\leq C\ \|\ u_x\ \| \\ &\leq C\ \|\ u\ \|_{H^2} \\ &\leq K_2,\ \forall\ [0,T]. \end{aligned}$$

onde a desigualdade (2.10) foi utilizada e $K_2 = K_2(\| f \|_{H^2}) > 0$ é uma constante. Agora, consideremos uma seqüencia (u^n) de funções periódicas definida indutivamente por $u^0 \equiv f$ e

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t^{n+1} = u^n u_x^{n+1} + \epsilon u_{xx}^{n+1}, \\ u^{n+1}(x,0) = f(x), \;\; n = 0, 1, 2, \ldots \,, \end{array} \right. \tag{2.11}$$

Lema 2.4 *Existe* $T_1 = T_1(\| f \|_{H^2}) > 0$ *tal que*

$$\| u^n(\cdot, t) \|_{H^2} \;\; \leq \;\; 2 \| f \|_{H^2}, \; \forall \; t \; \in \; [0, T_1], \; \forall \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Demonstração: Provaremos esse Lema por indução sobre n. Para $n = 0$ o resultado é óbvio. Denote $w = u^n$ e $v = u^{n+1}$. Portanto, suporemos que o resultado é válido para w e provaremos, a partir disto, que o mesmo pode ser dito a respeito de v. Nesta nova notação, o sistema (2.11) se torna

$$\left\{ \begin{array}{l} v_t = w v_x + \epsilon v_{xx}, \\ v(x,0) = f(x). \end{array} \right. \tag{2.12}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v, v) &= (v, v_t) \\ &= (v, w v_x + \epsilon v_{xx}) \\ &= (v, w v_x) + \epsilon (v, v_{xx}) \\ &= (v, w v_x) - \epsilon (v_x, v_x) \\ &= (v, w v_x) - \epsilon \| v_x \|^2 \\ &\leq (v, w v_x) \\ &= -\frac{1}{2}(v, w_x v) \\ &\leq \frac{1}{2} \mid w_x \mid_\infty \| v \|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} C \| w_{xx} \| \| v \|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} C \| w \|_{H^2} \| v \|_{H^2}^2 \,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \| v \|^2 \;\; \leq \;\; C \| w \|_{H^2} \| v \|_{H^2}^2 \,.$$

Derivando a primeira equação do sistema (2.12) em relação x, obtemos

$$v_{xt} = (wv_x)_x + \epsilon v_{xxx}. \tag{2.13}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v_x, v_x) &= (v_x, v_{xt}) \\
&= (v_x, (wv_x)_x + \epsilon v_{xxx}) \\
&= (v_x, (wv_x)_x) + \epsilon(v_x, v_{xxx}) \\
&= (v_x, (wv_x)_x) - \epsilon(v_{xx}, v_{xx}) \\
&= (v_x, (wv_x)_x) - \epsilon \parallel v_{xx} \parallel^2 \\
&\leq (v_x, (wv_x)_x).
\end{aligned}$$

Pela equação (2.2),

$$(v_x, (wv_x)_x) = \frac{1}{2}(v_x, w_x v_x).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel v_x \parallel^2 &\leq \frac{1}{2} \mid w_x \mid_\infty \parallel v_x \parallel^2 \\
&\leq C \parallel w_{xx} \parallel \parallel v_x \parallel^2 \\
&\leq C \parallel w \parallel_{H^2} \parallel v \parallel_{H^2}^2 .
\end{aligned}$$

Analogamente, derivando a equação (2.13) em relação a x, temos que

$$v_{xxt} = (wv_x)_{xx} + \epsilon v_{xxxx}.$$

Por um raciocínio análogo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v_{xx}, v_{xx}) &= (v_{xx}, v_{xxt}) \\
&= (v_{xx}, (wv_x)_{xx} + \epsilon v_{xxxx}) \\
&= (v_{xx}, (wv_x)_{xx}) + \epsilon(v_{xx}, v_{xxxx}) \\
&= (v_{xx}, (wv_x)_{xx}) - \epsilon(v_{xxx}, v_{xxx}) \\
&= (v_{xx}, (wv_x)_{xx}) - \epsilon \parallel v_{xxx} \parallel^2, \\
&\leq (v_{xx}, (wv_x)_{xx}) \\
&= (v_{xx}, (w_x v_x + wv_{xx})_x) \\
&= (v_{xx}, w_{xx} v_x + w_x v_{xx} + w_x v_{xx} + wv_{xxx}) \\
&= (v_{xx}, w_{xx} v_x + 2w_x v_{xx} + wv_{xxx}),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(v_{xx}, v_{xx}) &= 2(v_{xx}, w_{xx}v_x) + 4(v_{xx}, w_x v_{xx}) + 2(v_{xx}, w v_{xxx}) \\
&= 2(v_{xx}, w_{xx}v_x) + 4(v_{xx}, w_x v_{xx}) - (v_{xx}, w_x v_{xx}) \\
&= 2(v_{xx}, w_{xx}v_x) + 3(v_{xx}, w_x v_{xx}) \\
&\leq 2 \mid v_x \mid_\infty \| v_{xx} \| \| w_{xx} \| + 3 \mid w_x \mid_\infty \| v_{xx} \|^2 \\
&\leq C \| v_{xx} \| \| v_{xx} \| \| w_{xx} \| + 3 \mid w_x \mid_\infty \| v \|_{H^2} \\
&\leq C \| v \|_{H^2} \| w_{xx} \| + 3 \mid w_x \mid_\infty \| v \|_{H^2} \\
&= C \| v \|_{H^2}^2 \| w_{xx} \| \\
&\leq C \| w \|_{H^2} \| v \|_{H^2}^2 .
\end{aligned}
$$

Dessa forma, pela hipótese de indução,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \| v \|_{H^2}^2 &= \frac{d}{dt} \| v \|^2 + \frac{d}{dt} \| v_x \|^2 + \frac{d}{dt} \| v_{xx} \|^2 \\
&\leq C \| w \|_{H^2} \| v \|_{H^2}^2 \\
&\leq C \| u^n \|_{H^2} \| v \|_{H^2}^2 \\
&\leq C \| f \|_{H^2} \| v \|_{H^2}^2, \ \forall \ t \ \in \ [0, T_1],
\end{aligned}
$$

já que

$$
\| u^n(\cdot, t) \|_{H^2} \ \leq \ 2 \| f \|_{H^2}, \ \forall \ t \ \in \ [0, T_1].
$$

Aplicando o Lema de Gronwall, concluímos

$$
\begin{aligned}
\| v(\cdot, t) \|_{H^2}^2 &\leq e^{C\|f\|_{H^2} t} \{ \| v(\cdot, 0) \|_{H^2}^2 \} \\
&\leq e^{C\|f\|_{H^2} t} \{ \| u^{n+1}(\cdot, 0) \|_{H^2}^2 \} \\
&\leq e^{C\|f\|_{H^2} t} \{ \| f \|_{H^2}^2 \} \\
&\leq e^{C\|f\|_{H^2} T_1} \{ \| f \|_{H^2}^2 \}.
\end{aligned}
$$

Escolha $T_1 > 0$, menor se necessário, tal que $e^{C\|f\|_{H^2} T_1} \leq 4$. Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
\| u^{n+1}(\cdot, t) \|_{H^2}^2 &\leq e^{C\|f\|_{H^2} T_1} \{ \| f \|_{H^2}^2 \} \\
&\leq 4 \| f \|_{H^2}^2, \ \forall \ t \ \in \ [0, T_1].
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\| u^n(\cdot, t) \|_{H^2} \ \leq \ 2 \| f \|_{H^2}, \ \forall \ t \ \in \ [0, T_1], \ \forall \ n \in \mathbb{N}.
$$

O que conclui a prova do Lema 2.4. $\square$

A seguir, demonstraremos que todas as derivadas espaciais de u^n, para todo $n \in \mathbb{N}$, podem ser estimadas no intervalo de tempo $[0, T_1]$, com T_1 determinado no Lema 2.4.

Lema 2.5 *Para cada $j = 2, 3, ...$, existe $K_j > 0$ tal que*

$$\| u^n(\cdot, t) \|_{H^j} \quad \leq \quad K_j, \ \forall\ t \in [0, T_1], \ \forall\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

A constante K_j depende de $\| f \|_{H^j}$, mas é independente de n (e de $\epsilon > 0$).

Demonstração: Para provarmos este resultado utilizaremos indução sobre j. Para $j = 2$, este resultado segue do Lema 2.4. Seja $j \geq 3$ e defina $w = u^n$ e $v = u^{n+1}$. Suponha que,

$$\| w \|_{H^{j-1}} \quad \leq \quad K_{j-1}, \ \| v \|_{H^{j-1}} \quad \leq \quad K_{j-1}, \ \forall\ t \in [0, T_1]. \tag{2.14}$$

Aplicando o operador D_x^j ao sistema (2.12), concluímos que

$$\begin{cases} D_x^j v_t \ = \ D_x^j(w v_x) + \epsilon D_x^{j+2} v, \\ \\ D_x^j v_t(\cdot, 0) \ = \ D_x^j f. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(D_x^j v, D_x^j v) \ &= \ (D_x^j v, D_x^j v_t) \\ &= \ (D_x^j v, D_x^j(w v_x) + \epsilon D_x^{j+2} v) \\ &= \ (D_x^j v, D_x^j(w v_x)) + \epsilon(D_x^j v, D_x^{j+2} v) \\ &= \ (D_x^j v, D_x^j(w v_x)) - \epsilon(D_x^{j+1} v, D_x^{j+1} v) \\ &= \ (D_x^j v, D_x^j(w v_x)) - \epsilon \| D_x^{j+1} v \|^2 \\ &\leq \ (D_x^j v, D_x^j(w v_x)). \end{aligned}$$

Pela regra de Leibniz, temos que

$$D_x^j(w v_x) \ = \ \sum_{\nu=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ \nu \end{pmatrix} D_x^\nu w D_x^{j+1-\nu} v.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \parallel D_x^j v \parallel^2 &\leq 2 \left(D_x^j v, \sum_{\nu=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ \nu \end{pmatrix} D_x^\nu w D_x^{j+1-\nu} v \right) \\
&\leq 2 \sum_{\nu=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ \nu \end{pmatrix} (D_x^j v, D_x^\nu w D_x^{j+1-\nu} v) \\
&\leq C_j \sum_{\nu=0}^{j} (D_x^j v, D_x^\nu w D_x^{j+1-\nu} v),
\end{aligned}
$$

onde $C_j > 0$ depende de j.

1. Se $\nu = 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ j-2$, então

$$
\begin{aligned}
(D_x^j v, D_x^\nu w D_x^{j+1-\nu} v) &\leq \mid D_x^\nu w \mid_\infty \parallel D_x^j v \parallel \parallel D_x^{j+1-\nu} v \parallel \\
&\leq C \parallel D_x^{\nu+1} w \parallel \parallel D_x^j v \parallel \parallel D_x^{j+1-\nu} v \parallel .
\end{aligned}
$$

Como $\nu + 1 \leq j - 1$, então pela primeira desigualdade em (2.14), temos

$$
\parallel D_x^{\nu+1} w \parallel \ \leq \ \parallel w \parallel_{H^{j-1}} \ \leq \ K_{j-1}.
$$

Observe que $j + 1 - \nu \leq j$. Logo, pela desigualdade de Poincaré,

$$
\parallel D_x^{j+1-\nu} v \parallel \ \leq \ C_j \parallel D_x^j v \parallel,
$$

onde $C_j > 0$ é depende de j. Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
(D_x^j v, D_x^\nu w D_x^{j+1-\nu} v) &\leq C_j K_{j-1} \parallel D_x^j v \parallel \parallel D_x^j v \parallel \\
&= C_j K_{j-1} \parallel D_x^j v \parallel^2 .
\end{aligned}
$$

2. Agora, se $\nu = j - 1$, então utilizando o fato que $j \geq 3$, temos

$$
\begin{aligned}
(D_x^j v, D_x^\nu w D_x^{j+1-\nu} v) &= (D_x^j v, D_x^{j-1} w D_x^{j+1-(j-1)} v) \\
&= (D_x^j v, (D_x^{j-1} w) v_{xx}) \\
&\leq \mid v_{xx} \mid_\infty \parallel D_x^j v \parallel \parallel D_x^{j-1} w \parallel \\
&\leq C_j \parallel w \parallel_{H^{j-1}} \parallel v_{xxx} \parallel \parallel D_x^j v \parallel \\
&\leq C_j K_{j-1} \parallel D_x^j v \parallel^2 .
\end{aligned}
$$

3. Se $\nu = j$,

$$\begin{aligned}(D_x^j v, D_x^\nu w D_x^{j+1-\nu} v) &= (D_x^j v, D_x^j w D_x^{j+1-j} v) \\ &= (D_x^j v, (D_x^j w) v_x).\end{aligned}$$

Como $j-1 \geq 2$,

$$\begin{aligned}(D_x^j v, (D_x^j w) v_x) &\leq \mid v_x \mid_\infty \| D_x^j v \| \| D_x^j w \| \\ &\leq C \| v_{xx} \| \| D_x^j v \| \| D_x^j w \| \\ &\leq C \| v \|_{H^{j-1}} \| D_x^j v \| \| D_x^j w \| \\ &\leq C K_{j-1} \| D_x^j v \| \| D_x^j w \| \\ &\leq C K_{j-1} (\| D_x^j v \|^2 + \| D_x^j w \|^2).\end{aligned}$$

4. Resta somente estudarmos o caso em que $\nu = 0$. Nesse caso,

$$\begin{aligned}(D_x^j v, D_x^\nu w D_x^{j+1-\nu} v) &= (D_x^j v, w D_x^{j+1-0} v) \\ &= (D_x^j v, w D_x^{j+1} v) \\ &= -\frac{1}{2} (D_x^j v, w_x D_x^j v) \\ &\leq \frac{1}{2} \mid w_x \mid_\infty \| D_x^j v \|^2 \\ &\leq C \| w_{xx} \| \| D_x^j v \|^2 \\ &\leq C_j \| w \|_{H^{j-1}} \| D_x^j v \|^2 \\ &\leq C_j K_{j-1} \| D_x^j v \|^2,\end{aligned}$$

isto é,

$$(D_x^j v, w D_x^{j+1} v) \leq C_j K_{j-1} \| D_x^j v \|^2 .$$

Portanto, estabelecemos o caso 4. Usando as estimativas encontradas nos quatro casos acima, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \| D_x^j v \|^2 &\leq C_j \sum_{\nu=0}^{j} (D_x^j v, D_x^\nu w D_x^{j+1-\nu} v) \\ &\leq C_j K_{j-1} \| D_x^j v \|^2 + C_j K_{j-1} \| D_x^j v \|^2 + C_j K_{j-1} (\| D_x^j v \|^2 + \| D_x^j w \|^2) \\ &\leq K_j (\| D_x^j v \|^2 + \| D_x^j w \|^2), \ \forall\, t \in [0, T_1], \ K_j = K_j(\| f \|_{H^{j-1}}).\end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall, concluímos que

$$\begin{aligned}
\| D_x^j v(\cdot,t) \|^2 &\le e^{K_j t}\left\{ \| D_x^j v(\cdot,0) \|^2 + \int_0^t | K_j \| D_x^j w(\cdot,\tau) \|^2 | \, d\tau \right\} \\
&\le e^{K_j t}\left\{ \| D_x^j v(\cdot,0) \|^2 + \int_0^t K_j \| D_x^j w(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau \right\} \\
&\le e^{K_j T_1}\left\{ \| D_x^j f \|^2 + K_j \int_0^t \| D_x^j w(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau \right\} \\
&\le K_j \left\{ \| D_x^j f \|^2 + \int_0^t \| D_x^j w(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau \right\}.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\| D_x^j u^{n+1}(\cdot,t) \|^2 \le K_j \left\{ \| D_x^j f \|^2 + \int_0^t \| D_x^j u^n(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau \right\}, \forall\, t \in [0,T_1].$$

Aplicando o Lema de Picard (ver Lema 1.6), concluímos que a seqüência $(D_x^j u^n(\cdot,t))$ é uniformemente limitada para todo $t \in [0,T_1]$, isto é, existe uma constante $\lambda_j \ge 0$ que depende de $\| D_x^j f \|$, mas independe de n e de $\epsilon > 0$, tal que

$$\| D_x^j u^n(\cdot,t) \| \le \lambda_j, \ \forall\, t \in [0,T_1], \ n = 0,1,....$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
\| u^n \|_{H^j}^2 &= \| u^n \|_{H^{j-1}}^2 + \| D_x^j u^n \|^2 \\
&\le K_{j-1}^2 + \lambda_j^2 \\
&=: K_j^2, \ \forall\, t \in [0,T_1],
\end{aligned}$$

onde $K_j = K_j(\| f \|_{H^j})$. Com isso, o Lema 2.5 está provado. □

O Lema 2.5 nos permite estimar a seqüência (u^n) juntamente com todas as suas derivadas mistas. Ou seja, aplicando o Lema 2.5,

$$\left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} u^n(x,t) \right| \le C(p,q), \ \forall\, t \in [0,T_1]. \tag{2.15}$$

Note também que, a seqüência $(D_x^j u^n)$ está limitada na norma do máximo. Com efeito,

$$\begin{aligned}
| D_x^j u^n |_\infty &\le C \| D_x^{j+2} u^n \| \\
&\le C \| u^n \|_{H^{j+2}} \\
&\le C K_{j+2}, \ \forall\, t \in [0,T_1],
\end{aligned}$$

onde $K_{j+2} = K_{j+2}(\| f \|_{H^{j+2}}) > 0$.

2.3 Existência local de soluções

Teorema 2.6 *Seja* $T_1 = T_1(\| f \|_{H^2})$ *determinado como no Lema* 2.4*. Para qualquer* $\epsilon > 0$*, o sistema* (2.1) *tem uma única solução periódica* $u(x,t)$ *de classe* C^∞ *definida para todo* $t \in [0, T_1]$*.*

Demonstração: Seja (u^n) a seqüência definida indutivamente no sistema (2.11) e denote $v = u^{n+1} - u^n$ e $w = u^n - u^{n-1}$. Portanto,

$$\begin{aligned} v_t &= u_t^{n+1} - u_t^n \\ &= u^n u_x^{n+1} + \epsilon u_{xx}^{n+1} - u^{n-1} u_x^n - \epsilon u_{xx}^n \\ &= u^n u_x^{n+1} - u^n u_x^n + u^n u_x^n - u^{n-1} u_x^n + \epsilon u_{xx}^{n+1} - \epsilon u_{xx}^n \\ &= u^n (u_x^{n+1} - u_x^n) + u_x^n (u^n - u^{n-1}) + \epsilon (u_{xx}^{n+1} - u_{xx}^n) \\ &= u^n v_x + u_x^n w + \epsilon v_{xx}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} v(x,0) &= u^{n+1}(x,0) - u^n(x,0) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Resumindo, temos

$$\begin{cases} v_t = u^n v_x + u_x^n w + \epsilon v_{xx}, \\ v(x,0) = 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Com isso, pelo Lema 2.5, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| v \|^2 &= (v, v_t) \\ &= (v, u^n v_x + u_x^n w + \epsilon v_{xx}) \\ &= (v, u^n v_x) + (v, u_x^n w) + \epsilon (v, v_{xx}) \\ &= -\frac{1}{2}(v, u_x^n v) + (v, u_x^n w) - \epsilon (v_x, v_x) \\ &= -\frac{1}{2}(v, u_x^n v) + (v, u_x^n w) - \epsilon \| v_x \|^2 \end{aligned}$$

onde $K_2 = K_2(\| f \|_{H^2})$ é independente de n. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| v \|^2 &\leq -\frac{1}{2}(v, u_x^n v) + (v, u_x^n w) \\
&\leq \frac{1}{2} | u_x^n |_\infty \| v \|^2 + | u_x^n |_\infty \| v \| \| w \| \\
&\leq C \| u_{xx}^n \| (\| v \|^2 + \| v \| \| w \|) \\
&\leq K_2(\| v \|^2 + \| w \|^2), \ \forall\, t \in [0, T_1].
\end{aligned}$$

onde $K_2 = K_2(\| f \|_{H^2})$ é independente de n. Usando o Lema de Gronwall,

$$\begin{aligned}
\| v(\cdot, t) \|^2 &\leq e^{2K_2 t} \left\{ \| v(\cdot, 0) \|^2 + \int_0^t | 2K_2 \| w(\cdot, \tau) \|^2 | \, d\tau \right\} \\
&\leq K \int_0^t \| w(\cdot, \tau) \|^2 \, d\tau, \ \forall\, t \in [0, T_1],
\end{aligned}$$

onde $K = K(\| f \|_{H^2})$ é independente de n. Portanto,

$$\| u^{n+1}(\cdot, t) - u^n(\cdot, t) \|^2 \leq K \int_0^t \| u^n(\cdot, \tau) - u^{n-1}(\cdot, \tau) \|^2 \, d\tau, \ \forall\, t \in [0, T_1].$$

Assim, pelo Lema de Picard, temos

$$\lim_{n \to \infty} (u^{n+1} - u^n) = 0, \text{ uniformemente},$$

e, além disso, (u^n) é de Cauchy. Como L^2 é um espaço métrico completo, então

$$\lim_{n \to \infty} u^n = u \in L^2.$$

Utilizando o Corolário 1.8, a estimativa dada em (2.15) nos permite concluir que $u^n \to u \in C^\infty$ e que as derivadas mistas de u^n convergem às respectivas derivadas mistas da aplicação u, isto é,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} u^n(x, t) = \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} u(x, t), \ \forall\, p, \ q \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Deste modo, fazendo n tender a infinito no sistema (2.11), temos

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} u_t^{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} (u^n u_x^{n+1}) + \epsilon \lim\limits_{n \to \infty} u_{xx}^{n+1}, \\ \lim\limits_{n \to \infty} u^{n+1}(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} u_t = uu_x + \epsilon u_{xx}, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

ou seja, o sistema (2.1) tem uma única solução u (periódica) de classe C^∞ no intervalo $[0, T_1]$. $\square$

2.4 Existência global de soluções

Nesta seção estenderemos o intervalo de existência da única solução da equação de Burgers. Para isso, utilizaremos o Teorema da existência local juntamente com as estimativas provadas nas seções anteriores.

Lema 2.7 *Seja u uma solução C^∞ do sistema* (2.1) *no intervalo* $[0, T]$*. Então*

$$| \, u(\cdot, t) \, |_\infty \;\; \leq \;\; | \, u(\cdot, 0) \, |_\infty, \;\; \forall \; t \in [0, T].$$

Demonstração: Seja $\lambda > 0$ uma constante e defina $v(x,t) = e^{-\lambda t} u(x,t)$, onde u é a solução do sistema (2.1) no intervalo $[0, T]$. Assim,

$$\begin{aligned} v_t &= (e^{-\lambda t} u(x,t))_t \\ &= e^{-\lambda t} u_t - \lambda e^{-\lambda t} u \\ &= e^{-\lambda t}(u_t - \lambda u) \\ &= e^{-\lambda t}(uu_x + \epsilon u_{xx} - \lambda u) \\ &= ue^{-\lambda t} u_x + \epsilon e^{-\lambda t} u_{xx} - \lambda e^{-\lambda t} u \\ &= uv_x + \epsilon v_{xx} - \lambda v, \end{aligned}$$

isto é

$$v_t \;\; = \;\; uv_x + \epsilon v_{xx} - \lambda v. \tag{2.17}$$

Suponha, por absurdo, que a aplicação $v(x,t)$ assume um máximo em (x_0, t_0), com $v(x_0, t_0) > 0$ e que $0 < t_0 \leq T$. Dessa forma,

$$v_t(x_0, t_0) \;\; \geq \;\; 0, \;\; v_x(x_0, t_0) \;\; = \;\; 0, \;\; v_{xx}(x_0, t_0) \;\; \leq \;\; 0.$$

Todavia, pela equação (2.17), temos

$$0 \;\leq\; v_t(x_0,t_0) \;=\; u(x_0,t_0)v_x(x_0,t_0) + \epsilon v_{xx}(x_0,t_0) - \lambda v(x_0,t_0) \;<\; 0,$$

o que é uma contradição. Logo, $t_0 = 0$. Portanto, um máximo positivo só pode ocorrer quando $t = 0$. De maneira análoga, podemos mostrar que um mínimo negativo só pode acontecer em $t = 0$. Desse modo,

$$\mid v(\cdot,t) \mid_\infty \;\leq\; \mid v(\cdot,0) \mid_\infty,\ \forall\ t \geq 0.$$

Isto é equivalente a

$$\mid e^{-\lambda t}u(x,t) \mid_\infty \;\leq\; \mid e^{-0\cdot\lambda}u(x,0) \mid_\infty,\ \forall\ t \geq 0,$$

ou seja,

$$e^{-\lambda t} \mid u(x,t) \mid_\infty \;\leq\; \mid u(x,0) \mid_\infty,\ \forall\ t \geq 0.$$

Fazendo $\lambda \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \mid u(x,t) \mid_\infty &\leq \mid u(x,0) \mid_\infty \\ &= \mid f \mid_\infty,\ \forall\ t \geq 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.8 *Seja $f = f(x)$ uma função C^∞ com período 1, e denote $u \in C^\infty$ a solução periódica do sistema (2.1) no intervalo $[0,T]$. Existe uma constante $K > 0$, dependendo apenas de $\parallel f \parallel_{H^2}$ (e $\epsilon > 0$), mas independente de T, com*

$$\parallel u(\cdot,t) \parallel_{H^2} \;\leq\; K,\ \forall\ t \in [0,T]. \tag{2.18}$$

Demonstração: Para estimarmos a norma H^2 de u precisamos estimar a norma L^2 das aplicações u, u_x e u_{xx}. Como u é solução do sistema (2.1) no intervalo $[0,T]$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u,u) &= (u,u_t) \\ &= (u, uu_x + \epsilon u_{xx}) \\ &= (u,uu_x) + \epsilon(u,u_{xx}) \\ &= -\epsilon(u_x,u_x) \\ &= -\epsilon \parallel u_x \parallel^2 . \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \parallel u(\cdot,t) \parallel^2 \;\; \leq \;\; -2\epsilon \parallel u_x(\cdot,t) \parallel^2 \;\; \leq \;\; 0.$$

Integrando de 0 a t, temos

$$- \parallel u(\cdot,0) \parallel^2 \;\; \leq \;\; \parallel u(\cdot,t) \parallel^2 - \parallel u(\cdot,0) \parallel^2 \;\; \leq \;\; -2\epsilon \int_0^t \parallel u_x \parallel^2 \;\; \leq \;\; 0. \quad (2.19)$$

Dessa maneira,

$$\begin{cases} 2\epsilon \displaystyle\int_0^t \parallel u_x(\cdot,\tau) \parallel^2 d\tau \;\; \leq \parallel u(\cdot,0) \parallel^2, \\ \\ \parallel u(\cdot,t) \parallel^2 \leq \parallel u(\cdot,0) \parallel^2, \end{cases} \quad (2.20)$$

para todo $t \in [0,T]$. Encontremos uma estimativa para norma L^2 da aplicação u_x. Derivando o sistema (2.1) em relação a x, temos

$$\begin{cases} u_{xt} \;=\; (uu_x)_x + \epsilon u_{xxx}, \\ u_x(\cdot,0) \;=\; f_x. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u_x \parallel^2 \;&=\; (u_x, u_{xt}) \\ &=\; (u_x, (uu_x)_x + \epsilon u_{xxx}) \\ &=\; (u_x, (uu_x)_x) + \epsilon(u_x, u_{xxx}) \\ &=\; -(u_{xx}, uu_x) - \epsilon(u_{xx}, u_{xx}) \\ &\leq\; \mid u \mid_\infty \parallel u_{xx} \parallel \parallel u_x \parallel - \epsilon \parallel u_{xx} \parallel^2, \end{aligned}$$

Como para todo $\epsilon > 0$ temos que

$$\mid u \mid_\infty \parallel u_x \parallel \parallel u_{xx} \parallel \;\; \leq \;\; \frac{1}{2\epsilon} \mid u \mid_\infty^2 \parallel u_x \parallel^2 + \frac{\epsilon}{2} \parallel u_{xx} \parallel^2 .$$

Então aplicando o Lema 2.7, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \parallel u_x \parallel^2 \;&\leq\; \frac{1}{\epsilon} \mid u \mid_\infty^2 \parallel u_x \parallel^2 + \epsilon \parallel u_{xx} \parallel^2 - 2\epsilon \parallel u_{xx} \parallel^2 \\ &=\; \frac{1}{\epsilon} \mid u \mid_\infty^2 \parallel u_x \parallel^2 - \epsilon \parallel u_{xx} \parallel^2 \\ &\leq\; \frac{1}{\epsilon} \mid f \mid_\infty^2 \parallel u_x \parallel^2 - \epsilon \parallel u_{xx} \parallel^2 . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{d}{dt} \| u_x(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau &\leq \int_0^t \left(\frac{1}{\epsilon} \mid f \mid_\infty^2 \| u_x(\cdot,\tau) \|^2 - \epsilon \| u_{xx}(\cdot,\tau) \|^2 \right) d\tau \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \mid f \mid_\infty^2 \int_0^t \| u_x(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau - \epsilon \int_0^t \| u_{xx}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\| u_x(\cdot,t) \|^2 - \| u_x(\cdot,0) \|^2 \leq \frac{1}{\epsilon} \mid f \mid_\infty^2 \int_0^t \| u_x(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau - \epsilon \int_0^t \| u_{xx}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau.$$

Aplicando a primeira desigualdade em (2.20), concluímos que

$$\begin{aligned}\| u_x(\cdot,t) \|^2 &\leq \| u_x(\cdot,0) \|^2 + \frac{1}{\epsilon} \mid f \mid_\infty^2 \int_0^t \| u_x(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau - \epsilon \int_0^t \| u_{xx}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau \\ &\leq \| f_x \|^2 + \frac{C}{\epsilon} \| f_x \|^2 \int_0^t \| u_x(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau - \epsilon \int_0^t \| u_{xx}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau \\ &\leq \| f_x \|^2 + \frac{C}{\epsilon} \| f_x \|^2 \frac{1}{2\epsilon} \| f \|^2, \ \forall \ t \in [0,T]\end{aligned}$$

Logo

$$\max_{0 \leq t \leq T} \| u_x(\cdot,t) \|^2 \leq \| f_x \|^2 + \frac{C}{\epsilon} \| f_x \|^2 \frac{1}{2\epsilon} \| f \|^2 . \tag{2.21}$$

Observe que

$$\| u_x(\cdot,T) \|^2 \leq \| f_x \|^2 + \frac{1}{\epsilon} \mid f \mid_\infty^2 \int_0^T \| u_x(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau - \epsilon \int_0^T \| u_{xx}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau.$$

Portanto, usando a primeiraequação do sistema (2.20), temos

$$\begin{aligned}\epsilon \int_0^T \| u_{xx}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau &\leq \| f_x \|^2 + \frac{1}{\epsilon} \mid f \mid_\infty^2 \int_0^T \| u_x(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau - \| u_x(\cdot,T) \|^2 \\ &\leq \| f_x \|^2 + \frac{C}{\epsilon} \| f_x \|^2 \int_0^T \| u_x(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau \\ &\leq \| f_x \|^2 + \frac{C}{\epsilon} \| f_x \|^2 \frac{1}{2\epsilon} \| f \|^2 .\end{aligned}$$

Realizando cálculos análogos para u_{xx}, é possível mostrar que

$$\| u_{xx}(\cdot,t) \|^2 \leq \| u_{xx}(\cdot,0) \|^2 + \frac{25}{\epsilon} \mid f \mid_\infty^2 \int_0^t \| u_{xx}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau - \epsilon \int_0^t \| u_{xxx}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau.$$

De fato, derivando o sistema (2.1) duas vezes em relação a x, obtemos

$$\begin{cases} u_{xxt} &= (uu_x)_{xx} + \epsilon u_{xxxx}, \\ u_{xx}(\cdot,0) &= f_{xx}. \end{cases}$$

Daí, pelo Lema 2.7,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_{xx},u_{xx}) &= (u_{xx},u_{xxt}) \\
&= (u_{xx},(uu_x)_{xx} + \epsilon u_{xxxx}) \\
&= (u_{xx},(uu_x)_{xx}) + \epsilon(u_{xx},u_{xxxx}) \\
&= (u_{xx},(uu_x)_{xx}) - \epsilon \| u_{xxx} \|^2 \\
&= (u_{xx},uu_{xxx} + 3u_{xx}u_x) - \epsilon \| u_{xxx} \|^2 \\
&= (u_{xx},uu_{xxx}) + 3(u_{xx},u_{xx}u_x) - \epsilon \| u_{xxx} \|^2 \\
&= (u_{xx},uu_{xxx}) - 6(u_{xx},uu_{xxx}) - \epsilon \| u_{xxx} \|^2 \\
&= -\,5(u_{xx},uu_{xxx}) - \epsilon \| u_{xxx} \|^2 \\
&\leq 5 \mid u \mid_\infty \| u_{xx} \| \| u_{xxx} \| - \epsilon \| u_{xxx} \|^2 \\
&\leq \frac{5}{\sqrt{\epsilon}} \mid f \mid_\infty \| u_{xx} \| \sqrt{\epsilon} \| u_{xxx} \| - \epsilon \| u_{xxx} \|^2 \\
&\leq \frac{25}{2\epsilon} \mid f \mid_\infty^2 \| u_{xx} \|^2 + \frac{\epsilon}{2} \| u_{xxx} \|^2 - \epsilon \| u_{xxx} \|^2 \\
&= \frac{25}{2\epsilon} \mid f \mid_\infty^2 \| u_{xx} \|^2 - \frac{\epsilon}{2} \| u_{xxx} \|^2 .
\end{aligned}$$

Logo, integrando de 0 a t, temos

$$\| u_{xx}(\cdot,t) \|^2 \leq \| u_{xx}(\cdot,0) \|^2 + \frac{25}{\epsilon} \mid f \mid_\infty^2 \int_0^t \| u_{xx}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau - \epsilon \int_0^t \| u_{xxx}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau.$$

Analogamente, $\max\limits_{0\leq t\leq T} \| u_{xx}(\cdot,t) \|^2$ e $\epsilon \int_0^T \| u_{xxx}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau$ podem ser estimados por constantes que dependem somente de $\| f \|_{H^2}$. Com isso,

$$\| u \|_{H^2} \leq K,$$

onde $K = K(\| f \|_{H^2})$ é independente de T. Isto conclui a prova do Teorema 2.8. $\square$

Vamos provar o Teorema da existência de soluções globais para o sistema (2.1). Esse é o

Teorema 2.9 *Seja $f \in C^\infty$. O sistema* (2.1) *tem uma única solução* 1*-periódica $u \in C^\infty$ definida para todo $t \in [0, \infty)$.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.6, sabemos que existe $T_1 > 0$ e uma aplicação $u \in C^\infty$ que é solução do sistema (2.1) para todo $t \in [0, T_1]$. E, pelo Teorema 2.8, concluímos que existe $K > 0$, tal que

$$\| u(\cdot, t) \|_{H^2} \;\; \leq \;\; K, \; \forall \, t \in [0, T_1]. \tag{2.22}$$

Em particular,

$$\| u(\cdot, T_1) \|_{H^2} \;\; \leq \;\; K. \tag{2.23}$$

Agora, considere a função $x \mapsto u(x, T_1)$, e considere o sistema (2.1) com essa condição inicial. Novamente pelo Teorema 2.6, existe $T_2 > 0$ dependendo somente da norma H^2 de $u(x, T_1)$ e uma solução $v \in C^\infty$ do sistema (2.1) no intervalo $[0, T_2]$, com condição inicial $u(x, T_1)$. Pelo Teorema 2.8, temos

$$\| v(\cdot, t) \|_{H^2} \;\; \leq \;\; K, \; \forall \, t \in [0, T_2],$$

a constante K é a constante que foi encontrada na desigaldade (2.22), basta observar a desigualdade (2.23). Em particular,

$$\| v(\cdot, T_2) \|_{H^2} \;\; \leq \;\; K.$$

Agora, defina a aplicação w por

$$w(\cdot, t) \;\; = \;\; \begin{cases} u(\cdot, t), & \text{se } \; 0 \leq t \leq T_1; \\ v(\cdot, t - T_1), & \text{se } \; T_1 \leq t \leq T_1 + T_2. \end{cases}$$

Afirmamos que w é de classe C^∞ e é solução do sistema (2.1) para $t \in [0, T_1 + T_2]$. Além disso,

$$\| w(\cdot, T_1 + T_2) \|_{H^2} \;\; \leq \;\; K.$$

Para provar esses fatos, primeiro note que essa aplicação está bem definida, pois

$$v(\cdot, T_1 - T_1) \;\; = \;\; v(\cdot, 0) \;\; = \;\; u(\cdot, T_1).$$

Como $u(\cdot,t)$ e $v(\cdot,t-T_1)$ são de classe C^∞ nos intervalos $[0,T_1]$ e $[T_1,T_1+T_2]$, respectivamente, então provar que $w(\cdot,t)\in C^\infty$ é equivalente a mostrar que $D_t^j w(\cdot,t)$ existe e é contínua no ponto $t=T_1$, para todo $j=0,1,2,\ldots$. Assim sendo, demonstraremos apenas a continuidade de $D_t^j w(\cdot,t)$ no ponto $t=T_1$ realizando indução sobre j. Se $j=1$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{w(\cdot,T_1+h)-w(\cdot,T_1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{v(\cdot,h)-v(\cdot,0)}{h}\\
&= v_t(\cdot,0).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-}\frac{w(\cdot,T_1+h)-w(\cdot,T_1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{u(\cdot,T_1+h)-u(\cdot,T_1)}{h}\\
&= u_t(\cdot,T_1).
\end{aligned}$$

Como u e v são soluções da primeira equação do sistema (2.1) nos intervalos $[0,T_1]$ e $[0,T_2]$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
u_t(\cdot,T_1) &= u(\cdot,T_1)u_x(\cdot,T_1)+\epsilon u_{xx}(\cdot,T_1)\\
&= v(\cdot,0)v_x(\cdot,0)+\epsilon v_{xx}(\cdot,0)\\
&= v_t(\cdot,0).
\end{aligned}$$

Com isso,

$$w_t(\cdot,T_1) = u_t(\cdot,T_1) = v_t(\cdot,0),$$

isto é, a função w_t existe e é contínua em $t=T_1$. Agora, suponhamos que $D_t^j w$ existe e é contínua no ponto $t=T_1$. Observe que,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{D_t^j w(\cdot,T_1+h)-D_t^j w(\cdot,T_1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{D_t^j v(\cdot,h)-D_t^j v(\cdot,0)}{h}\\
&= D_t^{j+1}v(\cdot,0).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-}\frac{D_t^j w(\cdot,T_1+h)-D_t^j w(\cdot,T_1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{D_t^j u(\cdot,T_1+h)-D_t^j u(\cdot,T_1)}{h}\\
&= D_t^{j+1}u(\cdot,T_1).
\end{aligned}$$

Porém, aplicando o operador D_t^j à primeira equação do sistema (2.1), temos

$$D_t^{j+1} u \;=\; D_t^j(uu_x) + \epsilon D_t^j u_{xx}.$$

Pela regra de Leibniz,

$$D_t^j(uu_x) \;=\; \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} D_t^k u D_t^{j-k} u_x.$$

Dessa forma, pela hipótese de indução, concluímos

$$\begin{aligned}
D_t^j(uu_x)(\cdot, T_1) &= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} D_t^k u(\cdot, T_1) D_t^{j-k} u_x(\cdot, T_1) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} D_t^k v(\cdot, 0) D_t^{j-k} v_x(\cdot, 0) \\
&= D_t^j(vv_x)(\cdot, 0).
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
D_t^{j+1} u(\cdot, T_1) &= D_t^j(uu_x)(\cdot, T_1) + \epsilon D_t^j u_{xx}(\cdot, T_1) \\
&= D_t^j(vv_x)(\cdot, 0) + \epsilon D_t^j v_{xx}(\cdot, 0) \\
&= D_t^{j+1} v(\cdot, 0).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$D_t^{j+1} w(\cdot, T_1) \;=\; D_t^{j+1} u(\cdot, T_1) \;=\; D_t^{j+1} v(\cdot, 0).$$

Deste modo, $D_t^{j+1} w$ existe e é contínua em $t = T_1$. O que conclui a indução. Portanto, w é uma aplicação de classe C^∞ e é solução do sistema (2.1) no intervalo de tempo $t \in [0, T_1 + T_2]$, pois u e v o são nos intervalos $[0, T_1]$ e $[0, T_2]$, respectivamente. Note que,

$$\begin{aligned}
\| \, w(\cdot, T_1 + T_2) \, \|_{H^2} &= \| \, v(\cdot, T_2) \, \|_{H^2} \\
&\leq K.
\end{aligned}$$

Considere, agora, a função $x \mapsto w(\cdot, T_1 + T_2)$. Pelo Teorema 2.6 e pela demonstração do Lema 2.4, existe uma única solução z de classe C^∞ do sistema (2.1) no intervalo de tempo $t \in [0, T_2]$, tal que $z(\cdot, 0) = w(\cdot, T_1 + T_2)$. Assim, pelo Teorema 2.8,

$$\| \, z(\cdot, t) \, \|_{H^2} \;\leq\; K, \; \forall \, t \in [0, T_2].$$

Defina

$$a(\cdot, t) \;\; = \;\; \begin{cases} z(\cdot, t), & \text{se } \; 0 \leq t \leq T_2; \\ w(\cdot, t - T_2), & \text{se } \; T_2 \leq t \leq T_1 + 2T_2. \end{cases}$$

É possível provar que a é uma solução de classe C^∞ do sistema (2.1) no intervalo de tempo $t \in [0, T_1 + 2T_2]$, onde

$$\| \, a(\cdot, T_1 + 2T_2) \, \|_{H^2} \;\; = \;\; \| \, w(\cdot, T_1 + T_2) \, \|_{H^2} \;\; \leq \;\; K.$$

Logo, seguindo este raciocínio, concluímos a prova do Teorema 2.9. □

Capítulo 3

Sistema de Navier-Stokes em duas dimensões espaciais

3.1 Caso periódico em duas dimensões espaciais

Sem mais prolongamentos, consideraremos que todas as aplicações desse capítulo são reais, de C^∞ e 2π-periódicas nas duas variáveis (x e y). O sistema de Navier-Stokes é

$$u_t + uu_x + vu_y + p_x = \nu \Delta u, \tag{3.1}$$

$$v_t + uv_x + vv_y + p_y = \nu \Delta v, \tag{3.2}$$

$$u_x + v_y = 0, \tag{3.3}$$

onde $\nu > 0$ é a viscosidade, $\mathbf{u} = (u, v)$ é a velocidade e p é a pressão de um fluido incompressível. As condições iniciais são as seguintes

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = f(x, y), \\ v(x, y, 0) = g(x, y). \end{cases} \tag{3.4}$$

Exigimos, por compatibilidade, que

$$f_x + g_y = 0. \tag{3.5}$$

Observe que em uma solução (u, v, p) do sistema de Navier-Stokes a pressão não está unicamente determinada, pois se tomarmos uma nova aplicação $p_0 = p_0(t)$ dependendo somente de t temos que (u, v, p_1) também soluciona o mesmo sistema, onde $p_1(x, y, t) = p(x, y, t) + p_0(t)$. Dessa forma, para que uma solução do sistema de Navier-Stokes seja unicamente determinada, estabelecemos a normalização

$$(1, p(\cdot, t)) \;=\; 0, \forall\, t \geq 0, \tag{3.6}$$

onde 1 indica a função identicamente 1 para quaisquer valores de x e y. O resultado mais importante a ser provado nesse capítulo é o

Teorema 3.1 *Assuma que a condição de compatibilidade* (3.5) *é satisfeita. O sistema* (3.1)-(3.4) *com condição* (3.6) *tem solução única (periódica)* (u, v, p). *A solução é* C^∞ *e existe para todo tempo* $t \geq 0$.

3.2 Equação da vorticidade

Suponha que (u,v,p) é solução do sistema de Navier-Stokes. Da equação (3.1) concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(1, u) &= (1_t, u) + (1, u_t) \\
&= (1, u_t) \\
&= (1, -uu_x - vu_y - p_x + \nu\Delta u) \\
&= -(1, uu_x) - (1, vu_y) - (1, p_x) + \nu(1, \Delta u).
\end{aligned}$$

Observe que $(1, p_x) = (1, \Delta u) = 0$ pois, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
(1, p_x) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} p_x dx dy \\
&= \int_0^{2\pi} [p(2\pi, y, t) - p(0, y, t)] dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nesta última igualdade utilizamos a 2π-periodicidade de p na variável x. Analogamente,

$$\begin{aligned}
(1,\Delta u) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta u dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (u_{xx}+u_{yy})dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{xx}dxdy + \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{yy}dydx \\
&= \int_0^{2\pi} [u_x(2\pi,y,t)-u_x(0,y,t)]dy + \int_0^{2\pi} [u_y(x,2\pi,t)-u_y(x,0,t)]dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\frac{d}{dt}(1,u) = -(1,uu_x)-(1,vu_y).$$

Integrando por partes novamente, temos

$$\begin{aligned}
(1,vu_y) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} vu_y dydx \\
&= \int_0^{2\pi} [(uv)\mid_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} uv_y dy]dx \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} uv_y dydx.
\end{aligned}$$

Como $u_x+v_y=0$, então $v_y=-u_x$. Daí,

$$\begin{aligned}
(1,vu_y) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} uu_x dydx \\
&= (1,uu_x).
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
(1,uu_x) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} uu_x dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} [u^2 \mid_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} uu_x dx]dy \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} uu_x dxdy \\
&= -(1,uu_x).
\end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$(1, uu_x) \;=\; 0.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}(1, u) \;=\; -(1, uu_x) - (1, vu_y) \;=\; 0.$$

Integrando de 0 a t, temos que

$$(1, u(\cdot, t)) - (1, u(\cdot, 0)) \;=\; 0.$$

Com isso,

$$(1, u(\cdot, t)) \;=\; (1, f). \tag{3.7}$$

Para uma simplificação dos cálculos, mostraremos que podemos supor que $(1, u) = (1, v) = 0$. De fato, defina $\tilde{u} = u - \dfrac{1}{4\pi^2}(1, u)$ e $\tilde{v} = v - \dfrac{1}{4\pi^2}(1, v)$. Logo,

$$\begin{aligned}
(1, \tilde{u}) &= (1, u - \frac{1}{4\pi^2}(1, u)) \\
&= (1, u) - \frac{1}{4\pi^2}(1, (1, u)) \\
&= (1, u) - \frac{1}{4\pi^2}(1, u)(1, 1) \\
&= (1, u) - \frac{1}{4\pi^2}(1, u)4\pi^2 \\
&= (1, u) - (1, u) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Analogamente, $(1, \tilde{v}) = 0$. Observe que

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_t &= \Big(u - \frac{1}{4\pi^2}(1, u)\Big)_t \\
&= u_t - \frac{1}{4\pi^2}\frac{d}{dt}(1, u) \\
&= u_t,
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}\tilde{u}_x &= \left(u - \frac{1}{4\pi^2}(1,u)\right)\left(u - \frac{1}{4\pi^2}(1,u)\right)_x \\
&= \left(u - \frac{1}{4\pi^2}(1,u)\right)\left(u_x - \frac{1}{4\pi^2}(1,u)_x\right) \\
&= \left(u - \frac{1}{4\pi^2}(1,u)\right)u_x.
\end{aligned}
$$

Da mesma forma,

$$
\begin{aligned}
\tilde{v}\tilde{u}_y &= \left(v - \frac{1}{4\pi^2}(1,v)\right)\left(u - \frac{1}{4\pi^2}(1,u)\right)_y \\
&= \left(v - \frac{1}{4\pi^2}(1,v)\right)\left(u_y - \frac{1}{4\pi^2}(1,u)_y\right) \\
&= \left(v - \frac{1}{4\pi^2}(1,v)\right)u_y.
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\Delta\tilde{u} = \tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy} = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_t + \tilde{u}\tilde{u}_x + \tilde{v}\tilde{u}_y + p_x &= \nu\Delta u - \frac{1}{4\pi^2}(1,u)u_x - \frac{1}{4\pi^2}(1,v)u_y \\
&= \nu\Delta\tilde{u} - \frac{1}{4\pi^2}(1,u)u_x - \frac{1}{4\pi^2}(1,v)u_y.
\end{aligned}
$$

Realizando cálculos análogos, conseguimos uma equação para $\tilde{v}$, semelhante a que foi encontrada para $\tilde{u}$, isto é,

$$
\tilde{v}_t + \tilde{u}\tilde{v}_x + \tilde{v}\tilde{v}_y + p_y = \nu\Delta\tilde{v} - \frac{1}{4\pi^2}(1,u)v_x - \frac{1}{4\pi^2}(1,v)v_y.
$$

Ou seja, $(\tilde{u}, \tilde{v}, p)$ satisfaz o sistema de Navier-Stokes com força não-nula já conhecida. Dessa forma, podemos admitir que

$$
(1,u) = (1,v) = 0. \tag{3.8}
$$

Portanto, consideraremos, no decorrer da dissertação, que o sistema (3.8) é satisfeito. Além disso, pela equação (3.7), também teremos que $(1,f) = (1,g) = 0$.

3.3 Formulação da vorticidade

Agora introduziremos o conceito de vorticidade.

Definição 3.2 *A expressão*

$$\xi \ := \ v_x - u_y, \tag{3.9}$$

é chamada vorticidade.

Definição 3.3 *O sistema*

$$\begin{cases} \xi_t + u\xi_x + v\xi_y = \nu\Delta\xi, \\ \xi(\cdot, 0) = g_x - f_y. \end{cases} \tag{3.10}$$

é denominado sistema da vorticidade.

Pela definição 3.9, obtemos

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0, \\ v_x - u_y = \xi. \end{cases} \tag{3.11}$$

O sistema de Navier-Stokes para as variáveis (u, v, p) é equivalente ao sistema da vorticidade juntamente com o sistema de Cauchy-Riemann não-homogêneo (3.11) e a equação elíptica para a pressão

$$\begin{cases} \Delta p + 2(v_x u_y - u_x v_y) = 0, \\ (1, p) = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Teorema 3.4 *Suponha que $f_x + g_y = 0$, $(1, f) = (1, g) = 0$. Se u, v, p satisfazem*

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y + p_x = \nu\Delta u, \\ v_t + uv_x + vv_y + p_y = \nu\Delta v, \\ u_x + v_y = 0, \\ (1, p) = 0, \ u(x, y, 0) = f(x, y), \ v(x, y, 0) = g(x, y), \end{cases} \tag{3.13}$$

então p satisfaz (3.12) *e*

$$\begin{cases} \xi_t + u\xi_x + v\xi_y = \nu\Delta\xi, \\ \xi(x, y, 0) = g_x(x, y) - f_y(x, y), \\ u_x + v_y = 0, \ (1, u) = (1, v) = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Reciprocamente, se u, v, ξ solucionam o sistema (3.14) *e p é definida como a solução do sistema* (3.12)*, então u, v, p satisfazem o sistema* (3.13).

Demonstração: Se $(u,\ v,\ p)$ satisfaz o sistema (3.13), então (u,v,ξ) satisfaz o sistema (3.10) e p o sistema (3.12). De fato, derivando a segunda equação do sistema (3.13) em relação a x e a primeira em relação a y, temos

$$\begin{cases} v_{tx} + (uv_x)_x + (vv_y)_x + p_{yx} = \nu\Delta v_x, \\ u_{ty} + (uu_x)_y + (vu_y)_y + p_{xy} = \nu\Delta u_y. \end{cases}$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} v_{tx} + u_x v_x + uv_{xx} + v_x v_y + vv_{yx} + p_{yx} = \nu\Delta v_x, \\ u_{ty} + u_y u_x + uu_{xy} + v_y u_y + vu_{yy} + p_{xy} = \nu\Delta u_y. \end{cases}$$

Dessa forma, subtraindo a segunda equação do sistema acima da primeira e utilizando o sistema (3.11), obtemos

$$\xi_t + u\xi_x + v\xi_y \quad = \quad \nu\Delta\xi.$$

Note que a condição inicial é facilmente verificada. Com efeito,

$$\xi(\cdot,0) \quad = \quad v_x(\cdot,0) - u_y(\cdot,0) \quad = \quad g_x - f_y.$$

Logo, conhecendo u e v, obtemos que a vorticidade ξ soluciona o sistema (3.10). Derivando a primeira equação do sistema (3.13) em relação a x e segunda em relação a y, encontramos o sistema

$$\begin{cases} u_{tx} + (uu_x)_x + (vu_y)_x + p_{xx} = \nu\Delta u_x, \\ v_{ty} + (uv_x)_y + (vv_y)_y + p_{yy} = \nu\Delta v_y. \end{cases}$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} u_{tx} + u_x u_x + uu_{xx} + v_x u_y + vu_{yx} + p_{xx} = \nu\Delta u_x, \\ v_{ty} + u_y v_x + uv_{xy} + v_y v_y + vv_{yy} + p_{yy} = \nu\Delta v_y. \end{cases}$$

Somando as equações deste novo sistema e levando em consideração que $u_x + v_y = 0$, obtemos

$$\begin{cases} \Delta p + 2(v_x u_y - u_x v_y) = 0, \\ (1,p) = 0. \end{cases}$$

Este sistema tem solução única pelo Lema 1.9. Desse modo, se (u,v,p) satisfazem o sistema (3.13), obtemos que (u,v,ξ) soluciona o sistema (3.14) e p satisfaz o sistema

(3.12). Para provar a recíproca, suponhamos que u, v, ξ satisfazem o sistema (3.14). Defina F e G por

$$\begin{aligned} F &:= u_t + uu_x + vu_y - \nu\Delta u, \qquad (3.15)\\ G &:= v_t + uv_x + vv_y - \nu\Delta v. \qquad (3.16)\end{aligned}$$

Derivando a equação (3.16) em relação a x, concluímos que

$$\begin{aligned} G_x &= v_{xt} + (uv_x)_x + (vv_y)_x - \nu\Delta v_x \\ &= v_{xt} + uv_{xx} + u_x v_x + v_x v_y + vv_{yx} - \nu\Delta v_x. \end{aligned}$$

Derivando a equação (3.15) em relação a y, obtemos

$$\begin{aligned} F_y &= u_{yt} + (uu_x)_y + (vu_y)_y - \nu\Delta u_y \\ &= u_{yt} + u_y u_x + uu_{xy} + v_y u_y + vu_{yy} - \nu\Delta u_y. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} G_x - F_y &= (v_x - u_y)_t + u(v_x - u_y)_x + v(v_x - u_y)_y + (u_x + v_y)(v_x - u_y) - \nu\Delta\xi \\ &= \xi_t + u\xi_x + v\xi_y - \nu\Delta\xi \;\; = \;\; 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (1, F) &= (1, u_t + uu_x + vu_y - \nu\Delta u) \\ &= (1, u_t) + (1, uu_x + vu_y) - \nu(1, \Delta u) \\ &= (1, u_t), \\ &= \frac{d}{dt}(1, u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente, $(1, G) = 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} (1, G) &= (1, v_t + uv_x + vv_y - \nu\Delta v) \\ &= (1, v_t) + (1, uv_x + vv_y) - \nu(1, \Delta v) \\ &= (1, v_t) \\ &= \frac{d}{dt}(1, v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Com esses dois últimos resultados, o Lema 1.10 afirma que existe uma única aplicação φ que soluciona

$$\begin{cases} \varphi_x = F, \\ \varphi_y = G, \\ (1, \varphi) = 0. \end{cases}$$

Seja $p = -\varphi$. Logo,

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y - \nu\Delta u &= F \\ &= \varphi_x \\ &= -p_x. \end{aligned}$$

Assim,

$$u_t + uu_x + vu_y + p_x = \nu\Delta u.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} v_t + uv_x + vv_y - \nu\Delta v &= G \\ &= \varphi_y \\ &= -p_y, \end{aligned}$$

isto é,

$$v_t + uv_x + vv_y + p_y = \nu\Delta v.$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} F_x &= u_{tx} + (uu_x)_x + (vu_y)_x - \nu\Delta u_x \\ &= u_{tx} + u_x u_x + uu_{xx} + v_x u_y + vu_{yx} - \nu\Delta u_x, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G_y &= v_{ty} + (uv_x)_y + (vv_y)_y - \nu\Delta v_y \\ &= v_{ty} + u_y v_x + uv_{xy} + v_y v_y + vv_{yy} - \nu\Delta v_y. \end{aligned}$$

Como $u_x + v_y = 0$, então

$$\begin{aligned} F_x + G_y &= u_x u_x + v_y v_y + 2v_x u_y + u(u_x + v_y)_x + v(u_x + v_y)_y - \nu(\Delta u_x + \Delta v_y) \\ &= 2(v_x u_y - u_x v_y). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_{xx} + \varphi_{yy} \\ &= F_x + G_y \\ &= 2(v_x u_y - u_x v_y). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta p + 2(v_x u_y - u_x v_y) &= \Delta(-\varphi) + 2(v_x u_y - u_x v_y) \\ &= -\Delta\varphi + 2(v_x u_y - u_x v_y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto é, p satisfaz a equação (3.12). Note que,

$$\begin{aligned} (1, p) &= (1, -\varphi) \\ &= -(1, \varphi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, u, v e p satisfazem o sistema (3.13). Resta-nos provar que as condições iniciais são satisfeitas. Com efeito, usando o sistema de Cauchy-Riemann (3.11), obtemos

$$\begin{cases} u_x(\cdot, 0) + v_y(\cdot, 0) = 0, \\ v_x(\cdot, 0) - u_y(\cdot, 0) = \xi(\cdot, 0), \end{cases}$$

onde $(1, u(\cdot, 0)) = (1, v(\cdot, 0)) = (1, \xi(\cdot, 0)) = 0$. Pelo Lema 1.11, $u(\cdot, 0)$ e $v(\cdot, 0)$ formam a única solução do sistema acima. Por outro lado,

$$\begin{cases} f_x + g_y = 0, \\ g_x - f_y = \xi(\cdot, 0). \end{cases}$$

Conseqüentemente,

$$u(\cdot, 0) \;=\; f, \;\; v(\cdot, 0) \;=\; g,$$

o que conclui a prova do Teorema 3.4. □

3.4 Unicidade de soluções

Teorema 3.5 *O sistema* (3.13) *possui no máximo uma única solução clássica* (*periodica*).

Demonstração: Sejam $(u_j,\ v_j,\ p_j)$, $j = 1, 2$, duas soluções para o sistema (3.13). Defina $\bar{u} = u_1 - u_2$, $\bar{v} = v_1 - v_2$ e $\bar{p} = p_1 - p_2$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\bar{u}_t + u_1\bar{u}_x + v_1\bar{u}_y + \bar{u}u_{2x} + \bar{v}u_{2y} + \bar{p}_x &= u_{1t} - u_{2t} + u_1u_{1x} - u_1u_{2x} + v_1u_{1y} - v_1u_{2y} \\
&\quad + u_1u_{2x} - u_2u_{2x} + v_1u_{2y} - v_2u_{2y} + p_{1x} - p_{2x} \\
&= u_{1t} + u_1u_{1x} + v_1u_{1y} + p_{1x} - u_{2t} - u_2u_{2x} \\
&\quad - v_2u_{2y} - p_{2x} \\
&= \nu\Delta u_1 - \nu\Delta u_2 \\
&= \nu(\Delta u_1 - \Delta u_2) \\
&= \nu\Delta\bar{u}.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\bar{v}_t + u_1\bar{v}_x + v_1\bar{v}_y + \bar{u}v_{2x} + \bar{v}v_{2y} + \bar{p}_y &= v_{1t} - v_{2t} + u_1v_{1x} - u_1v_{2x} + v_1v_{1y} - v_1v_{2y} \\
&\quad + u_1v_{2x} - u_2v_{2x} + v_1v_{2y} - v_2v_{2y} + p_{1y} - p_{2y} \\
&= v_{1t} + u_1v_{1x} + v_1v_{1y} + p_{1y} - v_{2t} - u_2v_{2x} \\
&\quad + v_2v_{2y} - p_{2y} \\
&= \nu\Delta v_1 - \nu\Delta v_2 \\
&= \nu(\Delta v_1 - \Delta v_2) \\
&= \nu\Delta\bar{v}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x + \bar{v}_y &= u_{1x} - u_{2x} + v_{1y} - v_{2y} \\
&= u_{1x} + v_{1y} - (u_{2x} + v_{2y}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases}
\bar{u}_t + u_1\bar{u}_x + v_1\bar{u}_y + \bar{u}u_{2x} + \bar{v}u_{2y} + \bar{p}_x = \nu\Delta\bar{u}, \\
\bar{v}_t + u_1\bar{v}_x + v_1\bar{v}_y + \bar{u}v_{2x} + \bar{v}v_{2y} + \bar{p}_y = \nu\Delta\bar{v}, \\
\bar{u}_x + \bar{v}_y = 0.
\end{cases}$$

Seja $T > 0$ fixo. Utilizando integração por partes, concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\| \bar{u} \|^2 + \| \bar{v} \|^2\} &= (\bar{u}, \bar{u}_t) + (\bar{v}, \bar{v}_t) \\
&= (\bar{u}, -u_1\bar{u}_x - v_1\bar{u}_y - \bar{u}u_{2x} - \bar{v}u_{2y} - \bar{p}_x + \nu\Delta\bar{u}) \\
&\quad + (\bar{v}, -u_1\bar{v}_x - v_1\bar{v}_y - \bar{u}v_{2x} - \bar{v}v_{2y} - \bar{p}_y + \nu\Delta\bar{v}) \\
&= -(\bar{u}, u_1\bar{u}_x) - (\bar{u}, v_1\bar{u}_y) - (\bar{u}, \bar{u}u_{2x}) - (\bar{u}, \bar{v}u_{2y}) \\
&\quad + (\bar{u}_x, \bar{p}) + (\bar{v}_y, \bar{p}) + \nu(\bar{u}, \Delta\bar{u}) - (\bar{v}, u_1\bar{v}_x) - (\bar{v}, v_1\bar{v}_y) \\
&\quad - (\bar{v}, \bar{u}v_{2x}) - (\bar{v}, \bar{v}v_{2y}) + \nu(\bar{v}, \Delta\bar{v}) \\
&\leq \left(\frac{1}{2} \mid u_{1x} \mid_\infty + \frac{1}{2} \mid v_{1y} \mid_\infty + \mid u_{2x} \mid_\infty \right) \| \bar{u} \|^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} \mid u_{1x} \mid_\infty + \frac{1}{2} \mid v_{1y} \mid_\infty + \mid v_{2y} \mid_\infty \right) \| \bar{v} \|^2 \\
&\quad + (\mid u_{2y} \mid_\infty + \mid v_{2x} \mid_\infty) \| \bar{u} \| \| \bar{v} \| \\
&\leq K(T)\{\| \bar{u} \|^2 + \| \bar{v} \|^2\}, \ \forall \ t \in [0, T],
\end{aligned}$$

onde $K(T) > 0$ depende somente de $T > 0$. Como

$$\begin{aligned}
\| \bar{u}(\cdot, 0) \|^2 &= \| u_1(\cdot, 0) - u_2(\cdot, 0) \|^2 \\
&= \| f - f \|^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\| \bar{v}(\cdot, 0) \|^2 &= \| v_1(\cdot, 0) - v_2(\cdot, 0) \|^2 \\
&= \| g - g \|^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

aplicando o Lema de Gronwall concluímos que

$$\| \bar{u}(\cdot, t) \|^2 + \| \bar{v}(\cdot, t) \|^2 \leq 0, \ \forall \ t \in [0, T].$$

Como $T > 0$ é arbitrário, obtemos

$$\| \bar{u}(\cdot, t) \|^2 + \| \bar{v}(\cdot, t) \|^2 = 0,$$

isto é,

$$\bar{u} = \bar{v} = 0, \tag{3.17}$$

para todo $t \in [0,T]$. Ou seja, $u_1 = u_2$ e $v_1 = v_2$. Resta provar que $\bar{p} = 0$. Pela igualdade (3.17), conclui-se

$$\begin{aligned} \Delta \bar{p} &= -2(\bar{v}_x \bar{u}_y - \bar{u}_x \bar{v}_y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (1, \bar{p}) &= (1, p_1 - p_2) \\ &= (1, p_1) - (1, p_2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\bar{p}$ é solução do sistema

$$\begin{cases} \Delta \bar{p} = 0, \\ (1, \bar{p}) = 0. \end{cases}$$

Utilizando o Lema 1.9, existe uma única solução para o sistema acima. Logo, $\bar{p} = 0$, isto é, $p_1 = p_2$. $\square$

3.5 Estimativas a priori

Consideremos a seqüência $(u^n,\ v^n,\ \xi^n)$ definida indutivamente por $u^0 \equiv v^0 \equiv \xi^0 \equiv 0$, e para cada $n = 0, 1, 2, ...$

$$\begin{cases} \xi_t^{n+1} + u^n \xi_x^{n+1} + v^n \xi_y^{n+1} \ = \ \nu \Delta \xi^{n+1}, \\ \\ \xi^{n+1}(\cdot, 0) \ = \ g_x - f_y, \\ \\ u_x^{n+1} + v_y^{n+1} \ = \ 0, \ v_x^{n+1} - u_y^{n+1} = \xi^{n+1}, \\ \\ (1, u^{n+1}) \ = \ (1, v^{n+1}) \ = \ 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Lema 3.6 *Seja $h = g_x - f_y$. Existe uma constante $K > 0$ dependendo de ν e $\| h \|_{H^1}$, mas independente de n e t, tal que*

$$\| \xi^n(\cdot, t) \|_{H^1}^2 \ \leq \ K, \ n = 0, 1, 2, ..., \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.19}$$

Demonstração: Denotemos $\xi = \xi^{n+1}, u = u^n,\ v = v^n$, onde (u^n, v^n, ξ^n) satisfaz o sistema (3.18). Assim,

$$\begin{cases} \xi_t = -u\xi_x - v\xi_y + \nu\Delta\xi, \\ \xi(\cdot, 0) = h. \end{cases} \tag{3.20}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \xi \parallel^2 &= (\xi, \xi_t) \\
&= (\xi, -u\xi_x - v\xi_y + \nu\Delta\xi) \\
&= -(\xi, u\xi_x) - (\xi, v\xi_y) + \nu(\xi, \Delta\xi) \\
&= -(\xi, u\xi_x) - (\xi, v\xi_y) + \nu(\xi, \xi_{xx}) + \nu(\xi, \xi_{yy}) \\
&= -(\xi, u\xi_x) - (\xi, v\xi_y) - \nu \parallel \xi_x \parallel^2 - \nu \parallel \xi_y \parallel^2 \\
&= \frac{1}{2}(\xi, u_x\xi) + \frac{1}{2}(\xi, v_y\xi) - \nu \parallel \xi_x \parallel^2 - \nu \parallel \xi_y \parallel^2 \\
&= \frac{1}{2}(\xi, (u_x + v_y)\xi) - \nu \parallel \xi_x \parallel^2 - \nu \parallel \xi_y \parallel^2 \\
&= -\nu(\parallel \xi_x \parallel^2 + \parallel \xi_y \parallel^2) \\
&= -\nu \mid \xi \mid_{H^1}^2 .
\end{aligned}$$

Daí

$$\frac{d}{dt} \parallel \xi \parallel^2 \ = \ -2\nu \mid \xi \mid_{H^1}^2 \ \leq \ 0. \tag{3.21}$$

Integrando de 0 a t, temos

$$\parallel \xi(\cdot, t) \parallel^2 - \parallel \xi(\cdot, 0) \parallel^2 \ = \ -2\nu \int_0^t \mid \xi(\cdot, \tau) \mid_{H^1}^2 d\tau.$$

Como $h \ = \ \xi(\cdot, 0)$, então

$$- \parallel h \parallel^2 \ \leq \ \parallel \xi(\cdot, t) \parallel^2 - \parallel h \parallel^2 = -2\nu \int_0^t \mid \xi(\cdot, \tau) \mid_{H^1}^2 d\tau \ \leq \ 0.$$

Portanto,

$$\begin{cases} \parallel \xi^{n+1} \parallel^2 \leq \parallel h \parallel^2, \\ \\ 2\nu \displaystyle\int_0^t \mid \xi \mid_{H^1}^2 d\tau \ \leq \parallel h \parallel^2, \end{cases} \tag{3.22}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, note que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \xi_x \parallel^2 &= (\xi_x, \xi_{xt}) \\
&= -(\xi_{xx}, \xi_t) \\
&= -(\xi_{xx}, -u\xi_x - v\xi_y + \nu\Delta\xi) \\
&= (\xi_{xx}, u\xi_x) + (\xi_{xx}, v\xi_y) - \nu(\xi_{xx}, \Delta\xi) \\
&= (\xi_{xx}, u\xi_x) + (\xi_{xx}, v\xi_y) - \nu[(\xi_{xx}, \xi_{xx}) + (\xi_{xx}, \xi_{yy})] \\
&= (\xi_{xx}, u\xi_x) + (\xi_{xx}, v\xi_y) - \nu \parallel \xi_{xx} \parallel^2 - \nu(\xi_{xx}, \xi_{yy}) \\
&= (\xi_{xx}, u\xi_x) + (\xi_{xx}, v\xi_y) - \nu \parallel \xi_{xx} \parallel^2 - \nu \parallel \xi_{xy} \parallel^2 \\
&\leq (\xi_{xx}, u\xi_x) + (\xi_{xx}, v\xi_y) - \nu \parallel \xi_{xx} \parallel^2 .
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{cases}
(\xi_{xx}, u\xi_x) \leq \mid u \mid_\infty \parallel \xi_{xx} \parallel \parallel \xi_x \parallel, \\
\\
(\xi_{xx}, v\xi_y) \leq \mid v \mid_\infty \parallel \xi_{xx} \parallel \parallel \xi_y \parallel,
\end{cases}$$

então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \xi_x \parallel^2 &\leq \mid u \mid_\infty \parallel \xi_{xx} \parallel \parallel \xi_x \parallel + \mid v \mid_\infty \parallel \xi_{xx} \parallel \parallel \xi_y \parallel - \nu \parallel \xi_{xx} \parallel^2 \\
&\leq \parallel \xi_{xx} \parallel (\mid \mathbf{u} \mid_\infty \parallel \xi_x \parallel + \mid \mathbf{u} \mid_\infty \parallel \xi_y \parallel) - \nu \parallel \xi_{xx} \parallel^2 \\
&\leq \mid \mathbf{u} \mid_\infty \parallel \xi_{xx} \parallel (\parallel \xi_x \parallel + \parallel \xi_y \parallel) - \nu \parallel \xi_{xx} \parallel^2 .
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos obter uma estimativa para $\dfrac{d}{dt} \parallel \xi_y \parallel^2$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \xi_y \parallel^2 &= (\xi_y, \xi_{yt}) \\
&= -(\xi_{yy}, \xi_t) \\
&= -(\xi_{yy}, -u\xi_x - v\xi_y + \nu\Delta\xi) \\
&= (\xi_{yy}, u\xi_x) + (\xi_{yy}, v\xi_y) - \nu(\xi_{yy}, \Delta\xi) \\
&= (\xi_{yy}, u\xi_x) + (\xi_{yy}, v\xi_y) - \nu[(\xi_{yy}, \xi_{xx}) + (\xi_{yy}, \xi_{yy})] \\
&= (\xi_{yy}, u\xi_x) + (\xi_{yy}, v\xi_y) - \nu(\xi_{yy}, \xi_{xx}) - \nu \parallel \xi_{yy} \parallel^2 \\
&= (\xi_{yy}, u\xi_x) + (\xi_{yy}, v\xi_y) - \nu \parallel \xi_{xy} \parallel^2 - \nu \parallel \xi_{yy} \parallel^2 \\
&\leq (\xi_{yy}, u\xi_x) + (\xi_{yy}, v\xi_y) - \nu \parallel \xi_{yy} \parallel^2 .
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{cases} (\xi_{yy}, u\xi_x) & \leq \mid u \mid_\infty \| \xi_{yy} \| \| \xi_x \|, \\ \\ (\xi_{yy}, v\xi_y) & \leq \mid v \mid_\infty \| \xi_{yy} \| \| \xi_y \| . \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \xi_y \|^2 & \leq \mid u \mid_\infty \| \xi_{yy} \| \| \xi_x \| + \mid v \mid_\infty \| \xi_{yy} \| \| \xi_y \| - \nu \| \xi_{yy} \|^2 \\ & \leq \| \xi_{yy} \| (\mid \mathbf{u} \mid_\infty \| \xi_x \| + \mid \mathbf{u} \mid_\infty \| \xi_y \|) - \nu \| \xi_{yy} \|^2 \\ & \leq \mid \mathbf{u} \mid_\infty \| \xi_{yy} \| (\| \xi_x \| + \| \xi_y \|) - \nu \| \xi_{yy} \|^2 . \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mid \xi \mid_{H^1}^2 & \leq 2 \mid \mathbf{u} \mid_\infty (\| \xi_{xx} \| + \| \xi_{yy} \|)(\| \xi_x \| + \| \xi_y \|) \\ & \quad - 2\nu(\| \xi_{xx} \|^2 + \| \xi_{yy} \|^2). \end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} 2 \mid \mathbf{u} \mid_\infty \| \xi_x \| \| \xi_{xx} \| - \nu \| \xi_{xx} \|^2 & = \| 2\nu^{\frac{-1}{2}} \mid \mathbf{u} \mid_\infty \xi_x \| \| \sqrt{\nu}\xi_{xx} \| - \nu \| \xi_{xx} \|^2 \\ & \leq \frac{4}{\nu} \mid \mathbf{u} \mid_\infty^2 \| \xi_x \|^2 . \end{aligned}$$

Analogamente,

$$2 \mid \mathbf{u} \mid_\infty \| \xi_y \| \| \xi_{xx} \| - \nu \| \xi_{xx} \|^2 \leq \frac{4}{\nu} \mid \mathbf{u} \mid_\infty^2 \| \xi_y \|^2 .$$

Conseqüentemente,

$$\frac{d}{dt} \mid \xi \mid_{H^1}^2 \leq C \mid \mathbf{u} \mid_\infty^2 \mid \xi \mid_{H^1}^2, \tag{3.23}$$

onde $C = \dfrac{8}{\nu}$. Pela desigualdade (3.21), temos

$$\frac{d}{dt} \| \xi^{n+1} \|^2 \leq 0. \tag{3.24}$$

pois $\xi = \xi^{n+1}$. Dessa forma, somando as desigualdades (3.23) e (3.24), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \| \xi^{n+1} \|^2 + \frac{d}{dt} \mid \xi^{n+1} \mid_{H^1}^2 & \leq C \mid \mathbf{u}^n \mid_\infty^2 \mid \xi^{n+1} \mid_{H^1}^2 \\ & \leq C \| \mathbf{u}^n \|_{H^2}^2 \mid \xi^{n+1} \mid_{H^1}^2 . \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1.11, concluímos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \parallel \xi^{n+1} \parallel_{H^1}^2 &\leq C \mid \xi^n \mid_{H^1}^2 \mid \xi^{n+1} \mid_{H^1}^2 \\ &\leq C \mid \xi^n \mid_{H^1}^2 \parallel \xi^{n+1} \parallel_{H^1}^2 .\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\frac{d}{dt} \parallel \xi^{n+1} \parallel_{H^1}^2 - C \mid \xi^n \mid_{H^1}^2 \parallel \xi^{n+1} \parallel_{H^1}^2 \leq 0.$$

Defina $\alpha(t) := C \int_0^t \mid \xi^n(\cdot, \tau) \mid_{H^1}^2 d\tau$. Assim,

$$e^{-\alpha(t)} \Big(\frac{d}{dt} \parallel \xi^{n+1} \parallel_{H^1}^2 - C \mid \xi^n \mid_{H^1}^2 \parallel \xi^{n+1} \parallel_{H^1}^2 \Big) \leq 0.$$

Daí,

$$\frac{d}{dt}(e^{-\alpha(t)} \parallel \xi^{n+1} \parallel_{H^1}^2) \leq 0.$$

Integrando de 0 a t, concluímos que

$$\begin{aligned}e^{-\alpha(t)} \parallel \xi^{n+1}(\cdot, t) \parallel_{H^1}^2 &\leq e^{-\alpha(0)} \parallel \xi^{n+1}(\cdot, 0) \parallel_{H^1}^2 \\ &= \parallel h \parallel_{H^1}^2 .\end{aligned}$$

Logo,

$$\parallel \xi^{n+1} \parallel_{H^1}^2 \leq e^{\alpha(t)} \parallel h \parallel_{H^1}^2 .$$

Observe que, $\alpha(t) \leq \dfrac{C}{2\nu} \parallel h \parallel^2$, pela segunda desigualdade estabelecida em (3.22). Assim sendo,

$$\begin{aligned}\parallel \xi^{n+1} \parallel_{H^1}^2 &\leq e^{\alpha(t)} \parallel h \parallel_{H^1}^2 \\ &\leq e^{\frac{C}{2\nu}\|h\|^2} \parallel h \parallel_{H^1}^2,\end{aligned}$$

o que prova o resultado. $\square$

Lema 3.7 *Suponha que* ξ^n *seja definida indutivamente por* (3.18). *Dado* $T > 0$, *para cada* $j = 1,\ 2, \ldots$, *existe uma constante* $K_j > 0$ *tal que*

$$\| \, \xi^n(\cdot, t) \, \|_{H^j} \quad \leq \quad K_j, \ \forall \ t \ \in \ [0, T].$$

A constante K_j *depende de* ν, T, *e* $\| \, h \, \|_{H^j}$, *mas é independente de* n.

Demonstração: Provaremos este resultado por indução sobre j. Para $j = 1$ a estimativa foi provada no Lema 3.6. Denotaremos, novamente, $\xi = \xi^{n+1}$, $u = u^n$, $v = v^n$ e consideraremos que $j \geq 2$. Suponha que o Lema 3.7 acima seja verdadeiro para $j - 1$, isto é, suponha que existe uma constante $K_{j-1} > 0$, tal que

$$\| \, \xi^n(\cdot, t) \, \|_{H^{j-1}} \quad \leq \quad K_{j-1}, \ \forall \ t \in [0, T], \ \forall \ n.$$

onde $K_{j-1} = K_{j-1}(\nu, T, \| \, h \, \|_{H^{j-1}})$. Por conseguinte, pelo Lema 1.11,

$$\| \, \mathbf{u}^n \, \|_{H^j} \quad \leq \quad C \, | \, \xi^n \, |_{H^{j-1}} \quad \leq \quad CK_{j-1},$$

onde C é uma constante positiva. Aplicando o operador D_x^j ao sistema (3.20), obtemos

$$\begin{cases} D_x^j \xi_t \; = \; -D_x^j(u\xi_x) - D_x^j(v\xi_y) + \nu \Delta D_x^j \xi, \\ \\ D_x^j \xi(\cdot, 0) \; = \; D_x^j h. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \, D_x^j \xi \, \|^2 \; &= \; (D_x^j \xi, D_x^j \xi_t) \\ &= \; (D_x^j \xi, -D_x^j(u\xi_x) - D_x^j(v\xi_y) + \nu \Delta D_x^j \xi) \\ &= \; -(D_x^j \xi, D_x^j(u\xi_x)) - (D_x^j \xi, D_x^j(v\xi_y)) + \nu(D_x^j \xi, \Delta D_x^j \xi). \end{aligned}$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} (D_x^j \xi, D_x^j(u\xi_x)) \; &= \; \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} D_x^j \xi D_x^j(u\xi_x) dx dy \\ &= \; \int_0^{2\pi} [(D_x^j \xi D_x^{j-1}(u\xi_x)) \, |_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} D_x^{j+1} \xi D_x^{j-1}(u\xi_x) dx] dy \\ &= \; -\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} D_x^{j+1} \xi D_x^{j-1}(u\xi_x) dx dy \\ &= \; -(D_x^{j+1} \xi, D_x^{j-1}(u\xi_x)). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
(D_x^j\xi, D_x^j(v\xi_y)) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} D_x^j\xi D_x^j(v\xi_y)dydx \\
&= \int_0^{2\pi}[(D_x^j\xi D_x^{j-1}(v\xi_y)) \mid_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} D_x^{j+1}\xi D_x^{j-1}(v\xi_y)dy]dx \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} D_x^{j+1}\xi D_x^{j-1}(v\xi_y)dxdy \\
&= -(D_x^{j+1}\xi, D_x^{j-1}(v\xi_y)),
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(D_x^j\xi, D_x^{j+2}\xi) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} D_x^j\xi D_x^{j+2}\xi dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}[(D_x x^j\xi D_x^{j+1}\xi) \mid_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} D_x^{j+1}\xi D_x^{j+1}\xi dx]dy \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} D_x^{j+1}\xi D_x^{j+1}\xi dxdy \\
&= -(D_x^{j+1}\xi, D_x^{j+1}\xi) \\
&= -\parallel D_x^{j+1}\xi \parallel^2 .
\end{aligned}
$$

Da mesma maneira,

$$
\begin{aligned}
(D_x^j\xi, D_x^j\xi_{yy}) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} D_x^j\xi D_x^j\xi_{yy}dydx \\
&= \int_0^{2\pi}[(D_x^j\xi D_x^j\xi_y) \mid_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} D_x^j\xi_y D_x^j\xi_y dy]dx \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} D_x^j\xi_y D_x^j\xi_y dxdy \\
&= -(D_x^j\xi_y, D_x^j\xi_y) \\
&= -\parallel D_x^j\xi_y \parallel^2 .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel D_x^j\xi \parallel^2 &= -(D_x^j\xi, D_x^j(u\xi_x)) - (D_x^j\xi, D_x^j(v\xi_y)) + \nu(D_x^j\xi, \Delta D_x^j\xi) \\
&= (D_x^{j+1}\xi, D_x^{j-1}(u\xi_x)) + (D_x^{j+1}\xi, D_x^{j-1}(v\xi_y)) - \nu(\parallel D_x^{j+1}\xi \parallel^2 + \parallel D_x^j\xi_y \parallel^2) \\
&\leq (D_x^{j+1}\xi, D_x^{j-1}(u\xi_x)) + (D_x^{j+1}\xi, D_x^{j-1}(v\xi_y)) - \nu \parallel D_x^{j+1}\xi \parallel^2 .
\end{aligned}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
(D_x^{j+1}\xi, D_x^{j-1}(u\xi_x)) - \frac{\nu}{2} \parallel D_x^{j+1}\xi \parallel^2 &= \Big(\sqrt{\nu}D_x^{j+1}\xi, \frac{1}{\sqrt{\nu}}D_x^{j-1}(u\xi_x)\Big) - \frac{\nu}{2} \parallel D_x^{j+1}\xi \parallel^2 \\
&\leq \frac{1}{2\nu} \parallel D_x^{j-1}(u\xi_x) \parallel^2 .
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
(D_x^{j+1}\xi, D_x^{j-1}(v\xi_y)) - \frac{\nu}{2} \parallel D_x^{j+1}\xi \parallel^2 &= \Big(\sqrt{\nu}D_x^{j+1}\xi, \frac{1}{\sqrt{\nu}}D_x^{j-1}(v\xi_y)\Big) - \frac{\nu}{2} \parallel D_x^{j+1}\xi \parallel^2 \\
&\leq \frac{1}{2\nu} \parallel D_x^{j-1}(v\xi_y) \parallel^2 .
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\frac{d}{dt} \parallel D_x^j\xi \parallel^2 \leq C(\parallel D_x^{j-1}(u\xi_x) \parallel^2 + \parallel D_x^{j-1}(v\xi_y) \parallel^2),
$$

onde $C = \dfrac{1}{\nu}$. Pela regra de Leibniz, temos

$$
\begin{cases}
D_x^{j-1}(u\xi_x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} D_x^k u D_x^{j-k}\xi, \\[2ex]
D_x^{j-1}(v\xi_y) \displaystyle\sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} D_x^k v D_x^{j-1-k} D_y^1\xi.
\end{cases}
$$

Assim, resta somente estimar

$$
\parallel (D_x^k u)(D_x^{j-k}\xi) \parallel^2, \ \parallel (D_x^k v)(D_x^{j-1-k} D_y^1\xi) \parallel^2, \ \text{para } 0 \leq k \leq j-1. \tag{3.25}
$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
\parallel (D_x^k u)(D_x^{j-k}\xi) \parallel^2 &= ((D_x^k u)(D_x^{j-k}\xi), (D_x^k u)(D_x^{j-k}\xi)) \\
&\leq \mid (D_x^k u) \mid_\infty^2 \parallel (D_x^{j-k}\xi) \parallel^2 .
\end{aligned}
$$

1. Se $0 \leq k \leq j-2$, pelo Lema 1.11, temos

$$
\begin{aligned}
\mid (D_x^k u) \mid_\infty^2 &\leq C \parallel D_x^{k+2} u \parallel^2 \\
&\leq C_j \parallel u \parallel_{H^j}^2 \\
&\leq C_j \mid \xi^n \mid_{H^{j-1}}^2 \\
&\leq C_j \parallel \xi^n \parallel_{H^{j-1}}^2 \\
&\leq C_j K_{j-1}^2,
\end{aligned}
$$

onde $C_j > 0$ depende de j. Além disso,

$$\| (D_x^{j-k}\xi) \|^2 \;\leq\; \| \xi \|_{H^j}^2 \;=\; \| \xi^{n+1} \|_{H^j}^2,$$

pois $j - k \leq j$.

2. Agora, se $k = j - 1$, temos

$$\begin{aligned} | D_x^k u |_\infty^2 &= | D_x^{j-1} u |_\infty^2 \\ &\leq C_j \| u \|_{H^{j+1}}^2 \\ &\leq C_j \| \mathbf{u}^n \|_{H^{j+1}}^2 \\ &\leq C_j | \xi^n |_{H^j}^2 \\ &\leq C_j \| \xi^n \|_{H^j}^2, \end{aligned}$$

onde $C_j > 0$ depende de j, e

$$\begin{aligned} \| D_x^{j-k}\xi \|^2 &= \| D_x^1 \xi \|^2 \\ &= \| \xi_x \|^2 \\ &\leq \| \xi \|_{H^1}^2 \\ &\leq K_1^2. \end{aligned}$$

Portanto, o caso 2 está estabelecido. Com esses dois casos, temos

$$\begin{aligned} \| (D_x^k u)(D_x^{j-k}\xi)) \|^2 &\leq C_j\{\| \xi^n \|_{H^j}^2 + \| \xi^{n+1} \|_{H^j}^2\} \\ &\leq C_j\{1 + | \xi^n |_{H^j}^2 + | \xi^{n+1} |_{H^j}^2\}, \end{aligned}$$

onde $C_j = C_j(\nu, j, T, \| h \|_{H^{j-1}})$. Analogamente, analisemos a segunda expressão em (3.25).

1. Se $0 \leq k \leq j - 2$, obtemos

$$\begin{aligned} | (D_x^k v) |_\infty^2 &\leq C_j \| D_x^{k+2} v \|^2 \\ &\leq C_j \| v \|_{H^j}^2 \\ &\leq C_j \| \mathbf{u} \|_{H^j}^2 \\ &\leq C_j | \xi^n |_{H^{j-1}}^2 \\ &\leq C_j \| \xi^n \|_{H^{j-1}}^2 \\ &\leq C_j K_{j-1}^2, \end{aligned}$$

onde $C_j > 0$ depende de j. Além disso,

$$\| (D_x^{j-1-k} D_y^1 \xi) \|^2 \;\leq\; \| \xi \|^2_{H^{j-k}} \;\leq\; \| \xi^{n+1} \|^2_{H^j},$$

pois $j - k \leq j$.

2. Se $k = j - 1$, temos

$$\begin{aligned} | D_x^k v |^2_\infty &= | D_x^{j-1} v |^2_\infty \\ &\leq C_j \| v \|^2_{H^{j+1}} \\ &\leq C_j \| \mathbf{u} \|^2_{H^{j+1}} \\ &\leq C_j | \xi^n |^2_{H^j} \\ &\leq C_j \| \xi^n \|^2_{H^j}, \end{aligned}$$

onde $C_j > 0$ depende de j, e

$$\begin{aligned} \| D_x^{j-1-k} D_y^1 \xi \|^2 &= \| D_y^1 \xi \|^2 \\ &\leq \| \xi \|^2_{H^1} \\ &\leq K_1^2. \end{aligned}$$

Com isso, finalizamos o caso 2. Esses dois últimos casos, implicam que

$$\begin{aligned} \| (D_x^k v)(D_x^{j-1-k} D_y^1 \xi) \|^2 &\leq C_j \{ \| \xi^n \|^2_{H^j} + \| \xi^{n+1} \|^2_{H^j} \} \\ &\leq C_j \{ 1 + | \xi^n |^2_{H^j} + | \xi^{n+1} |^2_{H^j} \}, \end{aligned}$$

onde $C_j = C_j(\nu, T, \| h \|_{H^{j-1}}) > 0$ depende de j. Usando as estimativas obtidas nos quatro casos acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \| D_x^j \xi^{n+1} \|^2 &= \frac{d}{dt} \| D_x^j \xi \|^2 \\ &\leq C_j \{ \| D_x^{j-1}(u \xi_x) \|^2 + \| D_x^{j-1}(v \xi_y) \|^2 \} \\ &\leq C_j \{ 1 + | \xi^n |^2_{H^j} + | \xi^{n+1} |^2_{H^j} \}. \end{aligned}$$

Analogamente, é possível provar que

$$\frac{d}{dt} \| D_y^j \xi^{n+1} \|^2 \;\leq\; C_j \{ 1 + | \xi^n |^2_{H^j} + | \xi^{n+1} |^2_{H^j} \},$$

onde $C_j = C_j(\nu, T, \| h \|_{H^{j-1}})$ depende de j. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina a função

$$G_j^n(t) \;:=\; \| D_x^j \xi^n(\cdot,t) \|^2 + \| D_y^j \xi^n(\cdot,t) \|^2 \,.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} G_j^{n+1}(t) &= \frac{d}{dt} \| D_x^j \xi^{n+1}(\cdot,t) \|^2 + \frac{d}{dt} \| D_y^j \xi^{n+1}(\cdot,t) \|^2 \\
&\leq C_j \{1 + | \xi^n |_{H^j}^2 + | \xi^{n+1} |_{H^j}^2 \} \\
&\leq C_j \{1 + \| D_x^j \xi^n \|^2 + \| D_x^j \xi^{n+1} \|^2 + \| D_y^j \xi^n \|^2 + \| D_y^j \xi^{n+1} \|^2 \} \\
&= C_j \{1 + G_j^n(t) + G_j^{n+1}(t)\}.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\frac{d}{dt} G_j^{n+1}(t) \;\leq\; C_j \{1 + G_j^n(t) + G_j^{n+1}(t)\},$$

japara todo $t \in [0,\ T]$, $C_j = C_j(\nu, T, \| h \|_{H^{j-1}})$ depende de j. Aplicando o Lema de Gronwall, obtemos

$$\begin{aligned}
G_j^{n+1}(t) &\leq e^{C_j t} \left\{ G_j^{n+1}(0) + \int_0^t | C_j + C_j G_j^n(\tau) | \, d\tau \right\} \\
&\leq e^{C_j t} \left\{ G_j^{n+1}(0) + C_j t + C_j \int_0^t G_j^n(\tau) d\tau \right\} \\
&\leq e^{C_j T} \left\{ G_j^{n+1}(0) + C_j T + C_j \int_0^t G_j^n(\tau) d\tau \right\},
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,\ T]$. Note que,

$$\begin{aligned}
G_j^{n+1}(0) &= \| D_x^j \xi^n(\cdot,0) \|^2 + \| D_y^j \xi^n(\cdot,0) \|^2 \\
&= \| D_x^j h \|^2 + \| D_y^j h \|^2 \;\leq\; \| h \|_{H^j}^2 \,.
\end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
G_j^{n+1}(t) &\leq e^{C_j T} \left\{ \| h \|_{H^j}^2 + C_j T + C_j \int_0^t G_j^n(\tau) d\tau \right\} \\
&\leq K_j \left\{ 1 + \int_0^t G_j^n(\tau) d\tau \right\}, \ \forall \ t \in [0, T],
\end{aligned}$$

onde $K_j = K_j(\nu, T, \| h \|_{H^j}) > 0$ depende de j. Dessa forma, pelo Lema de Picard, concluímos que $(G_j^n(t))$ é uma seqüência uniformemente limitada. Ou seja, existe uma constante positiva $F_j = F_j(\| h \|_{H^j}) > 0$ depende de j, tal que

$$G_j^n(t) \leq F_j, \ \forall\, t \in [0,T], \ \forall\, n.$$

Resulta da hipótese de indução que

$$\begin{aligned}
\| \xi^n \|_{H^j}^2 &\leq C \mid \xi^n \mid_{H^j}^2 \\
&\leq C_j \{ \| D_x^j \xi^n \|^2 + \| D_y^j \xi_y^n \|^2 \} \\
&\leq C_j G_j^n(t) \\
&\leq C_j F_j, \ \forall\, t \in [0,T],
\end{aligned}$$

onde $C_j = C_j(\nu, T, \| h \|_{H^{j-1}})$, $F_j = F_j(\| h \|_{H^j})$ são constantes positivas que dependem de$j$. Dessa forma, fica estabelecida a prova do Lema 3.7. $\square$

Com o Lema 3.7, concluímos que

$$\left| \frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p \partial y^q \partial t^r} \xi^n(\cdot, t) \right| \leq C(p,q,r,T), \ \forall\, t \in [0,T], \ \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.26}$$

3.6 Existência local de soluções

Agora estamos aptos a demonstrar a existência local do sistema de Navier-Stokes em duas dimensões espaciais. Assim, enunciemos o seguinte

Teorema 3.8 *Dado $T > 0$, o sistema* (3.14) *com condições iniciais $h = g_x - f_y$, $f_x + g_y = 0$ e $(1,f) = (1,g) = 0$ admite solução única (periódica) definida em $[0,T]$.*

Demonstração: Dado $T > 0$, defina $\xi = \xi^{n+1} - \xi^n$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n$, $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}^n - \tilde{\xi}^{n-1}$, $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^n - \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}$, onde $\mathbf{u} = (u,v)$ e $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v})$. Assim,

$$\begin{aligned}
\xi_t &= \xi_t^{n+1} - \xi_t^n \\
&= -u^n \xi_x^{n+1} - v^n \xi_y^{n+1} + \nu \Delta \xi^{n+1} + u^{n-1} \xi_x^n + v^{n-1} \xi_y^n - \nu \Delta \xi^n \\
&= -u^n \xi_x^{n+1} + u^n \xi_x^n - u^n \xi_x^n + u^{n-1} \xi_x^n - v^n \xi_y^{n+1} + v^n \xi_y^n - v^n \xi_y^n + v^{n-1} \xi_y^n + \nu \Delta \xi \\
&= -u^n \xi_x - \tilde{u} \xi_x^n - v^n \xi_y - \tilde{v} \xi_y^n + \nu \Delta \xi.
\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \xi \parallel^2 &= (\xi, \xi_t) \\
&= (\xi, -u^n \xi_x - \tilde{u}\xi_x^n - v^n \xi_y - \tilde{v}\xi_y^n + \nu\Delta\xi) \\
&= -(\xi, u^n\xi_x) - (\xi, \tilde{u}\xi_x^n) - (\xi, v^n\xi_y) - (\xi, \tilde{v}\xi_y^n) + \nu(\xi, \Delta\xi) \\
&= \frac{1}{2}(\xi, u_x^n\xi) - (\xi, \tilde{u}\xi_x^n) + \frac{1}{2}(\xi, v_y^n\xi) - (\xi, \tilde{v}\xi_y^n) - \nu(\parallel \xi_x \parallel^2 + \parallel \xi_y \parallel^2) \\
&\leq \frac{1}{2} \mid u_x^n \mid_\infty \parallel \xi \parallel^2 + \mid \xi_x^n \mid_\infty \parallel \xi \parallel \parallel \tilde{u} \parallel + \frac{1}{2} \mid v_y^n \mid_\infty \parallel \xi \parallel^2 + \mid \xi_y^n \mid_\infty \parallel \xi \parallel \parallel \tilde{v} \parallel .
\end{aligned}
$$

Pelo sistema (3.18), temos que

$$
\begin{cases} u_x^n + v_y^n = 0, \\ v_x^n - u_y^n = \xi^n, \end{cases}
$$

onde $(1, u^n) = (1, v^n) = (1, \xi^n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por conseguinte,

$$
\begin{cases} \tilde{u}_x + \tilde{v}_y = 0, \\ \tilde{v}_x - \tilde{u}_y = \tilde{\xi}, \end{cases}
$$

onde $(1, \tilde{u}) = (1, \tilde{v}) = (1, \tilde{\xi}) = 0$. Pelo Lema 1.11, existe uma única solução do sistema acima tal que

$$
\parallel \tilde{u} \parallel^2, \ \parallel \tilde{v} \parallel^2 \ \leq \ \parallel \tilde{u} \parallel_{H^1}^2 + \parallel \tilde{v} \parallel_{H^1}^2 \ \leq \ C \mid \tilde{\xi} \mid_{H^0}^2 \ = \ C \parallel \tilde{\xi} \parallel^2,
$$

onde C é uma constante positiva. Daí,

$$
\begin{cases} \parallel \tilde{u} \parallel \ \leq \ C \parallel \tilde{\xi} \parallel; \\ \parallel \tilde{v} \parallel \ \leq \ C \parallel \tilde{\xi} \parallel . \end{cases} \tag{3.27}
$$

O sistema (3.27) juntamente com os Lemas 1.11 e 3.7 nos conduzem a

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \xi \parallel^2 &\leq \frac{1}{2}C(\parallel u^n \parallel_{H^3} + \parallel v^n \parallel_{H^3}) \parallel \xi \parallel^2 + C \parallel \xi^n \parallel_{H^3} \parallel \xi \parallel \parallel \tilde{\xi} \parallel \\
&\leq C(\parallel \xi^n \parallel_{H^2} \parallel \xi \parallel^2 + \parallel \xi^n \parallel_{H^3} \parallel \xi \parallel \parallel \tilde{\xi} \parallel) \\
&\leq C(K_2 \parallel \xi \parallel^2 + K_3 \parallel \xi \parallel \parallel \tilde{\xi} \parallel) \\
&\leq C(\parallel \xi \parallel^2 + \parallel \xi \parallel \parallel \tilde{\xi} \parallel) \\
&\leq C(\parallel \xi \parallel^2 + \parallel \tilde{\xi} \parallel^2),
\end{aligned}
$$

onde $C = C(T, \nu, \| h \|_{H^3})$. Logo, pelo Lema de Gronwall,

$$
\begin{aligned}
\| \xi(\cdot,t) \|^2 &\leq e^{Ct}\left\{\| \xi(\cdot,0) \|^2 + C\int_0^t \| \tilde{\xi}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau\right\} \\
&\leq e^{CT}\left\{\| \xi^{n+1}(\cdot,0) - \xi^n(\cdot,0) \|^2 + C\int_0^t \| \tilde{\xi}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau\right\} \\
&= e^{CT}\left\{\| h - h \|^2 + C\int_0^t \| \tilde{\xi}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau\right\} \\
&= Ce^{CT}\int_0^t \| \tilde{\xi}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau \\
&= C\int_0^t \| \tilde{\xi}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau, \ \forall \ t \in [0,T],
\end{aligned}
$$

onde $C = C(\nu, T, \| h \|_{H^3}) > 0$. Ou seja,

$$
\| \xi^{n+1}(\cdot,t) - \xi^n(\cdot,t) \|^2 \leq C\int_0^t \| \xi^n(\cdot,\tau) - \xi^{n-1}(\cdot,\tau) \|^2 \, d\tau, \ \forall \ t \in [0,T],
$$

Pelo Lema de Picard,

$$
\| \xi^n(\cdot,t) - \xi^{n-1}(\cdot,t) \|^2 \rightarrow 0, \text{ uniformemente em } [0,T], \tag{3.28}
$$

e, com isso, (ξ^n) é uma seqüência de Cauchy. Como L^2 é um espaço métrico completo, então $\xi^n \to \xi \in L^2$. Pelo Corolário 1.8, ξ^n converge, passando a uma subseqüência se necessário, a uma aplicação ξ de classe C^∞ juntamente com todas as suas derivadas, isto é,

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p \partial y^q \partial t^r}\xi^n(\cdot,t) = \frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p \partial y^q \partial t^r}\xi(\cdot,t), \ \forall \ t \in [0,T].
$$

Note que (3.27) é equivalente a

$$
\begin{cases}
\| u^n - u^{n-1} \| \leq C \| \xi^n - \xi^{n-1} \|, \\
\| v^n - v^{n-1} \| \leq C \| \xi^n - \xi^{n-1} \| .
\end{cases}
$$

Portanto, por (3.28),

$$
\| u^n - u^{n-1} \|^2, \ \| v^n - v^{n-1} \|^2 \to 0, \text{ uniformemente em } [0,T].
$$

Novamente, o Corolário 1.8, nos permite afirmar que u^n e v^n convergem, passando a uma subseqüencia se necessário, a funções u e v, respectivamente, de classe C^∞ juntamente com todas as suas derivadas. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p \partial y^q \partial t^r}(u^n, v^n, \xi^n)(\cdot, t) \;=\; \frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p \partial y^q \partial t^r}(u, v, \xi)(\cdot, t), \ \forall\, t \in [0, T].$$

Dessa forma, se fizermos $n \to \infty$ no sistema (3.18), obtemos

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \xi_t^{n+1} + \lim\limits_{n\to\infty}(u^n \xi_x^{n+1}) + \lim\limits_{n\to\infty}(v^n \xi_y^{n+1}) \;=\; \nu\Delta \lim\limits_{n\to\infty} \xi^{n+1}, \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} \xi^{n+1}(\cdot, 0) \;=\; g_x - f_y, \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_x^{n+1} + \lim\limits_{n\to\infty} v_y^{n+1} \;=\; 0, \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} v_x^{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} u_y^{n+1} \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} \xi^{n+1}, \\ \\ (1, \lim\limits_{n\to\infty} u^{n+1}) \;=\; (1, \lim\limits_{n\to\infty} v^{n+1}) \;=\; 0, \end{cases}$$

para $n = 0, 1, 2, ...$, ou seja,

$$\begin{cases} \xi_t + u\xi_x + v\xi_y \;=\; \nu\Delta\xi, \\ \xi(\cdot, 0) \;=\; g_x - f_y, \\ u_x + v_y \;=\; 0, \\ v_x - u_y \;=\; \xi, \\ (1, u) \;=\; (1, v) \;=\; 0, \end{cases}$$

isto é, (u, v, ξ) é solução do sistema (3.14) no intervalo de tempo $[0, T]$. Aplicando o Teorema 3.4, existe uma única solução (u, v, p) do sistema de Navier-Stokes para $t \in [0, T]$, onde p satisfaz (3.12). □

3.7 Existência global de soluções

Agora, passemos ao seguinte resultado fundamental:

Teorema 3.9 *Seja $h = g_x - f_y$. Considere que $f_x + g_y = 0$ e $(1, f) = (1, g) = 0$. Então o sistema* (3.14) *admite uma única solução (periódica) de classe C^∞ para todo tempo.*

Demonstração: Tome $T_1 > 0$ fixo. Pelo Teorema 3.8, existe (u, v, ξ) solução (periódica) de classe C^∞ do sistema (3.14) no intervalo de tempo $[0, T_1]$, tal que $\xi(\cdot, 0) = h$. Pelo Lema 3.6, obtemos

$$\| \xi(\cdot,t) \|_{H^1}^2 \leq e^{\frac{C}{2\nu}\|h\|^2} \| h \|_{H^1}^2 =: K, \ \forall\, t \in [0, T_1], \tag{3.29}$$

onde C é uma constante positiva. Considere a aplicação $(x, y) \mapsto \xi(x, y, T_1)$. Pelo Teorema 3.8, existe (u_1, v_1, ξ_1) solução (periódica) C^∞ do sistema (3.14) no intervalo de tempo $[0, T_1]$, tal que $\xi_1(\cdot, 0) = \xi(\cdot, T_1)$. Aplicando o Lema 3.6, obtemos

$$\begin{aligned} \| \xi_1(\cdot,t) \|_{H^1}^2 &\leq e^{\frac{C}{2\nu}\|\xi(\cdot,T_1)\|^2} \| \xi(\cdot,T_1) \|_{H^1}^2 \\ &\leq e^{\frac{C}{2\nu}K} K =: K_1, \ \forall\, t \in [0, T_1] \\ &\leq K_2, \ \forall\, t \in [0, T_1], \end{aligned}$$

onde $K_2 = \max\{K, K_1\}$ é uma constante positiva que depende de ν e $\| h \|_{H^1}$. Com isso,

$$\| \xi(\cdot,t) \|_{H^1}^2 \leq K_2, \ \forall\, t \in [0, T_1],$$

Defina

$$\varphi(\cdot,t) = \begin{cases} \xi(\cdot,t); \ t \in [0, T_1], \\ \xi_1(\cdot, t - T_1); \ t \in [T_1, 2T_1], \end{cases}$$

Note que φ está bem definida, pois, $\xi(\cdot, T_1) = \xi_1(\cdot, 0)$. Defina também,

$$\mathbf{a}(\cdot,t) = \begin{cases} \mathbf{u}(\cdot,t); \ t \in [0, T_1], \\ \mathbf{u}_1(\cdot, t - T_1); \ t \in [T_1, 2T_1]. \end{cases}$$

onde $\mathbf{a} = (a, b)$. Note que $\mathbf{u}_1(\cdot, 0) = \mathbf{u}(\cdot, T_1)$. Com efeito,

$$\begin{cases} u_x(\cdot,T_1) + v_y(\cdot,T_1) = 0, \\ v_x(\cdot,T_1) - u_y(\cdot,T_1) = \xi(\cdot,T_1). \end{cases}$$

De forma análoga,

$$\begin{cases} u_{1x}(\cdot,0) + v_{1y}(\cdot,0) = 0, \\ v_{1x}(\cdot,0) - u_{1y}(\cdot,T_1) = \xi_1(\cdot,0) = \xi(\cdot,T_1). \end{cases}$$

Como a solução deste sistema é única, concluímos

$$\begin{cases} u_1(\cdot,0) = u(\cdot,T_1), \\ v_1(\cdot,0) = v(\cdot,T_1), \end{cases}$$

isto é, $\mathbf{u}_1(\cdot,0)=\mathbf{u}(\cdot,T_1)$. Para provar que $\mathbf{a}$ e $\varphi\in C^\infty$, basta somente demonstrar que, para todo $j\in\mathbb{N}$, as aplicações $D_t^j\mathbf{a}$ e $D_t^j\varphi$ são contínuas em $t=T_1$. Provaremos isto por indução sobre j. Para $j=1$, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{\varphi(\cdot,T_1+h)-\varphi(\cdot,T_1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{\xi_1(\cdot,h)-\xi_1(\cdot,0)}{h}\\ &= \xi_{1t}(\cdot,0).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-}\frac{\varphi(\cdot,T_1+h)-\varphi(\cdot,T_1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{\xi(\cdot,T_1+h)-\xi(\cdot,T_1)}{h}\\ &= \xi_t(\cdot,T_1).\end{aligned}$$

Agora, pelo sistema da vorticidade (3.10), conclui-se que

$$\begin{aligned}\xi_{1t}(\cdot,0) &= -u_1(\cdot,0)\xi_{1x}(\cdot,0)-v_1(\cdot,0)\xi_{1y}(\cdot,0)+\nu\Delta\xi_1(\cdot,0)\\ &= -u(\cdot,T_1)\xi_x(\cdot,T_1)-v(\cdot,T_1)\xi_y(\cdot,T_1)+\nu\Delta\xi(\cdot,T_1)\\ &= \xi_t(\cdot,T_1).\end{aligned}$$

Daí,

$$\varphi_t(\cdot,T_1) = \xi_{1t}(\cdot,0) = \xi_t(\cdot,T_1). \tag{3.30}$$

Portanto, a função φ_t existe e é contínua em $t=T_1$. Além disso, as funções u e v satisfazem o sistema de Cauchy-Riemann não-homogêneo (3.11), logo,

$$\left\{\begin{aligned} u_{tx}(\cdot,T_1)+v_{ty}(\cdot,T_1) &= 0,\\ v_{tx}(\cdot,T_1)-u_{ty}(\cdot,T_1) &= \xi_t(\cdot,T_1) = \varphi_t(\cdot,T_1).\end{aligned}\right.$$

De forma análoga,

$$\left\{\begin{aligned} u_{1tx}(\cdot,0)+v_{1ty}(\cdot,0) &= 0,\\ v_{1tx}(\cdot,0)-u_{1ty}(\cdot,T_1) &= \xi_{1t}(\cdot,0) = \varphi_t(\cdot,T_1).\end{aligned}\right.$$

Como a solução deste sistema é única, concluímos

$$\left\{\begin{aligned} u_{1t}(\cdot,0) &= u_t(\cdot,T_1),\\ v_{1t}(\cdot,0) &= v_t(\cdot,T_1),\end{aligned}\right.$$

isto é, $\mathbf{u}_{1t}(\cdot,0) = \mathbf{u}_t(\cdot,T_1)$. Agora, observe que,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbf{a}(\cdot,T_1+h)-\mathbf{a}(\cdot,T_1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbf{u}_1(\cdot,h)-\mathbf{u}_1(\cdot,0)}{h}\\ &= \mathbf{u}_{1t}(\cdot,0),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} \frac{\mathbf{a}(\cdot,T_1+h)-\mathbf{a}(\cdot,T_1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbf{u}(\cdot,T_1+h)-\mathbf{u}(\cdot,T_1)}{h}\\ &= \mathbf{u}_t(\cdot,T_1).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{a}_t(\cdot,T_1) \;=\; \mathbf{u}_{1t}(\cdot,0) \;=\; \mathbf{u}_t(\cdot,T_1), \tag{3.31}$$

e então a função $\mathbf{a}_t$ existe e é contínua em $t = T_1$. Agora, suponhamos que as aplicações $D_t^j\mathbf{a}$ e $D_t^j\varphi$ sejam contínuas em $t = T_1$. Daí,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{D_t^j\varphi(\cdot,T_1+h)-D_t^j\varphi(\cdot,T_1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{D_t^j\xi_1(\cdot,h)-D_t^j\xi_1(\cdot,0)}{h}\\ &= D_t^{j+1}\xi_1(\cdot,0).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} \frac{D_t^j\varphi(\cdot,T_1+h)-D_t^j\varphi(\cdot,T_1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{D_t^j\xi(\cdot,T_1+h)-D_t^j\xi(\cdot,T_1)}{h}\\ &= D_t^{j+1}\xi(\cdot,T_1).\end{aligned}$$

Aplicando o operador D_t^j ao sistema da vorticidade (3.10), temos

$$\begin{cases} D_t^{j+1}\xi \;=\; -D_t^j(u\xi_x) - D_t^j(v\xi_y) + \nu\Delta D_t^j\xi,\\ D_t^{j+1}\xi(\cdot,0) \;=\; D_t^{j+1}h.\end{cases}$$

Pela regra de Leibniz,

$$D_t^j(u\xi_x) \;=\; \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} D_t^k u D_t^{j-k}\xi_x.$$

Assim, pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} D_t^j(u\xi_x)(\cdot,T_1) &= \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k} D_t^k u(\cdot,T_1) D_t^{j-k}\xi_x(\cdot,T_1) \\ &= \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k} D_t^k u_1(\cdot,0) D_t^{j-k}\xi_{1x}(\cdot,0) \\ &= D_t^j(u_1\xi_{1x})(\cdot,0). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$D_t^j(v\xi_y)(\cdot,T_1) = D_t^j(v_1\xi_{1y})(\cdot,0).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} D_t^{j+1}\xi(\cdot,T_1) &= -D_t^j(u\xi_x)(\cdot,T_1) - D_t^j(v\xi_y)(\cdot,T_1) + \nu\Delta D_t^j\xi(\cdot,T_1) \\ &= -D_t^j(u_1\xi_{1x})(\cdot,0) - D_t^j(v_1\xi_{1y})(\cdot,0) + \nu\Delta D_t^j\xi_1(\cdot,0) \\ &= D_t^{j+1}\xi_1(\cdot,0). \end{aligned}$$

Logo, $D_t^{j+1}\varphi(\cdot,T_1) = D_t^{j+1}\xi(\cdot,T_1) = D_t^{j+1}\xi_1(\cdot,0)$. Note que, aplicando o operador D_t^{j+1} ao sistema de Cauchy-Riemann não-homogêneo (3.11), temos

$$\left\{ \begin{aligned} D_t^{j+1}v_x(\cdot,T_1) - D_t^{j+1}u_y(\cdot,T_1) &= D_t^{j+1}\xi(\cdot,T_1) = D_t^{j+1}\varphi(\cdot,T_1), \\ D_t^{j+1}u_x(\cdot,T_1) + D_t^{j+1}v_y(\cdot,T_1) &= 0. \end{aligned} \right. \tag{3.32}$$

Analogamente,

$$\left\{ \begin{aligned} D_t^{j+1}v_{1x}(\cdot,0) - D_t^{j+1}u_{1y}(\cdot,0) &= D_t^{j+1}\xi_1(\cdot,0) = D_t^{j+1}\varphi(\cdot,T_1), \\ D_t^{j+1}u_{1x}(\cdot,0) + D_t^{j+1}v_{1y}(\cdot,0) &= 0. \end{aligned} \right. \tag{3.33}$$

Pelo Lema 1.11 os sistemas (3.32) e (3.33) têm solução única , logo

$$\left\{ \begin{aligned} D_t^{j+1}u_1(\cdot,0) = D_t^{j+1}u(\cdot,T_1), \\ D_t^{j+1}v_1(\cdot,0) = D_t^{j+1}v(\cdot,T_1), \end{aligned} \right.$$

ou seja, $D_t^{j+1}\mathbf{u}(\cdot,0) = D_t^{j+1}\mathbf{u}_1(\cdot,T_1)$. Agora, observe que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+}\frac{D_t^j\mathbf{a}(\cdot,T_1+h) - D_t^j\mathbf{a}(\cdot,T_1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{D_t^j\mathbf{u}(\cdot,h) - D_t^j\mathbf{u}(\cdot,0)}{h} \\ &= D_t^{j+1}\mathbf{u}(\cdot,0). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-}\frac{D_t^j\mathbf{a}(\cdot,T_1+h)-D_t^j\mathbf{a}(\cdot,T_1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{D_t^j\mathbf{u}_1(\cdot,T_1+h)-D_t^j\mathbf{u}_1(\cdot,T_1)}{h}\\
&= D_t^{j+1}\mathbf{u}_1(\cdot,T_1).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$D_t^{j+1}\mathbf{a}(\cdot,T_1) \;=\; D_t^{j+1}\mathbf{u}(\cdot,T_1) \;=\; D_t^{j+1}\mathbf{u}_1(\cdot,0).$$

Assim sendo, o sistema (3.14) tem uma solução única $(\mathbf{a},\varphi)$ de classe C^∞ definida no intervalo $[0,2T_1]$. Observe que,

$$\|\ \varphi(\cdot,2T_1)\ \|_{H^1}^2 \;=\; \|\ \xi_1(\cdot,T_1)\ \|_{H^1}^2 \;\leq\; K_2,\ \forall\ t\in[0,T_1].$$

Continuando o processo, considere a função $(x,y)\mapsto\varphi(x,y,2T_1)$. Logo, pelo Teorema 3.8, existe uma solução $(\mathbf{a}_1,\varphi_1)$, onde $\mathbf{a}_1=(a_1,b_1)$, do sistema (3.14) para todo $t\in[0,T_1]$, tal que $\varphi_1(\cdot,0)=\varphi(\cdot,2T_1)$. Novamente, pelo Lema 3.6, temos

$$\begin{aligned}
\|\ \varphi_1(\cdot,t)\ \|_{H^1}^2 &\leq e^{\frac{C}{2\nu}\|\varphi_1(\cdot,0)\|^2}\ \|\ \varphi_1(\cdot,0)\ \|_{H^1}^2\\
&= e^{\frac{C}{2\nu}\|\varphi(\cdot,2T_1)\|^2}\ \|\ \varphi(\cdot,2T_1)\ \|_{H^1}^2\\
&\leq e^{\frac{C}{2\nu}K_2}K_2 \;=:\; K_3\\
&\leq K_4,\ \forall\ t\in[0,T_1],
\end{aligned}$$

onde $K_4=\max\{K_2,K_3\}$ é uma constante positiva que depende somente de ν e $\|\ h\ \|_{H^1}$. Defina

$$\varphi_2(\cdot,t) \;=\; \begin{cases}\varphi(\cdot,t);\ t\in[0,2T_1],\\ \varphi_1(\cdot,t-2T_1);\ t\in[2T_1,3T_1],\end{cases}$$

Observe que φ_2 está bem definida, pois, $\varphi_1(\cdot,0)=\varphi(\cdot,2T_1)$. Defina também,

$$\mathbf{a}_2(\cdot,t) \;=\; \begin{cases}\mathbf{a}(\cdot,t),\ t\in[0,2T_1],\\ \mathbf{a}_1(\cdot,t-2T_1),\ t\in[2T_1,3T_1],\end{cases}$$

onde $\mathbf{a}_2=(a_2,b_2)$. Analogamente ao que foi feito anteriormente, é possível provar que $(\mathbf{a}_2,\varphi_2)$ é uma solução de classe C^∞ do sistema (3.14) definida no intervalo $[0,3T_1]$. Note que,

$$\|\ \varphi_2(\cdot,3T_1)\ \|_{H^1}^2 \;=\; \|\ \varphi_1(\cdot,T_1)\ \|_{H^1}^2 \;\leq\; K_4\ \forall\ t\in[0,T_1].$$

Repetindo esse argumento, obtemos uma solução global do sistema (3.14). □

Capítulo 4

Sistema de Navier-Stokes em três dimensões espaciais

O sistema de Navier-Stokes em dimensão três é

$$\mathbf{u}_t + u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y + w\mathbf{u}_z + \text{grad } p = \nu\Delta\mathbf{u}, \tag{4.1a}$$
$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \tag{4.1b}$$
$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{4.1c}$$

onde $\nu > 0$ e $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$. Como no capítulo 3, as aplicações aqui são reais, de classe C^∞ e 2π-periódicas nas variáveis $x,\ y$ *e* z. Além disso, assumimos que

$$(1, f_i) = 0,\ \forall\, i = 1,2,3, \tag{4.2}$$

e

$$(1, u(\cdot,t)) = (1, v(\cdot,t)) = (1, w(\cdot,t)) = 0,\ \forall\, t \geq 0. \tag{4.3}$$

4.1 Equação da vorticidade

Definição 4.1 *A vorticidade é definida por*

$$\boldsymbol{\xi} := rot\ \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Se representarmos $\boldsymbol{\xi}$ em coordenadas por $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$, então $\xi_1 = w_y - v_z,\ \xi_2 = u_z - w_x$ e $\xi_3 = v_x - u_y$. Aplicando o operador rotacional à equação $(4.1a)$ e usando $(4.1b)$, obtemos

$$\boldsymbol{\xi}_t + u\boldsymbol{\xi}_x + v\boldsymbol{\xi}_y + w\boldsymbol{\xi}_z - J(\mathbf{u})\boldsymbol{\xi} = \nu\Delta\boldsymbol{\xi}, \tag{4.5}$$

onde $J(\mathbf{u})$ é matriz jacobiana do vetor velocidade $\mathbf{u} = (u, v, w)$, ou seja,

$$J(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}.$$

A equação (4.5) é denominada equação da vorticidade.

4.2 Unicidade de soluções

Teorema 4.2 *O sistema* (4.1) *possui no máximo uma única solução clássica* (*periódica*).

Demonstração: Suponhamos que o sistema (4.1) admita as soluções $(\mathbf{u}_j, p_j)$, $j = 1, 2$. Denote $(\overline{\mathbf{u}}, \overline{p}) = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, p_1 - p_2)$. Portanto,

$$\overline{\mathbf{u}}_t + u_1\overline{\mathbf{u}}_x + v_1\overline{\mathbf{u}}_y + w_1\overline{\mathbf{u}}_z + \overline{u}\mathbf{u}_{2x} + \overline{v}\mathbf{u}_{2y} + \overline{w}\mathbf{u}_{2z} + \text{grad } \overline{p} \ = \ \nu\Delta\overline{\mathbf{u}},$$

e div $\overline{\mathbf{u}} = 0$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \overline{\mathbf{u}} \parallel^2 &= (\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{u}}_t) \\
&= (\overline{\mathbf{u}}, -u_1\overline{\mathbf{u}}_x - v_1\overline{\mathbf{u}}_y - w_1\overline{\mathbf{u}}_z - \overline{u}\mathbf{u}_{2x} - \overline{v}\mathbf{u}_{2y} - \overline{w}\mathbf{u}_{2z} - \text{grad } \overline{p} + \nu\Delta\overline{\mathbf{u}}) \\
&= -(\overline{\mathbf{u}}, u_1\overline{\mathbf{u}}_x) - (\overline{\mathbf{u}}, v_1\overline{\mathbf{u}}_y) - (\overline{\mathbf{u}}, w_1\overline{\mathbf{u}}_z) - (\overline{\mathbf{u}}, \overline{u}\mathbf{u}_{2x}) - (\overline{\mathbf{u}}, \overline{v}\mathbf{u}_{2y}) - (\overline{\mathbf{u}}, \overline{w}\mathbf{u}_{2z}) \\
&\quad - (\overline{\mathbf{u}}, \text{grad } \overline{p}) - \nu \mid \overline{\mathbf{u}} \mid^2_{H^1} \\
&\leq \frac{1}{2}(\mid u_{1x} \mid_\infty + \mid v_{1y} \mid_\infty + \mid w_{1z} \mid_\infty) \parallel \overline{\mathbf{u}} \parallel^2 - (\overline{\mathbf{u}}, \overline{u}\mathbf{u}_{2x}) - (\overline{\mathbf{u}}, \overline{v}\mathbf{u}_{2y}) - (\overline{\mathbf{u}}, \overline{w}\mathbf{u}_{2z}) \\
&\quad + (\text{div } \overline{\mathbf{u}}, \overline{p}) \\
&= \frac{1}{2}(\mid u_{1x} \mid_\infty + \mid v_{1y} \mid_\infty + \mid w_{1z} \mid_\infty) \parallel \overline{\mathbf{u}} \parallel^2 - (\overline{\mathbf{u}}, \overline{u}\mathbf{u}_{2x}) - (\overline{\mathbf{u}}, \overline{v}\mathbf{u}_{2y}) - (\overline{\mathbf{u}}, \overline{w}\mathbf{u}_{2z}).
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
(\overline{\mathbf{u}}, \overline{u}\mathbf{u}_{2x}) &= (\overline{u}, \overline{u}u_{2x}) + (\overline{v}, \overline{u}v_{2x}) + (\overline{w}, \overline{u}w_{2x}) \\
&\leq \mid u_{2x} \mid_\infty \parallel \overline{u} \parallel^2 + \mid v_{2x} \mid_\infty \parallel \overline{u} \parallel \parallel \overline{v} \parallel + \mid w_{2x} \mid_\infty \parallel \overline{u} \parallel \parallel \overline{w} \parallel \\
&\leq (\mid u_{2x} \mid_\infty + \mid v_{2x} \mid_\infty + \mid w_{2x} \mid_\infty) \parallel \overline{\mathbf{u}} \parallel^2 \\
&\leq C \mid \mathbf{u}_{2x} \mid_\infty \parallel \overline{\mathbf{u}} \parallel^2,
\end{aligned}$$

onde $C = 3$. Analogamente,

$$(\overline{\mathbf{u}}, \overline{v}\mathbf{u}_{2y}) \leq C \mid \mathbf{u}_{2y} \mid_\infty \| \overline{\mathbf{u}} \|^2,$$

e

$$(\overline{\mathbf{u}}, \overline{w}\mathbf{u}_{2z}) \leq C \mid \mathbf{u}_{2z} \mid_\infty \| \overline{\mathbf{u}} \|^2 .$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \overline{\mathbf{u}} \|^2 \leq C(\mid u_{1x} \mid_\infty + \mid v_{1y} \mid_\infty + \mid w_{1z} \mid_\infty + \mid \mathbf{u}_{2x} \mid_\infty + \mid \mathbf{u}_{2y} \mid_\infty + \mid \mathbf{u}_{2z} \mid_\infty) \| \overline{\mathbf{u}} \|^2 .$$

Tome $T > 0$ arbitrário. Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \overline{\mathbf{u}}(\cdot, t) \|^2 \leq K \| \overline{\mathbf{u}}(\cdot, t) \|^2, \ \forall \ t \in [0, T],$$

onde $K = K(T) > 0$. Pelo Lema de Gronwall, obtemos

$$\begin{aligned} \| \overline{\mathbf{u}}(\cdot, t) \|^2 &\leq e^{KT} \| \overline{\mathbf{u}}(\cdot, 0) \|^2 \\ &= e^{KT} \| f - f \|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{\mathbf{u}} = 0$, pois $T > 0$ é arbitrário. Por conseguinte, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. Resta somente provar que $p_1 = p_2$. Semelhante ao caso em duas dimensões consideramos que $(1, p_1) = (1, p_2) = 0$ para que a pressão seja unicamente determinada pela equação $(4.1a)$. Logo,

$$\begin{cases} \Delta\overline{p} = -\overline{u}_x\overline{u}_x - \overline{v}_y\overline{v}_y - \overline{w}_z\overline{w}_z - 2(\overline{v}_x\overline{u}_y + \overline{w}_x\overline{u}_z + \overline{w}_y\overline{v}_z) = 0, \\ (1, \overline{p}) = (1, p_1 - p_2) = 0. \end{cases}$$

Como esse sistema acima tem solução única, concluímos que $\overline{p} = 0$. □

4.3 Estimativas a priori

Considere a seqüência definida indutivamente por $\mathbf{u}^0 \equiv \boldsymbol{\xi}^0 \equiv 0$ e, para cada $n = 0, 1, 2, 3, ...,$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}_t^{n+1} + u^n\boldsymbol{\xi}_x^{n+1} + v^n\boldsymbol{\xi}_y^{n+1} + w^n\boldsymbol{\xi}_z^{n+1} - J(\mathbf{u}^n)\boldsymbol{\xi}^{n+1} = \nu\Delta\boldsymbol{\xi}^{n+1}, \\ \boldsymbol{\xi}^{n+1}(\cdot, 0) = \text{rot } \mathbf{f} =: \mathbf{h}, \\ L\mathbf{u}^{n+1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ (1, u^{n+1}) = (1, v^{n+1}) = (1, w^{n+1}) = 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

onde $L\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \text{rot} & \mathbf{u} \\ \text{div} & \mathbf{u} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{h} = (h_1,\ h_2,\ h_3)$.

Lema 4.3 *Existe* $T = T(\| \ h \ \|_{H^1}) > 0$ *e uma constante positiva* K *que depende somente de* $\nu, T, \| \ \boldsymbol{h} \ \|_{H^1}$, *tal que*

$$\| \ \boldsymbol{\xi}^n(\cdot, t) \ \|_{H^1} \ \ \leq \ \ K,\ \forall\ t \in [0, T],\ \forall\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{4.7}$$

Demonstração: Provaremos o Lema 4.3 por indução sobre n. Para $n = 0$, temos

$$\| \ \boldsymbol{\xi}^0(\cdot, t) \ \|_{H^1} \ \ = \ \ 0 \ \ \leq \ \ K.$$

Suponhamos que a desigualdade (4.7) seja válida para $n \geq 0$. Denote $\mathbf{u} = \mathbf{u}^n$ e $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^{n+1}$. Fazendo o produto interno de $\boldsymbol{\xi}$ com todos os termos da equação (4.5), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \ \boldsymbol{\xi} \ \|^2 \ &= \ (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_t) \\
&= \ (\boldsymbol{\xi}, -u\boldsymbol{\xi}_x - v\boldsymbol{\xi}_y - w\boldsymbol{\xi}_z + J(\mathbf{u})\boldsymbol{\xi} + \nu\Delta\boldsymbol{\xi}) \\
&= \ \frac{1}{2}[(\boldsymbol{\xi}, u_x\boldsymbol{\xi}) + (\boldsymbol{\xi}, v_y\boldsymbol{\xi}) + (\boldsymbol{\xi}, w_z\boldsymbol{\xi})] + (\boldsymbol{\xi}, J(\mathbf{u})\boldsymbol{\xi}) + \nu(\boldsymbol{\xi}, \Delta\boldsymbol{\xi}) \\
&= \ \frac{1}{2}[(\boldsymbol{\xi}, (u_x + v_y + w_z)\boldsymbol{\xi}) + (\boldsymbol{\xi}, J(\mathbf{u})\boldsymbol{\xi}) - \nu \mid \boldsymbol{\xi} \mid_{H^1}^2 \\
&= \ (\boldsymbol{\xi}, J(\mathbf{u})\boldsymbol{\xi}) - \nu \mid \boldsymbol{\xi} \mid_{H^1}^2 .
\end{aligned}$$

Se $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, então

$$(\boldsymbol{\xi}, J(\mathbf{u})\boldsymbol{\xi}) \ \ = \ \ (\xi_1, u_x\xi_1 + u_y\xi_2 + u_z\xi_3) + (\xi_2, v_x\xi_1 + v_y\xi_2 + v_z\xi_3) + (\xi_3, w_x\xi_1 + w_y\xi_2 + w_z\xi_3).$$

Estimaremos um dos produtos que aparecem acima. Os demais podem ser controlados de maneira análoga. Pela desigualdade de Hölder (ver desigualdade (1.36)) e pelo

Lema 1.12, temos

$$
\begin{aligned}
(\xi_1, u_y\xi_2) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u_y\xi_1\xi_2 dxdydz \\
&\leq \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid u_y \mid\mid \xi_1\xi_2 \mid dxdydz \\
&\leq \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid u_y \mid^2 dxdydz\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid \xi_1\xi_2 \mid^2 dxdydz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \parallel u_y \parallel \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid \xi_1 \mid^4 dxdydz\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid \xi_2 \mid^4 dxdydz\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq \parallel \mathbf{u} \parallel_{H^1}\parallel \xi_1 \parallel_{L^4}\parallel \xi_2 \parallel_{L^4} \\
&\leq C \parallel \boldsymbol{\xi}^n \parallel\parallel \xi_1 \parallel_{L^4}\parallel \xi_2 \parallel_{L^4} \\
&\leq K \parallel \xi_1 \parallel_{L^4}\parallel \xi_2 \parallel_{L^4} \\
&\leq K \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel_{L^4}^2, \ \forall\, t \in [0,T],
\end{aligned}
$$

onde $K = K(\nu, T, \parallel \mathbf{h} \parallel_{H^1})$. Observe que o método aplicado ao caso bidimensional não pode ser aplicado ao produto $(\xi_1, u_y\xi_2)$, pois para controlar a norma do máximo de qualquer aplicação presente nesse produto, é necessário estimar a norma H^2 da vorticidade. Porém, só temos controle sobre a norma H^1 de $\boldsymbol{\xi}^n$. Seguindo com a demonstração, temos

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2 \ \leq \ K \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel_{L^4}^2 - C\nu \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel_{H^1}^2,
$$

onde C é uma constante positiva. Como estamos trabalhando com funções periódicas podemos utilizar a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$
\parallel \boldsymbol{\xi} \parallel_{L^4} \ \leq \ C \mid \boldsymbol{\xi} \mid_{H^1}^{\frac{3}{4}}\parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^{\frac{1}{4}} . \tag{4.8}
$$

Com isso, obtemos

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2 \ \leq \ K \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel_{H^1}^{\frac{3}{2}}\parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^{\frac{1}{2}} - C\nu \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel_{H^1}^2 .
$$

Pela desigualdade de Young (ver a desigualdade (1.37)), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2 &\leq \frac{1}{4}\left[\left(\frac{4}{3}C\nu\right)^{\frac{-3}{4}} K \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^{\frac{1}{2}}\right]^4 + \frac{3}{4}\left[\left(\frac{4}{3}C\nu\right)^{\frac{3}{4}} \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel_{H^1}^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{4}{3}} - C\nu \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel_{H^1}^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}C\nu\right)^{-3} K^4 \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2 + C\nu \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel_{H^1}^2 - C\nu \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel_{H^1}^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}C\nu\right)^{-3} K^4 \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2 \\
&\leq K \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2,
\end{aligned}$$

onde $K = K(\nu, T, \parallel \mathbf{h} \parallel_{H^1})$, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2 \leq K \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2, \tag{4.9}$$

onde $K = K(\nu, T, \parallel \mathbf{h} \parallel_{H^1})$. Para estimarmos a norma $\mid \boldsymbol{\xi} \mid_{H^1}$ precisamos controlar a norma L^2 de $\boldsymbol{\xi}_x$, $\boldsymbol{\xi}_y$ e $\boldsymbol{\xi}_z$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \boldsymbol{\xi}_x \parallel^2 &= (\boldsymbol{\xi}_x, \boldsymbol{\xi}_{xt}) \\
&= -(\boldsymbol{\xi}_{xx}, \boldsymbol{\xi}_t) \\
&= (\boldsymbol{\xi}_{xx}, u\boldsymbol{\xi}_x + v\boldsymbol{\xi}_y + w\boldsymbol{\xi}_z - J(\mathbf{u})\boldsymbol{\xi} - \nu\Delta\boldsymbol{\xi}) \\
&= (\boldsymbol{\xi}_{xx}, u\boldsymbol{\xi}_x) + (\boldsymbol{\xi}_{xx}, v\boldsymbol{\xi}_y) + (\boldsymbol{\xi}_{xx}, w\boldsymbol{\xi}_z) - (\boldsymbol{\xi}_{xx}, J(\mathbf{u})\boldsymbol{\xi}) - \nu(\boldsymbol{\xi}_{xx}, \Delta\boldsymbol{\xi}) \\
&\leq \mid \mathbf{u} \mid_\infty \parallel \boldsymbol{\xi}_{xx} \parallel (\parallel \boldsymbol{\xi}_x \parallel + \parallel \boldsymbol{\xi}_y \parallel + \parallel \boldsymbol{\xi}_z \parallel) + (\boldsymbol{\xi}_x, J(\mathbf{u})_x\boldsymbol{\xi}) + (\boldsymbol{\xi}_x, J(\mathbf{u})\boldsymbol{\xi}_x) \\
&\quad -\nu \parallel \boldsymbol{\xi}_{xx} \parallel^2 - \nu \parallel \boldsymbol{\xi}_{xy} \parallel^2 - \nu \parallel \boldsymbol{\xi}_{xz} \parallel^2
\end{aligned}$$

Observe que, analogamente ao caso bidimensional,

$$\begin{aligned}
\mid \mathbf{u} \mid_\infty \parallel \boldsymbol{\xi}_{xx} \parallel \parallel \boldsymbol{\xi}_x \parallel - \frac{\nu}{4} \parallel \boldsymbol{\xi}_{xx} \parallel^2 &\leq C \mid \mathbf{u} \mid_\infty^2 \parallel \boldsymbol{\xi}_x \parallel^2 \\
&\leq C \parallel \mathbf{u} \parallel_{H^2}^2 \parallel \boldsymbol{\xi}_x \parallel^2 \\
&\leq C \mid \boldsymbol{\xi}^n \mid_{H^1}^2 \parallel \boldsymbol{\xi}_x \parallel^2 \\
&\leq K \parallel \boldsymbol{\xi}_x \parallel^2,
\end{aligned}$$

onde $C = C(\nu)$ e $K = K(\nu, T, \| h \|_{H^1})$ são constantes positivas. Analogamente, obtemos

$$\begin{cases} | \mathbf{u} |_\infty \| \boldsymbol{\xi}_{xx} \| \| \boldsymbol{\xi}_y \| - \dfrac{\nu}{4} \| \boldsymbol{\xi}_{xx} \|^2 \leq K \| \boldsymbol{\xi}_y \|^2, \\ \\ | \mathbf{u} |_\infty \| \boldsymbol{\xi}_{xx} \| \| \boldsymbol{\xi}_z \| - \dfrac{\nu}{4} \| \boldsymbol{\xi}_{xx} \|^2 \leq K \| \boldsymbol{\xi}_z \|^2 . \end{cases}$$

Portanto, pela desigualdade de Hölder e pelo Lema 1.12, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \boldsymbol{\xi}_x \|^2 &\leq K | \boldsymbol{\xi} |^2_{H^1} + (\boldsymbol{\xi}_x, J(\mathbf{u})_x \boldsymbol{\xi}) + (\boldsymbol{\xi}_x, J(\mathbf{u}) \boldsymbol{\xi}_x) - \frac{\nu}{4} \| \boldsymbol{\xi}_{xx} \|^2 - \nu \| \boldsymbol{\xi}_{xy} \|^2 - \nu \| \boldsymbol{\xi}_{xz} \|^2 \\ &\leq K \| \boldsymbol{\xi} \|^2_{H^1} + K \| \boldsymbol{\xi}_x \|_{L^4} \| \boldsymbol{\xi} \|_{L^4} + K \| \boldsymbol{\xi}_x \|^2_{L^4} - C\nu | \boldsymbol{\xi}_x |^2_{H^1}, \end{aligned}$$

onde C e $K = K(\nu, T, \| h \|_{H^1})$ são constantes positivas. Pela desigualdade (4.8), concluímos que

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{\xi}_x \|_{L^4} \| \boldsymbol{\xi} \|_{L^4} &\leq C \| \boldsymbol{\xi}_x \|^{\frac{3}{4}}_{H^1} \| \boldsymbol{\xi}_x \|^{\frac{1}{4}} \| \boldsymbol{\xi} \|^{\frac{3}{4}}_{H^1} \| \boldsymbol{\xi} \|^{\frac{1}{4}} \\ &\leq C \| \boldsymbol{\xi}_x \|_{H^1} \| \boldsymbol{\xi} \|_{H^1}, \end{aligned}$$

onde $C > 0$. Analogamente,

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{\xi}_x \|^2_{L^4} &\leq C \| \boldsymbol{\xi}_x \|^{\frac{3}{2}}_{H^1} \| \boldsymbol{\xi}_x \|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \| \boldsymbol{\xi}_x \|^{\frac{3}{2}}_{H^1} \| \boldsymbol{\xi} \|^{\frac{1}{2}}_{H^1} . \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \boldsymbol{\xi}_x \|^2 \leq K \| \boldsymbol{\xi} \|^2_{H^1} + K \| \boldsymbol{\xi}_x \|_{H^1} \| \boldsymbol{\xi} \|_{H^1} + K \| \boldsymbol{\xi}_x \|^{\frac{3}{2}}_{H^1} \| \boldsymbol{\xi} \|^{\frac{1}{2}}_{H^1} - C\nu \| \boldsymbol{\xi}_x \|^2_{H^1},$$

Mas,

$$\| \boldsymbol{\xi}_x \|_{H^1} \| \boldsymbol{\xi} \|_{H^1} - \frac{C\nu}{2} \| \boldsymbol{\xi}_x \|^2_{H^1} \leq C \| \boldsymbol{\xi} \|^2_{H^1},$$

onde $C = C(\nu) > 0$. Utilizando a desigualdade de Young, obtemos

$$\| \boldsymbol{\xi}_x \|^{\frac{3}{2}}_{H^1} \| \boldsymbol{\xi} \|^{\frac{1}{2}}_{H^1} - \frac{C\nu}{2} \| \boldsymbol{\xi}_x \|^2_{H^1} \leq C \| \boldsymbol{\xi} \|^2_{H^1} .$$

Assim sendo,

$$\frac{d}{dt} \| \boldsymbol{\xi}_x \|^2 \leq K \| \boldsymbol{\xi} \|^2_{H^1} .$$

Analogamente, é possível mostrar que

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \parallel \boldsymbol{\xi}_y \parallel^2 \leq \; K \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2_{H^1}, \\ \\ \dfrac{d}{dt} \parallel \boldsymbol{\xi}_z \parallel^2 \leq \; K \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2_{H^1} \, . \end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \mid \boldsymbol{\xi}(\cdot, t) \mid^2_{H^1} \quad \leq \quad K \parallel \boldsymbol{\xi}(\cdot, t) \parallel^2_{H^1}, \; \forall \; t \in [0, T], \tag{4.10}$$

onde $K = K(\nu, T \parallel \mathbf{h} \parallel_{H^1})$. Pelas desigualdades (4.9) e (4.10), temos

$$\frac{d}{dt} \parallel \boldsymbol{\xi}(\cdot, t) \parallel^2_{H^1} \quad \leq \quad K \parallel \boldsymbol{\xi}(\cdot, t) \parallel^2_{H^1}, \; \forall \; t \in [0, T],$$

onde $K = K(\nu, T \parallel \mathbf{h} \parallel_{H^1})$. Pelo Lema de Gronwall, obtemos

$$\parallel \boldsymbol{\xi}(\cdot, t) \parallel^2_{H^1} \quad \leq \quad e^{KT} \parallel \mathbf{h} \parallel^2_{H^1} \, .$$

Tome $T > 0$, pequeno o suficiente, tal que

$$e^{KT} \parallel \mathbf{h} \parallel^2_{H^1} \quad \leq \quad K^2.$$

Com isso, concluímos a prova do Lema 4.3. □

Lema 4.4 *Suponha que* $\boldsymbol{\xi}^n$ *seja definida indutivamente por* (4.6)*. Para cada* $j = 1, 2, 3, \ldots$ *existe uma constante* $K_j > 0$ *tal que*

$$\parallel \boldsymbol{\xi}^n(\cdot, t) \parallel_{H^j} \quad \leq \quad K_j, \; \forall \; t \in [0, T], \; \forall \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

onde $T = T(\parallel \boldsymbol{h} \parallel_{H^1}) > 0$ *é determinado como no Lema* 4.3*.*

A demonstração desse resultado é análoga ao caso bidimensional.

4.4 Existência local de soluções

Teorema 4.5 *Sejam* $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{\xi}(\cdot, 0) \in C^\infty$ *e* $T = T(\parallel \boldsymbol{h} \parallel_{H^1}) > 0$ *determinado no Lema* 4.3*. Então o sistema* (4.1) *tem uma única solução (periódica)* $(\boldsymbol{u}, p)$ *de classe* C^∞ *definida para todo* $t \in [0, T]$*.*

Demonstração: Denote $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\xi}^{n+1} - \boldsymbol{\xi}^n)$ e $(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) = (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}, \boldsymbol{\xi}^n - \boldsymbol{\xi}^{n-1})$. Observe que,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \xi_1 \parallel^2 &= (\xi_1, \xi_{1t}) \\
&= (\xi_1, -u^n\xi_{1x}^{n+1} - v^n\xi_{1y}^{n+1} - w^n\xi_{1z}^{n+1} + u_x^n\xi_1^{n+1} + u_y^n\xi_2^{n+1} + u_z^n\xi_3^{n+1} \\
&\quad + \nu\Delta\xi_1^{n+1} + u^{n-1}\xi_{1x}^n + v^{n-1}\xi_{1y}^n + w^{n-1}\xi_{1z}^n - u_x^{n-1}\xi_1^n - u_y^{n-1}\xi_2^n \\
&\quad - u_z^{n-1}\xi_3^n - \nu\Delta\xi_1^n).
\end{aligned}$$

Estimaremos somente dois dos termos dos produtos acima, os outros podem ser estimados de forma análoga. Assim,

$$\begin{aligned}
(\xi_1, -v^n\xi_{1y}^{n+1} + v^{n-1}\xi_{1y}^n) &= (\xi_1, -v^n\xi_{1y}^{n+1} + v^n\xi_{1y}^n - v^n\xi_{1y}^n + v^{n-1}\xi_{1y}^n) \\
&= (\xi_1, -v^n\xi_{1y} - \widetilde{v}\xi_{1y}^n) \\
&= -(\xi_1, v^n\xi_{1y}) - (\xi_1, \widetilde{v}\xi_{1y}^n) \\
&\leq \frac{1}{2}(\xi_1, v_y^n\xi_1) - (\xi_1, \widetilde{v}\xi_{1y}^n) \\
&\leq \frac{1}{2} \mid v_y^n \mid_\infty \parallel \xi_1 \parallel^2 + \mid \xi_{1y}^n \mid_\infty \parallel \xi_1 \parallel \parallel \widetilde{v} \parallel \\
&\leq \frac{1}{2}C \parallel \boldsymbol{\xi}^n \parallel_{H^2} \parallel \xi_1 \parallel^2 + C \parallel \xi_1^n \parallel_{H^3} \parallel \xi_1 \parallel \parallel \widetilde{\boldsymbol{\xi}} \parallel \\
&\leq K_2 \parallel \xi_1 \parallel^2 + K_3 \parallel \xi_1 \parallel \parallel \widetilde{\boldsymbol{\xi}} \parallel \\
&\leq C(\parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2 + \parallel \widetilde{\boldsymbol{\xi}} \parallel^2),
\end{aligned}$$

onde $C = C(\nu, T, \parallel \mathbf{h} \parallel_{H^3})$ é uma constante positiva. Analogamente,

$$\begin{aligned}
(\xi_1, u_y^n\xi_2^{n+1} - u_y^{n-1}\xi_2^n) &= (\xi_1, u_y^n\xi_2^{n+1} - u_y^n\xi_2 + u_y^n\xi_2^n - u_y^{n-1}\xi_2^n) \\
&= (\xi_1, u_y^n\xi_2 + \widetilde{u}_y\xi_2^n) \\
&\leq \mid u_y^n \mid_\infty \parallel \xi_1 \parallel \parallel \xi_2 \parallel + \mid \xi_2^n \mid_\infty \parallel \xi_1 \parallel \parallel \widetilde{u}_y \parallel \\
&\leq C \parallel \boldsymbol{\xi}^n \parallel_{H^2} \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2 + C \parallel \xi_2^n \parallel_{H^2} \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel \parallel \widetilde{\boldsymbol{\xi}} \parallel \\
&\leq K_2(\parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2 + \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel \parallel \widetilde{\boldsymbol{\xi}} \parallel) \\
&\leq K_2(\parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2 + \parallel \widetilde{\boldsymbol{\xi}} \parallel^2),
\end{aligned}$$

onde $K_2 = K_2(\nu, T, \parallel \mathbf{h} \parallel_{H^2})$ é uma constante positiva. Como

$$\begin{aligned}
(\xi_1, \nu\Delta\xi_1^{n+1} - \nu\Delta\xi_1^n) &= (\xi_1, \nu\Delta\xi_1) \\
&= -\nu \mid \xi_1 \mid_{H^1}^2 \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Então obtemos

$$\frac{d}{dt} \parallel \xi_1 \parallel^2 \;\leq\; C(\parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2 + \parallel \widetilde{\boldsymbol{\xi}} \parallel^2), \; \forall\, t \in [0,T].$$

Estimativas análogas valem para ξ_2 e ξ_3. Assim,

$$\frac{d}{dt} \parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2 \;\leq\; C(\parallel \boldsymbol{\xi} \parallel^2 + \parallel \widetilde{\boldsymbol{\xi}} \parallel^2), \; \forall\, t \in [0,T].$$

Pelo Lema de Gronwall, temos que

$$\begin{aligned} \parallel \boldsymbol{\xi}(\cdot,t) \parallel^2 &\leq e^{Ct}\left(\parallel \boldsymbol{\xi}(\cdot,0) \parallel^2 + C\int_0^t \parallel \widetilde{\boldsymbol{\xi}}(\cdot,\tau) \parallel^2 d\tau\right) \\ &\leq C\int_0^t \parallel \widetilde{\boldsymbol{\xi}}(\cdot,\tau) \parallel^2 d\tau, \; \forall\, t \in [0,T], \end{aligned}$$

onde $C = C(\nu, T, \parallel \mathbf{h} \parallel_{H^3})$ é uma constante positiva. Logo, existe uma solução $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi})$ de classe C^∞ da equação da vorticidade no intervalo de tempo $[0,T]$ (ver demonstração do Teorema 3.8). A partir disso, conseguimos uma solução (periódica) $(\mathbf{u}, p)$ de classe C^∞ do sistema (4.1) por um resultado, em dimensão três, análogo ao Teorema 3.4. $\square$

4.5 Extensão do intervalo de existência

Nessa seção estabelecemos condição suficiente para que o intervalo de existência de uma solução do sistema de Navier-Stokes possa ser estendido.

Seja $(\mathbf{u}, p)$ uma solução periódica, de classe C^∞, do sistema (4.1), definida no intervalo de tempo $0 \leq t < T$. Afirmamos que se a velocidade é limitada então essa solução pode ser estendida a T. Provaremos essa afirmação através de alguns Lemas. O primeiro deles é o

Lema 4.6 *Se $\boldsymbol{u}$ é uma solução de classe C^∞ do sistema* (4.1) *em $0 \leq t < T$, então*

$$\frac{d}{dt} \parallel \boldsymbol{u}(\cdot,t) \parallel^2 \;=\; -2\nu J_1^2(t), \forall\, t \in [0,T),$$

com J_1^2 definido por (1.34). *Além disso,*

$$\begin{cases} \parallel \boldsymbol{u}(\cdot,t) \parallel^2 \leq \parallel \boldsymbol{f} \parallel^2, \\ \\ 2\nu \displaystyle\int_0^T J_1^2(t)dt \;\leq \parallel \boldsymbol{f} \parallel^2, \end{cases}$$

para todo $t \in [0,T)$.

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \mathbf{u} \parallel^2 &= (\mathbf{u}, \mathbf{u}_t) \\
&= (\mathbf{u}, -u\mathbf{u}_x - v\mathbf{u}_y - w\mathbf{u}_z - \text{grad } p + \nu\Delta\mathbf{u}) \\
&= -(\mathbf{u}, u\mathbf{u}_x) - (\mathbf{u}, v\mathbf{u}_y) - (\mathbf{u}, w\mathbf{u}_z) - (\mathbf{u}, \text{grad } p) + \nu(\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) \\
&= \frac{1}{2}[(\mathbf{u}, u_x\mathbf{u}) + (\mathbf{u}, v_y\mathbf{u}) + (\mathbf{u}, w_z\mathbf{u})] + (\text{div } \mathbf{u}, p) - \nu[\parallel \mathbf{u}_x \parallel^2 + \parallel \mathbf{u}_y \parallel^2 \\
&\quad + \parallel \mathbf{u}_z \parallel^2] \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{u}, (\text{div } \mathbf{u})\mathbf{u}) - \nu J_1^2 \\
&= -\nu J_1^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \parallel \mathbf{u}(\cdot, t) \parallel^2 \;=\; -2\nu J_1^2 \;\leq\; 0, \forall\, t \in [0,T). \tag{4.11}$$

Portanto, integrando a desigualdade (4.11) de 0 a t, obtemos

$$\parallel \mathbf{u}(\cdot, t) \parallel^2 \;\leq\; \parallel \mathbf{u}(\cdot, 0) \parallel^2 \;=\; \parallel \mathbf{f} \parallel^2,$$

e,

$$- \parallel \mathbf{u}(\cdot, 0) \parallel^2 \;\leq\; \parallel \mathbf{u}(\cdot, t) \parallel^2 - \parallel \mathbf{u}(\cdot, 0) \parallel^2 \;\leq\; -2\nu \int_0^T J_1^2(t)dt.$$

Conseqüentemente,

$$2\nu \int_0^T J_1^2(t)dt \;\leq\; \parallel \mathbf{u}(\cdot, 0) \parallel^2 \;=\; \parallel \mathbf{f} \parallel^2,$$

para todo t no intervalo de tempo $[0,T)$. □

Suponhamos que $\mathbf{u}$ seja limitada em $[0,T)$, isto é,

$$| \mathbf{u} |_{\infty,T} \;:=\; \sup_{0 \leq t < T} \{| \mathbf{u}(\cdot, t) |_\infty\} \;<\; \infty.$$

Provemos que, nesse caso, essa solução pode ser estendida a T. Para isso, provaremos estimativas para as aplicações

$$\begin{cases} J_1^2(t) := \| \mathbf{u}_x(\cdot,t) \|^2 + \| \mathbf{u}_y(\cdot,t) \|^2 + \| \mathbf{u}_z(\cdot,t) \|^2, \\ \\ J_2^2(t) := \| \mathbf{u}_{xx}(\cdot,t) \|^2 + \| \mathbf{u}_{yy}(\cdot,t) \|^2 + \| \mathbf{u}_{zz}(\cdot,t) \|^2, \end{cases}$$

e então controlaremos a norma

$$| \boldsymbol{\xi}(\cdot,t) |_{H^1,T} \;:=\; \sup_{0\le t<T} \{\| \boldsymbol{\xi}(\cdot,t) \|_{H^1}\},$$

no intervalo de tempo $[0,T)$. Esse último fato nos conduz a extensão da solução $\mathbf{u}$, pelo Teorema da existência local de soluções do sistema de Navier-Stokes. Dessa forma, enunciemos o Lema que nos dá um controle para a função J_1^2, ou seja, o

Lema 4.7 *A aplicação J_1^2 satisfaz a desigualdade*

$$J_1^2(t) \;\le\; J_1^2(0) + \frac{C \mid \boldsymbol{u} \mid^2_{\infty,T}}{\nu^2} \| \boldsymbol{f} \|^2,$$

onde C é uma constante positiva e $t \in [0,T)$. Além disso, o lado direito da desigualdade acima é também uma cota superior para

$$\nu \int_0^T J_2^2(t)dt,$$

onde J_2^2 está definida em (1.34)

Demonstração: Represente por D um dos operadores D_x, D_y, D_z. Assim sendo, para estimar a função J_1^2 basta controlar a norma L^2 de $D\mathbf{u}$. Logo, aplique D a equação $(4.1a)$ para encontrar

$$D\mathbf{u}_t + D\{u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y + w\mathbf{u}_z\} + \text{grad } Dp \;=\; \nu\Delta D\mathbf{u}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| D\mathbf{u} \|^2 &= (D\mathbf{u}, D\mathbf{u}_t) \\
&= (D\mathbf{u}, -D\{u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y + w\mathbf{u}_z\} - \text{grad } Dp + \nu\Delta D\mathbf{u}) \\
&= -(D\mathbf{u}, D\{u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y + w\mathbf{u}_z\}) - (D\mathbf{u}, \text{grad } Dp) + \nu(D\mathbf{u}, \Delta D\mathbf{u}) \\
&\le (D^2\mathbf{u}, u\mathbf{u}_x) + (D^2\mathbf{u}, v\mathbf{u}_y) + (D^2\mathbf{u}, w\mathbf{u}_z) + (\mathbf{u}, \text{grad } \mathrm{D}^2 p) - \nu \| D^2\mathbf{u} \|^2 \\
&\le (D^2\mathbf{u}, u\mathbf{u}_x) + (D^2\mathbf{u}, v\mathbf{u}_y) + (D^2\mathbf{u}, w\mathbf{u}_z) + (\text{div } \mathbf{u}, \text{grad } \mathrm{D}^2 p) - \nu \| D^2\mathbf{u} \|^2 \\
&\le (D^2\mathbf{u}, u\mathbf{u}_x) + (D^2\mathbf{u}, v\mathbf{u}_y) + (D^2\mathbf{u}, w\mathbf{u}_z) - \nu \| D^2\mathbf{u} \|^2 .
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}(D^2\mathbf{u}, v\mathbf{u}_y) &\leq \mid v \mid_\infty \| \mathbf{u}_y \| \| D^2\mathbf{u} \| \\ &\leq \mid \mathbf{u} \mid_\infty J_1 J_2.\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{cases} (D^2\mathbf{u}, u\mathbf{u}_x) \leq \mid \mathbf{u} \mid_\infty J_1 J_2, \\ \\ (D^2\mathbf{u}, w\mathbf{u}_z) \leq \mid \mathbf{u} \mid_\infty J_1 J_2. \end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \| D\mathbf{u} \|^2 \leq C \mid \mathbf{u} \mid_\infty J_1 J_2 - 2\nu \| D^2\mathbf{u} \|^2,$$

onde $C(=6)$ é uma constante positiva. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} J_1^2 &\leq C \mid \mathbf{u} \mid_\infty J_1 J_2 - 2\nu J_2^2 \\ &\leq \left(\frac{C \mid \mathbf{u} \mid_\infty J_1}{\sqrt{2\nu}} \right) (\sqrt{2\nu} J_2) - 2\nu J_2^2 \\ &\leq \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_\infty^2 J_1^2}{\nu} + \nu J_2^2 - 2\nu J_2^2 \\ &\leq \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_\infty^2 J_1^2}{\nu} - \nu J_2^2,\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Daí,

$$\frac{d}{dt} J_1^2 \leq \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_\infty^2 J_1^2}{\nu} - \nu J_2^2. \tag{4.12}$$

Integrando a desigualdade (4.12) de 0 a t, obtemos

$$J_1^2(t) \leq J_1^2(0) + \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_\infty^2}{\nu} \int_0^t J_1^2(\tau) d\tau - \nu \int_0^t J_2^2(\tau) d\tau.$$

Pela demonstração do Lema 4.6, temos que

$$\begin{aligned}\frac{C \mid \mathbf{u} \mid_\infty^2}{\nu} \int_0^t J_1^2(\tau) d\tau &\leq \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_\infty^2}{\nu} \frac{1}{2\nu} \| \mathbf{f} \|^2 \\ &\leq \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_{\infty,T}^2}{\nu^2} \| \mathbf{f} \|^2 .\end{aligned}$$

Portanto,

$$J_1^2(t) \;\; \leq \;\; J_1^2(0) + \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_{\infty,T}^2}{\nu^2} \parallel \mathbf{f} \parallel^2 .$$

Por outro lado, integrando de 0 a T a desigualdade (4.12), concluímos que

$$\begin{aligned} -J_1^2(0) \;\; \leq \;\; J_1^2(T) - J_1^2(0) \;\; &\leq \;\; \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_{\infty}^2}{\nu} \int_0^T J_1^2(t)dt - \nu \int_0^T J_2^2(t)dt \\ &\leq \;\; \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_{\infty,T}^2}{\nu^2} \parallel \mathbf{f} \parallel^2 -\nu \int_0^T J_2^2(t)dt. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\nu \int_0^T J_2^2(t)dt \;\; \leq \;\; J_1^2(0) + \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_{\infty,T}^2}{\nu^2} \parallel \mathbf{f} \parallel^2 .$$

□

Resta-nos somente encontrar uma estimativa para a aplicação J_2^2.

Lema 4.8 *A aplicação J_2^2 satisfaz*

$$J_2^2(t) \;\; \leq \;\; J_2^2(0) + \frac{C \mid \boldsymbol{u} \mid_{\infty,T}^2}{\nu^2} \left\{ J_1^2(0) + \frac{\mid \boldsymbol{u} \mid_{\infty,T}^2 \parallel \boldsymbol{f} \parallel^2}{\nu^2} \right\},$$

para todo $t \in [0,T)$.

Demonstração: Denote D^2 por cada um dos operadores D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}. Assim, controlar a função J_2^2 é o mesmo que estimar a norma L^2 da aplicação $D^2\mathbf{u}$. Com isso, aplicando o operador D^2 a equação (4.1a), obtemos

$$D^2\mathbf{u} + D^2\{u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y + w\mathbf{u}_z\} + \text{grad } D^2p \;\; = \;\; \nu\Delta D^2\mathbf{u}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel D^2\mathbf{u} \parallel^2 \;\; &= \;\; (D^2\mathbf{u}, D^2\mathbf{u}_t) \\ &= \;\; -(D^2\mathbf{u}, D^2\{u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y + w\mathbf{u}_z\}) - (D^2\mathbf{u}, \text{grad } D^2p) + \nu(D^2\mathbf{u}, \Delta D^2\mathbf{u}) \\ &\leq \;\; -(D^2\mathbf{u}, D^2\{u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y + w\mathbf{u}_z\}) - (\text{div } \mathbf{u}, D^4p) - \nu \parallel D^3\mathbf{u} \parallel^2 \\ &\leq \;\; -(D^2\mathbf{u}, D^2\{u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y + w\mathbf{u}_z\}) - \nu \parallel D^3\mathbf{u} \parallel^2 . \end{aligned}$$

Observe que, pela regra de Leibniz,

$$\begin{aligned} D^2(v\mathbf{u}_y) &= D((Dv)\mathbf{u}_y + v(D\mathbf{u}_y)) \\ &= (D^2v)\mathbf{u}_y + (Dv)(D\mathbf{u}_y) + (Dv)(D\mathbf{u}_y) + v(D^2\mathbf{u}_y) \\ &= (D^2v)\mathbf{u}_y + 2(Dv)(D\mathbf{u}_y) + v(D^2\mathbf{u}_y). \end{aligned}$$

Note também que estimando os termos $(D^2\mathbf{u}, (D^2v)\mathbf{u}_y)$, $(D^2\mathbf{u}, (Dv)(D\mathbf{u}_y))$ *e* $(D^2\mathbf{u}, v(D^2\mathbf{u}_y))$ encontramos uma estimativa para o produto $(D^2\mathbf{u}, D^2(v\mathbf{u}_y))$. Dessa forma, podemos encontrar uma cota superior para o produto $(D^2\mathbf{u}, D^2\{u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y + w\mathbf{u}_z\})$. Logo,

$$\begin{aligned} (D^2\mathbf{u}, (D^2v)\mathbf{u}_y) &= -(D^2\mathbf{u}_y, (D^2v)\mathbf{u}) - (D^2\mathbf{u}, (D^2v_y)\mathbf{u}) \\ &\leq \mid \mathbf{u} \mid_\infty \| D^2\mathbf{u}_y \| \| D^2v \| + \mid \mathbf{u} \mid_\infty \| D^2\mathbf{u} \| \| D^2v_y \| \\ &\leq C \mid \mathbf{u} \mid_\infty \| \mathbf{u} \|_{H^3} \| \mathbf{u} \|_{H^2} \\ &\leq C \mid \mathbf{u} \mid_\infty J_2 J_3, \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Analogamente,

$$\begin{aligned} (D^2\mathbf{u}, (Dv)(D\mathbf{u}_y)) &= -(D^3\mathbf{u}, v(D\mathbf{u}_y)) - (D^2\mathbf{u}, v(D^2\mathbf{u}_y)) \\ &\leq \mid v \mid_\infty \| D^3\mathbf{u} \| \| D\mathbf{u}_y \| + \mid v \mid_\infty \| D^2\mathbf{u} \| \| D^2\mathbf{u}_y \| \\ &\leq C \mid \mathbf{u} \mid_\infty \| \mathbf{u} \|_{H^3} \| \mathbf{u} \|_{H^2} \\ &\leq C \mid \mathbf{u} \mid_\infty J_2 J_3, \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Da mesma forma,

$$\begin{aligned} (D^2\mathbf{u}, v(D^2\mathbf{u}_y)) &\leq \mid v \mid_\infty \| D^2\mathbf{u} \| \| D^2\mathbf{u}_y \| \\ &\leq \mid \mathbf{u} \mid_\infty \| \mathbf{u} \|_{H^2} \| \mathbf{u} \|_{H^3} \\ &\leq C \mid \mathbf{u} \mid_\infty J_2 J_3, \end{aligned}$$

onde $C > 0$ é uma constante. Conseqüentemente,

$$\frac{d}{dt} \| D^2\mathbf{u} \|^2 \leq C \mid \mathbf{u} \mid_\infty J_2 J_3 - 2\nu \| D^3\mathbf{u} \|^2 .$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} J_2^2(t) \leq C \mid \mathbf{u} \mid_\infty J_2(t) J_3(t) - 2\nu J_3^2(t),$$

para todo $t \in [0, T)$. Com isso,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} J_2^2 &\leq \left(\frac{C \mid \mathbf{u} \mid_\infty J_2}{\sqrt{2\nu}} \right) \sqrt{2\nu} J_3 - 2\nu J_3^2 \\
&\leq \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_\infty^2 J_2^2}{\nu} + \nu J_3^2 - 2\nu J_3^2 \\
&\leq \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_\infty^2 J_2^2}{\nu} - \nu J_3^2 \\
&\leq \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_\infty^2 J_2^2}{\nu}
\end{aligned}
$$

Integrando de 0 a t, obtemos, da demonstração do Lema 4.7, que

$$
\begin{aligned}
J_2^2(t) &\leq J_2^2(0) + \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_\infty^2}{\nu} \int_0^t J_2^2(\tau) d\tau \\
&\leq J_2^2(0) + \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_{\infty,T}^2}{\nu} \frac{1}{\nu} \left\{ J_1^2(0) + \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_{\infty,T}^2 \| \mathbf{f} \|^2}{\nu^2} \right\} \\
&\leq J_2^2(0) + \frac{C \mid \mathbf{u} \mid_{\infty,T}^2}{\nu^2} \left\{ J_1^2(0) + \frac{\mid \mathbf{u} \mid_{\infty,T}^2 \| \mathbf{f} \|^2}{\nu^2} \right\},
\end{aligned}
$$

onde $C > 0$ é uma constante e $t \in [0, T)$. $\square$

Pelos Lemas 4.7 e 4.8 temos que, no intervalo de tempo $[0, T)$, as aplicações J_1^2 e J_2^2 estão limitadas, caso $\mid \mathbf{u} \mid_{\infty,T} < \infty$. Dessa forma, pelo Teorema da existência local do sistema de Navier-Stokes, podemos estender o intervalo de tempo $[0, T)$, onde a solução $\mathbf{u}$ está definida, a T, pois a norma $\mid \boldsymbol{\xi} \mid_{H^1,T}$ está controlada. Com isso, está provado o seguinte

Teorema 4.9 *Se uma solução (periódica) $(\boldsymbol{u}, p)$, de classe C^∞, definida no intervalo de tempo $[0, T)$, do sistema de Navier-Stokes satisfaz*

$$
\mid \boldsymbol{u} \mid_{\infty,T} \; < \; \infty,
$$

então $\boldsymbol{u}$ pode ser estendida a uma solução (periódica) definida no intervalo $0 \leq t \leq T + \Delta T$, onde $\Delta T > 0$.

Bibliografia

[1] Chorin, Alexandre J. and Marsden, Jerrold E. *A Mathematical introduction to Fluid Mechanics*, vol 4 of Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, third edition, 1992.

[2] Constantin, Peter; Foias, Ciprian *Navier-Stokes equations.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1988.

[3] Kreiss, Heinz-Otto and Lorenz, Jens. *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations.* Pure and Applied Mathematics, 136. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1989.

[4] Ladyzhenskaya, O. A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow.* Second English edition, revised and enlarged. Translated from the Russian by Richard A. Silverman and John Chu. Mathematics and its Applications, vol. 2 Gordon and Breach, Science Publishers, New York-London-Paris 1969.

[5] Lions, J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* (French) Dunod; Gauthier-Villars, Paris 1969.

[6] Lions, Pierre-Louis *Mathematical topics in fluid mechanics.* vol. 1. (English summary) Incompressible models. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 3. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996.

[7] R. Temam, *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, vol. 2 of Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, third ed., 1984.

[8] Rudin, Walter *Real and complex analysis.* Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[9] Sohr, Hermann *The Navier-Stokes equations. An elementary functional analytic approach.* Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbcher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks] Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

[10] W. von Wahl, *The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equa- tions*, Aspects of Mathematics, vol. E8, Friedr. Vieweg and Sohn, Braun- schweig, 1985.