



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**MÉTODOS VARIACIONAIS E SOLUÇÕES  
PERIÓDICAS MINIMIZANTES PARA OS  
PROBLEMAS DE KEPLER, 3 e 4 CORPOS**

**ÉDER MATEUS DE SOUZA**

**Sob orientação do professor Cláudio Vidal Diaz**

Recife, 2005.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**MÉTODOS VARIACIONAIS E SOLUÇÕES  
PERIÓDICAS MINIMIZANTES PARA OS  
PROBLEMAS DE KEPLER, 3 e 4 CORPOS**

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.*

**ÉDER MATEUS DE SOUZA**

**Sob orientação do professor Cláudio Vidal Diaz**

Recife, 2005.

Souza, Éder Mateus de

Métodos variacionais e soluções periódicas minimizantes para os problemas de Kepler, 3 e 4 corpos / Éder Mateus de Souza.- Recife : O Autor, 2005.

73 folhas: il., fig.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN., Matemática, 2005.

Inclui bibliografia.

1. Problema de Kepler. 2. Problema dos 3 corpos. 3. Problema dos 4 corpos. 4. Métodos variacionais. I. Título.

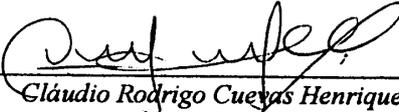
521.1  
521

CDU (2.ed.)  
CDD (22.ed.)

UFPE  
BC2006-256

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado:   
César Augusto Rodrigues Castilho, DMAT-UFPE  
Co-Orientador

  
Cláudio Rodrigo Cuevas Henriquez, DMAT-UFPE

  
Claudianor Oliveira Alves, DME-UFCG

**MÉTODOS VARIACIONAIS E SOLUÇÕES  
PERIÓDICAS MINIMIZANTES PARA OS  
PROBLEMAS DE KEPLER, 3 E 4 CORPOS**

Por  
Éder Mateus de Souza

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410  
RECIFE – BRASIL

Fevereiro - 2005

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Resultados básicos do cálculo variacional</b>	<b>12</b>
1.1 Variação de Gâteaux e derivada de Fréchet . . . . .	12
1.2 Resultados importantes de Análise Funcional . . . . .	14
1.2.1 Topologia fraca e Topologia fraca* . . . . .	15
1.2.2 Espaços reflexivos . . . . .	17
1.2.3 Espaços de Sobolev . . . . .	17
1.3 As equações de Euler-Lagrange . . . . .	19
1.4 O funcional ação do problema dos N-Corpos . . . . .	22
1.5 Princípio de criticalidade simétrica . . . . .	23
1.6 Existência de minimizantes . . . . .	26
1.6.1 Princípio variacional . . . . .	26
1.6.2 A semicontinuidade inferior fraca de $\mathcal{A}$ . . . . .	27
1.6.3 O problema dos n-corpos e a condição $(NC)_v$ . . . . .	28
<b>2 Cálculo variacional aplicado ao problema de Kepler</b>	<b>32</b>
2.1 O problema de Kepler . . . . .	32

2.1.1	O funcional ação e o problema de Kepler . . . . .	36
2.1.2	Ação das órbitas keplerianas colineares e elípticas . . . . .	38
2.2	O teorema de Gordon . . . . .	40
2.2.1	Uma propriedade minimizante das órbitas circulares . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Cálculo variacional aplicado ao problema dos três corpos</b>	<b>48</b>
3.1	Redução do problema . . . . .	48
3.1.1	Coordenadas de Jacobi . . . . .	48
3.1.2	O problema planar dos três corpos . . . . .	50
3.2	A órbita da figura-oito . . . . .	51
3.2.1	O problema de minimização . . . . .	51
3.2.2	A ação reduzida . . . . .	54
3.3	Excluindo Colisões . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Cálculo variacional aplicado ao problema dos quatro corpos</b>	<b>62</b>
4.1	O problema paralelogramo dos quatros corpos . . . . .	62
4.1.1	O espaço de configurações reduzidas . . . . .	63
4.1.2	Propriedades de $U(\theta, \phi)$ restrito a shape esfera unitária . . . . .	66
4.2	Um problema de minimização . . . . .	68
4.2.1	Existência de minimizantes . . . . .	68
4.2.2	A existência de minimizantes . . . . .	70
	<b>Bibliografia</b>	<b>76</b>

## RESUMO

Nesta dissertação, fazemos uma introdução aos métodos variacionais no intuito de encontrar minimizantes de certos funcionais. Em particular, os minimizantes do funcional ação, são soluções para o problema dos N-corpos desde que não possuam colisões. Estudamos os minimizantes do funcional ação para o problema de Kepler, onde constatamos que as órbitas circulares minimizam tal funcional. Estudamos também, a propriedade minimizante das órbitas para o funcional ação relativo ao problema dos três corpos planar com massas iguais. Com certas restrições topológicas e algumas simetrias fizemos um estudo da órbita da "figura oito", descoberta por A. Chenciner e R. Montgomery [6], mostrando que os corpos se movem ao longo desta órbita e não colidem. Além disso, fizemos um breve estudo sobre o funcional ação relacionado ao problema paralelogramo dos quatro corpos e conseguimos soluções periódicas com certas simetrias.

## ABSTRACT

In this dissertation, we make an introduction to the variational methods with intention of finding minimum of certain functionals. In particular, the minimum of the action function, are solutions of the N-body problem if they don't collisions. We study the minimum of the action functional for the Kepler problem, where we have check that on certain spaces the circular orbits minimize such functional. Also, we study the minimum property of the orbits for the relative action functional to the three body planar problem with equal masses. With certain topological restriction and some symmetries we made a study of the orbit "figure eight", found by A. Chenciner e R. Montgomery [6], showing that the bodies that move on this orbit don't collide. Moreover, we made a brief study on the action functional related to the parallelogram planar problem of the four bodies.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a Deus por me proporcionar oportunidades de crescer na vida cada vez mais. Como não poderia deixar de ser, fico muito feliz e grato a meu pai João Mateus (Joca), minha mãe Zilda Araújo, meus irmãos Edianne e Mateus, bem como também avós, Laura (Vozinha), Valdomira (Dedé) e Renato (Pai), minha tia Eugênia (tia Geu), meus tios, tias, primos, primas... enfim a toda minha Família. É claro que não posso esquecer de minha noiva querida Marta (Zuga) que sempre me deu força mesmo antes de ser minha namorada(ela estava prevendo).

Agradeço ao professor Cláudio Vidal por sua orientação, dedicação, disponibilidade, amizade, paciência e também por ter aceitado me orientar sem mesmo ter sido meu professor até então. Devo gratidão ao professor César Castilho pela co-orientação e por sua amizade, conselhos, dicas... . A todos os professores do Dmat que contribuíram direta ou indiretamente para minha formação. Não posso esquecer do professor Claudianor Alves que aceitou participar de minha banca e me ajudou bastante tendo paciência de me ouvir algumas vezes e por ter dado sugestões que enriqueceram o trabalho.

Agradeço aos meus colegas Almir, Fábio, Naldisson, Adson, Ricardo, Renata, Kátia, Hélio, Davi, Steve, Luiz, Rodrigo, Cláudio Cristino (o homem das figuras) e muitos outros pois se eu fosse colocar todos aqui não iria ter quem conseguisse carregar minha dissertação.

Agradeço a Tânia (UFPE), Andiara (UEFS) pelo apoio e competência nas secretarias e a todos os professores da UEFS que me deram força e direta ou indiretamente contribuíram para minha formação.

Ao Cnpq pelo apoio financeiro.

# Introdução

O objetivo principal desta dissertação é encontrar soluções periódicas através de métodos variacionais para o problema dos 3 e 4 corpos, que consiste em estudar o movimento de 3 e 4 partículas submetidas unicamente a ação de suas atrações gravitacionais.

Em 1767, Euler [8] obteve três soluções particulares para o problema dos três corpos, as quais têm uma configuração colinear a cada instante e em 1772, Lagrange [12] mostra a existência de mais duas soluções particulares, as quais formam um triângulo equilátero a cada instante. Outra solução particular para o problema dos três corpos foi encontrada em 2000 por A. Chenciner e R. Montgomery [6] onde, considerando os corpos com massas iguais, mostraram através de métodos variacionais, que os corpos se movem em uma órbita com a forma de uma "figura-8" sem colidir um com o outro. Para mostrar a não colisão entre os corpos, A. Chenciner e R. Montgomery utilizaram métodos numéricos. Em 2001, Kuo Chang-Chen [5] conseguiu analiticamente a prova da não colisão entre os corpos.

No capítulo 1 começamos com a definição da variação de Gateaux e de derivada de Fréchet. Em seguida enunciamos alguns resultados de análise funcional, que serão utilizados no decorrer da dissertação. Deduzimos as equações de Euler-Lagrange e fazemos uma relação entre os minimizantes do funcional ação para o problema dos N-corpos e suas soluções, além de caracterizar tal funcional. Utilizamos o princípio de criticalidade simétrica de Palais, princípio este que ajuda a encontrar minimizantes de funcionais sobre certos espaços. Trabalhamos com uma condição sobre os espaços onde o funcional está definido, chamada de condição  $(NC)_v$ , para obter a coercividade do funcional ação.

No capítulo 2 estudamos o problema de Kepler, onde deduzimos as Leis de Kepler e fazemos uma relação entre o funcional ação com tal problema. Deduzimos o valor da ação das órbitas

---

Keplerianas colineares e elípticas, onde provamos o Teorema de Gordon [9], no qual mostramos a propriedade minimizantes das órbitas elípticas, em particular das órbitas circulares.

O capítulo 3 é dedicado ao problema planar dos três corpos. Introduzimos as coordenadas de Jacobi e o fibrado de Hopf, que são de grande importância para a redução do problema. No caso de massas iguais, mostramos que um minimizante do funcional ação sobre um espaço com certas restrições topológicas é uma solução para o problema planar dos três corpos. É dedicado também uma seção para provar a não existência de colisão entre os corpos que se movimentam ao longo de tal solução, a qual tem uma órbita no formato do número oito.

No quarto capítulo fazemos um breve estudo do problema paralelogramo dos quatro corpos relacionando-o com o funcional ação. Neste estudo exibimos espaços em que o funcional ação atinge o mínimo que, desde que nunca se anule, será solução para o problema (paralelogramo) dos quatro corpos além da periodicidade da solução.

Esta dissertação teve como base de estudo vários artigos de pesquisa, entre eles os devido a Kuo Chang-Chen ([4], [5]) e a A.Chenciner e R. Montgomery ([6]).

# Capítulo 1

## Resultados básicos do cálculo variacional

Neste capítulo, vamos introduzir alguns conceitos básicos do cálculo variacional bem como alguns resultados importantes de Análise Funcional. Resultados estes que serão de grande importância para a obtenção de teoremas que serão demonstrados nesta dissertação. Podemos olhar o cálculo variacional como o cálculo diferencial no espaço de funções onde tentaremos, sobre espaços apropriados encontrar curvas que minimizem certos funcionais.

### 1.1 Variação de Gâteaux e derivada de Fréchet

Seja  $\mathcal{X}$  um espaço de Banach com a norma  $\|\cdot\|$  (denotaremos este par simplesmente por  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ ) e  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  um funcional. Se  $F(x) < \infty$  e existe um funcional linear  $L$  em  $\mathcal{X}$  tal que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \{F(x + sh) - F(x) - L(sh)\} = 0, \quad (1.1)$$

para todo  $h \in \mathcal{X}$  tal que o limite exista, então  $\delta_x F(h) := L(h)$  é chamada **Variação de Gâteaux de  $F$  em  $\mathcal{X}$  na direção de  $h \in \mathcal{X}$** .

A Variação de Gâteaux está bem definida pois se existir  $L_1, L_2$  que satisfazem (1.1), então  $L_1(h) = L_2(h)$ , para todo  $h \in \mathcal{X}$  tal que o limite exista. De fato, sejam  $L_1$  e  $L_2$  funcionais lineares tais que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \{F(x + sh) - F(x)\} = L_1(h) \quad (1.2)$$

e

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \{F(x+sh) - F(x)\} = L_2(h). \quad (1.3)$$

Assim pela unicidade do limite temos que  $L_1(h) = L_2(h)$ , para todo  $h \in \mathcal{X}$  tal que o limite exista.

Fixado  $x \in \mathcal{X}$ , o sub conjunto  $\Lambda_x = \{h \in \mathcal{X} / \exists \delta_x F(h)\}$  de direções cuja variação de Gâteaux existe em  $x$  é chamado **espaço das variações admissíveis de  $\mathcal{X}$** . Note que  $\Lambda_x$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{X}$ . Com efeito, dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $h_1, h_2 \in \Lambda_x$  temos, pela linearidade de  $L$ , que:

$$\alpha L(h_1) + \beta L(h_2) = L(\alpha h_1 + \beta h_2).$$

Ou seja,  $\alpha h_1 + \beta h_2 \in \Lambda_x$ .

A função  $\delta_x F : \Lambda_x \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para cada  $h$  associe  $\delta_x F(h)$  é chamada de Variação de Gâteaux de  $F$  em  $x$  no espaço de variações admissíveis de  $\mathcal{X}$ . Se  $\Lambda_x = \mathcal{X}$ ,  $\delta_x F$  é chamada de **derivada de Gâteaux** de  $F$  em  $x$ .

**Observação 1.1** *Note que, desde que  $s \in \mathbb{R}$  (suficientemente pequeno), podemos pensar numa função real*

$$s \longrightarrow F(x+sh)$$

e logo, se existe a variação de Gateaux de  $F$  em  $x$  na direção  $h$ , devemos ter

$$\delta_x F(h) = \frac{d}{ds} F(x+sh)|_{s=0}.$$

Sejam  $F$  e  $\mathcal{X}$  como definidos anteriormente.  $F$  é dita **diferenciável no sentido de Fréchet** em  $x \in \mathcal{X}$ , se  $F(x) < \infty$  e se existe um funcional linear limitado  $L$  em  $\mathcal{X}$ , denotado por  $DF(x)$ , tal que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \{F(x+h) - F(x) - L(h)\} = 0 \quad (1.4)$$

Se  $DF(x) = 0$ , então  $x$  é chamado **ponto crítico de  $F$** . Se  $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$  é um subespaço ou subvariedade de  $\mathcal{X}$  e  $DF(x) = 0$  como um funcional linear em  $T_x \mathcal{X}_0$ , então  $x$  é chamado ponto crítico de  $F$  em  $\mathcal{X}_0$ .

Propriedades:

1. Note que se  $F$  é diferenciável no sentido de Fréchet em  $x \in \mathcal{X}$ , então existe a derivada de Gâteaux de  $F$  em  $x$ . De fato sendo  $F$  diferenciável no sentido de Fréchet,

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \{F(x+h) - F(x) - L(h)\} = 0 \quad (1.5)$$

ou seja,

$$\lim_{\|sh\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|sh\|} \{F(x+sh) - F(x) - L(sh)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \{F(x+sh) - F(x) - L(sh)\}. \quad (1.6)$$

Assim  $DF(x) = \delta_x F$ .

2. Se  $\mathcal{X}$  é um espaço de Hilbert com produto interno  $\langle, \rangle_{\mathcal{X}}$ , então pelo Teorema da Representação de Riez existe um único elemento em  $\mathcal{X}$ , denotado por  $\nabla F(x)$ , tal que  $DF(x)(h) = \langle \nabla F(x), h \rangle_{\mathcal{X}}$  para todo  $h \in \mathcal{X}$ .  $\nabla F(x)$  é chamado de  $\mathcal{X}$ -gradiente de  $F$  em  $x$ .

**Lema 1.1** *Sejam  $F, \mathcal{X}, \Lambda_x$  como definidos anteriormente. Suponha que  $F$ , restrito a um subconjunto  $\mathcal{X}_0$  de  $\mathcal{X}$ , tem um extremo finito relativo  $\mathcal{X}$  em  $\mathcal{X}_0$ , e que existe um subconjunto balanceado<sup>1</sup>  $\Lambda$  de  $\Lambda_x$  satisfazendo  $x + \Lambda \subset \mathcal{X}_0$  então  $\delta_x F(h) = 0$  para  $h \in \Lambda$ .*

**Demonstração.** Suponha sem perda de generalidade que  $x$  seja um ponto de mínimo relativo de  $F|_{\mathcal{X}_0}$ . Então para  $|s| < 1$ ,  $h \in \Lambda$ , temos que  $x \pm sh \in \mathcal{X}_0$  pois  $\Lambda$  é balanceado e como  $\delta_x F$  é linear temos que:

$$-\delta_x F(h) \leq \frac{1}{s} \{F(x+sh) - F(x) - \delta_x F(sh)\} \quad (1.7)$$

$$\delta_x F(h) \leq \frac{1}{s} \{F(x-sh) - F(x) - \delta_x F(sh)\}. \quad (1.8)$$

Logo de (1.7) e (1.8) temos que  $-\delta_x F(h) \leq 0$  e  $\delta_x F(h) \leq 0$ . Assim  $\delta_x F(h) = 0$ . ■

## 1.2 Resultados importantes de Análise Funcional

Nesta seção apresentaremos alguns resultados importantes de Análise Funcional que serão utilizados nas demonstrações de alguns resultados (lemas, teoremas e proposições) dessa dissertação.

<sup>1</sup>Um conjunto  $C$  é dito balanceado se dado  $x \in C$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $|\lambda| \leq 1$  tem-se  $\lambda x \in C$

**Teorema 1.1 (Teorema de Banach-Steinhaus)** *Seja  $E$  um espaço de Banach e  $\mathcal{F}$  uma família de transformações lineares limitadas de  $E$  em um espaço normado  $F$ . Suponha que para cada  $x \in E$ ,  $\{\|Tx\|_Y; T \in \mathcal{F}\}$  é limitada. Então  $\{\|T\|; T \in \mathcal{F}\}$  é limitada.*

**Demonstração.** Veja [17], página 81.

### 1.2.1 Topologia fraca e Topologia fraca\*

Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $E'$  seu dual. Defina para cada  $f \in E'$

$$\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

a aplicação:

$$\varphi_f(x) = f(x).$$

Quando  $f$  percorre  $E'$  obtemos uma família  $\{\varphi_f\}_{f \in E'}$  de aplicações de  $E$  em  $\mathbb{R}$ .

**Definição 1.1** *A topologia fraca, denotada por  $\sigma(E, E')$ , é a topologia menos fina (possui menos abertos), tal que todas as aplicações  $\{\varphi_f\}_{f \in E'}$  sejam contínuas, isto é, esta topologia tem como subbase todos conjuntos da forma  $f^{-1}(I)$  onde  $I$  é um aberto de  $\mathbb{R}$  (topologia usual) e  $f$  é um funcional linear de  $E$  em  $\mathbb{R}$ . Isto significa que os abertos dessa topologia são dados por interseções finitas de conjuntos dessa forma.*

**Notação:** *Seja  $\{x_n\}$  uma seqüência em  $E$ . Denotamos por  $x_n \rightarrow x$  a convergência de  $x_n$  a  $x$  na topologia fraca. O elemento  $x$  é chamado de limite fraco de  $\{x_n\}$  e dizemos que  $x_n$  converge fracamente a  $x$ . Caso  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ , isto é,  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , dizemos que  $x_n$  converge fortemente para  $x$ .*

**Lema 1.2** *Seja  $\{x_n\}$  uma seqüência fracamente convergente no espaço normado  $E$ . Então:*

- (a) *O limite fraco  $x$  de  $\{x_n\}$  é único;*
- (b) *Toda sub-sequência de  $\{x_n\}$  converge fracamente para  $x$ ;*
- (c) *A seqüência  $\{\|x_n\|\}$  é limitada.*

**Demonstração.** Veja [11], página 258. ■

**Definição 1.2** *Seja  $F$  um subconjunto de  $E$ . Dizemos que  $F$  é fracamente fechado se dada  $x_n \in F$ , com  $x_n \rightharpoonup x$  então  $x \in F$ .*

**Lema 1.3** *Seja  $\{x_n\}$  uma sequência no espaço normado  $E$ . Então:*

- (a) *Se  $\{x_n\}$  converge fortemente, então converge fracamente para o mesmo limite;*
- (b) *Se a dimensão de  $E$  for finita, a recíproca de (a) é verdadeira.*

**Demonstração.** Veja [11], página 259. ■

**Definição 1.3** *Dizemos que um funcional linear  $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ , é fracamente semicontínuo inferior se dada  $x_n \rightarrow x$ ,  $F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$ .*

**Lema 1.4** *Seja  $\{x_n\}$  uma sequência em  $E$ . Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (a) *Se  $x_n \rightarrow x$  em  $\sigma(E, E')$  então*

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

*Ou seja, a função norma é fracamente semi-contínua inferior;*

- (b) *Se  $x_n \rightarrow x$  em  $\sigma(E, E')$  e  $f_n \rightarrow f$  fortemente em  $E'$  (i.e,  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ ), então  $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ .*

**Demonstração.** Veja [2], página 45. ■

**Definição 1.4** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach. Um operador  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  é dito compacto se para toda sequência limitada  $\{x_n\} \subset E$ ,  $\{T(x_n)\}$  possui uma subsequência convergente em  $F$*

**Teorema 1.2** *Seja  $T : E \rightarrow E$  um operador compacto e  $\{x_n\}$  uma sequência fracamente convergente a  $x$ . Então  $\{T(x_n)\}$  converge fortemente para  $T(x)$ .*

**Demonstração.** Veja [17], página 199. ■

Vamos agora definir uma topologia particular sobre  $E'$ , a topologia fraca\*, denotada por  $\sigma(E', E)$ . Para cada  $x \in E$  considere a aplicação  $\varphi_x : E' \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi_x(f) = f(x).$$

Quando  $x$  percorre  $E$ , obtemos uma família de aplicações  $\{\varphi_x\}_{x \in E}$  de  $E'$  em  $\mathbb{R}$ .

**Definição 1.5** A **topologia fraca\***, denotada por  $\sigma(E', E)$  é a topologia menos fina sobre  $E'$ , de tal forma que todas as aplicações  $\{\varphi_x\}_{x \in E}$  sejam contínuas.

**Teorema 1.3 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)** A bola unitária em  $E'$  i.e,  $B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$  é compacta na topologia fraca\*  $\sigma(E', E)$ .

**Demonstração.** Veja [2], página 42. ■

### 1.2.2 Espaços reflexivos

Seja  $E$  um espaço de Banach e seja  $\iota$  a injeção canônica de  $E$  em  $E''$  ( $E''$  representa o bidual). Dizemos que  $E$  é **reflexivo** se  $\iota(E) = E''$ . Por exemplo, todo espaço de Hilbert é reflexivo (Veja [11], página 242).

**Lema 1.5** Seja  $E$  um espaço de Banach. Então  $E$  é reflexivo se, e somente se  $E'$  é reflexivo.

**Demonstração.** Veja [2], pág 45. ■

**Teorema 1.4 (Eberlein-Smuliam)** Seja  $E$  um espaço de Banach reflexivo e seja  $\{x_n\}$  uma sequência limitada em  $E$ . Então existe uma subsequência  $\{x_{n_k}\}$  de  $\{x_n\}$  que converge na topologia fraca  $\sigma(E, E')$ .

**Demonstração.** Veja [2], página 50. ■

### 1.2.3 Espaços de Sobolev

Seja  $I = (a, b)$  um intervalo aberto (limitado ou não) e seja  $p \in \mathbb{R}$  com  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Definição 1.6** O espaço de Sobolev  $W^{1,p}(I)$  é definido como:

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

Para cada  $u \in W^{1,p}(I)$  se denota  $u' = g$ .

Se representa

$$H^1(I) = W^{1,2}(I) = \{x : x \text{ é absolutamente contínua e } \dot{x} \in L^2\}.$$

Denotaremos  $W^{1,p}(I), H^1(I), L^p(I)$  por  $W^{1,p}, H^1, L^p$  respectivamente.

**Observação 1.2** Na definição de  $W^{1,p}$  diz-se que  $\varphi$  é uma função teste. Pode-se utilizar tanto  $C_c^1$  quanto  $C_c^\infty$  como conjunto de funções teste. Para maiores detalhes, veja [2].

**Observação 1.3** Note que se  $u \in C^1 \cap L^p$  e se  $u' \in L^p$  (aqui  $u'$  denota a derivada no sentido usual), então  $u' \in W^{1,p}$ . Além disso a derivada usual de  $u$  coincide com a derivada de  $u$  no sentido de  $W^{1,p}$ .

**Notações :** O espaço  $W^{1,p}$  está dotado da norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{1/p}.$$

O espaço  $H^1$  é um espaço de Hilbert dotado do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2}$$

com a norma associada

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

A norma acima é equivalente à norma do espaço de Sobolev  $W^{1,2}$  (ver [2], página 121) .

**Proposição 1.1** (a) O espaço  $W^{1,p}$  é um espaço de Banach para  $1 \leq p \leq \infty$ ;

(b) O espaço  $W^{1,p}$  é reflexivo para  $1 \leq p \leq \infty$ ;

(c) O espaço  $H^1$  é um espaço de Hilbert separável.

**Demonstração.** Veja [2], página 121. ■

**Teorema 1.5** Seja  $u \in W^{1,p}$  com  $1 \leq p < \infty$ . Então existe uma sucessão  $\{u_n\}$  em  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $u_n|_I \rightarrow u$  em  $W^{1,p}$ .

**Demonstração.** Veja [2], página 127. ■

**Teorema 1.6** *Existe uma constante  $C$  (dependendo apenas da medida de  $I$  que é  $\leq \infty$ ) tal que  $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$ , para todo  $u \in W^{1,p}(I)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . De outra forma  $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$  com injeção contínua para todo  $1 \leq p \leq \infty$ . Além disso, quando  $I$  é limitado se verifica:*

(a) *A injeção  $W^{1,p}(I) \subset C^0(I)$  é compacta para todo  $1 \leq p \leq \infty$ .*

(b) *injeção  $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$  é compacta para todo  $1 \leq q \leq \infty$ .*

**Demonstração.** Veja [2], página 129. ■

### 1.3 As equações de Euler-Lagrange

Nesta seção vamos trabalhar com um funcional que possui uma forma determinada. Seja  $T > 0$  e considere o funcional

$$F(x) = \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t), t) dt, \quad (1.9)$$

onde  $x \in \mathcal{X} = H^1([0, T], \mathbb{R}^n)$  e  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada e  $C^2$  num aberto da forma  $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Vamos assumir que :

$$x \in H^1([0, T], \Omega), \text{ e que } \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x(t), \dot{x}(t), t) \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n). \quad (1.10)$$

Sendo  $x \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$  temos que  $f(x, \dot{x}, t)$  é  $C^1$  em  $\dot{x}$ , pois estamos assumindo que  $f$  é  $C^2$  num aberto da forma  $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

Seja  $h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ . Para cada  $s \in \mathbb{R}$ ,  $|s|$  suficientemente pequeno  $x(t) + sh(t) \in \Omega$  para todo  $t \in [0, T]$  tem-se pelo desenvolvimento em série de Taylor que

$$f(x + sh, \dot{x} + s\dot{h}, t) = f(x, \dot{x}, t) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) \cdot h + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \cdot \dot{h} \right] s + O(s^2). \quad (1.11)$$

Desde que  $x \in H^1$  e que  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t)$  seja contínua, a seguinte função  $\Phi_x(t) = \int_0^T \frac{\partial}{\partial x} f(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) d\tau$  está bem definida. Fazendo integração por partes em  $\int_0^T \frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) \cdot h dt$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{F(x + sh) - F(x)}{s} &= \int_0^T \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) \cdot h + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \cdot \dot{h} \right] dt + O(s) \\ &= \Phi_x(T) \cdot h(T) + \int_0^T \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \Phi_x(t) \right] \cdot \dot{h} dt + O(s). \end{aligned}$$

Note que o integrando da segunda linha é contínuo. De acordo com nossas hipóteses em (1.10), mostramos que  $C^1([0, T], \mathbb{R}^n) \subset \Lambda_x$  e que vale a fórmula:

$$\delta_x F(h) = \Phi_x(T) \cdot h(T) + \int_0^T \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \Phi_x(t) \right] \cdot \dot{h} dt. \quad (1.12)$$

Em algumas situações é conveniente considerar as variações admissíveis no conjunto balanceado da forma:

$$\Lambda_\varepsilon = \left\{ h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n) : h(0) = h(T) = 0, \sup_{[0, T]} |h| < \varepsilon \right\}. \quad (1.13)$$

Se  $h \in \Lambda_\varepsilon$ , então a fórmula da variação de Gâteaux de  $F$  é dada por:

$$\delta_x F(h) = \int_0^T \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \Phi_x(t) \right] \cdot \dot{h} dt \quad (1.14)$$

Por uma outra integração por partes, agora integrando  $\int_0^T \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \cdot \dot{h} dt$  temos:

$$\delta_x F(h) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \cdot h \Big|_0^T + \int_0^T \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \right] \cdot h dt \quad (1.15)$$

Logo se  $h \in \Lambda_\varepsilon$  então a fórmula da variação de Gâteaux também é dada por:

$$\delta_x F(h) = \int_0^T \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \right] \cdot h dt \quad (1.16)$$

Vejamos agora alguns exemplos onde calculamos a variação de Gâteaux:

**Exemplo 1.1** *Seja o funcional*

$$I(x) = \int_0^T [a(t)|\dot{x}(t)|^2 + b(t)|x(t)|^2] dt, \quad a(t), b(t) \in C^1(\mathbb{R}).$$

*Vamos calcular a derivada de Gâteaux de  $I$  sobre*

$$K = \{x \in H^1([0, T], \mathbb{R}), x(0) = x(T)\}.$$

*Seja  $x, y \in K$ . Então  $x + sy \in K$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Temos que*

$$\begin{aligned} I(x + sy) &= \int_0^T [a(t)(\dot{x}(t) + s\dot{y}(t))^2 + b(t)(x(t) + sy(t))^2] dt \\ &= \int_0^T [a(t)(\dot{x}(t))^2 + b(t)(x(t))^2] dt + 2s \int_0^T [a(t)\dot{x}(t)\dot{y}(t) + b(t)x(t)y(t)] \\ &\quad + s^2 \int_0^T [a(t)(\dot{y}(t))^2 + b(t)(y(t))^2] dt. \end{aligned}$$

*Pela observação 1.1 temos que*

$$\delta_x I(y) = \frac{d}{ds} I(x + sy) \Big|_{s=0} = 2 \int_0^T [a(t)\dot{x}(t)\dot{y}(t) + b(t)x(t)y(t)].$$

Por meio de integração por partes temos que

$$\delta_x I(y) = \frac{d}{ds} I(x + sy)|_{s=0} = \int_0^T [-2a(t)\ddot{x}(t) - 2\dot{a}(t)\dot{x}(t) + b(t)u(t)]y(t)dt.$$

**Exemplo 1.2** Seja

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T \left[ \frac{m}{2} |\dot{x}(t)|^2 + \frac{\alpha}{|x(t)|} \right] dt$$

com  $x \in H^1([0, T], \mathbb{C})$ . Se  $h \in \Lambda_\varepsilon$  dado em (1.13), então por (1.16) temos que a variação de Gâteaux de  $\mathcal{A}$  é dada por

$$\delta_x \mathcal{A}(h) = \int_0^T \left[ m\ddot{x} - \alpha \frac{x}{|x|^3} \right] \cdot h dt.$$

**Lema 1.6 (Du Bois Reymond)** Seja  $\Lambda_\varepsilon$  como em (1.13) e  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Se  $H \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$  e

$$\int_0^T H(t) \cdot \dot{h}(t) dt = 0 \quad (1.17)$$

para todo  $h \in \Lambda_\varepsilon$ , então existe  $c \in \mathbb{R}$ , tal que  $H(t) = c$  em  $[0, T]$ .

**Demonstração.** Seja  $c = \frac{1}{T} \int_0^T H(t) dt$  e  $h(t) = \frac{1}{K} \int_0^t (H(\tau) - c) d\tau$ , onde  $K > 0$  tal que  $\sup_{[0, T]} |h| < \varepsilon$ . Então  $h \in \Lambda_\varepsilon$  e portanto

$$|H(t) - c|^2 = K[(H(t) - c) \cdot \dot{h}], \text{ logo } \int_0^T |H(t) - c|^2 dt = K \int_0^T (H(t) - c) \cdot \dot{h} dt = 0. \quad (1.18)$$

Logo  $H(t) = c$ . ■

**Teorema 1.7** Seja  $F, f, \mathcal{X}, \Lambda_\varepsilon$  definidos como anteriormente. Suponha que  $F$  restrito a um subconjunto  $\mathcal{X}_0$  de  $\mathcal{X}$  tem um extremo relativo em  $x$ , e  $x + \Lambda_\varepsilon \subset \mathcal{X}_0$  para algum  $\varepsilon > 0$  então

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x(t), \dot{x}(t), t) \text{ em } [0, T]. \quad (1.19)$$

Suponha  $\mathcal{X}_0$  um subespaço ou uma sub-variedade de  $\mathcal{X}$  tal que  $x$  é um ponto crítico de  $F$  e  $x + \Lambda_\varepsilon \subset \mathcal{X}_0$  para algum  $\varepsilon > 0$ , então vale (1.19).

**Demonstração.** Note  $\Lambda_\varepsilon \subset \Lambda_x$  e que  $\Lambda_\varepsilon$  é balanceado. Como  $x$  é um extremo relativo de  $F|_{\mathcal{X}_0}$ , temos que  $\delta_x F(h) = 0$ . Mas como  $h \in \Lambda_\varepsilon$  obtemos de (1.14):

$$\delta_x F(h) = \int_0^T \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \Phi_x(t) \right] \cdot \dot{h} dt = 0 \quad (1.20)$$

Pelo lema 1.6 segue-se que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \Phi_x(t) = c \text{ ou seja, } \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, \tau) d\tau = c. \quad (1.21)$$

Como  $\Phi_x$  e  $\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t)$  são diferenciáveis em relação a  $t$  por causa das hipóteses, segue-se de (1.21) que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (1.22)$$

Agora se  $\mathcal{X}_0$  for um subespaço ou uma sub-variedade de  $\mathcal{X}$  e se  $x$  é ponto crítico de  $F$  em  $\mathcal{X}_0$ ,  $\delta_x F(x) = DF(x)$ , logo vale (1.19). ■

## 1.4 O funcional ação do problema dos N-Corpos

Um dos principais problemas estudados pela Mecânica Celeste é o problema dos  $N$ -corpos que consiste em entender o movimento de  $N (\geq 2)$  massas  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$  em  $\mathbb{R}^3$  de acordo com a lei da gravitação universal de Newton:

$$m_k \ddot{x}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} U(x), \quad k = 1, \dots, N \quad (1.23)$$

onde  $x_k \in \mathbb{R}^3$  é a posição de  $m_k$ , e

$$U(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |x_i - x_j|$$

é o potencial Newtoniano.

Vamos considerar o problema dos  $N$ -corpos em uma abordagem variacional. Seja  $V = \{x \in (\mathbb{R}^3)^N : m_1 x_1 + \dots + m_N x_N = 0\}$  o espaço de configurações, isto é, o espaço das posições cujo centro de massa encontra-se na origem do sistema de coordenadas e

$$\mathcal{X} = H^1([0, T], V) = W^{1,2}([0, T], V). \quad (1.24)$$

O Lagrangiano  $L(x, \dot{x})$  de  $x \in \mathcal{X}$  é definido por

$$L(x, \dot{x}) = K(\dot{x}) + U(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_k |\dot{x}|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |x_i - x_j|. \quad (1.25)$$

Ele está definido em quase toda parte uma vez que  $x$  seja absolutamente contínua. Seja  $\Omega = V \setminus \Delta$ , onde  $\Delta = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^3)^N : x_i = x_j \text{ para algum } i \neq j\}$  chamado de *conjunto*

de colisões. Se  $x(t) \in \Omega$  para qualquer  $t \in [0, T]$ , vamos supor que  $x$  satisfaz as condições em (1.10).

O funcional ação  $\mathcal{A} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  associado a (1.23) no intervalo de tempo  $[0, T]$  é definido por:

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt. \quad (1.26)$$

Observe que como  $x \in H^1$ ,  $\mathcal{A}$  está bem definido. Note também que (1.23) corresponde as equações de Euler-Lagrange do funcional ação. Também podemos pensar em  $L(x, y)$  como uma função no fibrado tangente de  $V$  e ela é diferenciável em  $(x, y)$  exceto quando  $x \in \Delta$ . Se  $x(t) \in V \setminus \Delta$  para  $t \in [0, T]$ , então existe  $\varepsilon > 0$  pequeno tal que,  $x(t) + h(t) \in V \setminus \Delta$  para todo  $t \in [0, T]$  e  $h \in \Lambda_\varepsilon$ , onde

$$\Lambda_\varepsilon = \left\{ h \in C^1([0, T], V) : h(0) = h(T) = 0, \sup_{[0, T]} |h| < \varepsilon \right\}. \quad (1.27)$$

Logo pelo teorema 1.7, temos que:

**Corolário 1.1** *Seja  $\mathcal{A}, \mathcal{X}, \Lambda_\varepsilon$  como anteriormente. Suponha que exista um extremo relativo  $x$  de  $\mathcal{A}$  no subconjunto  $\mathcal{X}_0$  de  $\mathcal{X}$ . Se  $x + \Lambda_\varepsilon \subset \mathcal{X}_0$  e  $x(t) \in V \setminus \Delta$  para  $t \in [0, T]$ , então  $x(t)$  é uma solução de (1.23).*

*Suponha que  $\mathcal{X}_0$  é um subespaço ou uma subvariedade de  $\mathcal{X}$  e  $x$  é um ponto crítico de  $\mathcal{A}$  sobre  $\mathcal{X}_0$ . Se  $x + \Lambda_\varepsilon \subset \mathcal{X}_0$ , então  $x(t)$  é solução de (1.23) sempre que  $x(t) \in V \setminus \Delta$ .*

## 1.5 Princípio de criticalidade simétrica

Suponha que  $G$  é um grupo agindo sobre  $\mathcal{X}_0$  por difeomorfismos através da representação linear  $\rho : G \longrightarrow \text{Diff}(\mathcal{X}_0)$ , isto é, a ação definida sobre  $G \times \mathcal{X}_0$  em  $\mathcal{X}_0$  associa ao par  $(g, x) \in G \times \mathcal{X}_0$  o elemento  $\rho(g)x \in \mathcal{X}_0$ . Dizemos que  $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$  é  $\rho$ -invariante sobre  $\mathcal{X}_0$ , se  $F(\rho(g)x) = F(x)$  para todo  $x \in \mathcal{X}_0$  e para todo  $g \in G$ . Seja

$$\mathcal{X}_0^\rho := \{x \in \mathcal{X}_0 : \rho(g)x = x \quad \forall g \in G\} \quad (1.28)$$

a coleção de elementos  $\rho$ -invariante em  $\mathcal{X}_0$ . Note que  $\mathcal{X}_0^\rho$  é um subespaço desde que  $\rho$  é uma representação linear (i.e.,  $\rho(g)$  é um automorfismo linear para todo  $g \in G$ ). O conjunto de pontos críticos da restrição  $F|_{\mathcal{X}_0^\rho} : \mathcal{X}_0^\rho \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  são chamados  $\rho$ -pontos críticos de  $F$  em

$\mathcal{X}_0$ . Vamos mostrar no seguinte teorema que sobre certas condições  $\rho$ -pontos críticos são de fato pontos críticos de  $F$  em  $\mathcal{X}_0$ .

**Teorema 1.8** *Sejam  $F, \mathcal{X}$  como em ( 1.9). Considere a restrição de  $F$  sobre um subespaço  $\mathcal{X}_0$  de  $\mathcal{X}$ . Seja  $G$  um grupo agindo em  $\mathcal{X}_0$  através da representação ortogonal  $\rho : G \longrightarrow GL(\mathcal{X}_0)$ .  $GL(\mathcal{X}_0)$  denota o grupo dos automorfismo lineares em  $\mathcal{X}_0$ . Suponha que  $F$  restrito a  $\mathcal{X}_0$  é invariante sob a representação  $\rho$  e Fréchet diferenciável em  $x \in \mathcal{X}_0$ .*

- (a) *Se  $x \in \mathcal{X}_0^\rho$  é um  $\rho$ -ponto crítico de  $F$  em  $\mathcal{X}_0$ , então  $x$  também é um ponto crítico de  $F$  em  $\mathcal{X}_0$ .*
- (b) *Seja  $f, \Lambda_\varepsilon$  como em ( 1.10) e ( 1.13). Se  $\mathcal{X}_0 + \Lambda_\varepsilon = \mathcal{X}_0$  para algum  $\varepsilon > 0$ , então um ponto  $\rho$ -crítico de  $F$  em  $\mathcal{X}_0$  é solução da equação de Euler-Lagrange ( 1.19).*

**Demonstração.** (a) Denotaremos, por simplicidade, a restrição de  $F$  em  $\mathcal{X}_0$  por  $F$ .

Pela  $\rho$ -invariância de  $F$  e a regra da cadeia, temos que  $F$  é Fréchet diferenciável em  $\rho(g)x$  para todo  $g \in G$  e

$$DF(x) = D(F \circ \rho(g))(x) = DF((\rho(g)x) \circ \rho(g)).$$

Seja  $\nabla F(x)$  o  $H^1$ -gradiente de  $F$  em  $x$ . Assim, como  $\rho(g)$  é ortogonal,

$$\begin{aligned} \langle \nabla F(x), h \rangle_{H^1} &= DF(x)h \\ &= DF(\rho(g)x)(\rho(g)(h)) \\ &= \langle \nabla F(\rho(g)x), \rho(g)h \rangle_{H^1} \\ &= \langle \rho(g)^{-1} \nabla F(\rho(g)x), h \rangle_{H^1} \quad \forall g \in G, \quad \forall h \in \mathcal{X}_0. \end{aligned}$$

Logo  $\nabla F$  é equivariante com respeito a  $\rho$ , ou seja,  $\rho(g)\nabla F(x) = \nabla F(\rho(g)x)$  para todo  $g \in G$  e  $x \in \mathcal{X}_0$ .

Como  $x$  é  $\rho$ -invariante, então  $\rho(g)\nabla F(x) = \nabla F(x)$  para todo  $g \in G$  e  $\nabla F(x) \in \mathcal{X}_0^\rho$ . Se  $x \in \mathcal{X}_0^\rho$  é um ponto  $\rho$ -crítico de  $F$  em  $\mathcal{X}_0$ , então  $\nabla F(x)$  é ortogonal a  $\mathcal{X}_0^\rho$ . Logo  $\nabla F(x) = 0$  e assim  $x$  é um ponto crítico de  $F$  em  $\mathcal{X}_0$ .

(b) segue de (a) e do corolário 1.1 . ■

**Proposição 1.2** *Seja  $\Omega \subset H^1$  um aberto e  $F : H^1 \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear. Então os pontos críticos de  $F|_{\Omega}$  são os mesmos pontos críticos de  $F$  sobre  $H^1$ .*

**Demonstração.** Mostraremos que  $DF(x) = 0$ . Seja  $x$  um ponto crítico de  $F|_{\Omega}$ . Então

$$DF(x) : T_x\Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfaz  $DF(x) \cdot h = 0$ , para todo  $h \in T_x\Omega$ . Ou seja,  $\langle \nabla F(x), h \rangle = 0$  para todo  $h \in T_x\Omega$ . Como  $\Omega$  é aberto,  $T_x\Omega = H^1$ . Assim  $\langle \nabla F(x), h \rangle = 0$  para todo  $h \in H^1$ , donde concluímos que  $DF(x) = 0$ .

■

**Proposição 1.3** *Seja  $\Omega \subset H^1$  um subespaço linear de  $H^1$  e  $F : H^1 \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear. Então os pontos críticos de  $F|_{\Omega}$  são os pontos críticos de  $F$  sobre  $H^1$ , desde que  $DF(x) \cdot h = 0$ ,  $\forall h \in \Omega^{\perp}$ .*

**Demonstração.** Como  $\Omega$  é um subespaço linear, o espaço tangente de  $\Omega$  se identifica com  $\Omega$ . Assim,

$$DF(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Como  $H^1$  é Hilbert,

$$H^1 = \Omega \oplus \Omega^{\perp}.$$

Logo, se  $x$  é um ponto crítico de  $F|_{\Omega}$ , dado qualquer  $h = h_1 + h_2 \in H^1$  com  $h_1 \in \Omega$  e  $h_2 \in \Omega^{\perp}$  temos :

$$\begin{aligned} \langle \nabla F(x), h \rangle &= \langle \nabla F(x), h_1 + h_2 \rangle \\ &= \langle \nabla F(x), h_1 \rangle + \langle \nabla F(x), h_2 \rangle \\ &= \langle \nabla F(x), h_2 \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

desde que  $DF(x) \cdot h = 0$  para todo  $h \in \Omega^{\perp}$ . ■

## 1.6 Existência de minimizantes

### 1.6.1 Princípio variacional

O funcional ação  $\mathcal{A} = \int_0^T L(x, \dot{x}) dt$  (associado ao problema dos  $N$ -corpos) restrito a  $\mathcal{X} = H^1([0, T], V)$  não atinge o ínfimo em  $\mathcal{X}$ . De fato  $\mathcal{A}(x) > 0$  para  $x \in \mathcal{X}$ . Considere a sequência  $x^{(k)}(t) = (x_1^{(k)}(t), \dots, x_N^{(k)}(t)) \in (\mathbb{R}^3)^N$  definida por

$$x_i^{(k)}(t) \equiv (k \cos(\frac{2\pi i}{k}), k \sin(\frac{2\pi i}{k}), 0). \quad (1.29)$$

Então  $x^{(k)}$  é divergente e  $\mathcal{A}(x^{(k)}) \rightarrow 0$  se  $k \rightarrow +\infty$ . Logo  $\inf_{\mathcal{X}} \mathcal{A} = 0$ , ou seja, o ínfimo não é atingido em  $\mathcal{X}$ .

Por outro lado, o teorema 1 e o corolário 1 nos permite restringir o problema a um subespaço  $\mathcal{X}_0$  de  $\mathcal{X}$ . Para garantir a existência de minimizadores, o subespaço deve ser escolhido de tal forma que nenhuma sequência divergente possa ser minimizante. Uma condição deste tipo é chamada **coercividade**. Um funcional em um espaço normado  $W$  é chamado de coercivo sobre um suconjunto  $W_0 \subset W$  se  $F(x) \rightarrow +\infty$  cada vez que  $\|x\| \rightarrow +\infty$ ,  $x \in W_0$ .

**Teorema 1.9** *Seja  $W$  um espaço de Banach reflexivo com norma  $\| \cdot \|$ , e seja  $W_0 \subset W$  um conjunto fracamente fechado. Suponha que  $F : W \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  satisfaz:*

- (a)  $F$  é coercivo em  $W_0$ ;
- (b)  $F$  é fracamente sequencialmente semicontínuo inferior em  $W_0$ .

Então  $F$  restrito a  $W_0$  é limitado inferiormente e  $F$  atinge o mínimo.

**Demonstração.** Se  $F = \infty$  segue o resultado. Caso  $F \neq \infty$ , seja  $\{y^{(k)}\}$  uma sequência minimizante. Como  $F$  é coercivo, temos que  $\|y^{(k)}\|$  é limitada. Pelo teorema 1.3 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) e a reflexividade de  $W$ ,  $W_0$  tem fecho compacto na topologia fraca. Mas pelo teorema 1.4 (Eberlein-Smulian)  $W_0$  é sequencialmente compacto na topologia fraca. Vamos considerar sem perda de generalidade que  $y^{(k)}$  converge fracamente para  $y \in W_0$ . Como  $F$  é fracamente sequencialmente semicontínua inferior em  $W_0$ ,

$$F(y) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} F(y^{(k)}) = \inf_{W_0} F \quad (1.30)$$

Portanto  $y$  é um minimizador de  $F$  em  $W_0$ . ■

### 1.6.2 A semicontinuidade inferior fraca de $\mathcal{A}$

Para aplicar o teorema 1.9 em (1.23) precisamos mostrar a fraca semicontinuidade inferior do funcional ação:

**Lema 1.7** *Seja  $\mathcal{A}$ ,  $L$  associados ao problema dos  $N$ -corpos e  $\mathcal{X} = H^1$ . Então  $\mathcal{A}$  é fracamente sequencialmente semicontinua inferior em  $\mathcal{X}$ .*

**Demonstração.** Seja  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_N^{(k)})$  uma seqüência que converge fracamente para  $x = (x_1, \dots, x_N)$ . Basta considerar o caso em que  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x^{(k)}) = c < \infty$ . Passando a uma subseqüência se necessário, assumiremos sem perda de generalidade que  $\mathcal{A}(x^{(k)})$  é limitado por uma constante  $C$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x^{(k)}) = c < \infty$ .

Seja  $r_{ij}^{(k)} := |x_i^{(k)} - x_j^{(k)}|$ , então pela compacidade do mergulho  $\mathcal{X} \hookrightarrow C^0([0, T], V)$  (teorema 1.6),  $r_{ij}^{(k)}$  converge uniformemente para  $r_{ij}$ . Como  $\mathcal{A}(x^{(k)})$  é limitada, a seqüência  $\frac{1}{r_{ij}^{(k)}}$  é limitada em  $L^1[0, T]$ .

Seja  $E_{ij} \subset [0, T]$  tal que  $r_{ij} \neq 0$ . Note que a medida de Lebesgue de  $E_{ij}$  é igual a medida de Lebesgue de  $[0, T]$ . De fato suponha, por absurdo, que  $med([0, T]/E_{ij}) = \kappa_{ij} > 0$ . Seja  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{C} m_i m_j \kappa_{ij}$  e seja  $N_{ij} \in \mathbb{N}$  tal que  $\|r_{ij}^{(k)} - r_{ij}\|_{C^0} < \varepsilon_{ij}$  quando  $\kappa \geq N_{ij}$ . Logo

$$\mathcal{A}(x^{(k)}) = \int_{[0, T]} K(\dot{x}^{(k)}) + U(x^{(k)}) dt \geq m_i m_j \int_{[0, T]/E_{ij}} \frac{1}{r_{ij}^{(k)}} dt > \frac{m_i m_j \kappa_{ij}}{\varepsilon_{ij}} = C,$$

que é uma contradicção pois  $\mathcal{A}(x^{(k)}) < C$ .

A seqüência  $\frac{1}{r_{ij}^{(k)}}$  converge pontualmente para  $\frac{1}{r_{ij}}$ . Assim pelo lema de Fatou,

$$\int_0^T \frac{1}{r_{ij}} dt \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{1}{r_{ij}^{(k)}} dt.$$

Note que  $x^{(k)}$  converge fortemente para  $x$  em  $L^2([0, T], V)$ . Como a função norma é fracamente sequencialmente semicontínua inferior (lema 4), temos que:

$$\|\dot{x}_j\|_{L^2}^2 = \|x_j\|_{H^1}^2 - \|x_j\|_{L^2}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_j^{(k)}\|_{H^1}^2 - \|x_j\|_{L^2}^2 = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_j^{(k)}\|_{H^1}^2 - \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_j^{(k)}\|_{L^2}^2 = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\dot{x}_j^{(k)}\|_{L^2}^2$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \|\dot{x}_j\|_{L^2}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \int_0^{T^2} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} dt \\
&\leq \frac{1}{2} \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \|\dot{x}_j^{(k)}\|_{L^2}^2 + \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \int_0^{T^2} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^{(k)}} dt \\
&\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x^{(k)}).
\end{aligned}$$

Logo  $\mathcal{A}(x)$  é fracamente sequencialmente semicontínuo inferior. ■

### 1.6.3 O problema dos n-corpos e a condição $(NC)_\nu$

Seja  $\mathcal{X} = H^1([0, T], V) = W^{1,2}([0, T], V)$ . Dizemos que um subconjunto  $\mathcal{X}_0$  de  $\mathcal{X}$  satisfaz a condição  $(NC)_\nu$  em  $\mathcal{X}$ ,  $\nu \in (0, 2]$ , se para todo  $x \in \mathcal{X}_0$  existe  $\tau_x \in (0, T]$  tal que

$$x(0) \cdot x(\tau_x) \leq (1 - \nu) |x(0)| |x(\tau_x)|. \quad (1.31)$$

#### Comentário:

Note que (1.31) é verdade se  $\nu \leq 0$  e é falsa se  $\nu > 2$  (Cauchy - Schwartz). A exigência que  $\nu \in (0, 2]$  assegura que curvas em  $\mathcal{X}$  devem se afastar da condição inicial por um certo ângulo.

**Teorema 1.10** *Seja  $\mathcal{X}, L, \mathcal{A}, \Lambda_\varepsilon$  definidos em (1.24), (1.25), (1.26), (1.27). Suponha que  $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$  é fracamente fechado e satisfaz a condição  $(NC)_\nu$ . Então  $\mathcal{A}$  é coercivo e atinge o mínimo em  $\mathcal{X}_0$ . Se além disso um minimizador  $x \in \mathcal{X}_0$  de  $\mathcal{A}$  satisfaz  $x + \Lambda_\varepsilon \subset \mathcal{X}_0$  para algum  $\varepsilon > 0$ , então  $x$  é solução de (1.23) sempre que  $x(t) \in V \setminus \Delta$  para todo  $t \in [0, T]$ .*

**Demonstração.** Seja  $x \in \mathcal{X}_0$ , considere a função

$$\delta(x) := \max_{s_1, s_2 \in [0, T]} |x(s_1) - x(s_2)|.$$

Desde que  $\mathcal{X}_0$  satisfaz a condição  $(NC)_\nu$ , escolha  $\tau_x \in (0, T]$  tal que

$$x(0) \cdot x(\tau_x) \leq (1 - \nu) |x(0)| |x(\tau_x)|.$$

Vamos considerar inicialmente o caso onde  $x(0) \neq 0$  e  $x(\tau_x) \neq 0$ . Seja  $\theta$  o ângulo entre  $x(0)$  e  $x(\tau_x)$ , com  $\theta \in [0, \pi]$ .

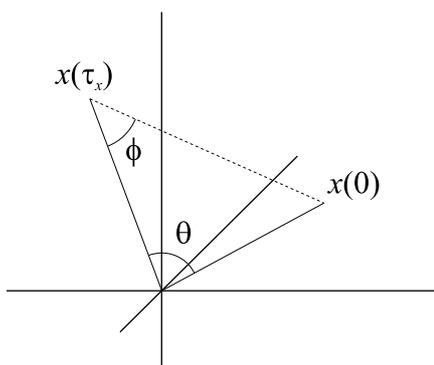


Figura 1.1:

Logo  $\sin \phi |x(0) - x(\tau_x)| = |x(0)| \sin \theta$ , ou seja,  $|x(0) - x(\tau_x)| \geq \sin \theta |x(0)|$  e a igualdade vale se, e somente se,  $x(0) - x(\tau_x)$  for perpendicular a  $x(\tau_x)$ . Mas por hipótese temos que

$$x(0) \cdot x(\tau_x) \leq (1 - \nu) |x(0)| |x(\tau_x)|,$$

ou seja,

$$\frac{x(0) \cdot x(\tau_x)}{|x(0)| |x(\tau_x)|} \leq 1 - \nu.$$

Portanto,  $\cos \theta \leq 1 - \nu$ . Dividiremos em casos:

Caso 1: Se  $\cos \theta > 0$  temos que:  $\cos^2 \theta \leq (1 - \nu)^2$ . Logo  $\sin \theta \geq \sqrt{\nu(2 - \nu)} := C_\nu$ . Mas,

$$|x(0) - x(\tau_x)| \geq \sin \theta |x(0)| \geq C_\nu |x(0)|$$

assim  $|x(0) - x(\tau_x)| \geq C_\nu |x(0)|$ .

Caso 2: Se  $\nu = 2$ . Neste caso devemos ter que  $\cos(\theta) \leq -1$ , assim  $\theta = \pi$ , (pois,  $\cos(\theta) \geq -1$ ). Isto implica que  $x(\tau_x)$  e  $x(0)$  são paralelos, logo  $x(\tau_x) = Cx(0)$ , com  $(C < 0)$ . Desta forma:  $x(0) - x(\tau_x) = (1 - C)x(0)$ , e portanto  $|x(0) - x(\tau_x)| = (1 - C)|x(0)| \geq |x(0)|$  pois  $C < 0$ .

Caso 3:  $\nu \geq 1$ . Isto implica que  $\cos \theta \leq 1 - \nu \leq 0$ . Daí que o ângulo  $\theta$  se encontra entre  $\pi/2$  e  $\pi$ . Segue-se que  $x(\tau_x) \cdot x(0) \leq 0$ . Assim temos que,  $|x(0) - x(\tau_x)|^2 = |x(0)|^2 - 2x(\tau_x) \cdot x(0) + |x(\tau_x)|^2 \geq |x(0)|^2$ , donde segue-se que para  $\nu \leq 1$ ,  $|x(0) - x(\tau_x)| \geq |x(0)| = 1|x(0)| \geq C_\nu |x(0)|$ , onde  $C_\nu := \sqrt{\nu(2 - \nu)}$ .

Caso 4:  $\nu \leq 1$ . Temos que  $1 - \nu \geq 0$ . Assim se  $\cos \theta < 0$ ,  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ . Como  $x$  é contínua, escolha um novo  $\bar{\tau}_x$  tal que

$$\cos \theta > 0 \text{ e } \cos \theta < 1 - \nu.$$

Daí segue o caso 1.

Em conclusão, teremos que  $|x(0) - x(\tau_x)| \geq C_v|x(0)|$ . Note que se  $x(0) = 0$  ou  $x(\tau_x) = 0$  temos que

$$|x(0) - x(\tau_x)| \geq |x(0)| \geq C_v|x(0)|.$$

Entretanto se  $t \in [0, T]$  temos

$$|x(t)| \leq |x(0)| + \delta(x) \leq \frac{1}{C_v}|x(0) - x(\tau)| + \delta(x) \leq \left[ \frac{1}{C_v} + 1 \right] \delta(x).$$

Assim

$$\int_0^T |x|^2 dt \leq \left[ \frac{1}{C_v} + 1 \right]^2 \delta^2(x) T.$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder temos que

$$\delta^2(x) \leq \left| \int_0^T \dot{x} dt \right|^2 \leq \left[ \int_0^T |\dot{x}| dt \right]^2 \leq T \int_0^T |\dot{x}|^2 dt.$$

Logo a norma em  $H^1$  é controlada pela ação, pois

$$\begin{aligned} \|x\|_{H^1}^2 &= \int_0^T (|x|^2 + |\dot{x}|^2) dt \\ &\leq \left[ \left( \frac{1}{C_v} + 1 \right)^2 T^2 + 1 \right] \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \\ &< \frac{2}{m} \left[ \left( \frac{1}{C_v} + 1 \right)^2 T^2 + 1 \right] \mathcal{A}(x), \end{aligned}$$

onde  $m = \min_{1 \leq i \leq N} \{m_i\}$ . Portanto se  $\|x\|_{H^1}^2 \rightarrow \infty$ , então  $\mathcal{A}(x) \rightarrow \infty$ , ou seja,  $\mathcal{A}|_{\mathcal{X}_0}$  é coercivo.

Portanto pelo teorema 1.9 e pelo lema 1.7 a ação funcional restrito a  $\mathcal{X}_0$  atinge o mínimo. Se  $x \in \mathcal{X}_0$  é um minimizante tal que  $x + \Lambda_\varepsilon \subset \mathcal{X}_0$  para algum  $\varepsilon > 0$ , então pelo corolário 1.1  $x$  é solução de (1.23) sempre que  $x(t) \in V \setminus \Delta$ . ■

**Corolário 1.2** *Seja  $\mathcal{X}_1$  o espaço das curvas fechadas anti-simétricas, isto é,  $\mathcal{X}_1 = \{x \in H^1 : x(t) = x(-t + \frac{T}{2})\}$ , em  $\mathcal{X} = H^1([0, T], V)$ . Então  $\mathcal{A}$  atinge o mínimo em  $\mathcal{X}_1$  e todo minimizante  $x$  é solução de (1.23), desde que  $x(t) \in V \setminus \Delta$ .*

**Demonstração.** De fato,  $\mathcal{X}_1$  é fracamente fechado e satisfaz (1.31) fazendo  $\tau_x = \frac{T}{2}$  e  $v = 2$ . ■

**Observação 1.4** *Note que na prova do teorema (1.10) a única propriedade que usamos do potencial  $U(x)$  foi a semi-continuidade fraca de  $\mathcal{A}$ . A prova da semi-continuidade fraca é válida para diferentes tipos de potencial. Por exemplo o potencial tipo-Newtoniano:*

$$U_{\sigma}(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^{\sigma}}, \quad r_{ij} = |x_i - x_j|, \quad |x_i - x_j| \neq 0 \quad i \neq j$$

*Substituindo  $U$  por  $U_{\sigma}$ , (1.23) também é chamado de problema tipo-  $N$ -corpos. Note que o teorema (1.10) também é verdadeiro para o problema tipo-  $N$ -corpos.*

## Capítulo 2

# Cálculo variacional aplicado ao problema de Kepler

Neste capítulo, estudaremos o problema de Kepler e deduziremos as leis de Kepler. Numa abordagem variacional relacionaremos o funcional ação e o problema de Kepler, onde exibiremos certos espaços, onde garantiremos a existência de minimizantes que sobre certas condições serão justamente as órbitas Kepleriana elípticas. Para isso faremos uso de um importante teorema devido a Gordon [9]. Em seguida, relataremos propriedades das órbitas circulares minimizantes.

### 2.1 O problema de Kepler

A equação do problema dos dois corpos no plano é dada por

$$m_k \ddot{x}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} U, \quad k = 1, 2 \quad (2.1)$$

onde  $x_k \in \mathbb{C}$  é a posição da partícula de massa  $m_k$  e

$$U = U(|x_1 - x_2|) = \frac{\alpha}{|x_2 - x_1|}, \quad \alpha = m_1 m_2$$

é a energia potencial (formalmente, é menos a energia potencial). Fixando a massa central na origem e fazendo  $x = x_2 - x_1$ ,  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  (massa reduzida), o sistema (2.1) pode ser re-escrito como

$$m \ddot{x} = -\alpha \frac{x}{|x|^3}. \quad (2.2)$$

Desta forma, o Lagrangiano e o Hamiltoniano são, respectivamente

$$L(x, \dot{x}) = K(\dot{x}) + U(x) = \frac{m}{2} |\dot{x}|^2 + \frac{\alpha}{|x|} \quad (2.3)$$

e

$$H(x, \dot{x}) = K(\dot{x}) - U(x) = \frac{m}{2} |\dot{x}|^2 - \frac{\alpha}{|x|}. \quad (2.4)$$

### Comentários:

(1) Esta redução diz que o estudo do problema de 2 corpos é equivalente ao estudo do problema de Kepler;

(2) A equação (2.2) é justamente a equação de Euler-Lagrange do funcional ação  $\mathcal{A}(x) = \int_0^T L(x, \dot{x}) dt$ . As soluções de (2.2) são chamadas órbitas Keplerianas.

É fácil ver que, em termos de coordenadas polares  $x = re^{i\theta}$ , o lagrangiano é dado por

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = K(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{r} \quad (2.5)$$

e que a equação (2.2) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\alpha}{r^2} \\ mr^2\dot{\theta} = J. \end{cases} \quad (2.6)$$

**Comentário :** A constante  $J$  é chamada de momento angular e  $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{J}{2m}$  é a velocidade areal, isto é, a mudança da taxa da área percorrida pelo raio do vetor  $x$ . Assim, como a velocidade areal é constante, temos a segunda lei de Kepler.

Substituindo  $mr^2\dot{\theta} = J$  em  $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\alpha}{r^2}$  temos que

$$m\ddot{r} = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{J^2}{mr^3} = U'_{eff}(r), \quad U_{eff} = -U(r) + \frac{J^2}{2mr^2}.$$

A função  $U_{eff}$  é chamada de potencial efetivo.

Note que  $J = 0$  se, e somente se, o movimento é colinear. De fato,  $J = 0$  se e somente se  $\theta$  é constante e, assim,  $x = re^{i\theta}$  é uma reta. No caso em que  $J \neq 0$ , tem-se de (2.6) que  $r$  e  $\dot{\theta}$  são distintos de zero, e assim definindo  $u = \frac{1}{r}$  temos que :

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{J}{2m} \frac{du}{d\theta}, \\ \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{J}{2m} \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{d\theta} \right) = \frac{J}{2m} \frac{du^2}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = -\left( \frac{J}{2m} \right)^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Assim, obtemos a equação de Clairaut:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m\alpha}{J^2}, \quad (2.8)$$

cujas soluções são da forma:

$$u(\theta) = \frac{m\alpha}{J^2} + B \cos(\theta - \theta_0), \quad B \geq 0, \quad \theta_0 \in [0, 2\pi).$$

Desde que  $r = \frac{1}{u}$  segue-se que

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \quad p = \frac{J^2}{m\alpha}. \quad (2.9)$$

A equação (2.9) nos diz que as órbitas keplerianas com momento angular não nulo são cônicas com um foco no centro de atração. Esta é justamente a primeira lei de Kepler. A constante  $2p = \frac{2J^2}{m\alpha} > 0$  é chamada de *latus rectum* e  $e = \frac{BJ^2}{m\alpha} > 0$  é chamado de *excentricidade*.

Assim, usando as equações (2.5), (2.6), (2.9), podemos escrever o hamiltoniano em função da excentricidade da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} H &= \frac{m}{2} \left( \dot{r} + \frac{J^2}{m^2 \alpha^2} \right) - \frac{\alpha}{r} \\ &= \frac{J^2}{2m} \left[ \left( \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right] \\ &= \frac{J^2}{2m} [(u'(\theta))^2 + (u(\theta))^2] - \alpha u(\theta) \\ &= \frac{J^2}{2m} \left[ B^2 \sin^2(\theta - \theta_0) + \frac{m^2 \alpha^2}{J^4} + B^2 \cos^2(\theta - \theta_0) + \frac{2m\alpha B}{J^2} \cos(\theta - \theta_0) \right] - \frac{m\alpha^2}{J^2} - \alpha B \cos(\theta - \theta_0) \\ &= \frac{J^2}{2m} \left[ B^2 + \frac{m^2 \alpha^2}{J^4} + \frac{2m\alpha B}{J^2} \cos(\theta - \theta_0) \right] - \frac{m\alpha^2}{J^2} - \alpha B \cos(\theta - \theta_0) \\ &= \frac{J^2 B^2}{2m} + \frac{m\alpha^2}{2J^2} - \frac{m\alpha^2}{J^2} \\ &= \frac{m\alpha^2}{2J^2} \left[ \frac{B^2 J^2}{m^2 \alpha^2} - 1 \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$H = \frac{m\alpha^2}{2J^2} (e^2 - 1). \quad (2.10)$$

Então de (2.9), temos que uma órbita kepleriana com momento angular não nulo é periódica se, e somente se, uma das seguintes condições forem verdadeiras:

$$\begin{cases} 0 \leq e < 1 \Leftrightarrow H < 0 \text{ (elipse)} \\ e = 0 \Leftrightarrow H = \frac{m\alpha^2}{mJ^2} \text{ (círculo)}. \end{cases}$$

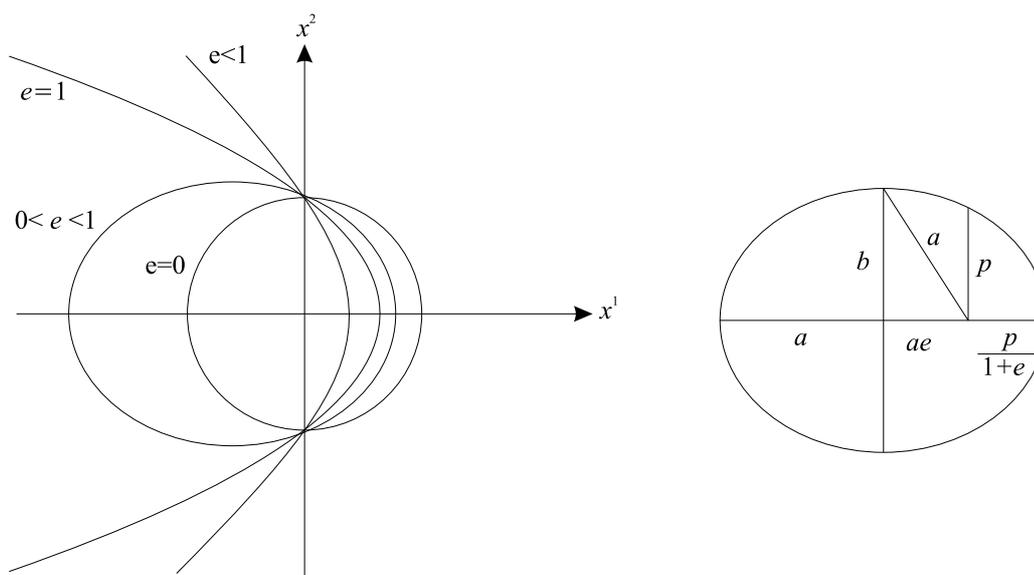


Figura 2.1:

Suponha que  $x$  é uma órbita kepleriana com período  $T$ . Sem perda de generalidade vamos supor que  $\theta_0 = 0$  e  $\dot{\theta}(0) = 0$  (basta fazer uma mudança de coordenadas adequadas e uma translação na variável tempo). Então da segunda equação em (2.6) temos que :

$$\frac{JT}{2m} = \int_0^{\frac{T}{2}} r^2 \dot{\theta} dt = \int_0^{\pi} r^2 d\theta = \int_0^{\pi} \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta = \frac{p^2 \pi}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Seja  $a$  o semi-eixo maior da órbita elíptica. Assim por (2.9) e (2.10) temos

$$a = \frac{r(0) + r(\pi)}{2} = \frac{\frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e}}{2} = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{J^2}{m\alpha^2(1 - e^2)} = -\frac{\alpha}{2H}.$$

Então temos que :

$$\frac{J^2 T^2}{4m^2} = \frac{p^4 \pi^2}{(1 - e^2)} \Rightarrow T^2 = \frac{4m^2 \pi^2 p a^3}{J^2},$$

ou seja,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4m\pi^2}{\alpha}. \quad (2.11)$$

Assim mostramos a *terceira lei de Kepler* que diz o seguinte: o quadrado do período da órbita é proporcional ao cubo do semi-eixo maior.

Uma outra maneira de deduzir a terceira lei de Kepler é usando uma variável auxiliar  $E$ , chamada de *anomalia excêntrica* (ver [3]), definida por

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (2.12)$$

Assim, de (2.10) e de (2.12) temos que :

$$|\dot{r}| = \sqrt{\frac{2}{m}\left(H + \frac{\alpha}{r} - \frac{J^2}{2mr^2}\right)} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \sqrt{-\frac{1}{2a}r^2 + r - \frac{a(1-e^2)}{2}} = \sqrt{\frac{\alpha}{ma}} \left( \frac{e \operatorname{sen} E}{1 - e \cos E} \right).$$

Logo

$$\frac{1}{|\dot{r}|} dr = \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{\frac{3}{2}} (1 - e \cos E) dE. \quad (2.13)$$

Seja  $r_{\min}$ ,  $r_{\max}$  o mínimo e o máximo de  $r$ . Então

$$\frac{T}{2} = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{\dot{r}} dr = \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{\frac{3}{2}} \int_0^\pi (1 - e \cos E) dE = \pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{\frac{3}{2}},$$

donde segue-se (2.11).

### 2.1.1 O funcional ação e o problema de Kepler

Seja  $\mathcal{X} = H^1([0, T], \mathbb{C})$ , então o funcional ação associado a (2.2) é dado por

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T \left[ \frac{m}{2} |\dot{x}(t)|^2 + \frac{m_1 m_2}{|x(t)|} \right] dt, \quad x \in \mathcal{X}.$$

**Proposição 2.1** *Seja  $\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathcal{X} : x(0), ix(T) \in \mathbb{R}\}$ . Então  $\mathcal{A}$  atinge o mínimo em  $\mathcal{X}$  e todo minimizante  $x$  é solução de (2.1) sempre que  $x(t) \neq 0$  para todo  $t \in [0, T]$ .*

**Demonstração.** Pelo teorema 1.6 o mergulho  $\mathcal{X} \hookrightarrow C^0([0, T], V)$  é compacto, logo pelo teorema 1.2  $\mathcal{X}_0$  é fracamente fechado e também fechado na topologia forte.

Para todo  $x \in \mathcal{X}_0$  considere a função

$$\delta(x) := \max_{s_1, s_2 \in [0, T]} |x(s_1) - x(s_2)|.$$

Desde que  $x(0) \cdot x(T) = 0$ , temos que:

$$\begin{aligned} \delta(x) &\geq |x(0) - x(T)| = \sqrt{|x(0) + x(T)|} \geq |x(0)|, \\ |x(t)| &\leq |x(0)| + \delta(x) \leq 2\delta(x), \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Assim

$$\int_0^T |x|^2 dt \leq 4\delta(x)^2 T.$$

Mas, pela desigualdade de Hölder, temos:

$$\int_0^T |\dot{x}|^2 dt \geq \frac{1}{T} \left( \int_0^T |\dot{x}| dt \right)^2 \geq \frac{\delta(x)^2}{T}.$$

Além disso temos que a norma de Sobolev é controlada pela ação uma vez que:

$$\begin{aligned} \|\dot{x}\|_{H^1}^2 &= \int_0^T (|x|^2 + |\dot{x}|^2) dt \leq 4\delta(x)^2 T + \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \\ &\leq (4T^2 + 1) \int_0^T |\dot{x}|^2 dt < \frac{2}{m} (4T^2 + 1) \mathcal{A}(x). \end{aligned}$$

Logo se  $\|x\|_{H^1} \rightarrow +\infty$  então  $\mathcal{A} \rightarrow +\infty$ , ou seja,  $\mathcal{A}|_{\mathcal{X}_0}$  é coercivo. Portanto pelo teorema 1.9 e pelo lema 1.7 o funcional ação  $\mathcal{A}|_{\mathcal{X}_0}$  atinge o mínimo. Como  $\Lambda_\varepsilon \subset \mathcal{X}_0$ , segue do corolário 1.1, que todo minimizante  $x$  é solução de 2.2 desde que  $x$  nunca anule-se. ■

**Proposição 2.2** *Seja  $\mathcal{X}_1 := \{x \in \mathcal{X} : x(t) = -x(t + \frac{T}{2}), 0 \leq t \leq \frac{T}{2}\}$ . Então  $\mathcal{A}$  atinge o mínimo sobre  $\mathcal{X}_1$  e todo minimizante  $x$  é solução de 2.2 desde que  $x$  é não nulo.*

**Demonstração.** Inicialmente note que  $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}$  é fechado na topologia forte, pois se  $x_n \rightarrow x$  em  $\mathcal{X}_1$ , então

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} -x_n(t + \frac{T}{2}) = -x(t + \frac{T}{2}).$$

Logo  $\mathcal{X}_1$  é fechado na topologia fraca. Para todo  $x \in \mathcal{X}_1$ ,  $x(0) = x(T)$  e então tais caminhos podem ser estendidos a uma função periódica em  $\mathbb{R}$  com a propriedade  $x(t) = -x(t + \frac{T}{2})$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Assim :

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 &= \frac{1}{4} |x(t + \frac{T}{2}) - x(t)|^2 \leq \frac{1}{4} \left( \int_t^{t+\frac{T}{2}} \dot{x}(\tau) d\tau \right)^2 \\ &\leq \frac{T}{8} \int_t^{t+\frac{T}{2}} |\dot{x}(\tau)|^2 d\tau = \frac{T}{8} \int_0^{\frac{T}{2}} |\dot{x}(\tau)|^2 d\tau = \frac{T}{16} \int_0^T |\dot{x}(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Portanto :

$$\int_0^T |x|^2 dt \leq \frac{T^2}{16} \int_0^T |\dot{x}(\tau)|^2 d\tau$$

e assim,

$$\|x\|_{H^1}^2 = \int_0^T (|x|^2 + |\dot{x}|^2) dt \leq \left( \frac{T^2}{16} + 1 \right) \int_0^T |\dot{x}|^2 dt < \frac{2}{m} \left( \frac{T^2}{16} + 1 \right) \mathcal{A}(x).$$

Logo  $\mathcal{A}|_{\mathcal{X}_1}$  atinge o mínimo pelo mesmo argumento da proposição anterior.

Observe que para mostrar que o minimizante  $x$  é solução de (2.2) não podemos usar o Corolário 1.1, pois  $\mathcal{X}_1$  não contém  $\Lambda_\varepsilon$ , pois sendo  $h(t) = \frac{\varepsilon}{2}$  temos que  $h \in \Lambda_\varepsilon$  e  $h \notin \mathcal{X}_1$ . Mas se nós trabalharmos sobre o espaço de funções

$$\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathcal{X} : x(0) = x(T)\},$$

temos que  $\mathcal{X}_0 + \Lambda_\varepsilon = \mathcal{X}_0$  para todo  $\varepsilon > 0$  e então o corolário 1.1 pode ser aplicado. Note que  $\mathcal{X}_1$  é um subespaço de  $\mathcal{X}_0$ , o qual é invariante sobre a representação ortogonal  $\rho : \mathbb{Z}_2 \rightarrow GL(\mathcal{X})$  definida por

$$\rho(1)(x(t)) := -x\left(t + \frac{T}{2}\right),$$

ou seja,  $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_0^p$ . Como  $\mathcal{A}|_{\mathcal{X}_0}$  é  $\rho$ -invariante, temos pelo teorema 1.8 que todo minimizante  $x$  em  $\mathcal{X}_0^p$  é solução de (2.2) desde que  $x$  é não-nulo. ■

**Observação 2.1** *Note que as proposições 2.1 e 2.2 pode ser facilmente provadas usando o Teorema 1.10. De fato, na proposição 2.1 basta fazer  $\tau_x = T$  e  $v = 1$ . Já a proposição 2.2, é justamente o corolário 1.2.*

## 2.1.2 Ação das órbitas keplerianas colineares e elípticas

Seja  $x(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$  uma órbita kepleriana elíptica com período  $T$ . Vamos supor que  $\theta(0) = 0$  e  $\theta_0$  (ângulo de fase) também é zero em (2.9).

**Proposição 2.3** *Seja  $x$  uma órbita kepleriana elíptica de 2.9 cujo período é  $T$ . Então a ação de  $x$  é dada por:*

$$\mathcal{A}(x) = 3 \left( \frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}} \quad (2.14)$$

**Demonstração.** De fato, seja  $x(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ . Integrando a energia potencial ao longo desta curva temos que:

$$\int_0^T U(x) dt = 2\alpha \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{r} dt = 2\alpha \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{r\dot{r}} dr = 2\alpha \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{\frac{3}{2}} \int_0^\pi \frac{a(1 - e \cos E)}{(1 - e \cos E)} dE = 2\sqrt{m\alpha a} \pi.$$

Assim o valor da ação em  $x$  é:

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T [K(\dot{x}(t)) + U(x(t))] dt = \int_0^T [H + 2U(x(t))] dt = HT + 4\sqrt{m\alpha a} \pi.$$

Usando (2.11) e como  $H = -\frac{\alpha}{2a}$  temos que :

$$\mathcal{A}(x) = 3\sqrt{m\alpha a} \pi = 3 \left( \frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}}.$$

■

**Comentário:** Seja  $x$  uma órbita periódica com período mínimo  $T$  e seja  $y$  uma órbita periódica cujo período é  $\frac{T}{k}$  ( $k$  um número natural). Então a órbita  $T$ -periódica obtida por repetir  $y$   $n$ -vezes ( $x(t) = y(t/k)$ ) tem sua ação funcional  $k\mathcal{A}(y)$  e como consequência da proposição 2.14 temos que:

$$k\mathcal{A}(y) = 3k \left( \frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{T}{k} \right)^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{2}{3}} 3 \left( \frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{2}{3}} \mathcal{A}(x).$$

Isto nos diz que uma órbita kepleriana  $T$ -periódica tem uma ação menor quando  $T$  é o período mínimo.

Vamos agora levar em consideração as órbitas keplerianas colineares (i.e,  $J = 0$ ). Uma solução estendida (ou continuada)  $x(t)$  de (2.2),  $t \in [0, T]$ , é uma curva contínua cuja trajetória é a união de órbitas keplerianas e a origem. Seja  $E_x \subset [0, T]$ ,  $E_x = \{t \in [0, T] / x(t) = 0\}$ . Temos por continuidade que  $x(t)$  começa ou termina em uma componente de  $[0, T] \setminus E_x$ . Então o segmento correspondente de  $x$  é linear desde que as órbitas keplerianas obtidas sejam colineares. Por simplicidade começaremos com uma órbita kepleriana colinear  $x$ , a qual começa com velocidade zero e move-se da origem para a frente e que a colisão ocorre em  $t = \frac{T}{2}$ . A partícula então inverte o percurso do movimento até alcançar o ponto de partida, onde terá velocidade zero. Este é um caso especial de extensões de soluções  $T$ -periódicas, as quais podem ser consideradas uma órbita elíptica degenerada com  $e = 1$ . O momento angular é zero e  $a = |x(0)|$ . Note que, usando (2.12) e (2.13) obtemos (2.11). Note ainda que a ação pode ser calculada como na demonstração da proposição 2.3. Assim temos o seguinte lema:

**Lema 2.1** (a) *Seja  $x$  uma extensão da órbita colinear kepleriana de (2.2) com período  $T$  satisfazendo*

$$x\left(\frac{T}{2}\right) = 0, \quad x(t) = x(t - T) \quad \forall t \in \left[0, \frac{T}{2}\right], \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0. \quad (2.15)$$

*Então a ação de  $x$  é dada por (2.14).*

(b) *Se  $\dot{x}(0) = 0$  e  $x$  se move em direção a origem com a colisão ocorrendo em  $x(\tau) = 0$  então*

$$\int_0^\tau L(x, \dot{x}) dt = \frac{3}{2} (m\alpha^2\pi^2)^{\frac{1}{3}} \tau^{\frac{1}{3}}.$$

**Demonstração.** A letra (a) já foi demonstrada anteriormente e a letra (b) segue de (a) e do comentário anterior. ■

**Observação 2.2** Note que  $g(s) := s^{\frac{1}{3}}$  é uma função côncava. Seja  $x$  uma solução periódica estendida de (2.2) e seja  $\{t_i\}$  os comprimentos das componentes de  $E_x$ . Se  $x$  tem ação finita, então  $\sum_i t_i = T$  e

$$\mathcal{A}(x) = \frac{3}{2}(m\alpha^2\pi^2)^{\frac{1}{3}} \sum_i t_i^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}(m\alpha^2\pi^2)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}} \sum_i \left(\frac{t_i}{T}\right)^{\frac{1}{3}} \geq 3 \left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}}.$$

Para obter a última desigualdade, usamos a concavidade da função  $g(s)$  e a igualdade é válida se, e somente se,  $t_1 = t_2 = \frac{T}{2}$ , ou seja, entre as soluções periódicas estendidas de (2.2) os caminhos da forma (2.15) tem menor ação.

## 2.2 O teorema de Gordon

Considere o espaço das curvas fechadas  $\mathcal{X}_T = H^1([0, T]/\{0, T\}, \mathbb{C})$  em  $\mathcal{X} = H^1([0, T], \mathbb{C})$  que circundam a origem:

$$\mathcal{X}_2 := \{x \in \mathcal{X}_T : x(t) \neq 0 \text{ e grau}(x; 0) \neq 0\}$$

$$\mathcal{X}_2^* := \mathcal{X}_2 \cup \{x \in \mathcal{X}_T : \mathcal{A}(x) < \infty, x(t) = 0, \text{ para algum } t \in [0, T]\}$$

**Comentário:** Denotaremos  $\text{grau}(x; a)$  (ou índice) como sendo o número de voltas que a curva  $x$  dá em torno de  $a \in \mathbb{C}$ .

Ao contrário de  $\mathcal{X}_0$  e de  $\mathcal{X}_1$  estudados na seção (2.1.1),  $\mathcal{X}_2$  não é fracamente fechado em  $\mathcal{X}$  ou em  $\mathcal{X}_T$  (demonstraremos isto na próxima proposição).

Os lemas e o corolário a seguir terão um papel importante na demonstração da próxima proposição, a qual será usada na prova do teorema de Gordon.

**Observação 2.3** Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços. Duas aplicações  $f, g : X \rightarrow Y$  são chamadas de homotópicas ( $f \simeq g$ ) se existe uma função contínua  $H : \mathcal{X} \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  tal que  $H(x, 0) = g(x)$  e  $H(x, 1) = f(x)$

**Lema 2.2** Sejam  $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \Omega$ , duas aplicações contínuas, onde  $\mathcal{X}$  é um compacto e  $\Omega$  é um aberto de um espaço vetorial normado. Então existe  $\varepsilon > 0$  tal que se  $d(f, g) < \varepsilon$  (aqui  $d$  indica a distância de  $f$  à  $g$ ) temos que  $f \simeq g$ .

**Demonstração.** Seja  $\varepsilon = \frac{1}{2}d(f(x), \Omega^c)$ , e defina  $H : \mathcal{X} \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ , por

$$H(x, t) = tf(x) + (1 - t)g(x).$$

Note que  $(tf(x) + (1 - t)g(x)) \in \Omega$  e que  $H(x, 0) = g(x)$  e  $H(x, 1) = f(x)$ . Portanto,  $f \simeq g$ . ■

**Lema 2.3** *Seja  $n \geq 1$ . Duas aplicações de  $S^n$  sobre  $S^n$  são homotópicas se, e somente se, elas têm o mesmo grau.*

**Demonstração.** ver [7], página 352 ■

**Corolário 2.1** *Sejam  $f, g : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Então  $f \simeq g$  se, e somente se,  $f$  e  $g$  têm o mesmo grau.*

**Lema 2.4** *Seja  $\mathcal{A}^c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , o conjunto de nível  $\mathcal{A}^{-1}((-\infty, c]) \subset \mathcal{X}_T$  de  $\mathcal{A}$ . Então:*

- (a)  $\mathcal{A}|_{\mathcal{X}_2^*}$  é coercivo;
- (b)  $\mathcal{X}_2$  é aberto em  $\mathcal{X}_T$
- (c)  $\mathcal{A}^c \cap \mathcal{X}_2^*$  é fracamente fechado em  $\mathcal{X}_T$  para  $c \in \mathbb{R}$

**Demonstração.**

- (a) De fato, seja  $x \in \mathcal{X}_2^*$ , então existe  $\tau_x \in (0, T]$  onde  $x(0)$  e  $x(\tau_x)$  são tais que:  $x(0) \cdot x(\tau_x) = -|x(0)||x(\tau_x)|$ . Logo  $\mathcal{A}|_{\mathcal{X}_2^*}$  satisfaz a condição  $(NC)_v$  e portanto  $\mathcal{A}|_{\mathcal{X}_2^*}$  é coercivo.
- (b) Como o mergulho  $H^1 \hookrightarrow C^0$  é compacto temos que para qualquer  $x \in \mathcal{X}_2$ ,  $\varepsilon_x := \|x\|_{C^0}$  é positivo e

$$\|x - y\|_{C^0} \leq \|x - y\|_{H^1} < \varepsilon_x$$

para algum  $C > 0$  independente de  $x$  e para todo  $y$  tal que  $\|x - y\|_{H^1} < \varepsilon$ . Então pelo lema 2.2 e pelo corolário 2.1 temos que se  $y$  pertence a uma pequena  $H^1$ - vizinhança, então  $y \in \mathcal{X}_2$ , ou seja,  $\mathcal{X}_2$  é aberto.

- (c) O caso em que  $\mathcal{A}^c \cap \mathcal{X}_2^* = \emptyset$  é trivial. Suponhamos então que  $\mathcal{A}^c \cap \mathcal{X}_2^* \neq \emptyset$ . Seja  $\{x_k\}$  uma seqüência em  $\mathcal{A}^c \cap \mathcal{X}_2^*$ . Temos que  $\{x_k\}$  é limitada pois, mostramos no item

(a) que  $\mathcal{A}|_{\mathcal{X}_2^*}$  é coercivo. Assim pelo teorema de Banach- Alaoglu-Bourbaki (teorema 1.3) ele tem um limite fraco  $x \in \mathcal{X}_T$ . Passando a uma subsequência se necessário, seja  $x_k$  uma seqüência que converge fracamente para  $x$ . Segue-se que  $x \in \mathcal{X}_2^*$  pois o mergulho  $H^1 \hookrightarrow C^0$  é compacto. Pelo lema 1.7, temos que

$$\mathcal{A}(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x^{(k)}) \leq c.$$

Logo  $x \in \mathcal{A}^c \cap \mathcal{X}_2^*$  e, assim, concluímos que  $\mathcal{A}^c \cap \mathcal{X}_2^*$  é fracamente fechado.

■

Temos agora todas as "ferramentas" para demonstrar o principal teorema desta seção: O teorema de Gordon.

**Teorema 2.1**  $\mathcal{A}|_{\mathcal{X}_2}$  atinge o valor mínimo nas órbitas keplerianas elípticas de (2.2) para o qual  $T$  é o período mínimo.

**Demonstração.** Escolha  $c$  tal que  $\mathcal{A}^c \cap \mathcal{X}_2^* \neq \emptyset$ . De fato existe tal valor  $c$ , e isto segue do proposição 2.3. Assim dos lemas 2.4 e 1.7 e pelo teorema 1.9, o funcional  $\mathcal{A}$  atinge o mínimo em  $\mathcal{A}^c \cap \mathcal{X}_2^*$ . Se o minimizante  $x \in \mathcal{X}_2$  temos o resultado. Suponha então que  $x \in \mathcal{X}_2^* \setminus \mathcal{X}_2$  é um minimizante de  $\mathcal{A}|_{\mathcal{X}_2^*}$ . Note que pela observação 2.2  $x$  tem que ser uma solução estendida com exatamente uma colisão em  $S_T$ , e além do mais tem que ter a forma (2.15), a menos de uma translação da variável tempo. Pelo lema 2.1,  $x$  tem a mesma ação de qualquer órbita Kepleriana com período mínimo  $T$ . Portanto  $\mathcal{A}|_{\mathcal{X}_2^*}$  (e então  $\mathcal{A}|_{\mathcal{X}_2}$ ) atinge o mínimo em  $\mathcal{X}_2$  e pela proposição 2.3, estes minimizantes são órbitas keplerianas elípticas de (2.2) para as quais  $T$  é o período mínimo. Portanto o teorema está provado.

■

**Comentário:** Note que o teorema não exclui que órbitas com colisões sejam minimizantes, mas garante a existência de órbitas minimizantes sem colisões.

### 2.2.1 Uma propriedade minimizante das órbitas circulares

Nesta seção vamos estudar o mesmo problema de minimização da proposição 2.1. Vamos considerar a ação funcional restrita a  $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X} = H^1([0, T], \mathbb{C})$  tal que

$$\mathcal{X}_0 := \{x \in \mathcal{X} : x(0), ix(T) \in \mathbb{R}\}$$

**Lema 2.5** *Seja  $x(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$  um minimizante de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0$ . Então  $x$  é solução de (2.2) desde que nunca se anule. Além disso, se  $r(0) > 0$  então  $\dot{r}(0) = 0$ , e se  $r(T) > 0$  então  $\dot{r}(T) = 0$*

**Demonstração.** Inicialmente note que a existência de minimizantes é garantida pela proposição 2.1. A afirmação de que  $x$  é solução de (2.2) segue do seguinte fato: (2.2) é a equação de Euler-Lagrange de  $\mathcal{A}$  e tal equação só possui singularidades quando  $x = 0$ , o que não acontece (por hipótese).

Seja

$$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{r}$$

o lagrangiano em coordenadas polares. Suponha que  $r(0) > 0$ , então  $x$  é solução de (2.2) em uma vizinhança de 0. Escolha uma variação admissível  $h$ , a qual é diferenciável e suportada em uma pequena vizinhança da origem com  $h(0) \neq 0$ . Temos que a variação de Gâteaux de  $\mathcal{A}$  em  $x = re^{i\theta}$  na direção  $h$  é dada por

$$\delta_x \mathcal{A}(h) = \frac{dL}{dr}h(T) - \frac{dL}{dr}h(0) + \int_0^T \left( \frac{dL}{dr} - \frac{d}{dt} \frac{dL}{dr} \right) h dt. \quad (2.16)$$

Como  $x$  é um minimizante,  $x$  é solução da equação de Euler-Lagrange e a primeira variação de  $\mathcal{A}$  é zero. Então

$$0 = \frac{dL}{dr}h(T) - \frac{dL}{dr}h(0).$$

Como  $h$  tem suporte em uma vizinhança de zero então  $h(T) = 0$ , e assim,  $\frac{dL}{dr}h(0) = 0$ . Em  $t = 0$  temos que  $\frac{dL}{dr} = mr(0)\dot{r}(0)$ . Como  $r(0) > 0$  e  $h(0) > 0$ , temos que  $\dot{r}(0) = 0$ . De maneira similar mostra-se que  $\dot{r}(T) = 0$ . ■

Seja  $\mathcal{X}_{0,C}$  o conjunto dos caminhos com colisões em  $\mathcal{X}_0$ , ou seja

$$\mathcal{X}_{0,C} = \{x \in \mathcal{X}_0 : x(t) = 0 \text{ para algum } t \in [0, T]\}.$$

Nosso próximo objetivo é excluir caminhos com colisões entre os minimizantes de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0$ .

**Lema 2.6** Para qualquer  $x \in \mathcal{X}_{0,C}$  com ação finita existe  $\bar{x} \in \mathcal{X}_{0,C}$  com somente uma colisão em  $[0, T]$  tal que  $\bar{x}$  tem momento angular nulo em quase toda parte e  $\mathcal{A}(\bar{x}) \leq \mathcal{A}(x)$ , onde a igualdade é verdadeira somente se  $x$  tem momento angular nulo e satisfaz qualquer uma das seguintes condições:

- (i)  $x(0) = 0$  e  $|x|$  é não-decrescente em  $[0, T]$ ;
- (ii)  $x(T) = 0$ , e  $|x|$  é não-crescente em  $[0, T]$ ;
- (iii)  $x(\tau) = 0$  para algum  $\tau \in (0, T)$ ,  $|x|$  é monótona em  $[0, \tau]$  e  $(\tau, T]$

**Demonstração.** Seja  $x \in \mathcal{X}_{0,C}$ . Escrevendo  $x$  na forma polar,  $x(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ , temos que o momento angular  $mr^2\dot{\theta}$  de  $x$  é definido em quase toda parte. Note que se  $x$  tem ação finita, o momento angular é zero se e somente se  $\dot{\theta} = 0$  em quase toda parte.

Seja  $t_1 = \inf \Delta_x$ , onde  $\Delta_x = \{t \in [0, T] / x(t) = 0\}$ . Observe que  $x(t_1) = 0$ , pois caso contrário existiria  $\xi > 0$  tal que  $x(t) \neq 0$  para todo  $t \in (t_1 - \xi, t_1 + \xi)$ , que  $t_1$  pode ser 0 ou  $T$  no caso em que  $x$  começa ou termina em colisão. Assim defina  $\bar{x}(t) = \bar{r}(t)e^{i\bar{\theta}(t)}$  onde :

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} \sup_{s \in [t, t_1]} r(s), & \text{quando } t \in [0, t_1], \\ \sup_{s \in [t_1, t]} r(s), & \text{quando } t \in (t_1, T], \end{cases}$$

$$\bar{\theta}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in [0, t_1] \\ \frac{\pi}{2}x, & \text{se } t \in (t_1, T]. \end{cases}$$

Note que como  $\bar{\theta} = 0$  em  $[0, t_1]$ ,  $\bar{x}$  permanece no eixo real neste intervalo e tem somente uma colisão que acontece em  $t = t_1$  e que no intervalo  $(t_1, T]$  o caminho  $\bar{x}$  permanece sobre o eixo imaginário. Como  $x$  tem ação finita, temos que  $r \neq 0$  em quase toda parte e assim  $\bar{r} > 0$  em  $[0, t_1) \cup (t_1, T]$ . Observe também que :

- (1)  $r \leq \bar{r}$ . De fato, isto segue do fato que  $\sup r(t) \geq r(t)$ ;
- (2)  $|\dot{r}| \geq |\dot{\bar{r}}|$ . De fato,  $\bar{r}$  ou coincide com  $r$  em um intervalo ou é um segmento de reta, ou seja,  $\dot{\bar{r}} = 0$  ou  $|\dot{\bar{r}}| = |\dot{r}|$  em quase toda parte;
- (3)  $\dot{\bar{\theta}} = 0$ . Esta propriedade segue imediatamente pelo fato de  $\bar{\theta}$  ser constante em  $[0, t_1]$  e em  $(t_1, T]$ .

Portanto  $\bar{x} \in \mathcal{X}_{0,C}$  e além disso

$$\mathcal{A}(\bar{x}) = \int_0^T \left( \frac{m}{2} \dot{\bar{r}}^2 + \frac{\alpha}{\bar{r}} \right) dt \leq \int_0^T \left( \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{\alpha}{r} \right) dt \leq \int_0^T \left[ \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{r} \right] dt = \mathcal{A}(x)$$

Note que a igualdade se verifica se e somente se  $r \equiv \bar{r}$  e  $\dot{\theta} = 0$  e portanto pela construção de  $\bar{r}$  isto acontece somente se uma das três condições para  $x$  citadas no teorema for verdadeira. ■

**Lema 2.7** Para todo  $x \in \mathcal{X}_{0,C}$  com ação finita, existe um  $\bar{x} \in \mathcal{X}_{0,C}$  do tipo (i) ou (ii) do lema 2.6 com momento angular nulo em quase toda parte tal que  $\mathcal{A}(\bar{x}) \leq \mathcal{A}(x)$ .

**Demonstração.** Pelo lema 2.6 é suficiente considerar  $x$  do tipo (iii) e que tem momento angular nulo em quase toda parte. Então seja  $\tau$  o único zero de  $x$  em  $[0, T]$ . Suponha que  $r_T = |x(T)| \leq |x(0)|$  e seja  $t_0 = \inf\{s \in [0, \tau) : |x(s)| = r_T\}$ . Sendo  $x(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ , defina  $\bar{x}(t) = \bar{r}(t)e^{i\theta(t)}$  onde

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} r(t), & \text{quando } t \in [0, t_0], \\ r_T, & \text{quando } t \in (t_0, \tau], \\ r(\tau + T - t), & \text{quando } t \in (\tau, T]. \end{cases}$$

Note que  $\bar{x}(T) = 0$ . Mas além disso,  $|x|$  é monótona em  $[0, \tau)$  e em  $(\tau, T]$ . Como  $|x(T)| \leq |x(0)|$ ,  $|\bar{x}|$  é não crescente no intervalo  $[0, T]$ . Logo  $\bar{x}$  é do tipo (ii) do lema 2.6. Observe também que :

- $\int_0^{t_0} L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) dt = \int_0^{t_0} L(\bar{r}, \theta, \dot{\bar{r}}, \dot{\theta}) dt$
- $\int_{t_0}^{\tau} L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) dt \geq \int_{t_0}^{\tau} L(\bar{r}, \theta, \dot{\bar{r}}, \dot{\theta}) dt$
- $\int_{\tau}^T L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) dt = \int_{\tau}^T L(\bar{r}, \theta, \dot{\bar{r}}, \dot{\theta}) dt.$

Portanto  $\mathcal{A}(\bar{x}) \leq \mathcal{A}(x)$ .

Suponha que  $r_0 = |x(T)| \geq |x(0)|$  e seja  $t_1 = \inf\{s \in [0, \tau) : |x(s)| = r_0\}$ . Sendo  $x(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ , defina  $\hat{x}(t) = \hat{r}(t)e^{i\theta(t)}$  onde

$$\hat{r}(t) = \begin{cases} r(\tau - t), & \text{quando } t \in [0, \tau], \\ r_0, & \text{quando } t \in (\tau, t_1], \\ r(t), & \text{quando } t \in (t_1, T]. \end{cases}$$

Note que  $\hat{x}(0) = 0$ . Mas além disso,  $|x|$  é monótona em  $[0, \tau)$  e em  $(\tau, T]$ . Como  $|x(T)| \geq |x(0)|$ ,  $|\hat{x}|$  é não decrescente no intervalo  $[0, T]$ . Logo  $\hat{x}$  é do tipo (i) do lema 2.6. Observe também que

:

- $\int_0^\tau L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) dt = \int_0^\tau L(\hat{r}, \theta, \dot{\hat{r}}, \dot{\theta}) dt$
- $\int_\tau^{t_1} L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) dt \geq \int_\tau^{t_0} L(\hat{r}, \theta, \dot{\hat{r}}, \dot{\theta}) dt$
- $\int_{t_1}^T L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) dt = \int_{t_1}^T L(\hat{r}, \theta, \dot{\hat{r}}, \dot{\theta}) dt.$

Portanto  $\mathcal{A}(\hat{x}) \leq \mathcal{A}(x)$ . E assim concluímos a demonstração do lema. ■

### Lema 2.8

$$\inf_{x \in \mathcal{X}_0} \mathcal{A}(x) \leq \inf_{x \in \mathcal{X}_{0,C}} \mathcal{A}(x)$$

**Demonstração.** Suponha por absurdo que  $\inf_{x \in \mathcal{X}_0} \mathcal{A}(x) \geq \inf_{x \in \mathcal{X}_{0,C}} \mathcal{A}(x)$ . Então pelo lema 2.7 existiria algum  $x \in \mathcal{X}_{0,C}$  do tipo (i) ou (ii) que minimizaria  $\mathcal{A}$  sobre  $\mathcal{X}_0$ , onde  $x$  tem momento angular nulo em quase toda parte. Note que todo caminho do tipo (i) pode ser obtido por uma rotação de  $90^0$  de um caminho do tipo (ii). Como a ação é invariante por rotações vamos assumir, sem perda de generalidade que  $x$  é do tipo (ii). Pelo lema 2.5 tal caminho é solução do problema de Kepler (2.2) em  $[0, T)$  com colisão em  $t = T$ , e além disso  $x$  é diferenciável com momento angular nulo permanecendo sobre a reta real para todo tempo. Logo pelo lema 2.5 ele começa com velocidade inicial zero. Assim pelo lema 2.1(b),

$$\mathcal{A}(x) = \frac{3}{2} (m\alpha^2 \pi^2 T)^{\frac{1}{3}}.$$

Seja o caminho

$$y(t) = \left( \frac{4\alpha T^2}{m\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\pi i t}{2T}} \in \mathcal{X}_0.$$

Como o período do caminho  $y$  é  $4T$ , pelo comentário da proposição 2.3 temos que  $\mathcal{A}(y) = 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} (m\alpha^2 \pi^2 T)^{\frac{1}{3}}$  e assim  $\mathcal{A}(y) \leq \mathcal{A}(x)$ , que é uma contradição. logo

$$\inf_{x \in \mathcal{X}_0} \mathcal{A}(x) \leq \inf_{x \in \mathcal{X}_{0,C}} \mathcal{A}(x)$$

■

**Teorema 2.2** A ação funcional  $\mathcal{A}$  tem exatamente quatro minimizantes, onde cada um deles é um quarto de uma órbita periódica circular para 2.2 com período  $4T$ .

**Demonstração.** Pelos lemas 2.5 e 2.8 um minimizante  $x = re^{i\theta}$  de  $\mathcal{A}$  sobre  $\mathcal{X}_0$  é uma órbita kepleriana com momento angular não nulo e  $\dot{r}(0) = \dot{r}(T) = 0$ . Temos por (2.9) que

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

ou seja

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos(\theta - \theta_0) \quad (2.17)$$

para algum  $p > 0$ ,  $e > 0$  e  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ . Derivando ambos os lados em relação ao tempo em 2.17 e aplicando em  $t = 0$  e  $t = T$  temos:

$$0 = -\frac{p}{r(0)}\dot{r}(0) = -e \operatorname{sen}(-\theta_0) \cdot \dot{\theta}(0) = e \operatorname{sen}(\theta_0) \cdot \dot{\theta}(0)$$

$$0 = -\frac{p}{r(T)}\dot{r}(0) = -e \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}(T) = -e \cos(\theta_0) \cdot \dot{\theta}(0).$$

Note que  $\dot{\theta}(0)$  e  $\dot{\theta}(T)$  são não nulos pois o momento angular é não nulo. Como  $\cos(\theta)$  e  $\operatorname{sen}(\theta)$  não se anulam simultaneamente, a excentricidade  $e$  tem que ser zero, caso em que a órbita é circular. Por simples cálculos temos que os minimizantes são  $\pm R^{\frac{1}{3}} e^{\pm \frac{\pi i}{2T}}$ , onde  $R = \left(\frac{4\alpha T^2}{m\pi^2}\right)$  ■

# Capítulo 3

## Cálculo variacional aplicado ao problema dos três corpos

Neste capítulo mostraremos, com auxílio de métodos variacionais, uma nova solução para o problema dos três corpos. Até então era conhecidas as soluções dadas por Euler, onde os corpos ficam sempre em uma configuração colinear, e por Lagrange, onde os corpos (com massas iguais) formam um triângulo equilátero. A. Chenciner e R. Montgomery descobriram uma nova solução, onde os corpos com massas iguais se moviam ao longo de uma figura "oito".

Na primeira seção introduziremos as coordenadas de Jacobi para o problema dos três corpos a fim de reduzir a dimensão do espaço de configurações e tentaremos dar uma descrição geométrica dos corpos através do fibrado de Hopf. A segunda seção destina-se a descrição da órbita dada em [6] por A. Chenciner e R. Montgomery. Na terceira seção daremos uma prova analítica, Devido a Kuo-Chen Chang, da exclusão de colisão entre os corpos na nova solução

### 3.1 Redução do problema

#### 3.1.1 Coordenadas de Jacobi

As equações de movimento para o problema dos três corpos é dada por:

$$m_k \ddot{x}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} U(x), \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

onde  $x_k \in \mathbb{R}^3$  é a posição do corpo de massa  $m_k$  e

$$U(x) = U(x_1, x_2, x_3) = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}}, \quad r_{ij} = |x_i - x_j|,$$

é a energia potencial. O Hamiltoniano define um sistema dinâmico em  $\mathbb{R}^{18}$  no problema espacial dos três corpos, ou em  $\mathbb{R}^{12}$  no caso planar. É interessante, quando temos um alto grau de liberdade, reduzir a dimensão com uma mudança de coordenadas adequada. Em nosso estudo usaremos as coordenadas de Jacobi (Veja [14]).

No capítulo anterior reduzimos o problema de Kepler a um problema uni-dimensional por meio das coordenadas polares, onde assumimos o centro de massa na origem e então, obtemos a formulação do problema em termos do vetor posição de uma massa para outra ( $x = x_2 - x_1$ ). Nas coordenadas de Jacobi, a primeira coordenada é o centro de massa, a segunda é proveniente do vetor posição de  $m_1$  para  $m_2$ , a terceira é proveniente do vetor posição centro de massa de  $m_1, m_2$  para  $m_3$ .

**As coordenadas de Jacobi** para o problema dos três corpos são definidas por:

$$\begin{cases} \xi_1 = x_2 - x_1 \\ \xi_2 = x_3 - \left( \frac{m_1}{m_1+m_2} x_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2} x_2 \right). \end{cases} \quad (3.2)$$

A energia cinética  $K(\dot{x})$  pode ser escrita como

$$K(\dot{x}) = K(\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2) = \frac{1}{2} (M_1 |\dot{\xi}_1|^2 + M_2 |\dot{\xi}_2|^2),$$

onde  $M_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $M_2 = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$ . O potencial  $U(x)$  também pode ser escrito em termos de  $\xi_1$  e  $\xi_2$ ,

$$U(x) = U(\xi_1, \xi_2) = \frac{m_1 m_2}{|\xi_1|} + \frac{m_1 m_2}{\left| \xi_2 - \frac{m_1}{m_1+m_2} \xi_1 \right|} + \frac{m_1 m_2}{\left| \xi_2 + \frac{m_1}{m_1+m_2} \xi_1 \right|}.$$

As coordenadas de Jacobi podem ser normalizadas fazendo

$$(z_1, z_2) := (\sqrt{M_1} \xi_1, \sqrt{M_2} \xi_2) \quad (3.3)$$

e então  $K(\dot{x})$  e  $U(x)$  podem ser escrito na forma:

$$K(\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{2} (|\dot{z}_1|^2 + |\dot{z}_2|^2)$$

$$U(z_1, z_2) = \frac{m_1 m_2 \sqrt{M_1}}{|z_1|} + \frac{m_2 m_3 \sqrt{M_2}}{\left| z_2 - \frac{\sqrt{M_1 M_2}}{m_2} z_1 \right|} + \frac{m_1 m_2 \sqrt{M_2}}{\left| z_2 + \frac{\sqrt{M_1 M_2}}{m_1} z_1 \right|}.$$

Note que o sistema foi reduzido de  $\mathbb{R}^{12}$  para  $\mathbb{R}^8$ .

### 3.1.2 O problema planar dos três corpos

Após a introdução das coordenadas de Jacobi, o espaço das configurações  $V$  é parametrizado por  $(z_1, z_2)$ . No caso planar,  $V$  pode ser identificado com  $\mathbb{C}^2$ . As configurações reduzidas são 3-dimensionais, e os triângulos formado pelos corpos pode ser visto como pontos em  $\mathbb{R}^3$ . Esta forma facilita fazer uma análise visual.

O espaço das configurações reduzidas  $\tilde{V}$  é obtido quocientando  $V$  com as simetrias rotacionais sobre o momento angular. Dizemos, então, que  $(z_1, z_2), (z_3, z_4) \in \mathbb{C}^2$  são equivalentes se  $(z_3, z_4) = e^{2i\pi\theta}(z_1, z_2)$  para algum  $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Note que  $\tilde{V}$  é invariante sobre a  $S^1$ -ação (ação diagonal)  $(\theta, (z_1, z_2)) \mapsto (e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2)$ . A identificação de  $V/SO(2) \cong \mathbb{C}^2/S^1$  com  $\tilde{V} \cong \mathbb{R}^3$  é realizada pelo **Fibrado de Hopf** (ver [13]):

$$(u_1, u_2, u_3) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2), 2\operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2)). \quad (3.4)$$

Às vezes é conveniente usar coordenadas polares da forma

$$(u_1, u_2, u_3) = (r^2 \cos \phi \cos \theta, r^2 \cos \phi \sin \theta, r^2 \sin \phi). \quad (3.5)$$

Esferas da forma  $r = c > 0$  são chamadas em inglês de **shape sphere**, mas aqui chamaremos de **shape esfera**. Todo ponto da **shape esfera** representa uma classe de triângulos a menos de rotação. A **shape esfera unitária** é a esfera com  $r = 1$ .

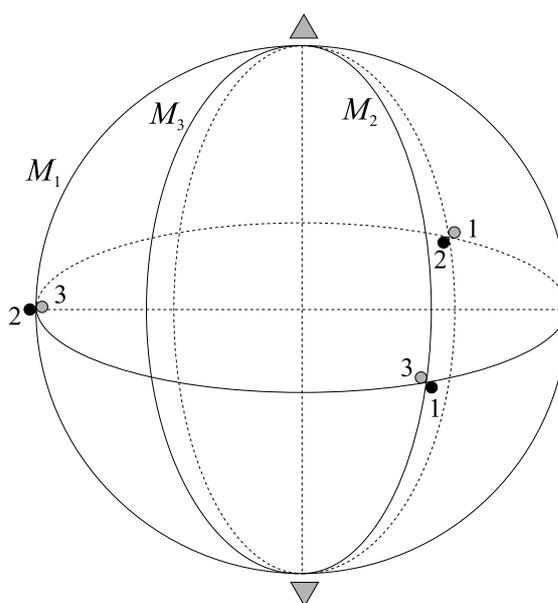


Figura 3.1:

A figura acima é devido a R.Moeckel [15]. Na figura,  $M_j$  representa triângulos isósceles onde as distâncias da  $j$ -ésima massa para as outras duas são iguais. Vejamos a seguir algumas observações geométricas sobre os pontos da **shape esfera**:

1.  $\frac{1}{2}u_3$  é a área com sinal do paralelogramo gerado por  $z_1$  e  $z_2$ , pois  $\frac{1}{2}u_3 = z_1 \times z_2$  - a área é positiva se e somente se  $z_1 \wedge z_2$  é um múltiplo positivo de  $e_1 \wedge e_2$ . Note que por (3.2) e (3.3) a área com sinal é determinada por  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1m_2m_3}}u_3$  e que  $u_3 = 0$  se, e somente se a configuração é colinear.
2. No hemisfério superior, ou seja  $u_3 > 0$ , os triângulos de vértices  $\{x_1, x_2, x_3\}$  são positivamente orientados ou equivalentemente  $(x_2 - x_1) \wedge (x_3 - x_1)$  é um múltiplo positivo de  $e_1 \wedge e_2$ ; no hemisfério inferior os triângulos são negativamente orientados.
3. No pólo norte ( $\phi = 0$ ) temos a configuração de um triângulo equilátero positivamente orientado; no pólo sul ( $\phi = -\frac{\pi}{2}$ ) a orientação é invertida.

## 3.2 A órbita da figura-oito

### 3.2.1 O problema de minimização

No caso de massas iguais  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ , o sistema (3.1) se transforma em :

$$\ddot{x}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} U(x), \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

com

$$U(x) = U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{13}}.$$

O funcional ação do problema planar dos três-corpos com massas iguais é dado por:

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^{\bar{T}} \left( \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{13}} \right) dt \quad (3.7)$$

Seja  $V := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  o espaço de configurações e  $\mathcal{X} = H^1(S_{\bar{T}}, V)$  o espaço onde vamos trabalhar, onde  $\bar{T} = 12T$  e  $S_{\bar{T}} = [0, \bar{T}] / \{0, \bar{T}\}$ . Vamos considerar caminhos em  $\mathcal{X}$  definidos em toda reta real que podem ser estendidos periodicamente, ou seja,  $x(t) = x(t+T)$  para qualquer  $t$  e para um  $T$  fixo.

Seja  $E_i$  a configuração de Euler com a  $i$ -ésima massa no meio, ou seja, uma configuração colinear com a  $i$ -ésima massa entre as outras duas, e  $M_j$  a configuração triangular com a  $j$ -ésima massa equidistante das outras duas. Consideremos o problema de minimização de  $\mathcal{A}$  no subespaço  $\mathcal{X}_0$  de  $\mathcal{X}$ , onde

$$\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathcal{X} : x(0) \in E_3, x(T) \in M_3\}. \quad (3.8)$$

O grupo diedral  $D_6$  de ordem 12 é gerado pelos símbolos  $\sigma, \tau$  com as seguintes relações:

$$\sigma^6 = 1, \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma^6.$$

Considere a representação  $\rho : D_6 \longrightarrow GL(X_0)$  definida por:

$$\rho(\sigma)(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (A(x_3(t+2T)), A(x_1(t+2T)), A(x_2(t+2T))) \quad (3.9)$$

$$\rho(\tau)(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (-x_1(-t), -x_2(-t), -x_3(-t)), \quad (3.10)$$

onde  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Note que a norma de Sobolev e consequentemente a ação  $\mathcal{A}$  são preservados por essa ação. De fato, basta notar que  $z$  e  $-\bar{z}$  tem mesmo módulo e que  $|(x_1, x_2, x_3)| = |(x_i, x_j, x_k)|$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$  onde  $i, j, k$  são distintos. Portanto, tal representação é ortogonal. Definamos agora o espaço de elementos  $\rho$ -invariante  $\mathcal{X}_0^\rho$  de  $\mathcal{X}_0$  como:

$$\mathcal{X}_0^\rho := \{x \in \mathcal{X}_0 : \rho(g)x = x \quad \forall g \in D_6\}. \quad (3.11)$$

Assim, temos que, pela invariancia da ação  $\rho(\sigma^2)$ , para todo  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{X}_0^\rho$ ,

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (x_2(t+4T), x_3(t+4T), x_1(t+4T))$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 3.1**  $\mathcal{A}$  atinge o mínimo em  $\mathcal{X}_0^\rho$ . Além disso, todo minimizador  $x \in \mathcal{X}_0^\rho$  é um ponto crítico de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0$  e  $x$  é solução de (3.6) sempre que  $x \in V \setminus \Delta$ .

**Demonstração.** Observe que se  $x \in \mathcal{X}_0^\rho$  então

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^{\bar{T}} \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt = 12 \int_0^T \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt.$$

De fato, como  $\rho(\sigma^2)x = x$  e a norma de Sobolev é preservada por essa, fazendo  $s = t - 4T$  temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{12T} \left[ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt &= \int_0^{4T} \left[ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt + \int_{4T}^{8T} \left[ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt + \int_{8T}^{12T} \left[ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt \\ &= 3 \int_0^{4T} \left[ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt. \end{aligned}$$

Como  $\rho(\sigma)x = x$ , fazendo  $s = t - 2T$  temos:

$$\begin{aligned} 3 \int_0^{4T} \left[ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt &= 3 \left( \int_0^{2T} \left[ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt + \int_{2T}^{4T} \left[ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt \right) \\ &= 6 \int_0^{2T} \left[ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt. \end{aligned}$$

Usando o fato que  $\rho(\sigma\tau)x = x$ , fazendo  $s = -t + 2T$  temos:

$$\begin{aligned} 6 \int_0^{2T} \left[ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt &= 6 \left( \int_0^T \left[ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt + \int_T^{2T} \left[ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt \right) \\ &= 12 \int_0^T \left[ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt. \end{aligned}$$

Logo

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^{\bar{T}} \left[ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt = 12 \int_0^T \left[ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt.$$

Assim o problema de minimizar  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0^p$  se transforma em um problema de minimizar em  $\mathcal{X}_0$  sobre o intervalo  $[0, T]$ . Se  $x$  é um minimizador de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0^p$ , em particular, também é um ponto crítico e assim pelo Teorema 1.8,  $x$  é um ponto crítico de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0$ . Note que  $\mathcal{X}_0$  é um subespaço de  $\mathcal{X}$  que satisfaz  $\mathcal{X}_0 + \Lambda_\varepsilon = \mathcal{X}_0$  para todo  $\varepsilon > 0$  onde

$$\Lambda_\varepsilon = \left\{ h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n) : h(0) = h(T) = 0, \sup_{[0, T]} |h| < \varepsilon \right\}.$$

Assim do corolário 1.1,  $x(t)$  é solução de (3.6) desde que  $x(t) \in V \setminus \Delta$ . Falta mostrar apenas que existe um minimizador de  $\mathcal{A}_{\mathcal{X}_0^p}$ . De fato, note que  $\mathcal{X}_0^p$  é fracamente fechado em  $\mathcal{X}_0$ . Isto segue da compacidade do mergulho  $H^1 \hookrightarrow C^0$ , pois se  $x_n \rightharpoonup x$  então  $x_n \rightarrow x$ . Logo

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g)x_n(t) = \rho(g) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \rho(g)x(t).$$

Observe também, que a invariância de  $x \in \mathcal{X}_0^p$  por  $\rho(\sigma^2)$ , implica que

$$E_3 \ni (x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (x_2(4T), x_3(4T), x_1(4T)).$$

Sendo um elemento de  $E_3$ ,  $x_3(0) = x_1(4T) = 0$ . Assim

$$x(0) \cdot x(4T) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0)) \cdot (x_2(4T), x_3(4T), x_1(4T)) = x_2(0) \cdot x_2(4T).$$

Além disso,

$$|x(0)|^2 = |x_1(0)|^2 + |x_2(0)|^2 = |x_2(4T)|^2 + |x_2(0)|^2$$

e

$$|x(4T)|^2 = |x_2(4T)|^2 + |x_3(0)|^2 = |x_2(4T)|^2 + |x_2(0)|^2.$$

Então

$$\begin{aligned} x(0) \cdot x(4T) &= x_2(0) \cdot x_2(4T) \\ &\leq \frac{1}{2}(|x_2(0)|^2 + |x_2(4T)|^2) \\ &= \frac{1}{2}|x(0)||x(4T)|. \end{aligned}$$

Desse modo o espaço  $\mathcal{X}_0^p$  satisfaz a condição  $(NC)_{\frac{1}{2}}$  em  $\mathcal{X}$ . Logo pelo Teorema 1.10,  $\mathcal{A}$  atinge o mínimo em  $\mathcal{X}_0^p$  ■

### 3.2.2 A ação reduzida

O movimento  $x(t) \in \mathcal{X}_0$  dos corpos pode ser visualizado pela projeção sobre a forma esfera, onde usando as coordenadas de Jacobi definidas em (3.2) e (3.3) temos:

$$(z_1, z_2) := \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3 - x_2), \sqrt{\frac{2}{3}}\left(x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3)\right) \right) \in \mathbb{C}^2$$

e quocientando as rotações pelo fibrado de Hopf (3.4) temos:

$$(z_1, z_2) \mapsto (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2) := (u_1, u_2 + iu_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}.$$

O conjunto de nível  $\mathcal{S}^{-1}(c)$ ,  $c > 0$ , do momento de inércia  $\mathcal{S}(x) = x \cdot x$  é a 3-esfera e é mapeada sobre a 2-esfera  $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = c^2$ . Assim usando coordenadas esféricas definidas em (3.5) e o lema de W-Y.Hsiang (ver [6]), a energia potencial restrita a  $\mathcal{S} = 1$  tem a seguinte representação:

$$U(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \theta \cos \phi}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \cos \phi}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \cos \phi}}.$$

Usando esta representação, o caminho equipotencial em  $\mathcal{S} = 1$  ligando  $E_3$  (i.e  $\phi = \theta = 0$ ) e  $M_1$  (i.e,  $\theta = \frac{4\pi}{3}$  ou  $\frac{\pi}{3}$ ) é implicitamente definido por  $U(\theta, \phi) = \frac{5}{\sqrt{2}}$ . Uma estimativa numérica dada por C. Simó [19] indica que a ação de um caminho equipotencial em uma dada forma esfera  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$  o qual move-se de  $E_3$  para  $M_1$  com velocidade constante é muito próxima do atual mínimo de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0$ .

**Teorema 3.1** *Minimizadores de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0$  são livres de colisões. Todo minimizador tem momento angular nulo e tem a forma*

$$x(t) = (q(t), q(t + 4T), q(t + 8T))$$

onde  $q(t)$  é uma curva em "forma de 8"

A.Chenciner e R.Montgomery em [6] provaram o teorema 3.1 e a prova consiste em três partes. Primeiramente eles reduziram o problema de minimização de  $\mathcal{A}$  para minimização do **funcional ação reduzido**  $\mathcal{A}_{red}$ , onde

$$\mathcal{A}_{red}(x) = \int_0^{\bar{T}} K_{red}(\dot{x}) + U(x) dt,$$

e  $K_{red} = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - \frac{|\omega|^2}{2\mathcal{J}}$  (onde  $\omega$  é o momento angular) proveniente decomposição da energia cinética de Saari (ver [6]). A energia cinética pode ser expressada como a soma de dois termos não negativos:  $K = K_{red} + K_{rot}$  (Esta é decomposição de Saari da velocidade).  $K_{red}$  corresponde a métrica Riemanniana do espaço quociente  $V/SO(2)$  induzida pela métrica  $K$  em  $V$ .  $K_{rot} = \frac{|\omega|^2}{\mathcal{J}}$  com  $\omega$  momento angular(ver [6]). Um minimizador de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0$  tem momento angular nulo, e conseqüentemente também é um minimizador de  $\mathcal{A}_{red}$  em  $\mathcal{X}_0$ .

**Lema 3.1** *Em coordenadas esféricas, a métrica quociente correspondente a energia cinética reduzida  $K_{red}$  ocorrendo na ação reduzida é dada por*

$$ds^2 = dr^2 + \frac{r^2}{4}(\cos \varphi d\theta^2 + d\varphi^2).$$

*Em particular a forma esfera  $I = r^2 = 1$  é isométrico a uma esfera padrão de raio  $\frac{1}{2}$  e o espaço  $\mathbb{R}^3$  é um cone sobre esta esfera e a própria esfera consiste de todos os pontos de distância 1 da colisão tripla.*

**Demonstração.** Ver [6], página 891. ■

A segunda parte dessa prova, onde foi usado uma integração numérica, é provar a seguinte desigualdade:

$$\inf_{x \in \mathcal{X}_0} \mathcal{A}(x) < \inf_{x \in \mathcal{X}_{0,C}} \mathcal{A}(x). \quad (3.12)$$

Aqui  $\mathcal{X}_{0,C}$  é a coleção de órbitas em  $\mathcal{X}_0$ , isto é,  $\mathcal{X}_{0,C} := \{x \subset \mathcal{X}_0 : x_i(\tau) = x_j(\tau) \text{ para algum } i \neq j, \tau \in [0, T]\}$ . Ou seja, a desigualdade (3.12) nos diz que o ínfimo de  $\mathcal{A}$  é atingido por caminhos que não colidem.

A limitação superior do lado esquerdo é dada aproximadamente por  $2.5260T^{\frac{1}{3}}$ , e o lado direito a limitação inferior é dada pela constante  $3(\frac{\pi}{4})^{2/3}T^{1/3} \approx 2.5538T^{1/3}$ . A diferença entre essas duas é de aproximadamente um por cento. Tal prova numérica de (3.12) provém do método usado em [6]. Na próxima seção daremos uma prova analítica para (3.12).

A última parte dessa prova descreve a forma da órbita, inclusive mostrando que cada parte da figura oito é star-shaped. Para maiores detalhes ver [6].

### 3.3 Excluindo Colisões

Para provar que a órbita minimizante da ação da seção anterior não tem qualquer colisão, A. Chenciner e R. Montgomery comparam a ação da órbita com a ação para o problema de dois corpos. Eles usaram o Teorema de Gordon (Teorema 2.1) para obter uma limitação inferior sobre todos os caminhos em  $\mathcal{X}_0$  com colisões e eles escolheram um caminho particular equipotencial que tem menor ação que todos os caminhos em  $\mathcal{X}_{0,C}$ . Essas duas estimativas são encontradas por integração numérica de forma desgastantes como afirma Kuo-Chang Chen em [4].

Daremos agora uma prova analítica para (3.12). Para isso provaremos a seguir dois lemas e um corolário.

**Lema 3.2** *Assuma  $T = 1$ . Então  $\frac{1}{12}\mathcal{A}(x) > 2.87$  para algum  $x \in \mathcal{X}_{0,C}$ .*

**Demonstração.** Fixe qualquer  $x \in \mathcal{X}_{0,C}$  e defina

$$\delta = \delta_x := \max_{s_1, s_2 \in [0, T]} |x(s_1) - x(s_2)|.$$

Caso: 1  $\delta \geq 2.22$ .

Primeiro observe:

$$\alpha + \beta \leq \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2)} \text{ para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

Seja  $x \in \mathcal{X}_{0,C}$ , seja  $d$  a distância inicial entre  $m_1$  e  $m_3$  (ou a distância inicial entre  $m_2$  e  $m_3$ ) e  $2d$  a distância inicial entre  $m_1$  e  $m_2$ . Seja  $\tau \in [0, 1]$  tal que a massa  $m_i$  colide com  $m_j$ . Mas como

$$\delta \geq |x(\tau) - x(0)|,$$

temos que

$$\begin{aligned} \delta^2 &\geq |x(\tau) - x(0)|^2 \\ &\geq |x_1(\tau) - x_1(0)|^2 + |x_2(\tau) - x_2(0)|^2 + |x_3(\tau) - x_3(0)|^2 \\ &\geq |x_i(\tau) - x_i(0)|^2 + |x_j(\tau) - x_j(0)|^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Note que se a colisão ocorrer entre  $m_k$  e  $m_3$ ,  $k \in \{1, 2\}$ , pela desigualdade triangular e por (3.13) temos:

$$\begin{aligned} d = |x_k(0) - x_3(0)| &= |x_k(0) - x_3(0) - x_k(\tau) + x_3(\tau)| \leq |x_k(\tau) - x_k(0)| + |x_3(0) - x_3(\tau)| \\ &\leq \sqrt{2(|x_k(\tau) - x_k(0)|^2 + |x_3(\tau) - x_3(0)|^2)} \end{aligned}$$

Mas se a colisão ocorre entre  $m_1$  e  $m_2$  obtemos:

$$\begin{aligned} 2d = |x_1(0) - x_2(0)| &= |x_1(0) - x_2(0) - x_1(\tau) + x_2(\tau)| \leq |x_1(\tau) - x_1(0)| + |x_2(0) - x_2(\tau)| \\ &\leq \sqrt{2(|x_1(\tau) - x_1(0)|^2 + |x_2(\tau) - x_2(0)|^2)}. \end{aligned}$$

Ou seja  $|x_i(\tau) - x_i(0)|^2 + |x_j(\tau) - x_j(0)|^2 \leq d^2/2$  para todo  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  com  $i \neq j$ . Portanto  $\delta^2 \leq \frac{d^2}{2}$ .

A primeira desigualdade em (3.14) continua verdadeira se trocarmos  $\tau$  por qualquer  $t \in [0, 1]$ . Desta forma usando a desigualdade triangular, (3.13), e que a distância inicial entre  $m_1$  e  $m_3$  é  $d$  temos

$$\begin{aligned} r_{13}(t) &= |x_1(t) - x_3(t)| = |x_1(t) - x_3(t) + x_1(0) - x_3(0) + x_3(0) - x_1(0)| \\ &\leq |x_1(t) - x_1(0)| + |x_1(0) - x_3(0)| + |x_3(0) - x_3(t)| \\ &\leq \sqrt{2(|x_1(t) - x_1(0)|^2 + |x_3(t) - x_3(0)|^2)} + d \\ &\leq 2\sqrt{2}\delta. \end{aligned}$$

Note que de maneira similar

$$\begin{aligned} r_{23}(t) &= |x_2(t) - x_3(t)| = |x_2(t) - x_3(t) + x_2(0) - x_3(0) + x_3(0) - x_2(0)| \\ &\leq |x_2(t) - x_2(0)| + |x_2(0) - x_3(0)| + |x_3(0) - x_3(t)| \\ &\leq \sqrt{2(|x_2(t) - x_2(0)|^2 + |x_3(t) - x_3(0)|^2)} + d \\ &\leq 2\sqrt{2}\delta, \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
 r_{12}(t) &= |x_1(t) - x_2(t)| = |x_1(t) - x_2(t) + x_1(0) - x_2(0) + x_2(0) - x_1(0)| \\
 &\leq |x_1(t) - x_1(0)| + |x_1(0) - x_2(0)| + |x_2(0) - x_2(t)| \\
 &\leq \sqrt{2(|x_1(t) - x_1(0)|^2 + |x_2(t) - x_2(0)|^2)} + 2d \\
 &\leq 3\sqrt{2}\delta.
 \end{aligned}$$

Então pela desigualdade de Hölder e pelas considerações anteriores concluímos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{12}\mathcal{A}(x) &= \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{x}|^2 dt + \int_0^1 \left( \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{32}} \right) dt \\
 &\geq \frac{1}{2} \left( \int_0^1 |\dot{x}| dt \right)^2 + \frac{1}{3\sqrt{2}\delta} + \frac{1}{2\sqrt{2}\delta} + \frac{1}{2\sqrt{2}\delta} \\
 &\geq \frac{\delta^2}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3\delta},
 \end{aligned}$$

pois  $\delta \leq \int_0^1 |\dot{x}| dt$ . Sendo  $f(\delta) = \frac{\delta^2}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3\delta}$ , temos que  $f'(\delta) = \frac{3\delta^3 - 2\sqrt{2}}{3\delta^2}$ . Ou seja  $f$  é estritamente crescente para  $\delta \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$  e portanto  $f$  atinge o mínimo no intervalo  $[2.22, +\infty)$  em  $\delta = 2.22$ , onde  $f(2.22) \approx 2.88888$  que é maior que 2.87

Caso 2:  $0 \leq \delta < 2.22$ .

Seja  $x \in \mathcal{X}_{0,C}$ . Vamos assumir que existe colisão entre as massas  $m_2$  e  $m_3$ . Os outros casos podem ser feitos de maneira análoga.

Seja  $\omega = \left( \int_0^1 |\dot{x}_1|^2 dt \right)^{1/2}$ , então para todo  $s \in [0, 1]$ ,

$$|x_1(s) - x_1(0)| = \left| \int_0^s \dot{x}_1 dt \right| \leq \int_0^s |\dot{x}_1| dt \leq \int_0^1 |\dot{x}_1| dt \leq \omega,$$

onde para obter a última desigualdade nos usamos a desigualdade de Hölder. Como  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  e vale (3.13) temos

$$\begin{aligned}
 \delta^2 &\geq |x(s) - x(0)|^2 \\
 &= |x_1(s) - x_1(0)|^2 + |x_2(s) - x_2(0)|^2 + |x_3(s) - x_3(0)|^2 \\
 &\geq \frac{1}{2} (|x_1(s) - x_1(0)| + |x_2(s) - x_2(0)|)^2 + |x_3(s) - x_3(0)|^2 \\
 &\geq |x_1(s) - x_1(0) + x_2(s) - x_2(0)|^2 + |x_3(s) - x_3(0)|^2 \\
 &= \frac{3}{2} |x_3(s) - x_3(0)|^2
 \end{aligned}$$

Da mesma maneira

$$\begin{aligned}
\delta^2 &\geq |x(s) - x(0)|^2 \\
&= |x_1(s) - x_1(0)|^2 + |x_2(s) - x_2(0)|^2 + |x_3(s) - x_3(0)|^2 \\
&\geq \frac{1}{2} (|x_1(s) - x_1(0)| + |x_3(s) - x_3(0)|)^2 + |x_2(s) - x_2(0)|^2 \\
&\geq |x_1(s) - x_1(0) + x_3(s) - x_3(0)|^2 + |x_2(s) - x_2(0)|^2 \\
&= \frac{3}{2} |x_2(s) - x_2(0)|^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\delta^2 &\geq |x(s) - x(0)|^2 \\
&= |x_1(s) - x_1(0)|^2 + |x_2(s) - x_2(0)|^2 + |x_3(s) - x_3(0)|^2 \\
&\geq \frac{1}{2} (|x_3(s) - x_3(0)| + |x_2(s) - x_2(0)|)^2 + |x_1(s) - x_1(0)|^2 \\
&\geq |x_3(s) - x_3(0) + x_2(s) - x_2(0)|^2 + |x_1(s) - x_1(0)|^2 \\
&= \frac{3}{2} |x_1(s) - x_1(0)|^2.
\end{aligned}$$

Daremos agora novas estimativas para  $r_{12}$  e  $r_{13}$  afim de conseguir uma melhor limitação para o funcional ação :

$$\begin{aligned}
r_{13}(t) &= |x_1(t) - x_3(t)| \\
&= |x_1(t) - x_3(t) + x_1(0) - x_3(0) - x_1(0) + x_3(0)| \\
&\leq |x_1(t) - x_1(0)| + |x_1(0) - x_3(0)| + |x_3(0) - x_3(t)| \\
&\leq \omega + d + \sqrt{\frac{2}{3}} \delta \\
&\leq \omega + \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \delta,
\end{aligned}$$

e de maneira análoga,

$$r_{12}(t) \leq \omega + 2d + \sqrt{\frac{2}{3}} \delta \leq \omega + \sqrt{2} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \delta.$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left( \frac{1}{2} |\dot{x}| + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} \right) dt &\geq \frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{\omega + \sqrt{2} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \delta} + \frac{1}{\omega + \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \delta} \\
&> \frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{\omega + \sqrt{2} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) 2.22} + \frac{1}{\omega + \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) 2.22}
\end{aligned}$$

A função  $f(\omega) = \frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{\omega + \sqrt{2}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2.22}} + \frac{1}{\omega + \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2.22}}$  atinge o mínimo em  $\bar{\omega} \approx 0.05495356$ , se  $\omega \geq 0$ , e  $f(\bar{\omega}) \approx 0.3297448 > 0.3297$ .

Seja  $\mathcal{A}_2$  a ação de uma órbita kepleriana colinear com velocidade inicial nula e que colide no tempo  $t = 1$ . Então pelo lema 2.1,  $\mathcal{A}_2 = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi^2}{2}\right)^{1/3}$ . Logo do teorema 2.1,

$$\begin{aligned} \frac{1}{12}\mathcal{A}(x) &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2}|\dot{x}_2|^2 + \frac{1}{2}|\dot{x}_3|^2 + \frac{1}{r_{23}} \right) dt + \int_0^1 \left( \frac{1}{2}|\dot{x}_1|^2 + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} \right) dt \\ &\geq \mathcal{A}_2 + \int_0^1 \left( \frac{1}{2}|\dot{x}_1|^2 + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} \right) dt \\ &> 2.55376 + 0.32397 = 2.87773. \end{aligned}$$

Assim para qualquer  $x \in \mathcal{X}_{0,C}$ .

$$\frac{1}{12}\mathcal{A}(x) > 2.87$$

■

**Corolário 3.1** Para qualquer  $T > 0$ ,  $\frac{1}{12}\mathcal{A}(x) = \int_0^T L(x, \dot{x}) dt > 2.87T^{1/3}$  para qualquer  $x \in \mathcal{X}_{0,C}$ .

**Demonstração.** De fato, seja  $y \in H^1([0, T], V)$ . Assim temos que  $y(tT) \in H^1([0, 1], V)$ . Portanto, sendo  $T^{-2/3}y(tT) = \tilde{y}(t)$  temos que:

$$T^{-\frac{1}{3}} \int_0^T L(y, \dot{y}) dt = \int_0^1 L(\tilde{y}, \dot{\tilde{y}}) dt > 2.87$$

Com efeito, sendo  $\tilde{r}_{ij} = \frac{1}{|\tilde{y}_i - \tilde{y}_j|}$  temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( |\dot{\tilde{y}}(t)|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{1}{\tilde{r}_{ij}(t)} \right) dt &= T^{2/3} \int_0^1 \left( |\dot{y}(tT)|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{1}{r_{ij}(tT)} \right) dt \\ &= T^{-1/3} \int_0^T \left( |\dot{y}(t)|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{1}{r_{ij}(t)} \right) dt \end{aligned}$$

onde  $r_{ij}(t) = \frac{1}{|y_i(t) - y_j(t)|}$ .

■

**Lema 3.3** Existe um caminho  $x \in \mathcal{X}_0$  com  $\frac{1}{12}\mathcal{A}(x) < 2.64T^{1/3}$ .

**Demonstração.** Considere a coleção de caminhos permanendo na **shape esfera**  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0$  os quais se movem de  $E_3$  para  $M_1$  com velocidade constante ao longo do grande círculo  $\{\phi =$

$\arctan(2\operatorname{sen}\theta)\}$ . Em particular em  $\mathcal{I} = 1$  a energia potencial no grande círculo  $\{\phi = \arctan(2\operatorname{sen}\theta)\}$  é dada por:

$$U(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+4\operatorname{sen}^2\theta}}}} + \frac{1}{1 + \frac{\cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}{\sqrt{1+4\operatorname{sen}^2\theta}}} + \frac{1}{1 + \frac{\cos(\theta + \frac{4\pi}{3})}{\sqrt{1+4\operatorname{sen}^2\theta}}}$$

pois  $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+4\operatorname{sen}^2\theta}}$ . A função  $U(\theta)$  atinge um valor máximo  $\kappa(\approx 3.535734) < 3.536$  em  $[0, \frac{\pi}{3}]$ . Seja  $x^{(\mathcal{I}_0)} \in \mathcal{X}_0$  um caminho em  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0$  que move-se de  $E_3(\phi = \theta = 0)$  para  $M_1(\phi = \theta = \pi/3)$  com velocidade constante. Seja  $\eta$  o comprimento do caminho  $x^{(1)}$  (como um caminho na esfera padrão de raio  $\frac{1}{2}$  com a métrica padrão). É fácil ver que

$$\eta = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} (\approx 0.65905804) < 0.66.$$

A ação de  $x^{(\mathcal{I}_0)}$  satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{12} \mathcal{A}(x) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\eta \sqrt{\mathcal{I}_0}}{T} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{\mathcal{I}_0}} U(\theta(t)) \right] dt < \frac{1}{2} \left( \frac{\eta^2 \mathcal{I}_0}{T} \right) + \frac{\kappa T}{\sqrt{\mathcal{I}_0}}.$$

Se  $g(\mathcal{I}_0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\eta^2 \mathcal{I}_0}{T} \right) + \frac{\kappa T}{\sqrt{\mathcal{I}_0}}$  temos que  $g$  atinge um mínimo se sobre o intervalo  $(0, +\infty)$  e tal mínimo é dado por  $\mathcal{I}_0 = \left( \frac{\kappa T^2}{\eta^2} \right)^{2/3}$ . Desta forma, para este  $\mathcal{I}_0$  obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \mathcal{A}(x) &< \frac{1}{2} \left( \frac{\eta^2}{T} \right) \left( \frac{\kappa T^2}{\eta^2} \right)^{2/3} + \kappa T \left( \frac{\kappa T^2}{\eta^2} \right)^{-1/3} \\ &= \frac{3}{2} (\kappa \eta)^{2/3} T^{1/3} (\approx 2.636494 T^{1/3}) \\ &< 2.64 T^{1/3}. \blacksquare \end{aligned}$$

**Observação 3.1** Pelo corolário 3.1  $\frac{1}{12} \mathcal{A}(x) < 2.87 T^{1/3}$  para qualquer  $x \in \mathcal{X}_{0,C}$ ;

**Observação 3.2** Pelo lema 3.3  $\frac{1}{12} \mathcal{A}(x) < 2.64 T^{1/3}$  para algum  $x \in \mathcal{X}_0$ .

Pelas observações anteriores temos que :

$$\inf_{x \in \mathcal{X}_0} \mathcal{A}(x) < \inf_{x \in \mathcal{X}_{0,C}} \mathcal{A}(x).$$

Ou seja um minimizante do funcional ação em  $\mathcal{X}_0$  não possui colisão.

# Capítulo 4

## Cálculo variacional aplicado ao problema dos quatro corpos

### 4.1 O problema paralelogramo dos quatros corpos

O problema paralelogramo dos quatros corpos é o problema planar dos quatros corpos cuja configuração permaneça um paralelogramo para todo tempo. Supondo uma simetria nas massas  $m_1 = m_3 = 1$  e  $m_2 = m_4 = \mu$  com as condições iniciais

$$\begin{cases} x_1(0) = -x_3(0), & \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_3(0) \\ x_2(0) = -x_4(0), & \dot{x}_2(0) = -\dot{x}_4(0) \end{cases}, \quad (4.1)$$

as condições iniciais são invariantes pela simetria :  $\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_3, -x_4, -x_2, -x_1)$ .

De fato,

$$\sigma \cdot (x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (-x_3(0), -x_4(0), -x_2(0), -x_1(0)) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0))$$

$$\sigma \cdot (\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0), \dot{x}_3(0), \dot{x}_4(0)) = (-\dot{x}_3(0), -\dot{x}_4(0), -\dot{x}_2(0), -\dot{x}_1(0)) = (\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0), \dot{x}_3(0), \dot{x}_4(0)).$$

O problema dos quatros corpos com massas  $m_1 = m_3 = 1$  e  $m_2 = m_4 = \mu$ , pode ser escrito como o seguinte sistema

$$\begin{cases} \ddot{x}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} U(x), & x_k \in \mathbb{R}^2, & k = 1, 3, \\ \mu \ddot{x}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} U(x), & x_k \in \mathbb{R}^2, & k = 2, 4, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde

$$U(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |x_i - x_j|.$$

**Lema 4.1** *Suponha que  $\dot{x} = f(x)$  admite uma  $\varphi$ -simetria (ou seja,  $\varphi \circ f = f \circ \varphi$ ). Se  $x(t)$  é uma solução para  $\dot{x} = f(x)$ , então  $y(t) = \varphi(x(t))$  também é solução.*

**Demonstração.** Temos que

$$\dot{y}(t) = \varphi \dot{x}(t) = \varphi \circ f(x(t)) = f(\varphi(x(t))) = f(y(t)).$$

■

Seja  $F(x) = \frac{\partial}{\partial x} U(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Então  $F$  é  $\sigma$  invariante, pois

$$\begin{aligned} F(\sigma \cdot x) &= F(-x_3, -x_4, -x_1, -x_2) \\ &= \left( -\frac{\partial}{\partial x_3} U(x), -\frac{\partial}{\partial x_4} U(x), -\frac{\partial}{\partial x_1} U(x), -\frac{\partial}{\partial x_2} U(x) \right) \\ &= \sigma \cdot F(x). \end{aligned}$$

Assim pelo lema 4.1 temos que se  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$  é solução para (4.2) então  $\sigma \cdot x(t) = (-x_3(t), -x_4(t), -x_1(t), -x_2(t))$  também é solução para (4.2). Logo por (4.1) e pelo teorema de Picard (existência e unicidade) temos que  $x_1(t) = -x_3(t)$ ,  $x_2(t) = -x_4(t)$  para todo  $t$  onde não ocorre colisão. Isto resulta no problema paralelogramo dos quatro corpos.

Note que o sistema (4.2) tem o mesmo número de graus de liberdade do problema planar dos três corpos. Podemos então, como no problema planar dos três corpos, fazer uma mudança de coordenadas tipo-Jacobi para parametrizar o espaço de configuração e por meio da fibração de Hopf, teremos um espaço 3-dimensional das configurações reduzidas. Nestes caso cada ponto da esfera, do mesmo modo como no problema planar dos três corpos, representará uma classe de paralelogramos similares. É o que veremos agora.

### 4.1.1 O espaço de configurações reduzidas

Vamos considerar o problema paralelogramo dos quatro corpos no caso em que  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$ . Logo a equação de movimento é dada por

$$\ddot{x}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} U(x), \quad \forall k = 1, 2, 3, 4, \quad (4.3)$$

onde  $x_k \in \mathbb{R}^2$  é a posição de  $m_k$ . Assim a energia potencial pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{14}} + \frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{24}} + \frac{1}{r_{34}} \\ &= \frac{2}{r_{12}} + \frac{2}{r_{14}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{14}}, \end{aligned}$$

ou seja

$$U(x) = \frac{2}{|x_1 - x_2|} + \frac{2}{|x_1 + x_2|} + \frac{1}{2|x_1|} + \frac{1}{2|x_2|}. \quad (4.4)$$

Seja a ação funcional

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^{\bar{T}} \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt \quad (4.5)$$

em  $H^1([0, \bar{T}], V)$ , onde  $V$  é o espaço de configurações quadrimensional definido por

$$V := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in (\mathbb{R}^2)^4 : x_1 = -x_3, x_2 = -x_4\}.$$

**Observação 4.1** Note que a equação (4.3) é justamente a equação de Euler-Lagrange do funcional ação definido em (4.5).

Considere agora, as seguintes coordenadas tipo-Jacobi:

$$(z_1, z_2) := (x_2 - x_1, -(x_2 + x_1)) \in \mathbb{C}^2. \quad (4.6)$$

Fazendo a composição com a fibração de Hopf como no capítulo anterior, temos:

$$(z_1, z_2) \mapsto (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2) := (u_1, u_2 + iu_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}. \quad (4.7)$$

Este quociente identifica as coordenadas a menos de rotações. O conjunto de nível  $\mathcal{S}^{-1}(c)$ ,  $c > 0$ , do momento de inércia  $\mathcal{I}(x) = x \cdot x$  é uma 3-esfera ( $S^3$ ) e é mapeada sobre uma 2-esfera ( $S^2$ ) por meio da fibração de Hopf. O movimento pode ser mais facilmente visualizado fazendo uso de coordenadas esféricas

$$(u_1, u_2, u_3) = (r^2 \cos \phi \cos \theta, r^2 \cos \phi \sin \theta, r^2 \sin \phi), \quad (4.8)$$

projetando sobre a shape esfera unitária  $r = 1$ . O espaço de configuração tridimensional  $V/SO(2)$  é o espaço de configuração reduzido. A projeção do caminho  $x \in H^1([0, \bar{T}], V)$  em  $H^1([0, \bar{T}], V/SO(2))$  por meio de (4.6)-(4.8) é chamado de *caminho reduzido* de  $x$ .

As seguintes observações descreve as relações entre os pontos da shape esfera unitária e as configurações dos quatro corpos:

- $u_1 = 0$  ( $\theta = \frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{2}$ ) se, e somente se, a configuração é um losângulo. De fato, note que  $z_1 = x_2 - x_1 = x_3 - x_4$  e  $z_2 = x_4 - x_1 = x_3 - x_2$ . Se  $u_1 = 0$  então  $|z_1| = |z_2|$ , ou seja o quadrilátero formado é possui os quatro lados iguais. Portanto representa um losângulo.

- $u_2 = 0$  ( $\theta = 0$  ou  $\pi$ ) se e somente se a configuração é retangular. Com efeito,  $u_2 = 0$  então  $Re(\bar{z}_1 z_2) = 0$ . Mas  $Re(\bar{z}_1 z_2) = \langle z_1, z_2 \rangle = 0$  ou seja  $z_1 \perp z_2$ . Portanto a configuração é retangular.
- $u_3 = 0$  ( $\phi = 0$ ) se e somente se a configuração é colinear. De fato,  $u_3 = Im(\bar{z}_1 z_2) = z_1 \times z_2 = 0$ , ou seja  $z_1 = az_2$ . Assim  $x_1, x_2, x_3, x_4$  estão em uma mesma reta. Logo a configuração é colinear.
- No pólo norte ou no pólo sul ( $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ ) a configuração é um quadrado. Com efeito, se  $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $u_1 = u_2 = 0$ . Ou seja  $|z_1| = |z_2|$  e  $z_1 \perp z_2$ , logo a configuração é um quadrado.
- $(u_1, u_2, u_3) = (1, 0, 0)$  corresponde a colisão entre  $m_1, m_4$  e  $m_2, m_3$ ;  $(u_1, u_2, u_3) = (-1, 0, 0)$  corresponde a colisão entre  $m_1, m_2$  e  $m_3, m_4$
- $(u_1, u_2, u_3) = (0, 1, 0)$  corresponde a colisão entre  $m_2, m_4$ ;  $(u_1, u_2, u_3) = (0, -1, 0)$  corresponde a colisão entre  $m_1, m_3$ ;

Vejamos agora algumas notações que serão usadas no decorrer deste capítulo.

### Notações :

$$\mathcal{L} := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V : \text{configuração de } x \text{ é colinear}\}$$

$$\mathcal{D} := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V : \text{configuração de } x \text{ é losango}\}$$

$$\mathcal{R} := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V : \text{configuração de } x \text{ é retangular}\}$$

$$\mathcal{Q} := \mathcal{D} \cap \mathcal{R}, \quad \mathcal{C}_2 := \mathcal{D} \cap \mathcal{L}, \quad \mathcal{C}_{22} := \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$$

Para lembrar mais facilmente as notações,  $\mathcal{L}$  se relaciona com linha,  $\mathcal{D}$  diamante (que lembra a configuração do tipo losango),  $\mathcal{Q}$  quadrado,  $\mathcal{C}_2$  colisão dupla,  $\mathcal{C}_{22}$  colisão simultânea dupla.

A energia cinética pode ser expressada como a soma de dois termos não negativos:  $K = K_{red} + K_{rot}$  (Esta é decomposição de Saari da velocidade).  $K_{red}$  corresponde a métrica Riemanniana do espaço quociente  $V/SO(2)$  induzida pela métrica  $K$  em  $V$ .  $K_{rot} = \frac{|\omega|^2}{\mathcal{I}}$  com  $\omega$  momento angular (ver [6]).

O problema variacional de encontrar minimizantes de (4.5) pode ser reduzido a encontrar minimizantes do *funcional ação reduzido*

$$\mathcal{A}_{red}(x) = \int_0^{\bar{T}} [K_{red}(x) + U(x)] dt, \quad (4.9)$$

onde  $K_{red}(x) = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - \frac{|\omega|^2}{2\mathcal{I}}$ . De fato, seja  $\alpha$  uma curva em  $SO(2)$ , então a  $\alpha \cdot x$  ainda pertence a  $\mathcal{X} = H^1([0, T], V)$ . A curva  $\alpha$  pode ser escolhida de forma que o novo caminho  $\alpha \cdot x$  tenha momento angular nulo.

### 4.1.2 Propriedades de $U(\theta, \phi)$ restrito a shape esfera unitária

Mostraremos algumas propriedades básicas do potencial  $U$  restrito a shape esfera .

**Lema 4.2** *A energia potencial  $U = U(\theta, \phi)$  restrito a  $\mathcal{I} = 1$  é dada por*

$$U(\theta, \phi) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \cos\phi \cos\theta}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos\phi \cos\theta}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos\phi \sin\theta}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos\phi \sin\theta}}. \quad (4.10)$$

**Demonstração.** Inicialmente, observe que:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x) &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 4|z_1|^2|z_2|^2 - 4|z_1|^2|z_2|^2 \\ &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}. \end{aligned}$$

Assim, por (4.8)

$$r_{12}^2 = |x_1 - x_2|^2 = |z_1|^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} + u_1) = \frac{r^2}{2}(1 + \cos\phi \cos\theta),$$

$$r_{14}^2 = |x_1 + x_2|^2 = |z_2|^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} - u_1) = \frac{r^2}{2}(1 - \cos\phi \cos\theta).$$

Note que  $\langle z_1, z_2 \rangle = \frac{1}{2}u_2$ , portanto

$$r_{13}^2 = 2|x_1|^2 = |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + u_2 = \frac{r^2}{2}(1 + \cos\phi \cos\theta),$$

$$r_{23}^2 = 2|x_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - u_2 = \frac{r^2}{2}(1 - \cos\phi \cos\theta).$$

Logo substituindo  $r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}$  em (4.4) encontramos (4.10) ■

**Lema 4.3** A função  $U(\theta, \phi)$  satisfaz as seguintes condições :

- (a)  $U(0, \phi) \geq U(\frac{\pi}{2}, \phi)$  para todo  $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . A igualdade é verdadeira apenas para  $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$  (onde  $U = 4\sqrt{2} + 2$ ) e  $\phi = 0$  ( $U = +\infty$ ).
- (b) Para qualquer  $\theta \in [0, 2\pi]$  fixado,  $U(\theta, \phi)$  é estritamente decrescente se  $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ , e estritamente crescente se  $\phi \in (0, -\frac{\pi}{2})$ .
- (c) Existe  $M > 0$  suficientemente grande tal que, para alguma curva de nível  $U^{-1}(c)$  com  $c > M$  em  $\{\theta, \phi \in (0, \frac{\pi}{2})\}$ , a função  $\phi = \phi(\theta)$  implicitamente definida por (4.10) satisfazendo  $\frac{d\phi}{d\theta} > 0$ .

**Demonstração.** (a) Vamos calcular  $U(0, \phi)$  e  $U(\frac{\pi}{2}, \phi)$ :

$$U(0, \phi) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos\phi}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\phi}} + 2; \quad (4.11)$$

$$U(\frac{\pi}{2}, \phi) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos\phi}} + \frac{1}{\sqrt{1-\cos\phi}} + 4\sqrt{2}. \quad (4.12)$$

e claro que (4.11)  $\geq$  (4.12) qualquer que seja  $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(b) Fixando  $\theta$  temos que

$$\frac{dU}{d\phi} = \frac{\sqrt{2}\sin\phi\cos\theta}{(1+\cos\phi\cos\theta)^{3/2}} - \frac{\sqrt{2}\sin\phi\cos\theta}{(1-\cos\phi\cos\theta)^{3/2}} + \frac{1}{2} \frac{\sin\phi\sin\theta}{(1+\cos\phi\sin\theta)^{3/2}} - \frac{1}{2} \frac{\sin\phi\sin\theta}{(1-\cos\phi\sin\theta)^{3/2}}.$$

Note que para qualquer  $\theta \in [0, 2\pi]$  fixado e para qualquer  $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$  temos:

$$\frac{\sqrt{2}\sin\phi\cos\theta}{(1+\cos\phi\cos\theta)^{3/2}} < \frac{\sqrt{2}\sin\phi\cos\theta}{(1-\cos\phi\cos\theta)^{3/2}};$$

$$\frac{1}{2} \frac{\sin\phi\sin\theta}{(1+\cos\phi\sin\theta)^{3/2}} < \frac{1}{2} \frac{\sin\phi\sin\theta}{(1-\cos\phi\sin\theta)^{3/2}}.$$

Ou seja  $\frac{dU}{d\phi} < 0$  para todo  $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Portanto  $U(\theta, \phi)$  é decrescente fixando  $\theta$  e para todo  $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

De forma análoga, observe que para qualquer  $\theta \in [0, 2\pi]$  fixado e para qualquer  $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$  temos:

$$\frac{\sqrt{2}\sin\phi\cos\theta}{(1+\cos\phi\cos\theta)^{3/2}} > \frac{\sqrt{2}\sin\phi\cos\theta}{(1-\cos\phi\cos\theta)^{3/2}};$$

$$\frac{1}{2} \frac{\sin\phi\sin\theta}{(1+\cos\phi\sin\theta)^{3/2}} > \frac{1}{2} \frac{\sin\phi\sin\theta}{(1-\cos\phi\sin\theta)^{3/2}}.$$

Ou seja  $\frac{dU}{d\phi} > 0$  para todo  $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ . Portanto  $U(\theta, \phi)$  é crescente fixando  $\theta$  e para todo  $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

## 4.2 Um problema de minimização

### 4.2.1 Existência de minimizantes

Seja  $\mathcal{X} = H^1(S_{\bar{T}}, V)$ ,  $S_{\bar{T}} = [0, \bar{T}] / \{0, \bar{T}\}$  e  $\bar{T} = 8T$ . Os caminhos em  $\mathcal{X}$  são definidos sobre  $\mathbb{R}$  por extensões periódicas. Seja  $\mathcal{X}_0$  os caminhos em  $\mathcal{X}$ , os quais começam com uma configuração quadrada e tem configuração colinear em  $t = T$ , e seja  $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$  a coleção de caminhos em  $\mathcal{X}$  que tem uma configuração losango para todo tempo, isto é,

$$\mathcal{X}_0 := \{x \in \mathcal{X} : x(0) \in \mathcal{Q}, x(T) \in \mathcal{L}\} \quad (4.13)$$

$$\mathcal{X}_{\mathcal{D}} := \{x \in \mathcal{X}_0 : x(t) \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}} \ \forall t\}. \quad (4.14)$$

Estudaremos nesta seção a existência e algumas propriedades dos minimizantes do funcional ação  $\mathcal{A}$  em (4.5) restrito a  $\mathcal{X}_0$  ou  $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$ .

Seja  $G$  um grupo gerado por dois símbolos  $\sigma, \tau$  com as seguintes relações :

$$G := \langle \sigma, \tau : \sigma^4 = \tau^4 = \tau\sigma\tau\sigma = \tau\sigma^2\tau^3\sigma^2 = \tau\sigma^3\tau\sigma^3 = 1 \rangle.$$

Cada elemento em  $G$  pode ser expressado unicamente na forma  $\sigma^i\tau^j$   $i, j = 0, 1, 2, 3$ , e além disso  $|G| = 16$ . Considere a representação  $\rho : G \rightarrow GL(\mathcal{X})$  definida por

$$\begin{aligned} & \rho(\sigma)(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)) \\ &= (A(x_2(-t)), A(x_3(-t)), a(x_4(-t)), A(x_1(-t))), \\ & \rho(\tau)(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)) \\ &= (B(x_4(t+2T)), (B(x_1(t+2T)), (B(x_2(t+2T)), (B(x_3(t+2T))), \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Note que a norma de Sobolev, isto é, a norma  $\|\cdot\|_{H^1}$  e consequentemente a ação  $\mathcal{A}$  são preservados por essa ação restringindo a funções periódicas em  $[0, 8T]$ . De fato, basta notar  $|(x_1, x_2, x_3, x_4)| = |(x_i, x_j, x_k, x_m)|$ ,  $k, i, j, m = 1, 2, 3, 4$  onde  $k, j, i, m$  são distintos. Portanto, tal representação é ortogonal. Definamos agora o espaço de elementos  $\rho$ -invariante  $\mathcal{X}_0^{\rho}$  de  $\mathcal{X}_0$  como:

$$\mathcal{X}_0^{\rho} := \{x \in \mathcal{X}_0 : \rho(g)x = x \ \forall g \in G\}. \quad (4.16)$$

Da mesma maneira definimos  $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}^{\rho}$ :

$$\mathcal{X}_{\mathcal{D}}^{\rho} := \{x \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}} : \rho(g)x = x \ \forall g \in G\}. \quad (4.17)$$

Um elemento  $x \in \mathcal{X}_0^p$  e um elemento  $x \in \mathcal{X}_0^p$  satisfazem:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4)(t) &= \rho(\sigma^2)(x_1, x_2, x_3, x_4)(t) = -(x_3, x_4, x_1, x_2)(t) \\ (x_1, x_2, x_3, x_4)(t) &= \rho(\tau^2)(x_1, x_2, x_3, x_4)(t) = (x_3, x_4, x_1, x_2)(t + 4T) \end{aligned} \quad (4.18)$$

### Comentários:

- A primeira identidade em (4.18) afirma que a configuração formada pelos corpos é um paralelogramo.
- Segue de (4.18) que  $x_1(0) = x_3(0) = x_1(4T) = x_3(4T)$  e que  $x_2(0) = x_4(0) = x_2(4T) = x_4(4T)$ , ou sejam,  $x_1$  e  $x_3$  estão situadas em uma curva fechada e  $x_2$  e  $x_4$  estão situadas em outra.
- As curvas onde estão situadas  $x_1, x_3$  e  $x_2, x_4$  são ortogonais. Com efeito, sendo  $x_j(t) = a_j(t) + ib_j(t)$  temos por (4.15) que  $x_1(t) = -b_2(-t) + ia(-t)$  e assim  $\langle \dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0) \rangle = 0$

Observe que se  $x \in \mathcal{X}_0^p$  então

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt = 8 \int_0^T \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt.$$

De fato, como  $\rho(\tau^2)x = x$  e a norma de Sobolev é preservada por essa, fazendo  $s = t - 4T$  temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{8T} \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt &= \int_0^{4T} \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt + \int_{4T}^{8T} \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt \\ &= 2 \int_0^{4T} \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt. \end{aligned}$$

Como  $\rho(\tau)x = x$ , fazendo  $s = t - 2T$  temos

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{4T} \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt &= 2 \left( \int_0^{2T} \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt + \int_{2T}^{4T} \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt \right) \\ &= 4 \int_0^{2T} \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt \end{aligned}$$

Agora usando que  $\rho(\tau\sigma)x = x$  e fazendo  $s = -t + 2T$  temos

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{2T} \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt &= 4 \left( \int_0^T \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt + \int_T^{2T} \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt \right) \\ &= 8 \int_0^T \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt. \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt = 8 \int_0^T \left[ \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt.$$

**Proposição 4.1**  *$\mathcal{A}$  atinge o mínimo em  $\mathcal{X}_0^{\mathbb{P}}$  e  $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}^{\mathbb{P}}$ . Além disso, qualquer minimizante  $x \in \mathcal{X}_0^{\mathbb{P}}$  (ou  $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}^{\mathbb{P}}$ ) é um ponto crítico de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0$  (ou  $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$ ), e é solução de (4.3) desde que  $x(t) \in V \setminus \Delta$ .*

**Demonstração.** Se  $x \in \mathcal{X}_0^{\mathbb{P}}$  é um minimizante de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0^{\mathbb{P}}$ , então pelo Teorema 1.8  $x$  é um ponto crítico de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0$ . Para todo  $x \in \mathcal{X}_0$ , a vizinhança  $\Lambda_\varepsilon$  do está contida em  $\mathcal{X}_0$ . Então pelo Corolário 1.1,  $x(t)$  é solução de (4.3) desde que  $x(t) \in V \setminus \Delta$ .

O que precisamos mostrar para concluir a demonstração é mostrar a existência de um minimizante  $x \in \mathcal{X}_0^{\mathbb{P}}$ . Como o mergulho  $H^1 \hookrightarrow C^0$  é compacto,  $x \in \mathcal{X}_0^{\mathbb{P}}$  é fracamente fechado em  $\mathcal{X}$ . Além disso, como  $x \in \mathcal{X}_0^{\mathbb{P}}$ , então vale (4.18) e portanto  $x(t) = -x(t + \frac{\bar{T}}{2})$ . Pelo corolário 1.2, o espaço  $\mathcal{X}_0^{\mathbb{P}}$  satisfaz a condição  $(NC)_2$ . Conseqüentemente, pelo Teorema 1.10, a ação  $\mathcal{A}$  é coerciva e atinge o mínimo em  $\mathcal{X}_0^{\mathbb{P}}$ . ■

## 4.2.2 A existência de minimizantes

**Lema 4.4** (a) *Um minimizante de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0^{\mathbb{P}}$  tem momento angular nulo;*

(b) *Um minimizante de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0^{\mathbb{P}}$  também é um minimizante de  $\mathcal{A}_{red}$  em  $\mathcal{X}_0$ , e para todo minimizante  $x \in \mathcal{A}_{red}$  em  $\mathcal{X}_0$  existe um caminho correspondente  $\alpha : [0, T] \longrightarrow SO(2)$  tal que  $\alpha \cdot x$  minimiza  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0$ .*

**Demonstração.**

(a) As condições de fronteira de  $x \in \mathcal{X}_0$  são invariantes sobre a ação  $SO(2)$ . Então se  $x \in \mathcal{X}_0^{\mathbb{P}}$  é minimizante, escolha  $\beta : [0, T] \longrightarrow SO(2)$  apropriadamente tal que  $\beta \cdot x \in \mathcal{X}_0^{\mathbb{P}}$  tenha momento angular nulo. Assim de (4.9) temos que  $\beta \cdot x$  tem ação menor ou igual a  $\mathcal{A}(x)$ .

(b) Seja  $x$  um minimizante de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0^{\mathbb{P}}$ . Como a norma de Sobolev é invariante por rotação e usando (a), temos que o minimizante tem momento angular nulo  $x$  é um minimizante de  $\mathcal{A}_{red}$  em  $\mathcal{X}_0$ . E assim seja  $\alpha : [0, T] \longrightarrow SO(2)$ , tal  $\alpha \cdot x$  tenha momento angular nulo. Logo de (4.9) segue o resultado. ■

A última parte desta seção faremos uma descrição geométrica dos caminhos que minimizam a ação em  $\mathcal{X}_0^p$ . As descrições geométricas de caminhos em  $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$  que minimizam a ação será deixada para a próxima seção.

**Lema 4.5** *Qualquer minimizante de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0^p$  é perpendicular a  $\mathcal{Q}$  no tempo  $t = 0$  e perpendicular a  $\mathcal{L}$  no tempo  $t = T$ .*

*Qualquer minimizante de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}^p$  é perpendicular a  $\mathcal{Q}$  no tempo  $t = 0$  e perpendicular a  $\mathcal{L}$  no tempo  $t = T$ .*

**Demonstração.** Vamos considerar apenas  $\mathcal{A}|_{\mathcal{X}_0^p}$ . A prova para o outro caso é similar.

Escolha uma vizinhança da função nula em  $\mathcal{X}_0^p$  como o espaço das variações admissíveis. Temos que a primeira variação de Gâteaux é dada por:

$$\delta_x \mathcal{A}(h) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x, \dot{x}, t) \cdot h|_0^T + \int_0^T \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x, \dot{x}, t) \right] \cdot h dt. \quad (4.19)$$

Se  $x$  é um minimizante,  $\delta_x \mathcal{A}(h) = 0$  e satisfaz as equações de Euler-Lagrange. Portanto,

$$\dot{x}(T)h(T) - \dot{x}(0)h(0) = 0,$$

para toda variação admissível  $h$ . Seja  $h$  tal que  $h(T) = 0$  e  $h(0) \neq 0$ . Assim  $\dot{x}(0)h(0) = 0$ . Da mesma forma, escolhendo  $h$  convenientemente,  $\dot{x}(T)h(T) = 0$ . Mas a coleção  $\{h(0)\}$  gera  $\mathcal{L}$  e a coleção  $\{h(0)\}$  gera  $\mathcal{Q}$ , logo  $x(t)$  é perpendicular a  $\mathcal{L}$  em  $t = T$  e perpendicular a  $\mathcal{Q}$  em  $t = 0$ . ■

Se conseguirmos mostrar que um caminho minimizante da ação não sofre colisão, do lema 4.5 este caminho pode ser estendido diferenciavelmente a uma solução de (4.3)-(4.1) refletindo-o sobre  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{Q}$ . O resultado são curvas fechadas no espaço de configurações reduzidas e além disso a solução possui as mesmas configurações iniciais e mesmo tamanho em  $t = 4T$ . A existência de invariância sobre a ação  $\rho$  implica que a órbita é também fechada no plano inercial, e desse modo obtemos uma solução periódica.

A idéia de refletir a porção de um caminho sobre alguma variedade assim como a forma das órbitas minimizantes, é a chave para provar os próximos dois lemas.

Por conveniência, as seguintes notações serão usadas para os oito octantes no espaço de configuração reduzido:

$$\Delta_{ijk} := \{(u_1, u_2, u_3) : u_1 \in \mathbb{R}^i, u_2 \in \mathbb{R}^j, u_3 \in \mathbb{R}^k\},$$

onde  $i, j, k \in \{+, -\}$  e  $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ ,  $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0]$ .

**Lema 4.6** *Qualquer minimizante de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0^P$  tem seu caminho reduzido permanecendo dentro de um octante  $\Delta_{ijk}$  no espaço de configurações reduzidas, e ou ele permanece em  $\mathcal{D}$  para todo tempo ou permanece dentro de  $\text{int}(\Delta_{ijk})$  em  $[0, T]$ .*

**Demonstração.** Por simplicidade, usaremos a notação  $x$  para o caminho reduzido de  $x \in \mathcal{X}_0^P$  onde  $(r, \theta, \phi)$  são as coordenadas esféricas de  $x$  definidas em (4.8)-(4.6).

Pelo lema 4.3 temos que qualquer órbita permanecendo na fronteira de  $\Delta_{ijk}$  tem ação maior ou igual do que outra órbita permanecendo em  $\mathcal{D}$ . De fato basta notar que  $U(0, \phi) \geq U(\frac{\pi}{2}, \phi)$  e que  $U(\theta, 0) \geq U(\frac{\pi}{2}, \phi)$ . Pelo lema 4.4 é suficiente mostrar que nenhum caminho pode minimizar  $\mathcal{A}$  se o caminho reduzido do minimizante passar por dois octantes diferentes, ao menos que permaneça em  $\mathcal{D}$  para todo tempo.

Note que se  $x$  minimiza  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0^P$  e é tangente a uma das variedades invariantes  $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{D}$  exceto em  $\mathcal{C}_2$  ou  $\mathcal{C}_{22}$ , então ele permanece naquela variedade para todo tempo onde não ocorre colisão. Sem perda de generalidade, precisamos excluir os seguintes casos:

Caso 1: para algum  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < T$ ,

$$x(t_1), x(t_2) \in \mathcal{R} \setminus x \in \text{int}(\Delta_{ijk}) \text{ em } (t_1, t_2), x \in \Delta_{+++} \text{ em } (t_2, t_3].$$

Defina um novo caminho  $\tilde{x}$  no espaço de configuração com coordenadas esféricas  $(\tilde{r}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta})$  dadas por :

$$\begin{cases} \tilde{r} \equiv r, \\ \tilde{\phi} \equiv \phi, \\ \tilde{\theta}(t) = -\theta(t) \text{ em } (t_1, t_2) \text{ e igual } \theta(t) \text{ no restante} \end{cases}$$

Se  $x$  é um minimizante, então  $\alpha \cdot x = \tilde{x}$  é minimizante de  $\mathcal{A}_{red}$  em  $\mathcal{X}_0^P$ , onde  $\alpha: [0, T] \rightarrow SO(2)$  é definida por:

$$\begin{cases} I, & \text{se } t \in [0, t_1], \\ R_\pi, & \text{se } t \in (t_1, t_2), \\ I, & \text{se } t \in [t_2, T]. \end{cases}$$

Pelo lema 4.4  $\tilde{x}$  é um minimizante de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0^P$ . Mas  $\tilde{x}$  não é diferenciável em  $t = t_2$  e portanto não pode ser solução para (4.3), o que contradiz a proposição 4.1.

Caso 2: para algum  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < T$ ,

$$x(t_1), x(t_2) \in \mathcal{D} \setminus x \in \text{int}(\Delta_{-++}) \text{ em } (t_1, t_2), x \in \Delta_{+++} \text{ em } (t_2, t_3].$$

Defina um novo caminho  $\tilde{x}$  tal que  $\alpha \cdot x = \tilde{x}$ . Se  $x$  é um minimizante, então  $\alpha \cdot x = \tilde{x}$  é minimizante de  $\mathcal{A}_{red}$  em  $\mathcal{X}_0^p$ , onde  $\alpha : [0, T] \longrightarrow SO(2)$  é definida por:

$$\begin{cases} I, & \text{se } t \in [0, t_1], \\ R_\pi, & \text{se } t \in (t_1, t_2), \\ I, & \text{se } t \in [t_2, T]. \end{cases}$$

Pelo lema 4.4  $\tilde{x}$  é um minimizante de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0^p$ . Mas  $\tilde{x}$  não é diferenciável em  $t = t_2$  e portanto não pode ser solução para (4.3), o que contradiz a proposição 4.1.

Caso 3: para algum  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < T$ ,

$$x(t_2), x(t_3) \in \mathcal{L} \setminus (\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_{22}), x \in \text{int}(\Delta_{+++}) \text{ em } [t_1, t_2], x \in \text{int}(\Delta_{++-}) \text{ em } (t_2, t_3).$$

Defina um novo caminho  $\tilde{x}$  no espaço de configuração com coordenadas esféricas  $(\tilde{r}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta})$  dadas por :

$$\begin{cases} \tilde{r} \equiv r, \\ \tilde{\phi} \equiv \phi, \\ \tilde{\theta}(t) = -\theta(t) \text{ em } (t_2, t_3) \text{ e igual } \theta(t) \text{ no restante} \end{cases}$$

Se  $x$  é um minimizante, então  $\alpha \cdot x = \tilde{x}$  é minimizante de  $\mathcal{A}_{red}$  em  $\mathcal{X}_0^p$ , onde  $\alpha : [0, T] \longrightarrow SO(2)$  é definida por:

$$\begin{cases} I, & \text{se } t \in [0, t_2], \\ R_\pi, & \text{se } t \in (t_2, t_3), \\ I, & \text{se } t \in [t_3, T]. \end{cases}$$

Pelo lema 4.4  $\tilde{x}$  é um minimizante de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0^p$ . Mas  $\tilde{x}$  não é diferenciável em  $t = t_2$  e portanto não pode ser solução para (4.3), o que contradiz a proposição 4.1.

Caso 4: para algum  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq T$ ,

$$x(t_1), x(t_2) \in \mathcal{C}_{22}, x \in \Delta_{+++} \setminus \mathcal{C}_{22} \text{ em } [t_1, t_2) \cup (t_2, t_3], \phi(t_1) = \phi(t_3).$$

Defina um novo caminho  $\tilde{x}$  no espaço de configuração com coordenadas esféricas  $(\tilde{r}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta})$  dadas por :

$$\begin{cases} \tilde{r} \equiv r, \\ \tilde{\theta} \equiv \theta, \\ \tilde{\phi}(t) = 2\phi(t_1) - \phi(t) \text{ em } (t_1, t_3) \text{ e igual a } \theta(t) \text{ no restante} \end{cases}$$

Sem perda de generalidade, vamos escolher  $t_1$  e  $t_3$  suficientemente próximos de  $t_2$ . O novo caminho  $\tilde{x}$  tem ação menor que o caminho  $x$ , pois  $x$  possui colisão em  $t_2$  e  $\tilde{x}$  não possui colisão, o que contradiz o fato que  $x$  é minimizante. ■

**Lema 4.7** *Se  $x$  é um minimizante de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{X}_0^p$ , então  $\phi$  é monótona.*

**Demonstração.** Do lema anterior, é suficiente considerar o caso em que  $x \in \Delta_{+++}$ . Suponha que  $\phi(t)$  não é decrescente em  $[0, T]$ , então para algum  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < T$ ,

$$0 < \phi(t_1) = \phi(t_2) \text{ em } (t_1, t_2).$$

Como na lema anterior, considere  $\tilde{x}$  definido por

$$\begin{cases} \tilde{r} \equiv r, \\ \tilde{\theta} \equiv \theta, \\ \tilde{\phi}(t) = 2\phi(t_1) - \phi(t) \text{ em } (t_1, t_3) \text{ e igual a } \theta(t) \text{ no restante} \end{cases} .$$

Escolhemos  $t_1$  e  $t_2$  de tal forma que o caminho refletido continue em  $\Delta_{+++}$ . O lema então segue utilizando os mesmos argumentos do lema anterior e do lema 4.3. ■

# Referências Bibliográficas

- [1] ARNOLD, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [2] BRÉZIS, H. *Análisis funcional*. Alianza, Madrid (1984).
- [3] CABRAL, H. E., VIDAL, C. *Introdução à mecânica celeste*. Recife, 1999.(Notas de Curso)
- [4] CHEN, K. C., Action minimizing orbits in the parallelogram four-body problem with equal masses, *Arch. Ration. Mech. and Anal.*
- [5] CHEN, K. C., On Chenciner-Montgomery's orbit in the three-body problem, *Disc. Cont. Dynam. Systems* 7(2001), no.1, 85-90.
- [6] CHENCINER, A., MONTGOMERY, R. A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses *Annals of Math.* 152 (2000), 881-901.
- [7] DUGUNDJI, J. *Topology*, Allyn and Bacon, INC, Boston, 1966.
- [8] EULER, L. *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentum*. [S. l.: s. n.], 1767.(Novi Comm. acad. Imp. Petrop.).
- [9] GORDON, W. A minimizing property of Keplerian orbits. *Amer. J. Math.* 99.(1977), 961-971
- [10] HOFFMAN, K., KUNZE, R. *Álgebra linear*. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos, 1979.
- [11] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Willey, NY, (1978).

- 
- [12] LAGRANGE, J. L. *"Essais sur le problem des trois corps*. Paris, 1772
- [13] LYONS, D. W. An Elementary Introduction to the Hopf Fibration *Mathematics Magazine*. Vol 76, no.2, April 2003. Paris, 1772.
- [14] MEYER, K. R., HALL, G. R. *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the n-body problem*. New York: Springer-Verlag, 1992. ( Applied mathematical science; v. 90).
- [15] MOECKEL, R. Some qualitative features of the three-body problem. *Comtempory Math*. Vol, 81, (1988), 363-376.
- [16] PALAIS, R. The principle of symmetric criticalite *Comm. Math. Phys.* 69(1979), no. 1, 19-30.
- [17] REED, M. C., SIMON, B. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I: Functional Analysis*, Academic Press (1972), (Russian Translation 1976)
- [18] SIEGEL, C. L., MOSER, J. K. *Lectures on celestial mechamics*. New York: Springer-Verlag, 1971.
- [19] SIMÓ, C. New families of solutions in N-body problem *Proceedins of to ECM 2000* .
- [20] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. (Projeto Euclides).
- [21] VIDAL, C. *Curso de equações diferenciais ordinárias*. Recife, 2004. (Notas de curso).