

Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Matemática

EXTENSÃO DO TEOREMA DE H. HOPF PARA  
SUPERFÍCIES COM CURVATURA MÉDIA  
CONSTANTE EM  $S^2 \times \mathbb{R}$ .

**ADRIANO REGIS MELO RODRIGUES DA SILVA**

**Sob a orientação da Prof. Maria Luiza Leite**

Recife, 21 de fevereiro de 2006

Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Matemática

EXTENSÃO DO TEOREMA DE H. HOPF PARA  
SUPERFÍCIES COM CURVATURA MÉDIA  
CONSTANTE EM  $S^2 \times \mathbb{R}$ .

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática*

**ADRIANO REGIS MELO RODRIGUES DA SILVA**

**Sob a orientação da Prof. Maria Luiza Leite**

Recife, 21 de fevereiro de 2006

Silva, Adriano Regis Melo Rodrigues da  
Extensão do teorema de H. Hopf para superfícies com curvatura  
média constante em  $S^2 \times R$ . / Adriano Regis Melo Rodrigues da  
Silva.- Recife : O Autor, 2005.  
46 folhas.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco.  
CCEN., Matemática, 2006.

Inclui bibliografia.

1. Teorema de Hopf . 2. Teorema de Abresch-Rosenberg. 3.  
Diferenciais quadráticas. 4. Curvatura média constante. I. Título.

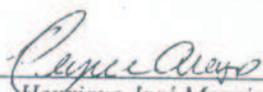
514.7  
516.36

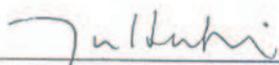
CDU (2.ed.)  
CDD (22.ed.)

UFPE  
BC2006-258

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado:   
\_\_\_\_\_  
Maria Luiza Soares Leite, DMAT-UFPE :  
**Orientador**

  
\_\_\_\_\_  
Henrique José Moraes de Araújo, DMAT-UFPE

  
\_\_\_\_\_  
Jorge Herbert Soares Lira, DM-UFC

**EXTENSÃO DO TEOREMA DE H. HOPF PARA SUJERFÍCIES  
COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM  $S^2 \times R$**

*Por*  
*Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva*

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410  
RECIFE – BRASIL

Fevereiro - 2006

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus por me conceder a vida, em seguida

À professora Maria Luiza pela orientação, paciência e valiosos ensinamentos sobre ética e profissionalismo.

Aos professores Henrique Araújo e Jorge Herbert por participarem da banca e prestarem grandes contribuições na elaboração deste trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Aos meus pais José Nauci e Kátia Cristina e minha avó materna Euridice, pela brilhante educação e por me apoiarem em todos os aspectos da minha vida.

Aos meus irmãos Anderson, Adson e Alessandra pelo amor e carinho.

À minha amada e companheira Alexsandra Karine, que sempre me ajudou e me deu força para conquistar meus objetivos.

A todos do departamento de matemática da UFPE, professores, funcionários e colegas da pós-graduação que de alguma forma contribuíram para a conclusão desta dissertação, em especial aos amigos Darlan Ferreira, Evaneide Alves, Naldisson, Wallisom Rosa, Cláudio Cristino, Éder Mateus, Fábio dos Santos, Dâmocles e Janilson.

A todos os meus professores e colegas de graduação na UFRPE, pela formação e incentivo quando tudo não passava de um sonho.

# Resumo

Há cerca de cinquenta anos, H. Hopf descobriu uma importante ferramenta para a teoria de superfícies com curvatura média constante, peça fundamental para demonstrar o seu teorema de rigidez da esfera redonda no espaço euclidiano.

Recentemente, Uwe Abresch e Harold Rosenberg generalizaram a técnica de Hopf para outros espaços, entre os quais o produto isométrico de uma esfera por uma reta. Estenderam o resultado de rigidez, provando que uma esfera imersa com curvatura média constante nesse espaço deve ser rotacional. Nesta dissertação descrevemos detalhadamente essa extensão .

# Abstract

Fifty years ago, H. Hopf discovered an important tool in the theory of surfaces with constant mean curvature, essential to prove his famous theory on the rigidity of a round sphere in Euclidian space.

Recently, Uwe Abresch and Harold Rosenberg generalized Hopf's technique to other spaces, such as the isometric product of a sphere by a line. The rigidity theory was extended, in the sense that any immersed sphere with constant mean curvature must be rotational. This dissertation describes this extension by Abresch and Rosenberg.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1	Preliminares algébricos . . . . .	12
1.1.1	Complexificação de um espaço vetorial . . . . .	14
1.1.2	Complexificação de uma forma bilinear . . . . .	16
1.2	Preliminares geométricos . . . . .	19
<b>2</b>	<b>O teorema de H. Hopf</b>	<b>23</b>
2.1	Introdução . . . . .	23
2.2	A diferencial de Hopf em parâmetros isotérmicos . . . . .	23
2.3	O teorema de Hopf . . . . .	26
<b>3</b>	<b>A diferencial de Abresch-Rosenberg em <math>\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}</math></b>	<b>29</b>
3.1	A diferencial $Q$ de Abresch-Rosenberg em parâmetros isotérmicos . . . . .	29
3.2	Superfícies em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ com diferencial de Abresch-Rosenberg nula . . . . .	33
<b>4</b>	<b>O teorema de Abresch-Rosenberg</b>	<b>41</b>
4.1	A geometria de uma superfície de revolução em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	41

4.2	O teorema de Abresch-Rosenberg . . . . .	44
	<b>Bibliografia</b>	<b>48</b>

# Introdução

Em 1955, H. Hopf ([9]) descobriu uma diferencial quadrática em superfícies de  $\mathbb{R}^3$  que, aliada ao fato de ser holomorfa quando a curvatura média é constante, tornou-se peça fundamental para demonstrar seu importante teorema de rigidez: que uma esfera imersa em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura média constante é a esfera redonda. Este resultado foi estendido para esferas imersas com curvatura média constante em  $\mathbb{S}^3$  e  $\mathbb{H}^3$ .

Em 2004, Uwe Abresch e Harold Rosenberg ([1]) generalizaram a diferencial de Hopf para superfícies imersas em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , mantendo a propriedade de ser holomorfa quando a curvatura média constante; classificaram as imersões com essa diferencial nula e obtiveram um resultado correspondente ao de Hopf sobre a geometria de esferas imersas com curvatura média constante nestes espaços, que apresentamos a seguir:

**Teorema de Abresch-Rosenberg:** *Toda esfera imersa em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  com curvatura média constante é uma superfície de rotação mergulhada.*

Este trabalho tem por objetivo descrever sistematicamente o teorema acima no caso de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e será baseado essencialmente em [1], [9], [10] e [14]. Usaremos também dois fortes resultados: a existência de parâmetros isotérmicos e o teorema de uniformização para superfícies simplesmente conexas. Introduziremos, no capítulo 1, conceitos preliminares tanto para apresentarmos as diferenciais quadráticas de Hopf e Abresch-Rosenberg, quanto para entendermos a geometria de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ .

Na demonstração do teorema de Hopf, que será tratada no capítulo 2, usaremos uma caracterização da esfera e o fato de que uma diferencial quadrática holomorfa definida numa

---

superfície de Riemann homeomorfa à esfera deve ser identicamente nula, fato este que será também usado na conclusão do teorema de Abresch-Rosenberg.

No capítulo 3 estudaremos as superfícies em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  com diferencial de Abresch-Rosenberg nula, entre as quais as esferas imersas com curvatura média constante. Concluiremos então que estas imersões são superfícies invariantes por rotação em torno de um eixo  $\{C_0\} \times \mathbb{R}$ ,  $C_0 \in \mathbb{S}^2$ .

Finalmente no capítulo 4, obteremos a conclusão deste trabalho, analisando um sistema de equações diferenciais ordinárias associado à uma superfície de revolução com curvatura média constante em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, vamos desenvolver conceitos clássicos de Álgebra Linear e Geometria Riemanniana, que terão um papel fundamental para o entendimento da diferencial  $Q$  de Abresch-Rosenberg e da geometria de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ .

### 1.1 Preliminares algébricos

O objetivo desta seção é facilitar a compreensão pontual da diferencial  $Q$  de Abresch-Rosenberg (definida em [1]).

Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão dois com produto interno. Dada uma forma bilinear simétrica  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , existe um único operador auto-adjunto  $\tilde{B}$  tal que  $B(v, w) = \langle \tilde{B}v, w \rangle$ .

**Exemplo 1.1.1** : a segunda forma fundamental  $A$  num ponto  $P$  de uma superfície  $\mathfrak{M}$  imersa em  $\mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  com normal  $N$ . Dados  $v, w \in T_P M$  temos que  $A(v, w) = \langle -\bar{\nabla}_v N, w \rangle$  é uma forma bilinear simétrica; o operador correspondente  $\tilde{A}(v) = -\bar{\nabla}_v N$  é o operador de forma.

**Exemplo 1.1.2** : a forma bilinear simétrica dada por  $B(v, w) = \langle u_0, v \rangle \langle u_0, w \rangle$ , onde  $u_0$  é um vetor fixo; a projeção  $\tilde{B}(v) = \langle u_0, v \rangle u_0$  é o operador auto-adjunto associado a  $B$ .

Convém lembrar que o traço de um operador é o traço de sua matriz em qualquer base, pois as matrizes  $\tilde{\mathbf{B}}$  e  $\tilde{\mathbf{B}}'$  de um mesmo operador nas bases  $U$  e  $U'$  de  $V$ , respectivamente, estão relacionadas por  $\tilde{\mathbf{B}}' = \mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{P}$ , onde  $\mathbf{P}$  é a matriz de passagem da base  $U'$  para  $U$ . Entretanto o traço da matriz de uma forma bilinear pode mudar com a base, já que suas matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{B}'$  nas referidas bases estão relacionadas por  $\mathbf{B}' = \mathbf{P}'\mathbf{B}\mathbf{P}$ . Sendo assim, define-se o traço de  $B$  ou o traço da forma quadrática associada, como o traço de  $\tilde{B}$ . Em uma base  $\{e_1, e_2\}$  de  $V$ , onde  $\langle e_i, e_j \rangle = \lambda \delta_{ij}$ , as matrizes de  $B$  e  $\tilde{B}$  satisfazem:  $[B] = \lambda[\tilde{B}]$  (por conveniência chamaremos uma tal base de *isotérmica*). Em particular, numa base ortonormal essas matrizes coincidem.

**Definição 1.1.3** (i) Dada uma forma bilinear simétrica  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , define-se a parte de traço nulo de  $B$  por  $B_0 = B - \frac{\text{tr}(B)}{2} \langle \cdot, \cdot \rangle$ .

(ii) Dado um operador linear auto-adjunto  $\tilde{B} : V \rightarrow V$ , define-se a parte de traço nulo de  $\tilde{B}$  por  $\tilde{B}_0 = \tilde{B} - \frac{\text{tr}(\tilde{B})}{2} I$ .

Observe que a notação é consistente, pois  $B_0$  é a forma bilinear associada ao operador  $\tilde{B}_0$ . Além disso,

$$\text{tr}(B_0) := \text{tr}(\tilde{B}_0) = \text{tr}(\tilde{B}) - \frac{\text{tr}(\tilde{B})}{2} \text{tr}(I) = 0,$$

justificando o termo traço nulo.

Fixada uma orientação em  $V$ , denota-se por  $J$  o operador rotação de  $\frac{\pi}{2}$  no sentido positivo.

**Proposição 1.1.4** Sejam  $B$  uma forma bilinear simétrica e  $B_0$  a forma bilinear simétrica de traço nulo associada a  $B$  definida em 1.1.3. Então se verificam as seguintes propriedades:

$$(i) \quad B(u, v) + B(Ju, Jv) = \text{tr}(B) \langle u, v \rangle$$

$$(ii) \quad B_0(u, v) = \frac{1}{2} \{ B(u, v) - B(Ju, Jv) \}$$

$$(iii) \quad B_0(u, Ju) = B(u, Ju)$$

**Prova:** (i) Note que  $L(u, v) := B(u, v) + B(Ju, Jv) = \langle \tilde{B}u, v \rangle + \langle \tilde{B}Ju, Jv \rangle$  é uma forma bilinear simétrica, pois  $\tilde{B}$  é um operador linear auto-adjunto e  $J$  é linear. Portanto, basta mostrar que as formas  $L(u, v)$  e  $\text{tr}(B) \langle u, v \rangle$  coincidem numa base ortonormal.

De fato, se  $\{e_1, e_2\}$  é uma base ortonormal positiva, então

$$Je_1 = e_2 \text{ e } Je_2 = -e_1.$$

Logo,

$$L(e_1, e_1) = B(e_1, e_1) + B(e_2, e_2) = \text{tr}(\tilde{B}) = \text{tr}(B)\langle e_1, e_1 \rangle$$

$$L(e_2, e_2) = B(e_2, e_2) + B(-e_1, -e_1) = B(e_2, e_2) + B(e_1, e_1) = \text{tr}(B)\langle e_2, e_2 \rangle$$

$$L(e_1, e_2) = B(e_1, e_2) + B(e_2, -e_1) = 0 = \langle e_1, e_2 \rangle$$

Portanto fica provado (i).

(ii) Por definição,  $B_0(u, v) = B(u, v) - \frac{\text{tr}(B)}{2}\langle u, v \rangle$ . Pelo item (i), obtém-se:

$$B_0(u, v) = B(u, v) - \frac{1}{2}\{B(u, v) + B(Ju, Jv)\}, \text{ logo}$$

$$B_0(u, v) = \frac{1}{2}\{B(u, v) - B(Ju, Jv)\} \text{ e obtemos o resultado (ii).}$$

(iii) É uma conseqüência imediata do item anterior, uma vez que  $J^2 = -I$ .

Este resultado também pode ser obtido apenas pela definição :

$$B_0(u, Ju) = B(u, Ju) - \frac{\text{tr}(B)}{2}\langle u, Ju \rangle = B(u, Ju), \text{ pois } \langle u, Ju \rangle = 0. \quad \square$$

### 1.1.1 Complexificação de um espaço vetorial

Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão dois munido com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , como no início deste capítulo. Seja  $\{e_1, e_2\}$  uma base isotérmica de  $V$  e  $\{\mu_1, \mu_2\}$  sua base dual.

A complexificação de  $V$ , que denotaremos por  $V^{\mathbb{C}}$ , é um espaço vetorial complexo de dimensão dois, definido por:

$$V^{\mathbb{C}} = \{w = u + iv; u, v \in V\}.$$

Defina  $e = \frac{1}{2}(e_1 - ie_2)$  e  $\bar{e} = \frac{1}{2}(e_1 + ie_2)$ . É fácil ver que  $\{e, \bar{e}\}$  é uma base de  $V^{\mathbb{C}}$ . Além disso, afirmamos que

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2 \text{ e } \bar{\mu} = \mu_1 - i\mu_2, \quad (1.1)$$

formam a base dual de  $\{e, \bar{e}\}$  em  $(V^{\mathbb{C}})^*$ .

De fato,

$$\mu(e) = \frac{1}{2}(\mu_1 + i\mu_2)(e_1 - ie_2) = \frac{1}{2}[\mu_1(e_1) + \mu_2(e_2) + i\mu_2(e_1) - i\mu_1(e_2)] = 1.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \mu(\bar{e}) &= \frac{1}{2}[\mu_1(e_1) - \mu_2(e_2) + i\mu_2(e_1) + i\mu_1(e_2)] = 0; \\ \bar{\mu}(e) &= \frac{1}{2}[\mu_1(e_1) - \mu_2(e_2) - i\mu_2(e_1) - i\mu_1(e_2)] = 0; \\ \bar{\mu}(\bar{e}) &= \frac{1}{2}[\mu_1(e_1) + \mu_2(e_2) - i\mu_2(e_1) + i\mu_1(e_2)] = 1. \end{aligned}$$

□

Estendemos o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a  $V^{\mathbb{C}}$ , como uma forma bilinear complexa (não hermitiana) do seguinte modo

$$\langle u_1 + iv_1, u_2 + iv_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle - \langle v_1, v_2 \rangle + i\{\langle v_1, u_2 \rangle + \langle u_1, v_2 \rangle\}.$$

**Observação 1.1.5** *Note que*

$$\langle e, \bar{e} \rangle = \frac{\lambda^2}{2}; \quad \langle e, e \rangle = \langle \bar{e}, \bar{e} \rangle = 0,$$

onde  $\|e_1\| = \|e_2\| = \lambda$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle e, \bar{e} \rangle &= \frac{1}{4}\langle e_1 - ie_2, e_1 + ie_2 \rangle = \frac{1}{4}\{\langle e_1, e_1 \rangle + \langle e_2, e_2 \rangle + i\langle e_1, e_2 \rangle - i\langle e_2, e_1 \rangle\} = \frac{\lambda^2}{2}, \\ \langle e, e \rangle &= \frac{1}{4}\langle e_1 - ie_2, e_1 - ie_2 \rangle = \frac{1}{4}\{\langle e_1, e_1 \rangle - i\langle e_1, e_2 \rangle - i\langle e_2, e_1 \rangle - \langle e_2, e_2 \rangle\} = 0 = \langle \bar{e}, \bar{e} \rangle \end{aligned}$$

**Exemplo 1.1.6** *Em cada ponto  $P \in \mathfrak{M} \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , temos uma base isotérmica  $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$  de  $T_P\mathfrak{M}$  com base dual  $\{dx, dy\}$  (veremos com mais detalhes a existência de uma tal base, no próximo capítulo). Assim,  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\}$  e  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\}$  formam uma base de  $(T_P\mathfrak{M})^{\mathbb{C}}$  com base dual dada por  $dz = dx + idy$  e  $d\bar{z} = dx - idy$ .*

### 1.1.2 Complexificação de uma forma bilinear

Seja  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear simétrica. A *complexificação de  $B$* , denotada por  $B^{\mathbb{C}}$ , é uma forma bilinear complexa, obtida pela extensão de  $B$  a  $V^{\mathbb{C}}$ .

A seguir, obteremos uma expressão para  $B^{\mathbb{C}}$ . Suponha que

$$B = a\mu_1 \otimes \mu_1 + b(\mu_1 \otimes \mu_2 + \mu_2 \otimes \mu_1) + c\mu_2 \otimes \mu_2,$$

onde  $a = B(e_1, e_1)$ ,  $b = B(e_1, e_2) = B(e_2, e_1)$  e  $c = B(e_2, e_2)$ .

(Lembramos que o produto tensorial satisfaz:  $\mu \otimes \nu(u, v) = \mu(u)\nu(v)$ , ver [16]).

Por (1.1),  $\mu_1 = \frac{1}{2}(\mu + \bar{\mu})$  e  $\mu_2 = \frac{-i}{2}(\mu - \bar{\mu})$ , logo

$$\begin{aligned} a\mu_1 \otimes \mu_1 &= \frac{a}{4}(\mu \otimes \mu + \mu \otimes \bar{\mu} + \bar{\mu} \otimes \mu + \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}); \\ b\mu_1 \otimes \mu_2 &= \frac{-ib}{4}(\mu \otimes \mu - \mu \otimes \bar{\mu} + \bar{\mu} \otimes \mu - \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}); \\ b\mu_2 \otimes \mu_1 &= \frac{-ib}{4}(\mu \otimes \mu + \mu \otimes \bar{\mu} - \bar{\mu} \otimes \mu - \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}); \\ c\mu_2 \otimes \mu_2 &= \frac{-1}{4}(\mu \otimes \mu - \mu \otimes \bar{\mu} - \bar{\mu} \otimes \mu + \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}). \end{aligned}$$

Somando as equações acima, obtemos a partir de  $B$

$$B^{\mathbb{C}} = \frac{1}{4}\{(a - c - 2ib)\mu \otimes \mu + (a + c)(\mu \otimes \bar{\mu} + \bar{\mu} \otimes \mu) + (a - c + 2ib)\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}\}. \quad (1.2)$$

Um simples cálculo mostra que os coeficientes das partes  $(2,0)$ ,  $(1,1)$  e  $(0,2)$  de  $B^{\mathbb{C}}$  (que correspondem a  $\mu \otimes \mu$ ,  $(\mu \otimes \bar{\mu} + \bar{\mu} \otimes \mu)$  e  $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}$ ) são iguais a  $B(e, e)$ ,  $B(e, \bar{e})$  e  $B(\bar{e}, \bar{e})$ , respectivamente.

Fazendo

$$\beta = 2B(e, e) = \frac{a-c}{2} - ib, \quad \text{tr}(B) = a + c, \quad \mu^2 = \mu \otimes \mu \quad \text{e} \quad \bar{\mu}^2 = \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}, \quad (1.3)$$

resulta de (1.2) que

$$B^{\mathbb{C}} = \frac{1}{2}\{\beta\mu^2 + \text{tr}(B)(\mu \otimes \bar{\mu} + \bar{\mu} \otimes \mu) + \bar{\beta}\bar{\mu}^2\}. \quad (1.4)$$

Observe que a parte  $(1,1)$  de  $B_0^{\mathbb{C}}$  é nula, pois  $\text{tr}(B_0) = 0$ . Além disso, a parte  $(2,0)$  e  $(0,2)$  das complexificações  $B_0^{\mathbb{C}}$  e  $B^{\mathbb{C}}$  coincidem. Em outras palavras

$$B_0^{\mathbb{C}} = \frac{1}{2}(\beta\mu^2 + \bar{\beta}\bar{\mu}^2).$$

De fato, se a matriz de  $B$  numa base isotérmica  $\{e_1, e_2\}$  é  $[B] = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ , resulta de  $\langle e_i, e_j \rangle = \lambda\delta_{ij}$  e dos itens (ii) e (iii) da Proposição 1.1.4 que

$$[B_0] = \begin{pmatrix} \frac{a-c}{2} & b \\ b & \frac{c-a}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Usando (1.2), obtemos

$$\begin{aligned} B_0^{\mathbb{C}} &= \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{a-c}{2} - \frac{c-a}{2} - 2ib \right) \mu \otimes \mu + \left( \frac{a-c}{2} - \frac{c-a}{2} + 2ib \right) \bar{\mu} \otimes \bar{\mu} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{a-c}{2} - ib \right) \mu \otimes \mu + \left( \frac{a-c}{2} + ib \right) \bar{\mu} \otimes \bar{\mu} \right\}. \end{aligned}$$

□

Na proposição a seguir, usaremos as notações de 1.1.1 e (1.3).

**Proposição 1.1.7** *Dada uma forma bilinear simétrica  $B$ , seja  $\mathcal{B} = \beta\mu^2$  a parte  $(2,0)$  de  $2B^{\mathbb{C}}$  (veja (1.4)).*

(i) *Se a matriz de  $B$  numa base isotérmica  $\{e_1, e_2\}$ , é  $[B] = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ , então  $\mathcal{B}$  admite a expressão*

$$\mathcal{B} = 2B(e, e)\mu^2 = \left( \frac{a-c}{2} - ib \right) \mu^2.$$

(ii) *A complexificação  $\mathcal{B}$  pode ser definida em  $V$  da seguinte maneira:*

$$\mathcal{B}(u, v) = B_0(u, v) - iB_0(Ju, v),$$

com  $u, v \in V$ .

**Prova:** (i) É imediato do que vimos para obter (1.4).

(ii) Supondo a expressão dada como definição, mostraremos que ela coincide com a anterior.

Observe que  $Re(\mathcal{B}) = B_0$  é uma forma bilinear simétrica. Para mostrar que  $Im(\mathcal{B})$  é simétrica usamos 1.1.4 (ii) e  $J^2 = -I$ . Assim,

$Im(\mathcal{B})(u, v) = B_0(Ju, v) = \frac{1}{2}\{B(Ju, v) - B(J^2u, Jv)\} = \frac{1}{2}\{B(v, Ju) + B(u, Jv)\}$ , obviamente simétrica em relação aos vetores  $u, v$ .

Decorre da linearidade de  $J$  que  $\mathcal{B}$  é uma forma bilinear simétrica.

Por (1.5) temos

$$[B_0] = \begin{pmatrix} \frac{a-c}{2} & b \\ b & \frac{c-a}{2} \end{pmatrix}.$$

Seja  $\{\mu_1, \mu_2\}$  a base dual de  $\{e_1, e_2\}$ . Então a parte real de  $\mathcal{B}$  fica

$$Re(\mathcal{B}) = B_0 = \left(\frac{a-c}{2}\right)\mu_1 \otimes \mu_1 + b(\mu_1 \otimes \mu_2 + \mu_2 \otimes \mu_1) + \left(\frac{c-a}{2}\right)\mu_2 \otimes \mu_2.$$

Para a parte imaginária de  $\mathcal{B}$ , note que

$$[B_0][J] = \begin{pmatrix} \frac{a-c}{2} & b \\ b & \frac{c-a}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & \frac{c-a}{2} \\ \frac{c-a}{2} & -b \end{pmatrix}. \text{ Logo,}$$

$$-Im(\mathcal{B}) = b\mu_1 \otimes \mu_1 + \frac{c-a}{2}(\mu_1 \otimes \mu_2 + \mu_2 \otimes \mu_1) - b\mu_2 \otimes \mu_2.$$

Note que

$$\mu^2 = \mu \otimes \mu = (\mu_1 + i\mu_2) \otimes (\mu_1 + i\mu_2) = \mu_1 \otimes \mu_1 + i\{\mu_1 \otimes \mu_2 + \mu_2 \otimes \mu_1\} - \mu_2 \otimes \mu_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} Re(\mathcal{B}) + iIm(\mathcal{B}) &= \left(\frac{a-c}{2}\right)\mu_1 \otimes \mu_1 + b(\mu_1 \otimes \mu_2 + \mu_2 \otimes \mu_1) + \left(\frac{c-a}{2}\right)\mu_2 \otimes \mu_2 + \\ &-i\{b\mu_1 \otimes \mu_1 + \frac{c-a}{2}(\mu_1 \otimes \mu_2 + \mu_2 \otimes \mu_1) - b\mu_2 \otimes \mu_2\} = \end{aligned}$$

$$\left(\frac{a-c}{2} - ib\right)\mu_1 \otimes \mu_1 + i\left(\frac{a-c}{2} - ib\right)(\mu_1 \otimes \mu_2 + \mu_2 \otimes \mu_1) - \left(\frac{a-c}{2} - ib\right)\mu_2 \otimes \mu_2 \Rightarrow$$

$$\mathcal{B} = \left(\frac{a-c}{2} - ib\right)\mu^2$$

□

**Exemplo 1.1.8** : a diferencial de Hopf  $\mathcal{A}$  num ponto, que é a complexificação obtida da proposição 1.1.7, associada a forma bilinear  $A$  dada no exemplo 1.1.1. Suponha que a matriz de  $A$  numa base isotérmica  $\{F_x, F_y\}$  seja  $[A] = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$ . Utilizando a notação complexa  $dz = dx + idy$ , onde  $\{dx, dy\}$  é a base dual de  $\{F_x, F_y\}$  obtemos, pela proposição 1.1.7 (i), a diferencial de Hopf expressa localmente por:

$$\mathcal{A} = \left(\frac{l-n}{2} - im\right)dz \otimes dz = \alpha dz^2$$

**Exemplo 1.1.9** : denotemos por  $\mathcal{T} = \tau dz^2$  a complexificação da proposição 1.1.7, associada a forma dada no exemplo 1.1.2, onde em cada ponto  $P \in \mathfrak{M} \looparrowright \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , o vetor  $u_0 = T$  é a projeção ortogonal de  $e_4 = (0, 0, 0, 1)$  sobre  $T_P\mathfrak{M}$ .

**Definição 1.1.10** A diferencial de Abresch-Rosenberg  $Q$  num ponto  $P \in \mathfrak{M} \looparrowright \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , é definida em termos dos exemplos 1.1.8 e 1.1.9, por:

$$Q = 2H\mathcal{A} - \mathcal{T} = (2H\alpha - \tau)dz^2$$

onde  $H$  é a curvatura média de  $\mathfrak{M}$ .

## 1.2 Preliminares geométricos

Dadas uma variedade riemanniana  $\bar{M}^{n+1}$  e uma hipersuperfície orientada imersa  $M^n \looparrowright \bar{M}^{n+1}$  com a métrica induzida, sejam  $\nabla$  e  $\bar{\nabla}$  as conexões riemannianas em  $M^n$  e  $\bar{M}^{n+1}$ , respectivamente. Sejam  $R$  e  $\bar{R}$  os respectivos tensores de Riemann, e  $N$  o campo normal da imersão (ver [6]).

**Proposição 1.2.1** *Seja  $\tilde{A}(v) = -\bar{\nabla}_v N$  o operador de forma da imersão  $M^n \hookrightarrow \bar{M}^{n+1}$ . Então se verifica, para campos  $X, Y, Z$  e  $W$  de  $M^n$ :*

$$\tilde{R}(X, Y)Z \cdot W = R(X, Y)Z \cdot W - \{(\tilde{A}X \cdot Z)(\tilde{A}Y \cdot W) - (\tilde{A}X \cdot W)(\tilde{A}Y \cdot Z)\}$$

(Equação de Gauss)

**Prova:** Por definição, temos que

$$R(X, Y)Z := \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_X(\nabla_Y Z) + \nabla_{[X, Y]}Z,$$

$$\bar{\nabla}_X Z = \nabla_X Z + (\bar{\nabla}_X Z \cdot N)N.$$

Segue-se de  $\bar{\nabla}_X Z \cdot N = -Z \cdot \bar{\nabla}_X N$  e  $\tilde{A}X = -\bar{\nabla}_X N$  que

$$\bar{\nabla}_X Z = \nabla_X Z + (\tilde{A}X \cdot Z)N, \quad (1.6)$$

logo  $\bar{\nabla}_Y(\bar{\nabla}_X Z) = \bar{\nabla}_Y(\nabla_X Z) + \bar{\nabla}_Y[(\tilde{A}X \cdot Z)N]$ . Usando mais uma vez (1.6),

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_Y(\bar{\nabla}_X Z) &= \nabla_Y(\nabla_X Z) + (\tilde{A}Y \cdot \nabla_X Z)N + Y[\tilde{A}X \cdot Z]N + (\tilde{A}X \cdot Z) \cdot \bar{\nabla}_Y N = \\ &= \nabla_Y(\nabla_X Z) + (\tilde{A}Y \cdot \nabla_X Z)N + \{(\bar{\nabla}_Y(\tilde{A}X) \cdot Z) + (\tilde{A}X \cdot \bar{\nabla}_Y Z)\}N - (\tilde{A}X \cdot Z)\tilde{A}Y = \\ &= \nabla_Y(\nabla_X Z) - (\tilde{A}X \cdot Z)\tilde{A}Y + \{(\tilde{A}Y \cdot \nabla_X Z) + (\bar{\nabla}_Y(\tilde{A}X) \cdot Z) + (\tilde{A}X \cdot \bar{\nabla}_Y Z)\}N \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}_Y Z) = \nabla_X(\nabla_Y Z) - (\tilde{A}Y \cdot Z)\tilde{A}X + \{(\tilde{A}X \cdot \nabla_Y Z) + (\bar{\nabla}_X(\tilde{A}Y) \cdot Z) + (\tilde{A}Y \cdot \bar{\nabla}_X Z)\}N$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &:= \bar{\nabla}_Y(\bar{\nabla}_X Z) - \bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}_Y Z) + \bar{\nabla}_{[X, Y]}Z = \\ &= \nabla_Y(\nabla_X Z) - (\tilde{A}X \cdot Z)\tilde{A}Y + \{(\tilde{A}Y \cdot \nabla_X Z) + (\bar{\nabla}_Y(\tilde{A}X) \cdot Z) + (\tilde{A}X \cdot \bar{\nabla}_Y Z)\}N - \\ &\quad - \nabla_X(\nabla_Y Z) + (\tilde{A}Y \cdot Z)\tilde{A}X - \{(\tilde{A}X \cdot \nabla_Y Z) + (\bar{\nabla}_X(\tilde{A}Y) \cdot Z) + (\tilde{A}Y \cdot \bar{\nabla}_X Z)\}N - \\ &\quad \nabla_{[X, Y]}Z + (\tilde{A}[X, Y] \cdot Z)N = \end{aligned}$$

$$R(X, Y)Z - (\tilde{A}X \cdot Z)\tilde{A}Y + (\tilde{A}Y \cdot Z)\tilde{A}X + \{\tilde{A}X \cdot (\bar{\nabla}_Y Z - \nabla_Y Z) + \tilde{A}X \cdot (\nabla_X Z - \bar{\nabla}_X Z) + (\nabla_Y(\tilde{A}X) \cdot Z) - (\nabla_X(\tilde{A}Y) \cdot Z) + (\tilde{A}[X, Y] \cdot Z)\}N.$$

Tomando o produto interno com o vetor tangente  $W$  obtemos:

$$\bar{R}(X, Y)Z \cdot W = R(X, Y)Z \cdot W - (\tilde{A}X \cdot Z)(\tilde{A}Y \cdot W) + (\tilde{A}X \cdot W)(\tilde{A}Y \cdot Z) \quad \square$$

Considere uma superfície imersa  $\mathfrak{M} \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4$ . Denotaremos por  $\nabla$ ,  $\bar{\nabla}$  e  $\overline{\nabla}$  as respectivas conexões riemannianas em  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^4$ , assim como  $R$ ,  $\bar{R}$  e  $\bar{\bar{R}}$  os respectivos tensores de Riemann.

**Corolário 1.2.2** ([14]) *A equação de Gauss torna-se*

$$\bar{R}(X, Y)Z \cdot N = -(e_4 \cdot N)\{(X \cdot Z)(Y \cdot T) - (X \cdot T)(Y \cdot Z)\}$$

onde, relativamente a  $\mathfrak{M}$ , os campos  $X, Y$  e  $Z$  são tangentes,  $N$  é normal e  $T = e_4 - (e_4 \cdot N)N$  é a componente tangente de  $e_4$ .

(Equação de Codazzi da imersão  $\mathfrak{M} \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ .)

**Prova:** Sejam  $\bar{N}$  o campo normal de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^4$  e  $\tilde{A}(v) = \overline{\nabla}_v \bar{N}$  o respectivo operador de forma. Como  $\bar{\bar{R}} \equiv 0$ , segue-se da equação de Gauss para  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4$  que

$$\bar{R}(X, Y)Z \cdot W = (\tilde{A}X \cdot Z)(\tilde{A}Y \cdot W) - (\tilde{A}X \cdot W)(\tilde{A}Y \cdot Z),$$

para  $X, Y, Z$  e  $W$  campos suaves de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ .

Se  $P = (p, p_4) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , então o campo normal  $\bar{N}$  de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  é dado por  $\bar{N}(p, p_4) = (-p, 0)$ . Um vetor  $V \in T_P(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$  decompõe-se na forma  $V = (V_1, V_4)$ , com  $V_1 \in T_p \mathbb{S}^2$  e  $V_4 \in \mathbb{R}$ . Temos que

$$\tilde{A}V = -\overline{\nabla}_V \bar{N} = (V_1, 0).$$

Sendo assim,

$$\bar{R}(X, Y)Z \cdot W = (X_1 \cdot Z_1)(Y_1 \cdot W_1) - (X_1 \cdot W_1)(Y_1 \cdot Z_1). \quad (1.7)$$

(Observe que usamos  $(\cdot)$  para denotar o produto interno tanto de  $\mathbb{R}^3$  quanto de  $\mathbb{R}^4$ )

Sejam  $X, Y$  e  $Z$  campos suaves de  $\mathfrak{M}$ . Como  $T_P\mathfrak{M} \subset T_P(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$  e  $N(P) \in T_P(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$ , pela equação (1.7) temos:

$$\bar{R}(X, Y)Z \cdot N = (X_1 \cdot Z_1)(Y_1 \cdot N_1) - (X_1 \cdot N_1)(Y_1 \cdot Z_1) =$$

$$(X \cdot Z - X_4 Z_4)(Y \cdot N - Y_4 N_4) - (X \cdot N - X_4 N_4)(Y \cdot Z - Y_4 Z_4) =$$

$$-N_4\{(X \cdot Z)Y_4 - X_4 Y_4 Z_4 - X_4(Y \cdot Z) + X_4 Y_4 Z_4\} =$$

$$-(e_4 \cdot N)\{(X \cdot Z)(Y \cdot e_4) - (X \cdot e_4)(Y \cdot Z)\} =$$

$$-(e_4 \cdot N)\{(X \cdot Z)(Y \cdot T) - (X \cdot T)(Y \cdot Z)\}.$$

□

# Capítulo 2

## O teorema de H. Hopf

### 2.1 Introdução

Neste capítulo, introduziremos algumas ferramentas para provar o teorema de H. Hopf [9], que serão constantemente usadas neste trabalho, sobretudo no capítulo 3.

O teorema de H. Hopf afirma que uma esfera imersa em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura média  $H$  constante é a esfera redonda. A demonstração que faremos consiste em mostrar que todos os pontos da imersão são umbílicos, já que a esfera é a única superfície compacta com esta propriedade. De fato mostraremos que tal esfera é mergulhada. Para isto, usaremos a existência de parâmetros isotérmicos (ver [15], [7]).

### 2.2 A diferencial de Hopf em parâmetros isotérmicos

Nesta seção, assim como no capítulo 3, estudaremos a geometria de uma superfície orientada  $\mathfrak{M}$  imersa em  $\mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  com a métrica induzida, usando uma linguagem complexa. Desta forma, é necessário introduzirmos alguns conceitos.

Uma aplicação  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{M}$  é uma aplicação *conforme*, se para todo  $z = x + iy \in \mathcal{U}$ ,

$Df(z) : \mathbb{C} \rightarrow T_{f(z)}\mathfrak{M}$  é um isomorfismo que preserva ângulos, equivalentemente, existe uma função positiva  $\lambda$  definida em  $\mathcal{U}$ , tal que

$$\langle Df(z)w, Df(z)v \rangle_{\mathfrak{M}} = \lambda \langle w, v \rangle,$$

para todo  $w, v \in \mathbb{C}$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{M}}$  é a métrica induzida.

Um sistema de coordenadas em  $\mathfrak{M}$  que satisfaz essa condição é chamados *sistema de coordenadas isotérmicas*, cujos coeficientes da primeira forma fundamental satisfaz

$$E = G > 0, \quad F = 0.$$

A existência de um tal sistema de coordenadas (parâmetros isotérmicos), provada primeiro por Gauss em 1822, nos diz que toda variedade riemanniana de dimensão dois é localmente conformemente equivalente ao plano, isto é, em torno de cada ponto  $p \in \mathfrak{M}$  existe um sistema de coordenadas isotérmicas (ver [7] ou [15]). Neste caso, um fato bem conhecido é que as mudanças de coordenadas que preservam a orientação são funções holomorfas. Sendo assim, podemos admitir que  $\mathfrak{M}$  é uma superfície de Riemann, ou seja,  $\mathfrak{M}$  possui uma estrutura complexa dada por um atlas compatível com sua orientação, onde as mudanças de coordenadas são bi-holomorfas.

Portanto, podemos supor que  $F : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  (ou  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ) é uma imersão conforme de uma superfície de Riemann, isto é, em coordenadas locais  $z = x + iy$ ,

$$\|F_x\|^2 = \|F_y\|^2 = E > 0, \quad F_x \cdot F_y = 0.$$

A métrica induzida é  $ds^2 = E|dz|^2$  e o campo normal orientado é  $N = (F_x \times F_y)/E$ . A segunda forma fundamental é dada por  $ldx^2 + 2mdxdy + ndy^2$ , onde  $l = F_{xx} \cdot N$ ,  $m = F_{xy} \cdot N$  e  $n = F_{yy} \cdot N$ . As curvaturas média  $H$  e Gaussiana  $K$ , são dadas por

$$H = \frac{l+n}{2E} \quad e \quad K = \frac{ln - m^2}{E^2}.$$

**Lema 2.2.1** *Uma função complexa diferenciável  $\varphi = U + iV$  é holomorfa se, e somente se,  $\varphi_{\bar{z}} = 0$ .*

**Prova:**

$$\varphi_{\bar{z}} = U_{\bar{z}} + iV_{\bar{z}} \Rightarrow 2\varphi_{\bar{z}} = (U_x + iU_y) + i(V_x + iV_y) = (U_x - V_y) + i(U_y + V_x).$$

A conclusão segue das equações de Cauchy-Riemann (ver [2]).  $\square$

É importante recordar o exemplo 1.1.8, onde está definida a diferencial de Hopf.

Pela seção 1.1.1,  $F_z = \frac{1}{2}(F_x - iF_y)$  e  $F_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(F_x + iF_y)$  formam uma base de  $T_P\mathfrak{M}^{\mathbb{C}}$  em cada ponto.

**Proposição 2.2.2** *Em termos da coordenada complexa  $z$ , a imersão satisfaz:*

$$(i) F_{zz} = \left(\frac{E_z}{E}\right)F_z + \frac{\alpha}{2}N$$

$$(ii) F_{z\bar{z}} = \left(\frac{EH}{2}\right)N$$

$$(iii) \text{Equação de Codazzi: } \alpha_{\bar{z}} = EH_z$$

(iv) *Se  $H$  é constante, então a diferencial de Hopf  $\mathcal{A}$ , localmente expressa por,  $\mathcal{A} = \alpha dz^2$  é holomorfa e definida globalmente em  $\mathfrak{M}$ ; além disso os zeros de  $\mathcal{A}$  são os pontos umbilícos da imersão .*

**Prova:** Esta proposição e sua demonstração podem ser vistas em [4]. Entretanto, uma demonstração para os três primeiros itens será obtida como consequência da demonstração da proposição 3.1.1 no próximo capítulo.

(iv): Se  $H$  é constante,  $H_z = 0$  e pela equação de Codazzi,  $\alpha_{\bar{z}} = 0$ . Portanto, pelo lema 2.2.1,  $\alpha$  é holomorfa.

Pelo que vimos nos preliminares algébricos,  $\mathcal{A}$  está globalmente definida. Entretanto, podemos ilustrar essa propriedade observando que, dada uma mudança de coordenadas  $z \mapsto w$ , com  $\mathcal{A} = \psi(w)dw^2$  localmente, resulta de (i) que

$$\psi(w) = 2(F(z(w)))_{ww} \cdot N = 2\left(\frac{dz}{dw}F_z\right)_w \cdot N =$$

$$2\left[\frac{d^2z}{dw^2}F_z + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2F_{zz}\right] \cdot N = 2(F_{zz} \cdot N)\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 = \alpha(z)\left(\frac{dz}{dw}\right)^2.$$

Assim,

$$\mathcal{A} = \Psi(w)dw^2 = \alpha(z)\left(\frac{dz}{dw}\right)^2dw^2 = \alpha(z)dz^2$$

é uma diferencial quadrática holomorfa definida globalmente em  $\mathfrak{M}$ .

Além disso,

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 &= \frac{(l-n)^2}{4} + m^2 = \frac{(l+n)^2}{4} + m^2 - ln = E^2H^2 - E^2K = \\ &= E^2\left(\frac{k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2}{4} - k_1k_2\right) = E^2\frac{(k_1 - k_2)^2}{4}, \end{aligned}$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são as curvaturas principais.

Portanto os zeros de  $\mathcal{A}$  ocorrem nos pontos onde  $k_1 = k_2$ , isto é, nos pontos umbílicos.

□

## 2.3 O teorema de Hopf

**Teorema 2.3.1** (Hopf, [9]) *Se  $\mathfrak{M}$  é uma superfície homeomorfa à esfera imersa em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura média constante, então  $\mathfrak{M}$  é uma esfera redonda.*

Para demonstrarmos esse teorema, necessitamos de alguns resultados.

**Teorema 2.3.2** *Se  $\mathfrak{M}$  é uma superfície de Riemann homeomorfa à esfera, então toda diferencial quadrática holomorfa, globalmente definida em  $M$ , é nula.*

**Prova:** Sabemos, pelo teorema de uniformização para superfícies simplesmente conexas (ver [3] p. 142 ou [8], p. 194) que existe somente um tipo conforme de superfície de Riemann compacta homeomorfa à esfera  $\mathbb{S}^2$ . Portanto podemos supor que nossa superfície é a esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , cuja topologia consiste dos abertos usuais juntamente com os conjuntos da forma  $V \cup \{\infty\}$ , onde  $V$  é o complemento de um compacto  $K \subset \mathbb{C}$ .

Temos uma estrutura complexa em  $\widehat{\mathbb{C}}$ , dada por um atlas formado por dois sistemas de coordenadas: um é a identidade  $\varphi_1 : \widehat{\mathbb{C}} - \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$ , que cobre toda a esfera exceto  $z = \infty$ ; o outro  $\varphi_2 : \widehat{\mathbb{C}} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ , cobrindo toda a esfera exceto  $z = 0$ , é dado por

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} z^{-1}, & \text{se } z \neq \infty \\ 0, & \text{se } z = \infty \end{cases}$$

Uma diferencial quadrática  $C$  admite expressões locais holomorfas nesses sistemas, a saber,

$$\gamma(z)dz^2, \quad z \in \varphi_1(\widehat{\mathbb{C}} - \{\infty\}) = \mathbb{C}, \quad \beta(w)dw^2, \quad w \in \varphi_2(\widehat{\mathbb{C}} - \{0\}) = \mathbb{C}.$$

Na interseção  $\mathbb{C} - \{0\}$  das vizinhanças de coordenadas, temos a mudança  $w = z^{-1}$ , e conseqüentemente,

$$\gamma(z) = \beta(w) \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 = \beta(w)z^{-4} = \beta(w)w^4.$$

Ora,  $\gamma$  e  $\beta$  são funções inteiras e

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \gamma(z) = \lim_{w \rightarrow 0} \beta(w) \cdot w^4 = \beta(0) \cdot 0 = 0.$$

Pelo teorema de Liouville, resulta que  $C \equiv 0$ . □

**Corolário 2.3.3** *Seja  $\mathfrak{M}$  uma superfície de Riemann homeomorfa à esfera imersa em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura média constante. Então  $\mathfrak{M}$  está contida numa esfera redonda.*

**Prova:** Resulta da proposição 2.2.2 (iv), que a diferencial  $\mathcal{A}$  de Hopf é holomorfa e definida globalmente em  $\mathfrak{M}$ . Pelo teorema anterior,  $\mathcal{A}$  é identicamente nula. Como os zeros de  $\mathcal{A}$  são os pontos umbílicos da imersão (2.2.2), segue-se que  $\mathfrak{M}$  é totalmente umbílica. Sabendo que a curvatura média  $H$  é constante e pelo fato de  $\mathfrak{M}$  ser compacta, resulta que  $H \neq 0$ . Sendo  $\mathfrak{M}$  conexa, está contida numa esfera  $\mathbb{S}_r^2$  de raio  $r = \frac{1}{|H|}$ . □

**Prova:** (do teorema de Hopf)

Pelo corolário 2.3.3, a imagem de  $\mathfrak{M}$  pela imersão  $F$  (do início deste capítulo) está contida numa esfera  $\mathbb{S}_r^2$ . Portanto, podemos considerar que  $F : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{S}_r^2$  é uma imersão entre superfícies de mesma dimensão, logo um difeomorfismo local. Como  $\mathfrak{M}$  é compacta e  $\mathbb{S}_r^2$  é conexa,

---

obtemos que  $F$  é sobrejetiva e, além disso, uma aplicação de recobrimento. Do fato de  $\mathbb{S}_r^2$  ser simplesmente conexa, concluímos que  $F$  é injetiva (ver, por exemplo [11], pg 136). Sendo assim,  $F$  é um difeomorfismo global e fica provado o teorema de Hopf.  $\square$

# Capítulo 3

## A diferencial de Abresch-Rosenberg em

$$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$$

Neste capítulo, provaremos que a diferencial  $Q$  de Abresch-Rosenberg é holomorfa e em seguida estudaremos a geometria de uma superfície imersa  $\mathfrak{M} \looparrowright \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  com  $Q = 0$ , provando que é rotacional. A técnica usada neste capítulo difere daquela de [1] e segue [10].

### 3.1 A diferencial $Q$ de Abresch-Rosenberg em parâmetros isotérmicos

Seja  $F : \mathfrak{M} \looparrowright \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4$  uma imersão conforme de uma superfície de Riemann, ou seja, em relação à coordenada complexa  $z = x + iy$ ,

$$\|F_x\|^2 = \|F_y\|^2 = E > 0, F_x \cdot F_y = 0.$$

Seja  $N$  o campo normal unitário de  $\mathfrak{M}$  compatível com sua orientação. O operador de forma é  $\tilde{A}(v) = -\bar{\nabla}_v N$  e a segunda forma fundamental é dada por  $ldx^2 + 2mdxdy + ndy^2$ , onde  $l = \bar{\nabla}_{F_x} F_x \cdot N$ ,  $m = \bar{\nabla}_{F_y} F_x \cdot N$  e  $n = \bar{\nabla}_{F_y} F_y \cdot N$ .

Estendemos a conexão  $\bar{\nabla}$  a campos complexos (ver 1.1.1) de maneira linear. Verifica-se facilmente a equação de compatibilidade de  $\bar{\nabla}$  com a extensão bilinear do produto interno. Lembramos que a atuação de  $F_z = \frac{1}{2}(F_x - iF_y)$  e  $F_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(F_x + iF_y)$  como derivação sobre funções é exatamente a dos operadores  $\frac{\partial}{\partial z}$  e  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ .

**Proposição 3.1.1** *Em termos da coordenada complexa  $z$ , a imersão satisfaz:*

(i)  $\bar{\nabla}_{F_z} F_z = \left(\frac{E_z}{E}\right)F_z + \frac{\alpha}{2}N$ , onde  $\alpha$  é o coeficiente local da diferencial  $\mathcal{A}$  de Hopf definida em 1.1.8.

(ii)  $\bar{\nabla}_{F_{\bar{z}}} F_z = \frac{EH}{2}N$

(iii) *Equação de Codazzi:*  $2H\alpha_{\bar{z}} - \tau_{\bar{z}} = E(H^2)_z$ , onde  $\tau = 2(F_z \cdot e_4)^2$ .

**Prova:** Pela observação 1.1.5, temos:

$$F_z \cdot F_z = F_{\bar{z}} \cdot F_{\bar{z}} = F_z \cdot N = F_{\bar{z}} \cdot N = 0 \quad \text{e} \quad F_z \cdot F_{\bar{z}} = \frac{E}{2}.$$

(i)  $\bar{\nabla}_{F_z} F_z = \frac{1}{4}\bar{\nabla}_{(F_x - iF_y)}(F_x - iF_y) = \frac{1}{4}\{\bar{\nabla}_{F_x} F_x - \bar{\nabla}_{F_y} F_y - 2i\bar{\nabla}_{F_y} F_x\}$ .

Tomando o produto interno por  $N$ , temos:

$$\bar{\nabla}_{F_z} F_z \cdot N = \frac{1}{4}(l - n - 2im) = \frac{1}{2}\left(\frac{l-n}{2} - im\right) = \frac{\alpha}{2}. \quad (3.1)$$

Da equação  $F_z \cdot F_{\bar{z}} = \frac{E}{2}$ , obtemos

$$\bar{\nabla}_{F_z} F_z \cdot F_{\bar{z}} + F_z \cdot \bar{\nabla}_{F_z} F_{\bar{z}} = \frac{E_z}{2}.$$

Observamos que  $F_z \cdot \bar{\nabla}_{F_z} F_{\bar{z}} = F_z \cdot \bar{\nabla}_{F_{\bar{z}}} F_z = \frac{1}{2}F_{\bar{z}}[F_z \cdot F_z] = 0_{\bar{z}} = 0$  e portanto

$$\bar{\nabla}_{F_z} F_z \cdot F_{\bar{z}} = \frac{E_z}{2}. \quad (3.2)$$

Consideremos a decomposição  $\bar{\nabla}_{F_z} F_z = aF_z + bF_{\bar{z}} + cN$ .

Por (3.1), obtemos  $c = \frac{\alpha}{2}$  e de (3.2) segue-se  $a\frac{E}{2} = \frac{E_z}{2}$ , logo  $a = \frac{E_z}{E}$

Finalmente, tomando o produto interno por  $F_z$

$$\bar{\nabla}_{F_z} F_z \cdot F_z = 0 \Rightarrow b\frac{E}{2} = 0 \Rightarrow b = 0$$

e assim provamos (i)

(ii)  $\bar{\nabla}_{F_z} F_z = \frac{1}{4}\bar{\nabla}_{(F_x + iF_y)}(F_x - iF_y) = \frac{1}{4}(\bar{\nabla}_{F_x} F_x + \bar{\nabla}_{F_y} F_y)$ . Logo:

$$\bar{\nabla}_{F_z} F_z \cdot N = \frac{1}{4}(\bar{\nabla}_{F_x} F_x \cdot N + \bar{\nabla}_{F_y} F_y \cdot N) = \frac{l+n}{4} = \frac{EH}{2}.$$

Como  $\bar{\nabla}_{F_z} F_z \cdot F_z = 0 = \bar{\nabla}_{F_z} F_z \cdot F_z$ , temos:

$$\bar{\nabla}_{F_z} F_z = \frac{EH}{2}N$$

e concluímos o resultado de (ii).

(iii) Pelo exemplo 1.1.9 e pela proposição 1.1.7,  $\tau = 2B(F_z, F_z)$ , onde  $B(u, v) = (u \cdot T)(v \cdot T)$ .

Logo,

$$\tau = 2(F_z \cdot T)^2 = 2(F_z \cdot e_4)^2.$$

Pela regra da cadeia,

$$\tau_{\bar{z}} = 4(F_z \cdot T)F_z[(F_z \cdot T)] = 4(F_z \cdot T)(\bar{\nabla}_{F_z} F_z \cdot T + F_z \cdot \bar{\nabla}_{F_z} T). \quad (3.3)$$

Decorre de (ii) que  $\bar{\nabla}_{F_z} F_z \cdot T = 0$ , e como  $T = e_4 - (e_4 \cdot N)N$ , temos:

$$\bar{\nabla}_{F_z} T = -F_z[(e_4 \cdot N)]N - (e_4 \cdot N)\bar{\nabla}_{F_z} N = -(e_4 \cdot \bar{\nabla}_{F_z} N)N - (e_4 \cdot N)\bar{\nabla}_{F_z} N, \text{ portanto}$$

$$F_z \cdot \bar{\nabla}_{F_z} T = -(e_4 \cdot N)(F_z \cdot \bar{\nabla}_{F_z} N) = (e_4 \cdot N)(\bar{\nabla}_{F_z} F_z \cdot N) = \frac{EH}{2}(e_4 \cdot N).$$

Desta forma a equação (3.3) torna-se:

$$\tau_{\bar{z}} = 2EH(F_z \cdot T)(e_4 \cdot N). \quad (3.4)$$

Para obter a equação de Codazzi, lembramos que:

$$\bar{R}(F_z, F_z)F_z \cdot N = (\bar{\nabla}_{F_z} \bar{\nabla}_{F_z} F_z - \bar{\nabla}_{F_z} \bar{\nabla}_{F_z} F_z) \cdot N \quad (3.5)$$

Calculando:

$$\bar{\nabla}_{F_z}(\bar{\nabla}_{F_z}F_z) = \bar{\nabla}_{F_z}\left\{\left(\frac{1}{2}EH\right)N\right\} = \frac{1}{2}F_z[EH]N + \frac{1}{2}EH \cdot \bar{\nabla}_{F_z}N$$

$$\bar{\nabla}_{F_z}(\bar{\nabla}_{F_z}F_z) = \bar{\nabla}_{F_z}\left\{\frac{E_z}{E}F_z + \frac{\alpha}{2}N\right\} = F_z\left[\frac{E_z}{E}\right] \cdot F_z + \frac{E_z}{E} \cdot \bar{\nabla}_{F_z}F_z + F_z\left[\frac{\alpha}{2}\right]N + \frac{\alpha}{2}\bar{\nabla}_{F_z}N$$

Portanto a componente normal de  $\bar{\nabla}_{F_z}\bar{\nabla}_{F_z}F_z - \bar{\nabla}_{F_z}\bar{\nabla}_{F_z}F_z$  é

$$\left(\frac{E_z H}{2} + \frac{EH_z}{2} - \frac{E_z}{E} \frac{1}{2}EH - \frac{\alpha_z}{2}\right).$$

Logo, o lado direito de (3.5) é:

$$\frac{1}{2}(EH_z - \alpha_z). \quad (3.6)$$

E o lado esquerdo de (3.5) é obtido do corolário 1.2.2:

$$\begin{aligned} \bar{R}(F_z, F_z)F_z \cdot N &= -(e_4 \cdot N)\{(F_z \cdot F_z)(F_z \cdot T) - (F_z \cdot T)(F_z \cdot F_z)\} = \\ &= -\frac{E}{2}(e_4 \cdot N)(F_z \cdot T). \text{ Assim a igualdade (3.5) torna-se:} \end{aligned}$$

$$-E(e_4 \cdot N)(F_z \cdot T) = EH_z - \alpha_z.$$

Multiplicando a equação acima por  $2H$  e usando a equação (3.4), chega-se a:

$$-\tau_z = 2EHH_z - 2H\alpha_z \Rightarrow 2H\alpha_z - \tau_z = E(H^2)_z,$$

e fica provada a equação de Codazzi na formulação do item (iii).  $\square$

**Observação 3.1.2** *As demonstrações (i) e (ii) se aplicam aos mesmos itens da proposição 2.2.2. Além disso, note que para obter (3.6) não usamos a geometria de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Portanto se considerarmos a imersão  $\mathfrak{M} \looparrowright \mathbb{R}^3$  do capítulo 2, então  $\bar{R} \equiv 0$  e assim o lado esquerdo de (3.5) é nulo. De (3.6) obtemos que  $\alpha_z = EH_z$ , demonstrando o item (iii) daquela mesma proposição.*

**Corolário 3.1.3** *(Teorema 1 de [1]) A diferencial  $Q$  de Abresch-Rosenberg para  $\mathfrak{M} \looparrowright \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  com curvatura média constante é holomorfa.*

**Prova:** Usando (iii) é imediato que  $H$  constante implica que  $(2H\alpha - \tau)_z = 0$ , ou seja,  $(2H\alpha - \tau)dz^2$  é uma expressão holomorfa da diferencial quadrática  $Q$ .  $\square$

Observe que a diferencial  $Q$  é globalmente definida, pois, pelo que vimos nos preliminares algébricos,  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{T}$  são definidas globalmente. Contudo, um simples cálculo reforça o fato de que a diferencial quadrática  $\mathcal{T} = \psi(w)dw^2$  independe de coordenadas (da mesma maneira que foi feito para  $\mathcal{A}$  na demonstração de 2.2.2). De fato,

$$\psi(w) = 2(F_w \cdot e_4)^2 = 2\left(\frac{dz}{dw}F_z \cdot e_4\right)^2 = 2(F_z \cdot e_4)^2\left(\frac{dz}{dw}\right)^2.$$

Logo

$$\mathcal{T} = \psi(w)dw^2 = 2(F_z \cdot e_4)^2\left(\frac{dz}{dw}\right)^2dw^2 = \tau(z)dz^2$$

está bem definida.

## 3.2 Superfícies em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ com diferencial de Abresch-Rosenberg nula

Nesta seção, utilizaremos cálculos expostos em [14], com a abordagem de [10]. Mantemos a notação da seção anterior.

**Proposição 3.2.1** *A diferencial quadrática  $\mathcal{T}$  se anula em  $P \in \mathfrak{M}$ , se, e somente se,  $N(P) = \pm e_4$ .*

**Prova:** Como  $\mathcal{T} = \tau dz^2$  e  $\tau = 2(F_z \cdot T)^2$  se  $\tau = 0$ , então  $F_z \cdot T = 0$ . Sendo  $F_z = \frac{1}{2}(F_x - iF_y)$ , segue que  $F_x \cdot T = 0 = F_y \cdot T$ . Logo  $T = 0$ , ou equivalentemente,  $N = \pm e_4$ .  $\square$

**Corolário 3.2.2** ([1]) *Se  $\mathfrak{M}$  é uma superfície homeomorfa à esfera imersa em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  com curvatura média  $H \equiv 0$ , então  $\mathfrak{M} = \mathbb{S}^2 \times \{\xi_0\}$ ;  $\xi_0$  constante.*

**Prova:** Se  $H \equiv 0$ , resulta da equação de Codazzi:  $2H\alpha_{\bar{z}} - \tau_{\bar{z}} = E(H^2)_z$ , que  $\tau$  é holomorfa. Pela proposição 2.3.2,  $\tau$  deve ser identicamente nula, ou seja  $N \equiv e_4$  ou  $N \equiv -e_4$  e portanto  $F(\mathfrak{M}) \subset \mathbb{S}^2 \times \{\xi_0\}$ . Usando o mesmo argumento da prova do teorema de Hopf, temos que  $F : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \{\xi_0\}$  é um difeomorfismo.  $\square$

**Proposição 3.2.3** ([10]) *Se a diferencial  $Q$  de Abresch-Rosenberg é nula e  $\mathcal{T}(P) \neq 0$ , então  $T$  e  $JT$  são direções principais nesse ponto associadas a  $k_1 = H + \frac{\|T\|^2}{4H}$  e  $k_2 = H - \frac{\|T\|^2}{4H}$ , respectivamente, com  $H \neq 0$ .*

**Prova:** Note que  $\mathcal{T} = 2H\mathcal{A} \Leftrightarrow B_0 = 2HA_0$ , onde  $A_0$  e  $B_0$  são as formas de traço nulo associadas à segunda forma fundamental  $A$  e  $B(v, w) = (v \cdot T)(w \cdot T)$ , respectivamente. Além disso,  $H \neq 0$ , pois  $\mathcal{T} = 2H\mathcal{A} \neq 0$ . Pela proposição anterior temos  $T \neq 0$ .

Sejam  $\tilde{A}$  o operador de forma e  $\tilde{B}$  o operador linear simétrico associado a  $B$ . Como  $\tilde{B}(u) = (u \cdot T)T$  e  $T \cdot JT = 0$  é fácil ver que a matriz de  $\tilde{B}$  na base isotérmica  $\{T, JT\}$  é

$$[\tilde{B}] = \begin{pmatrix} \|T\|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim a matriz de  $\tilde{B}_0$ , na mesma base fica:

$$[\tilde{B}_0] = \begin{pmatrix} \frac{\|T\|^2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\|T\|^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Como  $\tilde{A}_0 = \frac{1}{2H}\tilde{B}_0$ , tem-se:

$$[\tilde{A}_0] = \begin{pmatrix} \frac{\|T\|^2}{4H} & 0 \\ 0 & -\frac{\|T\|^2}{4H} \end{pmatrix}.$$

Da definição 1.1.3, temos  $\tilde{A} = HI + \tilde{A}_0$ . Logo

$$[\tilde{A}] = \begin{pmatrix} H + \frac{\|T\|^2}{4H} & 0 \\ 0 & H - \frac{\|T\|^2}{4H} \end{pmatrix}.$$

Isso comprova que  $T$  e  $JT$  são direções principais associadas a  $k_1 = H + \frac{\|T\|^2}{4H}$  e  $k_2 = H - \frac{\|T\|^2}{4H}$ , respectivamente.  $\square$

**Lema 3.2.4** *Seja  $(X, \rho)$  campo de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , onde  $X(P) \in T_p\mathbb{S}^2$  e  $\rho(P) \in \mathbb{R}$  e seja  $(\gamma(t), \gamma_4(t))$  curva suave de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Então :*

$$\bar{\nabla}_{(\gamma, \gamma_4)}(X, \rho) = (X' + (X \cdot \gamma')\gamma, \rho'). \quad (3.7)$$

onde  $X'$  e  $\rho'$  denotam  $\frac{d}{dt}\{X(\gamma(t), \gamma_4(t))\}$  e  $\frac{d}{dt}\{\rho(\gamma(t), \gamma_4(t))\}$  respectivamente.

**Prova:**  $\bar{\nabla}$  é a conexão Riemanniana em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , portanto  $\bar{\nabla}_{(\gamma', \gamma_4')}(X, \rho)$  é a componente tangente a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  da derivada em  $\mathbb{R}^4$ ,  $(X', \rho')$ . Denotando um ponto de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  por  $P = (p, p_4)$ , a normal  $\bar{N}$  de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  é dada por  $\bar{N}(P) = (-p, 0)$ . Logo:

$$\bar{\nabla}_{(\gamma', \gamma_4')}(X, \rho) = (X', \rho') - \{(X', \rho') \cdot (-\gamma, 0)\}(-\gamma, 0) = (X', \rho') - (X' \cdot \gamma)(\gamma, 0).$$

Note que  $X(\gamma(t)) \cdot \gamma(t) = 0$ . Sendo assim,  $X' \cdot \gamma = -X \cdot \gamma'$ .

$$\text{Finalmente, } \bar{\nabla}_{(\gamma', \gamma_4')}(X, \rho) = (X', \rho') + (X \cdot \gamma')(\gamma, 0) = (X' + (X \cdot \gamma')\gamma, \rho'). \quad \square$$

**Proposição 3.2.5** ([10]) *Considere a decomposição ortogonal do campo normal  $N = (V, \rho)$ . Se a diferencial  $Q$  de Abresch-Rosenberg é identicamente nula, então  $T$  e  $JT$  satisfazem:*

$$(i) \quad T = (-\rho V, 1 - \rho^2).$$

$$(ii) \quad JT = (-V^\perp, 0), \text{ onde } V^\perp \text{ denota a rotação positiva de } V \text{ em } T_p\mathbb{S}^2.$$

$$(iii) \quad \|T\|^2 = \|V\|^2 = k_1^2 - k_2^2 = 1 - \rho^2$$

**Prova:** (i)  $T = e_4 - (e_4 \cdot N)N = e_4 - \rho N = e_4 - \rho(V, \rho) = (-\rho V, 1 - \rho^2)$ .

(ii) Para obter a expressão de  $JT$ , note que  $(\pm V^\perp, 0)$  é tangente a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , ortogonal a  $T$  e  $N$  e possui a mesma norma de  $T$ . Logo,  $JT = (\pm V^\perp, 0)$ . O sinal decorre da orientação adotada.

$$(iii) \quad \|T\|^2 = \|e_4 - \rho N\|^2 = \|e_4\|^2 - 2\rho^2 + \rho^2 = 1 - \rho^2.$$

$$\text{Como } \|N\| = 1 \Rightarrow \|V\|^2 + \rho^2 = 1 \Rightarrow \|V\|^2 = 1 - \rho^2.$$

$$\text{Além disso, se } H \neq 0, \quad k_1 - k_2 = \frac{\|T\|^2}{2H} = \frac{\|T\|^2}{k_1 + k_2} \Rightarrow k_1^2 - k_2^2 = \|T\|^2.$$

Se  $H = 0$ , então  $\tau = 0$ . Sendo assim, pela proposição 3.2.1 temos  $T = 0$  e portanto

$$k_1^2 - k_2^2 = 0 = \|T\|^2.$$

□

A partir de agora, assumimos a diferencial  $Q$  de Abresch-Rosenberg identicamente nula e  $H$  constante diferente de zero.

**Proposição 3.2.6** ([10]) *Seja  $\Phi(t) = (\phi(t), \phi_4(t))$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , uma curva integral de  $JT$ , passando por um ponto não-umbílico  $P = (p, p_4) \in \mathfrak{M} \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Então verificam-se as seguintes propriedades:*

1.  $\Phi$  é horizontal com  $\phi_4(t) = p_4$  para todo  $t$ ;  $k_1$  e  $k_2$  são constantes ao longo de  $\Phi$ .
2. Se  $k_2(P) \neq 0$ , então  $\phi(t)$  está contido num círculo geodésico de  $\mathbb{S}^2$  de raio  $r(P) = \arctan \sqrt{(\frac{k_1}{k_2})^2 - 1} \in (0, \frac{\pi}{2})$  e centro  $\frac{Q(P)}{\|Q(P)\|}$ , onde  $Q(P) = p + \frac{V(P)}{k_2(P)}$ .
3. Se  $k_2(P) = 0$ , então  $\phi(t)$  está contida numa geodésica de  $\mathbb{S}^2$ .

**Prova:** O fato do ponto  $P$  não ser umbílico significa, pela proposição 3.2.3, que  $T(P) \neq 0$ . Como  $\Phi(t) = (\phi(t), \phi_4(t))$  é uma curva integral de  $JT$ , então  $\Phi'(t) = JT(\Phi(t))$  e  $\Phi(0) = P = (p, p_4)$ .

Pelo item (ii) da proposição anterior,  $\phi_4'(t) = 0$ . Assim  $\phi_4(t) = \phi_4(0) = p_4$ , ou seja, as curvas integrais de  $JT$  são horizontais, no sentido de estarem contidas em  $\mathbb{S}^2 \times \{p_4\}$ .

Do lema 3.2.4, para o campo normal restrito a  $\Phi$  segue-se:

$$\bar{\nabla}_{JT}(V, \rho) = \bar{\nabla}_{(-V^\perp, 0)}(V, \rho) = (V' - (V \cdot V^\perp)\phi(t, P), \rho') = (V', \rho').$$

Como  $JT$  é principal temos  $\bar{\nabla}_{JT}N = -k_2JT = k_2(V^\perp, 0)$ . Logo

$$V' = k_2V^\perp, \quad \rho' = 0. \tag{3.8}$$

De  $\rho' = 0$  concluímos que

$$\rho(\Phi(t)) = \rho(\Phi(0)) = \rho(P), \quad \forall t.$$

Portanto, usando o item (iii) da proposição anterior,  $k_1 = H + \frac{\|T\|^2}{4H}$  e  $k_2 = H - \frac{\|T\|^2}{4H}$  são constantes ao longo de  $\Phi$ .

Agora, suponha que  $k_2(P) \neq 0$ . Vamos mostrar  $\phi(t)$  está contida na interseção de  $\mathbb{S}^2$  com uma esfera em  $\mathbb{R}^3$ .

Seja  $Q(t) = \phi(t) + \frac{V(t)}{k_2}$ , onde usamos a notação simplificada

$$Q(t) = Q(\Phi(t, P)), \quad \phi(t) = \phi(t, P) \text{ e } V(t) = V(\Phi(t, P)).$$

Sabemos  $k_2$  é constante ao longo de  $\Phi$ . Assim,

$$Q'(t) = \phi'(t) + \frac{V'(t)}{k_2}.$$

Mas,  $\phi'(t) = -V^\perp(t)$  e pela equação (3.8),  $V'(t) = k_2 V^\perp(t)$ . Logo  $Q'(t) = 0$ , onde concluímos que  $Q(t) = Q(P)$  é constante.

Desta forma  $\|\phi(t) - Q(P)\| = \|\frac{V(t)}{k_2}\|$  é constante e diferente de zero, pois  $V = 0 \Leftrightarrow T = 0$ . Portanto  $\phi(t)$  está contido na interseção de  $\mathbb{S}^2$  com uma esfera de centro  $Q(P)$  em  $\mathbb{R}^3$ .

Para o raio geodésico, temos

$$\tan r(P) = \|\frac{V(P)}{k_2}\| = \sqrt{\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_2^2}}. \text{ Logo } r(P) = \arctan \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - 1}.$$

Se  $k_2(P) = 0$  por (3.8), temos  $V' = 0$ , ou seja, além de ser tangente  $V = V_0$  é constante ao longo de  $\phi(t)$ . Logo  $\phi(t)$  está contida no plano ortogonal a  $V_0$  passando por  $p$ , cuja interseção com a esfera é um círculo. Tal círculo é máximo, pois o campo constante  $V_0$  é tangente a  $\mathbb{S}^2$ .  $\square$

**Observação 3.2.7** *A seguir, redefinimos os círculos da proposição 3.2.6 de modo a expressar seus centros por uma função suave.*

Se  $k_2(P) < 0$ , temos o círculo de centro  $C(P) = -\frac{Q(P)}{\|Q(P)\|}$  e raio  $\pi - r(P)$ ;

Se  $k_2(P) = 0$ , interpretamos a geodésica como um círculo geodésico de raio  $\frac{\pi}{2}$  e centro  $C(P) = \frac{V(P)}{\|V(P)\|}$ .

Se  $k_2(P) > 0$  temos  $C(P) = \frac{Q(P)}{\|Q(P)\|}$  e raio  $r(P)$

Se  $P$  é umbílico, temos  $r(P) = 0$  e  $C(P) = \pm p$ , conforme o sinal de  $H$ .

*Desta forma os centros são unificados pela função suave*

$$C(P) = \frac{k_2 P + V(P)}{\|k_2 P + V(P)\|}. \quad (3.9)$$

*De fato, se  $k_2 \neq 0$ , então*

$$C(P) = \frac{k_2}{|k_2|} \frac{Q(P)}{\|Q(P)\|}.$$

*Se  $k_2 = 0$ , então*

$$C(P) = \frac{V(P)}{\|V(P)\|}.$$

**Proposição 3.2.8** ([10]) *Seja  $\Gamma(s) = (\gamma(s), \gamma_4(s))$ ,  $s \in (a, b)$  uma curva integral de  $T$  e denote por  $C(s)$  o centro  $C(\Gamma(s))$  do círculo definido em (3.9). Então  $C(s) = C_0$  é constante.*

**Prova:** Usando as notações :  $k_2(s) = k_2(\Gamma(s))$  e  $V(s) = V(\Gamma(s))$ , temos

$$C(s) = \frac{q(s)}{\|q(s)\|},$$

onde  $q(s) = k_2(s)\gamma(s) + V(s)$ .

Sendo assim,

$$C' = \frac{q'}{\|q\|} - \frac{q' \cdot q}{\|q\|^3} q \quad (3.10)$$

Um cálculo simples usando a equação (3.10) mostra que para obtermos o resultado desejado é suficiente que

$$q'(s) = \lambda(s)q(s), \quad (3.11)$$

com  $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ .

A demonstração de (3.11) é dada a seguir.

Diferenciando  $q(s) = k_2(s)\gamma(s) + V(s)$ , obtemos

$$q'(s) = k_2'(s)\gamma(s) + k_2(s)\gamma'(s) + V'(s). \quad (3.12)$$

Pelo fato de  $\Gamma$  ser uma curva integral e do item (i) de 3.2.5 (omitindo o parâmetro  $s$ ), resulta que  $(\gamma', \gamma'_4) = T = (-\rho V, 1 - \rho^2)$ , portanto

$$\gamma' = -\rho V, \quad \gamma'_4 = 1 - \rho^2. \quad (3.13)$$

Além disso, fora dos pontos umbílicos,  $T$  é principal

$$-k_1 T = \bar{\nabla}_{(\gamma', \gamma'_4)}(V, \rho) = (V' + (V \cdot \gamma')\gamma, \rho'),$$

assim

$$V' + (V \cdot \gamma')\gamma = k_1 \rho V, \quad \rho' = -k_1(1 - \rho^2).$$

Seque-se de (3.13) e do item (iii) de 3.2.5 que  $V \cdot \gamma' = -\rho(k_1^2 - k_2^2)$ . Logo

$$V' = k_1 \rho V + \rho(k_1^2 - k_2^2)\gamma \text{ e } \rho' = -k_1(k_1^2 - k_2^2). \quad (3.14)$$

Por outro lado,

$$k_2 = H - \frac{1 - \rho^2}{4H} \Rightarrow k_2' = \frac{\rho \rho'}{2H}.$$

Usando (3.14), tem-se

$$k_2' = \frac{-\rho k_1(k_1^2 - k_2^2)}{k_1 + k_2} = -\rho k_1(k_1 - k_2). \quad (3.15)$$

Substituindo (3.13), (3.14) e (3.15) na equação (3.12), obtemos

$$q' = -\rho(k_1^2 - k_1 k_2)\gamma - k_2 \rho V + k_1 \rho V + \rho(k_1^2 - k_2^2)\gamma = \rho(k_1 - k_2)k_2 \gamma + \rho(k_1 - k_2)V \Rightarrow$$

$$q' = \rho(k_1 - k_2)q.$$

Como as curvas não triviais de  $T$  e  $JT$  não passam pelos pontos umbílicos, mostramos que o gradiente de  $C$  se anula nos pontos não-umbílicos, já que sua derivada é zero nas direções  $JT$  (proposição 3.2.6) e  $T$  (pelo resultado acima).

Suponha que exista um aberto  $\mathcal{U}$  de pontos umbílicos. Então  $\mathcal{U} \subset \mathbb{S}^2 \times \{\xi_0\}$  e assim  $H = 0$ , contrariando nossa hipótese inicial. Desta forma, por continuidade, temos  $\nabla C \equiv 0$  e  $C(s) = C_0$  constante.  $\square$

O corolário a seguir, prova uma parte do teorema de Abresch-Rosenberg, que uma esfera imersa em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  é *rotacional*, isto é, invariante por rotação em torno de um eixo em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . O teorema anterior fornece  $\{C_0\} \times \mathbb{R}$  como candidato ao eixo de rotação.

**Corolário 3.2.9** *Seja  $\mathcal{M}$  uma superfície homeomorfa à esfera e imersa em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  com curvatura média constante. Então  $\mathcal{M}$  é rotacional.*

**Prova:** Falta o caso  $H \neq 0$ . Pelo corolário 3.1.3 a diferencial  $Q$  de Abresch-Rosenberg é holomorfa. Pelo argumento utilizado no capítulo 2 para demonstrar o teorema de Hopf, conclui-se que  $Q \equiv 0$ . Como  $\mathcal{M}$  é completa, as curvas integrais de  $JT$  estão definidas para todo tempo e tem velocidade constante por 3.2.6 e 3.2.5, logo cobrem todo o paralelo. Além disso, um ponto é umbílico se, e somente se, está sobre o eixo  $\{C_0\} \times \mathbb{R}$ .  $\square$

# Capítulo 4

## O teorema de Abresch-Rosenberg

Vimos no capítulo anterior que uma esfera imersa  $\mathfrak{M} \looparrowright \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  com curvatura média constante é invariante por rotação em torno de um eixo  $\{C_0\} \times \mathbb{R}$ . A menos de uma isometria de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , podemos supor que  $C_0$  coincide com o polo norte  $(0, 0, 1)$ . Queremos provar que  $\mathfrak{M}$  é mergulhada. A classificação destas superfícies de rotação encontra-se em [13].

### 4.1 A geometria de uma superfície de revolução em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Para obtermos uma parametrização de  $\mathfrak{M}$ , introduzimos o sistema de coordenadas geodésicas polares  $Y(r, \theta) \in \mathbb{S}^2$  a partir do pólo norte,

$$Y(r, \theta) = (\sin r \cos \theta, \sin r \sin \theta, \cos r), \quad r \in (0, \pi), \quad \theta \in (0, 2\pi).$$

As geodésicas de  $\mathbb{S}^2$  que partem do pólo norte intersectam a órbita de cada ponto de  $\mathfrak{M}$  apenas uma vez. Assim obtemos uma curva suave

$$\tilde{c}(s) = (r(s), \xi(s)) \in (0, \pi) \times \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

onde  $s \in (a, b)$  é o parâmetro comprimento de arco.

Uma curva perfil de  $\mathfrak{M}$  é dada por  $c(s) = (0, \sin r(s), \cos r(s), \xi(s)) \in \{0\} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Obtemos assim uma parametrização para  $\mathfrak{M}$ ,

$$\mathbf{X}(s, \theta) = (\mathbf{Y}(r(s), \theta), \xi(s)) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}.$$

Note que

$$\mathbf{X}_s = (r' \mathbf{Y}_r, \xi'), \quad \mathbf{X}_\theta = (\mathbf{Y}_\theta, 0), \quad (4.2)$$

onde  $\mathbf{Y}_r = (\cos r \cos \theta, \cos r \sin \theta, -\sin r)$ ,  $\mathbf{Y}_\theta = (-\sin r \sin \theta, \sin r \cos \theta, 0)$  satisfazem:

$$\mathbf{Y}_r \cdot \mathbf{Y}_r = 1; \quad \mathbf{Y}_r \cdot \mathbf{Y}_\theta = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{Y}_\theta \cdot \mathbf{Y}_\theta = \sin^2 r. \quad (4.3)$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\mathfrak{M}$  são :

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \sin^2 r. \quad (4.4)$$

De fato,

$$E = \mathbf{X}_s \cdot \mathbf{X}_s = r'^2 \mathbf{Y}_r \cdot \mathbf{Y}_r + \xi'^2 = 1, \quad F = \mathbf{X}_s \cdot \mathbf{X}_\theta = r' \mathbf{Y}_r \cdot \mathbf{Y}_\theta = 0, \quad G = \mathbf{X}_\theta \cdot \mathbf{X}_\theta = \mathbf{Y}_\theta \cdot \mathbf{Y}_\theta = \sin^2 r.$$

Recordemos a notação introduzida no capítulo 3:  $N$  é o campo normal de  $\mathfrak{M}$ , o operador de forma é  $\tilde{A}(v) = -\bar{\nabla}_v N$  com  $tr[\tilde{A}] = 2H$  ( $\bar{\nabla}$  é a conexão Riemanniana em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ) e a segunda forma fundamental é dada por  $lds^2 + 2mdsd\theta + nd\theta^2$ , onde  $l = \bar{\nabla}_{\mathbf{X}_s} \mathbf{X}_s \cdot N$ ,  $m = \bar{\nabla}_{\mathbf{X}_s} \mathbf{X}_\theta \cdot N$  e  $n = \bar{\nabla}_{\mathbf{X}_\theta} \mathbf{X}_\theta \cdot N$ .

**Proposição 4.1.1** *Referente a parametrização  $\mathbf{X}(s, \theta)$  de  $\mathfrak{M}$ , verificam-se:*

- (i)  $N(s, \theta) = (-\xi'(s) \mathbf{Y}_r(r(s), \theta), r'(s)) \in T_{\mathbf{Y}(r, \theta)} \times \mathbb{R}$
- (ii)  $l = k$ ,  $m = 0$  e  $n = \xi' \sin r \cos r$ , onde  $k(s)$  é a curvatura normal da curva  $c(s)$  em  $\mathfrak{M} \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ .
- (iii) *Os meridianos e paralelos são curvas principais e  $2H = k + \xi' \cot r$*

**Prova:** (i) Os campos  $(\mathbf{Y}_r, 0)$  e  $e_4 = (0, 0, 0, 1)$  são tangentes a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Assim

$$N = -\xi'(\mathbf{Y}_r, 0) + r'e_4 = (-\xi'\mathbf{Y}_r, r')$$

é tangente a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e satisfaz  $N \cdot \mathbf{X}_s = N \cdot \mathbf{Y}_\theta = 0$ ,  $N \cdot N = 1$ .

Portanto  $N = (-\xi'\mathbf{Y}_r, r')$  é normal unitário de  $\mathfrak{M}$ .

(ii) Observe que  $\bar{\nabla}_{\mathbf{X}_s} \mathbf{X}_s = \mathbf{X}_{ss} - (\bar{\nabla}_{\mathbf{X}_s} \mathbf{X}_s \cdot \bar{N})\bar{N}$ , onde  $\bar{N}(r, \theta) = (-\mathbf{Y}(r, \theta), 0)$  é o campo normal de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Decorre de  $N \cdot \bar{N} = 0$  que  $l = \bar{\nabla}_{\mathbf{X}_s} \mathbf{X}_s \cdot N = \mathbf{X}_{ss} \cdot N$ .

Analogamente,  $m = \mathbf{X}_{s\theta} \cdot N$ ,  $n = \mathbf{X}_{\theta\theta} \cdot N$ .

Por (4.2) obtemos:

$$\mathbf{X}_{ss} = (r''\mathbf{Y}_r + r'^2\mathbf{Y}_{rr}, \xi''), \quad \mathbf{X}_{s\theta} = (r'\mathbf{Y}_{r\theta}, 0), \quad \mathbf{X}_{\theta\theta} = (\mathbf{Y}_{\theta\theta}, 0). \quad (4.5)$$

De  $\mathbf{Y}_r \cdot \mathbf{Y}_r = 1$  em (4.3), resulta que  $\mathbf{Y}_{r\theta} \cdot \mathbf{Y}_r = 0 = \mathbf{Y}_{rr} \cdot \mathbf{Y}_r$ .

Assim,

$$l = \mathbf{X}_{ss} \cdot N = (r''\mathbf{Y}_r + r'^2\mathbf{Y}_{rr}, \xi'') \cdot (-\xi'\mathbf{Y}_r, r') = -r''\xi'\mathbf{Y}_r \cdot \mathbf{Y}_r - r'^2\mathbf{Y}_{rr} \cdot \mathbf{Y}_r + r'\xi'' = r'\xi'' - r''\xi'.$$

Um cálculo simples mostra que  $k(s) = r'\xi'' - r''\xi'$  é a curvatura normal da curva  $c(s)$  (ver [12]).

Segue-se por (4.5) e (i) que

$$m = \mathbf{X}_{s\theta} \cdot N = -r'\xi'\mathbf{Y}_{r\theta} \cdot \mathbf{Y}_r = 0$$

Finalmente, para calcularmos  $n$  note que  $N_\theta = (-\xi'\mathbf{Y}_{r\theta}, 0)$  e da expressão  $\mathbf{Y}_\theta \cdot \mathbf{Y}_\theta = \sin^2 r$  de (4.3), obtém-se  $\mathbf{Y}_{r\theta} \cdot \mathbf{Y}_\theta = \sin r \cos r$ . Logo,

$$n = \mathbf{X}_{\theta\theta} \cdot N = -\mathbf{X}_\theta \cdot N_\theta = \xi'\mathbf{Y}_\theta \cdot \mathbf{Y}_{r\theta} = \xi' \sin r \cos r$$

e fica provado (ii).

(iii) Como  $F = m = 0$ , temos que os meridianos e paralelos são curvas principais. A matriz do operador de forma  $\tilde{A}$  na base  $\{\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_\theta\}$  é obtida de (4.4) e (ii).

$$[\tilde{A}] = \begin{pmatrix} \frac{l}{E} & 0 \\ 0 & \frac{n}{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \xi' \cot r \end{pmatrix}$$

□

## 4.2 O teorema de Abresch-Rosenberg

O teorema de Abresch-Rosenberg será obtido através da análise de um sistema de equações diferenciais ordinárias associado a uma esfera imersa  $\mathfrak{M} \looparrowright \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  com curvatura média constante, que sabemos ser rotacional pelo Teorema 3.2.9.

Para obtermos expressões semelhantes às de [1], seção 2.2, considere a função ângulo  $\varphi(s)$  determinada por  $\tilde{c}$  tal que  $\tilde{c}'(s) = (-\sin \varphi(s), \cos \varphi(s))$ . Assim, temos que  $k(s) = \varphi'(s)$  (ver [5]).

Por (4.1) e pelo item (iii) do teorema 4.1.1, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} r' = -\sin \varphi \\ \xi' = \cos \varphi \\ \varphi' = 2H - \cos \varphi \cot r \end{cases} \quad (4.6)$$

A última equação deste sistema equivale a

$$\varphi' \sin r = 2H \sin r - \cos \varphi \cos r$$

que multiplicada por  $r'$  torna-se:

$$\begin{aligned} -\varphi' \sin \varphi \sin r + r' \cos \varphi \cos r - 2Hr' \sin r &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{ds} \{ \cos \varphi \sin r \} - \frac{d}{ds} \{ 4H \sin^2(\frac{r}{2}) \} &= 0 \Rightarrow \\ L := \cos \varphi \sin r - 4H \sin^2(\frac{r}{2}) & \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $L$  é constante (ver [1], seção 2.3).

Note que se  $r'(s) = 0 \forall s$ , então  $r = r_0$  e  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = \pi$ . Assim obtemos um cilindro de raio  $r_0$  e curvatura média  $H = \frac{\pm \cot r_0}{2}$ . Tais soluções são excluídas pois o cilindro não é homeomorfo à esfera.

Em [1] seção 2, Uwe Abresch e Harold Rosenberg fazem uma classificação detalhada das soluções de (4.6).

Como estamos considerando a imersão de uma esfera, a curva  $\tilde{c}$  definida em (4.1) é limitada e deve encontrar o eixo de rotação .

Desta forma, fazendo  $r \rightarrow 0 \Rightarrow L = 0$  e como  $\sin r > 0$ , obtemos de (4.7)

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{4H \sin^2(\frac{r}{2})}{\sin r} = \frac{4H \sin^2(\frac{r}{2})}{2 \sin(\frac{r}{2}) \cos(\frac{r}{2})} \Rightarrow \\ \cos \varphi &= 2H \tan(\frac{r}{2}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

#### Observações :

Note que, se  $H = 0$ , então  $\cos \varphi = 0$ . Portanto  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  e  $\xi = \xi_0$  que corresponde às soluções do tipo  $\mathbb{S}^2 \times \{\xi_0\}$  conforme o corolário 3.2.2. Por outro lado, se  $H \neq 0$  então  $\cos \varphi \neq 0$ , portanto o máximo e o mínimo da altura ocorrem quando  $r = 0$ .

Além disso, a equação (4.8) confirma que a curva  $\tilde{c}$  deve encontrar o eixo de rotação perpendicularmente, pois  $\cos \varphi \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$ .

Usando (4.8), podemos eliminar o fator  $\cot r$  em (4.6) e tirar algumas conclusões sobre suas soluções .

De fato, da identidade

$$\cot r = \frac{1 - \tan^2 \frac{r}{2}}{2 \tan \frac{r}{2}},$$

se  $H \neq 0$  obtemos

$$\varphi' = 2H - 2H \tan(\frac{r}{2}) \frac{1 - \tan^2(\frac{r}{2})}{2 \tan(\frac{r}{2})} = H + H \frac{\cos^2 \varphi}{4H^2} \Rightarrow$$

$$\varphi' = \frac{1}{4H}(4H^2 + \cos^2 \varphi). \quad (4.9)$$

A equação (4.9) indica que  $\varphi(s)$  é estritamente crescente ou decrescente conforme o sinal de  $H$  seja positivo ou negativo, respectivamente.

Por (4.9) e (4.6), vemos que se  $r \neq 0$ , então  $\xi' > 0$  ou  $\xi' < 0$  (dependendo do sinal de  $H$ ). Logo,  $\mathfrak{M}$  está mergulhada em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e atingimos o objetivo deste trabalho.

**Teorema 4.2.1** (Abresch-Rosenberg, teorema 2 de [1]) *Seja  $\mathfrak{M} \looparrowright \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  uma esfera imersa com curvatura média constante. Então  $\mathfrak{M}$  é uma superfície de rotação mergulhada em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ .*

# Referências Bibliográficas

- [1] Abresch, U., Rosenberg, H., *A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Acta Mathematica 193, 2004, 141-174.
- [2] Ahlfors, L., *An Introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, New York, McGraw-Hil, 1953.
- [3] Ahlfors, L., *Conformal invariants*, New York, McGraw-Hil, 1973.
- [4] Brito, F., Leite, M. L., Neto, V. de S., *Liouville's formula under the viewpoint of minimal surfaces*, Comm. Pure Appl. Analysis 3, 2004, 41-51.
- [5] Carmo, M. do, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, N. J., Prentice-Hall, 1976.
- [6] Carmo, M. do, *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro, IMPA, 1979.
- [7] Chern, S., *An elementary proof of existence of isothermal parameters on a surface*, Proc. Amer. Math. Soc. 6, 1955, 771-782.
- [8] Farkas, H., Kra, I., *Riemann surfaces*, Springer-Verlag 1991.
- [9] Hopf, H., *Differential Geometry in the Large*, Lectures notes in Mathematics 1000, Berlin, Springer-Verlag 1983.
- [10] Leite, M. L., *On surfaces of  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  with null Abresch-Rosenberg differential*, Preprint, Recife, 2005.
- [11] Lima, E. L., *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, Rio de Janeiro, IMPA, 1998.

- 
- [12] O'Neill, B., *Elementary differential geometry* 3.ed. New York, Academic Press, 1966.
- [13] Pedrosa, R., Ritoré, M., *Isoperimetric domains in the Riemannian product of a circle with a simply connected space form and applications to free boundary problems*, Indiana Univ. Math. J. 48 (1999), 1357-1394.
- [14] Rosenberg, H., *Notas particulares*, Rio de Janeiro, 2005.
- [15] Spivak, M., *A Comprehensive introduction to differential geometry*, vol IV, Publish or Perish, Houston, 1979.
- [16] Spivak, M., *Calculus on manifolds*, Benjamin Inc., New York, 1965.