

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

DINÂMICA DE VÓRTICES PUNTIFORMES EM SUPERFÍCIES

por

Humberto Henrique de Barros Viglioni

sob orientação do

Prof. Dr. Hildeberto Eulalio Cabral

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Recife - PE

Março/2006

Viglioni, Humberto Henrique de Barros
Dinâmica de vórtices puntiformes em superfícies /
Humberto Henrique de Barros Viglioni. – Recife : O autor,
2006.

v 55 folhas: il., fig.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Matemática, 2006.

Inclui bibliografia.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Estabilidade. 3. Equilíbrio.
4. Vórtices.

531

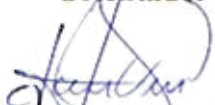
CDD (22.ed.)

MEI2006-011

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado: 
Hildeberto Eulálio Cabral, DMAT-UFPE

Orientador


José Cláudio Vidal-Díaz, DMAT-UFPE


Giovani Lopes Vasconcelos, DF-UFPE

**DINÂMICA DE VÓRTICES PUNTIFORMES
EM SUPERFÍCIES**

Por

Humberto Henrique de Barros Viglioni

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Março - 2006

Dinâmica de Vórtices Puntiformes em Superfícies

por

Humberto Henrique de Barros Viglioni

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Claudio Vidal

Prof. Dr. Giovani Lopes Vasconcelos

Prof. Dr. Hildeberto Eulalio Cabral

Orientador

**Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática**

Março/2006

Dedicatória

À minha mãe, Tereza Longine, e
aos meus pais Gorki e Rosa.

Agradecimentos

Muitos são os que merecem meus agradecimentos por contribuírem, direta ou indiretamente, para com minha formação e minha vida. Primeiramente, agradeço a Deus por ter me oferecido tantas oportunidades de superar desafios e admirar a arte de sua criação; obrigado por seu senso estético e por ainda existir pureza neste universo. Aos colegas e professores de meu tempo no Departamento de Física, agradeço pelas boas discussões que tanto instigaram minha curiosidade e despertaram meu interesse em compreender um pouco mais as leis da natureza. Muitas vezes os debates mais exaltados finalizavam em divagações filosóficas nas mesas dos bares no Recife Antigo ou até mesmo em Deda's Food, quando o tempo ou o dinheiro não nos permitia ir mais longe. Agradeço a todos que fizeram parte desta fase, em especial a Gerson, Guga, Getúlio, Mathias, Luis Felipe, Fernando Maçã, Leonardo Melo, Ermes, Rafael Menezes, Roberto Dias, Marcelo Alencar, Pedro Hugo, Felipe Fernando e Patrícia Façanha. Ao professor Fernando Moraes, agradeço muito o inestimável apoio durante toda minha graduação, tirando minhas dúvidas e me estimulando a adquirir uma base mais sólida em matemática, o que foi fundamental para minha formação e maturidade.

No Departamento de Matemática também tive a oportunidade de conhecer pessoas interessantes com as quais muito aprendi, não necessariamente matemática. Cláudio Cristino (pense num cabra arretado pra tirar dúvidas de TEx !), Raphael Falcão, Eudes Naziazeno, Anete Soares, Karla, Tiago, Hugo, Fábio, Hélio, Mardônio, Marta, Éder, Rodrigo Gondim, Hélio Porto e, claro, meus companheiros de sala Henrique Vitorio, Fred Elihimas, Gersonilo e Flávio Tunico; obrigado pelo companherismo e pela amizade. À Débora, mais do que uma simples amizade, agradeço muito pelo companherismo que nos uniu e que definitivamente marcou esta fase de minha vida. Às funcionárias da Biblioteca de Matemática e Física, Raquel, Joana e Mercês, meus sinceros agradecimentos pela competência e seriedade na execução de suas atividades; especialmente à Mercês, que com sua disposição e solicitude teve a iniciativa de conseguir uma

das principais referências bibliográficas deste trabalho. Ao professor Cesar Castilho sou grato pelas esclarecedoras conversas sobre dinâmica de vórtices e também pelas sugestões que me ajudaram a delinear o conteúdo deste trabalho. Aos professores Alain Albouy e Cláudio Vidal, agradeço muito o enorme estímulo e apoio passados em suas aulas e nas conversas extra-classe. Ao meu orientador, professor Hildeberto Cabral, agradeço muito pela paciência e atenção conferidas durante toda execução do trabalho e pela grande ajuda na tarefa de "bem escrever" as linhas desta dissertação, buscando sempre uma maneira mais simples e objetiva de transmitir as idéias e simplificando ao máximo as demonstrações. Ainda não posso avaliar se o intento foi alcançado, mas ao menos estas serão preocupações que sempre terei em mente na elaboração de futuros trabalhos. Aos membros da banca, em especial ao Professor Giovani Vasconcelos, agradeço pelas críticas e sugestões que seguramente tornarão a leitura desta tese uma tarefa menos árdua.

Aos amigos Felipe Fernando, Rafaelli Vidal, Rodrigo Uchikawa, Getúlio, Dário Uchikawa, Raquel Nóbrega, Marco Zamboni e Krisnamurti, meus agradecimentos por suas diferentes manifestações de amizade e apoio. Sei que podemos passar um tempo sem nos vermos mas a consideração vai continuar a mesma.

Por fim, quero agradecer a todos meus familiares. Aos meus pais, Gorki e Rosa Mariano, agradeço pelo amor, carinho e apoio sempre constante, sem os quais eu não estaria alcançando meus objetivos e seguindo a profissão que desejo. A minha admiração pelo exemplo de ser humano e profissionais que eles são sempre me inspirou e sempre será um elemento presente em minha vida. À minha avó Maria Guglielmelli Viglioni, devo meu primeiro contato com a ciência e com a arte. Creio que ela jamais imaginaria que seus livros de ciências e matemática iriam me influenciar de maneira tão forte e consistente. Aos meus queridos irmãos Leonardo, George, Renata, Amanda e Alexei, agradeço muito por te-los em minha vida e pela amizade e carinho que compartilhamos. À minha avó Alta Wanderley de Barros, agradeço pelo enorme carinho, amor e pela grande mãe que ela foi para com tantas pessoas, inclusive meus irmãos. Espero muito ter herdado um pouco de sua força, seu otimismo e seu senso de humor perante as adversidades. À minha mãe, Tereza Longine, agradeço pelos bons ensinamentos e pelo exemplo de nordestina, sempre lutando por seus sonhos e por sua vida ... até o fim.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma dedução das equações para a dinâmica de n -vórtices puntiformes sobre uma superfície, exibindo explicitamente as equações de movimento para o caso em que a superfície é parametrizada por um sistema de coordenadas isothermal. Também é obtida uma aproximação em primeira ordem para a dinâmica de n -vórtices numa superfície difeomorfa à esfera por uma pequena perturbação radial.

Palavras Chave: Sistemas Dinâmicos, Estabilidade, Equilíbrio, Vórtices.

Abstract

This work describes a formal deduction of dynamics equations for the n –vortex problem on a regular surface. Equations for the specific case in which the surface is parametrized by an isothermal coordinates system are presented. A first order approximation is obtained for the dynamic of n –vortex on a surface diffeomorphic to the sphere by a small radial perturbation.

Key Words: Dynamical Systems, Stability, Equilibrium, Vortices.

Conteúdo

Introdução	6
1 FLUIDOS EM SUPERFÍCIES	10
1.1 Escoamento no Plano	10
1.2 Escoamento em Superfícies	17
2 DINÂMICA DE VÓRTICES PUNTIFORMES: EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	26
2.1 Abordagem Intrínseca	27
2.1.1 Equações de Movimento	27
2.1.2 Caso Particular: Elipsóide de Revolução	34
2.2 Abordagem Extrínseca	35
2.2.1 Formulação do Problema	39
2.2.2 Dinâmica de Vórtices no Plano	41
2.2.3 Dinâmica de Vórtices na Esfera	42
2.2.4 Dinâmica de Vórtices numa Superfície Difeomorfa à Esfera por uma Perturbação Radial	44
Bibliografia	53

Introdução

O estudo da dinâmica de vórtices puntiformes teve início com o trabalho de Helmholtz sobre hidrodinâmica e mecânica dos fluidos [2]. Em 1876 Kirchhoff [3] obteve a formulação Hamiltoniana para as equações de movimento e Sir William Thomson (Lord Kelvin)[5], em 1878, propôs o estudo das configurações de n -vórtices idênticos no plano dispostos nos vértices de um polígono regular que gira rigidamente com uma determinada velocidade angular ω , motivado pelos resultados dos experimentos de Mayer[4] sobre os padrões formados por um sistema de pequenos magnetos flutuando na superfície de um líquido e sujeitos a um campo magnético externo. Neste experimento observa-se a estabilidade das configurações em que os magnetos ocupam os vértices de um polígono regular de n lados para $n \leq 5$, enquanto que para $n \geq 6$ estes polígonos são instáveis e outros padrões surgem. Kelvin teve o mérito de estabelecer a equivalência entre a estabilidade das configurações que surgiam nos experimentos e a estabilidade da correspondente configuração de vórtices puntiformes no plano. O problema de determinar a estabilidade ou instabilidade das configurações de n -vórtices no plano dispostos nos vértices de um polígono de n lados ficou conhecido como *problema de Kelvin*. Em 1883, J. J. Thomson apresentou um ensaio[6] no qual concluía a estabilidade linear do problema de Kelvin se $n \leq 6$, enquanto que para $n = 7$ ele concluiu erroneamente que o sistema é instável. Thomson também conjecturou que para $n \geq 8$ o anel de vórtices é instável. A análise linear só foi concluída em 1931 por Havelock [9], que mostrou a instabilidade exponencial para o caso em que $n \geq 8$. O problema do *heptágono de Thompson*, como ficou conhecida a questão de decidir a estabilidade da configuração para $n = 7$, permaneceu em aberto por um longo tempo até que D. G. Dritschel, em sua tese de doutorado (Princeton, 1985), mostrou que esta configuração

é neutramente estável, deixando em aberto a questão da estabilidade não linear. O primeiro avanço no sentido de demonstrar a estabilidade não linear do heptágono de Thomson foi obtido por Cabral e Schmidt[10], aplicando técnicas de normalização até termos de quarta ordem à função Hamiltoniana correspondente, enquanto que em 2002 Kurakin e Yudovich[11] apresentam uma demonstração analítica da estabilidade não linear no sentido de Routh.

O estudo da dinâmica de vórtices puntiformes numa esfera despertou o interesse da comunidade científica por, dentre outras razões, suas aplicações à meteorologia. Em 1885 Gromeka[12] tratou um problema de movimento de vórtices numa esfera, proposto por Preobrazhensky. O problema de Kelvin tem formulação análoga ao caso plano, consistindo de n vórtices idênticos dispostos nos vértices de um polígono regular sobre uma esfera de raio R e a uma mesma latitude θ , sendo esta configuração denotada por $V_R(n, \theta)$. Uma solução para as equações de movimento é obtida se o polígono gira como um corpo rígido a uma velocidade angular constante ω que depende apenas da latitude. Em 1977 Bogomolov[13] obteve as equações de movimento para a dinâmica de vórtices na esfera bem como sua formulação Hamiltoniana, além de considerar o problema sobre uma esfera girando e iniciar a análise de estabilidade da configuração poligonal dos vórtices[14]. Uma análise bastante detalhada da dinâmica de três vórtices sobre uma esfera é feita por Kidambi e Newton[15], apresentando uma classificação do movimento dos vórtices a partir da relação entre a norma do vetor vorticidade e o raio da esfera. Além disso, os autores citados caracterizaram todos os equilíbrios fixos e relativos do problema de três vórtices na esfera. Em 1998, Kimura[16] formula o problema do movimento de vórtices numa superfície Riemanniana com curvatura constante, tendo como objetivo caracterizar a dinâmica de vórtices em tais superfícies e, principalmente, estabelecer uma comparação entre a dinâmica na esfera e no plano hiperbólico com a correspondente dinâmica no plano. Em 2004 Kurakin[18] publica um trabalho apresentando condições necessárias e suficientes para estabilidade e instabilidade não linear para o problema de Kelvin na esfera, examinando também a estabilidade das configurações de equilíbrio de vórtices puntiformes idênticos situados nos vértices de um poliedro regular, concluindo que o tetraedro, octaedro e icosaedro são estáveis enquanto que o cubo e o dodecaedro são instáveis. Uma variante do problema de Kelvin na esfera é obtida colocando-se um vórtice no polo norte de intensidade Γ enquanto

que n vórtices de intensidade 1 são dispostos nos vértices de um polígono regular a uma mesma latitude θ . No artigo de Cabral, Meyer e Schimdt[17] são determinadas explicitamente curvas $\Gamma(\theta)$ que limitam as regiões de estabilidade e também são estudadas as bifurcações para novas configurações quando a estabilidade de uma configuração inicial é alterada com a variação da intensidade do vórtice localizado no polo norte. Uma boa referência para qualquer estudo mais aprofundado de problemas relacionados à dinâmica de vórtices é o livro de P. K. Newton[19], o qual também apresenta uma extensa lista de referências bibliográficas envolvendo os principais resultados obtidos nesta área de pesquisa.

O interesse pelo estudo da dinâmica de vórtices puntiformes transcende o desafio matemático envolvido na formulação de problemas interessantes e na busca de suas soluções. De fato, a diversidade das aplicações que envolve dinâmica de vórtices explica o interesse de cientistas de áreas tão diversas como física, meteorologia, geofísica, cosmologia e matemática, no estudo de problemas relacionados a dinâmica de vórtices. O próprio J. J. Thomson tentou, sem sucesso, utilizar o modelo de vórtices puntiformes a sua teoria atômica[7, 8]. Atualmente, é muito ativa a pesquisa de teoria de vórtices em helio superfluido bem como na modelagem da dinâmica de tornados e furacões e também no estudo da formação e evolução de galácticas espirais. No entanto, é em mecânica dos fluidos que as aplicações são mais ricas, uma vez que o estudo do campo vorticidade associado ao campo velocidade de um escoamento é fundamental para caracterizar a fase laminar e turbulenta[24]. Em geral a vorticidade não está concentrada em pontos, mas a validade do método de aproximação de um escoamento ideal incompressível por um sistema de vórtices puntiformes[23] reforça a importância do estudo da dinâmica de vórtices puntiformes no contexto de mecânica dos fluidos.

Apesar da rica literatura existente tratando de problemas relacionados à dinâmica de vórtices, não é fácil encontrar uma dedução das equações de movimento de n vórtices numa superfície Riemanniana qualquer. No trabalho de Bogomolov[13] é apresentada uma "demonstração" bastante intuitiva de que a função potencial velocidade Φ correspondente a um escoamento gerado por um sorvedouro entre dois planos infinitamente próximos pode ser obtida resolvendo a equação de Poisson em $\mathbb{R}^3$

$$\nabla^2 \Phi = m\delta(x, y),$$

onde ∇^2 é o Laplaceano tridimensional e a constante m é a intensidade do sorvedouro. Desta forma, como a função de corrente (*stream function*) Ψ associada a um escoamento gerado por um vórtice puntiforme é harmonicamente conjugada ao potencial velocidade gerado por uma fonte (ou sovedouro), devemos ter

$$\nabla^2 \Psi = m\delta(x, y),$$

isto é, para obtermos a função de corrente associada a uma distribuição de vórtices no plano basta resolver a equação acima com uma soma de deltas de Dirac centrados nas posições dos vórtices e multiplicados por suas respectivas intensidades. Além de não ser um resultado geral, pois não fica claro que o mesmo possa ser aplicado a qualquer superfície, sua demonstração carece de rigor matemático. Desta forma, este trabalho propõe uma demonstração *ad initium* das equações de movimento, explicitando todos detalhes de maneira clara e utilizando as ferramentas mais básicas o possível.

No Capítulo 1 é feito um estudo de escoamentos em superfícies, introduzindo os principais conceitos necessários, tais como circulação, vorticidade, potencial complexo, linhas de fluxo etc. Também são demonstrados alguns teoremas e corolários relacionados ao potencial complexo e à transformação conforme, explicitando a relação existente entre potenciais complexos e parametrizações isotermais da superfície.

No Capítulo 2, baseado no trabalho de Hally[21], são obtidas as equações de movimento para a dinâmica de n -vórtices sobre uma superfície, considerando que a mesma é parametrizada por um sistema de coordenadas isothermal. A partir de uma extensão do campo velocidade e da função fluxo a uma vizinhança da superfície, obtém-se uma formulação extrínseca para o problema de modo que o campo vorticidade é dado pelo rotacional do campo estendido. Desenvolvendo as equações obtidas na formulação extrínseca, conclui-se que a função de corrente Ψ satisfaz a equação de Poisson na superfície

$$\nabla^2 \Psi = -\omega,$$

onde ω é o campo vorticidade.

Desenvolvendo a equação de Poisson para uma superfície $\mathcal{S}$ difeomorfa à esfera por uma pequena perturbação radial e expandindo a função de corrente em potências do parâmetro de perturbação ϵ , é apresentada uma aproximação em primeira ordem das equações de movimento de n vórtices puntiformes sobre $\mathcal{S}$.

Capítulo 1

FLUIDOS EM SUPERFÍCIES

Neste capítulo é desenvolvida a teoria matemática de escoamentos estacionários em superfícies, tomando como principal referência o texto clássico de Felix Klein [1], que apresenta a teoria de Riemann das funções algébricas com ênfase em aspectos geométricos. Uma das principais aplicações é a construção de escoamentos em superfícies a partir de funções complexas cujas derivadas são funções algébricas.

1.1 Escoamento no Plano

Seja $\vec{v}(x, y) = a(x, y)\hat{i} + b(x, y)\hat{j}$ o campo velocidade associado ao escoamento estacionário de um fluido ideal incompressível no plano xy , onde $a(x, y)$ e $b(x, y)$ são funções analíticas reais definidas em $\mathbb{R}^2$. Assumindo também que não há criação nem destruição de fluido em nenhum ponto de $\mathbb{R}^2$, dado um caminho fechado regular $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ qualquer, com vetor tangente $\hat{t}$ e vetor normal $\hat{n}$, temos que o fluxo total através de $\mathcal{C}$, dado pela integral $\int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \hat{n} dl$, deve ser igual a zero, donde segue, pelo Teorema de Green, que

$$0 = \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \hat{n} dl = \int_{\mathcal{C}} (-b, a) \cdot \hat{t} dl = \iint_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) dA = \iint_{\mathcal{A}} \text{div} \vec{v} dA$$

isto é,

$$\iint_{\mathcal{A}} \text{div} \vec{v} dA = 0, \quad \text{onde } \mathcal{C} = \partial \mathcal{A},$$

qualquer que seja o aberto simplesmente conexo $\mathcal{A}$, o que implica que $\text{div} \vec{v} \equiv 0$. A *circulação* de um campo vetorial $\vec{F}$ em torno de uma curva fechada $\mathcal{C}$ é definida por

$$\Gamma_{\mathcal{C}}(\vec{F}) := \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

de modo que se $\vec{v}$ for um campo *irrotacional*, isto é, se sua circulação ao longo de qualquer curva fechada $\mathcal{C}$ for identicamente nula

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} a dx + b dy \equiv 0,$$

então $a dx + b dy$ é uma diferencial exata e portanto existe uma função $u(x, y)$ tal que $a = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $b = \frac{\partial u}{\partial y}$ ou, em outros termos, $\vec{v}$ é o gradiente de u , o que denotamos por $\vec{v} = \nabla u$. Portanto, como $\text{div} \vec{v} = 0$ temos

$$0 = \text{div} \vec{v} = \text{div} (\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u$$

onde ∇^2 é denominado *operador de Laplace*. A equação $\nabla^2 u = 0$ é conhecida como *equação de Laplace*, sendo suas soluções denominadas *funções harmônicas*. Portanto, u é uma função harmônica cujo gradiente é o campo velocidade, o que justifica denominá-la *potencial velocidade* do escoamento.

As curvas obtidas fazendo $u = \text{constante}$ são as *linhas equipotenciais*. Considerando uma parametrização de uma tal curva dada por $(x(t), y(t))$ e derivando $u(t) = u(x(t), y(t))$ em relação a t , obtemos

$$0 = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y} \dot{y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) = (a, b) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) = \vec{v} \cdot (\dot{x}, \dot{y}), \quad (1.1)$$

isto é, o campo velocidade do fluido é ortogonal às linhas equipotenciais nos pontos onde $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \neq 0$, uma vez que o vetor $(\dot{x}, \dot{y})$ é tangente à linha equipotencial. Dada a função harmônica $u(x, y)$, definimos sua *harmônica conjugada* v pelas equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.2)$$

de modo que a função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma função analítica de $z = x + iy$, denominada *potencial complexo* do escoamento. Considerando uma parametrização $(x(t), y(t))$ de uma curva obtida fazendo $v = \text{constante}$ e derivando $v(t) = v(x(t), y(t))$ em relação a t , obtemos

$$0 = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dot{y} = -\frac{\partial u}{\partial y} \dot{x} + \frac{\partial u}{\partial x} \dot{y} = \vec{v} \cdot (\dot{y}, -\dot{x}), \quad (1.3)$$

o que mostra que nos pontos onde $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \neq 0$, o campo velocidade $\vec{v}$ é tangente à curva $v = \text{constante}$, pois o vetor $(\dot{y}, -\dot{x})$ é normal a uma tal curva. Deste resultado concluímos que as linhas integrais do campo velocidade do fluido são as curvas obtidas fazendo $v = \text{constante}$, sendo por isso denominadas *streamlines* ou *linhas de corrente*, enquanto que a função v é denominada *streamfunction* ou *função corrente*. A condição $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \neq 0$ é equivalente a $f'(z) \neq 0$ e as linhas de escoamento são sempre ortogonais às linhas equipotenciais exceto nos pontos onde $f'(z) = 0$.

Quando uma função complexa $u + iv$ é analítica, o mesmo ocorre com $v - iu$, uma vez que $v, -u$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Portanto, podemos tomar as curvas $u = \text{constante}$ como linhas de corrente e as curvas $v = \text{constante}$ como linhas equipotenciais correspondentes a um escoamento denominado o conjugado do original. Quando para a função analítica $w = f(z)$ tem-se $f'(z_0) = 0$, as curvas $u = \text{constante}$ e $v = \text{constante}$ não intersectam-se ortogonalmente em z_0 . Um tal ponto z_0 é denominado *ponto de estagnação* de ordem $k - 1$. Em particular, se

$$f(z) = a_0 + a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots, \quad a_k \neq 0,$$

então as curvas $u = \text{constante}$ e $v = \text{constante}$ intersectam-se em um ângulo de $\pi/2k$. Para ilustrarmos este fato, consideremos, por simplicidade, que $f(z) = z^k$, e

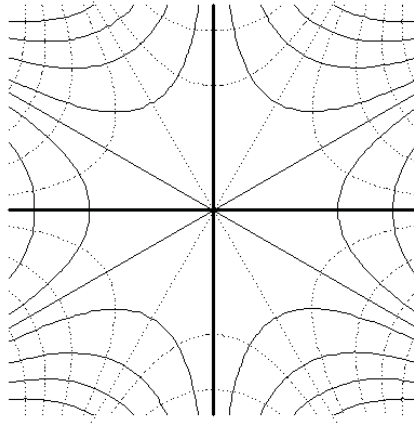


Figura 1.1: Diagrama de um ponto de estagnação de ordem 2, no qual as linhas pontilhadas correspondem a linhas equipotenciais enquanto que as linhas contínuas representam linhas de corrente.

portanto $u = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2} = \frac{z^k + \bar{z}^k}{2} = r^k \cos(k\theta)$ e $v = \frac{f(z) - \overline{f(z)}}{2i} = \frac{z^k - \bar{z}^k}{2i} = r^k \sin(k\theta)$, onde $z = re^{i\theta}$. As linhas equipotenciais são obtidas fazendo $u = \text{constante}$, de modo que devemos analisar a família de curvas obtidas pela equação $r^k \cos(k\theta) = c$, onde c é

uma constante. Se $c \neq 0$, nenhuma das curvas obtidas passa pela origem, e portanto $\cos(k\theta) = \frac{c}{r^k}$, de modo que $\lim_{r \rightarrow \infty} \cos(k\theta) = 0$, o que resulta numa família de retas assíntotas com equação polar $\cos(k\theta) = 0$. Se esta equação é satisfeita para um ângulo θ , ela também é satisfeita para o ângulo $\theta + \pi$, o que mostra que pode-se restringir a análise aos ângulos $k\theta_n < \pi$ satisfendo $\cos(k\theta_n) = 0$, isto é, $k\theta_n = \frac{\pi}{2} + n\pi < \pi$, ou $\theta_n = \frac{2n+1}{2k}\pi$, com $\frac{2n+1}{2k} < 1$, donde segue que $n \leq k-1$, o que implica que a família de curvas equipotenciais possui k retas assíntotas, cada uma correspondente a um valor de θ_n , com $n = 0, 1, \dots, k-1$. Quando $c = 0$ obtemos a equação $r^k \cos(k\theta) = 0$, que deve ser satisfeita para qualquer valor de r e portanto $\cos(k\theta) = 0$, isto é, as k retas assíntotas correspondem às linhas equipotenciais que passam pela origem. O estudo da equação $r^k \sin(k\theta)$ é análogo e nos permite concluir que as retas assíntotas correspondentes à família de curvas obtidas fazendo $r^k \sin(k\theta) = \text{constante}$ são k linhas de corrente que passam pela origem bissectando os ângulos determinados pelas linhas equipotenciais, pois se θ_n corresponde a uma reta equipotencial que passa pela origem, isto é, $\cos(k\theta_n) = 0$, o ângulo $\theta_n + \frac{\pi}{2k}$ corresponde a uma linha de corrente passando pela origem, uma vez que $\sin(k(\theta_n + \frac{\pi}{2k})) = \sin(k\theta_n + \frac{\pi}{2}) = 0$. Dessa forma, k linhas equipotenciais passam por z_0 com iguais ângulos entre si e estes ângulos são bissectados por k linhas de corrente através de z_0 . Dizemos que $z = \infty^1$ é um ponto estacionário de ordem $k-1$ se, expandindo a função $F(\xi) = f(1/\xi)$ em torno da origem, obtemos uma série de potências crescentes de ξ tendo $a_k \xi^k$ como primeiro termo não constante.

Desejamos estudar o campo na vizinhança de um ponto z_0 para o qual $f(z_0)$ é infinito. Vamos nos limitar a funções analíticas $f(z)$ definidas no plano complexo estendido, tais que f' só possui pólos como singularidade, isto é, não consideraremos o caso de singularidades essenciais. Expandindo $f(z)$ como série de potências centrada em z_0 , obtem-se como parte singular

$$A \log(z - z_0) + \frac{A_1}{z - z_0} + \frac{A_2}{(z - z_0)^2} + \frac{A_3}{(z - z_0)^3} + \dots + \frac{A_\nu}{(z - z_0)^\nu},$$

isto é, esta expansão corresponde à soma de uma singularidade logarítmica com co-

¹Pode-se introduzir a noção de *ponto no infinito* através da projecção estereográfica Π_N pelo pólo norte N , que mapeia a esfera menos N sobre o plano complexo. Como $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Pi_N^{-1}(z) = N$, independente de como esse limite é feito, dizemos que o pólo norte corresponde ao ponto no infinito pela projecção estereográfica, sendo este ponto simbolicamente representado por $z = \infty$. Dessa forma, entende-se por *plano complexo estendido* o plano complexo acrescentado de $z = \infty$, o que torna natural o estudo do comportamento de uma função complexa em $z = \infty$.

eficiente A e pólos de ordem k com coeficientes correspondentes iguais a A_k , onde $k = 1, 2, \dots, \nu$, de modo que o campo resultante é obtido pela soma dos campos gerados por cada parcela isoladamente.

Analisando a singularidade logarítmica $A \log(z - z_0)$, consideremos os casos em que A é real ou imaginário puro, de modo a obtermos o caso complexo geral, $\Re(A) + i\Im(A)$, somando os resultados obtidos. Se A for real, fazendo $z = z_0 + re^{i\phi}$ temos

$$u + iv = A \log(re^{i\phi}) = A \log r + iA\phi \Rightarrow u = A \log r; v = A\phi. \quad (1.4)$$

Portanto, as linhas equipotenciais são círculos centrados em z_0 e as linhas de corrente, obtidas fazendo $v = \text{constante}$, são segmentos de reta com origem em z_0 , correspondendo a um fluido saindo ou entrando neste ponto, conforme A seja positivo ou negativo, respectivamente. No primeiro caso, dizemos que z_0 é uma fonte puntiforme enquanto que no segundo é um sorvedouro puntiforme. Dada uma curva regular fechada $\mathcal{C}$ que possui uma fonte ou sorvedouro puntiforme em seu interior, definimos a intensidade destes objetos como sendo uma medida da quantidade de fluido que atravessa a curva por unidade de tempo, isto é, considerando um elemento infinitesimal de arco Δl de comprimento igual a Δs sobre a curva $\mathcal{C}$, avaliando o vetor normal $\hat{\mathbf{n}}$ e o campo velocidade $\vec{\mathbf{v}}$ num ponto $\mathbf{p} \in \Delta l$, temos que a quantidade $\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}) \Delta s$ é uma aproximação para a área percorrida pelo fluido que atravessa Δl por unidade de tempo, de modo que a integral

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (1.5)$$

é uma medida da quantidade total de fluido que atravessa a curva $\mathcal{C}$ por unidade de tempo, sendo denominada intensidade da fonte (integral positiva) ou sorvedouro (integral negativa). Observemos que esta grandeza está bem definida, pois como o campo velocidade é obtido a partir de um potencial complexo, que é analítico em qualquer aberto que não contém a singularidade, a integral (1.5) independe do caminho². A partir da equação (1.4), encontramos o potencial velocidade $u(r) = A \log \sqrt{r^2} = \frac{A}{2} \log(x^2 + y^2)$,

²Vale observar que no caso em que o campo velocidade apresenta uma distribuição contínua de fontes ou sorvedouros, define-se a intensidade de uma fonte ou sorvedouro em um determinado ponto da superfície através do limite

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int_{\mathcal{C}} \vec{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds,$$

onde A é a área da região $\mathcal{A}$ do plano limitada pela curva $\mathcal{C} = \partial\mathcal{A}$. O limite é tomado contraindo a curva $\mathcal{C}$ ao ponto em questão.

donde segue que o campo velocidade é dado por

$$\vec{v} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = A \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = A \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2} \right),$$

e portanto, tomando $\mathcal{C}$ como sendo um círculo centrado na origem, a intensidade da fonte ou sorvedouro é

$$\int_C \vec{v} \cdot \hat{n} ds = \int_{\theta=0}^{2\pi} A \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right) r d\theta = \frac{A}{r^2} \int_{\theta=0}^{2\pi} (x^2 + y^2) d\theta = 2\pi A.$$

Agora, se A for imaginário puro fazemos $A = iB$, $B \in \mathbb{R}$, e obtemos $u = -B\phi$, $v = B \log r$, o que corresponde exatamente ao escoamento conjugado do anterior. Neste caso, as linhas de corrente são círculos centrados em z_0 enquanto que as linhas equipotenciais são semi-retas com origem em z_0 . Dizemos que z_0 é um vórtice puntiforme, cujo escoamento em sua vizinhança gira no sentido horário ou anti-horário, conforme B seja positivo ou negativo, respectivamente. Definimos o campo escalar *vorticidade* correspondente a um campo velocidade $\vec{v}$ como sendo limite da razão entre circulação do campo velocidade ao longo de uma curva fechada $\mathcal{C}_{\mathbf{p}}$ e a área A da região $\mathcal{A}$ delimitada pela curva, quando esta é contraída ao ponto $\mathbf{p}$ no qual desejamos avaliar a vorticidade

$$\lim_{\mathcal{C}_{\mathbf{p}} \rightarrow \mathbf{p}} \frac{1}{A} \int_C \vec{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} ds,$$

onde $\mathcal{C} = \partial\mathcal{A}$. No caso de um campo velocidade gerado por uma distribuição de vórtices puntiformes, uma grandeza importante é a *intensidade do vórtice puntiforme* Γ , definida como sendo a circulação do campo ao longo de qualquer curva fechada $\mathcal{C}_{\mathbf{p}}$ que envolve o vórtice localizado no ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$, isto é

$$\Gamma = \int_C \vec{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} ds. \quad (1.6)$$

O valor encontrado é uma medida do quanto o campo *circula* em torno do vórtice, sendo independente da curva e portanto bem definido, uma vez que o potencial velocidade é analítico em qualquer aberto que não contém os vórtices.³ Como o potencial velocidade é dado por $u = -B\phi = -B \arctan(\frac{y}{x})$, temos a seguinte expressão para o campo velocidade

$$\vec{v} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = B \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{B}{r^2} (y, -x). \quad (1.7)$$

³ Quando o campo velocidade é gerado por uma distribuição contínua de vórtices, a vorticidade pode ser discretizada de modo que a intensidade do vórtice localizado num ponto $\mathbf{p}$ é dada pela vorticidade avaliada neste ponto.

A partir da equação (1.6), tomando $\mathcal{C}$ como sendo um círculo centrado na origem, encontramos o seguinte valor para a intensidade do vórtice

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \hat{t} ds = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{B}{r^2}(y, -x) \cdot \frac{1}{r}(-y, x) r d\theta = -B \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = -2\pi B.$$

Analisemos agora o escoamento devido ao pólo de ordem 1, isto é, $\frac{A_1}{(z-z_0)}$. Façamos $z - z_0 = re^{i\phi}$ e $A_1 = \rho e^{i\psi}$, de modo que $\frac{A_1}{(z-z_0)} = (\rho/r)e^{i(\psi-\phi)}$. A função potencial complexo do escoamento é

$$f(z) = u + iv = (\rho/r)e^{i(\psi-\phi)} = \frac{\rho}{r} \cos(\psi - \phi) + \frac{\rho}{r} \sin(\psi - \phi)i,$$

donde segue que

$$u = \frac{\rho}{r} \cos(\psi - \phi); \quad v = \frac{\rho}{r} \sin(\psi - \phi).$$

As linhas de corrente, obtidas fazendo $v = \text{constante}$, são uma família de círculos coaxiais tangentes à reta $\phi = \psi$ em $z = z_0$, enquanto que as linhas equipotenciais são uma família ortogonal de círculos coaxiais tangentes à reta $\phi = \psi + \frac{1}{2}\pi$ em $z = z_0$.

Vejamos agora como podemos obter um pólo de ordem 1 através da coalescência de singularidades logarítmicas. Consideremos uma fonte de intensidade $1/h$ em z_0 e um sorvedouro de intensidade $-1/h$ em $z_0 + h$. O potencial complexo é dado por

$$\frac{1}{h} [\log(z - z_0) - \log(z - z_0 - h)].$$

Se fizermos a coalescência dessas singularidades tomando o limite $h \rightarrow 0$, o potencial resultante é

$$\frac{d}{dz} \log(z - z_0) = \frac{1}{z - z_0},$$

isto é, no processo de limite as duas singularidades logarítmicas desaparecem dando origem a um pólo de ordem 1 em $z = z_0$. Para mostrarmos como obter um pólo de ordem k a partir da coalescência de dois pólos de ordem $k - 1$, consideremos um pólo de ordem $k - 1$ em z_0 com coeficiente $1/h$ e outro pólo de mesma ordem em $z_0 + h$ com coeficiente $-1/h$, o que resulta no potencial complexo

$$\frac{f(z) - f(z - h)}{h},$$

onde $f(z) = (z - z_0)^{-k}$, de modo que no limite $h \rightarrow 0$ o potencial resultante é

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z - h)}{h} = f'(z) = \frac{-k}{(z - z_0)^{k+1}},$$

o que corresponde a um pólo de ordem $k + 1$ com coeficiente igual a $-k$.

O escoamento devido a um pólo de ordem ν pode ser obtido de maneira análoga ao caso das singularidades logarítmicas. Fazendo $z - z_0 = re^{i\phi}$ e $A_\nu = \rho e^{i\psi}$, obtemos o seguinte potencial complexo

$$f(z) = u + iv = (\rho/r^\nu)e^{i\nu(\frac{\psi}{\nu} - \phi)} = \frac{\rho}{r^\nu} \cos \nu(\frac{\psi}{\nu} - \phi) + \frac{\rho}{r^\nu} \sin \nu(\frac{\psi}{\nu} - \phi)i,$$

e portanto

$$u = \frac{\rho}{r^\nu} \cos \nu(\frac{\psi}{\nu} - \phi); \quad v = \frac{\rho}{r^\nu} \sin \nu(\frac{\psi}{\nu} - \phi).$$

Neste caso, as linhas de corrente são curvas fechadas começando em z_0 e tangentes às ν retas que intersectam-se no ponto z_0 em ângulos iguais.

Observação 1.1 *Considerando que as funções racionais são as únicas funções analíticas que possuem apenas pólos como singularidades no plano complexo estendido, temos uma maneira geral de construir um escoamento sobre a esfera através da superposição de pólos e singularidades logarítmicas, pois, neste caso, a derivada da função potencial complexo possui apenas pólos como singularidades, isto é, $f'(z)$ é uma função racional. Isto mostra que a cada função racional podemos associar um escoamento na esfera correspondente à função potencial obtida a partir de sua integral.*

1.2 Escoamento em Superfícies

Seja $\mathcal{S}$ uma superfície em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\mathbf{x}(p, q) = (x_1(p, q), x_2(p, q), x_3(p, q))$, onde $(p, q) \in \mathcal{U}$, sendo $\mathcal{U}$ um aberto de $\mathbb{R}^2$. Seja C uma curva em $\mathcal{S}$ com coordenadas dadas por $(p(t), q(t))$, $a \leq t \leq b$, e parametrizada por

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(p(t), q(t)), x_2(p(t), q(t)), x_3(p(t), q(t))).$$

O comprimento de arco ao longo de C é

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{x}_p dp + \mathbf{x}_q dq) \cdot (\mathbf{x}_p dp + \mathbf{x}_q dq)$$

ou, desenvolvendo o produto interno,

$$ds^2 = (\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{x}_p) dp^2 + 2(\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{x}_q) dp dq + (\mathbf{x}_q \cdot \mathbf{x}_q) dq^2.$$

Introduzindo os coeficientes da primeira forma fundamental

$$E = (\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{x}_p), \quad G = (\mathbf{x}_q \cdot \mathbf{x}_q) \text{ e } F = (\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{x}_q),$$

temos

$$ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2. \quad (1.8)$$

Observando que ds^2 tem estrutura de uma forma quadrática definida positiva, pois $ds^2 > 0$ e

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dp & dq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp \\ dq \end{pmatrix},$$

sua matriz tem determinante positivo, isto é

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 > 0.$$

De todos os sistemas de coordenadas possíveis para $\mathcal{S}$, podemos adotar um no qual o comprimento de arco escreve-se $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$, caso em que (u, v) são denominadas *coordenadas isotermais*. Para tentarmos encontrar um tal sistema de coordenadas na vizinhança de qualquer ponto de $\mathcal{S}$, faremos a equação (1.8) de modo a obtermos, definindo $W = \sqrt{EG - F^2}$, a equação

$$ds^2 = \left(\sqrt{E} dp + \frac{F + iW}{\sqrt{E}} dq \right) \left(\sqrt{E} dp + \frac{F - iW}{\sqrt{E}} dq \right).$$

Se pudermos encontrar um fator integrante $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ tal que

$$\sigma \left(\sqrt{E} dp + \frac{F + iW}{\sqrt{E}} dq \right) = du + idv, \quad (1.9)$$

então o conjugado complexo desta equação é

$$\bar{\sigma} \left(\sqrt{E} dp + \frac{F - iW}{\sqrt{E}} dq \right) = du - idv,$$

e portanto $|\sigma|^2 ds^2 = du^2 + dv^2$. Fazendo $\lambda = \frac{1}{|\sigma|^2}$, obtemos $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$, isto é, (u, v) são coordenadas isotermais. Portanto, o problema resume-se a encontrar um fator integrante σ que torna $\left(\sqrt{E} dp + \frac{F + iW}{\sqrt{E}} dq \right)$ uma diferencial exata. Assumindo a existência de tal fator integrante, u e v são funções de p e q , de modo que, pela regra da cadeia, segue

$$du + idv = \left(\frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p} \right) dp + \left(\frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q} \right) dq,$$

que comparando com a equação (1.9) resulta

$$\frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p} = \sigma \sqrt{E}, \quad \frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q} = \sigma \left(\frac{F + iW}{\sqrt{E}} \right).$$

Eliminando σ das equações acima obtemos

$$E \left[\frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q} \right] = (F + iW) \left[\frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p} \right]$$

ou simplesmente

$$E \frac{\partial u}{\partial q} = F \frac{\partial u}{\partial p} - W \frac{\partial v}{\partial p}, \quad E \frac{\partial v}{\partial q} = W \frac{\partial u}{\partial p} + F \frac{\partial v}{\partial p}.$$

Resolvendo o sistema acima para $\partial v/\partial p$, $\partial v/\partial q$ em termos de $\partial u/\partial p$, $\partial u/\partial q$ encontramos

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{F \partial u/\partial p - E \partial u/\partial q}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial q} = \frac{G \partial u/\partial p - F \partial u/\partial q}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad (1.10)$$

e invertendo o sistema acima, isto é, escrevendo $\partial u/\partial p$, $\partial u/\partial q$ em termos de $\partial v/\partial p$, $\partial v/\partial q$, encontramos

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{E \partial v/\partial q - F \partial v/\partial p}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = \frac{F \partial v/\partial q - G \partial v/\partial p}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (1.11)$$

Como as derivadas mistas de segunda ordem são iguais, das equações (1.10) concluímos que u deve satisfazer à equação

$$\frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{F \partial u/\partial p - E \partial u/\partial q}{\sqrt{EG - F^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{F \partial u/\partial q - G \partial u/\partial p}{\sqrt{EG - F^2}} \right] = 0, \quad (1.12)$$

denominada *equação de Beltrami*. As equações (1.10) são nada mais nada menos que as equações de Cauchy-Riemann escritas no caso geral em que a superfície não está dotada de coordenadas isotermais, enquanto que a equação de Beltrami é uma extensão da equação de Laplace para esse caso. De fato, supondo que (p, q) são coordenadas isotermais na vizinhança de um ponto e lembrando que, neste caso, $E = G$ e $F = 0$, de (1.10) obtemos

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{\partial u}{\partial q}, \quad \frac{\partial v}{\partial q} = \frac{\partial u}{\partial p},$$

enquanto que da equação (1.12) segue

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = 0,$$

que são, respectivamente, as equações de Cauchy-Riemann e de Laplace. Como vimos que um potencial complexo no plano $f = u + iv$ satisfaz as equações de Cauchy-Riemann (1.2), definimos, em geral, um *potencial complexo* $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ como sendo uma função complexa definida na superfície $\mathcal{S}$ tal que, dada uma parametrização local $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{S}$, onde U e $\mathcal{A}$ são abertos, a função $\tilde{f} = f \circ x : U \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz as equações (1.10), onde $\tilde{f}(z) = u(z) + iv(z) = w \in \mathbb{C}$ e $z = p + iq$.

Teorema 1.1 *Dado um potencial complexo $f = u + iv$ definido na superfície $\mathcal{S}$ com parametrização dada por $\mathbf{x}(p, q)$, suas partes real e imaginária u, v definem coordenadas isotermas na vizinhança de qualquer ponto P_0 com coordenadas (p_0, q_0) , desde que $\tilde{f}'(z_0) \neq 0$, onde $z_0 = p_0 + iv_0$.*

Demonstração: Supomos, sem perda de generalidade, que (p, q) são coordenadas isotermas e portanto, como f é um potencial complexo, a função $(u(p, q), v(p, q)) = \tilde{f}(p, q) = f \circ \mathbf{x}(p, q)$ é analítica. Além disso, como $\tilde{f}'(z_0) \neq 0$, $\tilde{f}$ é um difeomorfismo local na vizinhança do ponto z_0 , de modo que o mapa $\tilde{\mathbf{x}}(u, v) = (\mathbf{x} \circ \tilde{f}^{-1})(u, v)$ é uma parametrização de uma vizinhança de P_0 . Esta nova parametrização é dada por $\tilde{\mathbf{x}}(u, v) = (\mathbf{x} \circ \tilde{f}^{-1})(u, v) = \mathbf{x}(p(u, v), q(u, v))$, donde segue

$$\tilde{\mathbf{x}}_u = \mathbf{x}_p \frac{\partial p}{\partial u} + \mathbf{x}_q \frac{\partial q}{\partial u}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_v = \mathbf{x}_p \frac{\partial p}{\partial v} + \mathbf{x}_q \frac{\partial q}{\partial v},$$

e portanto

$$\tilde{E} = \tilde{\mathbf{x}}_u \cdot \tilde{\mathbf{x}}_u = \lambda^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u} \right)^2 \right] \quad (1.13)$$

$$\tilde{G} = \tilde{\mathbf{x}}_v \cdot \tilde{\mathbf{x}}_v = \lambda^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v} \right)^2 \right] \quad (1.14)$$

$$\tilde{F} = \tilde{\mathbf{x}}_u \cdot \tilde{\mathbf{x}}_v = \lambda^2 \left[\frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial v} \right], \quad (1.15)$$

onde $\lambda^2 = \mathbf{x}_p \cdot \mathbf{x}_p = E = F = \mathbf{x}_q \cdot \mathbf{x}_q$. Para mostrarmos que $\tilde{E} = \tilde{G}$ e $\tilde{F} = 0$, observemos que como $\tilde{f}'(z_0) \neq 0$, o mapa inverso $(p, q) = \tilde{f}^{-1}(u, v)$ é analítico numa vizinhança de $\tilde{f}(z_0) = \omega_0$, logo suas coordenadas $p = p(u, v)$, $q = q(u, v)$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial v}, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{\partial q}{\partial u}.$$

Destas equações decorre imediatamente que $\tilde{F} = 0$ e $\tilde{E} = \tilde{G}$. ■

Façamos agora uma discussão sobre o ângulo de interseção entre duas curvas C_1 e C_2 em $\mathcal{S}$, considerando que elas intersectam-se no ponto $P \in \mathcal{S}$. Tomando s_i como o comprimento de arco ao longo de C_i , $i = 1, 2$, temos que C_i é dada parametricamente por $(p_i(s_i), q_i(s_i))$, de modo que o vetor tangente unitário $\vec{\mathbf{a}}_i$ à curva C_i em P é

$$\vec{\mathbf{a}}_i = \vec{x}_p \frac{dp_i}{ds_i} + \vec{x}_q \frac{dq_i}{ds_i},$$

sendo o ângulo θ em que C_1 e C_2 intersectam-se dado pelas seguintes equações ⁴

$$\cos \theta = \vec{\mathbf{a}}_1 \cdot \vec{\mathbf{a}}_2 = E \frac{dp_1}{ds_1} \frac{dp_2}{ds_2} + F \left(\frac{dp_1}{ds_1} \frac{dq_2}{ds_2} + \frac{dp_2}{ds_2} \frac{dq_1}{ds_1} \right) + G \frac{dq_1}{ds_1} \frac{dq_2}{ds_2},$$

$$\sin \theta = \sqrt{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|^2} = |\vec{\mathbf{x}}_p \times \vec{\mathbf{x}}_q| \left| \frac{dp_1}{ds_1} \frac{dq_2}{ds_2} - \frac{dq_1}{ds_1} \frac{dp_2}{ds_2} \right| = \sqrt{EG - F^2} \left| \frac{dp_1}{ds_1} \frac{dq_2}{ds_2} - \frac{dq_1}{ds_1} \frac{dp_2}{ds_2} \right|.$$

Observando que ao longo das p -curvas, obtidas fazendo $q = \text{constante}$, temos $dq = 0$ e ao longo das q -curvas, obtidas fazendo $p = \text{constante}$, temos $dp = 0$, se tomarmos C_1 como sendo uma p -curva por P e C_2 como sendo uma q -curva por este mesmo ponto, o ângulo de interseção entre estas curvas no ponto P é dado por ⁵

$$\cos \theta = F \frac{dp_1}{ds_1} \frac{dq_2}{ds_2} = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin \theta = \sqrt{EG - F^2} \frac{dp_1}{ds_1} \frac{dq_2}{ds_2} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Portanto, as curvas coordenadas intersectam-se ortogonalmente em P se e somente se $F = 0$, de modo que uma condição necessária e suficiente para que a família de p -curvas seja ortogonal à família de q -curvas é exigir que $F \equiv 0$.

Consideremos agora duas superfícies $\mathcal{S}$ e $\tilde{\mathcal{S}}$ e um difeomorfismo $\Phi : \mathcal{S} \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}$, de modo que dada uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ de um aberto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{S}$, obtemos uma parametrização do aberto $\Phi(\mathcal{A}) = \tilde{\mathcal{A}} \subset \tilde{\mathcal{S}}$ pela função $\tilde{\mathbf{x}} = \Phi \circ \mathbf{x}$. Com estas parametrizações, escrevemos os elementos de comprimento de arco sobre $\mathcal{S}$ e $\tilde{\mathcal{S}}$ dados, respectivamente, por

$$ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2 \quad \text{e} \quad d\tilde{s}^2 = \tilde{E} dp^2 + 2\tilde{F} dp dq + \tilde{G} dq^2. \quad (1.16)$$

Dizemos que o mapa $\Phi : \mathcal{S} \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ é conforme em $P \in \mathcal{S}$, se dadas duas curvas C_1 e C_2 em $\mathcal{S}$ que intersectam-se no ponto $P \in \mathcal{S}$ formando um ângulo θ , então as curvas imagens $\tilde{C}_1 = \Phi(C_1)$ e $\tilde{C}_2 = \Phi(C_2)$ em $\tilde{\mathcal{S}}$ intersectam-se no ponto $\Phi(P) \in \tilde{\mathcal{S}}$ formando mesmo ângulo θ , isto é, o mapa preserva ângulos entre curvas. Um mapa é conforme se o for em todo ponto $P \in \mathcal{S}$. O seguinte teorema caracteriza mapas conformes através da relação entre os elementos de comprimento de arco sobre ambas superfícies.

⁴Como o ângulo entre duas curvas é dado pela menor determinação do ângulo entre seus vetores tangentes no ponto de interseção, ele fica completamente determinado pelo valor do cosseno.

⁵Como as curvas estão parametrizadas por comprimento de arco, os vetores $\vec{\mathbf{a}}_1 = \vec{\mathbf{x}}_p \frac{dp_1}{ds_1}$ e $\vec{\mathbf{a}}_2 = \vec{\mathbf{x}}_q \frac{dp_2}{ds_2}$ têm norma igual a 1, donde segue que $\frac{dp_1}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{E}}$ e $\frac{dp_2}{ds_2} = \frac{1}{\sqrt{G}}$.

Teorema 1.2 *Seja $\Phi : \mathcal{S} \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ um difeomorfismo das superfícies $\mathcal{S}$ na superfície $\tilde{\mathcal{S}}$. Φ é uma aplicação conforme se, e somente se, $d\tilde{s} = \rho(p, q)ds$, onde (p, q) são coordenadas de $\mathcal{S}$.*

Demonstração:

Por (1.16), basta mostrarmos que Φ é conforme se, e somente se, existe uma função positiva e diferenciável ρ tal que $\tilde{E} = \rho E$, $\tilde{F} = \rho F$, $\tilde{G} = \rho G$. Sejam $\mathbf{x}(p, q)$ e $\tilde{\mathbf{x}}(p, q) = \Phi \circ \mathbf{x}(p, q)$ parametrizações de $\mathcal{S}$ e $\tilde{\mathcal{S}}$, respectivamente. Dado um ponto $P = \mathbf{x}(p_0, q_0) \in \mathcal{S}$, consideremos as curvas coordenadas C_1 e C_2 por P , onde $C_1 : \mathbf{x}(p) = \mathbf{x}(p, q_0)$ e $C_2 : \mathbf{x}(q) = \mathbf{x}(p_0, q)$. Claramente temos que $\tilde{C}_1 : \tilde{\mathbf{x}}(p) = \tilde{\mathbf{x}}(p, q_0) = \Phi(C_1)$ e $\tilde{C}_2 : \tilde{\mathbf{x}}(q) = \tilde{\mathbf{x}}(p_0, q) = \Phi(C_2)$ são curvas coordenadas em $\tilde{\mathcal{S}}$ pelo ponto $\Phi(P) = \tilde{P} \in \tilde{\mathcal{S}}$. Seja $C : \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(p(t), q(t))$ uma curva parametrizada arbitrária passando por P em $t = 0$ e $\tilde{C} : \tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(p(t), q(t))$ sua imagem por Φ passando pelo ponto $\tilde{P}$. Definindo θ como o ângulo entre C_1 e C e α como o ângulo entre C_2 e C , supondo que Φ é conforme temos

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}_p| |\mathbf{x}'|} = \frac{E\dot{p} + F\dot{q}}{\sqrt{E}\sqrt{E\dot{p}^2 + 2F\dot{p}\dot{q} + G\dot{q}^2}} \\ &= \cos \tilde{\theta} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_p \cdot \tilde{\mathbf{x}}'}{|\tilde{\mathbf{x}}_p| |\tilde{\mathbf{x}}'|} = \frac{\tilde{E}\dot{p} + \tilde{F}\dot{q}}{\sqrt{\tilde{E}}\sqrt{\tilde{E}\dot{p}^2 + 2\tilde{F}\dot{p}\dot{q} + \tilde{G}\dot{q}^2}}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

e

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\mathbf{x}_q \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}_q| |\mathbf{x}'|} = \frac{F\dot{p} + G\dot{q}}{\sqrt{G}\sqrt{E\dot{p}^2 + 2F\dot{p}\dot{q} + G\dot{q}^2}} \\ &= \cos \tilde{\alpha} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_q \cdot \tilde{\mathbf{x}}'}{|\tilde{\mathbf{x}}_q| |\tilde{\mathbf{x}}'|} = \frac{\tilde{F}\dot{p} + \tilde{G}\dot{q}}{\sqrt{\tilde{G}}\sqrt{\tilde{E}\dot{p}^2 + 2\tilde{F}\dot{p}\dot{q} + \tilde{G}\dot{q}^2}}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

onde $\tilde{\theta}$ é o ângulo entre $\Phi(C_1)$ e $\Phi(C)$ e $\tilde{\alpha}$ é o ângulo entre $\Phi(C_2)$ e $\Phi(C)$. Portanto, as equações (1.17) e (1.18) são satisfeitas para todo vetor $(\dot{p}, \dot{q}) \neq (0, 0)$. Fazendo $\dot{p} = 0$ na equação (1.17), temos

$$\frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{\tilde{F}}{\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}}}, \quad (1.19)$$

isto é, $F = 0$ se e somente se $\tilde{F} = 0$. Supondo que $F \neq 0$, definimos a função $\rho = \sqrt{\frac{\tilde{E}\tilde{G}}{EG}}$, de modo que $\tilde{F} = \rho F$. Fazendo $(\dot{p}, \dot{q}) = (-F, E)$ na equação (1.17), temos

$$\tilde{E}F = E\tilde{F} = \rho EF \Rightarrow \tilde{E} = \rho E.$$

De forma semelhante, fazendo $(\dot{p}, \dot{q}) = (-G, F)$ na equação (1.18) temos $\tilde{G} = \rho G$.

Se $F = 0$, fazendo a razão membro a membro de (1.17) por (1.18), obtemos

$$\frac{\cos \theta}{\cos \alpha} = \sqrt{\frac{E}{G}} = \sqrt{\frac{\tilde{E}}{\tilde{G}}},$$

isto é,

$$\frac{\tilde{E}}{E} = \frac{\tilde{G}}{G} = \rho,$$

o que finaliza a primeira parte da demonstração.

Demonstremos agora que se $\tilde{E} = \rho E$, $\tilde{F} = \rho F$, $\tilde{G} = \rho G$, então Φ é conforme, isto é, preserva ângulos entre curvas. Tomando duas curvas arbitrárias sobre $\mathcal{S}$ intersectando-se no ponto $P \in \mathcal{S}$, parametrizadas por $C_1 : \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}(p_1(t), q_1(t))$ e $C_2 : \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}(p_2(t), q_2(t))$, onde $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_2(0) = P$, o ângulo entre elas é determinado por

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{x}'_2}{|\mathbf{x}'_1| |\mathbf{x}'_2|} = \frac{E\dot{p}_1\dot{p}_2 + (\dot{p}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_1\dot{p}_2)F + G\dot{q}_1\dot{q}_2}{\sqrt{E\dot{p}_1^2 + 2F\dot{p}_1\dot{q}_1 + G\dot{q}_1^2} \sqrt{E\dot{p}_2^2 + 2F\dot{p}_2\dot{q}_2 + G\dot{q}_2^2}},$$

enquanto que o ângulo de interseção entre as curvas imagem $\tilde{C}_1$ e $\tilde{C}_2$ em $\tilde{\mathcal{S}}$ é dado por

$$\cos \alpha = \frac{\tilde{\mathbf{x}}'_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}}'_2}{|\tilde{\mathbf{x}}'_1| |\tilde{\mathbf{x}}'_2|} = \frac{\tilde{E}\dot{p}_1\dot{p}_2 + (\dot{p}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_1\dot{p}_2)\tilde{F} + \tilde{G}\dot{q}_1\dot{q}_2}{\sqrt{\tilde{E}\dot{p}_1^2 + 2\tilde{F}\dot{p}_1\dot{q}_1 + \tilde{G}\dot{q}_1^2} \sqrt{\tilde{E}\dot{p}_2^2 + 2\tilde{F}\dot{p}_2\dot{q}_2 + \tilde{G}\dot{q}_2^2}}.$$

Como a equação para $\cos \alpha$ é homogênea de grau zero em $(\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}) = \rho(E, F, G)$, concluímos, fazendo a substituição, que $\cos \alpha = \cos \theta$ e portanto $\theta = \alpha$, o que mostra que Φ é conforme. ■

Corolário 1.3 *Um mapa $\Phi : \mathcal{S} \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ é conforme se, e somente se, preserva sistemas de coordenadas isotermas.*

Demonstração: Seja (p, q) um sistema de coordenadas isotermas em $\mathcal{S}$, de modo que $ds^2 = \lambda(dp^2 + dq^2)$. Pelo Teorema (1.2), Φ é conforme se, e somente se, $d\tilde{s} = \rho ds$, e como ρ é positivo, isto é equivalente a $d\tilde{s}^2 = \rho^2 ds^2$, ou $d\tilde{s}^2 = \rho^2 \lambda(dp^2 + dq^2) = \tilde{\lambda}(dp^2 + dq^2)$, com $\tilde{\lambda} = \rho^2 \lambda$. Assim, Φ é conforme se, e somente se, $d\tilde{s}^2 = \tilde{\lambda}(dp^2 + dq^2)$, o que mostra a equivalência desejada. ■

Teorema 1.4 *Seja $\Phi : \mathcal{S} \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ difeomorfismo. Se Φ é conforme, então para todo potencial complexo $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$, a função $\tilde{f} = f \circ \Phi^{-1}$ é um potencial complexo em $\tilde{\mathcal{S}}$.*

Reciprocamente, se para todo potencial complexo $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ em $\mathcal{S}$ a função $\tilde{f} = f \circ \Phi^{-1}$ for um potencial complexo em $\tilde{\mathcal{S}}$, então Φ é conforme.

Demonstração: Dada uma parametrização $\mathbf{x}$ de $\mathcal{S}$ com coordenadas (p, q) , como Φ é um difeomorfismo temos que a função $\tilde{\mathbf{x}} = \Phi \circ \mathbf{x}$ é uma parametrização de $\tilde{\mathcal{S}}$ e portanto, dado $P = \mathbf{x}(p, q)$, temos $\tilde{P} = \Phi(P) = \tilde{\mathbf{x}}(p, q)$, donde segue que $\tilde{f}(\tilde{P}) = \tilde{f}(\Phi(P)) = f(P)$. Suponhamos que Φ seja um mapa conforme, isto é, $\tilde{E} = \rho^2 E, \tilde{F} = \rho^2 F, \tilde{G} = \rho^2 G$. Como as equações (1.10) são homogêneas de grau zero em E, F, G e são satisfeitas por $f \circ \mathbf{x}$, então a função $\tilde{f} \circ \tilde{\mathbf{x}} = f \circ \mathbf{x}$ também satisfaz as equações (1.10) em $\tilde{\mathcal{S}}$, isto é, utilizando os coeficientes $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$. Isto mostra que $\tilde{f}$ é uma função potencial complexo em $\tilde{\mathcal{S}}$.

Verifiquemos que a validade da recíproca implica que Φ preserva sistema de coordenadas isotermais. De fato, seja $\mathbf{x}(u, v)$ parametrização isotermal de $\mathcal{S}$. A aplicação inversa $f = \mathbf{x}^{-1} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ é um potencial complexo, pois nas coordenadas (u, v) temos $f = u + iv$, que evidente satisfaz as equações de Cauchy-Riemann. Por hipótese, a função $\tilde{f} = f \circ \Phi^{-1}$ é um potencial complexo em $\tilde{\mathcal{S}}$. No entanto, utilizando a parametrização $\tilde{\mathbf{x}} = \Phi \circ \mathbf{x}$ para $\tilde{\mathcal{S}}$, temos que $\tilde{f}$ tem expressão em coordenadas dada por $\tilde{f}(u, v) = \tilde{f} \circ \tilde{\mathbf{x}} = f \circ \mathbf{x} = u + iv$, isto é, pelo Teorema 1.1 temos que (u, v) são coordenadas isotermais de $\tilde{\mathcal{S}}$, donde segue que Φ preserva sistema de coordenadas isotermais e portanto, pelo Corolário 1.3, é uma aplicação conforme. ■

Este Teorema mostra que a condição de ser potencial complexo é invariante por aplicação conforme.

Dado um sistema de coordenadas isotermais (x, y) para um aberto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{S}$, o mapa ψ de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{C}$ definido por $\psi(x, y) = x + iy = z \in \tilde{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}$ é conforme, pois em $\mathcal{S}$ temos $ds^2 = \lambda(dx^2 + dy^2)$, enquanto que, no plano complexo, o elemento de comprimento de arco é dado por $d\tilde{s}^2 = dx^2 + dy^2$. Como $\mathcal{A}$ está dotado de um sistema de coordenadas isotermais, qualquer potencial complexo $f = u + iv$ definido neste domínio satisfaz as equações de Cauchy-Riemann, de modo que $f(z) = u(z) + iv(z)$ é uma função analítica na variável complexa $z \in \tilde{\mathcal{A}}$. Como as partes real e imaginária de

um potencial complexo em $\mathcal{S}$ formam um sistema de coordenadas isotermais, podemos afirmar que qualquer potencial complexo em $\mathcal{S}$ é uma função analítica nas coordenadas dadas pelas partes real e imaginária de qualquer outro potencial complexo.

Considerando um fluido irrotacional e incompressível com campo velocidade estacionário definido na superfície $\mathcal{S}$, podemos encontrar seu potencial velocidade $u(p, q)$ através da equação de Beltrami (1.12). As linhas de corrente são dadas pelas curvas $v = \text{constante}$, onde v é a função conjugada a u definida pela equação (1.10). Podemos obter o campo velocidade de um fluido em $\mathcal{S}$ colocando fontes, sorvedouros, vórtices e pólos, obtidos pela coalescência daqueles outros. Cada escoamento resulta numa função potencial complexo $u + iv$, sendo ela analítica se tomarmos como coordenadas as partes real e imaginária de qualquer outro potencial complexo.

Capítulo 2

DINÂMICA DE VÓRTICES PUNTIFORMES: EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Este Capítulo trata da obtenção das equações de movimento de n vórtices puntiforme dispostos sobre uma superfície regular, sendo o principal objetivo estudar a dinâmica de vórtices em superfícies difeomorfas à esfera por uma perturbação radial.

Na primeira seção, utiliza-se a teoria matemática de fluxos em superfícies, desenvolvida no Capítulo 1, para encontrar o campo velocidade associado a um potencial complexo correspondente à distribuição dos vórtices. A partir deste campo, determina-se a velocidade de cada vórtice nas coordenadas locais dadas pela parametrização, sendo suas componentes transferidas para o plano de coordenadas, no qual as equações de movimento são escritas. O resultado encontrado reproduz o obtido por Hally [21] aplicado a superfícies sem fronteira. Para ilustrar o método, um estudo é feito considerando uma distribuição de vórtices em um elipsóide de revolução. A abordagem apresentada é intrínseca no sentido que nenhuma referência é feita ao espaço ambiente no qual a superfície está mergulhada.

Uma outra abordagem possível é apresentada na segunda seção. Considerando que a superfície está mergulhada em $\mathbb{R}^3$ e que o campo vorticidade de um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ é dado por seu rotacional, é possível representar a vorticidade de um campo definido em uma superfície $\mathcal{S}$ através do rotacional de uma extensão deste campo a

uma vizinhança aberta de $\mathcal{S}$. Este procedimento permite formular o problema de uma maneira extrínseca, isto é, o campo vorticidade na superfície é dado pela componente normal do rotacional de uma extensão do campo velocidade. Desenvolvendo o sistema de equações obtido na formulação extrínseca, mostra-se que a função corrente (*streamfunction*) associada à distribuição de vórtices deve ser uma solução da equação de Poisson na superfície. As equações de movimento de n -vórtices no plano e na esfera bem como a obtenção de uma aproximação em primeira ordem para as equações de movimento num superfície difeomorfa a uma esfera por uma pequena perturbação radial são obtidas através da solução da equação de Poisson.

O argumento que justifica a introdução de uma dinâmica sobre os vórtices é o Teorema da Circulação de Kelvin ¹, que afirma ser a vorticidade conservada pelo fluxo, isto é, tomando um caminho fechado qualquer sobre a superfície e calculando sua circulação, o valor encontrado é invariante pelo fluxo, de modo que os vórtices são simplesmente transportados pelo fluido sobre a superfície.

Vale observar que em diversas ocasiões é assumida a identificação natural do plano complexo $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$, através da aplicação $(p, q) \mapsto z = p + iq$.

2.1 Abordagem Instrínseca

2.1.1 Equações de Movimento

Como visto na seção (1.1), o campo velocidade gerado por um vórtice puntiforme localizado na origem e de intensidade Γ é dado pela equação (1.7), isto é

$$\vec{\mathbf{v}}(x, y) = \frac{B}{r^2}(x, y),$$

onde $B = -\frac{\Gamma}{2\pi}$ e $r^2 = x^2 + y^2$, de modo que em notação complexa essa equação escreve-se

$$\vec{\mathbf{v}}(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{z}{|z|^2},$$

sendo $z = x + iy$. Dessa forma, dada uma distribuição de n vórtices dispostos no plano com posições e intensidades representados por $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$ e Γ_j , respectivamente,

¹Uma demonstração deste teorema pode ser encontrado em [22] ou [23].

o campo velocidade resultante no ponto $z = x + iy$ é

$$\vec{v}(z) = - \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \frac{z - z_j}{|z - z_j|^2}.$$

Além disso, como o potencial complexo f deste sistema de vórtices é a soma dos potenciais complexos de cada vórtice, temos

$$f(z) = \sum_{j=1}^n A_j \log(z - z_j), \quad (2.1)$$

onde $A_j = -\frac{i\Gamma_j}{2\pi}$. Portanto, considerando que o elemento de fluido localizado no ponto $z = x + iy$ possui velocidade igual a $\vec{v}(z)$, temos que a equação de movimento de um traçador na posição deste elemento de fluido é dada por

$$\dot{z} = \vec{v}(z) = \sum_{j=1}^n -\frac{\Gamma_j}{2\pi i} \frac{z - z_j}{|z - z_j|^2}. \quad (2.2)$$

Esta equação está definida em todos os pontos de $\mathbb{C}$, exceto naqueles em que os vórtices estão localizados. No entanto, na posição do j -ésimo vórtice o campo velocidade gerado pelos demais está definido, de modo que a dinâmica de vórtices é dada assumindo que cada vórtice possui a velocidade induzida pelos demais em sua posição, isto é,

$$\dot{z}_k = - \sum_{j \neq k} \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \frac{z_k - z_j}{|z_k - z_j|^2}. \quad (2.3)$$

Uma vez que $(z_k - z_j)(\bar{z}_k - \bar{z}_j) = |z_k - z_j|^2$, o conjugado complexo da equação 2.3 resulta em

$$\dot{\bar{z}}_k = -\frac{i}{2\pi} \sum_{j \neq k} \frac{\Gamma_j}{z_k - z_j}. \quad (2.4)$$

Estas são as equações de movimento para o problema de n -vórtices no plano, conhecidas como equações de Kirchhoff, aqui apresentadas em notação complexa.

Consideremos o problema de n -vórtices puntiformes sobre uma superfície regular qualquer $\mathcal{S}$. De acordo com o Teorema 1.4, aplicação conforme leva potencial complexo em potencial complexo. Portanto, uma vez que o potencial complexo para o problema no plano é conhecido, pode-se obter o potencial complexo correspondente à distribuição de vórtices na superfície através de uma parametrização isothermal, pois esta é uma aplicação conforme do plano na superfície. Dado o potencial complexo $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ associado a uma distribuição de vórtices na superfície, o campo velocidade

correspondente é o gradiente do potencial velocidade u , onde $u : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a parte real de f , isto é, $u = \frac{f+\bar{f}}{2}$. A partir de uma parametrização isothermal $\mathbf{x}$ de um aberto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{S}$, construímos a representação em coordenadas de u

$$\begin{aligned} \tilde{u} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \tilde{u}(z) = u \circ \mathbf{x}(z). \end{aligned} \quad (2.5)$$

O gradiente de u na base local induzida por este sistema de coordenadas é dado por

$$\nabla u = u_1 \hat{\mathbf{x}}_p + u_2 \hat{\mathbf{x}}_q,$$

onde $\hat{\mathbf{x}}_p = \frac{\vec{\mathbf{x}}_p}{h}$ e $\hat{\mathbf{x}}_q = \frac{\vec{\mathbf{x}}_q}{h}$, sendo $h^2 = \vec{\mathbf{x}}_p \cdot \vec{\mathbf{x}}_p = E = G = \vec{\mathbf{x}}_q \cdot \vec{\mathbf{x}}_q$. Dessa forma, pela definição de gradiente temos que a derivada de $\tilde{u}$ agindo no vetor $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\tilde{u} \cdot \vec{\mathbf{v}} &= \mathcal{D}u \cdot (\mathcal{D}\mathbf{x} \cdot \vec{\mathbf{v}}) \\ &= \mathcal{D}u \cdot (\vec{\mathbf{x}}_p v_1 + \vec{\mathbf{x}}_q v_2) \\ &= \langle \nabla u, \vec{\mathbf{x}}_p v_1 + \vec{\mathbf{x}}_q v_2 \rangle \\ &= \langle u_1 \hat{\mathbf{x}}_p + u_2 \hat{\mathbf{x}}_q, \vec{\mathbf{x}}_p v_1 + \vec{\mathbf{x}}_q v_2 \rangle \\ &= u_1 h v_1 + u_2 h v_2, \end{aligned}$$

isto é

$$\mathcal{D}\tilde{u} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial p} v_1 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial q} v_2 = u_1 h v_1 + u_2 h v_2, \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2,$$

donde segue que

$$u_1 = h^{-1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial p}, \quad u_2 = h^{-1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial q}. \quad (2.6)$$

Tomemos uma distribuição de n vórtices sobre $\mathcal{S}$ com coordenadas e intensidades dadas, respectivamente, por $z_j = p_j + iq_j$ e Γ_j , onde $j = 1, 2, \dots, n$. Como foi mencionado, do Teorema 1.4 segue que a representação em coordenadas da função potencial complexo f correspondente a esta distribuição de vórtices é igual ao potencial complexo do problema no plano dado pela equação 2.1, isto é

$$\tilde{f}(z) = f \circ \mathbf{x}(z) = \tilde{u}(z) + i\tilde{v}(z) = - \sum_{j=1}^n \frac{i\Gamma_j}{2\pi} \log(z - z_j),$$

de modo que, pela equação 2.2 temos

$$\nabla \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial p} + i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial q} = \vec{\mathbf{v}}(z) = - \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma_j}{2i\pi} \frac{z - z_j}{|z - z_j|^2}. \quad (2.7)$$

Como $\mathbf{x}$ é uma transformação conforme, em cada ponto do aberto $\mathcal{A}$ verifica-se que os vetores $\hat{\mathbf{x}}_p$ e $\hat{\mathbf{x}}_q$ formam uma base ortonormal do plano tangente e portanto, fazendo a identificação do plano tangente com o plano complexo, o gradiente de u pode ser representado como um número complexo, isto é, $\nabla u = u_1 + iu_2$. Sendo assim, das equações 2.7 e 2.6 segue que

$$\nabla u = u_1 + iu_2 = h(z, \bar{z})^{-1} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial p} + i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial q} \right) = -h(z, \bar{z})^{-1} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma_j}{2i\pi} \frac{z - z_j}{|z - z_j|^2},$$

isto é,

$$u_1 - iu_2 = -h(z, \bar{z})^{-1} \sum_{j=1}^n \frac{i\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{z - z_j}. \quad (2.8)$$

Observemos que na equação 2.8 comete-se um abuso de notação ao utilizar a mesma letra h para a função $h(z, \bar{z}) = h(p(z, \bar{z}), q(z, \bar{z}))$, onde $p(z, \bar{z}) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $q(z, \bar{z}) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

Para obtermos a velocidade do k -ésimo vórtice, fazamos a expansão do termo $h(z, \bar{z})^{-1}$ em uma vizinhança da coordenada z_k , desenvolvendo a equação 2.8 como segue

$$\begin{aligned} u_1 - iu_2 &= \left[h(z_k, \bar{z}_k)^{-1} + \frac{\partial}{\partial z_k} h(z_k, \bar{z}_k)^{-1} (z - z_k) + \mathcal{O}(|z - z_k|^2) \right] \sum_{j=1}^n -\frac{i\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{z - z_j} \\ &= h(z_k, \bar{z}_k)^{-1} \left[1 - \frac{\partial}{\partial z_k} \ln(h(z_k, \bar{z}_k)) (z - z_k) + \mathcal{O}(|z - z_k|^2) \right] \sum_{j=1}^n -\frac{i\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{z - z_j} \\ &= h(z_k, \bar{z}_k)^{-1} \left[\sum_{j=1}^n -\frac{i\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{z - z_j} + \frac{i\Gamma_k}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_k} \ln(h(z_k, \bar{z}_k)) \right] + \\ &\quad + h(z_k, \bar{z}_k)^{-1} \left[\mathcal{O}(|z - z_k|) \sum_{j \neq k} -\frac{i\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{z - z_j} \right]. \end{aligned}$$

Esta equação fornece as componentes do campo velocidade gerado pelos n vórtices numa vizinhança do k -ésimo vórtice. A velocidade deste vórtice é a velocidade induzida pelos demais em sua posição, isto é, devemos avaliar a equação acima em $z = z_k$ desconsiderando o termo $j = k$ no somatório. Fazendo isso, encontra-se

$$u_{1k} - iu_{2k} = h(z_k, \bar{z}_k)^{-1} \left[\sum_{j \neq k} -\frac{i\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{z - z_j} + \frac{i\Gamma_k}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_k} \ln(h(z_k, \bar{z}_k)) \right], \quad (2.9)$$

uma vez que os termos de ordem superior são nulos em $z = z_k$. Da equação 2.9 obtemos as componentes da velocidade do k -ésimo vórtice no plano tangente à superfície. Para obtermos as componentes deste vetor no plano de coordenadas, determinemos a relação entre as componentes do vetor no plano tangente e no plano de coordenadas. Dado um vetor $\vec{v} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{S}$, considerando que $\mathbf{x}$ é uma parametrização isothermal de uma vizinhança de $\mathbf{p}$, com $\mathbf{x}(z_0) = \mathbf{p}$, onde $z_0 = (p_0, q_0)$, este vetor escreve-se na base local como

$\vec{v} = v_1 \hat{\mathbf{x}}_p + v_2 \hat{\mathbf{x}}_q$. Seja $\mathbf{x}(p(t), q(t))$ a curva parametrizada satisfazendo $(p(0), q(0)) = z_0$ e $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(p(t), q(t))|_{t=0} = \vec{v}$. Então, temos

$$v_1 \hat{\mathbf{x}}_p + v_2 \hat{\mathbf{x}}_q = \vec{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(p(t), q(t)) = \mathcal{D}\mathbf{x} \cdot (\dot{p}, \dot{q}) = \vec{\mathbf{x}}_p \dot{p} + \vec{\mathbf{x}}_q \dot{q} = \hat{\mathbf{x}}_p h \dot{p} + \hat{\mathbf{x}}_q h \dot{q},$$

donde segue que $\dot{p} = h^{-1}v_1$ e $\dot{q} = h^{-1}v_2$, onde $(\dot{p}, \dot{q})$ é a representação do vetor $\vec{v}$ no plano de coordenadas. Aplicando este resultado ao vetor velocidade do k -ésimo vórtice temos $\dot{z}_k = \dot{p}_k + i\dot{q}_k = h^{-1}(u_{1k} + iu_{2k})$, de modo que da equação (2.8) segue

$$\dot{z}_k = h(z_k, \bar{z}_k)^{-2} \left[\sum_{j \neq k} -\frac{i\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{z_k - z_j} + \frac{i\Gamma_k}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_k} \ln(h(z_k, \bar{z}_k)) \right]. \quad (2.10)$$

Estas equações modelam a situação física de um fluido ideal e incompressível sobre uma superfície, com vorticidade concentrada em alguns pontos e cuja profundidade é pequena em comparação com o raio principal de curvatura da superfície, pois, nestas condições, pode-se supor que a velocidade do fluido é tangente à superfície livre e não varia com a profundidade.

Uma dificuldade em utilizar esta abordagem é a necessidade de obter um sistema de coordenadas isotermais para a superfície, o que, em geral, não é fácil. No entanto, para o caso em que a superfície é de revolução, a obtenção deste sistema de coordenadas é um simples exercício de geometria diferencial, aqui apresentado como lema.

Lema 2.1 *Seja $\mathcal{S}$ uma superfície de revolução parametrizada por*

$$\Psi(\theta, \phi) = \rho(\theta) (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta),$$

onde $\theta \in (0, \pi)$, $\phi \in (0, 2\pi)$ e $\rho(\theta)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$, escolhida de modo que $\mathcal{S}$ seja regular. Então, existe um difeomorfismo $r(\theta)$ tal que, nas coordenadas $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, o elemento de linha sobre $\mathcal{S}$ escreve-se

$$ds^2 = h^2(r)(dx^2 + dy^2),$$

isto é, x, y são coordenadas isotermais de $\mathcal{S}$.

Demonstração: De fato, considerando que

$$\begin{aligned} d\Psi &= \rho'(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) d\theta + \rho[(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) d\theta + \\ &\quad + (-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0) d\phi], \end{aligned}$$

temos

$$ds^2 = d\Psi \cdot d\Psi = (\rho'^2 + \rho^2) d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Seja a função $r : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$r(\theta) = \exp \left[\int \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{\rho \sin \theta} d\theta \right]. \quad (2.11)$$

Como $\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{\rho \sin \theta} r(\theta) > 0$, $\forall \theta \in (0, \pi)$, $r(\theta)$ é um difeomorfismo, e portanto podemos fazer $\theta \equiv \theta(r)$ na expressão de ds^2

$$dr = \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{\rho \sin \theta} r(\theta) d\theta \Rightarrow ds^2 = (\rho^2 + \rho'^2) \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{r^2 (\rho^2 + \rho'^2)} dr^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{r^2} (dr^2 + r^2 d\phi^2).$$

Invertendo a equação $r(\theta)$ e introduzindo as variáveis $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, obtemos

$$ds^2 = h^2(r)(dx^2 + dy^2), \quad (2.12)$$

onde

$$h(r) = \frac{\rho(\theta(r)) \sin \theta(r)}{r}, \quad (2.13)$$

Com $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, o que mostra que as novas coordenadas x, y são isotermais.

■

Agora estamos em condições de escrever as equações de movimento para a dinâmica de vórtices em superfícies de revolução. Para o caso da esfera, temos que $\rho(\theta) \equiv 1$ e portanto, substituindo na equação (2.10), obtemos

$$r(\theta) = \exp \left[\int \frac{1}{\sin \theta} d\theta \right] = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right),$$

donde segue

$$r^2(\theta) = \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{\sin^2(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{\sin^2(\frac{\theta}{2})}{1 - \sin^2(\frac{\theta}{2})},$$

isto é, $\sin^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{r^2}{1+r^2}$. Como $\cos \theta = \cos^2(\frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})$, temos $\cos \theta = \frac{1-r^2}{1+r^2}$ e $\sin \theta = \frac{2r}{1+r^2}$, que, substituindo em (2.12), fornece $h(r) = \frac{2}{1+r^2}$. Considerando que $r^2 = z\bar{z}$, podemos escrever $h(z, \bar{z}) = \frac{2}{1+z\bar{z}}$, e portanto

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \ln(h(z_k, \bar{z}_k)) = \frac{\partial}{\partial z_k} \ln \left(\frac{2}{1 + z_k \bar{z}_k} \right) = -\frac{\partial}{\partial z_k} \ln(1 + z_k \bar{z}_k) = -\frac{\bar{z}_k}{1 + \bar{z}_k z_k}.$$

Substituindo este resultado na equação (2.9), encontramos a equação de movimento do problema de n vórtices na esfera

$$\dot{\bar{z}}_k = \frac{(1 + z_k \bar{z}_k)^2}{8\pi i} \left[\frac{\bar{z}_k \Gamma_k}{1 + \bar{z}_k z_k} + \sum_{j \neq k} \frac{\Gamma_j}{z_k - z_j} \right]. \quad (2.14)$$

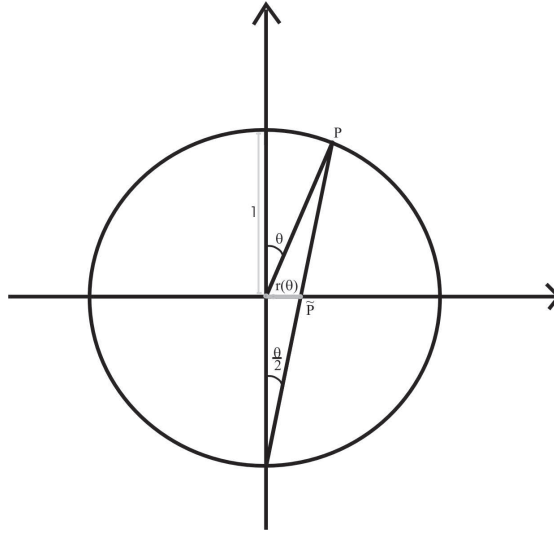


Figura 2.1: Ilustração da projeção estereográfica da esfera unitária pelo polo sul. Notemos que a distância do ponto $\tilde{P} = \Pi_S(P)$ à origem é igual a $r(\theta)$.

Mostremos que a nova parametrização da esfera com as coordenadas $x = r(\theta) \cos \phi$ e $y = r(\theta) \sin \phi$ dadas pelo Lema 2.1 é simplesmente a inversa da projeção estereográfica da esfera pelo polo sul. De fato, seja Π_S a projeção estereográfica da esfera pelo polo sul. Como ilustrado na figura 2.1, se P for um ponto da esfera dado por $(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, sua imagem por Π_S é um ponto $\tilde{P}$ do plano com norma igual a $r(\theta)$, isto é, $\|\tilde{P}\| = \|\Pi_S(P)\| = \tan(\frac{\theta}{2}) = r(\theta) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como o ângulo polar ϕ do sistema de coordenadas esféricas é o mesmo do sistema de coordenadas polares no plano, temos que $\tilde{P} = (x, y)$, onde $x = r(\theta) \cos \phi$ e $y = r(\theta) \sin \phi$. Considerando que $\cos \theta = 2 \cos^2(\frac{\theta}{2}) - 1$ e $\cos^2(\frac{\theta}{2}) = (1 + \tan^2(\frac{\theta}{2}))^{-1} = (1 + \|\tilde{P}\|^2)^{-1}$ temos

$$\cos \theta = \frac{1 - \|\tilde{P}\|^2}{1 + \|\tilde{P}\|^2}.$$

Além disso, como $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$, segue

$$\sin \theta \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{\theta}{2} x = \frac{2x}{1 + \|\tilde{P}\|^2} \quad \text{e} \quad \sin \theta \sin \phi = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{\theta}{2} y = \frac{2y}{1 + \|\tilde{P}\|^2}.$$

Representando o ponto P da esfera, diferente do polo sul S , nas novas coordenadas x, y obtemos

$$P = \left(\frac{2x}{1 + \|(x, y)\|^2}, \frac{2y}{1 + \|(x, y)\|^2}, \frac{1 - \|(x, y)\|^2}{1 + \|(x, y)\|^2} \right).$$

O resultado obtido acima mostra que, no caso da esfera, a reparametrização por coordenadas isotermais obtida aplicando o Lema 2.1 é dada pela inversa da projeção

estereográfica,

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathcal{S} \setminus \{S\} \\ (x, y) &\mapsto \Pi_S^{-1}(x, y).\end{aligned}$$

2.1.2 Caso Particular: Elipsóide de Revolução

Seja $\mathcal{S}$ o elipsóide de revolução com equação dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + z^2 = 1$, onde $a = 1 + \epsilon$. A partir da parametrização da elipse obtida pela interseção do plano xz com o elipsóide, temos

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \theta \\ z &= \rho \cos \theta\end{aligned} \Rightarrow \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{a^2} + \rho^2 \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \rho(\theta) = \frac{a}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \cos^2 \theta}}.$$

A fim de utilizarmos a equação 2.9, precisamos determinar a função $h(r)$ cuja expressão é apresentada na equação 2.12. Para tanto, faz-se necessário inverter a equação 2.10 para obter θ como função de r . Derivando $\rho(\theta)$ em relação a θ obtemos

$$\rho' = -a^{-2}(a^2 - 1) \cos \theta \sin \theta \rho^3(\theta) = \frac{1 - a^2}{a^2} \cos \theta \sin \theta \rho^3(\theta),$$

de modo que

$$r(\theta) = \exp \left[\int I(\theta; \epsilon) \right],$$

onde

$$I(\theta; \epsilon) = \int g(\theta; \epsilon) d\theta \text{ e } g(\theta; \epsilon) = \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{\rho \sin \theta} = \frac{\sqrt{1 + [(1 + \epsilon)^4 - 1] \cos^2 \theta}}{[1 + \epsilon(\epsilon + 2) \cos^2 \theta] \sin \theta}.$$

Façamos a expansão de f em termos de ϵ numa vizinhança de $\epsilon = 0$ para obtermos uma aproximação em segunda ordem da função $r(\theta)$. Pela fórmula de Taylor, temos

$$g(\theta; \epsilon) = g(\theta; 0) + \epsilon \frac{\partial g}{\partial \epsilon}(\theta; 0) + \epsilon^2 \frac{\partial^2 g}{\partial^2 \epsilon}(\theta; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

onde

$$\frac{\partial g}{\partial \epsilon} = \frac{2(1 + \epsilon)^3 \cos^2 \theta [1 + [(1 + \epsilon)^4 - 1] \cos^2 \theta]^{1/2} [1 + \epsilon(\epsilon + 2) \cos^2 \theta] \sin \theta - 2(\epsilon + 1) \sin \theta \cos^2 \theta}{\{[1 + \epsilon(\epsilon + 2) \cos^2 \theta] \sin \theta\}^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 \epsilon}(\theta; 0) = 4 \sin \theta \cos^2 \theta,$$

donde segue que

$$g(\theta; \epsilon) = \frac{1}{\sin \theta} + 4\epsilon^2 \sin \theta \cos^2 \theta + \mathcal{O}(\epsilon^3) \approx \frac{1}{\sin \theta} + 4\epsilon^2 \sin \theta \cos^2 \theta, \quad (2.15)$$

pois $\epsilon \ll 1$. Esta aproximação para a função g fornece uma aproximação para a integral $I(\theta)$ e por sua vez para $r(\theta)$

$$r(\theta) = \exp\{I(\theta)\} \approx \exp\left\{\int \left(\frac{1}{\sin\theta} + 4\epsilon^2 \sin\theta \cos^2\theta\right) d\theta\right\},$$

o que implica que

$$r(\theta) \approx \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp\left\{-\frac{4}{3}\epsilon^2 \cos^3\theta\right\} \equiv \tilde{r}(\theta).$$

Verificando que a aproximação de $r(\theta)$ dada por $\tilde{r}(\theta)$ satisfaz $\tilde{r}' \geq 0$, garantimos a existência da inversa $\theta(\tilde{r})$, que é uma aproximação da função $\theta(r)$ necessária para obtermos $h(\tilde{r})$. De fato, fazendo os cálculos obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{r}'(\theta) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2(\frac{\theta}{2})} \exp\left\{-\frac{4}{3}\epsilon^2 \cos^3\theta\right\} + 4\epsilon^2 \cos^2\theta \sin\theta \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{\exp\left\{-\frac{4}{3}\epsilon^2 \cos^3\theta\right\}}{2 \cos^2(\frac{\theta}{2})} + \frac{4\epsilon^2 \sin\theta \cos^2\theta \sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} \\ &= \frac{\exp\left\{-\frac{4}{3}\epsilon^2 \cos^3\theta\right\}}{2 \cos^2(\frac{\theta}{2})} + 8\epsilon^2 \sin^2(\frac{\theta}{2}) \cos^2\theta > 0. \end{aligned}$$

Definindo $u = \cos\theta$, temos que $\tan(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$, de modo que podemos escrever $\tilde{r}$ como função de u

$$\tilde{r}(u) = \tilde{r}(\theta(u)) = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \exp\left\{-\frac{4}{3}\epsilon^2 u^3\right\}. \quad (2.16)$$

A obtenção das equações aproximadas de movimento em coordenadas isotermiais depende do cálculo da inversa da equação 2.16. Outra possibilidade é encontrar a expansão desta equação em série de potências e desprezar os termos de ordem superior no parâmetro de perturbação ϵ . Como na equação de $\tilde{r}(u)$ não aparece o termo de primeira ordem em ϵ , podemos concluir que a expansão das equações de movimento em potências de ϵ é a soma do termo que corresponde à equação de movimento na esfera com termos de ordem maior ou igual a dois em ϵ .

2.2 Abordagem Extrínseca

O propósito desta seção é, partindo da abordagem intrínseca, apresentar as equações de movimento da dinâmica de vórtices puntiformes em superfícies, considerando a estrutura do espaço ambiente. Dado um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, o Teorema de Stokes relaciona o fluxo do rotacional através de uma superfície com a circulação do campo ao longo de seu bordo

$$\int_{\mathcal{A}} \nabla \times \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{v} \cdot \hat{t} ds. \quad (2.17)$$

Se um campo vetorial $\vec{v}$ está definido apenas em uma superfície $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, seu rotacional é definido intrinsicamente como sendo o campo vorticidade visto no Capítulo 1, isto é,

$$\text{Rot } \vec{v}(\mathbf{p}) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} ds, \quad (2.18)$$

onde A é a área da região $\mathcal{A}$ limitada pela curva $\mathcal{C} = \partial\mathcal{A}$, sendo o limite tomado contraindo a curva $\mathcal{C}$ ao ponto $p \in \mathcal{S}$. Mostremos que o rotacional intrínseco é representado pela componente normal do rotacional de uma extensão do campo $\vec{v}$ a uma vizinhança da superfície. De fato, seja $\vec{V}$ uma extensão de $\vec{v}$ a uma vizinhança de $\mathcal{S}$, isto é, $\vec{v} = \vec{V}|_{\mathcal{S}}$. Então, pela equação (2.18) e pelo Teorema de Stokes, segue

$$\text{Rot } \vec{v}(\mathbf{p}) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} ds = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot \hat{\mathbf{t}} ds = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int_{\mathcal{A}} \nabla \times \vec{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \nabla \times \vec{V}(\mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}),$$

onde a última igualdade é uma consequência da continuidade do integrando. Portanto, destacando o resultado obtido

$$\text{Rot } \vec{v}(\mathbf{p}) = \nabla \times \vec{V}(\mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}), \quad (2.19)$$

concluimos que o rotacional de qualquer extensão do campo possui a mesma componente normal sobre a superfície, sendo esta componente igual ao rotacional do campo intrínseco que, portanto, pode ser visto como um campo escalar ou como um campo vetorial na direção normal.

Dada uma distribuição de vórtices puntiformes sobre a superfície, sabe-se que a vorticidade é nula em todos os pontos exceto nas posições ocupadas pelos vórtices, onde seu valor diverge. Portanto, é intuitivo pensar nesse campo como uma soma de deltas de Dirac centrados nos vórtices e multiplicados por suas respectivas intensidades. Vejamos como essa idéia pode ser formalizada. Sejam $\mathbf{p}_i \in \mathcal{S}$ e $\Gamma_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$, as posições e intensidades, respectivamente, dos vórtices. Para cada $\mathbf{p}_k \in \mathcal{S}$, seja $\mathcal{C}_{k,i}$ uma sequência de curvas fechadas envolvendo $\mathbf{p}_k$ e satisfazendo $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{C}_{k,i} = \mathbf{p}_k$. Sejam $\mathcal{A}_{k,i} \subset \mathcal{S}$ a região aberta limitada por $\mathcal{C}_{k,i} = \partial\mathcal{A}_{k,i}$ e $A_{k,i}$ sua área. Dados $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ e $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ aberto e fechado, respectivamente, o Teorema da Partição da Unidade² garante a existência de uma função $g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ satisfazendo

1. $0 \leq g(\mathbf{p}) \leq 1, \forall \mathbf{p} \in \mathcal{S}$
2. $g(\mathbf{p}) = 1, \text{ se } \mathbf{p} \in \mathcal{F}$
3. $\text{supp } g \subset \mathcal{A},$

²Ver o livro de Frank Warner para maiores detalhes[20].

onde $\text{supp } g$ denota o suporte da função g . Aplicando este resultado para $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{k,i}$ e $F = \mathbf{p}_k$, encontramos uma função $g_{k,i}$ que satisfaz estas condições. Determinemos um índice $j > i$ para o qual $\mathcal{A}_{k,j} \subset \mathcal{A}_{k,i}$ e apliquemos o mesmo resultado ao aberto $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{k,i} \setminus \mathcal{A}_{k,j}$, sendo $\mathcal{F}$ um ponto qualquer de $\mathcal{A}$, de modo a obtermos a função $\tilde{g}_{k,i}$. Desta forma, definimos as funções de classe C^∞ dadas por $\tilde{\delta}_{k,i} = c\tilde{g}_{k,i} + g_{k,i}$, onde $c \in \mathbb{R}$ é a constante determinada de modo que $\int_{\mathcal{S}} \frac{\tilde{\delta}_{k,i}}{A_{k,i}} = 1$. Além dessa propriedade, estas funções satisfazem

$$\tilde{\delta}_{k,i}(\mathbf{p}) \geq 0, \quad \tilde{\delta}_{k,i}(\mathbf{p}_k) = 1 \text{ e } \text{supp}(\tilde{\delta}_{k,i}) \subset \mathcal{A}_{k,i}.$$

Definimos $\tilde{\omega}_{k,i} = \frac{\tilde{\delta}_{k,i}}{A_{k,i}}$ e $\tilde{\omega}_i = \sum_k \Gamma_k \tilde{\omega}_{k,i}$. Afirimo que $\omega = \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\omega}_i$ é uma representação do campo vorticidade $\text{Rot } \vec{v}$. Ainda mais, afirmo que $\omega = \sum_{k=1}^n \Gamma_k \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_k)$, onde δ é o Delta de Dirac centrado em $\mathbf{p}_k$. De fato, seja $\mathbf{p}$ um ponto de $\mathcal{S}$. Se $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_i, i = 1, 2, \dots, n$, então $\text{Rot } \vec{v}(\mathbf{p}) = 0 = \omega(\mathbf{p})$, conforme equação (2.18) e construção de ω . Se $\mathbf{p} = \mathbf{p}_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, então

$$\begin{aligned} \text{Rot } \vec{v}(\mathbf{p}_k) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{A_{k,i}} \int_{\mathcal{C}_{k,i}} \vec{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} ds = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_k}{A_{k,i}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_k}{A_{k,i}} \tilde{\delta}_{\mathcal{A}_{k,i}}(\mathbf{p}_k) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma_j}{A_{j,i}} \tilde{\delta}_{\mathcal{A}_{j,i}}(\mathbf{p}_k) = \omega(\mathbf{p}_k), \end{aligned}$$

isto é, $\text{Rot } \vec{v}(\mathbf{p}) = \omega(\mathbf{p}) \forall \mathbf{p} \in \mathcal{S}$, donde segue que ω de fato representa o rotacional intrínscio do campo velocidade. Mostremos agora que $\omega(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i)$. Para tanto, basta mostrar que a sequência de funções $\tilde{\omega}_{k,i} = \frac{\tilde{\delta}_{k,i}}{A_{k,i}}$ satisfaz

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}} \tilde{\omega}_{k,i} g = g(\mathbf{p}_k),$$

para toda função g de classe C^∞ em $\mathcal{S}$, pois, pela definição de Delta de Dirac centrada no ponto $\mathbf{p}_k \in \mathcal{S}$, temos

$$\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_k) := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i,$$

onde a sequência de funções $\{f_k\}$ é denominada sequência de núcleos de Dirac, papel aqui desempenhado por $\{\tilde{\omega}_{k,i}\}$, e possui a seguinte propriedade

$$\int_{\mathcal{S}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_k) g := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}} f_k g = g(\mathbf{p}_k),$$

onde a primeira igualdade é a definição da integral de delta centrado no ponto $\mathbf{p}_k$ multiplicado pela função g . Verifiquemos que $\tilde{\omega}_{k,i}$ é uma sequência de núcleos de Dirac.

De fato, seja g uma função real de classe C^∞ e de suporte compacto definida em $\mathcal{S}$ e sejam

$$\inf(g_{k,i}) = \inf \{g(\mathbf{p}), \mid p \in \mathcal{A}_{k,i}\}$$

e

$$\sup(g_{k,i}) = \sup \{g(\mathbf{p}), \mid p \in \mathcal{A}_{k,i}\}.$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $g(\mathbf{p}_k) > 0$, temos, pela continuidade de g , que para i suficientemente grande $g(\mathbf{p}) > 0 \forall p \in \mathcal{A}_{k,i}$. Portanto, uma vez que $\int_{\mathcal{S}} \tilde{\omega}_{k,i} = 1$, as seguintes desigualdades são válidas para todo $j \geq i$

$$\inf(g_{k,j}) \leq \int_{\mathcal{S}} \tilde{\omega}_{k,j} g \leq \sup(g_{k,j}).$$

Desta forma, como g é contínua, no limite $j \rightarrow \infty$ temos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}} \tilde{\omega}_j g dS = g(\mathbf{p}_i),$$

donde concluímos que

$$\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_k) = \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\omega}_{k,i}.$$

Considerando que ω representa o rotacional do campo velocidade, temos a equação

$$\omega \hat{\mathbf{n}} = \nabla \times \vec{\mathbf{v}}, \quad (2.20)$$

a qual pode ser vista tanto do ponto de vista intrínseco, no qual $\nabla \times \vec{\mathbf{v}}$ é um campo escalar sobre $\mathcal{S}$ igual a ω , como extrínseco, considerando que $\nabla \times \vec{\mathbf{v}}$ é a componente normal do rotacional de uma extensão do campo velocidade com valor igual a $\omega \hat{\mathbf{n}}$.

Embora no Capítulo 1 tenhamos utilizado a letra u para representar o potencial velocidade e a letra v para função de corrente, doravante empregaremos a letra Ψ para esta última e Φ para a primeira, de modo que um potencial complexo sobre uma superfície seja dado pela função $F = \Phi + i\Psi$. Feita esta consideração e admitindo que a superfície esteja parametrizada por um sistema de coordenadas isothermal, temos que as equações 1.10 reduzem-se às equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

isto é

$$\vec{\mathbf{v}} = \nabla \Phi = \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.21)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o campo de vetores normais à superfície.

2.2.1 Formulação do Problema

Seja $\mathcal{S}$ uma superfície regular orientável e simplesmente conexa³. Dada uma distribuição escalar de vorticidade $\omega(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i)$ sobre $\mathcal{S}$, onde Γ_i é a intensidade do i -ésimo vórtice localizado no ponto $\mathbf{p}_i \in \mathcal{S}$ e δ é o delta de Dirac e denotando por $\hat{\mathbf{n}}$ o campo normal à superfície, temos que o campo velocidade associado deve satisfazer o seguinte sistema:

$$\begin{cases} i) \omega \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}) = \nabla \times \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) \\ ii) \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}); \forall \mathbf{p} \in \mathcal{S}, \end{cases} \quad (2.22)$$

onde $\Psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função corrente associada ao problema.

Considerando que o campo velocidade corresponde ao escoamento de um fluido incompressível sobre a superfície, devemos impor que o divergente de $\vec{\mathbf{v}}$ é nulo, isto é,

$$0 = \nabla \cdot \vec{\mathbf{v}} = \nabla \cdot (\nabla \Psi \times \hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \nabla \Psi) - \nabla \Psi \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{n}}) = -\nabla \Psi \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{n}}),$$

donde segue que a seguinte condição deve ser satisfeita

$$\nabla \Psi \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{n}}) = 0.$$

No entanto, como foi visto na definição intrínseca do rotacional, temos $\nabla \times \hat{\mathbf{n}} = 0$, uma vez que a circulação do campo normal ao longo de qualquer curva na superfície é zero. Portanto, o campo velocidade obtido por $ii)$ é de fato incompressível, pois

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{v}} = -\nabla \Psi \cdot (\nabla \times \vec{n}) = 0.$$

Substituindo a equação $ii)$ na equação $i)$ do sistema (2.23), vejamos qual equação diferencial deve ser satisfeita pela função de corrente. Desenvolvendo os cálculos, encontramos

$$\omega \hat{\mathbf{n}} = \nabla \times \vec{\mathbf{v}} = \nabla \times (\nabla \Psi \times \hat{\mathbf{n}}) = (\mathcal{D} \nabla \Psi) \cdot \hat{\mathbf{n}} - (\mathcal{D} \hat{\mathbf{n}}) \cdot \nabla \Psi + \nabla \Psi (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \hat{\mathbf{n}} (\nabla^2 \Psi),$$

onde $\mathcal{D}$ é o operador derivada e ∇^2 é o laplaceano que também pode ser denotado por Δ . Dados um campo vetorial $\vec{V}$ na superfície e um ponto $p \in \mathcal{S}$, consideremos uma

³A superfície deve ser simplesmente conexa pois a definição intrínseca do rotacional faz uso da possibilidade de contrair uma curva fechada a um ponto da superfície, conforme equação 2.18.

curva fechada $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ que possui $\mathbf{p}$ em seu interior. Denotando por A a área da região $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ limitada pela curva $\mathcal{C} = \partial\mathcal{A}$, o Teorema do Divergente garante que

$$\iint_{\mathcal{A}} \text{div } \vec{V} dA = \int_{\mathcal{C}=\partial\mathcal{A}} \vec{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds,$$

de modo que se $\vec{V}$ for um campo contínuo temos

$$\text{div } \vec{V}(\mathbf{p}) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds,$$

sendo este limite tomado fazendo a curva contrair ao ponto $\mathbf{p}$. Desta forma, o divergente do campo normal a uma superfície é sempre zero, e portanto

$$\omega \hat{\mathbf{n}} = \mathcal{D} \nabla \Psi \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathcal{D} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi - \hat{\mathbf{n}} (\nabla^2 \Psi). \quad (2.23)$$

Seja $\mathbf{p}$ um ponto de $\mathcal{S}$ e sejam $\gamma(t)$, $\lambda(t)$ curvas satisfazendo $\gamma(0) = p = \lambda(0)$ e $\lambda'(t)|_{t=0} = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p})$, $\gamma'(t)|_{t=0} = \nabla \Psi(\mathbf{p})$, de modo que

$$\mathcal{D} \nabla \Psi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{d}{dt} \nabla \Psi(\lambda(t))|_{t=0}, \quad \mathcal{D} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi = \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{n}}(\gamma(t))|_{t=0}.$$

Considerando que a componente normal do segundo membro da equação (2.23) independe da extensão do campo $\vec{v}$, tomamos uma extensão de $\nabla \Psi$ constante ao longo da direção normal de modo que $\mathcal{D} \nabla \Psi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{d}{dt} \nabla \Psi(\lambda(t))|_{t=0} = 0$. Fazendo o produto interno de (2.23) com $\hat{\mathbf{n}}$ no ponto P , obtemos

$$\begin{aligned} \omega &= \langle \frac{d}{dt} \nabla \Psi(\lambda(t))|_{t=0}, \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}) \rangle - \langle \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{n}}(\gamma(t))|_{t=0}, \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}) \rangle - \nabla^2 \Psi \\ &= - \langle \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{n}}(\gamma(t))|_{t=0}, \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}) \rangle - \nabla^2 \Psi. \end{aligned}$$

No entanto, como o campo normal tem norma constante igual a 1, isto é,

$$\langle \hat{\mathbf{n}}(\gamma(t)), \hat{\mathbf{n}}(\gamma(t)) \rangle = 1,$$

derivando esta igualdade em relação a t e avaliando em $t = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{n}}(\gamma(t))|_{t=0}, \hat{\mathbf{n}}(\gamma(t))|_{t=0} \rangle + \langle \hat{\mathbf{n}}(\gamma(t))|_{t=0}, \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{n}}(\gamma(t))|_{t=0} \rangle \\ &= 2 \langle \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{n}}(\gamma(t))|_{t=0}, \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}) \rangle, \end{aligned}$$

donde segue que $\langle \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{n}}(\gamma(t))|_{t=0}, \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}) \rangle = 0$ e portanto a função de corrente deve satisfazer a equação de Poisson na superfície

$$\nabla^2 \Psi = -\omega. \quad (2.24)$$

Uma referência sobre a solução detalhada das equações de Laplace e de Poisson em diversas superfícies é o livro de Morse e Feshbach[25]. No que segue, obteremos as equações de movimento de n vórtices em algumas superfícies através da solução da equação de Poisson.

2.2.2 Dinâmica de Vórtices no Plano

Como visto na seção anterior, a função de corrente é solução da equação de Poisson no plano, isto é, $\nabla^2 \Psi(z) = -\omega(z) = -\sum_{i=1}^n \Gamma_i \delta(z - z_i)$. Considerando que a função de Green da equação $\nabla^2 \Psi = -4\pi \delta(z - \tilde{z})$ é $G(z|\tilde{z}) = -\ln(|z - \tilde{z}|^2)$, a função de corrente é dada pela integral de convolução $\Psi(z) = \frac{1}{4\pi} \int G(z|\tilde{z}) \omega(\tilde{z}) d\tilde{z}$, que, resolvendo, resulta

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{1}{4\pi} \int G(z|\tilde{z}) \omega(\tilde{z}) d\tilde{z} = -\frac{1}{4\pi} \int \ln(|z - \tilde{z}|^2) \sum_{i=1}^n \Gamma_i \delta(\tilde{z} - z_i) d\tilde{z} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \ln(|z - z_i|^2). \end{aligned}$$

Fazendo $z \mapsto (x, y)$ na equação acima, obtemos

$$\Psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \ln[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2].$$

A partir desta expressão e considerando que para $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$ temos $\hat{\mathbf{n}} = \hat{e}_3$, podemos encontrar o campo velocidade do fluido utilizando a segunda equação do sistema (2.23):

$$\vec{\mathbf{v}}(x, y) = \frac{dx}{dt} \hat{e}_1 + \frac{dy}{dt} \hat{e}_2 = \nabla \Psi(x, y) \times \hat{e}_3 = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \hat{e}_1 \times \hat{e}_3 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

isto é,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \frac{y - y_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

e

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \frac{x - x_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}.$$

de modo que a velocidade do j -ésimo vórtice é dado por

$$v_j = \frac{dx_j}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \left(\frac{y_i - y_j}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, -\frac{x_i - x_j}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \right).$$

As equações obtidas podem ser colocadas na forma Hamiltoniana definindo a função

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{i \neq j} \Gamma_j \Gamma_i \ln[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2],$$

que satisfaz

$$\Gamma_j \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_j}, \quad \Gamma_j \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j}.$$

Introduzindo novas variáveis

$$\tilde{x}_j = \sqrt{|\Gamma_j|} x_j, \quad \tilde{y}_j = \sqrt{|\Gamma_j|} \text{sgn}(\Gamma_j) y_j,$$

onde $\text{sgn}(\Gamma_j) = 1$ se $\Gamma_j > 0$ e $\text{sgn}(\Gamma_j) = -1$ do contrário, temos que as equações de movimento, na forma Hamiltoniana, são

$$\frac{d\tilde{x}_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{y}_j}, \quad \frac{d\tilde{y}_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{x}_j}.$$

2.2.3 Dinâmica de Vórtices na Esfera

Sem perda de generalidade, consideremos o problema na esfera unitária S^2 centrada na origem, para a qual $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}) = \hat{\mathbf{r}} \forall \mathbf{p} \in S^2$, sendo $\hat{\mathbf{r}}$ o versor posição do ponto $\mathbf{p}$ sobre a esfera. Utilizando sistema de coordenadas esféricas, temos o seguinte desenvolvimento do sistema (2.23):

$$\vec{\mathbf{v}} = \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \times \hat{\mathbf{r}} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

$$\begin{aligned} \omega \hat{\mathbf{r}} &= \nabla \times \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned}$$

Como $\Psi = \Psi(\theta, \phi)$ não depende de r , a equação acima assume a seguinte expressão:

$$-\omega = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = \tilde{\Delta} \Psi, \text{ onde } \tilde{\Delta} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

é o operador de Laplace-Beltrami. Considerando que $\int_{S^2} \omega d\Omega = 0^4$, a função de Green para o operador $\tilde{\Delta}$ satisfaz a equação

$$\tilde{\Delta} G(\theta, \phi, \theta', \phi') = \delta(\theta, \phi, \theta', \phi') - \frac{1}{4\pi},$$

e é dada por

$$G(\theta, \phi | \theta', \phi') = -\frac{1}{4\pi} \ln[1 - \cos \gamma(\theta, \phi, \theta', \phi')],$$

⁴Dada uma curva fechada e simples $\mathcal{C}$ sobre a esfera, que não passa na posição de nenhum vórtice, ela determina as regiões $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ sobre S^2 . Denotemos a orientação positiva de $\mathcal{C}$ com relação a $\mathcal{A}_i$ por $\mathcal{C}_i$, $i = 1, 2$, onde $\mathcal{C}_1 = -\mathcal{C}_2$. Ocorre que, pelas equações (2.17) e (2.21) temos

$$\int_{\mathcal{A}_i} \omega dS = \int_{\mathcal{C}_i = \partial \mathcal{A}_i} \vec{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{s}$$

e portanto

$$\int_{S^2} \omega dS = \int_{\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2} \omega dS = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{s} + \int_{-\mathcal{C}_1} \vec{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathcal{C}_1} \vec{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Este resultado aplica-se a qualquer superfície homeomorfa à esfera.

onde $\gamma(\theta, \phi, \theta', \phi')$ é o ângulo central entre os pontos $P(\theta, \phi)$ e $Q(\theta', \phi')$ na esfera e portanto $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$. Segue que a função de corrente é dada por

$$\begin{aligned}\Psi(\theta, \phi) &= -\frac{1}{4\pi} \iint \omega(\theta', \phi') \ln[1 - \cos \gamma] \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iint \sum_{i=1}^n \Gamma_i \delta(\theta', \phi', \theta_i, \phi_i) \ln[1 - \cos \gamma] \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \ln[1 - \cos \gamma(\theta, \phi, \theta_i, \phi_i)].\end{aligned}$$

A partir da equação acima, temos que o campo velocidade é dado por

$$\begin{aligned}v_\theta &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} = -\frac{1}{4\pi \sin \theta} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \frac{\sin \theta \sin \theta_i \sin(\phi - \phi_i)}{1 - \cos \gamma} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \frac{\sin \theta_i \sin(\phi - \phi_i)}{1 - \cos \gamma}; \\ v_\phi &= -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \frac{\cos \theta \sin \theta_i \cos(\phi - \phi_i) - \sin \theta \cos \theta_i}{1 - \cos \gamma},\end{aligned}$$

donde segue as seguintes expressões para as componentes da velocidade do j -ésimo vórtice

$$\begin{aligned}v_{\theta_j} &= \dot{\theta}_j = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \frac{\sin \theta_i \sin(\phi_j - \phi_i)}{1 - \cos \gamma_{ij}}, \\ v_{\phi_j} &= \sin \theta_j \dot{\phi}_j = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \frac{\cos \theta_j \sin \theta_i \cos(\phi_j - \phi_i) - \sin \theta_j \cos \theta_i}{1 - \cos \gamma_{ij}}.\end{aligned}$$

Definindo a função

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{8\pi} \sum_{j \neq i} \sum_{i=1}^n \Gamma_j \Gamma_i \ln(1 - \cos \gamma_{ij}),$$

onde

$$\cos \gamma_{ij} = \cos \theta_i \cos \theta_j + \sin \theta_i \sin \theta_j \cos(\phi_i - \phi_j),$$

e introduzindo as variáveis $q_j = \text{sgn}(\Gamma_j) \sqrt{\Gamma_j} \phi_j$ e $p_j = \sqrt{\Gamma_j} \cos \theta_j$, com $\text{sgn}(\Gamma_j) = 1$ se $\Gamma_j > 0$ e $\text{sgn}(\Gamma_j) = -1$ do contrário, temos que a formulação Hamiltoniana das equações de movimento é dada por

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}.$$

2.2.4 Dinâmica de Vórtices numa Superfície Difeomorfa à Esfera por uma Perturbação Radial

Seja f uma perturbação radial da esfera dada por

$$\begin{aligned} f: S^2 &\longrightarrow \mathcal{S} \\ \mathbf{x} &\longmapsto f(\mathbf{x}) = (1 + \epsilon \mathcal{T}(\mathbf{x}; \epsilon))\mathbf{x}, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{T}: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada e escolhida de maneira que f seja um difeomorfismo de classe C^∞ . Adotando o sistema de coordenadas esféricas, obtem-se uma parametrização $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ da superfície $\mathcal{S}$ fazendo a composição das cartas da esfera, dadas pela função $\Omega: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2$, onde $\Omega(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, com o difeomorfismo f

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = f \circ \Omega: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathcal{S} \\ (\theta, \phi) &\longmapsto (1 + \epsilon \mathcal{T}(\theta, \phi))(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \end{aligned}$$

A idéia a ser desenvolvida nesta seção consiste em utilizar esta parametrização da superfície para obter a equação de Poisson (2.24) intrinsecamente. O segundo passo é expandir a função de corrente Ψ em série de potências no parâmetro de perturbação ϵ

$$\Psi = \Psi_0 + \epsilon \Psi_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

para então obter uma aproximação em primeira ordem das equações de movimento de n vórtices puntiformes sobre a superfície $\mathcal{S}$.

Geometria intrínseca

Neste parágrafo será mencionado apenas o estritamente necessário para a obtenção do Laplaceano em uma superfície qualquer. Maiores detalhes podem ser encontrados em qualquer livro de *Geometria Riemanniana*, a exemplo do texto de Manfredo[27] com este título, do qual foram retiradas as definições aqui apresentadas.

Indicando por $\chi(\mathcal{S})$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em $\mathcal{S}$ e por $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em $\mathcal{S}$, definimos uma *conexão afim* ∇ em uma variedade diferenciável $\mathcal{S}$ como sendo uma aplicação

$$\nabla: \chi(\mathcal{S}) \times \chi(\mathcal{S}) \rightarrow \chi(\mathcal{S}),$$

que se indica por $(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades

$$\text{i)} \quad \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ.$$

$$\text{ii)} \quad \nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ.$$

$$\text{iii)} \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y,$$

onde $X, Y, Z \in \chi(\mathcal{S})$ e $f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$. Das propriedades acima descritas temos que, dado um sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ na vizinhança de um ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$ e dados os campos X, Y por

$$X = \sum_i x_i X_i, \quad Y = \sum_i y_i X_i,$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, segue

$$\nabla_X Y = \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) = \sum_{i,j} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,j} x_i X_i(y_j) X_j.$$

Fazendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, concluímos que Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis e que

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k, \quad (2.25)$$

o que mostra que $\nabla_X Y(\mathbf{p})$ depende de $x_i(\mathbf{p}), y_i(\mathbf{p})$ e das derivadas $X(y_k)(\mathbf{p})$ de y_k segundo X . Os símbolos Γ_{ij}^k são denominados coeficientes da conexão ∇ no aberto U da parametrização $(x_1, \dots, x_n)$ ou *símbolos de Christoffel* da conexão. Estes símbolos são facilmente calculados no caso em que a conexão afim ∇ é compatível com uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida na superfície. A métrica Riemanniana aqui utilizada é a induzida pelo produto interno euclidiano.

Introduzindo os coeficientes da primeira forma fundamental de $\mathcal{S}$ associada à parametrização $\mathbf{x}(\theta, \phi)$, isto é, $E = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta$, $F = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi$ e $G = \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi$, temos que os símbolos de Christoffel são dados por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{E_\theta}{2} \\ F_\theta - \frac{1}{2}E_\phi \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{E_\phi}{2} \\ \frac{G_\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_\phi - \frac{1}{2}G_\theta \\ \frac{G_\phi}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_\theta - 2FF_\theta + FE_\phi}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_\theta - FE_\theta - EE_\phi}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_\phi - FG_\theta}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_\theta - FE_\phi}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_\phi - GG_\theta - FG_\phi}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{FG_\theta + EG_\phi - 2FF_\phi}{2(EG - F^2)},\end{aligned}\quad (2.26)$$

onde $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Dada uma função $g \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$, definimos o *gradiente* de g como o campo vetorial $\text{grad } g$ em $\mathcal{S}$ que satisfaz

$$\langle \text{grad } g(\mathbf{p}), v \rangle = dg_p(v), \quad \mathbf{p} \in \mathcal{S}, \quad v \in T_p\mathcal{S}.$$

Para obtermos as componentes do vetor gradiente na base local, façamos $\text{grad } v = u_1x_\theta + u_2x_\phi$. Tomando o produto interno por $v = x_\theta$ e $v = x_\phi$ obtemos o sistema

$$\begin{aligned}u_1E + u_2F &= \frac{\partial g}{\partial \theta} = g_\theta \\ u_1F + u_2G &= \frac{\partial g}{\partial \phi} = g_\phi,\end{aligned}$$

que resolvendo para u_1 e u_2 resulta

$$u_1 = \frac{Gg_\theta - Fg_\phi}{EG - F^2}, \quad u_2 = \frac{Eg_\phi - Fg_\theta}{EG - F^2}. \quad (2.27)$$

Consideremos, agora, um campo vetorial $Y \in \chi(\mathcal{S})$. Definimos o *divergente* de Y como a função $\text{div}Y : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\text{div}Y(\mathbf{p}) = \text{traço da aplicação linear } X(\mathbf{p}) \rightarrow \nabla_X Y(\mathbf{p}), \quad \mathbf{p} \in \mathcal{S}.$$

Da equação (2.25) segue que o traço desta aplicação linear é

$$\sum_k \left(\sum_{ij} \delta_{i,k} y_j \Gamma_{ij}^k + X_k(y_k) \right) = \sum_{kj} \left(y_j \Gamma_{kj}^k + \frac{\partial}{\partial x_k} y_k \right),$$

isto é,

$$\text{div}Y(\mathbf{p}) = \sum_{kj} \left(y_j \Gamma_{kj}^k + \frac{\partial}{\partial x_k} y_k \right). \quad (2.28)$$

Considerando $\mathcal{S}$ como sendo uma superfície com coordenadas (θ, ϕ) , temos

$$\text{div}Y(\mathbf{p}) = \frac{\partial y_1}{\partial \theta} + \frac{\partial y_2}{\partial \phi} + y_1(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2) + y_2(\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2). \quad (2.29)$$

O divergente do gradiente de uma função $g \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$ define um operador de $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ em $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ denominado o *Laplaciano* em $\mathcal{S}$, como segue

$$\begin{aligned}\Delta : \mathcal{D}(\mathcal{S}) &\rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{S}) \\ g &\mapsto \Delta g = \text{div grad } g.\end{aligned}$$

Agora podemos obter a expansão em primeira ordem da equação de Poisson $\Delta\Psi = -\omega$ na superfície $\mathcal{S}$.

Aproximação em primeira ordem

Fazendo $r(\theta, \phi; \epsilon) = 1 + \epsilon\mathcal{T}(\theta, \phi; \epsilon)$, onde $\mathcal{T}$ é representada em série de potências de ϵ por $\mathcal{T}(\theta, \phi; \epsilon) = \mathcal{T}_0(\theta, \phi) + \epsilon\mathcal{T}_1(\theta, \phi) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, a parametrização de $\mathcal{S}$ é dada por $\mathbf{x}(\theta, \phi) = r(\theta, \phi)\Omega(\theta, \phi)$, onde $\Omega(\theta, \phi)$ é o versor $\hat{\mathbf{r}}$ da base advinda do sistema de coordenadas esféricas. Representando as derivadas parciais em relação a θ e ϕ através do respectivo subíndice, verifica-se que $\Omega_\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\Omega_\phi = \sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$, donde segue que $x_\theta = r_\theta\hat{\mathbf{r}} + r\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $x_\phi = r_\phi\hat{\mathbf{r}} + r\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental e suas respectivas derivadas parciais são dadas por

$$\begin{aligned} E &= r_\theta^2 + r^2, & E_\theta &= 2r_\theta(r + r_{\theta\theta}), & E_\phi &= 2(r_\theta r_{\theta\phi} + r r_\phi) \\ F &= r_\theta r_\phi, & F_\theta &= r_{\theta\theta} r_\phi + r_{\phi\theta} r_\theta, & F_\phi &= r_{\theta\phi} r_\phi + r_{\phi\theta} r_\theta \\ G &= r_\phi^2 + r^2 \sin^2 \theta, & G_\theta &= 2r_\phi r_{\phi\theta} + 2r r_\theta \sin^2 \theta + r^2 \sin 2\theta, & G_\phi &= 2r_\phi(r_{\phi\phi} + r \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

A partir da representação em série de potências da função $\mathcal{T}$, obtemos a aproximação em primeira ordem de r e suas derivadas parciais

$$r = 1 + \epsilon\mathcal{T}_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad r_\theta = \epsilon\mathcal{T}_{0\theta} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad r_\phi = \epsilon\mathcal{T}_{0\phi} + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

que, substituindo nas expressões dos coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas resulta

$$\begin{aligned} E &= 1 + 2\epsilon\mathcal{T}_0, & E_\theta &= 2\epsilon\mathcal{T}_{0\theta}, & E_\phi &= 2\epsilon\mathcal{T}_{0\phi} \\ F &= \mathcal{O}(\epsilon^2), & F_\theta &= \mathcal{O}(\epsilon^2), & F_\phi &= \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ G &= (1 + 2\epsilon\mathcal{T}_0) \sin^2 \theta, & G_\theta &= 2\epsilon\mathcal{T}_{0\theta} \sin^2 \theta + (1 + 2\epsilon\mathcal{T}_0) \sin 2\theta, & G_\phi &= 2\epsilon\mathcal{T}_{0\phi} \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

onde os termos de ordem maior ou igual a 2 foram omitidos nas expressões de E , G e suas derivadas. Aplicando os resultados acima obtemos também que

$$\frac{1}{EG - F^2} = \frac{1}{(1 + 4\epsilon\mathcal{T}_0) \sin^2 \theta + \mathcal{O}(\epsilon^2)} = \frac{1 - 4\epsilon\mathcal{T}_0}{\sin^2 \theta} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Das equações (2.27) obtemos uma aproximação em primeira ordem para as componentes do gradiente da função de corrente que, omitindo os termos de ordem maior ou igual a 2, são dadas por

$$u_1 = (1 - 2\epsilon\mathcal{T}_0)\Psi_\theta, \quad u_2 = \frac{(1 - 2\epsilon\mathcal{T}_0)}{\sin^2 \theta}\Psi_\phi, \quad (2.30)$$

enquanto que de (2.27) segue

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \epsilon \mathcal{T}_{0\theta}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{\epsilon \mathcal{T}_{0\phi}}{\sin^2 \theta}, & \Gamma_{12}^1 &= \epsilon \mathcal{T}_{0\phi}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{\epsilon \mathcal{T}_{0\theta} \sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{2\epsilon \mathcal{T}_{0\theta} \sin^2 \theta + (1+4\epsilon \mathcal{T}_0) \sin 2\theta}{2}, & \Gamma_{22}^2 &= \epsilon \mathcal{T}_{0\phi}.\end{aligned}\quad (2.31)$$

Das equações (2.29), (2.30) e (2.31) obtemos uma aproximação em primeira ordem para o Laplaciano de Ψ , dado por

$$\begin{aligned}\Delta \Psi &= \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial \phi} + u_1(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + u_2(\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2) \\ &= -2\epsilon \mathcal{T}_{0\theta} \Psi_\theta + (1 - 2\epsilon \mathcal{T}_0) \Psi_{\theta\theta} - \frac{2\epsilon \mathcal{T}_{0\phi}}{\sin^2 \theta} \Psi_\phi + \frac{1-2\epsilon \mathcal{T}_0}{\sin^2 \theta} \Psi_{\phi\phi} + \\ &\quad + (1 - 2\epsilon \mathcal{T}_0) \Psi_\theta (\epsilon \mathcal{T}_{0\theta} + \frac{\epsilon \mathcal{T}_{0\theta} \sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta}) + \frac{2\epsilon(1-2\epsilon \mathcal{T}_0) \Psi_\phi}{\sin^2 \theta} \mathcal{T}_{0\phi} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Psi_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 \phi} - 2\epsilon \mathcal{T}_0 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Psi_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 \phi} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= (1 - 2\epsilon \mathcal{T}_0) \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Psi_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 \phi} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2),\end{aligned}$$

isto é,

$$\Delta \Psi = (1 - 2\epsilon \mathcal{T}_0) \tilde{\Delta} \Psi + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.32)$$

onde $\tilde{\Delta}$ é o operador de Laplace-Beltrami apresentado na seção (2.2.3). A expansão da função de corrente em série de potências do parâmetro de perturbação ϵ é dada por $\Psi = \Psi_0 + \epsilon \Psi_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, onde Ψ_0 é a função de corrente na esfera que satisfaz $\tilde{\Delta} \Psi_0 = -\omega$. Portanto, das equações (2.24) e (2.32) segue

$$\begin{aligned}-\omega &= \Delta \Psi = (1 - 2\epsilon \mathcal{T}_0) \tilde{\Delta} \Psi + \mathcal{O}(\epsilon^2) = (1 - 2\epsilon \mathcal{T}_0) \tilde{\Delta} (\Psi_0 + \epsilon \Psi_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= -\omega + \epsilon \tilde{\Delta} \Psi_1 + 2\epsilon \mathcal{T}_0 \omega + \mathcal{O}(\epsilon^2),\end{aligned}$$

isto é,

$$\tilde{\Delta} \Psi_1 = -2\mathcal{T}_0 \omega, \quad (2.33)$$

donde segue que

$$\begin{aligned}\Psi_1(\theta, \phi) &= \frac{1}{4\pi} \iint 2\mathcal{T}_0 \omega(\theta', \phi') \ln[1 - \cos \gamma] \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ &= -\frac{1}{2\pi} \iint \sum_{i=1}^n \Gamma_i \delta(\theta', \phi', \theta_i, \phi_i) \mathcal{T}_0(\theta', \phi') \ln[1 - \cos \gamma] \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n 2\mathcal{T}_0(\theta_i, \phi_i) \Gamma_i \ln[1 - \cos \gamma(\theta, \phi, \theta_i, \phi_i)].\end{aligned}$$

Desta forma, temos

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n (1 + 2\epsilon \mathcal{T}_0(\theta_i, \phi_i)) \Gamma_i \ln[1 - \cos \gamma(\theta, \phi, \theta_i, \phi_i)] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.34)$$

Para obtermos uma aproximação em primeira ordem do campo velocidade, dado pela equação *ii*) do sistema (2.22), precisamos determinar o vetor normal e sua expansão até termos de primeira ordem em ϵ . Utilizamos um procedimento padrão para

determinar o vetor normal a $\mathcal{S}$ num ponto $\tilde{f}(\theta_0, \phi_0) = \mathbf{p} \in \mathcal{S}$, que consiste em considerar as curvas coordenadas $\lambda(\theta) = \tilde{f}(\theta, \phi_0)$ e $\alpha(\phi) = \tilde{f}(\theta_0, \phi)$ que intersectam-se no ponto $\mathbf{p}$, tomando como vetor normal a $\mathcal{S}$ em $\mathbf{p}$ o produto vetorial entre as velocidades de λ e α em $\mathbf{p}$ dividido por sua norma

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}) = \frac{\boldsymbol{\lambda}'(\theta_0) \times \boldsymbol{\alpha}'(\phi_0)}{|\boldsymbol{\lambda}'(\theta_0) \times \boldsymbol{\alpha}'(\phi_0)|}.$$

Fazendo os cálculos, obtemos

$$\hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi) = \lambda(\alpha_3 \sin \theta \hat{\mathbf{r}} - \alpha_1 \hat{\boldsymbol{\theta}} - \alpha_2 \hat{\boldsymbol{\phi}}),$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1(\theta, \phi) &= \epsilon \mathcal{T}_\theta(\theta, \phi)(1 + \epsilon \mathcal{T}(\theta, \phi)) \\ \alpha_2(\theta, \phi) &= \epsilon \mathcal{T}_\phi(\theta, \phi)(1 + \epsilon \mathcal{T}(\theta, \phi)) \\ \alpha_3(\theta, \phi) &= (1 + \epsilon \mathcal{T}(\theta, \phi))^2 \\ \lambda(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha_2^2 + \sin^2 \theta (\alpha_1^2 + \alpha_3^2)}} \end{aligned}$$

Expandindo os coeficientes de $\hat{\mathbf{n}}$ em série de Taylor no parâmetro ϵ , obtemos

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}} - \frac{\epsilon}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{T}_0}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\epsilon}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{T}_0}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.35)$$

Este resultado juntamente com as equações (2.30) resulta

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}} &= \nabla \Psi \times \hat{\mathbf{n}} \\ &= \left[(1 - 2\epsilon \mathcal{T}_0) \Psi_\theta (r_\theta \hat{\mathbf{r}} + r \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{1 - 2\epsilon \mathcal{T}_0}{\sin^2 \theta} \Psi_\phi (r_\phi \hat{\mathbf{r}} + r \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}) \right] \times \left[\hat{\mathbf{r}} - \frac{\epsilon \mathcal{T}_{0\theta}}{\sin \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\epsilon \mathcal{T}_{0\phi}}{\sin \theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \frac{\epsilon}{\sin \theta} \left[\frac{\mathcal{T}_{0\theta}}{\sin \theta} \Psi_\phi - \mathcal{T}_{0\phi} \Psi_\theta \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1 - \epsilon \mathcal{T}_0}{\sin \theta} \Psi_\phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - (1 - \epsilon \mathcal{T}_0) \Psi_\theta \hat{\boldsymbol{\phi}} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Da equação (2.34) segue

$$\Psi_\phi = -\frac{1}{4\pi} \sum_i \frac{\Gamma_i (1 + 2\epsilon \mathcal{T}_0(\theta_i, \phi_i)) \sin \theta \sin \theta_i \sin(\phi - \phi_i)}{1 - \cos \gamma} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

e

$$\Psi_\theta = \frac{1}{4\pi} \sum_i \frac{\Gamma_i (1 + 2\epsilon \mathcal{T}_0(\theta_i, \phi_i)) [\cos \theta \sin \theta_i \cos(\phi - \phi_i) - \sin \theta \cos \theta_i]}{1 - \cos \gamma} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Substituindo estas expressões na equação de $\vec{\mathbf{v}}$ obtemos a seguinte aproximação em primeira ordem das componentes do campo velocidade

$$\begin{aligned} v_r &= -\frac{\epsilon}{4\pi \sin \theta} \sum_i \frac{\Gamma_i [\mathcal{T}_{0\theta} \sin \theta_i \sin(\phi - \phi_i) + \mathcal{T}_{0\phi} (\cos \theta \sin \theta_i \cos(\phi - \phi_i) - \sin \theta \cos \theta_i)]}{1 - \cos \gamma} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ v_\theta &= -\frac{1}{4\pi} \sum_i \frac{\Gamma_i (1 + 2\epsilon \mathcal{T}_0(\theta_i, \phi_i) - \epsilon \mathcal{T}_0(\theta, \phi)) \sin \theta_i \sin(\phi - \phi_i)}{1 - \cos \gamma} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ v_\phi &= -\frac{1}{4\pi} \sum_i \frac{\Gamma_i (1 + 2\epsilon \mathcal{T}_0(\theta_i, \phi_i) - \epsilon \mathcal{T}_0(\theta, \phi)) [\cos \theta \sin \theta_i \cos(\phi - \phi_i) - \sin \theta \cos \theta_i]}{1 - \cos \gamma} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

As equações acima fornecem uma aproximação em primeira ordem do campo velocidade, estando definidas nos pontos de $\mathcal{S}$ onde não localizam-se vórtices. Para determinarmos a velocidade $\vec{v}_j = v_{rj}\hat{\mathbf{r}} + v_{\theta j}\hat{\boldsymbol{\theta}} + v_{\phi j}\hat{\boldsymbol{\phi}}$ do j -ésimo vórtice, avaliamos as equações de $\vec{v}$ em $(\theta, \phi) = (\theta_j, \phi_j)$ desconsiderando o termo $i = j$ no somatório, o que resulta nas equações da velocidade aproximadas em primeira ordem, dadas por

$$\begin{aligned} v_{rj} &= -\frac{\epsilon}{4\pi \sin \theta_j} \sum_{i \neq j} \frac{\Gamma_i [\mathcal{T}_{0\theta_j}(\theta_j, \phi_j) \sin \theta_i \sin(\phi_j - \phi_i) + \mathcal{T}_{0\phi}(\theta_j, \phi_j) (\cos \theta_j \sin \theta_i \cos(\phi_j - \phi_i) - \sin \theta_j \cos \theta_i)]}{1 - \cos \gamma_{ij}} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ v_{\theta j} &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \frac{\Gamma_i (1 + 2\epsilon \mathcal{T}_0(\theta_i, \phi_i) - \epsilon \mathcal{T}_0(\theta_j, \phi_j)) \sin \theta_i \sin(\phi_j - \phi_i)}{1 - \cos \gamma_{ij}} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ v_{\phi j} &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \frac{\Gamma_i (1 + 2\epsilon \mathcal{T}_0(\theta_i, \phi_i) - \epsilon \mathcal{T}_0(\theta_j, \phi_j)) [\cos \theta_j \sin \theta_i \cos(\phi_j - \phi_i) - \sin \theta_j \cos \theta_i]}{1 - \cos \gamma_{i,j}} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde $\cos \gamma_{ij} = \cos \theta_i \cos \theta_j + \sin \theta_i \sin \theta_j \cos(\phi_i - \phi_j)$.

Para obtermos as equações de movimento, consideremos a trajetória do j -ésimo vórtice parametrizada pela curva $\gamma(t) = [1 + \epsilon \mathcal{T}(\theta(t), \phi(t))]\Omega(\theta(t), \phi(t))$. Temos

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + v_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} = \gamma'(t) = \epsilon (\mathcal{T}_\theta \dot{\theta} + \mathcal{T}_\phi \dot{\phi}) \hat{\mathbf{r}} + (1 + \epsilon \mathcal{T}) \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + (1 + \epsilon \mathcal{T}) \sin \theta \dot{\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= \epsilon (\mathcal{T}_{0\theta} \dot{\theta} + \mathcal{T}_{0\phi} \dot{\phi}) \hat{\mathbf{r}} + (1 + \epsilon \mathcal{T}_0) \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + (1 + \epsilon \mathcal{T}_0) \sin \theta \dot{\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned}$$

donde segue

$$\dot{\theta}_j = \frac{v_{\theta j}}{(1 + \epsilon \mathcal{T}_0)} = [1 - \epsilon \mathcal{T}_0(\theta_j, \phi_j)] v_{\theta j} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.37)$$

$$\dot{\phi}_j = \frac{v_{\phi j}}{(1 + \epsilon \mathcal{T}_0) \sin \theta_j} = \frac{[1 - \epsilon \mathcal{T}_0(\theta_j, \phi_j)] v_{\phi j}}{\sin \theta_j} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.38)$$

$$v_{rj} = \epsilon [\mathcal{T}_{0\theta}(\theta_j, \phi_j) \dot{\theta} + \mathcal{T}_{0\phi}(\theta_j, \phi_j) \dot{\phi}] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.39)$$

Substituindo (2.37) e (2.38) na equação (2.39) e eliminando termos de ordem maior ou igual a dois, observa-se que esta última equação é identicamente verificada, de modo que a dinâmica do sistema é regida pelas equações (2.37) e (2.38). Eliminando $v_{\theta j}$ e $v_{\phi j}$ destas duas equações e desconsiderando termos de ordem superior, encontramos que a aproximação em primeira ordem no parâmetro de perturbação ϵ das equações de movimento do problema de n -vórtices sobre $\mathcal{S}$ é dada por

$$\dot{\theta}_j = \frac{-1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \frac{\Gamma_i [1 + 2\epsilon (\mathcal{T}_0(\theta_i, \phi_i) - \mathcal{T}_0(\theta_j, \phi_j))] \sin \theta_i \sin(\phi_j - \phi_i)}{1 - \cos \gamma_{ij}}, \quad (2.40)$$

$$\dot{\phi}_j = \frac{-1}{4\pi \sin \theta_j} \sum_{i \neq j} \frac{\Gamma_i [1 + 2\epsilon (\mathcal{T}_0(\theta_i, \phi_i) - \mathcal{T}_0(\theta_j, \phi_j))] [\cos \theta_j \sin \theta_i \cos(\phi_j - \phi_i) - \sin \theta_j \cos \theta_i]}{1 - \cos \gamma_{i,j}}. \quad (2.41)$$

Recordando que as equações de movimento de n vórtices na esfera são dadas por

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_j &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \frac{\sin \theta_i \sin(\phi_j - \phi_i)}{1 - \cos \gamma_{ij}}, \\ \dot{\phi}_j &= -\frac{1}{4\pi \sin \theta_j} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \frac{\cos \theta_j \sin \theta_i \cos(\phi_j - \phi_i) - \sin \theta_j \cos \theta_i}{1 - \cos \gamma_{ij}},\end{aligned}$$

definimos

$$\begin{aligned}\Theta_{i,j} &= \frac{\sin \theta_i \sin(\phi_j - \phi_i)}{1 - \cos \gamma_{ij}} \\ \Phi_{i,j} &= \frac{\cos \theta_j \sin \theta_i \cos(\phi_j - \phi_i) - \sin \theta_j \cos \theta_i}{1 - \cos \gamma_{ij}} \\ \Delta_{i,j} &= \mathcal{T}_0(\theta_i, \phi_i) - \mathcal{T}_0(\theta_j, \phi_j),\end{aligned}$$

de modo que as equações de movimento na esfera escrevem-se

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_j &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Theta_{i,j} \\ \dot{\phi}_j &= -\frac{1}{4\pi \sin \theta_j} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Phi_{i,j},\end{aligned}\tag{2.42}$$

enquanto que a aproximação em primeira ordem destas equações na superfície obtida pela perturbação radial da esfera é dada pelas equações

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_j &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Theta_{i,j} - \frac{2\epsilon}{4\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Delta_{i,j} \Theta_{i,j} \\ \dot{\phi}_j &= -\frac{1}{4\pi \sin \theta_j} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Phi_{i,j} - \frac{2\epsilon}{4\pi \sin \theta_j} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Delta_{i,j} \Phi_{i,j}.\end{aligned}\tag{2.43}$$

Da expressão de Δ_{ij} observamos que se $\mathcal{S}$ é uma superfície de revolução então as equações de movimento para a configuração do problema de Kelvin⁵ só têm termos de ordem maior ou igual a dois em ϵ , pois neste caso $\theta_i = \theta_j$, $\forall i, j = 1, \dots, n$ e a função $\mathcal{T}$ independe de ϕ , donde segue que $\Delta_{ij} = 0$. Esta observação é consistente com a aplicação feita ao elipsóide de revolução, uma vez que nas equações obtidas só apareciam termos de ordem quadrática.

Conhecendo soluções de equilíbrio das equações de movimento na superfície $\mathcal{S}$, podemos utilizar 2.43 para analisar a estabilidade destas soluções. Na esfera, são conhecidas soluções de equilíbrio relativo obtidas pela disposição, numa mesma latitude, de n vórtices nos vértices de um polígono regular de n lados, desde que o polígono gire com uma certa velocidade angular constante. Uma questão que aqui se coloca

⁵Dada uma distribuição de n vórtices puntiformes dispostos nos vértices de um polígono regular a uma mesma latitude, pode-se calcular a velocidade angular ω desta configuração para a qual as equações de movimento são satisfeitas.

é sob quais condições uma tal solução de equilíbrio relativo pode ser encontrada na perturbação da esfera $\mathcal{S}$. Argumentos de simetria indicam que tais soluções podem ser encontradas se $\mathcal{S}$ for uma superfície de revolução. Investigar esta possibilidade e estudar a estabilidade destes equilíbrios utilizando as equações aproximadas 2.43, são questões de interesse para prosseguimento deste trabalho. Também, a busca de soluções periódicas do sistema não perturbado 2.43 a partir dos equilíbrios relativos do caso esférico, via métodos de bifurcação de soluções periódicas, como o método da continuação de Poincaré, será outro desdobramento desta dissertação.

Bibliografia

- [1] Klein, Felix, *On Riemann's Theory of Algebraic Functions and their Integrals* Dover Publications, Inc. New York (1963)
- [2] Helmholtz, H. von, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik. V 55, P. 25-55, 1858.
- [3] Kirchhoff, G. R., *Vorlesungen über Mathematische Physik.* Mechanik, Teubner, Leipzig, 1876.
- [4] Mayer, A. M., *Experiments with floating magnets.* Am. J. Sci. Arts, Third Ser. XV, 276(1878); Nature (London) 17, 487-488 (1878).
- [5] Thomson, W., *Floating magnets illustrating vortex-systems.* Nature (London) 18, 13 (1878); W. T. Kelvin, Mathematical and Physical Papers (Cambridge University Press, Cambridge, 1910), Vol. 4, pp. 135 -140.
- [6] Thomson, J. J., *An Treatise on the Motion of Vortex Rings.* Macmillan, London, 1883, pp. 94-108.
- [7] Thomson, J. J., *Electricity and Matter.* Westminster Archibald Constable and CO., Ltd.(1904) 94-108.
- [8] Thomson, J. J., *On the structure of the atom: An investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the result to the theory of atomic structure,* Philosophical Magazine, Series 6, v. 7, p. 237-265 (1904).

- [9] Havelock, T.H., *The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation*. Philos, Mag. 11, 617 (1931).
- [10] Cabral, H. E. e Schmidt, D. S., *Spectral stability of relative equilibria in the problem of $N+1$ vortices*, SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) J. Math. Anal. 31, 231 (1999).
- [11] Kurakin, L. G. e Yudovich, V. I., *The stability of stationary rotation of a regular polygon*, CHAOS 12, 3 (2002).
- [12] Gromeka, I. S., *On vortex motions of liquid on a sphere*, Proceedings of the Physical-Mathematical Section of the Society on Natural Sciences, Kazan State University, Session 45 (1885).
- [13] Bogomolov, V. A., *Dynamics of vorticity at a sphere*, Fluid Dynamics V. 6. P. 863-870 (1977).
- [14] Bogomolov, V. A., *Model of fluctuations of the centers of action of an atmosphere*, Izv., Acad. Sci., USSR, Atmos. Oceanic Phys. 15, 243 (1979).
- [15] Kidambi, R. e Newton, P. K., *Motion of three point vortices on a sphere* PHYSICA D 116, 143-175 (1998).
- [16] Kimura, Y., *Vortex motion on surfaces with constant curvature*, Proc. R. Soc. Lond. A 455, 245-259 (1999).
- [17] Cabral, H. E., Meyer, K. R. e Schmidt, D. S., *Stability and bifurcations for the $N+1$ vortex problem on the sphere* Regular and Chaotic Dynamics, V. 8, N 3, p. 259-282 (2003).
- [18] Kurakin, L. G., *On nonlinear stability of the regular vortex systems on a sphere*, CHAOS V. 14, N. 3, p. 592-602 (2004).
- [19] Newton, P. K., *The N -Vortex Problem* Volume 145, Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag (2001).
- [20] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, In the Editorial Series of **I. M. SINGER** - Massachusetts Institute of Technology (1970).
- [21] Hally, D., *Stability of streets of vortices on surfaces of revolution with a reflection symmetry*, J. Math. Phys. 21(1), 211-217 (1980).

- [22] Kundu, P. K. e Cohen, I. M., *Fluid Mechanics* Academic Press (2002).
- [23] Chorin, A. J., *A Mathematical Intoduction to Fluid Mechanics* Texts in Applied Mathematics 4, Springer-Verlag (1990).
- [24] Chorin, A. J., *Vorticity and Turbulence* Applied Mathematical Sciences 103, Springer-Verlag (1994).
- [25] Morse, P. M. e Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics* McGraw-Hill Book Company New York (1953)
- [26] Green, C. D., *Integral Equation Methods*, (1969).
- [27] Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, (1988).