

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Matemática

Mestrado em Matemática

Bifurcação de Soluções Periódicas

Evaneide Alves Carneiro

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Recife

março de 2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Matemática

Evaneide Alves Carneiro

Bifurcação de Soluções Periódicas

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado em Matemática do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Prof. Dr. Hildeberto Eulálio Cabral*

Recife

março de 2006

Carneiro, Evaneide Alves.

Bifurcação de soluções periódicas. / Evaneide Alves
Carneiro Adriano. - Recife : O Autor, 2006.
33 folhas.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Matemática, 2006.

Inclui bibliografia.

1.Equações diferenciais ordinárias – Soluções periódicas
(Bifurcação). 2. Sistemas Hamiltonianos – Sistemas
Hamiltonianos com Vínculos. I. Título.

517.91

CDU (2.ed.)

UFPE

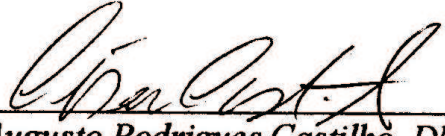
515.352

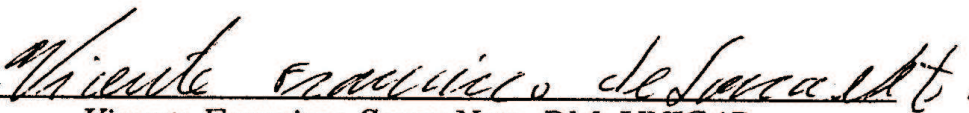
CDD (22.ed.)

MEI2006-001

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado: 
Hildeberto Eulálio Cabral, DMAT-UFPE
Orientador


César Augusto Rodrigues Castilho, DMAT-UFPE


Vicente Francisco Sousa Neto, DM -UNICAP

BIFURCAÇÃO DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS

Por
Evaneide Alves Carneiro

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Março - 2006

À minha família e ao Wallisom.

Agradecimentos

À CAPES pelo apoio financeiro.

À minha família, pela educação, carinho e esforço (às vezes sacrifício) para ver um sonho realizado.

Ao Wallisom, pelo amor, incentivo, apoio quando as coisas não iam tão bem, enfim, por estar presente em minha vida: Muito Obrigada!!!

A todos os professores que fizeram ou fazem parte da minha formação, com quem aprendi e aprendo até hoje.

Aos meus amigos de Jaguaribe, Recife, São Carlos e São Paulo. Vocês são muito importantes na minha vida, e sinto muitas saudades!!!

Aos funcionários do Departamento de Matemática e da Biblioteca do CCEN.

A todos os que foram meus alunos.

Ao meu orientador – Prof. Hildeberto – pela paciência e sempre sábias palavras.

E aos demais professores da banca: César Castilho e Vicente Francisco de Sousa Neto.

*Tenho visto tanta coisa
Nesse mundo de meu Deus
Coisas que prum cearense
Não existe explicação
Qualquer pinguinho de chuva
Fazer uma inundação
Moça se vestir de cobra
E dizer que é distração
Vocês cá da capital
Me adesculpe esta expressão
No Ceará não tem disso não,
Não tem disso não, não tem disso não
No Ceará não tem disso não
Não tem disso não, não tem disso não
Não, não, não, No Ceará não tem disso não,
Não, não, não, No Ceará não tem disso não,
Nem que eu fique aqui dez anos
Eu não me acostumo não
Tudo aqui é diferente
Dos costumes do sertão
Num se pode comprar nada
Sem topar com tubarão
Vou voltar pra minha terra
No primeiro caminhão
Vocês vão me adesculpar
Mas arrepiro essa expressão
No Ceará não tem disso não,
Não tem disso não, não tem disso não
No Ceará não tem disso não
Não tem disso não, não tem disso não
Não, não, não, No Ceará não tem disso não,
Não, não, não, No Ceará não tem disso não.*

— LUIZ GONZAGA (No Ceará Não Tem Disso Não)

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar dois métodos de bifurcação de soluções periódicas de uma equação diferencial. Tais métodos permitem obter soluções periódicas de um sistema perturbado quando todas as soluções do sistema não-perturbado são periódicas. Essas idéias podem ser aplicadas para determinar a existência de geodésicas fechadas em superfícies que são perturbações de uma superfície dada, quando desta última já sabemos serem todas as geodésicas fechadas, como a esfera, por exemplo.

Palavras Chave: Soluções Periódicas, Bifurcação, Sistemas Hamiltonianos.

Abstract

The purpose of this work is to study two bifurcation methods of differential equations periodic solutions. These methods leave to find periodic solutions of a perturbed system, when all solutions of non-perturbed system are periodic. We can apply this idea to determine the existence of closed geodesics in surfaces, which are perturbations of others surfaces, whose geodesics are closed, for instance, the sphere.

Key Words: Periodic Solutions, Bifurcation, Hamiltonian Systems.

Sumário

Agradecimentos	ix
Resumo	xiii
Abstract	xv
Introdução	1
1 Bifurcação de Soluções Periódicas	3
1.1 Primeiro Método	3
1.2 Segundo Método	6
1.3 Caso de uma Variedade Invariante	14
2 Considerações Sobre Sistemas Hamiltonianos	15
2.1 Variedades Simpléticas	15
2.2 Sistemas Hamiltonianos	17
2.3 Sistemas Hamiltonianos com Vínculos	19
3 O Problema	25
3.1 Descrição do Problema	25
3.2 Cálculo das Equações	26

3.3	Aplicação da Técnica de Bifurcação	31
	Bibliografia	35

Introdução

No presente trabalho, estudamos dois métodos de bifurcação de soluções periódicas de uma equação diferencial. Estes métodos permitem obter soluções periódicas de um sistema perturbado quando todas as soluções do sistema não-perturbado são periódicas. Este é o conteúdo do Capítulo 1.

No Capítulo 3, fazemos uma tentativa de usar um dos métodos para determinação de geodésicas fechadas em uma superfície que é uma deformação da esfera. Embora inconclusivo, o esforço neste sentido permitiu desenvolver maior familiaridade com o método e talvez uma modificação no tratamento do problema venha a dar algum resultado.

No Capítulo 2, fazemos uma pequena incursão à teoria dos Sistemas Hamiltonianos em preparação ao estudo do Capítulo 3.

Bifurcação de Soluções Periódicas

1.1 Primeiro Método

Consideremos a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x) + O(\varepsilon^2), \quad (1.1)$$

definida em um aberto $\Omega \times I$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Suponhamos que o lado direito de (1.1) é de classe C^k , ($k \geq 2$) em (x, ε) . Seja $\varphi(t, x, \varepsilon)$ a solução que em $t = 0$ vale x . O fluxo $\varphi(t, x, \varepsilon)$ tem a mesma classe de diferenciabilidade da equação.

Pela Fórmula de Taylor aplicada à função $\varepsilon \mapsto \varphi(t, x, \varepsilon)$, temos

$$\varphi(t, x, \varepsilon) = \varphi(t, x, 0) + \varepsilon D_\varepsilon \varphi(t, x, 0) + O(\varepsilon^2). \quad (1.2)$$

Supondo, agora, que existe $T \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(T, x, 0) = x, \text{ para todo } x \in \Omega, \quad (1.3)$$

buscaremos soluções de (1.1) tais que

$$\varphi(T, x, \varepsilon) = x. \quad (1.4)$$

Uma propriedade que o fluxo de uma equação diferencial autônoma satisfaz é a seguinte:

$$\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)).$$

Assim, se encontrarmos x tal que $\varphi(T, x, \varepsilon) = x$, teremos que

$$\varphi(t + T, x, \varepsilon) = \varphi(t, \varphi(T, x, \varepsilon), \varepsilon) = \varphi(t, x, \varepsilon), \quad (1.5)$$

e portanto a solução que em $t=0$ passa por x será uma solução T -periódica de (1.1).

Substituindo $\varphi(T, x, \varepsilon) = x$ em (1.2), temos:

$$\varphi(T, x, 0) + \varepsilon D_\varepsilon \varphi(T, x, 0) + O(\varepsilon^2) - x = 0. \quad (1.6)$$

Como $\varphi(T, x, 0) = x$, ficamos com a seguinte equação

$$G(x, \varepsilon) = D_\varepsilon \varphi(T, x, 0) + O(\varepsilon) = 0, \quad (1.7)$$

onde G é de classe C^{k-1} em (x, ε) .

Suponhamos que existe $x^* \in \Omega$ tal que $G(x^*, 0) = D_\varepsilon \varphi(T, x^*, 0) = 0$ e que, além disso, $D_x G(x^*, 0)$ é invertível. Neste caso, o Teorema da Função Implícita garante que existe uma vizinhança I_0 de $\varepsilon = 0$ e uma função de classe C^{k-1} , $x = x(\varepsilon)$, tais que $G(x(\varepsilon), \varepsilon) = 0$, para todo $\varepsilon \in I_0$. Assim, a equação (1.4) será satisfeita para $x = x(\varepsilon)$ e, portanto, teremos soluções T -periódicas de (1.1).

Exemplo 1.1.1. *Determinar soluções periódicas do sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon f_1(x, y) + O(\varepsilon^2) \\ \dot{y} = -x + \varepsilon f_2(x, y) + O(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (1.8)$$

com período 2π , quando $f_1(x, y) = ax + \alpha x^3$ e $f_2(x, y) = by + \beta y^3$.

Sejam $\chi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. A equação torna-se:

$$\dot{\chi} = A\chi + \varepsilon f(\chi) + O(\varepsilon^2), \quad (1.9)$$

cujo fluxo denotamos por $\varphi(t, \chi, \varepsilon)$.

O fluxo do sistema não-perturbado é o fluxo linear

$$\varphi(t, \chi, 0) = e^{tA} \chi = (x \cos(t) + y \sin(t), -x \sin(t) + y \cos(t)), \quad (1.10)$$

donde vemos que todas as soluções são periódicas com o mesmo período $T = 2\pi$.

Seguindo o método descrito acima, procuraremos soluções da equação $G(\chi^*, 0) = 0$ com a propriedade adicional de ser $D_\chi G(\chi^*, 0)$ invertível.

Pela Fórmula da Variação dos Parâmetros, temos

$$\varphi(t, \chi, \varepsilon) = e^{tA} \chi + \varepsilon \int_0^t e^{(t-s)A} f(e^{sA} \chi) ds + O(\varepsilon^2).$$

Como $T = 2\pi$, temos $e^{TA} = I$, donde:

$$D_\varepsilon \varphi(T, \chi, 0) = \int_0^T e^{-sA} f(e^{sA} \chi) ds. \quad (1.11)$$

Por (1.10), temos

$$f(e^{tA} \chi) = \begin{pmatrix} a(x \cos(t) + y \sin(t)) + \alpha(x \cos(t) + y \sin(t))^3 \\ b(-x \sin(t) + y \cos(t)) + \beta(-x \sin(t) + y \cos(t))^3 \end{pmatrix}$$

e como $A^T = -A$, donde,

$$e^{-tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

vemos que a integração em (1.11) requer o conhecimento das seguintes integrais:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt &= \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \pi, \\ \int_0^{2\pi} \cos^4(t) dt &= \int_0^{2\pi} \sin^4(t) dt = \frac{3\pi}{4}, \\ \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \cos^2(t) dt &= \frac{\pi}{4}, \\ \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt &= \int_0^{2\pi} \sin^3(t) \cos(t) dt = \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos^3(t) dt = 0. \end{aligned}$$

A primeira componente de $e^{-tA} f(e^{tA} \chi)$ sendo

$$\begin{aligned} &a \cos(t)(x \cos(t) + y \sin(t)) + \alpha \cos(t)(x \cos(t) + y \sin(t))^3 \\ &- b \sin(t)(-x \sin(t) + y \cos(t)) - \beta \sin(t)(-x \sin(t) + y \cos(t))^3 \end{aligned}$$

e a segunda, sendo

$$\begin{aligned} &a \sin(t)(x \cos(t) + y \sin(t)) + \alpha \sin(t)(x \cos(t) + y \sin(t))^3 \\ &- b \cos(t)(-x \sin(t) + y \cos(t)) - \beta \cos(t)(-x \sin(t) + y \cos(t))^3, \end{aligned}$$

a integração em (1.11) nos dá

$$D_\varepsilon \varphi(T, \chi, 0) = \pi \begin{pmatrix} (a+b)x + \frac{3}{4}(\alpha+\beta)(x^3 + xy^2) \\ (a+b)y + \frac{3}{4}(\alpha+\beta)(x^2y + y^3) \end{pmatrix}.$$

Vemos que $D_\varepsilon \varphi(T, \chi^*, 0) = 0$ se, e só se, $\chi^* = (0, 0)$ ou $\chi^* = (x^*, y^*)$ é um ponto do círculo

$$x^2 + y^2 = -\frac{4(a+b)}{3(\alpha+\beta)}, \quad (1.12)$$

supondo $\gamma = -\frac{4(a+b)}{3(\alpha+\beta)} > 0$.

Observação 1.1.2. Os pontos do círculo incluem as soluções $x^* = 0, y^* \neq 0$ e $x^* \neq 0, y^* = 0$.

Agora,

$$D_\chi D_\varepsilon \varphi(T, \chi, 0) = \pi \begin{pmatrix} a+b + \frac{9}{4}(\alpha+\beta)x^2 + \frac{3}{4}(\alpha+\beta)y^2 & \frac{6}{4}(\alpha+\beta)xy \\ \frac{6}{4}(\alpha+\beta)xy & a+b + \frac{3}{4}(\alpha+\beta)x^2 + \frac{9}{4}(\alpha+\beta)y^2 \end{pmatrix}$$

donde se vê imediatamente que, quando $\chi^* = (0, 0)$,

$$D_\chi D_\varepsilon \varphi(T, \chi^*, 0) = \pi \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$$

é invertível, desde que tenhamos $(a+b) \neq 0$.

Assim, existe $\chi = \chi(\varepsilon)$ com $\chi(0) = 0$ e obtemos uma solução periódica $\varphi(t, \chi(\varepsilon), \varepsilon)$ com $\chi(\varepsilon)$ próximo de 0.

Calculando o determinante de $D_\chi D_\varepsilon \varphi(T, \chi, 0)$, encontramos que ele é igual a

$$\pi^2 \left[(a+b)^2 + 3(a+b)(\alpha+\beta)(x^2+y^2) + \frac{27}{16}(\alpha+\beta)^2(x^2+y^2)^2 \right]$$

e verificamos que ele se anula em qualquer ponto do círculo dado em (1.12). Isto é devido ao fato que estas raízes da equação $G(\chi^*, 0) = 0$ não são isoladas. Neste caso, não podemos garantir a existência de soluções periódicas de (1.9) com condição inicial $\chi(\varepsilon)$ próximas de χ^* no círculo, tendo período 2π .

1.2 Segundo Método

Consideremos agora a equação (1.1), supondo que o período das soluções do sistema não-perturbado depende das condições iniciais, ou seja, existe $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(T(x), x, 0) = x$, para todo $x \in \Omega$.

Por (1.5), uma solução da equação de periodicidade (1.4) será tal que

$$\varphi(t + T(x), x, \varepsilon) = \varphi(t, \varphi(T(x), x, \varepsilon), \varepsilon) = \varphi(t, x, \varepsilon),$$

e portanto a solução que em $t=0$ passa por x será uma solução $T(x)$ -periódica de (1.1).

Substituindo $\varphi(T(x), x, \varepsilon) = x$ em (1.2), temos

$$\varphi(T(x), x, 0) + \varepsilon D_\varepsilon \varphi(T(x), x, 0) + O(\varepsilon^2) - x = 0.$$

Como $\varphi(T(x), x, 0) = x$, ficamos com a seguinte equação

$$G(x, \varepsilon) = D_\varepsilon \varphi(T(x), x, 0) + O(\varepsilon) = 0.$$

Suponhamos que existe $x^* \in \Omega$ tal que $G(x^*, 0) = D_\varepsilon \varphi(T(x^*), x^*, 0) = 0$. A derivada (em relação a x) de $G(x, 0)$ em x^* é dada por:

$$D_x G(x^*, 0) \cdot \xi = D_t D_\varepsilon \varphi(T(x^*), x^*, 0) \cdot (DT(x^*) \cdot \xi) + D_x D_\varepsilon \varphi(T(x^*), x^*, 0) \cdot \xi. \quad (1.13)$$

Seja

$$v = D_t D_\varepsilon \varphi(T(x^*), x^*, 0).$$

Analisemos dois casos:

[Caso I] Se $v = 0$ e $D_x D_\varepsilon \varphi(T(x^*), x^*, 0)$ é um isomorfismo, então, de (1.13), $D_x G(x^*, 0)$ também é um isomorfismo.

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança I_0 de $\varepsilon = 0$ e uma função $x = x(\varepsilon)$, de classe C^{k-1} , tais que $G(x(\varepsilon), \varepsilon) = 0$, para todo $\varepsilon \in I_0$. Neste caso, a equação (1.3) será satisfeita e teremos soluções $T(x(\varepsilon))$ -periódicas de (1.1).

[Caso II] Se $v \neq 0$, suponhamos que:

1. v não está contido no subespaço $Im(D_x D_\varepsilon \varphi(T(x^*), x^*, 0))$;
2. $D_x D_\varepsilon \varphi(T(x^*), x^*, 0)$ é injetiva quando restrita ao subespaço $E = \ker DT(x^*)$.

Neste caso, de (1.13), a hipótese (i) implica que, se $D_x G(x^*, 0) \cdot \xi = 0$, temos

$$DT(x^*) \cdot \xi = 0 \text{ e } D_x D_\varepsilon \varphi(T(x^*), x^*, 0) \cdot \xi = 0$$

e da hipótese (ii) segue-se que $\xi = 0$. Portanto, $D_x G(x^*, 0)$ é injetiva, logo é um isomorfismo, e segue-se a mesma conclusão do caso anterior.

A determinação de soluções periódicas por estes métodos requer o conhecimento de

$$X(t) = D_\varepsilon \varphi(t, x, 0),$$

que por sua vez requer a solução de um sistema linear com coeficientes periódicos, como veremos a seguir.

Como $\varphi(t, x, \varepsilon)$ é solução de (1.1), temos:

$$D_t \varphi(t, x, \varepsilon) = f(\varphi(t, x, \varepsilon)) + \varepsilon g(\varphi(t, x, \varepsilon)) + O(\varepsilon^2).$$

Derivando a expressão acima em relação a ε e trocando a ordem de derivação do lado esquerdo, obtemos:

$$D_t D_\varepsilon \varphi(t, x, \varepsilon) = Df(\varphi(t, x, \varepsilon)) \cdot D_\varepsilon \varphi(t, x, \varepsilon) + g(\varphi(t, x, \varepsilon)) + \varepsilon Dg(\varphi(t, x, \varepsilon)) \cdot D_\varepsilon \varphi(t, x, \varepsilon) + O(\varepsilon).$$

Agora, tomando $\varepsilon = 0$, obtemos

$$D_t D_\varepsilon \varphi(t, x, 0) = Df(\varphi(t, x, 0)) \cdot D_\varepsilon \varphi(t, x, 0) + g(\varphi(t, x, 0)).$$

Sabemos que $D_\varepsilon \varphi(0, x, 0) = 0$, pois $\varphi(0, x, \varepsilon) = x$, para todo ε . Denominando $A(t) = Df(\varphi(t, x, 0))$ temos que $X(t)$ é solução do seguinte sistema linear com coeficientes periódicos (de período igual a $T(x)$):

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X + g(\varphi(t, x, 0), t), \\ X(0) = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Uma vez obtido o fluxo da equação linear homogênea associada a (1.14), a fórmula da variação dos parâmetros nos fornecerá a solução procurada para a equação não-homogênea. A dificuldade para a obtenção do fluxo da equação homogênea é a presença de algum termo não-constante. Temos que buscar uma representação de Floquet, o que em geral não é fácil.

Exemplo 1.2.1. *Pesquisar soluções periódicas para o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = (\gamma + r^2)y + \varepsilon f_1(x, y) + O(\varepsilon^2) \\ \dot{y} = -(\gamma + r^2)x + \varepsilon f_2(x, y) + O(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (1.15)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $f_1 = ax$ e $f_2 = by$.

O fluxo do sistema não-perturbado é $\varphi(t, x, y; 0) = (x_0(t), y_0(t))$, onde

$$\begin{cases} x_0(t) = x \cos((\gamma + r^2)t) + y \sin((\gamma + r^2)t) \\ y_0(t) = -x \sin((\gamma + r^2)t) + y \cos((\gamma + r^2)t). \end{cases} \quad (1.16)$$

Assim, todas as soluções são periódicas com o período dado por

$$T = T(x, y) = \frac{2\pi}{\gamma + x^2 + y^2}. \quad (1.17)$$

Sejam $\chi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, de modo que o sistema (1.15) corresponde à equação

$$\dot{\chi} = (\gamma + r^2)A\chi + \varepsilon f(\chi) + O(\varepsilon^2), \quad (1.18)$$

cujo fluxo denotamos por $\varphi(t, \chi, \varepsilon)$. Queremos saber se a equação de periodicidade

$$\varphi(T(\chi), \chi, \varepsilon) = \chi$$

admite uma solução. Fazendo

$$f_0(\chi) = (\gamma + r^2)A\chi$$

e usando o processo descrito no Segundo Método, temos que encontrar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{X} = B(t)X + f(\varphi(t, \chi; 0)) \\ X(0) = 0, \end{cases} \quad (1.19)$$

onde a matriz $B(t) = Df_0(\varphi(t, \chi; 0))$ e o termo não-homogêneo $f(\varphi(t, \chi; 0))$ são periódicos em t de período $T(\chi)$. Tal solução nos dará $D_\varepsilon \varphi(t, \chi; 0) = X(t)$ e, por conseguinte, $\vec{v} = D_t D_\varepsilon \varphi(T, \chi, 0) = X'(T)$, onde $T = T(\chi)$.

Como

$$Df_0(\chi) \cdot \xi = (\gamma + r^2)A\xi + 2\langle \chi, \xi \rangle A\chi,$$

fazendo $\chi_0(t) = \varphi(t, \chi; 0)$ e notando que $\|\chi_0(t)\| = \|\chi(t)\| = r(t)$, obtemos

$$B(t)X = Df_0(\chi_0(t))X = (\gamma + \|\chi\|^2)AX + 2\langle \chi_0(t), X \rangle A\chi_0(t)$$

e, assim, temos que resolver a seguinte equação linear com coeficientes periódicos de período $T(\chi)$:

$$\dot{X} = (\gamma + \|\chi\|^2)AX + 2\langle \chi_0(t), X \rangle A\chi_0(t) + f(\chi_0(t)), \quad (1.20)$$

com condição inicial $X(0) = 0$.

Consideremos a rotação $R(t)$ pelo ângulo $-(\gamma + r^2)t$. Na base canônica e_1, e_2 de $\mathbb{R}^2$, temos:

$$R(t) \cdot e_1 = \cos((\gamma + r^2)t)e_1 - \sin((\gamma + r^2)t)e_2$$

$$R(t) \cdot e_2 = \sin((\gamma + r^2)t)e_1 + \cos((\gamma + r^2)t)e_2,$$

cujas matrizes, nesta base, é

$$\begin{pmatrix} \cos((\gamma + r^2)t) & \sin((\gamma + r^2)t) \\ -\sin((\gamma + r^2)t) & \cos((\gamma + r^2)t) \end{pmatrix}.$$

Consideremos, agora, a mudança de variáveis

$$X = R(t)U. \quad (1.21)$$

Como $R(t)\chi = R(t)(xe_1 + ye_2) = \chi_0(t)$, a equação (1.20) é transformada na equação

$$R\dot{U} + \dot{R}U = (\gamma + r^2)ARU + 2\langle R\chi, RU \rangle AR\chi + f(R(t)\chi)$$

ou

$$\dot{U} = -R^{-1}\dot{R}U + (\gamma + r^2)R^{-1}ARU + \langle \chi, U \rangle R^{-1}AR\chi + R^{-1}f(R\chi).$$

Uns cálculos mostram que

$$R^{-1}\dot{R} = (\gamma + r^2)A \quad \text{e} \quad R^{-1}AR = A,$$

de modo que a equação diferencial se reduz a

$$\dot{U} = -(\gamma + r^2)AU + (\gamma + r^2)AU + 2\langle \chi, U \rangle A\chi + R^{-1}f(R\chi)$$

$$= 2\langle \chi, U \rangle A\chi + R^{-1}f(R\chi), \quad (1.22)$$

cuja equação linear homogênea, agora, tem coeficientes constantes.

Fazendo $U = (u, v)$, a equação homogênea associada a (1.22), em coordenadas, é :

$$\begin{cases} \dot{u} = 2y(xu + yv) \\ \dot{v} = -2x(xu + yv) \end{cases}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & 2y^2 \\ -2x^2 & -2xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\dot{U} = BU. \quad (1.23)$$

A matriz B é nilpotente de ordem 2, logo $e^{tB} = I + tB$, e assim o fluxo de (1.23) é dado por

$$\psi_t(U) = e^{tB}U,$$

onde

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 + 2xyt & 2y^2t \\ -2x^2t & 1 - 2xyt \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Pela Fórmula da Variação dos Parâmetros, o fluxo de (1.22), isto é, o fluxo da equação

$$\dot{U} = BU + G(t), \quad (1.25)$$

onde

$$G(t) = R^{-1}f(R\chi)$$

é dado por

$$\phi(t, U) = e^{tB}U + \int_0^t e^{(t-s)B}G(s)ds.$$

Como $R(\chi) = \chi_0(t) = \varphi(t, \chi, 0)$, de (1.16), temos

$$f(R(\chi)) = \begin{pmatrix} a(x \cos((\gamma + r^2)t) + y \sin((\gamma + r^2)t)) \\ b(-x \sin((\gamma + r^2)t) + y \cos((\gamma + r^2)t)) \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

A solução de (1.19) corresponde, via (1.21), à solução de (1.25) com $U(0) = 0$. Assim, precisamos achar

$$\phi(t, 0) = e^{tB} \int_0^t e^{-sB} G(s) ds. \quad (1.27)$$

De (1.21), temos $X(t) = R(t)\phi(t, 0)$, donde, fazendo $T = T(x, y)$, temos

$$\vec{v} = R'(T)\phi(T, 0) + R(T)\phi'(T, 0) = (\gamma + r^2)A\phi(T, 0) + \phi'(T, 0). \quad (1.28)$$

Para encontrar $D_\varepsilon \varphi(T, \chi; 0) = X(T) = \phi(T, 0)$ e $\vec{v}$, temos que fazer a integração

$$E = \int_0^T e^{-tB} G(t) dt. \quad (1.29)$$

De (1.24), temos

$$e^{-tB} = \begin{pmatrix} 1 - 2xyt & -2y^2t \\ 2x^2t & 1 + 2xyt \end{pmatrix},$$

donde, fazendo $\mu = (\gamma + r^2)$, temos

$$e^{-tB} R^{-1} = \begin{pmatrix} (1 - 2xyt) \cos(\mu t) - 2y^2t \sin(\mu t) & (2xyt - 1) \sin(\mu t) - 2y^2t \cos(\mu t) \\ 2x^2t \cos(\mu t) + (1 + 2xyt) \sin(\mu t) & -2x^2t \sin(\mu t) + (1 + 2xyt) \cos(\mu t) \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Vemos de (1.26) e (1.30) que a integração em (1.29) requer o cálculo das seguintes integrais:

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos^2(\mu t) dt &= \int_0^T \sin^2(\mu t) dt = \frac{\pi}{\mu}, \\ \int_0^T \sin(\mu t) \cos(\mu t) dt &= 0, \\ \int_0^T t \cos^2(\mu t) dt &= \int_0^T t \sin^2(\mu t) dt = \frac{\pi^2}{\mu^2}, \\ \int_0^T t \sin(\mu t) \cos(\mu t) dt &= -\frac{\pi}{2\mu^2}. \end{aligned}$$

Procedendo a esta integração, obtemos para

$$D_\varepsilon \varphi(T, \chi, 0) = e^{TB} E$$

e

$$\vec{v} = \mu A e^{TB} E + B e^{TB} + G(T)$$

as seguintes expressões:

$$D_\varepsilon \varphi(T, \chi, 0) = \begin{pmatrix} \frac{(a+b)\pi}{\mu} x + \frac{2(a-b)\pi}{\mu^2} xy^2 - \frac{2(a+b)\pi^2}{\mu^2} x^2 y - \frac{2(a+b)\pi^2}{\mu^2} y^3 \\ \frac{(a+b)\pi}{\mu} y + \frac{2(a+b)\pi^2}{\mu^2} xy^2 - \frac{2(a-b)\pi}{\mu^2} x^2 y + \frac{2(a+b)\pi^2}{\mu^2} x^3 \end{pmatrix} = X(T), \quad (1.31)$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} X(T) + \begin{pmatrix} 2xy & 2y^2 \\ -2x^2 & -2xy \end{pmatrix} X(T) + \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Ilustremos a aplicação do método em duas situações:

Suponhamos primeiro $\gamma > 0$ e seja $\chi^* = (0, 0)$. Então $D_\varepsilon \varphi(T, \chi^*, 0) = 0, \vec{v} = 0$ e

$$D_\chi D_\varepsilon \varphi(T, \chi^*, 0) = \begin{pmatrix} \frac{(a+b)\pi}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{(a+b)\pi}{\mu} \end{pmatrix},$$

logo é um isomorfismo quando $(a+b) \neq 0$. Estamos assim no [Caso I] do Segundo Método e concluímos que existe uma solução $T(\chi(\varepsilon))$ —periódica de (1.15) próxima da origem.

Para um exemplo de aplicação do [Caso II], suponhamos $\gamma = 0$ e $a = -b$. Neste caso, os pontos $\chi^* = (x, 0)$, para todo $x \neq 0$, são zeros de $D_\varepsilon \varphi(T, \chi, 0)$, mas

$$D_\chi D_\varepsilon \varphi(T, \chi^*, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{4b\pi}{\mu^2} x^2 \end{pmatrix}$$

não é isomorfismo. Temos $\vec{v} = (ax, 0) \neq 0$ e

$$\ker DT(\chi^*) = \ker \begin{pmatrix} \frac{-4\pi}{x^3} & 0 \end{pmatrix} = \langle (0, 1) \rangle.$$

Com isso, temos que $\vec{v} \notin \text{Im}(D_\chi D_\varepsilon \varphi(T, \chi^*, 0))$. Além disso, se tivermos

$$D_\chi D_\varepsilon \varphi(T, \chi^*, 0) \cdot (0, \eta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{4b\pi}{\mu^2} x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

então $\eta = 0$. Logo, $D_\chi D_\varepsilon \varphi(T, \chi^*, 0)$ é injetiva quando restrita a $\ker DT(\chi^*)$.

Portanto as hipóteses de método são satisfeitas e concluímos que, na vizinhança de qualquer ponto da forma $\chi^* = (x, 0), x \neq 0$, passa uma solução $T(\chi(\varepsilon))$ —periódica de (1.15). Esta mesma análise se aplica aos pontos da forma $\chi^* = (0, y)$, com $y \neq 0$.

1.3 Caso de uma Variedade Invariante

Suponhamos, agora, que para cada ε , o fluxo $\varphi(t, x, \varepsilon)$ da equação (1.1) deixa invariante uma superfície $M_\varepsilon \subset \Omega$. Para a equação de periodicidade

$$\varphi(T, x, \varepsilon) = x \quad [\text{ou } \varphi(T(x), x, \varepsilon) = x]$$

não poderíamos, em princípio, reescrevê-la na forma

$$\varphi(T, x, \varepsilon) - x = 0,$$

pois, no ambiente curvo, não-euclidiano, a diferença dos vetores poderia não fazer sentido. Mas como para todo ε , $M_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, esta diferença não só faz sentido como podemos fazer a expansão em ε , como anteriormente, para obter

$$D_\varepsilon \varphi(T, x, \varepsilon) + O(\varepsilon) = 0,$$

impondo adicionalmente a restrição de que $x \in M_\varepsilon$.

No capítulo 3 aplicaremos estas idéias ao fluxo geodésico de uma perturbação da esfera. Antes faremos, no próximo capítulo, algumas considerações sobre Sistemas Hamiltonianos.

Considerações Sobre Sistemas Hamiltonianos

Neste capítulo, estudaremos alguns fatos sobre sistemas hamiltonianos que serão usados na abordagem do problema no Capítulo 3.

2.1 Variedades Simpléticas

Definição 2.1.1. *Uma variedade simplética é um par (M, ω) , onde M é uma variedade C^∞ e ω é uma 2-forma diferencial fechada e não-degenerada sobre M .*

Como ω é bilinear e não-degenerada em cada espaço tangente, então, para cada $p \in M$, obtemos um isomorfismo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : T_p M &\longrightarrow T_p^* M, \\ v &\longmapsto \mathcal{L} \cdot v = \omega(-, v).\end{aligned}$$

Fixado um sistema de coordenadas $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$ num aberto U de M temos a base

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \text{ em } T_p M$$

e sua dual

$$dx_1, \dots, dx_n \text{ em } T_p^* M.$$

Se $L = (L_{ij})$ é a matriz de $\mathcal{L}$ nestas bases, isto é,

$$\mathcal{L} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i L_{ij} dx_i,$$

obtemos

$$L_{ij} = \left(\mathcal{L} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Assim, a matriz L é anti-simétrica e como $\mathcal{L}$ é um isomorfismo, esta matriz é invertível. De $L^T = -L$, obtemos $\det L = (-1)^n \det L$, donde concluímos que n é par. Isso mostra que toda variedade simplética tem dimensão par.

Se $u = \sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $v = \sum v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ são vetores em $T_p M$, então

$$\omega(u, v) = \sum_{i,j} u_i v_j \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} L_{ij} u_i v_j,$$

isto é, nas coordenadas $U = (u_1, \dots, u_n)$ e $V = (v_1, \dots, v_n)$, temos

$$\omega(u, v) = U^T L V. \quad (2.1)$$

Exemplo 2.1.2. O exemplo padrão de uma variedade simplética é o espaço $\mathbb{R}^{2n}$ com a forma simplética canônica ω dada pela matriz $L = J$, onde,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

sendo I a matriz identidade $n \times n$. Assim, para $X, Y \in \mathbb{R}^{2n}$, temos

$$\omega(X, Y) = X^T J Y. \quad (2.2)$$

Exemplo 2.1.3. Outro exemplo importante da ocorrência natural de uma variedade simplética é o fibrado cotangente $P = T^*M$ de uma variedade C^∞ . Define-se em P uma 1-forma diferencial canônica, da seguinte maneira: Dado $(p, q) \in T^*M$, com $p \in M$ e $q \in (T_p M)^*$, fazemos

$$\theta_{(p,q)} \cdot v = q(D\pi(p, q) \cdot (v)),$$

onde $v \in T_{(p,q)}(T^*M)$, $\pi : T^*M \rightarrow M$ é a projeção e $D\pi(p, q) : T_{(p,q)}(T^*M) \rightarrow T_p M$ é a sua derivada. Agora definimos em T^*M uma 2-forma ω fazendo:

$$\omega = -d\theta.$$

Dada uma variedade simplética (M^{2n}, ω) , dizemos que um sistema de coordenadas

$$\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_{2n}(p))$$

é canônico se, para cada ponto do domínio de φ , a matriz $L = \left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \right)$ é a matriz simplética padrão J .

É um teorema devido a G. Darboux que na vizinhança de qualquer ponto existe um sistema canônico de coordenadas. Assim, localmente, uma variedade simplética é o $\mathbb{R}^{2n}$ com a forma simplética padrão. Ver [7].

2.2 Sistemas Hamiltonianos

Definição 2.2.1. Um Sistema Hamiltoniano é uma terna (M, ω, H) , onde (M, ω) é uma variedade simplética e $H \in C^\infty(M)$. A função H é chamada o Hamiltoniano ou energia total do sistema.

O campo de vetores X_H definido pela condição

$$\omega(X_H, Y) = dH(Y), \text{ para todo campo } Y \text{ em } M, \quad (2.3)$$

é chamado o campo Hamiltoniano do sistema, e seu fluxo $\phi_t^{X_H}$ é o fluxo Hamiltoniano.

Proposição 2.2.2. Se $\lambda, G \in C^\infty(M)$, então:

$$X_{\lambda G} = \lambda X_G + GX_\lambda.$$

Prova:

$$\begin{aligned} \omega(X_{\lambda G}, Y) &= d\lambda G(Y) = \lambda dG(Y) + Gd\lambda(Y) = \\ &= \lambda \omega(X_G, Y) + G\omega(X_\lambda, Y) = \omega(\lambda X_G + GX_\lambda, Y), \text{ para todo } Y. \end{aligned}$$

Como ω é não-degenerada, $X_{\lambda G} = \lambda X_G + GX_\lambda$. ■

As curvas integrais do campo X_H , $\sigma(t) = \phi_t^{X_H}(p)$, $p \in M$, são caracterizadas pela condição

$$\sigma'(t) = X_H(\sigma(t)), \quad \sigma(0) = p.$$

No $\mathbb{R}^{2n}$ com a forma simplética padrão (2.2) e o produto interno Euclideano $\langle \cdot, \cdot \rangle$, a equação (2.3) é escrita na forma

$$X_H^T JY = \langle \nabla H, Y \rangle, \quad \text{para todo } Y,$$

e como

$$X_H^T JY = \langle X_H, JY \rangle = \langle J^T X_H, Y \rangle = \langle J^{-1} X_H, Y \rangle,$$

concluimos que

$$\langle J^{-1} X_H, Y \rangle = \langle \nabla H, Y \rangle, \text{ para todo } Y \in \mathbb{R}^{2n},$$

logo

$$X_H = J\nabla H. \quad (2.4)$$

Assim, a equação que define as curvas integrais de X_H é

$$\dot{X} = J\nabla H(X), \quad (2.5)$$

ou, reescrevendo os pontos de $\mathbb{R}^{2n}$ na forma $X = (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x, \quad (2.6)$$

onde H_x e H_y são os gradientes de H em relação a x (mantendo y fixo) e em relação a y (mantendo x fixo).

A equação (2.5) ou as equações (2.6) são as *equações Hamiltonianas* definidas pela *função Hamiltoniana* $H = H(x, y)$.

Assim, um sistema Hamiltoniano é definido num aberto de $\mathbb{R}^{2n}$ em termos de coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ por

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial y_j}, \quad \dot{y}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (2.7)$$

onde $H = H(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$.

Definição 2.2.3. O Colchete de Poisson de duas funções $F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis no aberto $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ é a função $\{F, G\}$ definida por

$$\{F, G\}(X) = \nabla F(X)^T J \nabla G(X), \quad X \in U.$$

Em coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, o Colchete de Poisson é dado por

$$\{F, G\} = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial y_i} - \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial y_i} \right).$$

Se $\mathcal{D}(U)$ é o espaço das funções diferenciáveis de U em $\mathbb{R}$, a aplicação

$$\{ , \} : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}, \quad (F, G) \longmapsto \{F, G\}$$

é, claramente, bilinear e anti-simétrica.

Observação 2.2.4. Ela também satisfaz a Identidade de Jacobi

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} = 0,$$

dando, assim, uma estrutura de Álgebra de Lie a $\mathcal{D}(U)$.

2.3 Sistemas Hamiltonianos com Vínculos

Consideremos a variedade simplética $\mathbb{R}^{2n}$ com a forma simplética canônica. Sejam $G_i : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, 2m$ funções diferenciáveis e analisemos o conjunto

$$M = \{x \in \mathbb{R}^{2n} | G_i(x) = 0, i = 1, \dots, 2m\}.$$

Proposição 2.3.1. *Se $\{\nabla G_1, \dots, \nabla G_{2m}\}$ é L.I., então M é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{2n}$ cuja dimensão é $2n - 2m$.*

Esta proposição é um corolário do seguinte teorema visto no curso de Análise no $\mathbb{R}^n$:

Teorema 2.3.2. *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe $C^k (k \geq 1)$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Seja $c \in \mathbb{R}^m$ um valor regular de F , isto é, c é tal que, para todo $p \in F^{-1}(c)$, a derivada $DF(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é sobrejetiva. Então, $M = F^{-1}(c)$ é uma variedade diferenciável de $\mathbb{R}^n$, de dimensão $n - m$ e, para cada ponto $p \in U$, $T_p M = \ker DF(p)$.*

Prova: Ver [8]. ■

Proposição 2.3.3. *A variedade M é simplética se e só se $\det(\{G_j, G_k\}) \neq 0$.*

Prova: Ver [10]. ■

Dado um Hamiltoniano $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, quando $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ é uma variedade simplética, temos que a função Hamiltoniana $H_M = H|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ induz um campo Hamiltoniano X_{H_M} em M . Ocorre que $X_{H_M} \neq X_H|_M$, pois, em geral, o campo X_H em $\mathbb{R}^{2n}$ não é tangente à subvariedade $M \subset \mathbb{R}^{2n}$. Para, a partir de H obtermos um campo tangente a M , consideramos a função

$$H^* = H - \sum_{j=1}^{2m} \lambda_j G_j, \quad (2.8)$$

para certas funções $\lambda_j \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $j = 1, \dots, 2m$ que serão determinadas precisamente para fazerem X_{H^*} ser tangente a M . Para que isso aconteça, devemos ter, para todo $k = 1, \dots, 2m$,

$$0 = \langle X_{H^*}, \nabla G_k \rangle.$$

Agora, usando (2.4), podemos reescrever a última igualdade como

$$0 = \langle J\nabla H^*, \nabla G_k \rangle.$$

Usando (2.8) temos

$$0 = \left\langle J\nabla \left(H - \sum_{j=1}^{2m} \lambda_j G_j \right), \nabla G_k \right\rangle = \left\langle G_k, H - \sum_{j=1}^{2m} \lambda_j G_j \right\rangle = \{G_k, H\} - \sum_{j=1}^{2m} \lambda_j \{G_k, G_j\}. \quad (2.9)$$

A última equação permite calcular os λ_j , uma vez que, sendo M simplética (por hipótese), a Proposição 2.3.3 dá

$$\det(\{G_j, G_k\}) \neq 0 \quad j, k = 1, \dots, 2m.$$

Teorema 2.3.4. *O campo de vetores induzido pela função hamiltoniana (2.8) é o campo*

$$X_{H^*} = X_H - \sum_{j=1}^{2m} \lambda_j(x) X_{G_j}. \quad (2.10)$$

Prova: Ver [2]. ■

Definição 2.3.5. *Denominamos a terna $(M, J|_M, H^*)$ de sistema vinculado e o campo X_{H^*} de campo vinculado à variedade simplética M .*

Exemplo 2.3.6. [Fluxo Geodésico na Esfera]

Seja S^2 a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$. Consideremos as funções $G_1, G_2 : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$G_1(x, y) = \|x\|^2 - 1 \quad \text{e} \quad G_2(x, y) = \langle x, y \rangle.$$

Podemos descrever o fibrado tangente de S^2 como sendo

$$M = TS^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^6 \mid G_1(x, y) = G_2(x, y) = 0\}.$$

Como $\{ \cdot, \cdot \}$ é uma aplicação anti-simétrica, temos

$$\{G_1, G_1\} = \{G_2, G_2\} = 0.$$

Calculemos agora $\{G_1, G_2\}$.

Temos $\nabla G_1(x, y) = (2x, 0)$ e $\nabla G_2(x, y) = (y, x)$. Assim

$$\{G_1, G_2\} = \nabla G_1^T J \nabla G_2 = \begin{pmatrix} 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = 2\|x\|^2 = 2 = -\{G_2, G_1\}. \quad (2.11)$$

Portanto

$$\det \begin{pmatrix} \{G_1, G_1\} & \{G_1, G_2\} \\ \{G_2, G_1\} & \{G_2, G_2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 4 \neq 0, \quad \text{para todo } x \in M.$$

Assim, pelo discutido acima, a estrutura simplética canônica de $\mathbb{R}^6$ induz uma estrutura simplética em M .

Pela Segunda Lei de Newton, o movimento de uma partícula livre em $\mathbb{R}^6$, não sujeita à ação de qualquer campo de forças, é descrito pela equação $\ddot{x} = 0$, ou equivalentemente, pelas equações Hamiltonianas

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0, \end{cases}$$

associadas ao Hamiltoniano $H(x, y) = \frac{\|y\|^2}{2}$.

Portanto, o fluxo geodésico em $\mathbb{R}^6$ é o fluxo do campo Hamiltoniano X_H , com $H(x, y) = \frac{\|y\|^2}{2}$.

Consideremos, então, o sistema vinculado $(M, J|_M, X_{H^*})$, onde

$$H^* = H - \lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2 = \frac{\|y\|^2}{2} - \lambda_1(\|x\|^2 - 1) - \lambda_2 \langle x, y \rangle. \quad (2.12)$$

Determinamos λ_1 e λ_2 usando (2.9). Temos

$$0 = \{G_1, H - \lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2\} = \{G_1, H\} - \lambda_2 \{G_1, G_2\} \quad \text{e}$$

$$0 = \{G_2, H - \lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2\} = \{G_2, H\} - \lambda_1 \{G_2, G_1\}$$

Portanto,

$$\lambda_2 = \frac{\{G_1, H\}}{\{G_1, G_2\}} \quad \text{e} \quad \lambda_1 = -\frac{\{G_2, H\}}{\{G_1, G_2\}}.$$

Já sabemos que $\{G_1, G_2\} = 2$ e $\{G_2, G_1\} = -2$. Calculemos $\{G_1, H\}$ e $\{G_2, H\}$. Como $\nabla H = (0, y)$ temos

$$\{G_2, H\} = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \|y\|^2.$$

$$\{G_1, H\} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = 2\langle x, y \rangle.$$

Portanto, $\lambda_1 = \frac{-\|y\|^2}{2}$ e $\lambda_2 = \langle x, y \rangle = 0$.

Assim, de (2.12), temos

$$H^*(x, y) = \frac{\|y\|^2}{2} - \lambda_1(\|x\|^2 - 1) - \lambda_2\langle x, y \rangle = \frac{\|y\|^2}{2} - \frac{\|y\|^2}{2} + \frac{\|x\|^2\|y\|^2}{2} = \frac{\|x\|^2\|y\|^2}{2}.$$

Logo, as equações para o fluxo geodésico na esfera S^2 são:

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y^* = \|x\|^2 y = y \\ \dot{y} = -H_x^* = -\|y\|^2 x. \end{cases} \quad (2.13)$$

Exemplo 2.3.7. [Pêndulo Esférico]

Seja e_3 o terceiro vetor da base canônica do $\mathbb{R}^3$, e consideremos o movimento de uma partícula de massa 1, sujeita à ação do campo gravitacional $F = \mu e_3$ (movimento em queda livre). Escolhamos convenientemente as unidades de modo que $\mu = 1$. Tal movimento é descrito pelo Hamiltoniano $H : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$H(x, y) = \frac{\|y\|^2}{2} + \langle x, e_3 \rangle.$$

Suponhamos agora que a partícula move-se apenas em S^2 (pêndulo esférico). Usando as mesmas funções G_1 e G_2 do exemplo anterior, então o Hamiltoniano do sistema vinculado é

$$H^* = H - \lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2 = \frac{\|y\|^2}{2} + \langle x, e_3 \rangle - \lambda_1(\|x\|^2 - 1) - \lambda_2\langle x, y \rangle. \quad (2.14)$$

Impondo as condições dadas em (2.9) temos

$$\lambda_2 = \frac{\{G_1, H\}}{\{G_1, G_2\}} \quad \text{e} \quad \lambda_1 = -\frac{\{G_2, H\}}{\{G_1, G_2\}}.$$

Já sabemos que $\{G_1, G_2\} = 2$ e $\{G_2, G_1\} = -2$. Calculemos $\{G_1, H\}$ e $\{G_2, H\}$. Como $\nabla H = (e_3, y)$ temos

$$\{G_2, H\} = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_3 \\ y \end{pmatrix} = \|y\|^2 - \langle x, e_3 \rangle.$$

$$\{G_1, H\} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_3 \\ y \end{pmatrix} = 2\langle x, y \rangle.$$

Portanto, $\lambda_1 = \frac{-\|y\|^2 + \langle x, e_3 \rangle}{2}$ e $\lambda_2 = \langle x, y \rangle = 0$.

Assim, de (2.14), temos

$$\begin{aligned} H^*(x, y) &= \frac{\|y\|^2}{2} - \lambda_1(\|x\|^2 - 1) - \lambda_2\langle x, y \rangle = \frac{\|y\|^2}{2} - \frac{\|y\|^2}{2} + \frac{3}{2}\langle x, e_3 \rangle + \frac{\|x\|^2(\|y\|^2 - \langle x, e_3 \rangle)}{2} = \\ &= \frac{3}{2}\langle x, e_3 \rangle + \frac{\|x\|^2(\|y\|^2 - \langle x, e_3 \rangle)}{2}. \end{aligned}$$

Logo, as equações para o movimento restrito à esfera S^2 são:

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y^* = \|x\|^2 y = y \\ \dot{y} = -H_x^* = -\left(\frac{3}{2}e_3 + x(\|y\|^2 - \langle x, e_3 \rangle) - \frac{e_3}{2}\right) = -(\langle x, F \rangle + \|y\|^2)x + F. \end{cases} \quad (2.15)$$

CAPÍTULO 3

O Problema

3.1 Descrição do Problema

Seja S_ρ a esfera de raio ρ em $\mathbb{R}^3$, $p \in S_\rho$, e consideremos a superfície $M = \Sigma^\varepsilon$ obtida da esfera por meio de uma perturbação radial:

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \left(\rho + \varepsilon \tau \left(\frac{p}{\rho} \right) \right) \frac{p}{\rho} \right\},$$

onde $\tau : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

Como $q = \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \in S_1$, se $x \in M$, então $\|x\| = \left| \rho + \varepsilon \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right|$. Desde que τ é diferenciável, é possível escolher ε suficientemente pequeno de modo que $\rho + \varepsilon \tau$ seja positivo, e assim teremos

$$\|x\| = \rho + \varepsilon \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right).$$

Definindo as funções

$$G_1(x, y) = \|x\| - \rho - \varepsilon \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \quad \text{e}$$

$$G_2(x, y) = \langle \nabla_x G_1(x, y), y \rangle,$$

o fibrado tangente à variedade M é dado por

$$TM := \{(x, y) \in \mathbb{R}^6 \mid G_1(x, y) = 0, G_2(x, y) = 0\}.$$

Consideremos o hamiltoniano das geodésicas de $\mathbb{R}^6$, $H(x, y) = \frac{\|y\|^2}{2}$. De acordo com o capítulo anterior, como

$$\{G_1, G_2\} = (\nabla G_1)^T J \nabla G_2 = \begin{pmatrix} \nabla_x G_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_x G_2 \\ \nabla_y G_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \nabla_x G_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_x G_2 \\ \nabla_y G_2 \end{pmatrix} = \|\nabla_x G_1(x, y)\|^2 > 0,$$

TM é uma variedade simplética, pela Proposição (2.3.3). Além disso, o Hamiltoniano das geodésicas de TM é dado por

$$H^* = H - \lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2,$$

onde λ_1 e λ_2 são determinados pelas condições $\{G_1, H^*\} = \{G_2, H^*\} = 0$.

O fluxo das equações em $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y^* \\ \dot{y} = -H_x^*, \end{cases} \quad (3.1)$$

deixa TM invariante. As geodésicas de M são as soluções destas equações restritas às condições $G_1(x, y) = 0$ e $G_2(x, y) = 0$.

Se denotarmos por $\varphi(t, x, y; \varepsilon)$ o fluxo das equações (3.1), então $\varphi(t, x, y; 0) = \varphi_0(t, x, y) = (x_0(t), y_0(t))$ é o fluxo geodésico na esfera, logo:

$$x_0(t) = \|x\| \left(\cos\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}t\right) \frac{x}{\|x\|} + \sin\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}t\right) \frac{y}{\|y\|} \right), \quad (3.2)$$

$$y_0(t) = \left(-\|y\| \sin\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}t\right) \frac{x}{\|x\|} + \|y\| \cos\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}t\right) \frac{y}{\|y\|} \right). \quad (3.3)$$

O período de $\varphi_0(t, x, y,)$ é $T(x, y) = \frac{2\pi\|x\|}{\|y\|}$. O problema que queremos resolver é:

$$\text{Existe solução } x = x(\varepsilon), y = y(\varepsilon) \text{ para a equação } \varphi(T(x, y), x, y; \varepsilon) = (x, y)? \quad (3.4)$$

3.2 Cálculo das Equações

O objetivo desta seção é calcular explicitamente (em função de τ) as equações (3.1). Começamos com as expressões de λ_1 e λ_2 .

Afirmção 3.2.1. $\lambda_1 = \frac{-\langle \nabla_x G_2(x,y), y \rangle}{\|\nabla_x G_1(x,y)\|^2}$ e $\lambda_2 = \frac{\langle \nabla_x G_1(x,y), y \rangle}{\|\nabla_x G_1(x,y)\|^2}$

Prova: Sabemos que λ_1 e λ_2 são determinados pelas condições $\{G_1, H^*\} = \{G_2, H^*\} = 0$. Assim, temos:

$$0 = \{G_1, H^*\} = \{G_1, H\} - \lambda_1 \{G_1, G_1\} - \lambda_2 \{G_1, G_2\}.$$

Logo

$$\lambda_2 = \frac{\{G_1, H\}}{\{G_1, G_2\}}.$$

Analogamente

$$0 = \{G_2, H^*\} = \{G_2, H\} - \lambda_1 \{G_2, G_1\} - \lambda_2 \{G_2, G_2\}$$

Portanto

$$\lambda_1 = \frac{\{G_2, H\}}{\{G_2, G_1\}}.$$

Agora

$$\{G_1, H\} = \begin{pmatrix} \nabla_x G_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla_x G_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \langle \nabla_x G_1(x,y), y \rangle.$$

$$\begin{aligned} \{G_2, H\} &= \begin{pmatrix} \nabla_x G_2 & \nabla_y G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\nabla_x G_1 & \nabla_x G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \langle \nabla_x G_2(x,y), y \rangle. \end{aligned}$$

$$\{G_1, G_2\} = \|\nabla_x G_1(x,y)\|^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-\langle \nabla_x G_2(x,y), y \rangle}{\|\nabla_x G_1(x,y)\|^2}, \\ \lambda_2 &= \frac{\langle \nabla_x G_1(x,y), y \rangle}{\|\nabla_x G_1(x,y)\|^2} = \frac{G_2(x,y)}{\|\nabla_x G_1(x,y)\|^2}. \end{aligned}$$

■

Em TM , temos $G_1 = G_2 \equiv 0$, logo $\lambda_2 = 0$. Assim, o campo hamiltoniano em TM é:

$$X_{H^*} = X_H - \lambda_1 X_{G_1} - G_1 X_{\lambda_1} - \lambda_2 X_{G_2} - G_2 X_{\lambda_2} = X_H - \lambda_1 X_{G_1}.$$

Além disso,

$$H_x^* = H_x - \lambda_{1x}G_1 - \lambda_1G_{1x} - \lambda_{2x}G_2 - \lambda_2G_{2x} = H_x - \lambda_1G_{1x}.$$

$$H_y^* = H_y - \lambda_{1y}G_1 - \lambda_1G_{1y} - \lambda_{2y}G_2 - \lambda_2G_{2y} = H_y.$$

Portanto, as equações em TM são dadas por:

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y^* = H_y = y, \\ \dot{y} = -H_x^* = -H_x + \lambda_1G_{1x} = \lambda_1G_{1x} \end{cases} \quad (3.5)$$

Pasemos agora ao cálculo efetivo de λ_1 e G_{1x} .

Como $G_1(x, y) = \|x\| - \rho - \varepsilon\tau\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$, temos:

$$D_x G_1(x, y) \cdot v = \frac{\langle x, v \rangle}{\|x\|} - \varepsilon D\tau\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \cdot \left(D\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \cdot v\right).$$

Portanto,

$$\langle \nabla_x G_1(x, y), v \rangle = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, v \right\rangle - \varepsilon \left\langle \left(D\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right)^T \nabla \tau\left(\frac{x}{\|x\|}\right), v \right\rangle.$$

Assim, obtemos

$$\nabla_x G_1(x, y) = \frac{x}{\|x\|} - \varepsilon D\left(\frac{x}{\|x\|}\right)^T \nabla \tau\left(\frac{x}{\|x\|}\right). \quad (3.6)$$

Agora,

$$D\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \cdot v = \frac{\|x\| \cdot v - \frac{x\langle x, v \rangle}{\|x\|}}{\|x\|^2} = \frac{1}{\|x\|} \left(v - \frac{\langle x, v \rangle x}{\|x\|^2}\right) = \frac{1}{\|x\|} (v - \text{Proj}_x v) = \frac{1}{\|x\|} \text{Proj}_{x^\perp} v.$$

Observemos que $D\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ é uma aplicação simétrica, pois:

$$\begin{aligned} \left\langle D\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \cdot v, w \right\rangle &= \frac{1}{\|x\|} \langle v, w \rangle - \frac{1}{\|x\|^3} \langle x, v \rangle \langle x, w \rangle = \\ &= \frac{1}{\|x\|} \langle w, v \rangle - \frac{1}{\|x\|^3} \langle x, w \rangle \langle x, v \rangle = \left\langle D\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \cdot w, v \right\rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$D\left(\frac{x}{\|x\|}\right)^T = D\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|} \text{Proj}_{x^\perp}.$$

Portanto, chegamos a:

$$\nabla_x G_1(x, y) = \frac{x}{\|x\|} - \varepsilon \frac{1}{\|x\|} \text{Proj}_{x^\perp} \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right). \quad (3.7)$$

Da equação acima, tiramos:

$$\|\nabla_x G_1(x, y)\|^2 = 1 + \varepsilon^2 \frac{1}{\|x\|^2} \left\| \text{Proj}_{x^\perp} \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\|^2. \quad (3.8)$$

Para o cálculo de λ_1 , precisamos de $(\nabla_x G_2(x, y) \cdot y)$. Começemos notando que

$$\nabla_x G_2(x, y) \cdot v = \langle D_x \nabla_x G_1(x, y) \cdot v, y \rangle$$

Portanto, precisamos encontrar $D_x \nabla_x G_1(x, y) \cdot v$. Derivando (em relação a x) a expressão (3.6) temos:

$$D \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \cdot v - \varepsilon \left[\left(D \left(\frac{1}{\|x\|} \right) \cdot v \right) \text{Proj}_{x^\perp} \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) + \frac{1}{\|x\|} \text{Proj}_{x^\perp} \left(D \left(\nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right) \cdot v \right) \right].$$

Agora

$$\begin{aligned} D \left(\nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right) \cdot v &= D \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \cdot \left(D \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \cdot v \right) = \\ &= D \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \cdot \left(\frac{1}{\|x\|} \text{Proj}_{x^\perp} v \right) = \frac{1}{\|x\|} D \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \cdot \text{Proj}_{x^\perp} v. \end{aligned}$$

E ainda

$$D \left(\frac{1}{\|x\|} \right) \cdot v = -\frac{\langle x, v \rangle}{\|x\|^3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} D_x \nabla_x G_1(x, y) \cdot v &= \\ &= \frac{1}{\|x\|} \text{Proj}_{x^\perp} v - \varepsilon \left[-\frac{\langle x, v \rangle}{\|x\|^3} \text{Proj}_{x^\perp} \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) + \frac{1}{\|x\|^2} \text{Proj}_{x^\perp} \left(D \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \cdot \text{Proj}_{x^\perp} v \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\|x\|} \text{Proj}_{x^\perp} \left\{ v + \varepsilon \left[\frac{\langle x, v \rangle}{\|x\|^2} \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) - \frac{1}{\|x\|} D \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \cdot \text{Proj}_{x^\perp} v \right] \right\}. \end{aligned}$$

Assim, o termo procurado é:

$$\langle \nabla_x G_2(x, y), y \rangle = D_x G_2(x, y) \cdot y = \langle D_x \nabla_x G_1(x, y) \cdot y, y \rangle =$$

$$= \frac{1}{\|x\|} \langle \text{Proj}_{x^\perp} y, y \rangle + \varepsilon \left\{ \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^3} \left\langle \text{Proj}_{x^\perp} \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right), y \right\rangle - \frac{1}{\|x\|^2} \left\langle \text{Proj}_{x^\perp} \left(D \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \cdot \text{Proj}_{x^\perp} y \right), y \right\rangle \right\}.$$

De (3.8) temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\nabla_x G_1(x, y)\|^2} &= \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \frac{1}{\|x\|^2} \left\| \text{Proj}_{x^\perp} \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\|^2} = \\ &= 1 - \varepsilon^2 \frac{1}{\|x\|^2} \left\| \text{Proj}_{x^\perp} \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\|^2 + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Assim:

$$\lambda_1 = \frac{-\langle \nabla_x G_2(x, y), y \rangle}{\|\nabla_x G_1(x, y)\|^2} = -\frac{1}{\|x\|} \langle \text{Proj}_{x^\perp} y, y \rangle + \varepsilon Q(x, y) + O(\varepsilon^2),$$

$$\text{onde } Q(x, y) = -\frac{1}{\|x\|^2} \left\{ \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|} \left\langle \text{Proj}_{x^\perp} \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right), y \right\rangle - \left\langle \text{Proj}_{x^\perp} \left(D \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \cdot \text{Proj}_{x^\perp} y \right), y \right\rangle \right\}.$$

Como $\text{Proj}_{x^\perp} y = y - \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} x$, podemos reescrever λ_1 da seguinte maneira:

$$\lambda_1 = -\frac{\|y\|^2}{\|x\|} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|x\|^3} + \varepsilon Q(x, y) + O(\varepsilon^2).$$

Agora usamos (3.7) para calcular $\lambda_1 \nabla_x G_1(x, y) =$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\|y\|^2}{\|x\|^2} x + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|x\|^4} x + \varepsilon \left\{ Q(x, y) \frac{x}{\|x\|} + \frac{\|y\|^2}{\|x\|^2} \text{Proj}_{x^\perp} \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|x\|^4} \text{Proj}_{x^\perp} \nabla \tau \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\} + O(\varepsilon^2) = \\ &= \frac{1}{\|x\|^4} \left(\langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \right) x + \varepsilon P(x, y) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Logo, as equações (3.5) ficam:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{1}{\|x\|^4} \left(\langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \right) x + \varepsilon P(x, y) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.9)$$

Observação 3.2.2. Na esfera unitária, temos $\varepsilon = 0$, $\langle x, y \rangle = 0$ e $\|x\| = 1$. Neste caso, as equações (3.9) ficam:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\|y\|^2 x, \end{cases}$$

que são as já conhecidas equações das geodésicas da esfera. [Deduzidas no Exemplo (2.3.6).]

3.3 Aplicação da Técnica de Bifurcação

O sistema (3.9) é um sistema da forma (1.1) com

$$f(x, y) = \left(y, \frac{1}{\|x\|^4} \left(\langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \right) x \right) \quad \text{e} \quad g(x, y) = (0, P(x, y)).$$

Logo, para montarmos o sistema com coeficientes periódicos (1.14), precisamos calcular $Df(\varphi(t, x, 0))$, onde $\varphi(t, x, 0)$ é o fluxo geodésico na esfera dado em (3.2) e (3.3), ou seja, se $\varphi(t, x, 0) = (x_0(t), y_0(t))$, então:

$$x_0(t) = \|x\| \left(\cos \left(\frac{\|y\|}{\|x\|} t \right) \frac{x}{\|x\|} + \sin \left(\frac{\|y\|}{\|x\|} t \right) \frac{y}{\|y\|} \right), \quad (3.10)$$

$$y_0(t) = \left(-\|y\| \sin \left(\frac{\|y\|}{\|x\|} t \right) \frac{x}{\|x\|} + \|y\| \cos \left(\frac{\|y\|}{\|x\|} t \right) \frac{y}{\|y\|} \right). \quad (3.11)$$

Calculando a derivada e aplicando no fluxo não-perturbado, temos

$$Df(x_0, y_0) \cdot (\xi, \eta) = \left(\eta, -\frac{\|y_0\|^2}{\|x_0\|^2} \left(\xi - \frac{2\langle x_0, \xi \rangle}{\|x_0\|^2} x_0 \right) - \frac{2\langle y_0, \eta \rangle}{\|x_0\|^2} x_0 \right).$$

Mas $\|x_0\| = \|x\|$ e $\|y_0\| = \|y\|$. Portanto, o sistema homogêneo associado a (1.14) fica:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta, \\ \dot{\eta} = -\frac{\|y\|^2}{\|x\|^2} \xi + \frac{2}{\|x\|^4} \left(\|y\|^2 \langle x_0, \xi \rangle - \|x\|^2 \langle y_0, \eta \rangle \right) x_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

O sistema acima é um sistema linear com coeficientes periódicos. Buscaremos uma mudança de coordenadas que seja uma Transformação de Floquet, ou seja, que transforme (3.12) em um sistema com coeficientes constantes.

Dado $(x, y) \in TS(\text{fibrado tangente da esfera de raio } \rho)$, consideremos o seguinte referencial ortonormal em $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{F} = \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}, e = \frac{x}{\|x\|} \times \frac{y}{\|y\|} \right).$$

Seja $R(t)$ a rotação em torno de e , pelo ângulo $\frac{\|y\|}{\|x\|}t$, no sentido de $\frac{x}{\|x\|}$ para $\frac{y}{\|y\|}$, ou seja

$$\begin{cases} R(t) \cdot \frac{x}{\|x\|} = \cos\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}t\right) \frac{x}{\|x\|} + \sin\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}t\right) \frac{y}{\|y\|} \\ R(t) \cdot \frac{y}{\|y\|} = -\sin\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}t\right) \frac{x}{\|x\|} + \cos\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}t\right) \frac{y}{\|y\|} \\ R(t) \cdot e = e. \end{cases} \quad (3.13)$$

Observação 3.3.1. Note que $R(t)x = x_0(t)$ e $R(t)y = y_0(t)$.

Consideremos a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{cases} \xi = R(t)u \\ \eta = R(t)v \end{cases} \quad (3.14)$$

Usando a primeira das equações (3.11), temos

$$R\dot{u} + \dot{R}u = \dot{\xi} = \eta = Rv.$$

Logo

$$\dot{u} = -R^{-1}\dot{R}u + v = -\Sigma u + v,$$

onde $\Sigma = R^{-1}\dot{R}$. Agora

$$\dot{R}\frac{x}{\|x\|} = y_0(t), \quad \dot{R}\frac{y}{\|y\|} = -\frac{\|y\|}{\|x\|}x_0(t) \quad \text{e} \quad \dot{R}(e) = 0.$$

Portanto

$$\Sigma(e) = 0, \quad \Sigma\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = R^{-1}y_0(t) = y \quad \text{e} \quad \Sigma\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = -\frac{\|y\|}{\|x\|}R^{-1}x_0(t) = -\frac{\|y\|}{\|x\|}x.$$

Observação 3.3.2. Σ atua na base fixa $\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}, e\right)$ levando-a nos vetores fixos $y, -\frac{\|y\|}{\|x\|}x, 0$. Logo, Σ é independente de t . Ela é, na verdade, uma matriz anti-simétrica constante.

Pela segunda equação em (3.12), temos

$$R\dot{v} + \dot{R}v = \dot{\eta} = -\frac{\|y\|^2}{\|x\|^2}R(u) + \frac{2}{\|x\|^4}\left(\|y\|^2\langle x_0, Ru \rangle - \|x\|^2\langle y_0, Rv \rangle\right)Rx.$$

Assim

$$\dot{v} + \Sigma v = -\frac{\|y\|^2}{\|x\|^2}u + \frac{2}{\|x\|^4}\left(\|y\|^2\langle x, u \rangle - \|x\|^2\langle y, v \rangle\right)x.$$

Portanto, o sistema (3.12) é transformado em

$$\begin{cases} \dot{u} = -\Sigma u + v \\ \dot{v} = -\Sigma v - \frac{\|y\|^2}{\|x\|^2} u + \frac{2}{\|x\|^4} \left(\|y\|^2 \langle x, u \rangle - \|x\|^2 \langle y, v \rangle \right) x, \end{cases} \quad (3.15)$$

que é um sistema linear com coeficientes constantes.

Escrevendo u e v em coordenadas na base $\mathcal{F}$ e denominando $W = (u, v)$, reescrevemos (3.15) como

$$\dot{W} = AW,$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\|y\|}{\|x\|} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\|y\|}{\|x\|} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\|y\|^2}{\|x\|^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\|y\|}{\|x\|} & 0 \\ 0 & -\frac{\|y\|^2}{\|x\|^2} & 0 & -\frac{\|y\|}{\|x\|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\|y\|^2}{\|x\|^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No cálculo da solução de (3.15), mostrou-se útil fazer uma segunda mudança de coordenadas $W = P(Z)$. O fluxo do sistema na variável $Z = (z_1, \dots, z_6)$ foi então determinado como sendo

$$\psi(t, Z) = \left(z_1, \frac{\|y\|}{\|x\|} z_1 t + z_2, -\frac{\|y\|^2}{\|x\|^2} z_1 t^2 - 2 \frac{\|y\|}{\|x\|} z_2 t + z_3, z_4, e^{i \frac{\|y\|}{\|x\|} t} z_5, e^{-i \frac{\|y\|}{\|x\|} t} z_6 \right).$$

Voltando às variáveis (ξ, η) , temos que a matriz fundamental do sistema (3.12) é

$$\mathcal{X}(t) = R(t)PZ(T),$$

sendo $Z(t)$ é a matriz fundamental do sistema $\dot{Z} = BZ$, onde $B = P^{-1}AP$. Pela Fórmula da Variação dos Parâmetros, concluímos que

$$D_\varepsilon \varphi(T(x, y), x, y; 0) = \mathcal{X}(T(x, y)) \int_0^{T(x, y)} \mathcal{X}^{-1}(s) g(s) ds. \quad (3.16)$$

Fazendo os cálculos, denominando $a = \frac{\|y\|}{\|x\|}$, $b = \frac{\|x\|}{\|y\|}$,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\|x\|^3} \left\langle D\nabla \tau \left(\frac{x_0}{\|x\|} \right) \cdot y_0, y_0 \right\rangle$$

e

$$\mathcal{V} = \left[\mathcal{A}(\|x\| \cos(at), \|x\| \sin(at), 0) + a^2 \text{Proj}_{x_0^\perp} \nabla \tau \left(\frac{x_0}{\|x\|} \right) \right],$$

temos

$$\mathcal{X}^{-1}(t)g(t) = \begin{pmatrix} \langle (b \cos(at), b \sin(at), 0), \mathcal{V} \rangle \\ \left\langle \left(-\cos(at)t + \frac{b}{2} \sin(at), -\frac{b}{2} \cos(at) - \sin(at)t, 0 \right), \mathcal{V} \right\rangle \\ \langle (-a \cos(at)t^2 + \sin(at)t - b \cos(at), -a \sin(at)t^2 - \cos(at)t - b \sin(at), 0), \mathcal{V} \rangle \\ \left\langle \left(-\frac{b}{2} \sin(at), \frac{b}{2} \cos(at), 0 \right), \mathcal{V} \right\rangle \\ \left\langle \left(0, 0, \frac{b}{2i} e^{-iat} \right), \mathcal{V} \right\rangle \\ \left\langle \left(0, 0, \frac{-b}{2i} e^{iat} \right), \mathcal{V} \right\rangle \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Integrando (3.17) e substituindo em (3.16), teríamos $D_\varepsilon \varphi(T, x, y; 0)$. Estaríamos assim em condições de verificar a aplicabilidade do Segundo Método de bifurcação.

Para calcular a integral em (3.17), poderíamos escolher uma função τ específica e assim encontrar $\mathcal{A}$ e $\mathcal{V}$, ou buscar propriedades da função τ que tornassem possível a aplicação do método de maneira conclusiva. Esse é o passo seguinte a esta dissertação.

Referências Bibliográficas

- [1] Cabral, H. E., *Equações Diferenciais Ordinárias, Notas de Curso*, UFPE, 2000.
- [2] Deift, P., Lund, F. e Trubowitz, E., *Nonlinear Wave Equations and Constrained Harmonic Motion*, Commun. Math. Phys. 74, 141-188(1980).
- [3] Do Carmo, M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, N.Jersey , 1976.
- [4] Duistermaat, J.J., *On Periodic Solutions near Equilibrium Points of Conservative Systems*, Rational Mech. Anal., vol. 45, 143-160(1972).
- [5] Friederich, K. O., *Lectures on Advanced Ordinary Differential Equations*, N.Y., 1956.
- [6] Hirsch, M. W. e Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, N.Y., 1974.
- [7] Lang, S., *Differential Manifolds.*, Adisson-Wesley Series in Mathematics, 1972.
- [8] Lima, E. L., *Curso de Análise, Vol. 2*, IMPA, R.J., 1981.
- [9] Meyer, K. R. e Hall, G.R., *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and N-Body Problem*, Springer-Verlag, N.Y., 1995.
- [10] Oliveira, A. V., *Sistemas Integráveis*, Tese de Mestrado, UFPE, 2003.

