

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Pós-Graduação em Matemática

**O TEOREMA DO H -COBORDISMO E A
CONJECTURA GENERALIZADA DE
POINCARÉ**

Lord Livin Barrera Bocanegra

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Recife
25 de fevereiro de 2005

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Lord Livin Barrera Bocanegra

**O TEOREMA DO H -COBORDISMO E A CONJECTURA
GENERALIZADA DE POINCARÉ**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática do Departamento de Matemática da Univer-
sidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Orientador: *Eduardo Shirlippe Goes Leandro*

Recife
25 de fevereiro de 2005

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado:


Eduardo Shirlippe Góes Leandro, DMAT-UFPE
Orientador


Pedro Antonio Ontaneda Portal, DMAT-UFPE


Jean-Pierre Marco, DM - Universidade Paris VI

**O TEOREMA DO H-COBORDISMO
E A CONJECTURA GENERALIZADA
DE POINCARÉ**

Por
Lord Livin Barrera Bocanegra

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro - 2005



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Secretaria de Pós-Graduação

50670-901 Cidade Universitária - Recife/PE - Fone (5581) 2126-8415- Fax (5581) 2126-8410
posgrad@dmat.ufpe.br

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO REALIZADA NO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DO CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA
NATUREZA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Aos vinte e cinco dias do mês de fevereiro de dois mil e cinco, às nove horas, no Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, em seção pública, teve início a defesa da dissertação, intitulada : *"O Teorema do H-Cobordismo e a Conjectura Generalizada de Poincaré"*, do aluno **Lord Livin Barrera Bocanegra**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. A Banca Examinadora, indicada pelo Colegiado da Pós-Graduação em Matemática e aprovada com "Ad-Referendum" pelas Câmaras de Pesquisa e Pós-Graduação da UFPE, foi composta pelos professores Eduardo Shirlippe Góes Leandro e Pedro Antonio Ontaneda Portal do Departamento de Matemática da UFPE, Jean-Pierre Marco do Departamento de Matemática da Universidade Paris VI - FRA. O professor Eduardo Shirlippe Góes Leandro em virtude da sua condição de orientador, presidiu os trabalhos e depois das formalidades de apresentação, convidou o aluno a discorrer sobre o conteúdo da dissertação. Concluída a explanação, o candidato foi argüido pela Banca Examinadora, que em seguida, sem a presença do aluno, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar tendo concedido a menção : **APROVADO**. E para constar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Recife, 25 de fevereiro de 2005.

Banca Examinadora

- Eduardo Shirlippe Góes Leandro

- Pedro Antonio Ontaneda Portal

- Jean-Pierre Marco

AGRADECIMENTOS

Desejo fazer expresso os meus agradecimentos a todas as pessoas que direta o indiretamente contribuíram para que este trabalho seja realizado. Em primeiro lugar as autoridades do Departamento de Matemática da U.F.P.E por permitir realizar os meus estudos de Mestrado com bolsa CNPQ, a meu orientador Eduardo Leandro por seus ensinamentos e sua paciência além das dificuldades que teve na realização deste trabalho; a meus colegas da posgraduação por suas colaborações e força ao longo dos períodos de estudo; ao Professor Pedro Ontaneda quem últimamente me forneceu de valiosas sugestões no trabalho; a minha família por todo seu apoio moral; a todos os Professores do Departamento de Matemática da U.F.P.E cujos ensinamentos fizeram de mim um estudante preocupado por conhecer mais matemática; estou também muito grato com o Professor Fernando Cukierman da U.B.A e o Professor Pedro Contreras da U.N.M.S.M porque recomendaram me vir a fazer os meus estudos, a meus amigos que são da vida toda, Lucia de Fátima, Rosa Quispe, Hugo Fernandez, Napoleon Caro, Mario Santiago, Alex Molina, Antonio Pareja, César Rojas, em fim, é muito grande a lista das pessoas que teria mencionar, que Deus abençoe a todos eles.

Recife, Brasil
fevereiro 25, 2005

Lord Barrera

RESUMO

O trabalho está apresentado da seguinte maneira:

No primeiro capítulo se faz uma lista de definições e teoremas que achamos mais importantes sobre tópicos tais como Topologia, Variedades Diferenciáveis e aspectos da Topologia Algébrica, os quais serão utilizados ao longo dos capítulos seguintes. Consideramos conveniente indicar as provas dos teoremas assim como comentários da teoria na bibliografia correspondente citada após de cada resultado.

O segundo capítulo dedica-se a estudar a estrutura cobordismo. Na seção 2.1 introduzimos o conceito de cobordismo e fazemos um resumo das propriedades gerais de funções de Morse sobre cobordismos. Com as definições e resultados da seção 2.1, construímos na seção 2.2 uma topologia que nos permitirá mostrar a existência de funções de Morse sobre um cobordismo e definir o número de Morse de um cobordismo. Funções de Morse fornecem por sua vez em 2.3 campos vetoriais de tipo-gradiente, resultado fundamental que nos ajudará a provar o teorema da vizinhança colar, que por sua vez, nos permitirá introduzir uma operação entre cobordismos.

Na seção 2.3 também provaremos que um cobordismo com número de Morse zero é precisamente um cobordismo produto (teorema 2.3.3). Este resultado é crucial no teorema do h -cobordismo. A seção 2.4 está dedicada ao estudo de cobordismos com número de Morse 1. A homologia de tais cobordismos fornecerá informação sobre a decomposição de um cobordismo em cobordismos elementares. Finalmente terminamos o capítulo 2 mostrando que qualquer cobordismo pode-se reordenar como composição de cobordismos cada um deles com uma função de Morse e um nível crítico onde todos seus pontos críticos tem índice fixo. Este último resultado será fundamental para o cancelamento de pontos críticos de índices intermediários (teorema 3.3.7).

O terceiro capítulo está baseado em quatro teoremas fundamentais que podemos dividir em dois grupos, os teoremas 3.1.6, 3.2.4 e os teoremas 3.3.7, 3.4.1. O teorema fraco de cancelamento (teorema 3.1.6) nos diz que um cobordismo é um cobordismo produto quando podemos ligar os pontos críticos por somente uma trajetória. O problema acontece quando pontos críticos não estão ligados necessariamente por somente uma trajetória, o teorema 3.2.4 fornece condições de transversalidade. Neste sentido, estudaremos o comportamento das nossas esferas em um nível intermediário entre ambos níveis críticos mediante condições de transversalidade entre ambas esferas de tal forma que podamos aplicar o teorema 3.1.6. O teorema 3.3.7 nos dá condições de eliminação de pontos críticos

de índices intermediários cuja prova usa fortemente o teorema 3.1.6. O teorema 3.2.4 será fundamental na prova do teorema 3.3.7. Este a sua vez, junto à teorema 3.4.1 ajudara a provar o teorema do h -cobordismo.

Finalmente o capítulo 4 é dedicado ao nosso objetivo principal, o Teorema do h -cobordismo. Fazemos uma pequena mudança da prova dada em [12] (Ver [10]) e como consequência o Teorema de Smale e a caracterização dos n -discos com ($n \geq 6$). Na prova do teorema do h -cobordismo utilizaremos os dois últimos teoremas fundamentais do capítulo 3.

Palavras-chave: Poincaré, H -cobordismo, Homotopia

ABSTRACT

The work of the following way

In the first chapter it is developed to a list definitions and theorems that we found but important on subjects such as Topology, Differential Manifolds and aspects of the Algebraic Topology, which will be used in the following chapters. We considered advisable to indicate the demonstrations of the theorems, thus, like commentaries of the theory in the mentioned corresponding bibliography after each result.

The second chapter is dedicated to study the structure cobordism. In section 2.1 we introduce the cobordism concept and we make a summary of the general properties of functions of Morse on cobordism. With the definitions and results of section 2.1, we constructed in 2.2 section a topology that will allow to show the existence us of functions of Morse on a cobordism and will define this way the number of Morse of a cobordism. Functions of Morse provide as well in 2.3 vectorial fields of type gradient, fundamental result that it will help us to prove the theorem of the neighborhood necklace, that as well, will allow us to introduce an operation between cobordism.

In section 2.3 also we will demonstrate that a cobordism with number of Morse zero, is indeed a cobordism product (theorem 2.3.3). This result is excellent in the theorem of the h-cobordism. The section 2.4 is dedicated to the study of cobordism with number of Morse 1. The homology of such cobordism will provide information on the decomposition with a cobordism in elementary cobordism. Finally, we finished the chapter 2 showing that any cobordism can be ordered like a composition of cobordism, where each cobordism has a function of Morse and a critical level, where each cobordism has a function of Morse and a critical level, where all their tactically important points have fixed index. This last result will be fundamental for the elimination of intermediary tactically important points of index (theorem 3.3.7).

The third chapter is based on four fundamentals theorems that we can divide in two groups, the theorems 3.1.6, 3.2.4 and the theorems 3.3.7 and 3.4.1. The weak of cancellation (theorem 3.1.6) it says to us that a cobordism, is a cobordism product when we can bind the tactically important points by an only trajectory. The problem occurs when the tactically important points are not bound necessarily by an only trajectory, the theorem 3.2.4 provides conditions of transversality. In this sense, we will study the behavior of our spheres in an intermediary level between both critical levels by means of conditions of transversality both spheres, of such form that we pruned to apply theorems 3.1.6. The theorem 3.3.7 gives conditions us of elimination of tactically important points of intermediary index, whose demonstration uses theorem 3.1.6 strongly. The theorem 3.2.4 will be fundamental in the demonstration of theorem 3.3.7. This as well, next to

theorem 3.4.1 it will help to demonstrate the theorem of the h-cobordism. Finally, the chapter 4 is dedicated to our primary target, the theorem of the h-cobordism. We make a small change of the demonstration given in the [12](to see [10]) and like consequence the theorem of Smale and characterization of n-discs with $n > 5$. In the demonstration of the theorem of the h-cobordism we will both use last fundamental theorems of chapter 3.

Keywords: Poincare, H-cobordism, Homotopy

SUMÁRIO

Capítulo 1—Preliminares	3
1.1 Topologia	3
1.2 Variedades diferenciáveis	5
1.3 Conexões riemannianas	14
1.4 Homotopia	17
1.5 Homologia singular e cohomologia	18
Capítulo 2—A categoria cobordismo	22
2.1 Funções de Morse	22
2.2 A topologia de Morse	28
2.3 Cobordismo soma	32
2.4 Cobordismo elementar	41
2.5 Reordenando cobordismos	48
Capítulo 3—Teoremas de cancelamento	55
3.1 Teorema fraco de cancelamento	55
3.2 Teorema forte de cancelamento	62
3.3 Cancelando pontos críticos de índices intermediários	74
3.4 Cancelando pontos críticos de índice 0 e 1	84

Capítulo 4—O teorema h-cobordismo e suas aplicações	87
Referências Bibliográficas	93

LISTA DE FIGURAS

2.1	Estrutura adjunção	37
2.2	W e W' tem cada um deles um ponto crítico.	39
2.3	Primeira retração.	46
2.4	Segunda retração.	46
2.5	Níveis iniciais	49
2.6	Níveis finais	50
2.7	Antes do reordenamento.	53
2.8	Depois do reordenamento	54
3.1	Antes da alteração	60
3.2	Depois da alteração	63
3.3	A superfície do sólido é o nível intermediario	67
3.4	Processo final de cancelamento	69

INTRODUÇÃO

No início do século vinte, Henri Poincaré (1854-1912) fez uma afirmação a qual em linguagem moderna diz:

Se uma variedade fechada 3-dimensional tem a homologia da esfera $\mathbb{S}^3$, então ela é necessariamente homeomorfo a $\mathbb{S}^3$.

No entanto, o conceito de grupo fundamental, o qual foi introduzido em 1895, fornece a ferramenta necessária para negar esta afirmação. Poincaré em 1904 apresentou um contra-exemplo que pode ser descrito como o espaço quociente $SO(3)/I_{60}$. Aqui $SO(3)$ é o grupo das rotações do espaço euclidiano 3-dimensional que preservam orientação, e I_{60} , o subgrupo consistindo das rotações que levam um icosaedro regular ou dodecaedro regular em si mesmo. Esta variedade tem a homologia da 3-esfera, porém o seu grupo fundamental $\pi_1(SO(3)/I_{60})$ é um grupo perfeito de ordem 120. Ele refez a sua afirmação, que novamente traduzida em linguagem moderno, é expresso por:

Se uma variedade fechada 3-dimensional tem grupo fundamental trivial, então ela é homeomorfo à esfera $\mathbb{S}^3$.

Este enunciado é conhecido como a *Conjectura de Poincaré*.

Quando a teoria de homotopia estava em seus inícios, subsequente com seu desenvolvimento, uma outra pergunta foi feita por W. Hurewicz no seu artigo pioneiro sobre grupos de homotopia: serão que tipos de homotopia caracterizam tipos de homeomorfismos de variedades?. Em geral esta conjectura é falsa em dimensão 3. Por exemplo, os espaços lente $L(7, 1)$ e $L(7, 2)$ tem o mesmo tipo de homotopia mas não são homeomorfos. Seguem-se então os trabalhos de Reidemeister, Moise e Brody de classificar os espaços de lente a menos de homeomorfismos, e J. Whitehead dá uma classificação a menos de tipo de homotopia.

Exemplos de espaços simplesmente conexos foram encontrados para dimensões maiores, mas ainda fica a possibilidade que o tipo de homotopia podia caracterizar a esfera a menos de homeomorfismo. Esta questão conhecida como Conjectura Generalizada de Poincaré foi respondida finalmente por S. Smale em 1960 (ver [19]) para homotopias suaves da esfera de dimensões maiores do que 4.

Smale culminou o seu trabalho em 1962 (ver [20]) com a prova do Teorema do h -Cobordismo. Morse empreendeu logo refazer a teoria de Smale, e sua idéia foi tentar

eliminar diretamente os pontos críticos da função de Morse de um cobordismo no lugar de eliminar as asas. Uma prova completa do Teorema do h -Cobordismo por este método foi dada por J. Milnor em 1963. Milnor se valeu do lema de Cancelamento de Morse para sua prova do teorema do h -cobordismo e este trabalho a qualificou como formidável.

O teorema do h -cobordismo de Smale limita-se a três suposições: simplesmente conexo, suavidade e dimensão. Um contra-exemplo de J. Milnor mostra que a hipótese de ser simplesmente conexo é essencial: $L(7, 1) \times \mathbb{S}^4$ e $L(7, 2) \times \mathbb{S}^4$ são h -cobordantes mas não são difeomorfas.

Na década de 60 ocorrem progressos nesta direção. J. Stallings prova a Conjectura Generalizada de Poincaré usando métodos completamente diferentes e A. Wallace em linhas similares a Smale.

Um fato paradoxal na prova da Conjectura Generalizada de Poincaré, consiste em notar que, para espaços de dimensões altas a prova é mais acessível que para variedades de dimensão 3 e 4. A razão é que uma aplicação de uma superfície numa variedade de dimensão menor do que 5, não pode-se aproximar por um mergulho em geral.

A partir da prova da Conjectura Generalizada de Poincaré, Smale conecta este resultado com a teoria dos Sistemas Dinâmicos. Este campo de estudo tem o seu origem na Mecânica Clássica e a teoria das Equações Diferenciais Ordinárias. Este desenvolvimento tem seu início no século dezenove com H. Poincaré, G. D. Birkhoff, J. Hadamard e I. Bendixon.

Smale essencialmente desenvolveu o caso multidimensional para a teoria dos Sistemas Dinâmicos. Este campo de estudo tem o seu origem na Mecânica Clássica e Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias. Ele mostrou que o *sistema dinâmico estruturalmente estável*, tem propriedades completamente diferentes que no caso dos sistemas dinâmicos bi dimensionais estudados por Andronov e Pontryagin; numa situação multidimensional, sistemas estruturalmente estáveis podem ter um número infinito de pontos singulares. Ele formulou conjecturas interessantes sobre a estabilidade estrutural de fluxos geodésicos em variedades compactas de curvatura negativa, posteriormente provadas por Anosov. Seus resultados permitira a criação da teoria multidimensional dos sistemas dinâmicos, um campo de pesquisa que ainda continua sendo ativamente desenvolvido.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo estabeleceremos as ferramentas necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Muitos resultados serão simplesmente enunciados e as suas provas poderão ser consultadas na bibliografia correspondente.

1.1 TOPOLOGIA

Nesta seção assumimos conhecida a topologia elementar, quer dizer, os conceitos de espaço topológico, espaço conexo, compacto, de Hausdorff, métrico, aplicação contínua, etc. No entanto, lembraremos aqui conceitos e resultados topológicos que serão usados ao longo do trabalho.

Definição 1.1.1 Espaço quociente. *Seja X um espaço topológico e R uma relação de equivalência em X . Seja X/R o conjunto quociente (formado pelas classes de equivalência) e seja $p : X \rightarrow X/R$ a projeção canônica que a cada ponto faz corresponder a sua classe. A topologia quociente em X/R é a topologia que tem por abertos aos conjuntos $A \subseteq X/R$ tais que $p^{-1}(A)$ é aberto em X .*

Teorema 1.1.2 *Tem-se as seguintes afirmações*

- i) *Um espaço topológico X é Hausdorff se, e somente se, a diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ é fechada em $X \times X$.*
- ii) *Se X é um espaço compacto e R é uma relação de equivalência em X tal que como subespaço de $X \times X$ é fechada, então o quociente X/R é um espaço de Hausdorff.*

Prova: Ver [11], prop. v.3.23 e v.3.25. □

Definição 1.1.3 Adjunção. *Sejam X e Y espaços compactos, $A \subseteq X$ um subespaço fechado e $f : A \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Chamamos adjunção de X a Y através de f ao espaço quociente $X \bigcup_f Y$ obtido a partir da soma topológica $X + Y$ mediante a relação de equivalência dada por*

$$u R v \Leftrightarrow \begin{cases} u, v \in A \text{ e } f(u) = f(v) \text{ ou} \\ u \in A, v \in Y \text{ e } f(u) = v \text{ ou} \\ u \in Y, v \in A \text{ e } f(v) = u \text{ ou} \\ u = v. \end{cases} \quad (1.1)$$

Pelo teorema 1.1.1, temos que $X \bigcup_f Y$ é um espaço de Hausdorff. De fato, é suficiente ver que a relação R é fechada em $(X + Y)^2$; porém, R é a união de quatro conjuntos fechados. Assim, R é fechada.

Obviamente, $X \bigcup_f Y$ é compacto. Seja $\pi : X + Y \rightarrow X \bigcup_f Y$ a projeção canônica a qual é fechada desde que R é fechada. Então a inclusão de Y em $X + Y$ seguida de π é injetiva e contínua, logo é um homeomorfismo. Isto permite identificar Y com um subespaço fechado de $X \bigcup_f Y$. Também, $X \setminus A$ pode-se ver como subespaço aberto de $X \bigcup_f Y$. Concretamente, chamando $g : X \setminus A \rightarrow X \bigcup_f Y$ à composição da inclusão de X em $X + Y$ com π , certamente temos que g é aberta e, portanto, um homeomorfismo na imagem. Para ver isto pegamos um aberto $U \subseteq X \setminus A$, o qual é aberto em X , e portanto aberto em $X + Y$ e $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$. Assim, $g(U) = \pi(U)$ é aberto em $X \bigcup_f Y$.

Em particular podemos identificar a $X \setminus A$ com um subespaço aberto de Y mediante a identificação $Y \subseteq X \bigcup_f Y$. É claro que $g|_A = f$ e $g(X) \cap Y = f(A)$.

De todo o anterior concluímos o seguinte teorema.

Teorema 1.1.4 *Se X e Y são espaços compactos, $A \subseteq X$ é um subespaço fechado e $f : A \rightarrow Y$ é contínua, então $X \bigcup_f Y$ é um subespaço compacto que contem a $X \setminus A$ como subespaço aberto e a Y como subespaço fechado e existe $g : X \rightarrow X \bigcup_f Y$ contínua tal que $g|_A = f$ e $g(X) \cap Y = f(A)$.*

Prova: Ver [1], prop 3.43. □

Também precisaremos o seguinte resultado.

Teorema 1.1.5 *Seja V um subconjunto fechado de um espaço métrico compacto, seja $f : M \rightarrow N$ um homeomorfismo local tal que $f|_V$ é injetiva. Então existe uma vizinhança W de V tal que $f|_W$ é injetiva.*

Prova: Ver [18], lema 5.7. □

1.2 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Nesta seção assumiremos conhecidos resultados de análise em $\mathbb{R}^n$. A partir daí estudaremos espaços topológicos que tem estrutura diferenciável, e as aplicações sobre estes espaços são precisamente aplicações diferenciáveis. As variedades compactas serão as mais estudadas no seguinte capítulo e aqui não faremos mais que uma ligeira revisão de algumas das suas propriedades.

Definição 1.2.1 C^k -atlas . *Seja M uma n -variedade topológica (com bordo) e $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\gamma, \varphi_\gamma)\}_{\gamma \in \mathcal{I}}$ um atlas em M . $\mathcal{A}$ é chamada um C^k -atlas em M ou simplesmente um atlas em M se satisfaz: para cada par $i, j \in I$, a aplicação $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ é C^k -diferenciável. Neste caso cada par (U, φ) é chamada carta suave.*

Definição 1.2.2 Variedade diferenciável. *Agora, poderíamos ter qualquer número de atlas numa n -variedade topológica M (com bordo) mais devemos ter alguma noção de compatibilidade. Sejam $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\gamma, \varphi_\gamma)\}_{\gamma \in \mathcal{I}}$ e $\mathcal{A}' = \{(\mathcal{U}_\gamma, \varphi_\gamma)\}_{\gamma \in \mathcal{J}}$ atlas em M . Dizemos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ são compatíveis se $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ é uma atlas. A relação de compatibilidade é uma relação de equivalência e cada classe de equivalência é chamada estrutura diferenciável.*

O conjunto M junto com uma estrutura diferenciável, é dito variedade diferenciável.

Definição 1.2.3 Aplicações diferenciáveis. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação entre duas variedades diferenciáveis. Dizemos que f é diferenciável ou suave (na realidade de classe C^∞) num ponto $p \in M$ se existem cartas (U, φ) em torno de p e (V, ψ) em torno*

de $f(p)$ de modo que a aplicação $\varphi^{-1} \circ f \circ \psi$ é diferenciável (de classe C^∞) em $\varphi(p)$. Um difeomorfismo entre variedades é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável.

Existe partição da unidade numa variedade diferenciável: dada uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de M por conjuntos abertos, existe uma família enumerável de funções diferenciáveis $\{\beta_i\}_{i \in I}$ cujos domínios formam uma cobertura de M tal que

- i) $\text{Suporte}(\beta_i) \subseteq U_\alpha$ para algum α .
- ii) A família $\{\text{Suporte}(\beta_i)\}_{i \in I}$ é localmente finita.
- iii) $\sum_{i \in I} \beta_i(p) = 1$ para cada $p \in M$.

Definição 1.2.4 Espaço tangente. Seja M uma variedade diferenciável e seja $p \in M$. Denotamos por $C^\infty(M)$ ao conjunto formado por todas as funções diferenciáveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em M . Desde que somas e múltiplo por um escalar são funções suaves, $C^\infty(M)$ é um espaço vetorial, na verdade uma $\mathbb{R}$ -álgebra.

Uma aplicação linear $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada derivação em p se satisfaz

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f) \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

O conjunto de todas as derivações de $C^\infty(M)$ em p é um espaço vetorial chamado espaço tangente a M em p , e denotado por $T_p(M)$. Um elemento de $T_p(M)$ é chamado vetor tangente em p .

Definição 1.2.5 Push-forwards. Se M e N são variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável, para cada $p \in M$ definimos uma aplicação linear $F_* : T_p(M) \rightarrow T_{F(p)}(N)$ chamada push-forward associada com F por

$$(F_*v)(f) = v(f \circ F).$$

Usando coordenadas. Seja (U, φ) uma carta suave numa variedade M de dimensão n . Em particular φ é um difeomorfismo de U em $\varphi(U)$. Assim, $\varphi_* : T_p(M) \rightarrow T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^n)$ é

um isomorfismo. Seja $\{\partial/\partial x_i|_{\varphi(p)}\}_{i=1}^n$ base de $T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^n)$. O push-forwards destes vetores por $(\varphi^{-1})_*$ formam uma base de $T_p(M)$ que denotamos por

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}.$$

De acordo a esta definição, $\partial/\partial x_i|_p$ age numa função suave $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} \partial/\partial x_i\Big|_p(f) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1})(p) \\ &= \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(\hat{p}) \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde $\hat{f}$ é a representação coordenada de f e $\hat{p} = (p_1, \dots, p_n) = \varphi(p)$ é a representação coordenada de p .

Desde que estes vetores formam uma base para $T_p(M)$, qualquer vetor tangente $v \in T_p(M)$ pode-se escrever como uma combinação linear

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p.$$

Os números $\{v_i\}_{i=1}^n$ são chamadas *componentes* de v com respeito ao sistema de coordenadas $x_1, \dots, x_n$.

Definição 1.2.6 Caso de uma variedade com bordo. Se M é uma variedade n -dimensional com bordo e $p \in M$, definimos o espaço tangente a M em p da mesma forma como definimos para uma variedade sem bordo. Similarmente, se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação suave entre variedades com bordo, definimos o push-forward por F em $p \in M$ como a aplicação linear $F_* : T_p(M) \rightarrow T_{F(p)}(N)$ definido pela mesma formula como no caso de uma variedade sem bordo.

Como no caso de variedades sem bordo temos que se p é um ponto arbitrário de M , então $T_p(M)$ tem por base os vetores coordenados $\{\partial/\partial x_i|_p\}_{i=1}^n$.

Definição 1.2.7 Fibrado tangente. Para qualquer variedade diferenciável M , definimos o fibrado tangente de M , denotado por $T(M)$ como a união disjunta dos espaços tangentes em todos os pontos de M :

$$T(M) = \coprod_{p \in M} T_p(M).$$

Consideramos um elemento de esta união disjunta como um par ordenado (p, v) , onde $p \in M$ e $v \in T_p(M)$.

Definimos a projeção $\pi : T(M) \rightarrow M$ por $\pi(p, v) = p$. O fibrado tangente pode ser pensado simplesmente como uma coleção de espaços vetoriais, porém é muito mais que isto. $T(M)$ tem na verdade uma estrutura de variedade diferenciável.

Definição 1.2.8 Fibrado normal. *Seja $M \subseteq \mathbb{R}^m$ uma n -subvariedade mergulhada. Identificando o espaço tangente $T_p(M)$ num ponto $p \in M$ com um subespaço de $T_p(\mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^m$, definimos o espaço normal a M em p como o subespaço $N_p(M) \subseteq \mathbb{R}^m$ consistindo de todos os vetores que são ortogonais a $T_p(M)$ com respeito ao produto euclidiano. O fibrado normal de M , é o subconjunto $N(M) \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ definido por*

$$N(M) = \coprod_{p \in M} N_p(M) = \{(p, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : p \in M \text{ e } v \in N_p(M)\}.$$

Definição 1.2.9 Campos vetoriais. *Seja M uma variedade diferenciável. Um campo vetorial é uma aplicação suave $\chi : M \rightarrow T(M)$ tal que $\chi_p = \chi(p) \in T_p(M)$ para todo $p \in M$. Em outras palavras, um campo vetorial em M é uma seção suave do fibrado tangente, isto é uma aplicação suave $\chi : M \rightarrow T(M)$ tal que $\pi \circ \chi = id_M$. Isto equivale a dizer que as funções componentes de χ em qualquer carta, são funções suaves. Denotamos por $\mathcal{T}(M)$ o conjunto de campos vetoriais de M .*

Se (x_i) são coordenadas locais num conjunto aberto $U \subseteq M$, o valor de χ em qualquer ponto $p \in U$ pode ser escrito como

$$\chi_p = \chi_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

para alguns valores $\chi_1(p), \dots, \chi_n(p)$. Isto define n funções $\chi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ chamadas funções componentes de χ com respeito as cartas estabelecidas.

Observação 1.2.10 *Se (x^i) são coordenadas locais num conjunto aberto $U \subseteq M$, a*

correspondência

$$p \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

determina um campo vetorial chamado campo vetorial coordenado e denotado por $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Definição 1.2.11 Uma derivação D da $\mathbb{R}$ -álgebra $C^\infty(M)$, é uma aplicação linear

$$D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

tal que $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ para todo $f, g \in C^\infty(M)$. O conjunto de derivações de $C^\infty(M)$ é denotado por $D(C^\infty(M))$.

Um campo vetorial $\chi \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$ determina uma derivação em $D(C^\infty(M))$ por $\chi \rightarrow D_\chi$ definida por $D_\chi(f)(p) = \chi_p(f)$.

As derivações de $C^\infty(M)$, estão em correspondência com $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ a coleção dos campos vetoriais em M .

Definição 1.2.12 Referenciais locais. Seja M uma n -variedade suave. Um referencial local para M é uma n -tupla de campos vetoriais suaves $(\chi_1, \dots, \chi_n)$ num conjunto aberto $U \subseteq M$ tal que $\{\chi_i \Big|_p\}_{i=1}^n$ forma uma base de $T_p(M)$ em cada $p \in U$. Dizemos que um referencial local é orientado positivamente se $(\chi_1 \Big|_p, \dots, \chi_n \Big|_p)$ é uma base positivamente orientada para $T_p(M)$ em cada ponto $p \in U$, similarmente define-se um referencial orientado negativamente. Uma orientação pontual em M , é a escolha de um referencial positivamente orientado ou negativamente orientado em cada ponto de M .

Definição 1.2.13 Orientação. Uma orientação pontual é dita contínua se todo ponto pertence ao domínio de um referencial local orientado. Uma orientação de M é uma orientação pontual e contínua. Dizemos que M é orientável se existe uma orientação, de outra forma dizemos que M não é orientável.

Definição 1.2.14 Cartas orientadas. Uma carta coordenada (U, φ) é dito positivamente orientada se o referencial coordenado $\{\partial/\partial x_i\}$ é positivamente orientado e negativamente orientado se o referencial coordenado é negativamente orientado. Uma coleção

de cartas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ é dita consistentemente orientada se para cada i, j , a aplicação $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ tem determinante jacobiano positivo em $\varphi_i(U_i \cap U_j)$.

Definição 1.2.15 Campo covetor. Seja M uma n -variedade diferenciável. Para cada $p \in M$ definimos o espaço cotangente em p denotado por

$$T_p^*(M) = (T_p(M))^*.$$

os elementos de $T_p^*(M)$ são chamados covetores tangentes em p ou covetores em p . Se (x_i) são coordenadas locais num subconjunto aberto $U \subseteq M$, então para cada $p \in U$, a base $(\partial/\partial x_i|_p)$ fornece uma base dual ε_p^i . Qualquer covetor $\zeta \in T_p^*(M)$ pode-se escrever de maneira única por $\zeta = \sum_{i=1}^n \zeta_i \varepsilon_p^i$ onde

$$\zeta_i = \zeta\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right).$$

Definição 1.2.16 Fibrado cotangente. A união disjunta

$$T^*(M) = \coprod_{p \in M} T_p^*(M)$$

é chamado fibrado cotangente de M

O fibrado cotangente de uma variedade tem estrutura de variedade diferenciável onde a aplicação $\pi : T^*(M) \rightarrow M$ levando ζ a p é uma projeção suave. Uma seção de $T^*(M)$ é chamado campo covetor de M , isto é, uma aplicação suave $\gamma : M \rightarrow T^*(M)$ tal que $\pi \circ \gamma = id_M$. Campos covetores também são chamados 1-formas diferenciáveis.

Definição 1.2.17 Orientação de variedades com bordo. Se M é uma variedade suave com bordo, $Bd(M)$ pode-se ver como uma hipersuperfície em M . Lembremos que qualquer ponto $p \in M$ esta no domínio de uma carta (U, φ) , isto quer dizer que φ é um difeomorfismo de U sobre um subconjunto aberto $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}_+^n$. Desde que $Bd(M)$ é localmente caracterizado por $x_n = 0$ em tais cartas, estas cartas tem importância para $Bd(M)$.

Seja $p \in Bd(M)$. Diz-se que $v \in T_p(M)$ aponta para dentro se $v \notin T_p(Bd(M))$ e para algum $\epsilon > 0$, existe um segmento de curva $\gamma : [0, \epsilon] \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Diz-se que aponta para fora se $-v$ aponta para dentro.

Um campo vetorial ao longo de $Bd(M)$ é dito apontando para fora ou apontando para adentro se seu valor em cada ponto tem esta propriedade.

Teorema 1.2.18 Orientação induzida no bordo. *Seja M uma variedade suave orientada com bordo. A orientação em $Bd(M)$ induzida da orientação de M é determinada por qualquer campo vetorial apontando para fora ao longo de $Bd(M)$ independe da escolha do campo vetorial.*

Prova: Ver [9], pág. 239. □

Observação 1.2.19 *Como consequência do corolário anterior, existe uma única orientação em $Bd(M)$ determinado pela orientação de M . Chamamos a esta orientação a orientação induzida ou orientação de Stokes em $Bd(M)$.*

Definição 1.2.20 Curvas integrais. *Uma curva suave $\gamma : J \rightarrow M$ determina um vetor tangente $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}(M) \forall t$. A seguir descreveremos uma forma de traduzir isto.*

Seja M uma variedade diferenciável e χ um campo vetorial em M . Uma curva integral de χ , é uma curva suave $\gamma : J \rightarrow M$ definida num intervalo aberto J tal que

$$\gamma'(t) = \chi_{\gamma(t)} = \chi(\gamma(t)) \quad \forall t \in J.$$

Definição 1.2.21 Fluxos. *Existe outra forma de ver a família das curvas integrais associadas a um campo vetorial. Seja χ um campo vetorial numa variedade M e suponha que tem a seguinte propriedade. Para cada ponto $p \in M$ existe uma única curva integral $\theta^p : \mathbb{R} \rightarrow M$ começando em p (isto nem sempre é o caso). Suponhamos que podemos*

definir uma aplicação θ_t de M em M mesmo que leva cada $p \in M$ ao ponto seguindo a curva começando em p no tempo t :

$$\theta_t(p) = \theta^{(p)}(t).$$

Isto define uma família de aplicações $\theta_t : M \rightarrow M$ para $t \in \mathbb{R}$. Se $q = \theta^{(p)}(s)$. As curvas integrais começando em q satisfazem $\theta^{(q)}(t) = \theta^{(p)}(t + s)$. Expressando em termos de θ_t , isto equivale a

$$\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_{t+s}(p).$$

Considerando $\theta_0(p) = \theta^{(p)}(0) = p$, temos que a aplicação $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ é uma ação do grupo aditivo $\mathbb{R}$ em M .

Motivados por estas considerações definimos um fluxo global em M como uma ação de $\mathbb{R}$ em M . Isto é, uma aplicação suave $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ satisfazendo as seguintes propriedades para todo $s, t \in \mathbb{R}$ e todo $p \in M$.

$$\begin{aligned} \theta(t, \theta(s, p)) &= \theta(t + s, p) \\ \theta(0, p) &= p. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dado um fluxo global θ em M definimos duas coleções de aplicações como segue-se

- Para cada $t \in \mathbb{R}$, defina $\theta_t : M \rightarrow M$ por

$$\theta_t(p) = \theta(t, p).$$

As propriedades (1.2.1) são equivalentes aos axiomas de grupos

$$\begin{aligned} \theta_t \circ \theta_s &= \theta_{t+s}. \\ \theta_0 &= id_M. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Para qualquer ação de grupo, cada aplicação $\theta_t : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo.

- Para cada $p \in M$, defina uma curva suave $\theta^{(p)} : \mathbb{R} \rightarrow M$ por

$$\theta^{(p)}(t) = \theta(t, p).$$

A imagem de esta curva é exatamente a órbita de p pela ação de grupo.

Teorema 1.2.22 *Seja $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ um fluxo global. Para cada $p \in M$, defina um vetor tangente $\chi_p \in T_p(M)$ por*

$$\chi_p = \theta(p)'(0) = \frac{\partial}{\partial t} \theta(t, p) \Big|_{t=0}.$$

A correspondência $p \rightarrow \chi_p$ é um campo vetorial χ em M e cada curva $\theta^{(p)}$ é uma curva integral de χ . O campo vetorial χ nesta proposição é chamado gerador infinitesimal de χ .

Prova: Ver 9, pág. 311. □

Definição 1.2.23 Intervalo maximal. *Seja M uma variedade diferenciável. Um domínio fluxo para M é um subconjunto aberto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathcal{M}$ com a seguinte propriedade: Para cada $p \in M$, o conjunto $\mathcal{D}_{\sqrt{\cdot}} = \{\sqcup \in \mathbb{R} : (\sqcup, \sqrt{\cdot}) \in \mathcal{D}\}$ é um intervalo aberto que contem 0. Um fluxo em M é uma aplicação suave $\theta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}$, que satisfaz*

$$\begin{aligned} \theta(t, p) &= p \quad \forall p \in M. \\ \theta(t, \theta(s, p)) &= \theta(t + s, p) \quad \text{onde } s \in \mathcal{D}_{\sqrt{\cdot}} \mid \sqcup \in \mathcal{D}_{\theta(\mathcal{J}, \sqrt{\cdot})}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Definição 1.2.24 Fluxo maximal. *Um fluxo maximal é um fluxo que não pode-se estender a um domínio fluxo maior.*

Teorema 1.2.25 Teorema fundamental dos fluxos. *Seja χ um campo vetorial suave numa variedade diferenciável M . Então existe um único fluxo maximal cujo gerador infinitesimal é χ .*

Prova: Ver [9], pág. 314. □

Teorema 1.2.26 Lema do escape. *Seja M uma variedade diferenciável e χ um campo vetorial em M . Se γ é uma curva integral de χ cujo domínio maximal não é $\mathbb{R}$, então a imagem de γ não pode estar contido em qualquer subconjunto compacto de M .*

Prova: Ver [9], pág. 316. □

1.3 CONEXÕES RIEMANNIANAS

Definição 1.3.1 Métrica riemanniana. Uma métrica riemanniana ou estrutura riemanniana em uma n -variedade diferenciável M , é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p(M)$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p com $\varphi(x_1, \dots, x_n) = q \in \varphi(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_i(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .

Definição 1.3.2 Gradiente de uma função. Seja f uma função suave numa n -variedade M . Definimos o campo vetorial gradiente de f por

$$\text{grad}(f) = \sum_{ij} g_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Esta definição independe da carta escolhida.

De acordo a nossa definição anterior, as funções g_{ij} dependem da estrutura riemanniana estabelecida em M .

Definição 1.3.3 Conexão afim. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : T(\mathcal{M}) \times T(\mathcal{M}) \rightarrow T(\mathcal{M})$$

o qual indicamos por $(\chi, \chi') \xrightarrow{\nabla} \nabla_{\chi}\chi'$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$$i) \nabla_{f\chi + g\chi'}\chi'' = f\nabla_{\chi}\chi'' + g\nabla_{\chi'}\chi''.$$

$$ii) \nabla_{\chi}(\chi' + \chi'') = \nabla_{\chi}\chi' + \nabla_{\chi}\chi''.$$

$$\text{iii)} \quad \nabla_{\chi} f \chi' = f \nabla_{\chi} \chi' + \chi(f) \chi',$$

onde $\chi, \chi', \chi'' \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$ e $f, g \in C^{\infty}(M)$.

Teorema 1.3.4 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial χ ao longo da curva diferenciável $\alpha : (0, 1) \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{D\chi}{dt}$ ao longo de α , denominado derivada covariante de χ ao longo de α tal que:*

$$\text{i)} \quad \frac{D}{dt}(\chi + \chi') = \frac{D\chi}{dt} + \frac{D\chi'}{dt}.$$

$$\text{ii)} \quad \frac{D}{dt}(f\chi) = \frac{df}{dt}\chi + f \frac{D\chi}{dt}, \text{ onde } \chi' \text{ é um campo vetorial ao longo de } \alpha \text{ e } f \text{ é uma função diferenciável em } (0, 1).$$

$$\text{iii)} \quad \text{Se } \chi \text{ é induzido por um campo vetorial } \chi' \in \mathcal{T}(\mathcal{M}), \text{ isto é } \chi(t) = \chi'(\alpha(t)), \text{ então}$$

$$\frac{D\chi}{dt} = \nabla_{d\alpha/dt} \chi'$$

Prova: Ver [2], prop. 2.2. □

Definição 1.3.5 Campo vetorial paralelo. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial χ ao longo de uma curva $\alpha : (0, 1) \rightarrow M$ é chamado paralelo se $\frac{D\chi}{dt} = 0$ para todo $t \in (0, 1)$.*

Teorema 1.3.6 Existência do campo vetorial paralelo. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Seja $\alpha : (0, 1) \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M e χ_0 um vetor tangente a M em $\alpha(t_0)$, $t_0 \in (0, 1)$. Então existe um único campo vetorial paralelo χ ao longo de α tal que $\chi(t_0) = \chi_0$, $\chi(t)$ é chamado transporte paralelo de $\chi(t_0)$ ao longo de α .*

Prova: Ver [2], prop. 2.6. □

Definição 1.3.7 Geodésica. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)$ no ponto t_0 ; se γ é geodésica em t , para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica, a restrição de γ a $[a, b]$ é chamada segmento de geodésica ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Proposição 1.3.8 Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de $p \in M$, um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação C^∞ $\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$, $\mathcal{U} = \{(\Pi, v) : \Pi \in \mathcal{V}, v \in \mathcal{T}_\Pi(\mathcal{M}), |v| < \epsilon\}$ tal que $t \rightarrow \gamma(t, q, v)$, $t \in (-2, 2)$ é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v , para cada $q \in V$ e cada $v \in T_q(M)$, com $|v| < \epsilon$.

Prova: Ver [2]. Prop. 2.7. □

Definição 1.3.9 Aplicação exponencial. A proposição anterior nos permite introduzir o conceito de aplicação exponencial da maneira seguinte. Seja $p \in M$ e $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{M})$ um aberto dado pela proposição anterior. Então a aplicação $\exp: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ dada por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|}), \quad (q, v) \in \mathcal{U}$$

é chamada aplicação exponencial em $\mathcal{U}$.

1.4 HOMOTOPIA

Definição 1.4.1 Aplicações homotópicas. *Duas aplicações contínuas $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos são ditas homotópicas se existe uma aplicação contínua $F : I \times X \rightarrow Y$ tal que para todo $x \in X$ tem-se $F(0, x) = f_0(x)$ e $F(1, x) = f_1(x)$. Se diz que F é uma homotopia entre f_0 e f_1 . Escreveremos também $F(t, x) = f_t(x)$ e $f \approx g$ indicara que f e g são homotópicos.*

De este modo, quando fixamos x e fazemos variar t , temos que $f_t(x)$ é um arco que une $f_0(x)$ com $f_1(x)$. Informalmente podemos dizer que uma homotopia muda a imagem de cada ponto de X por f_0 através de um caminho em Y que leva até a imagem do mesmo ponto por f_1 , de forma que a transformação é "globalmente" contínua.

Definição 1.4.2 Grupo fundamental. *Se X é um espaço topológico, um laço num ponto $x \in X$ é um arco (contínuo) $\sigma : I \rightarrow X$ tal que $\sigma(0) = \sigma(1)$. Diremos que dois laços σ_0 e σ_1 em x são equivalentes se existe uma homotopia $F : I \times I \rightarrow X$ tal que $F_0 = \sigma_0$, $F_1 = \sigma_1$ e $F_t(0) = F_t(1) = x$ para todo $t \in I$.*

E claro que a homotopia de laços num ponto x é uma relação de equivalência. Definimos o grupo fundamental de X no ponto x como o conjunto de todas as classes de homotopia de laços em x e denotamos isto por $\pi_1(X, x)$.

O conjunto $\pi_1(X, x)$ admite estrutura de grupo com a operação dada por $[\sigma][\tau] = [\sigma\tau]$ onde

$$(\sigma\tau)(s) = \begin{cases} \sigma(2s), & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \tau(2s - 1), & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

Se prova que esta definição não depende dos representantes de cada classe, isto é, se $[\sigma] = [\sigma']$ e $[\tau] = [\tau']$ então $[\sigma\tau] = [\sigma'\tau']$.

Ademais, o conjunto $\pi_1(X, x)$ junto com esta operação satisfaz os axiomas de grupo.

Se $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ é uma aplicação entre pares (isto é, uma aplicação contínua tal que $f(x) = y$), então podemos definir $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ mediante $f_*([\sigma]) = [f \circ \sigma]$. É fácil comprovar que esta definição não depende do representante da classe, ademais, é

imediato que $(\sigma\tau) \circ f = (\sigma \circ f)(\tau \circ f)$, pelo que f_* é claramente um homomorfismo de grupos. Também é obvio que $1_* = 1$ e que $(fg)_* = f_*g_*$, de modo que π_1 é um functor da categoria de pares (X, x) na categoria de grupos.

Isto implica em particular que se f é um homeomorfismo, f_* é um isomorfismo de grupos; portanto, o grupo fundamental é um invariante topológico.

E evidente que o grupo $\pi_1(X, x)$ depende unicamente da componente arco-conexa de x em X . Assim, não perdemos generalidade supondo que X é conexa por caminhos.

Definição 1.4.3 Tipo de homotopia. *Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ chama-se uma equivalência homotópica quando existe $g : Y \rightarrow X$ contínua tal que $g \circ f \approx id_X$ e $f \circ g \approx id_Y$. Diz-se então que g é um inverso homotópico de f e que os espaços topológicos X e Y têm o mesmo tipo de homotopia. Escreveremos, neste caso, $X \equiv Y$ ou $f : X \equiv Y$.*

Definição 1.4.4 Espaços contráteis. *Diz-se que um espaço topológico é contrátil quando ele tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto.*

Observação 1.4.5 Escreveremos $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ para indicar que $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$, $f : X \rightarrow Y$ e $f(U) \subseteq V$.

1.5 HOMOLOGIA SINGULAR E COHOMOLOGIA

Definição 1.5.1 Simplexo afim e singular. *Um p -simplexo afim em $\mathbb{R}^n$ é o fecho convexo S de $p + 1$ pontos $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$ linearmente independentes.*

Chamaremos p -símplice canônico ao p -simplexo afim

$$\Delta_p = \{(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p \mid a_i \geq 0, \sum a_i \leq 1\}$$

Um p -simplexo singular em um espaço topológico X é uma aplicação contínua $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$.

Definição 1.5.2 Cadeias singulares. *Seja A um anel conmutativo com unidade. Para cada número natural $p \geq 0$, chamaremos módulo das p -cadeias singulares de um espaço topológico $X \neq \emptyset$ ao A -módulo livre $C_p(X)$ que tem por base o conjunto de todos os p -símplices singulares em X .*

Definição 1.5.3 *Seja A um anel conmutativo com unidade. Um A -módulo graduado é uma soma direta de A -módulos $C = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p$. Os elementos de cada A -submódulo C_p são chamados elementos homogêneos de grau p . Um submódulo graduado de C é um módulo $D = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} D_p$, onde $D_p = C_p \cap D$.*

Assim, a cada espaço topológico X podemos associar o módulo graduado

$$C(X) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p(X).$$

Um homomorfismo graduado $f : C \rightarrow D$ (de grau d) entre dois A -módulos graduados, é um homomorfismo tal que $f_p = f|_{C_p} : C_p \rightarrow D_{p+d}$ para todo inteiro p

Por exemplo, se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação continua entre dois espaços topológicos, para cada p -símplice $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ em X , podemos definir $f_p^\#(\sigma) = \sigma \circ f$, que é um p -símplice em Y . Definimos $f_p^\# : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ como o homomorfismo de módulos que estende linearmente a aplicação $f_p^\#$ que acabamos de definir. É dizer, o homomorfismo definido por

$$f_p^\#(\sum a_i \sigma_i) = \sum a_i f_p^\#(\sigma_i).$$

Os homomorfismos $f_p^\#$ estendem-se a um único homomorfismo de grau zero

$$f^\# : C(X) \rightarrow C(Y)$$

entre módulos de cadeias de X e Y . É fácil ver que $(f \circ g)^\# = f^\# \circ g^\#$. Assim mesmo, se f é a identidade em X , então $f^\#$ é a identidade em $C(X)$

Agora vamos a definir a fronteira de uma cadeia singular. Em primer lugar definimos a fronteira dos símplices canônicos:

Definimos a *fronteira* do p -símplice $(x_0, \dots, x_p)$ como a p -cadeia

$$\partial_p(x_0, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) \in C_{p-1}(\Delta_p).$$

Para $p = 0$ definimos $\partial_0(x_0) = 0$.

Agora definimos a fronteira de um p -símplice singular $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ como

$$\partial_p(\sigma) = \sigma^\#(\partial_p(x_0, \dots, x_p)).$$

Os homomorfismos ∂_p estendem-se a um único homomorfismo de grau -1

$$\partial : C(X) \rightarrow C(X)$$

do módulo de cadeias de X em se mesmo. Observemos pela definição ∂ conmuta com $\sigma^\#$ para todo p -símplice σ . Mais geralmente temos

Definição 1.5.4 Complexo. Um complexo é um par $\mathcal{C} = (\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p, \partial)$, onde a primeira componente é um A -módulo graduado e ∂ é um homomorfismo de grau -1 tal que $\partial \circ \partial = 0$.

De este modo, se X é um espaço topológico, temos que $C(X)$ é um complexo com o operador fronteira construído acima.

Definição 1.5.5 Homomorfismo de complexos. Um homomorfismo de complexos $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é um homomorfismo de grau 0 tal que $\phi \circ \partial' = \partial \circ \phi$.

Definição 1.5.6 Grupos de homologia. Seja $\mathcal{C} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p$ um complexo de A -módulos. Os elementos C_p chamam-se cadeias de dimensão p . Os elementos de $Z_p = \text{Nuc}(\partial_p)$ são chamados ciclos de dimensão p . Os elementos $F_p = \text{Im}(\partial_{p+1})$ são chamados fronteiras de dimensão p . A condição $\partial_{p+1} \circ \partial_p = 0$ implica $F_p \leq Z_p$.

O módulo $H_p(\mathcal{C}) = Z_p / F_p$ chama-se grupo de homologia de dimensão p de $\mathcal{C}$. Dois ciclos são homólogos se pertencem à mesma classe de homologia.

Por razões de utilidade vamos definir grupos de homologia mais gerais: Se $U \subseteq X$, definimos $C(C, U) = C(X)/C(U)$. A os elementos de $C_p(X, U)$ os chamaremos p -cadeias de X módulo U . A os grupos de homologia os chamaremos grupos de homologia relativa de X módulo U e os representaremos por

$$H_p(X, U) = Z_p(X, U)/F_p(X, U).$$

As vezes escreveremos $H_p(X \mid x)$ para indicar $H_p(X, X - \{x\})$. Observemos que $H_p(X) = H_p(X, \emptyset)$.

Teorema 1.5.7 Teorema de homotopia. Se os pares (X, U) e (Y, V) são homotópicos então para todo $p \in \mathbb{Z}$ temos que $H_p(X, U) \cong H_p(Y, V)$.

Prova: Ver 21. Pag. 200. □

Teorema 1.5.8 Sejam $V \subseteq U \subseteq X$ espaços topológicos, sejam

$$i : (U, V) \rightarrow (X, V), \quad j : (X, V) \rightarrow (X, U)$$

a inclusão e a identidade respectivamente. Então temos uma sequência exata

$$\cdots H_p(U, V) \xrightarrow{i_*p} H_p(X, V) \xrightarrow{j_*p} H_p(X, U) \xrightarrow{\delta_*p} H_{p-1}(U, V) \xrightarrow{i_*p-1} \cdots$$

Prova: Ver 21. Teorema 5. □

CAPÍTULO 2

A CATEGORIA COBORDISMO

Neste capítulo estabeleceremos a estrutura cobordismo e a operação que nos permite compor cobordismos. Começaremos falando sobre funções de Morse que serão de grande importância para o estudo de pontos críticos em variedades, introduzimos a topologia- C^2 , ferramenta que nos permitirá mostrar a existência de funções de Morse em variedades compactas, que por sua vez, permitirá definir o índice de um cobordismo elementar. Usaremos esta operação entre cobordismos para reordenar qualquer cobordismo como composição de cobordismos elementares, o que será feito na seção 2.4. A última seção é dedicada a mostrar que podemos reordenar cobordismos em termos de seus índices. Este resultado será usado no teorema 3.3.7 na técnica de eliminação de pontos críticos.

2.1 FUNÇÕES DE MORSE

Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ suave e $p \in M$. Dizemos que p é um ponto crítico de f se $f_* : T_p(M) \longrightarrow T_{f(p)}(\mathbb{R})$ é zero. Se escolhermos um sistema local coordenado $(x_1, \dots, x_n)$ numa vizinhança U de p , isto quer dizer

$$\frac{\partial f(p)}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f(p)}{\partial x_n} = 0.$$

O número $c \in \mathbb{R}$ é chamado *valor crítico* de f se existe algum ponto crítico p de f tal que $f(p) = c$.

Denotemos por $M^a = f^{-1}(-\infty, a]$. Se a não é valor crítico de f , então M^a é uma variedade com bordo $f^{-1}(a)$.

Um ponto crítico p é chamado *não degenerado* se a matriz

$$H(f) = \left[\frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad (2.1)$$

é não singular para algum sistema coordenado $x_1, \dots, x_n$; esta definição independe da escolha do sistema coordenado local. Denotamos o conjunto de pontos críticos de f por $cr(f)$. Se todos os pontos críticos de f são não degenerados, então f é chamada *função de Morse*.

Seja p um ponto crítico de f e $\chi_p, \chi'_p \in T_p(M)$. Então χ_p e χ'_p tem extensões a campos vetoriais χ, χ' . Portanto, a correspondência $H_p(f) : (\chi_p, \chi'_p) \mapsto \chi_p(\chi'f)$ define

uma forma bilinear simétrica em $T_p(M)$. De fato Se

$$\chi = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad e \quad \chi' = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

temos que

$$[\chi, \chi'] = \sum_i \left(\sum_j a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

implica

$$\chi_p(\chi' f) - \chi'_p(\chi f) = [\chi, \chi']_p(f) = 0.$$

Se consideramos as funções a_i e b_j como funções constantes, então

$$H_p(f)(\chi_p, \chi'_p) = \chi_p(\chi' f) = \chi_p \left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Assim, a matriz $H(f)$ representa a forma bilinear $H_p(f)$ na base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$.

O índice λ de f em p é o número de autovalores negativos da matriz que representa a $H_p(f)$.

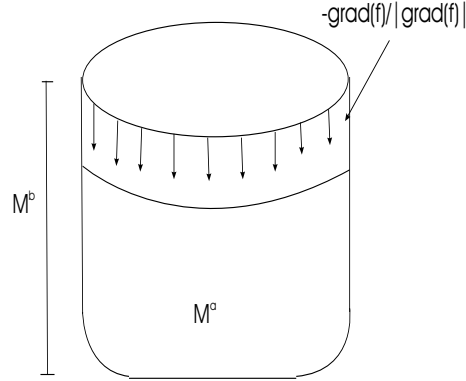
Lema 2.1.1 Lema de Morse. *Seja M uma variedade diferenciável n -dimensional e p um ponto crítico não degenerado de índice λ de uma função suave $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Então existe um sistema coordenado local $(y_1, \dots, y_n)$ numa vizinhança U de p com $y_i(p) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ tal que*

$$f(y_1, \dots, y_n) = f(p) - y_1^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_n^2.$$

Prova: Ver [13], lema 2.2. □

Lema 2.1.2 *Se $f^{-1}[a, b]$ é compacto e não contem pontos críticos de f , então M^a é difeomorfa a M^b , além disso M^a é um retrato por deformação de M^b ; assim, a inclusão $M^a \hookrightarrow M^b$ é uma equivalência homotópica.*

Prova: Ver [13], teorema 3.1. □



Definição 2.1.3 Triáde de variedades diferenciáveis. Uma triáde de variedades diferenciáveis é uma tripla (W, V_0, V_1) , onde W é uma variedade compacta e $Bd(W)$ é a união disjunta de duas subvariedades fechadas V_0 e V_1 .

Observação 2.1.4 De acordo com nossa definição, uma variedade compacta sem bordo é também uma triáde de variedade diferenciável.

Definição 2.1.5 Cobordismo. Dadas duas variedades fechadas M_0 e M_1 (isto é M_0, M_1 compactas com $Bd(M_0) = Bd(M_1) = \emptyset$). Um cobordismo de M_0 a M_1 é uma quintupla (W, V_0, V_1, h_0, h_1) , onde (W, V_0, V_1) é uma triáde de variedades diferenciáveis e $h_i : V_i \rightarrow M_i$ é um difeomorfismo ($i = 0, 1$).

Dois cobordismos (W, V_0, V_1, h_0, h_1) e $(W', V'_0, V'_1, h'_0, h'_1)$ de M_0 a M_1 são ditos equivalentes se existe um difeomorfismo $g : W \rightarrow W'$ levando V_0 a V'_0 e V_1 a V'_1 tal que para cada $(i = 0, 1)$ o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{g|_{V_i}} & V'_i \\ & \searrow h_i \quad \swarrow h'_i & \\ & M_i & \end{array}$$

Observação 2.1.6 No que segue identificaremos a triáde (W, V_0, V_1) com o cobordismo $(W, V_0, V_1, id_{V_0}, id_{V_1})$.

Observação 2.1.7 Na seção 3.2 será necessário utilizar o conceito de orientação, então um cobordismo consistirá de uma variedade compacta orientada. Portanto, de acordo ao teorema 1.2.1 o bordo $Bd(W)$ será orientada.

Observação 2.1.8 Se consideramos D^2 com a orientação standard deduzida da orientação de $\mathbb{R}^2$, a orientação induzida em $S^1 = Bd(D^2)$, corresponde ao sentido anti-horário em S^1 .

Lema 2.1.9 Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^2(U)$. Então para quase toda forma linear $L \in (\mathbb{R}^n)^*$, a função $f + L$ tem somente pontos críticos não degenerados.

Prova: Ver [3], pág. 43. □

Definição 2.1.10 Função boa. Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e C um subconjunto de M . Dizemos que f é boa em C se f não tem pontos críticos degenerados em C .

Lema 2.1.11 Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e K um subconjunto compacto de U . Se $f \in C^2(U)$ é boa em K , então existe $\delta > 0$ tal que para toda $g \in C^2(U)$ satisfazendo em K

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| < \delta \quad e \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \delta \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Então g é boa em K .

Prova: Seja $|df| = [(\frac{\partial f}{\partial x_1})^2 + \dots + (\frac{\partial f}{\partial x_n})^2]^{1/2}$.

Por ser f boa em K , temos

$$h = |df| + |\det(H(f))| > 0.$$

Se $\mu = \min(h)$ em K , seja $\eta < (\frac{\mu}{2n})^{1/2}$ e $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| < \eta$. Então

$$||df| - |dg|| \leq |df - dg| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|^2} < \frac{\mu}{2}.$$

Por outra parte

$$\begin{aligned}
||H(f)| - |H(g)|| &\leq |H(f) - H(g)| \\
&= \left| \sum_{i,j} F\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right| \right| \\
&\leq M \sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right| \\
&< \delta.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Onde F é um polinômio. Ora, seja $\delta < \min\{\eta, \frac{\mu}{2Mn^2}\}$ e suponhamos 2.1.2. Então

$$||df| - |dg|| < \frac{\mu}{2} \quad e \quad |det[H(f)] - det[H(g)]| < \frac{\mu}{2}$$

implica

$$0 \leq -\frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2} < |df| + det[H(f)] < |dg| + det[H(g)].$$

Segue-se então que g é boa em K . □

Lema 2.1.12 *Sejam U y U' subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$, $h : U \longrightarrow U'$ um difeomorfismo, $K \subseteq U$ compacto e $h(K) = K'$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $f \in C^\infty(U')$ satisfaz em K'*

$$|f| < \delta \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| < \delta \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \delta. \tag{2.4}$$

Então $f \circ h$ satisfaz em K

$$|f \circ h| < \delta \quad \left| \frac{\partial f \circ h}{\partial x_i} \right| < \delta \quad \left| \frac{\partial^2 f \circ h}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \delta. \tag{2.5}$$

Prova: Pela regra da cadeia temos

$$\frac{\partial f \circ h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial h_n}{\partial x_i}$$

ou que implica

$$\frac{\partial^2 f \circ h}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial^2 h_1}{\partial x_i \partial x_j} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n} \frac{\partial h_n}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_n} \frac{\partial^2 h_n}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Desde que K' é compacto, as funções h , $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}$ são limitadas. Seja δ suficientemente pequeno satisfazendo 2.1.3, então segue a nossa afirmação. □

Definição 2.1.13 Uma função de Morse em uma tríade de variedades diferenciáveis (W, V_0, V_1) , é uma função diferenciável $f : W \rightarrow [a, b]$ tal que

1. $f^{-1}(a) = V_0, f^{-1}(b) = V_1,$

2. Todos os pontos críticos de f são não degenerados e pertencem ao conjunto $W \setminus Bd(W)$.

Lema 2.1.14 Existe uma função suave $f : W \rightarrow [0, 1]$ com $f^{-1}(0) = V_0, f^{-1}(1) = V_1$ tal que f não tem pontos críticos numa vizinhança de $Bd(W)$.

Prova: Seja $U_1, \dots, U_k$ uma cobertura aberta de W por vizinhanças coordenadas. Podemos supor que nenhum U_i intercepta a V_0 e V_1 simultaneamente e que se $U_i \cap Bd(W) \neq \emptyset$, então a aplicação coordenada correspondente é $h_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}_+^n \cap B_1(0)$.

Seja $i = 1, \dots, n$ fixo e $h_i = (x_i^1, \dots, x_i^n)$.

Definimos

$$f_i = \begin{cases} x_i^n, & \text{se } U_i \cap V_0 \neq \emptyset \\ 1 - x_i^n, & \text{se } U_i \cap V_1 \neq \emptyset \\ \frac{1}{2}, & \text{se } U_i \cap Bd(W) = \emptyset \end{cases}$$

Escolhemos uma partição da unidade $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ subordinada à cobertura $\{U_1, \dots, U_k\}$ e definimos

$$\begin{aligned} f : W &\rightarrow [0, 1] \\ p &\mapsto \varphi_1(p)f_1(p) + \dots + \varphi_k(p)f_k(p) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Se p é fixo, $l = \max\{f_1(p), \dots, f_k(p)\} \leq 1$, então

$$\sum_{i=1}^k \varphi_i(p)f_i(p) \leq l \sum_{i=1}^k \varphi_i(p) = l \leq 1$$

portanto, f está bem definida e claramente f é suave pois, se $l \leq k$, então $f = \varphi_1 f_1 + \dots + \varphi_l f_l$ em $U_1 \cap \dots \cap U_l$.

Afirmção 1. $f^{-1}(0) = V_0$. Seja $p \in V_0$ e consideremos $U_1, \dots, U_s$ as vizinhanças cobrindo V_0 com $s < k$. De acordo ao lema 2.1.1, $x_i^n(p) = 0$, onde $h_i = (x_i^1, \dots, x_i^n)$, então

$$\varphi_1(p)f_1(p) + \dots + \varphi_s(p)f_s(p) = 0.$$

Afirmção 2. $f^{-1}(1) = V_1$. Seja $p \in V_1$ então

$$1 = \varphi_1(p)(1 - x_1^n(p)) + \dots + \varphi_l(p)(1 - x_l^n(p)) = \varphi_1(p)f_1(p) + \dots + \varphi_k(p)f_k(p).$$

Afirmção 3. $df \neq 0$ em $Bd(W)$. Seja $q \in V_0$ (resp. $q \in V_1$). Então para algum i , $\varphi_i(q) > 0$ e $q \in U_i$, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x^n} = \sum_{j=1}^k f_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^n} + \{\varphi_1 \frac{\partial f_1}{\partial x^n} + \dots + \varphi_i \frac{\partial f_i}{\partial x^n} + \dots\} \quad (2.7)$$

Se $q \in V_1$, então $f_i(q) = 1$ para $i = 1, \dots, k$. Assim,

$$1 = f(q) = \varphi_1(q)f_1(q) + \dots + \varphi_k(q)f_k(q) = \varphi_1(q)(1 - x_1^n(q)) + \dots + \varphi_k(q)(1 - x_l^n(q))$$

implica

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^n} = \frac{\partial}{\partial x^n} \left(\sum_{j=1}^k \varphi_j \right) = 0.$$

Portanto, temos que $df \neq 0$ numa vizinhança de $Bd(W)$. $\square$

2.2 A TOPOLOGIA DE MORSE

Precisamos de informações sobre o conjunto das funções de Morse definidas numa variedade compacta W , para isto introduzimos uma topologia sobre o conjunto $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$.

Definição 2.2.1 *Seja M uma variedade compacta com bordo. Consideremos o conjunto*

$$\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R}) = \{f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})\}.$$

Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura finita de M por vizinhanças coordenadas com aplicações coordenadas $h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e seja $\{C_\alpha\}$ um refinamento compacto de $\{U_\alpha\}$.

Para todo $\delta > 0$ e $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, seja $\mathcal{N}(\{f\}, \delta)$ o subconjunto de $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ formado pelas funções $f - g$ com $g \in \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ e

$$|f - g| < \delta \quad \left| \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i} \right| < \delta \quad \left| \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \delta. \quad (2.8)$$

onde

$$f_\alpha = f \circ h_\alpha^{-1} \quad e \quad g_\alpha = g \circ h_\alpha^{-1}.$$

Então a topologia de Morse ou a C^2 -topologia em $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, é a topologia gerada pelas interseções finitas dos $\mathcal{N}(\{f\}, \delta)$.

Lema 2.2.2 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave, C subconjunto compacto de M contido numa vizinhança coordenada (U, h) de M e N uma vizinhança de f . Então existe $f_1 \in N$ boa em C .*

Prova: Seja $\lambda : M \rightarrow [0, 1]$ suave tal que $\lambda = 1$ numa vizinhança de C e $\lambda = 0$ numa vizinhança de $M \setminus U$. Seja $g = f \circ h^{-1}$, pelo lema 2.1.3, para quase toda transformação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a função $g + \lambda L$ é boa em $h(C)$, como h é um difeomorfismo, a função $(g + \lambda L) \circ h$ é boa em C ; isto é, $f_1 = f(p) + \lambda(p)L(h(p))$ é boa em $C \subseteq U$.

Afirmção. Se os coeficientes da transformação linear L são suficientemente pequenos, então $f_1 \in N$.

Como $K = \text{Suporte}(\lambda) \subseteq U$ e $\lambda = 0$ numa vizinhança de $M \setminus U$, então f_1 difere de f somente em K . Seja $L(x) = L(x_1, \dots, x_n) = \sum l_i x_i$. Tem-se que

$$g \circ h^{-1}(x) - f \circ h^{-1}(x) = (\lambda h^{-1}(x)) \sum l_i x_i \quad \forall x \in h(K) \quad (2.9)$$

Desde que $h(K)$ é compacto, por escolha de l_i suficientemente pequeno conseguimos que a diferença 2.2.2 junto com sua primeira e segunda derivada é menor do que um $\epsilon > 0$ no conjunto $h(K)$. Agora, se ϵ é suficientemente pequeno, segue-se que $f_1 \in N$. $\square$

Observação 2.2.3 *Aplicando o lema 2.1.4, podemos conseguir uma vizinhança N_1 de f_1 e $N_1 \subseteq N$. Assim, qualquer função em N_1 é também boa em C .*

Teorema 2.2.4 *Em qualquer tríade (W, V_0, V_1) existe uma função de Morse.*

Prova: O lema 2.1.6 nos diz que $\exists$ uma função suave $f : W \rightarrow [0, 1]$ tal que

1. $f^{-1}(0) = V_0$, $f^{-1}(1) = V_1$.
2. f não tem pontos críticos numa vizinhança de $Bd(W)$.

Queremos eliminar os pontos críticos degenerados em $W \setminus Bd(W)$ preservando as propriedades 1 y 2 de f . Seja U uma vizinhança aberta de $Bd(W)$ no qual f não tem pontos críticos. Como W é normal, existe uma vizinhança aberta V de $Bd(W)$ tal que $\overline{V} \subseteq U$. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura finita de W por vizinhanças coordenadas. Desde que $W = [\bigcup U_\alpha \cap (W \setminus \overline{V})] \cup [\bigcup (U_\alpha \cap U)]$, podemos supor que cada U_α está contido em U ou em $W \setminus \overline{V}$. Seja $\{C_\alpha\}$ um refinamento compacto de $\{U_\alpha\}$ e seja C_0 a união dos

C_α contidos em U ; claramente C_0 é compacto. Agora, pelo lema 2.1.4 numa vizinhança suficientemente pequena N de f , nenhuma função pode ter pontos críticos degenerados em C_0 . Também, $0 < f < 1$ no conjunto compacto $W \setminus V$. Daí, se δ é suficientemente pequeno tal que $f + \delta < 1$ e $0 < f - \delta$, então para g em $W \setminus V$ temos que $0 < g < 1$ na vizinhança $N' = N(\delta, f)$.

Seja $N_0 = N \cap N'$ e suponhamos que as vizinhanças coordenadas em $W \setminus \overline{V}$ são $U_1, \dots, U_k$. De acordo ao lema e observação anterior, existe $f_1 \in N_0$ que é boa em C_1 e numa vizinhança N_1 de f_1 , $N_1 \subseteq N_0$ para o qual, toda função é boa em C_1 . Repetindo este procedimento k vezes, conseguimos uma função $f_k \in N_k \subseteq N_{k-1} \subseteq \dots \subseteq N_0$ o qual é boa em $C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_k = M$. Desde que $f_k \in N_0 \subseteq N'$ e $f_k|_V = f|_V$, f_k satisfaz 1 e 2. Portanto, f_k é de Morse em W . $\square$

Definição 2.2.5 Número de Morse. O número de Morse μ da tríade (W, V_0, V_1) é o mínimo do número de pontos críticos de f , onde f varia sobre todas as funções de Morse $f : W \rightarrow \mathbb{R}$.

Podemos aproximar uma função de Morse por uma função de Morse com valores críticos distintos como mostra o seguinte teorema.

Corolário 2.2.6 Seja $f : W \rightarrow [0, 1]$ uma função de Morse para a tríade (W, V_0, V_1) com pontos críticos $p_1, \dots, p_k$. Então f pode-se aproximar por uma função de Morse g com os mesmos pontos críticos tal que $g(p_i) \neq g(p_j)$ para $i \neq j$.

Prova: Suponhamos $f(p_1) = f(p_2)$ e seja $\lambda : W \rightarrow [0, 1]$ uma função suave tal que $\lambda = 1$ numa vizinhança U de p_1 e $\lambda = 0$ fora de uma vizinhança N , onde $\overline{N} \subseteq W \setminus Bd(W)$ e $\overline{N}$ não contem nenhum p_i com $i \neq 1$.

Desde que $\sup(f) = s < 1$ em $\overline{U}$ e seja $\epsilon_1 \leq 1 - s$, se $f_0 = f + \epsilon_1 \lambda$ tem valores em $[0, 1]$ e $f_0(p_1) \neq f_0(p_i)$ para $i \neq 1$. Considerando em W uma métrica riemanniana, a compacidade de W nos diz que existem constantes c e c' tal que em $K = \overline{\{p \in W : 0 < \lambda(p) < 1\}}$ temos

$$0 < c \leq |grad(f)| \quad e \quad |grad(\lambda)| \leq c'.$$

Seja $0 < \epsilon < \min\{\epsilon_1, \frac{c}{c'}\}$. Afirmamos que $g = f + \epsilon \lambda$ é uma função de Morse e $g(p_1) \neq g(p_i) \forall i \neq 1$.

Claramente fora de K temos $|\text{grad}(\lambda)| = 0$ ou que implica $|\text{grad}(g)| = |\text{grad}(f)|$. Por outra parte, em K temos

$$|\text{grad}(f + \lambda)| \geq |\text{grad}(f)| - |\epsilon \text{grad}(\lambda)| > c - \epsilon c' > 0.$$

Portanto, f e g tem os mesmos pontos críticos. Desde que $H(g) = H(f) + H(\epsilon \lambda) = H(f)$, então g é também de Morse. $\square$

Lema 2.2.7 *Seja M uma variedade compacta sem bordo. As funções de Morse formam um subconjunto aberto denso de $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ na topologia- C^2 .*

Prova: Seja $(U_1, h_1), \dots, (U_k, h_k)$ uma cobertura finita de M por vizinhanças coordenadas. Podemos conseguir conjuntos compactos $C_\alpha \subseteq U_\alpha$ tal que $\{C_1, \dots, C_k\}$ cobre a M .

Afirmção 1. O conjunto de funções de Morse é aberto. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse. O lema 2.1.4 nos diz que numa vizinhança N_α de f em $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, toda função é boa em C_α . Assim, na vizinhança $N = N_1 \cap \dots \cap N_k$ de f , toda função é boa em $M = C_1 \cup \dots \cup C_k$.

Afirmção 2. O conjunto de funções de Morse é denso. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse e N uma vizinhança de f . Pelo lema 2.1.4, existe $f_1 \in N$ a qual é boa em C_1 e pela observação anterior conseguimos uma vizinhança N_1 de f_1 com $N_1 \subseteq N$. Assim, qualquer função em N_1 é boa em C_1 . Repetindo este procedimento com $f_1 \in N_1$ obtemos $f_2 \in N_1$ boa em C_2 e uma vizinhança N_2 de f_2 , $N_2 \subseteq N_1$ tal que qualquer função em N_2 é boa em C_2 . A função f_2 é claramente boa em C_1 já que pertence a N_1 . Finalmente, obtemos uma função $f_k \in N_k \subseteq N_{k-1} \subseteq \dots \subseteq N_1 \subseteq N$ o qual é boa em $C_1 \cup \dots \cup C_k = M$. $\square$

Observação 2.2.8 *Na topologia C^2 , as funções de Morse formam um subconjunto aberto denso das aplicações $f : (W, V_0, V_1) \rightarrow ([0, 1], 0, 1)$.*

Teorema 2.2.9 *Seja $f : (W, V_0, V_1) \rightarrow ([0, 1], 0, 1)$ uma função de Morse e suponhamos que $0 < c < 1$, onde c é um valor regular de f . Então $f^{-1}[0, c]$ e $f^{-1}[c, 1]$ são variedades com bordo.*

Prova: Segue-se do teorema da função implícita. De fato, se $p \in f^{-1}(c)$, então, em algum sistema coordenado local $x_1, \dots, x_n$ em torno de p , f é localmente a projeção $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_n$. $\square$

2.3 COBORDISMO SOMA

A seguir estabeleceremos o teorema da vizinhança colar, o qual é fundamental para definir uma operação entre dois cobordismos.

Definição 2.3.1 Campo vetorial tipo gradiente. *Seja uma função de Morse na tríade (W^n, V, V') com $\dim(W) = n$. Um campo vetorial ξ em W^n é dito campo vetorial tipo-gradiente para f se*

1. $\xi(f) > 0$ em $W^n \setminus \text{cr}(f)$.
2. Dado um ponto crítico p de f , existem coordenadas

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$$

numa vizinhança U de p tal que $f = f(p) - |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$ e ξ tem coordenadas

$$(-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n).$$

Lema 2.3.2 *Para toda função de Morse f numa tríade (W^n, V, V') , existe um campo vetorial tipo-gradiente ξ de f .*

Prova: Suponhamos que f tem somente um ponto crítico p . Pelo lema de Morse, escolhemos coordenadas $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$ numa vizinhança U_0 de p tal que $f = f(p) - |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$ em U_0 . Seja U uma vizinhança de p tal que $\overline{U} \subseteq U_0$. Cada ponto $p' \in W \setminus U_0$ não é um ponto crítico de f . Segue-se do teorema do posto que existem coordenadas $x'_1, \dots, x'_n$ numa vizinhança U' de p' tal que $f = cte + x'_1$ em U' .

Como $W \setminus U_0$ é compacto, podemos conseguir vizinhanças $U_1, \dots, U_k$ tal que

1. $W \setminus U_0 \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_k$.
2. $U \cap U_i = \emptyset$ $i = 1, \dots, k$ e
3. U_i tem coordenadas $x_1^i, \dots, x_n^i$ e $f = cte + x_1^i$ em U_i , $i = 1, \dots, k$.

Em U_0 existe o campo vetorial com coordenadas $(-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$. Em U_i existe o campo vetorial $\frac{\partial}{\partial x_1^i}$ com coordenadas $(1, 0, \dots, 0)$ $i = 1, \dots, k$. Seja uma partição da unidade $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ subordinada a $U_0, \dots, U_k$, mas, se ξ_i são os campos vetoriais em

U_i , então $\xi = \sum_{i=0}^k \varphi_i \xi_i$ é um campo vetorial tipo-gradiente em W com as propriedades requeridas. $\square$

Definição 2.3.3 Cobordismo produto. *Uma tríade (W, V_0, V_1) é chamada cobordismo produto se é difeomorfa à tríade $(V_0 \times [0, 1], V_0 \times 0, V_0 \times 1)$.*

Teorema 2.3.4 *Se o número de Morse μ da tríade (W, V_0, V_1) é zero, então (W, V_0, V_1) é um cobordismo produto.*

Prova: Seja $f : W \rightarrow [0, 1]$ uma função de Morse sem pontos críticos. Pelo lema 2.3.1, existe um campo vetorial tipo-gradiente ξ para f . Então $\xi(f) : W \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente positiva.

Por fazer $\bar{\xi} = \frac{\xi}{\xi(f)}$, podemos supor que $\xi(f) = 1$ em W . Seja $\varphi : [a, b] \rightarrow W$ uma curva integral para o campo ξ .

De $\varphi'(t) = \xi_{\varphi(t)}$ temos que

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi) = (df)_{\varphi(t)} \circ \xi_{\varphi(t)} = \xi_{\varphi(t)}(f) = (\xi(f))(\varphi(t)) = 1.$$

Então $f(\varphi(t)) = t + cte$. Fazendo mudança de parâmetros $\psi(s) = \varphi(s - cte)$ obtemos uma curva integral que satisfaz $f(\psi(s)) = s$. Ora, desde que W é compacto, cada curva integral pode-se estender sobre um intervalo maximal da forma $[0, 1]$.

Assim, para cada $y \in W$, existe uma curva integral maximal $\psi_y : [0, 1] \rightarrow W$ o qual passa pelo ponto y , e satisfaz $f(\psi_y(s)) = s$. Ademais, pelo teorema do fluxo, $\psi_y(s)$ é uma função suave nas duas variáveis.

Define-se $\theta : V_0 \times [0, 1] \rightarrow W$ por $(y_0, s) \mapsto \psi_{y_0}(s)$ a qual é injetiva pelo teorema fundamental dos fluxos e tem por inversa a função suave $W \rightarrow V_0 \times [0, 1]$ definido por $y \mapsto (\psi_y, f(y))$. $\square$

Corolário 2.3.5 Teorema da vizinhança colar. *Seja W uma variedade compacta com bordo. Existe uma vizinhança de $Bd(W)$ chamada vizinhança colar difeomorfa a $Bd(W) \times [0, 1)$.*

Prova: Pelo lema 2.1.6, existe uma função suave $f : W \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $f^{-1}(0) = Bd(W)$ e $df \neq 0$ numa vizinhança U de $Bd(W)$. Seja

$$0 < \epsilon < \inf\{M : |f| \leq M \text{ em } W \setminus U\}.$$

Então f é de Morse em $f^{-1}[0, \frac{\epsilon}{2}]$. O teorema anterior nos diz que $f^{-1}[0, \frac{\epsilon}{2})$ é difeomorfa a $f^{-1}(0) \times [0, 1) = Bd(W) \times [0, 1)$. $\square$

Definição 2.3.6 Uma subvariedade fechada conexa $M^{n-1} \subseteq W^n \setminus Bd(W^n)$ é chamada bilateral se alguma vizinhança de M^{n-1} em W^n é separada em duas componentes quando M^{n-1} é removido.

Corolário 2.3.7 Teorema da bicularidade. Suponhamos que toda componente de uma subvariedade suave M de W é compacta e bilateral. Existe uma vizinhança bicular de M em W difeomorfa a $M \times (-1, 1)$ tal que a M corresponde a $M \times 0$.

Prova: Seja C é uma componente conexa de M . Desde que $C \subseteq W \setminus Bd(W)$, C é compacto e contido no aberto $W \setminus Bd(W)$, assim existe um compacto D tal que $C \subseteq D^\circ$ e $D \subseteq W \setminus Bd(W)$ ou que implica $C \subseteq D^\circ$ e $D^\circ =$ união de suas componentes conexas. Desde que cada componente de M pode ser coberta por conjuntos abertos disjuntos, é suficiente considerar o caso que M tenha somente uma componente conexa.

Seja U vizinhança aberta de M em $W \setminus Bd(W)$ tal que $\overline{U}$ é compacto e está contido numa vizinhança V' de M o qual é separado em duas componentes quando M é removido. Temos:

$$M \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V' \subseteq W.$$

Seja $V' \setminus M = U'_1 \cup U'_2$ e $U_i = (M \cap U'_i) \cap U$ $i = 1, 2$, então $U_1 \cap U_2 = M = Bd(U_1) = Bd(U_2)$. Como na prova do lema 2.1.6, escolhemos uma cobertura finita $U_1, \dots, U_k$ de W formada por vizinhanças coordenadas e suponhamos que estes são precisamente os que cobrem a U . Seja $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ uma partição da unidade subordinada a esta cobertura. Se $\psi_i : U_i \rightarrow V_i$ ($i = 1, \dots, k$) são as funções coordenadas tal que $\psi_i(M \cap U_i) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ e $\pi_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção na n -ésima coordenada. Seja $\xi_i = \pi_n \circ \psi_i$, então $\varphi = \sum_{i=1}^k \varphi_i \xi_i$ define uma função suave $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d\varphi \neq 0$ em M , $\varphi < 0$ em $\overline{U} \setminus U_1$, $\varphi = 0$ em M e $\varphi > 0$ em $\overline{U} \setminus U_2$.

Seja V vizinhança aberta de M com $\overline{V} \subseteq U$ tal que φ não tem pontos críticos em V . Consideremos o ínfimo e supremo $2\epsilon''$ e $2\epsilon'$ tal que

$$|\varphi| \leq 2\epsilon'' \quad e \quad 2\epsilon' \leq |\varphi|$$

então, de acordo a teorema 2.3.3, $\varphi^{-1}[\epsilon', \epsilon'']$ é uma subvariedade compacta n -dimensional de V que tem por bordo $\varphi^{-1}(\epsilon') \cup \varphi^{-1}(\epsilon'')$ e φ é de Morse em $\varphi^{-1}[\epsilon', \epsilon'']$. Portanto,

$$\varphi^{-1}[\epsilon', \epsilon''] \approx \varphi^{-1}(\epsilon') \times [-1, 1] \approx \varphi^{-1}(0) \times [-1, 1] \approx M \times [-1, 1].$$

□

Lema 2.3.8 Outra caracterização de variedade diferenciável. *Seja M um conjunto e seja $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ uma família, onde cada U_i é subconjunto de M e $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva e tem-se as seguintes condições.*

- i) *Para cada $i \in I$, $\varphi_i(U_i)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{R}_+^n$).*
- ii) *Para cada par i, j tem-se $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ e $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ são abertos.*
- iii) *Sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ é diferenciável.*
- iv) *Uma subfamília enumerável de $\mathcal{A}$ cobre M .*
- v) *Sempre que p e q são dois pontos distintos em M , existe algum U_i que contém p e q ou existem conjuntos disjuntos U_i, U_j com $p \in U_i$ e $q \in U_j$.*

Então M possui uma única estrutura de variedade diferenciável de dimensão n tal que cada (U_i, φ_i) é uma carta suave. **Prova:** Ver [9], lema 1.14. □

Teorema 2.3.9 *Sejam (W, V_0, V_1) , (W', V'_1, V'_2) duas tríades de variedades diferenciáveis e $h : V_1 \rightarrow V'_1$ um difeomorfismo. Então existe uma estrutura suave $\mathcal{S}$ para $W \bigcup_h W'$ compatível com as estruturas de W e W' . $\mathcal{S}$ é única a menos de difeomorfismo com V_0 , $h(V_1) = V'_1$ e V'_2 fixos.*

Prova: Existência. Pelo corolário 2.3.4, existem vizinhanças colares U_1, U'_1 de V_1 e V'_1 em W e W' respectivamente e mergulhos $g_1 : V_1 \times (0, 1] \hookrightarrow W$, $g_2 : V'_1 \times [1, 2) \hookrightarrow W'$ tal que

$$g_1(x, 1) = x, \quad x \in V_1 \quad e \quad g_2(y, 1) = y, \quad y \in V'_1.$$

Sejam $j : W \hookrightarrow W \bigcup_h W'$, $j' : W' \hookrightarrow W \bigcup_h W'$ as inclusões como na definição 1.1.2.

Defina uma aplicação

$$g : V_1 \times (0, 2) \rightarrow W \bigcup_h W'$$

por

$$g(x, t) = \begin{cases} j(g_1(x, t)), & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ j'(g_2(h(x), t)), & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

É claro que $j(W \setminus V_1)$, $j'(W' \setminus V'_1)$ e $g(V_1 \times (0, 2))$ formam uma cobertura de $W \bigcup_h W'$. Porém, O lema 2.3.5 nos diz que j e j' transportam as estruturas diferenciáveis de $W \setminus V_1$ e $W' \setminus V'_1$ sobre $j(W \setminus V_1)$ e $j'(W' \setminus V'_1)$ respectivamente.

Por outra parte temos que

$$j(g_1(x, 1)) = j(x) \quad e \quad j'(g_2(h(x), 1)) = j'(h(x)). \quad (2.10)$$

Sendo g_1 , g_2 diferenciáveis, de (2.3.1) junto com o fato que $D_x g_1 = I$ e $D_y g_2 = I$ obtemos que $W \setminus V_1$, $W' \setminus V'_1$ e $V_1 \times (0, 2)$ induzem uma estrutura diferenciável em $j(W \setminus V_1) \cup j'(W' \setminus V'_1) \cup g(V_1 \times (0, 2)) = W \bigcup_h W'$ tal que j , j' e g são diferenciáveis.

Para a unicidade estabeleceremos a seguinte definição e um resultado.

Definição 2.3.10 Dobro de uma variedade diferenciável. *Dado Uma variedade diferenciável M com bordo não vazio, definimos o dobro de M , $D(M)$ como a união de $M_0 = M \times 0$ e $M_1 = M \times 1$, identificando $(x, 0)$ e $(x, 1)$ sempre que $x \in Bd(M)$. Estabelecemos uma estrutura diferenciável em $D(M)$ como segue: seja $p_0 : U_0 \rightarrow Bd(M_0 \times [0, 1))$ e $p_1 : U_1 \rightarrow Bd(M_1 \times (-1, 0])$ as vizinhanças colares do bordo em M_0 e M_1 . Seja U a união de U_0 e U_1 em $D(M)$ e $p : U \rightarrow Bd(M) \times (-1, 1)$ o homeomorfismo induzido por p_0 e p_1 . A estrutura diferenciável em $D(M)$ é bem determinada se p é um difeomorfismo e as inclusões de M_0 e M_1 em $D(M)$ são mergulhos.*

Proposição 2.3.11 *O dobro de uma variedade diferenciável M , é determinado de maneira única a menos de difeomorfismo.*

Prova: Ver [18], teorema 6.3. □

Unicidade. Seja $\mathcal{A}$ uma nova estrutura suave em $W \bigcup_h W'$ satisfazendo o enunciado do teorema e $\mathcal{S}$ a estrutura definida no argumento anterior. Chamemos por $j_{\mathcal{A}}, j'_{\mathcal{A}}$ as inclusões suaves com respeito a esta nova estrutura. Pelo corolário 2.3.5, existe uma vizinhança colar U de $j_{\mathcal{A}}(V_1) = j'_{\mathcal{A}}(V'_1)$ em $W \bigcup_h W'$ e um difeomorfismo suave $g_{\mathcal{A}} : V_1 \times (-1, 1) \rightarrow U$ com respeito à estrutura suave $\mathcal{A}$, tal que $g_{\mathcal{A}}(x, 0) = j_{\mathcal{A}}(x)$ para $x \in V_1$. Claramente, as vizinhanças locais de pontos fora de $g_{\mathcal{A}}(V_1 \times 0)$ coincidem e todo aberto na topologia de $\mathcal{S}$, é um aberto na topologia de $\mathcal{A}$, portanto, é suficiente ver que vizinhanças de pontos em $g_{\mathcal{A}}(V_1 \times 0)$ na topologia de $\mathcal{A}$ são também abertos na topologia de $\mathcal{S}$. Porém isto segue do fato que $j_{\mathcal{A}}^{-1}(U \cap j(W))$ e $(j'_{\mathcal{A}})^{-1}(U \cap j'_{\mathcal{A}}(W'))$ são vizinhanças colares de V_1 e V'_1 em W e W' . Finalmente, pela proposição 2.3.7 segue que $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ coincidem. $\square$

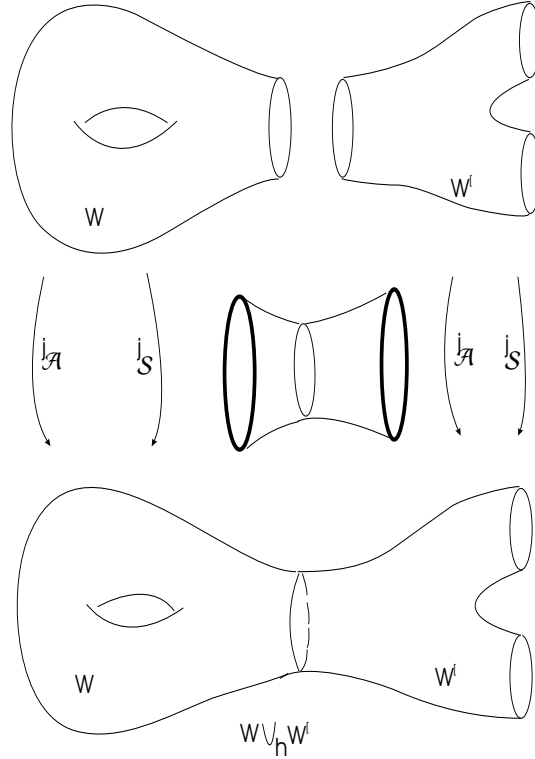


Figura 2.1. Estrutura adjunção

Observação 2.3.12 *É intuitivamente claro como podem-se unir duas variedades W e W' para ter uma outra terceira variedade. O teorema anterior mostra que o resultado é a variedade bem definida $W \bigcup_h W'$ e portanto independe do ordem desta união. Porém, depende de h .*

Observação 2.3.13 *As técnicas geométricas analíticas descritas neste trabalho são a*

base do estudo das variedades diferenciáveis, mas não são suficientes para o tratamento da maior parte dos problemas difíceis, sendo necessários instrumentos da topologia algébrica como veremos a partir da seção 3.2.

Suponhamos agora que temos duas tríades (W, V_0, V_1) , (W', V'_1, V'_2) com funções de Morse f e f' em $[0, 1]$ e $[1, 2]$ respectivamente; sejam campos vetoriais tipo-gradientes ξ e ξ' em W e W' respectivamente; normalizando podemos considerar $\xi(f) = 1$ e $\xi'(f) = 1$, exceto numa vizinhança de cada ponto crítico.

Lema 2.3.14 *Dado um difeomorfismo $h : V_1 \rightarrow V'_1$, existe uma única estrutura suave em $W \bigcup_h W'$, compatível com as estruturas em W e W' tal que por colagem de f e f' obtemos uma função suave em $W \bigcup_h W'$ e por colagem de ξ e ξ' obtemos um campo vetorial suave.*

Prova: Segue-se usando o teorema da forma canônica para um campo vetorial e imitar a prova do teorema 2.3.4. $\square$

Corolário 2.3.15

$$\mu(W \bigcup_h W', V_0, V'_2) \leq \mu(W, V_0, V_1) + \mu(W', V'_1, V'_2)$$

onde μ é o número de Morse na tríade.

Prova: Se f e f' são funções de Morse definidas em W e W' , então o lema 2.3.8 nos diz que temos uma função de Morse definida em $W \bigcup_h W'$, mas, na colagem as funções f e f' podem-se aproximar por funções diferenciáveis de tal forma que na colagem destas funções obtemos uma nova função definida em $W \bigcup_h W'$ e esta nova função não possui nenhum ponto crítico. A figura 2.2 junto com a figura 3.2 nos dá uma descrição de isto. $\square$

Utilizando a definição 2.1.2 e o corolário acima, temos então uma categoria onde os objetos são variedades fechadas e os morfismos são classes c de cobordismos. Isto quer dizer que cobordismos satisfazem as seguintes condições que seguem do teorema 2.3.6.

1. Dadas classes de equivalência de cobordismos c de M_0 a M_1 e c' de M_1 a M_2 , existe uma classe bem definida cc' de M_0 a M_2 e esta operação é associativa.

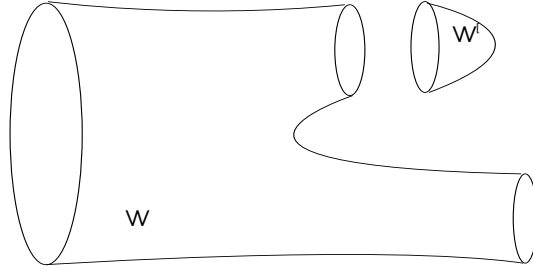


Figura 2.2. W e W' tem cada um deles um ponto crítico.

2. Para toda variedade fechada M , existe a classe cobordismo identidade 1_M = a classe de equivalência de $(M \times I, M \times 0, M \times 1, p_0, p_1)$, $p_i(x, i) = x$, $x \in M$, $i = 0, 1$. Isto é, se c é a classe de cobordismo de M_1 a M_2 , então

$$id_{M_1} c = c = c id_{M_2}.$$

Considerando classes de cobordismo de M em si mesmo com M fixo, estas classes formam um monóide H_M , isto é, um conjunto com uma operação associativa com identidade. Os cobordismos invertíveis em H_M formam um grupo G_M .

Podemos construir alguns elementos de G_M por considerar $M = M'$ como segue:

dado um difeomorfismo $h : M \rightarrow M'$, definimos c_h como a classe $(M \times I, M \times 0, M \times 1, j, h_1)$, onde $j(x, 0) = x$ e $h_1(x, 1) = h(x)$, $x \in M$.

Teorema 2.3.16 Para qualquer dois difeomorfismos $h : M \rightarrow M'$ e $h' : M' \rightarrow M''$ temos

$$c_h c_{h'} = c_{h'h}$$

Prova: Seja $W = M \times I \cup_h M' \times I$ e sejam $j_h : M \times I \rightarrow W$, $j_{h'} : M' \times I \rightarrow W$ as inclusões que resultam de construir o cobordismo $c_h c_{h'}$. Defina $g : M \times I \rightarrow W$ como segue:

$$g(x, t) = \begin{cases} j_h(x, 2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ j_{h'}(h(x), 2t - 1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

então g é bijetiva e suave, daí a equivalência requerida. $\square$

Definição 2.3.17 Isotopia e pseudo-isotopia. Dois difeomorfismos $h_0, h_1 : M \rightarrow M'$ são (suavemente) isotópicos se existe uma aplicação $f : M \times I \rightarrow M'$ tal que

1. f é suave.
2. Cada f_t definida por $f_t(x) = f(t, x)$ é um difeomorfismo.
3. $f_0 = h_0, f_1 = h_1$.

Dois difeomorfismos $h_0, h_1 : M \rightarrow M'$ são pseudo-isotópicos se existe um difeomorfismo $g : M \times I \rightarrow M' \times I$ tal; que $g(x, 0) = (h_0(x), 0), g(x, 1) = (h_1(x), 1)$

Lema 2.3.18 *Isotopia e pseudo-isotopia são relações de equivalência.*

Prova: Desde que simetria e reflexividade são diretos, é suficiente provar a transitividade.

Vejamos o caso da isotopia. Sejam $h_0, h_1, h_2 : M \rightarrow M'$ difeomorfismos e suponhamos que temos isotopias $f, g : M \times I \rightarrow M'$ entre h_0 e h_1 e entre h_1 e h_2 respectivamente. Seja $m : I \rightarrow I$ uma função suave tal que

$$m(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ 1, & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

A isotopia requerida entre h_0 e h_2 é então definida por

$$k(x, t) = \begin{cases} f(x, m(2t)), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(x, m(2t - 1)), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Vejamos o caso da pseudo-isotopia. Seja g uma pseudo-isotopia entre h_0 e h_1 e f uma pseudo-isotopia entre h_1 e h_2 respectivamente. Assim, temos os difeomorfismos

$$M \times I \xrightarrow{g} M' \times I \quad e \quad M \times I \xrightarrow{f} M' \times I$$

tal que

$$g(x, 0) = (h_0(x), 0) \quad e \quad g(x, 1) = (h_1(x), 1)$$

como também

$$f(x, 0) = (h_1(x), 0) \quad e \quad f(x, 1) = (h_2(x), 1).$$

Então $M \times I \xrightarrow{k} M' \times I$ definida por

$$k(x, t) = \begin{cases} g(x, m(3t)), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (h_1(x), m(2 - 3t)), & \text{se } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ f(x, m(3t - 2)), & \text{se } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é a pseudo-isotopia requerida.

□

Teorema 2.3.19 $c_{h_0} = c_{h_1}$ se, e somente se, h_0 é pseudo-isotópico a h_1 .

Prova: Suponhamos que h_0 é pseudo-isotópico a h_1 . Então existe um difeomorfismo $g : M \times I \rightarrow M' \times I$ tal que

$$g(x, 0) = (h_0(x), 0) \quad e \quad g(x, 1) = (h_1(x), 1).$$

Sejam $c_{h_0} = (M \times I, M \times 0, M \times 1, j, h_1^0)$ onde $j(x, 0) = x$ e $h_1^0(x) = h_0(x)$ e seja $c_{h_1} = (M \times I, M \times 0, M \times 1, j, h_1^1)$ onde $j(x, 0) = x$ e $h_1^1(x) = h_1(x)$.

Defina $h_0^{-1} : M' \times I \rightarrow M \times I$ por $(x, t) \mapsto (h_0^{-1}(x), t)$. Se $\varphi = (h_0^{-1} \times 1) \circ g$, então temos que $\varphi(V_0) = V'_0$ e $\varphi(V_1) = V'_1$ e ademais $j \circ (\varphi|_{M \times 0}) = j$ e $h_1^0 \circ (\varphi|_{M \times 1}) = h_1^1$. Portanto, $c_{h_0} = c_{h_1}$. Reciprocamente, seja $c_{h_0} = c_{h_1}$. Então existe difeomorfismo $\varphi : M \times I \rightarrow M \times I$ com $\varphi(M \times 0) = M \times 0$, $\varphi(M \times 1) = M \times 1$ e os produtos $j \circ \varphi|_{M \times 0} = j$ e $h_1^0 \circ \varphi|_{M \times 1} = h_1^1$. Daí temos que h_0 é pseudo-isotópico a h_1 $\square$

2.4 COBORDISMO ELEMENTAR

No que segue, estudaremos cobordismos com número de Morse 1. Para isto damos a seguinte definição

Definição 2.4.1 Cobordismo elementar. *Um cobordismo elementar é uma tríade (W, V, V') possuindo uma função de Morse com exatamente um ponto crítico p .*

Utilizando o teorema 2.2.5, o cobordismo (W, V_0, V_1) de V_0 a V_1 pode ser expresso como composição de dois cobordismos: de V_0 a $f^{-1}(c)$ e de $f^{-1}(c)$ a V_1 junto a corolário 2.2.3 obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.4.2 *Qualquer cobordismo pode ser expresso como uma composição de cobordismos com número de Morse 1.*

No que segue, S^{p-1} será o bordo do disco unitário fechado D^p de $\mathbb{R}^n$. Seja (W, V, V') uma tríade com função de Morse $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ e seja ξ um campo vetorial tipo-gradiente para f . Seja $p \in W$ um ponto crítico e c_0, c_1 valores regulares de f com $c_0 < f(p) < c_1$ tal que $c = f(p)$ seja o único valor crítico no intervalo $[c_0, c_1]$. Sejam as subvariedades $V_0 = f^{-1}(c_0)$ e $V_1 = f^{-1}(c_1)$.

Seja OD_r^n a bola aberta de raio r e centro zero em $\mathbb{R}^n$ e seja $OD_1^n = OD^n$. Desde que ξ é um campo vetorial tipo-gradiente para f , existe uma vizinhança U de p em W e um difeomorfismo $g : OD_{2\epsilon}^n \rightarrow U$ tal que $fg(\vec{x}, \vec{y}) = c - |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$, assim ξ tem coordenadas $(-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$ em U para algum $-1 \leq \lambda \leq n$ e algum $\epsilon > 0$. Seja $V_{-\epsilon} = f^{-1}(c - \epsilon^2)$ e $V_\epsilon = f^{-1}(c + \epsilon^2)$. Podemos supor $4\epsilon^2 < \min\{|c - c_0|, |c - c_1|\}$, de $4\epsilon^2 < |c - c_0| = c - c_0$, temos

$$c_0 < f(q) < c - \epsilon^2 < c. \quad (2.11)$$

Também, de $4\epsilon^2 < |c - c_1| = c_1 - c$, então

$$c < c + \epsilon^2 < c_1 \quad (2.12)$$

De 2.4.1: $V_{-\epsilon}$ está entre V_0 e $f^{-1}(c)$. De 2.4.2: V_ϵ está entre $f^{-1}(c)$ e V_1 .

Definição 2.4.3 Mergulho característico. *Obteremos o mergulho $\varphi_L : S^{\lambda-1} \times OD^{n-\lambda} \rightarrow V_0$ como segue: primeiro definimos um mergulho*

$$\begin{aligned} S^{\lambda-1} \times OD^{n-\lambda} &\rightarrow V_{-\epsilon} \\ (u, \theta v) &\mapsto g(\epsilon u \cosh \theta, \epsilon v \sinh \theta) \end{aligned}$$

para $u \in S^{\lambda-1}$, $v \in S^{n-\lambda}$ e $0 \leq \theta < 1$. Começando no ponto $\varphi(u, \theta v)$ em $V_{-\epsilon}$, a curva integral de ξ é uma curva não singular a qual vai de $\varphi(u, \theta v)$ a algum ponto bem definido $\varphi_L(u, \theta v) \in V_0$.

Definimos a esfera à esquerda S_L de p em V_0 como a imagem $\varphi_L(S^{\lambda-1} \times 0)$ e notemos que S_L é exatamente a interseção de V_0 com todas as curvas integrais de ξ que conduzem ao ponto crítico p .

De maneira similar o mergulho característico $\varphi_R : OD^\lambda \times S^{n-\lambda-1} \rightarrow V_1$ é obtido mergulhando

$$\begin{aligned} OD^\lambda \times S^{n-\lambda-1} &\rightarrow V_\epsilon \\ (\theta u, v) &\mapsto g(\epsilon u \sinh \theta, \epsilon v \cosh \theta) \end{aligned}$$

e então trasladando esta imagem a V_1 pelas curvas integrais de ξ obtemos o mergulho requerido.

A esfera à direita S_R de p em V_1 é definido por $\varphi_R(0 \times S^{n-\lambda-1})$. Isto é o bordo do semi-disco à direita D_R definido como a união de segmentos de curvas integrais de ξ começando em p e terminando em S_R .

Definição 2.4.4 Cirurgia. Dada uma variedade V de dimensão $n - 1$ e um mergulho

$$\varphi : S^{\lambda-1} \times OD^{n-\lambda} \rightarrow V$$

seja $\chi(V, \varphi)$ a variedade quociente obtida da soma disjunta $(V - \varphi(S^{\lambda-1} \times 0)) + (OD^\lambda \times S^{n-\lambda-1})$ identificando $\varphi(u, \theta v)$ com $(\theta u, v)$ para cada $u \in S^{\lambda-1}$, $v \in S^{n-\lambda-1}$, $0 < \theta < 1$.

Se V' denota qualquer variedade difeomorfa a $\chi(V, \varphi)$, então dizemos que V' pode ser obtido de V por cirurgia de tipo $(\lambda, n - \lambda)$.

Os dois resultados seguintes mostram que fazer uma cirurgia de tipo $(\lambda, n - \lambda)$ corresponde a obter um ponto crítico de índice λ de uma função de Morse numa variedade.

Teorema 2.4.5 Se $V' = \chi(V, \varphi)$ pode ser obtido de V por uma cirurgia de tipo $(\lambda, n - \lambda)$, então existe um cobordismo elementar (W, V, V') e uma função de Morse $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ com exatamente um ponto crítico de índice λ .

Prova: Consideremos o conjunto L_λ formado pelos pontos $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^{n-\lambda} = \mathbb{R}^n$ o que satisfazem

$$-1 \leq -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 \leq 1 \quad e \quad |\vec{x}||\vec{y}| < (\sinh(1))(\cosh(1)).$$

Por transversalidade temos que L_λ é uma variedade diferenciável com dos bordos

O bordo a esquerda: $-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = -1$ o qual é difeomorfa a $S^{\lambda-1} \times OD^{n-\lambda}$ por

$$\begin{aligned} S^{\lambda-1} \times OD^{n-\lambda} &\rightarrow \{-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = -1\} \cap \{|\vec{x}||\vec{y}| < (\sinh(1))(\cosh(1))\} \\ (u, \theta v) &\mapsto (u \cosh \theta, v \sinh \theta) \end{aligned} \quad (2.13)$$

O bordo a direita: $-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = 1$ o qual é difeomorfa a $OD^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$ por

$$\begin{aligned} OD^\lambda \times S^{n-\lambda-1} &\rightarrow \{-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = 1\} \cap \{|\vec{x}||\vec{y}| < (\sinh(1))(\cosh(1))\} \\ (\theta u, v) &\mapsto (u \sinh \theta, v \cosh \theta). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Consideremos as trajetórias ortogonais das superfícies

$$-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = cte$$

A trajetória a qual passa pelo ponto $(\vec{x}, \vec{y})$ pode ser parametrizada por $t \rightarrow (t\vec{x}, t^{-1}\vec{y})$.

Se $\vec{x}$ ou $\vec{y}$ é zero, esta trajetória é um segmento de reta que vai para a origem. Para $\vec{x}$ e $\vec{y}$ diferente de zero, isto é uma hipérbole a qual faz corresponder todo ponto $(u \cosh \theta, v \sinh \theta)$ no bordo esquerdo de L_λ a um ponto bem definido $(u \sinh \theta, v \cosh \theta)$ no bordo direito de L_λ .

Construímos uma n -variedade como segue: começamos com a soma disjunta

$$(V - \varphi(S^{\lambda-1}) \times D^1) + L_\lambda$$

para cada $u \in S^{\lambda-1}$, $v \in S^{n-\lambda-1}$, $0 < \theta < 1$ e $c \in D^1$.

Identificamos o ponto $(\varphi(u, \theta v), c)$ no primeiro somando com o único ponto $(\vec{x}, \vec{y}) \in L_\lambda$ tal que

1. $-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = cte$
2. $(\vec{x}, \vec{y})$ está na trajetória ortogonal a qual passa pelo ponto $(u \cosh \theta, v \sinh \theta)$.

Esta correspondência define um difeomorfismo

$$\varphi(S^{\lambda-1} \times (OD^{n-\lambda})) \times D^1 \leftrightarrow L_\lambda \cap (\mathbb{R}^\lambda - \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n-\lambda} - \{0\})$$

logo $W = \omega(V, \varphi)$ é uma variedade diferenciável.

$\omega(V, \varphi)$ tem dois bordos correspondentes a $c = -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = -1$ e $+1$.

O bordo a esquerda pode-se identificar com V fazendo corresponder a $z \in V$

$$\begin{aligned} (z, -1) &\in (V - \varphi(S^{\lambda-1} \times 0)) \times D^1 \quad \forall z \notin \varphi(S^{\lambda-1} \times 0) \\ (u \cosh \theta, v \sinh \theta) &\in L_\lambda \quad \forall z = \varphi(u, \theta v) \end{aligned} \tag{2.15}$$

O bordo a direita pode-se identificar com $\chi(V, \varphi)$ pela correspondência

$$\begin{aligned} (z, +1) &\text{ com } z \in V - \varphi(S^{\lambda-1} \times 0) \quad \text{e} \\ (u \sinh \theta, v \cosh \theta) &\in L_\lambda \quad \text{com } (\theta u, v) \in OD^\lambda \times S^{n-\lambda-1} \end{aligned} \tag{2.16}$$

A função $f : \omega(V, \varphi) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} f(z, c) &= c \quad \forall (z, c) \in (V - \varphi(S^{\lambda-1} \times 0)) \times D^1 \\ f(\vec{x}, \vec{y}) &= -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 \end{aligned} \tag{2.17}$$

é uma função de Morse com somente um ponto crítico. $\square$

Teorema 2.4.6 *Seja (W, V, V') um cobordismo elementar com mergulho característico*

$\varphi_L : S^{\lambda-1} \times OD^{n-\lambda} \rightarrow V$. Então (W, V, V') é difeomorfa à tríade

$$(\omega(V, \varphi_L), V, \chi(V, \varphi_L)).$$

Prova: Seja $V = V_0$ e $V' = V_1$, desde que $(f^{-1}[c_0, c - \epsilon^2], V, V_{-\epsilon})$ e $(f^{-1}[c + \epsilon^2, c_1], V, V_{-\epsilon})$ são cobordismos produto, temos que (W, V, V') é difeomorfa a $(W_\epsilon, V_{-\epsilon}, V_\epsilon)$ onde $W_\epsilon = f^{-1}[c - \epsilon^2, c + \epsilon^2]$. Desde que $V \approx V_{-\epsilon}$, então $(\omega(V, \varphi_L), V, \chi(V, \varphi_L)) \approx (\omega(V_{-\epsilon}, \varphi), V_{-\epsilon}, \chi(V_{-\epsilon}, \varphi))$. Portanto, é suficiente mostrar que temos o difeomorfismo $(W_\epsilon, V_{-\epsilon}, V_\epsilon) \approx (\omega(V_{-\epsilon}, \varphi), V_{-\epsilon}, \chi(V_{-\epsilon}, \varphi))$. Defina um difeomorfismo $k : \omega(V_{-\epsilon}, \varphi) \rightarrow W_\epsilon$ como segue. Para cada $(z, t) \in (V_{-\epsilon} - \varphi(S^{\lambda-1} \times 0)) \times D^1$, seja $k(z, t)$ o único ponto de W_ϵ tal que $K(z, t)$ está na curva integral passando pelo ponto z e tal que $f(k(z, t)) = \epsilon^2 t + c$. Para cada $(\vec{c}, \vec{y}) \in L_\lambda$, seja $k(\vec{x}, \vec{y}) = g(\epsilon \vec{x}, \epsilon \vec{y})$. Segue-se então das definições de φ , de $\omega(V_{-\epsilon}, \varphi)$ e o fato que g leva trajetórias ortogonais de L_λ em curvas integrais de W_ϵ que obtemos um difeomorfismo bem definido de $\omega(V_{-\epsilon}, \varphi)$ a W_ϵ . Isto completa a nossa afirmação. $\square$

Teorema 2.4.7 *Seja (W, V, V') um cobordismo elementar possuindo uma função de Morse com um ponto crítico de índice λ . Seja D_L o disco à esquerda associado a um campo vetorial fixo tipo-gradiente. Então $V \cup D_L$ é um retrato por deformação de W .*

Prova: De acordo ao teorema 2.4.3, podemos supor que para o mergulho característico $\varphi_L : S^{\lambda-1} \times OD^{n-\lambda} \rightarrow V$ temos

$$W = \omega(V, \varphi_L) = (V - \varphi_L(S^{\lambda-1} \times 0)) \times D^1 + L_\lambda$$

módulo identificações. Agora, D_L é o disco

$$\{(\vec{x}, \vec{y}) \in L_\lambda : |\vec{y}| = 0\}.$$

Seja

$$C = \{(\vec{c}, \vec{y}) \in L_\lambda : |\vec{y}| \leq \frac{1}{10}\}$$

definiremos retratos por deformação r_t de W a $V \cup C$ e r'_t de $V \cup C$ a $V \cup D_L$. Compondo estas retrações temos a nossa afirmação.

Primeira retração.

Para cada $(v, c) \in (V - \varphi_L(S^{\lambda-1} \times OD^{n-\lambda})) \times D^1$ defina $r_t(v, c) = (v, c - t(c + 1))$.

Para cada $(\vec{x}, \vec{y}) \in L_\lambda$ defina

$$r_t(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} (\vec{x}, \vec{y}), & \text{se } |\vec{y}| \leq \frac{1}{10} \\ (\frac{\vec{x}}{\rho}, \rho \vec{y}), & \text{se } |\vec{y}| \geq \frac{1}{10} \end{cases}$$

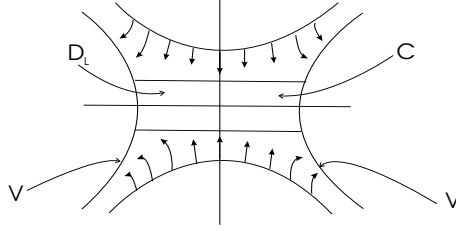


Figura 2.3. Primeira retração.

onde $\rho = \rho(\vec{x}, \vec{y}, t)$ é o máximo de $\frac{1}{10|\vec{y}|}$ e a solução real positiva para ρ da equação

$$-\frac{|\vec{x}|^2}{\rho^2} + \rho^2 |\vec{y}|^2 = [-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2](1 - t) - t.$$

Já que, para $|\vec{y}| \geq \frac{1}{10}$ a equação tem solução única positiva a qual varia continuamente, segue-se que r_t é uma retração bem definida de W a $V \cup C$.

Segunda retração.

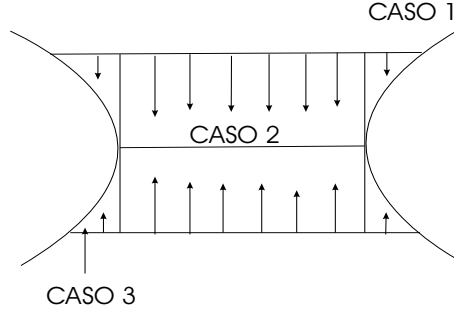


Figura 2.4. Segunda retração.

Fora de C defina r'_t pela identidade. Para cada $(\vec{x}, \vec{y}) \in C$ definimos

$$r'_t(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} (\vec{x}, (1-t)\vec{y}), & \text{se } |\vec{x}|^2 \leq 1 \\ (\vec{x}, \alpha\vec{y}), & \text{se } 1 \leq |\vec{x}|^2 \leq 1 + \frac{1}{100} \end{cases}$$

onde $\alpha = \alpha(\vec{x}, \vec{y}, t) = (1-t) + t((|\vec{x}|^2 - 1)/|\vec{y}|^2)^{1/2}$. Então, tem-se que r'_t é contínua quando $|\vec{x}|^2 \rightarrow 1$, $|\vec{y}|^2 \rightarrow 0$. Além disso, r'_t coincide para $|\vec{x}|^2 = 1$. Isto completa a prova do teorema. $\square$

Lema 2.4.8 Lema de cisão. Se $V \subseteq U \subseteq X$ são espaços topológicos com $\overline{V} \subseteq \text{int}(U)$, então a inclusão $i : (X \setminus V, U \setminus V) \rightarrow (X, U)$ induz o isomorfismo nos grupos de homologia

$$i_* : H_n(X \setminus V, U \setminus V) \rightarrow H_n(X, U).$$

Prova: Ver [4], teorema 2.20. □

Corolário 2.4.9 Supondo as hipóteses do teorema 2.4.4, $H_*(W, V)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$ em dimensão λ e zero de outra forma. Um gerador para $H_\lambda(W, V)$ é representado por D_L .

Prova:

$$\begin{aligned} H_*(W, V) &\cong H_*(V \cup D_L, V) \\ &\cong H_*(D_L, S_L) \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{em dimensão } \lambda, \\ 0, & \text{de outra forma,} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde o primeiro isomorfismo segue se do teorema 2.4.4 junto com teorema 1.5.1, e o segundo isomorfismo segue do lema de cisão. □

Observação 2.4.10 Segue-se do corolário anterior que um cobordismo elementar (W, V, V') não é um cobordismo produto; daí por teorema 2.3.2, o número de Morse é igual a um. Também, segue-se do corolário anterior que o índice do cobordismo elementar definido como o índice de p , com respeito de uma função de Morse, é bem definida (isto é, independe da escolha de f em p).

Observação 2.4.11 Suponhamos que (W, V, V') é uma tríade de variedades diferenciáveis e $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse com pontos críticos $p_1, \dots, p_k$, todos em um mesmo nível de índices $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Fixando um campo vetorial tipo-gradiente para f , obtemos mergulhos característicos disjuntos $\varphi_i : S^{\lambda_i-1} \times OD^{n-\lambda_i} \rightarrow V$, $(i = 1, \dots, k)$. Construimos então uma variedade $\omega(V; \varphi_1, \dots, \varphi_k)$ da seguinte maneira:

Começamos com a soma disjunta $(V \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(S^{\lambda_i-1} \times 0)) \times D^1 + L_{\lambda_1} + \dots + L_{\lambda_k}$. Para cada $u \in S^{\lambda_i-1}$, $v \in S^{n-\lambda_i-1}$, $0 < \theta < 1$ e $c \in D^1$, identificamos o ponto $(\varphi_i(u, \theta v), c)$ no primeiro somando com o único ponto $(\vec{x}, \vec{y}) \in L_{\lambda_i}$ tal que

i) $-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = c$, e

ii) $(\vec{x}, \vec{y})$ pertence à trajetória ortogonal a qual passa pelo ponto $(u \cosh \theta, u \sinh \theta)$.

Como no teorema 2.4.3 temos que W é difeomorfa a $\omega(V; \varphi_1, \dots, \varphi_k)$. Segue-se então como em teorema 2.4.4 que $V \cup D_1 \cup \dots \cup D_k$ é um retrato por deformação de W , onde D_i denota o disco a esquerda de p_i , ($i = 1, \dots, k$).

Finalmente, se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \lambda$, então $H_*(W, V) \cong \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ (k -somandos) em dimensão λ e zero de outra forma. Geradores de $H_\lambda(W, V)$ são completamente determinados pela escolha de uma função de Morse sem referencia ao campo vetorial tipo gradiente.

2.5 REORDENANDO COBORDISMOS

No que segue, c denotará um cobordismo; isto é, uma classe de equivalência como na definição 2.1.2.

Dizemos que a composição cc' de dois cobordismos pode ser reordenada se é equivalente a uma composição dd' de dois cobordismos elementares tal que

$$\acute{indice}(c) = \acute{indice}(d') \quad e \quad \acute{indice}(c') = \acute{indice}(d).$$

Nesta seção veremos quando isto acontece. De acordo as considerações da seção 2.4, dado uma tríade (W, V_0, V_1) para cc' , existe uma função de Morse $f : W \rightarrow [0, 1]$ com dois pontos críticos p e p' , $\acute{indice}(p) = \acute{indice}(c)$, $\acute{indice}(p') = \acute{indice}(c')$. Pelo corolário 2.2.3, seja $f(p) < \frac{1}{2} < f(p')$. Dado um campo vetorial tipo gradiente para f , as trajetórias de p interceptam $V = f^{-1}(\frac{1}{2})$ numa esfera S_R chamada *esfera a direita* de p , e as trajetória indo até p' interceptam V numa esfera mergulhada S'_L chamada *esfera a esquerda* para p' .

A continuação estabeleceremos um teorema que nos diz que cc' pode ser reordenado se $S_r \cap S'_L = \emptyset$.

Teorema 2.5.1 Teorema do reordenamento preliminar. *Seja (W, V_0, V_1) uma tríade com função de Morse f possuindo dois pontos críticos p, p' . Suponhamos que para alguma escolha de um campo vetorial tipo gradiente ξ , o conjunto compacto K_p de pontos em trajetórias indo até p , é disjunto do conjunto compacto $K_{p'}$ de trajetórias indo até p' . Se $f(W) = [0, 1]$ e $a, a' \in (0, 1)$, então existe uma nova função de Morse g tal que*

- i) ξ é um campo vetorial tipo-gradiente para g .
- ii) Os pontos críticos de g são p , p' e $g(p) = a$, $g(p') = a'$.
- iii) $g = f$ próximo de $V_0 \cup V_1$ e é igual a $g = f + cte$ em alguma vizinhança de p e em alguma vizinhança de p' .

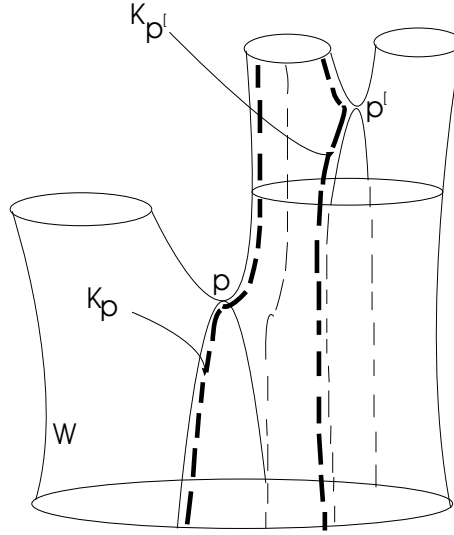


Figura 2.5. Níveis iniciais

Prova: Claramente, as trajetórias atravessando os pontos fora de V_0 e V_1 , todos vão de V_0 a V_1 . A função $\pi : W \setminus K \rightarrow V_0$ que faz corresponder a cada ponto $q \in W \setminus K$ o único ponto de interseção de sua trajetória com V_0 é suave. Também, quando q está próximo de K , $\pi(q)$ está próximo de K em V_0 . Segue que, se $\mu : V_0 \rightarrow [0, 1]$ é uma função suave a qual é zero próximo da esfera a direita $K_p \cap V_0$ e 1, próximo da esfera $K_{p'} \cap V_0$, então μ estende-se unicamente a uma função suave $\bar{\mu} : W \rightarrow [0, 1]$ que é constante em cada trajetória, zero próximo de K_p e um próximo de $K_{p'}$.

Se $G(x, y) = (1-y)G(x, 0) + yG(x, 1)$. Defina uma nova função de Morse $g : W \rightarrow [0, 1]$ por $g(q) = G(f(q), \bar{\mu}(q))$, onde $G(x, y)$ é uma função suave de $[0, 1] \times [0, 1]$ em $[0, 1]$ com as seguintes propriedades:

1. Para todo x e y , $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) > 0$ e $G(x, y)$ aumenta de 0 a 1 quando x aumenta de 0 a 1.
2. $G(f(p), 0) = a$ $G(f(p'), 1) = a'$.
3. $G(x, y) = x$ para x próximo de 0 ou 1 e para todo y .

$\frac{\partial G}{\partial x}(x, 0) = 1$ para todo x numa vizinhança de $f(p)$.

$\frac{\partial G}{\partial x}(x, 1) = 1$ para todo x numa vizinhança de $f(p')$. □

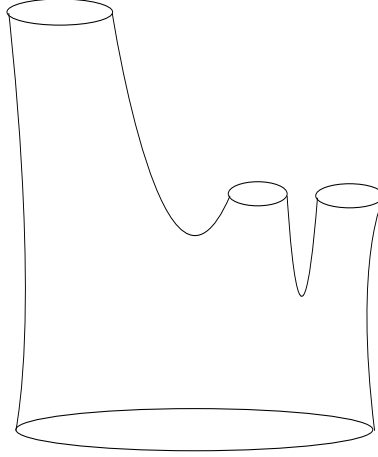


Figura 2.6. Níveis finais

Observação 2.5.2 *Se mas geralmente, a função de Morse f do teorema anterior tem dois conjuntos de pontos críticos $p = \{p_1, \dots, p_n\}$, $p' = \{p'_1, \dots, p'_l\}$, onde todos os pontos de p estão num mesmo nível $f(p)$, e todos os pontos de p' estão num mesmo nível $f(p')$, então o teorema é também verdadeiro.*

Definição 2.5.3 Vizinhança produto. *Uma vizinhança aberta U de uma subvariedade $M^m \subseteq V^v$ a qual é difeomorfa a $M^m \times \mathbb{R}^{v-m}$ tal que a M^m corresponda $M^m \times 0$, é chamada vizinhança produto de M^m em V^m .*

Lema 2.5.4 *Sejam M e N duas subvariedades de dimensões m e n em uma variedade V de dimensão v . Se M tem uma vizinhança produto em V e $m + n < v$, então existe um difeomorfismo $h : V \rightarrow V$ tal que $h(M) \cap N = \emptyset$.*

Prova: Seja $k : M \times \mathbb{R}^{v-m} \rightarrow U \subseteq V$ um difeomorfismo sobre uma vizinhança produto U de M em V tal que $k(M \times \vec{0}) = M$. Seja $N_0 = U \cap N$ e consideremos a composição $g = \pi \circ k^{-1} \Big|_{N_0}$, onde $\pi : M \times \mathbb{R}^{v-m} \rightarrow \mathbb{R}^{v-m}$ é a projeção natural.

Afirmação. $k(M \times \vec{x}) \subseteq V \cap N \neq \emptyset$ se, e somente se, $\vec{x} \in g(N_0)$.

Com efeito. Seja $k(m, \vec{x}) \in N$, desde que $k(m, \vec{x}) \in U$, temos $k(m, \vec{x}) \in N \cap U = N_0$. Assim, $g(k(m, \vec{x})) = \pi(m, \vec{x}) = \vec{x}$, a qual implica $\vec{x} \in g(N_0)$. Reciprocamente, se $\vec{x} \in g(N_0)$, então $\vec{x} = \pi \circ k^{-1} \Big|_{N_0}(n_0)$ para algum $n_0 \in N_0$. Seja $k^{-1}(n_0) = (m, l) \in M \times \mathbb{R}^{v-m}$, então $k(m, l) \in N$, porém $\vec{x} = \pi(m, l) = l$, assim $k(m, \vec{x}) \in N$.

Se $N_0 \neq \emptyset$, $\dim(N_0) = n < v - m$ e o teorema de Sard implica que existe $\vec{u} \in \mathbb{R}^{v-m} \setminus g(N_0)$.

Agora, é suficiente construir um difeomorfismo de V em si mesmo isotópico à identidade que leva M a $k(M \times \vec{u})$. Seja ξ um campo vetorial suave em $\mathbb{R}^{v-m}$ tal que $\xi(\vec{x}) = \vec{u}$ para $|\vec{x}| = |\vec{u}|$ e $\xi(\vec{x}) = 0$ para $|\vec{x}| \geq 2|\vec{u}|$. Desde que ξ tem suporte compacto e $\mathbb{R}^{v-m}$ não tem bordo, as curvas integrais $\psi(t, \vec{x})$ são definidas para todo valor real de t . Então, ψ_0 é a identidade em $\mathbb{R}^{v-m}$, ψ_1 é um difeomorfismo levando 0 a $\vec{u}$ e ψ_t com $0 \leq t \leq 1$ fornece uma isotopia suave de ψ_0 em ψ_1 . Desde que esta isotopia deixa pontos fixos fora de um conjunto limitado em $\mathbb{R}^{v-m}$, podemos usar este fato para definir uma isotopia $h_t : V \rightarrow V$ como

$$h_t(w) = \begin{cases} k(q, \psi(t, \vec{x})), & \text{se } w = k(q, \vec{x}) \\ w, & \text{se } w \in V \setminus U \end{cases}$$

então $h = h_1 : V \rightarrow V$ é o difeomorfismo requerido. $\square$

Seja $\lambda = \acute{indice}(c)$, $\lambda' = \acute{indice}(c')$ e $n = \dim(W)$. Se

$$\dim(S_R) + \dim(S'_L) < \dim(V),$$

temos

$$(n - \lambda - 1) + (\lambda' - 1) < n - 1$$

equivalentemente $\lambda \geq \lambda'$.

Teorema 2.5.5 *Se $\lambda \geq \lambda'$, então é possível alterar o campo vetorial tipo-gradiente de f numa vizinhança de V tal que as correspondentes novas esferas $\overline{S_R}$ e $\overline{S'_L}$ em V não se interceptam. Mais geralmente, se c é um cobordismo com pontos críticos $p_1, \dots, p_k$ para f de índice λ e c' é um cobordismo com pontos críticos $p'_1, \dots, p'_k$ para f de índice λ' , então é possível alterar o campo vetorial tipo-gradiente para f numa vizinhança de V tal que as novas esferas correspondentes em V são disjuntas.*

Prova: Desde que a esfera S_R tem uma vizinhança produto em V . Pelo lema 2.5.2 existe um difeomorfismo $h : V \rightarrow V$ suavemente isotópico à identidade para o qual $h(S_R) \cap S_L = \emptyset$. Usando esta isotopia alteraremos ξ .

Seja $a < \frac{1}{2}$ o maior valor tal que $f^{-1}[a, \frac{1}{2}]$ seja contido numa vizinhança de V . De acordo com argumento do teorema 2.3.2, as curvas integrais de $\hat{\xi} = \xi/\xi(f)$ determinam um difeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & [a, \frac{1}{2}] \times V & \Leftrightarrow f^{-1}[a, \frac{1}{2}] \\ & (s, y) & \mapsto \psi_y(s) \\ & (f(y), \psi_y(0)) & \longleftarrow y \end{array}$$

tal que $f(\varphi(t, q)) = t$, e $\varphi(\frac{1}{2}, q) = q \in V$. Desde que, para cada t , $h_t(q) : [a, \frac{1}{2}] \times V \rightarrow V$ é uma isotopia de id_V com h onde $h_t = id_V$ próximo de a e $h_t = h$ próximo de $\frac{1}{2}$, então a correspondência $H : [a, \frac{1}{2}] \times V \rightarrow [a, \frac{1}{2}] \times V$ definida por $H(t, q) = (t, h_t(q))$ é um difeomorfismo.

Por outra parte, é claro que $\xi' = (\varphi \circ H \circ \varphi^{-1})_* \hat{\xi}$ é um campo vetorial suave em $f^{-1}[a, \frac{1}{2}]$.

Do diagrama

$$f^{-1}[a, \frac{1}{2}] \xrightarrow{\varphi^{-1}} [a, \frac{1}{2}] \times V \xrightarrow{H} [a, \frac{1}{2}] \times V \xrightarrow{\varphi} f^{-1}[a, \frac{1}{2}]$$

$$y \mapsto (f(y), \psi_y(0)) \mapsto (f(y), h_{f(y)}(\psi_y(0))) \mapsto \psi_{h_{f(y)}(\psi_y(0))}(f(y))$$

temos a correspondência

Para y próximo de a : $y \mapsto \varphi(f(y), y)$.

Para y próximo de $\frac{1}{2}$: $y \mapsto \varphi(f(y), h(y))$.

Segue-se que

$$\xi'(f) = \frac{\xi}{\xi(f)}(f \circ \varphi \circ H \circ \varphi^{-1}) = \frac{\xi(f)}{\xi(f)} = 1.$$

Assim, o campo vetorial $\bar{\xi}$ em W o qual coincide com $\xi(f)\xi'$ em $f^{-1}[a, \frac{1}{2}]$ e com ξ fora, é um novo campo vetorial para f . Ora, para cada $q \in V$, $\varphi(t, h_t(q))$ é uma curva integral para $\bar{\xi}$ de $\varphi(a, q) \in f^{-1}(a)$ até $\varphi(\frac{1}{2}, h(q)) = h(q) \in f^{-1}(\frac{1}{2}) = V$. Segue então que, a esfera a direita $\varphi(a \times S_R)$ de p em $f^{-1}(a)$, é levado a $h(S_R)$ em V . Portanto, $h(S_R)$ é a nova esfera a direita de p . Também, fora de $f^{-1}[a, \frac{1}{2}]$, os campos vetoriais $\bar{\xi}$ e ξ são iguais, Assim $\overline{S_L} = S_L$. Portanto, $\overline{S_R} \cap \overline{S_L} = h(S_R) \cap S_L = \emptyset$. Isto completa a prova do nosso teorema. $\square$

Observação 2.5.6 *Sejam uma tríade (W, V_0, V_1) com função de Morse f e campo vetorial tipo-gradiente ξ , um nível não crítico $V = f^{-1}(b)$ e um difeomorfismo $h : V \rightarrow V$ isotópico*

à identidade. Se $f^{-1}[a, b]$, $(a < b)$ não contem pontos críticos, então é possível construir um novo campo vetorial tipo-gradiente $\bar{\xi}$ para f tal que

1. $\bar{\xi}$ coincide com ξ fora de $f^{-1}(a, b)$.
2. $\bar{\varphi} = h \circ \varphi$, onde φ e $\bar{\varphi}$ são os difeomorfismos $f^{-1}(a) \rightarrow V$ determinados pelas trajetórias de ξ e $\bar{\xi}$ respectivamente.

Substituindo f por $-f$, deduzimos uma afirmação similar na qual ξ é alterado em $f^{-1}(b, c)$, $(b < c)$ numa vizinhança de V .

Lembremos que, pelo teorema 2.4.1, qualquer cobordismo c pode ser expresso como uma composição de um número finito de cobordismos elementares. Aplicando teorema 2.5.1 e observação 2.5.1 junto a teorema 2.5.3, obtemos o seguinte teorema

Teorema 2.5.7 Teorema do reordenamento final. *Qualquer cobordismo c pode ser expresso como uma composição*

$$c = c_0 c_1 \dots c_n \quad n = \dim(c)$$

onde cada cobordismo c_k admite uma função de Morse com exatamente um nível crítico e com todos os pontos críticos de índice k .

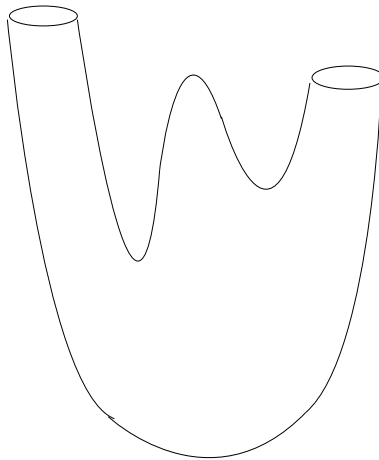


Figura 2.7. Antes do reordenamento.

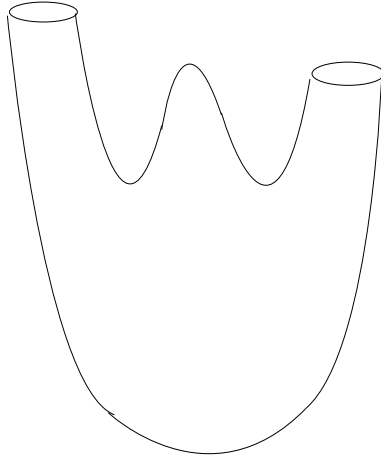


Figura 2.8. Depois do reordenamento

Definição 2.5.8 Versão alternativa do teorema anterior. *Por omitir a noção de cobordismo, temos a seguinte proposição sobre funções de Morse: dado qualquer função de Morse numa tríade (W, V_0, V_1) , então existe uma nova função de Morse f o qual tem os mesmos pontos críticos, cada um com o mesmo índice e o qual satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $f(V_0) = -\frac{1}{2}, f(V_1) = n + \frac{1}{2}$
2. $f(p) = \acute{indice}(p)$ em cada ponto crítico p de f .

Uma tal função é chamada auto-indexada.

CAPÍTULO 3

TEOREMAS DE CANCELAMENTO

Neste capítulo desenvolve-se a técnica de cancelamento de pontos críticos, sob restrições impostas na dimensão da variedade. Os teoremas fundamentais são os teoremas 3.1.6, 3.2.4, 3.3.7 e 3.4.1.

3.1 TEOREMA FRACO DE CANCELAMENTO

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que um cobordismo pode-se ver como um cobordismo produto sob condições feitas nas esferas S_R e S'_L . Veremos inicialmente que, quando ambas tem dimensões complementarias, estas se interceptam transversalmente de tal forma que podemos conseguir um número finito de trajetórias entre p e p' , o teorema principal de este capítulo e o teorema 3.1.7 está baseado no caso de que esta interseção é somente um ponto.

Seja f uma função de Morse na tríade (W^n, V_0, V_1) para cc' possuindo como pontos críticos p, p' de índice $\lambda, \lambda+1$. Pelo corolário 2.2.3 podemos supor que $f(p) < 1/2 < f(p')$. Um campo vetorial tipo-gradiente ξ para f determina em $V = f^{-1}(1/2)$ uma esfera a direita S_R de p e uma esfera a esquerda S'_L de p' . Observe-se também que

$$\dim(S_R) + \dim(S'_L) = (n - \lambda - 1) + \lambda = n - 1 = \dim(V).$$

Definição 3.1.1 Transversalidade. *Duas subvariedades $M^m, N^n \subseteq V^v$ são ditas transversais se, para cada ponto $p \in M \cap N$, os espaços tangentes $T_p(M)$ e $T_p(N)$ geram $T_p(V)$. Isto é*

$$T_p(M) + T_p(N) = T_p(V).$$

Lema 3.1.2 *Se M tem uma vizinhança produto em V , então existe um difeomorfismo $h : V \rightarrow V$ homotópico à identidade id_V de V tal que $h(M)$ e N são transversais.*

Prova: Como no lema 2.5.2, seja $k : M \times \mathbb{R}^{v-m} \rightarrow U \subseteq V$ um difeomorfismo sobre uma vizinhança produto U de M em V tal que $k(M \times \vec{0}) = M$. Seja $N_0 = U \cap N$ e

considere-se a composição $g = \pi \circ k^{-1} \Big|_{N_0}$, onde $\pi : M \times \mathbb{R}^{v-m} \rightarrow \mathbb{R}^{v-m}$ é a projeção natural.

Afirmção. A variedade $k(M \times \vec{x})$ não é transversal a N se, e somente se, $\vec{x} \in \mathbb{R}^{v-m}$ pertence à imagem de g por algum ponto crítico $q \in N_0$.

Com efeito, considerando a afirmação do lema 2.5.2, é suficiente notar que a interseção é transversal se, e somente se, $T_{k(m,\vec{x})}(k(M \times \vec{x})) + T_{k(m,\vec{x})}(N) = T_{k(m,\vec{x})}(V)$ o qual nos dá informação sobre o posto de g_* . Pelo teorema de Sard, a imagem $g(C)$ do conjunto $C \subseteq N_0$ de todos os pontos críticos de g tem medida zero em $\mathbb{R}^{v-m}$. Escolhemos então um ponto $\vec{u} \in \mathbb{R}^{v-m} \setminus g(C)$ e, como no lema 2.5.2 construímos uma isotopia da identidade id_V de V a um difeomorfismo $h : V \rightarrow V$ tal que $h(M) = k(M \times \vec{u})$. A prova então é completada observando que $k(M \times \vec{u})$ é transversal a N . $\square$

Teorema 3.1.3 *O campo vetorial tipo-gradiente ξ para f pode ser escolhido de tal forma que S_R seja transversal a S'_L em V .*

Prova: O lema anterior produz um difeomorfismo $h : V \rightarrow V$ suavemente isotópico à identidade de V tal que $h(S_R)$ é transversal a S'_L . De acordo á observação 2.5.2 podemos alterar o campo vetorial tipo-gradiente ξ de tal forma que a nova esfera a direita seja $h(S_R)$ e a esfera a esquerda não é alterada. $\square$

No que segue-se de esta seção assumiremos que S_R é transversal a S'_L . Desde que $\dim(S_R) + \dim(S'_L) = \dim(V)$, a interseção deverá consistir de um número finito de pontos isolados.

Se $q_0 \in S_R \cap S'_L$, existem funções coordenadas locais $x^1(q), \dots, x^{n-1}(q)$ numa vizinhança U de q_0 em V tal que $x^i(q) = 0$ ($i = 1, \dots, n-1$). Além disso, $U \cap S_R$ é o lugar geométrico $x^1(q) = \dots = x^\lambda(q) = 0$ e $U \cap S'_L$ é o lugar geométrico $x^\lambda(q) = \dots = x^{n-1}(q) = 0$. Claramente, o único ponto em $U \cap S_R \cap S'_L$ é q_0 . Em consequência, existe um número finito de trajetórias indo de p a p' , cada uma delas passando por cada ponto de $S_R \cap S'_L$.

Lema 3.1.4 *Suponhamos que existe uma única trajetória T ligando p com p' . Dado uma vizinhança U de T , podemos conseguir uma vizinhança pequena U' da trajetória T contida em U tal que nenhuma trajetória de U' vai fora de U e volta novamente para U' .*

Prova: Suponhamos que aconteça o contrario. Então, existe uma sequência de tra-

jetórias $T_1, \dots, T_k$ onde T_k passa pelo ponto r_k atravessando um ponto s_k fora de U e segue o ponto t_k , ambas seqüências $\{r_k\}$ e $\{t_k\}$ vão para T . Desde que $W \setminus U$ é compacto, podemos supor que s_k converge a $s \in W \setminus U$. A curva integral $\psi(t, s)$ passando por s , procede de V_0 ou de V_1 ou de ambos, já que, se este não for o caso, então esta teria que ser uma segunda trajetória que vai de p a p' . Suponhamos que esta trajetória procede de V_0 . Então pela dependência contínua de $\psi(t, s')$ nos pontos iniciais s' , conseguimos que as trajetórias atravessando todos os pontos próximos de s , tem origem em V_0 . A trajetória parcial $T_{s'}$ de V_0 a qualquer ponto s' próximo de s , é compacto. Portanto, a menor distancia $d(s')$ de T a $T_{s'}$ (em qualquer métrica) depende continuamente em s' e esta distância é maior do que 0 para todo s' em alguma vizinhança de s . Desde que $r_k \in T_{s_k}$, os pontos r_k não podem ser próximos a T a qual é uma contradição. $\square$

Lema 3.1.5 Lema preliminar. *Se S_R e S'_L se interceptam transversalmente somente num ponto, é possível escolher um novo campo vetorial tipo-gradiente ξ' , uma vizinhança U_T da trajetória T de p a p' e uma carta coordenada $g : U_T \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:*

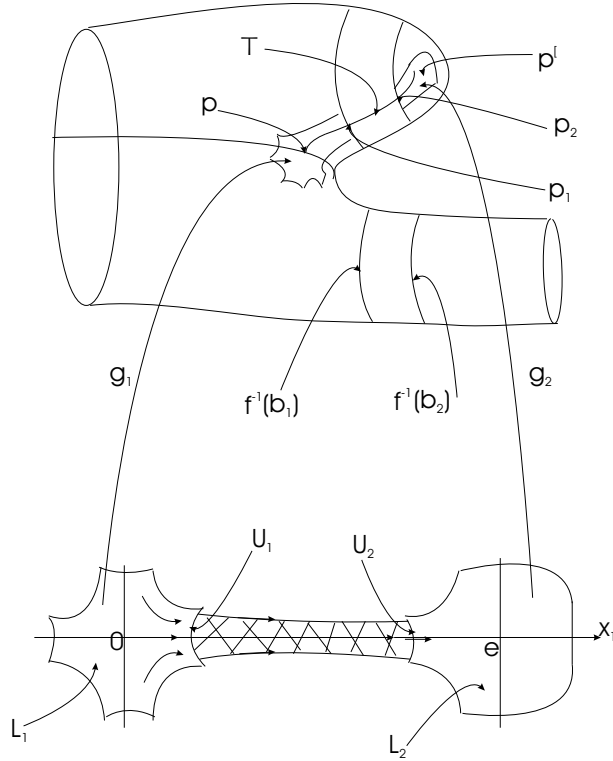
- i) p e p' correspondem aos pontos $(0, \dots, 0)$ e $(1, 0, \dots, 0)$.
- ii) $g_* \circ \xi(q) = \vec{\eta}(\vec{x}) = (v(x_1), -x_2, \dots, -x_\lambda, -x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \dots, x_n)$, onde $g(q) = \vec{x}$ e
- iii) $v(x_1)$ é uma função suave de x_1 , positiva em $(0, 1)$, zero em 0 e 1 e negativa de outra forma. Além disso $\left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1) \right| = 1$ próximo de 0, 1.

Prova: Seja $\vec{\eta}(\vec{x})$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$ como na hipóteses preliminar, com singularidades no origem 0 e no ponto $e = (1, 0, \dots, 0)$. A função

$$F(\vec{x}) = f(p) + 2 \int_0^1 v(t) dt - x_2^2 - \dots - x_{\lambda+1}^2 + x_{\lambda+2}^2 + \dots + x_n^2$$

é uma função de Morse em $\mathbb{R}^n$ para o qual $\vec{\eta}(\vec{x})$ é um campo vetorial tipo-gradiente. Escolhendo uma função positiva tal que $f(p') = f(p) + 2 \int_0^1 v(t) dt$. Isto é, $F(e) = f(p)$. Então existem níveis b_1 e b_2 tal que $a_1 = f(p) < b_1 < b_2 < f(p') = a_2$ e difeomorfismos g_1, g_2 de vizinhanças fechadas disjuntas L_1, L_2 de 0 e e sobre vizinhanças de p e p' respectivamente tal que:

- i) Os difeomorfismos levam $\vec{\eta}$ a ξ , F a f e pontos do segmento oe a pontos em T .



- ii) Se $p_i = T \cap f^{-1}(b_i)$ ($i = 1, 2$). A imagem de L_1 é uma vizinhança em $f^{-1}[a_1, b_1]$ do segmento pp_1 de T . No entanto, a imagem de L_2 é uma vizinhança em $f^{-1}[b_2, a_2]$ do segmento p_2p' de T .

Observemos pelo lema 3.1.3, que as trajetórias de $\vec{\eta}(\vec{x})$ com pontos iniciais numa vizinhança pequena U_1 de $g_1^{-1}(p_1)$ em $g_1^{-1}f^{-1}(b_1)$ procedem de pontos em $g_2^{-1}f^{-1}(b_2)$ que forma uma imagem difeomorfa U_2 de U_1 e percorrem sobre um conjunto L_0 difeomorfa a $U_1 \times [0, 1]$ tal que $L_1 \cup L_0 \cup L_2$ é uma vizinhança do segmento oe . Existe uma única extensão de g_1 a um mergulho $\overline{g}_1$ de $L_1 \cup L_0$ em W determinado pela condição que trajetórias de $\vec{\eta}$ vão para trajetórias de ξ e conjuntos níveis de F vão a conjuntos de níveis de f .

Suponhamos pelo momento que, os mergulhos de U_2 em $f^{-1}(b_2)$ dados por $\overline{g}_1$ e g_2 coincidem numa vizinhança pequena de $g_2^{-1}(p_2)$ em U_2 . Então $\overline{g}_1$ e g_2 juntos fornecem um difeomorfismo $\overline{g}$ de uma vizinhança pequena V de oe sobre uma vizinhança de T em W que preserva trajetórias e níveis. Isto implica que existe uma função suave e positiva definida em $\overline{g}(V)$ tal que para todos os pontos em $\overline{g}(V)$ tem-se

$$\overline{g}_* \circ \vec{\eta} = k\xi.$$

Escolhemos uma vizinhança V do segmento oe suficientemente pequena e suponhamos

que a função k é suave e positiva em W . Então $\xi' = k\xi$ é um campo vetorial tipo-gradiente satisfazendo a hipóteses preliminar e daí a prova é completada.

No caso geral, o campo vetorial ξ determina um difeomorfismo $h : f^{-1}(b_1) \rightarrow f^{-1}(b_2)$ e o campo vetorial $\bar{\eta}$ determina um difeomorfismo $h' : U_1 \rightarrow U_2$. Por outra parte, a suposição feita anteriormente tem-se se, e somente se, h coincide com $h_0 = g_2 \circ h' \circ g_1^{-1}$ próximo de p_1 . Ora, pela observação 2.5.2, qualquer difeomorfismo isotópico a h corresponde a um novo campo vetorial tipo-gradiente que difere de ξ somente em $f^{-1}(b_1, b_2)$. Então, a última afirmação se terá se H pode-se deformar a um difeomorfismo $\bar{h}$ o qual coincide com h_0 próximo de p_1 e para o qual a nova esfera a direita $\bar{h}(S_R(b_1))$ no nível b_2 , coincide com a interseção transversal de p_2 com $S'_L(b_2)$.

No que segue, precisamos determinar uma deformação de h a partir de uma isotopia de $h_0^{-1} \circ h$ que deforma $h_0^{-1} \circ h$ numa vizinhança pequena de p_1 e coincide com a aplicação identidade de uma vizinhança pequena de p_1 . Observemos que depois de uma alteração preliminar de g_2 se for necessário, $h_0^{-1} \circ h$ preserva orientação em $p_1 = h_0^{-1} \circ h(p_1)$ e as esferas $h_0^{-1} \circ h(S_R(p_1))$ e $S_R(b_1)$ tem o mesmo número de interseção com $S_L(b_1)$ em p_1 .

Porém, o resultado segue-se do seguinte teorema. □

Teorema 3.1.6 *Seja $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um mergulho preservando orientação tal que*

i) $h(0) = 0$.

ii) $h(\mathbb{R}^a) \cap \mathbb{R}^b = \{0\}$. *A interseção é transversal e o número de interseção é +1.*

Então, dado uma vizinhança N da origem, existe uma isotopia suave $h'_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 \leq t \leq 1$ com $h'_0 = h$ tal que

(a). $h'_t(x) = h(x)$ para $x = 0$ e para $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$, $0 \leq t \leq 1$.

(b). $h'_1(x) = x$ para x numa vizinhança N_1 de 0.

(c). $h'_1(\mathbb{R}^a) \cap \mathbb{R}^b = \{0\}$.

Prova: Ver [7], teorema 5.6. □

Teorema 3.1.7 Teorema fraco de cancelamento. *Se a interseção de S_R com S'_L é transversal e consiste de somente um ponto, então o cobordismo é um cobordismo produto. De fato, é possível alterar o campo vetorial tipo-gradiente ξ numa vizinhança suficientemente pequena da única trajetória T de p a p' fornecendo um novo campo vetorial ξ' cujas trajetórias vão de V_0 a V_1 . Além disso, ξ' é um campo vetorial tipo-gradiente para uma função de Morse f' sem pontos críticos e coincide com f próximo de $V_0 \cup V_1$.*

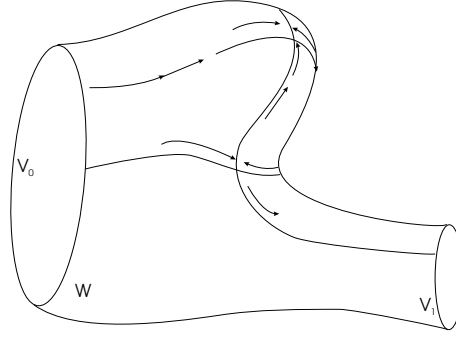


Figura 3.1. Antes da alteração

Prova: Seja U_T do lema preliminar e U qualquer vizinhança de T tal que $\overline{U} \subseteq U_T$ e seja U' uma vizinhança como no lema 3.1.3 tal que $T \subseteq U' \subseteq U$.

Afirmção 1. É possível alterar ξ em um subconjunto compacto de U' fornecendo um novo campo vetorial ξ' não nulo tal que toda curva integral de ξ' atravessando um ponto em U , está fora de U em algum tempo $t' < 0$ e também está fora de U em algum tempo $t'' > 0$.

Demonstração: da Afirmção Substituímos $\vec{\eta}(\vec{x}) = (v(x_1), -x_2, \dots, -x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \dots, x_n)$ pelo campo vetorial suave $\vec{\eta}'(\vec{x}) = (v'(x_1, \rho), -x_2, \dots, -x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \dots, x_n)$, onde $\rho(\vec{x}) = [x_2^2 + \dots + x_n^2]^{1/2}$ e

- i) $v'(x_1, \rho(\vec{x})) = v(x_1)$ fora de uma vizinhança compacta de $g(T)$ em $g(U')$.

ii) $v'(x_1, 0)$ é sempre negativa.

Isto determina um campo vetorial não nulo ξ' em W . Em coordenadas locais, as equações diferenciais satisfeitas pelas curvas integrais de ξ' em U_T são

$$\frac{dx_1}{dt} = v'(x_1, \rho), \frac{dx_2}{dt} = -x_2, \dots, \frac{dx_{\lambda+1}}{dt} = -x_{\lambda+1},$$

$$\frac{dx_{\lambda+2}}{dt} = x_{\lambda+2}, \dots, \frac{dx_n}{dt} = x_n.$$

Consideramos a curva integral $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ com valor inicial $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ quando t aumenta.

(a) Se algum $x_{\lambda+2}^0, \dots, x_n^0$ é não zero, digamos $x_n^0 \neq 0$. Então $|x_n(t)| = |x_n^0 \exp(t)|$ cresce exponencialmente e $\vec{x}(t)$ deixa eventualmente $g(U)$.

(b) Se $x_{\lambda+2}^0 = \dots = x_n^0 = 0$, então $\rho(\vec{x}(t)) = [(x_2^0)^2 + \dots + (x_{\lambda+1}^0)^2]^{1/2} \exp(-t)$ decresce exponencialmente. Suponha que $\vec{x}$ permanece em $g(U)$. Já que, $v'(x_1, \rho(\vec{x}))$ é negativo no eixo x_1 , existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $v'(x_1, \rho(\vec{x}))$ é negativo no conjunto compacto $K_\delta = \{\vec{x} \in g(\bar{U}) : \rho(\vec{x}) \leq \delta\}$. Então $v'(x_1, \rho(\vec{x}))$ tem limite superior $-\alpha < 0$ em K_δ . Eventualmente $\rho(\vec{x}) \leq \delta$ e portanto

$$\frac{dx_1(t)}{dt} \leq -\alpha.$$

Assim, $\vec{x}(t)$ devera deixar eventualmente o conjunto $g(U)$ e depois todo.

Um argumento semelhante prova que $\vec{x}(t)$ fica fora de $g(U)$ quando t decresce. $\square$

Afirmção 2. Toda trajetória do campo vetorial ξ' vai de V_0 a V_1 .

Prova: Se uma curva integral de ξ' esta sempre em U' , pela afirmação 1, esta curva consegue deixar U , mais, deixando U' , esta curva segue as trajetórias de ξ , mais pelo lema 3.1.3, esta curva permanece fora de U' . Consequêntemente, esta curva segue uma trajetória de ξ que vai para V_1 . Um argumento similar prova que esta curva vem de V_0 . Por outra parte, se uma curva integral de ξ' nunca esta em U' , esta é uma curva integral de ξ que vai de V_0 para V_1 . $\square$

Afirmção 3. De forma natural, ξ' determina um difeomorfismo

$$\phi : (V_0 \times [0, 1], V_0 \times 0, V_0 \times 1) \rightarrow (W, V_0, V_1)$$

Prova: Seja $\psi(t, q)$ a familia de curvas integrais para ξ' . Desde que ξ' em nenhum lugar é tangente a $Bd(W)$, uma aplicação o teorema da função implícita prova que a

função $\tau_1(q)$ (resp. $\tau_0(q)$) que faz corresponder a cada ponto $q \in W$ o tempo no qual $\psi(t, q)$ atinge V_1 (resp. menos o tempo no qual $\psi(t, q)$ atinge V_0) depende suavemente de q . Então a projeção $\pi : W \rightarrow V_0$ dado por $\pi(q) = \psi(-\tau_0(q), q)$ é também suave. Claramente, o campo vetorial suave $\tau_1(\pi(q))\xi'(q)$ tem curvas integrais que vão de V_0 a V_1 em tempo unitário. Por simplificação assumimos que ξ' tem esta propriedade desde o princípio, então o difeomorfismo ϕ requerido é

$$(t, q_0) \rightarrow \psi(t, q_0)$$

com inversa a função suave

$$q \rightarrow (\tau_0(q), \pi(q)).$$

□

Afirmção 4. O campo vetorial ξ' , é um campo vetorial tipo-gradiente para uma função de Morse g em W sem nenhum ponto crítico que coincide com f numa vizinhança de $V_0 \cup V_1$.

Prova: De acordo a nossa afirmação anterior, é suficiente obter uma função de Morse $g : [0, 1] \times V_0 \rightarrow [0, 1]$ tal que $\frac{\partial g}{\partial t} > 0$ e tal que g coincide com $f_1 = f \circ \phi$ próximo de $V_0 \times 0 \cup V_0 \times 1$ (estamos assumindo $V_0 = f^{-1}(0)$ e $V_1 = f^{-1}(1)$). Seja $\delta > 0$ tal que para todo $q \in V_0$, $\frac{\partial f_1}{\partial t}(t, q) > 0$ se $t < \delta$ ou $t > 1 - \delta$. Seja $\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a função zero para $t \in [\delta, 1 - \delta]$ e 1 para t próximo de 0 e 1. Considerando a função

$$g(u, q) = \int_0^1 \{ \lambda(t) \frac{\partial f_1}{\partial t}(t, q) + [1 - \lambda(t)]k(q) \} dt,$$

onde

$$k(q) = \{ 1 - \int_0^1 \lambda(t) \frac{\partial f_1}{\partial t}(t, q) dt \} / \int_0^1 [1 - \lambda(t)] dt.$$

Pela escolha de δ suficientemente pequeno, podemos supor que $K(q) > 0$ para todo $q \in V_0$. Então, g satisfaz as propriedades requeridas. □

3.2 TEOREMA FORTE DE CANCELAMENTO

Sejam M e M' subvariedades de dimensões r e s de uma variedade V de dimensão $r + s$ que se interceptam transversalmente nos pontos $p_1, \dots, p_k$. Suponhamos que M seja orientado e que o fibrado normal $N(M')$ de M' em V seja orientado. Em p_i escolhemos uma referencial $\xi_1, \dots, \xi_r$ de vetores linearmente independentes gerando o espaço tangente $T_{p_i}(M)$ de M em p_i . Desde que a interseção em p_i é transversal, os vetores $\xi_1, \dots, \xi_r$ representam uma base para a fibra em p_i do fibrado normal $N(M')$.

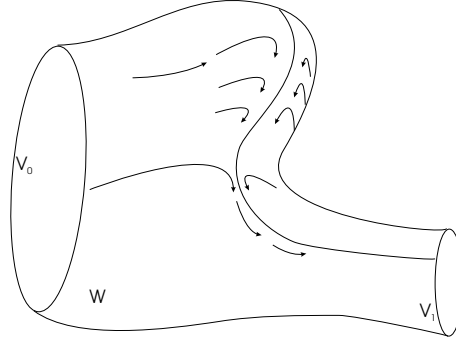


Figura 3.2. Depois da alteração

Definição 3.2.1 Número de interseção. O número de interseção de M e M' em p_i é definida como $+1$ ou -1 segundo os vetores $\xi_1, \dots, \xi_r$ representam uma base orientada positivamente ou negativamente para a fibra em p_i de $N(M')$. O número de interseção $M.M'$ de M e M' é a soma dos números de interseção nos pontos p_i .

Observação 3.2.2 Para a expressão $M'.M$ estabeleceremos que as variedades M e M' são orientadas.

Observação 3.2.3 Se V é orientado, podemos orientar de maneira natural a $N(M)$ e M' . Além disso, de acordo a [3] pag. 107, segue-se que

$$M.M' = (-1)^{rs} M'.M.$$

Outra forma de ser expresso isto, é escrevendo

$$M.M' = \pm M'.M$$

onde assumimos que V é orientável.

Suponhamos agora que M , M' e V são variedades compactas conexas sem bordo. Provemos um lema o qual implica que o número de interseção não muda por deformações de M e isotopias de M' pelo qual obtemos a definição de número de interseção de duas

subvariedades fechadas conexas de V de dimensões complementarias que não precisam ser transversais. O lema é baseado no seguinte resultado que segue-se do Teorema de Isomorfismo de Thom (ver [4], corolário 4D.9).

Proposição 3.2.4 *Com M' e V como acima, existe um isomorfismo natural*

$$\psi : H_0(M') \rightarrow H_r(V, V \setminus M').$$

Seja α o gerador canônico de $H_0(M') \cong \mathbb{Z}$ e seja $[M] \in H_r(M)$ o gerador orientação.

Prova: Ver [4], corolário 4D.9. □

Lema 3.2.5 *Na sequência*

$$H_r(M) \xrightarrow{g} H_r(V) \xrightarrow{g'} H_r(V, V \setminus M')$$

onde g e g' são as inclusões induzidas, temos que $g \circ' g([M]) = M'.M\psi(\alpha)$.

Prova: Escolhemos células r -dimensionais abertas disjuntas $U_1, \dots, U_k$ em M tal que $p_i \in U_i$, $i = 1, \dots, k$. O isomorfismo de Thom implica que a aplicação inclusão induzida

$$H_r(U_i, U_i \setminus p_i) \rightarrow H_r(V, V \setminus M')$$

é um isomorfismo definido por $\gamma_i \rightarrow \epsilon_i \psi(\alpha)$, onde γ_i é o gerador orientação de $H_r(U_i, U_i \setminus p_i)$ e ϵ_i é o número de interseção de M e M' em p_i . O seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_r(M) & \xrightarrow{g} & H_r(V) \\ \downarrow & & \downarrow g' \\ H_r(M, M \setminus M \cap M') & \longrightarrow & H_r(V, V \setminus M') \\ & \searrow \cong & \uparrow \\ & & \sum_{i=1}^k H_r(U_i, U_i \setminus p_i) \end{array}$$

no qual o isomorfismo vem do lema da cisão e os outros homomorfismos são induzidos por inclusão completa a prova. □

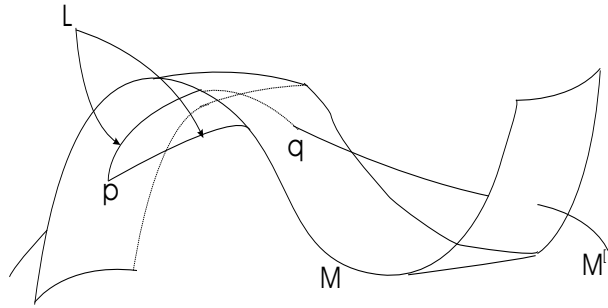
Agora reforçamos o teorema 3.1.6. Para isto voltamos à situação das hipóteses do teorema 3.1.6 considerando as seguintes hipóteses: (W^n, V_0, V) sendo uma tríade com

função de Morse f e possuindo um campo vetorial ξ de tipo gradiente e p, p' pontos críticos de f de índices λ e $\lambda+1$ respectivamente, tal que $f(p) < 1/2 < f(p')$. Suponhamos também que temos orientações na esfera a esquerda S'_L em $V = f^{-1}(1/2)$ e no fibrado normal da esfera a direita S_R em V .

Teorema 3.2.6 *Sejam M e M' subvariedades fechadas transversais de dimensões r e s , em uma variedade V (sem bordo) de dimensão $r + s$. Suponha que M é orientado e que o fibrado normal $N(M')$ de M' em V é orientado. Além disso, seja $r + s \geq 5$, $s \geq 3$ e no caso $r = 1$ ou $r = 2$, seja a aplicação inclusão induzida $\pi_1(V \setminus M') \rightarrow \pi_1(V)$ injetiva. Sejam $p, q \in M \cap M'$ pontos com número de interseção opostos tal que existe um laço L contrátil em V que consiste de um arco mergulhado de p a q em M , seguido por um arco mergulhado de q a p em M' onde ambos arcos não atingem $M \cap M' \setminus \{p, q\}$.*

Então existe uma isotopia h_t , $0 \leq t \leq 1$ da identidade $id_V : V \rightarrow V$ tal que

- i) A isotopia fixa id_V próximo de $M \cap M' \setminus \{p, q\}$.
- ii) $h_1(M) \cap M' = M \cap M' \setminus \{p, q\}$.



Prova: Sejam os números de interseção de p e q $+1$ e -1 respectivamente. Pela hipóteses, sejam C e C' arcos mergulhados suaves em M e M' de p a q . Sejam C_0 e C'_0 arcos abertos no plano que se interceptam transversalmente em pontos a e b e limitando um disco D (com dois ângulos). Escolha-se um mergulho $\varphi_1 : C_0 \cup C'_0 \rightarrow M \cup M'$ tal que $\varphi_1(C_0)$ e $\varphi_1(C'_0)$ são os arcos C e C' com a e b correspondendo a p e q .

Afirmção. Para alguma vizinhança U de D podemos estender $\varphi_1|_{U \cap (C_0 \cup C'_0)}$ a um mergulho $\varphi : U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1} \rightarrow V$ tal que $\varphi^{-1}(M) = (U \cap C_0) \times \mathbb{R}^{r-1} \times 0$ e $\varphi^{-1}(M') = (U \cap C'_0) \times 0 \times \mathbb{R}^{s-1}$.

Assumindo a afirmação anterior, construiremos uma isotopia $F_t : V \rightarrow V$ tal que F_0 é a identidade id_V , $F_1(M) \cap M' = M \cap M' \setminus \{p, q\}$ e F_t é a identidade fora da imagem de φ , $0 \leq t \leq 1$.

Seja $W = \varphi(U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1})$ e definimos F_t como a identidade em $V \setminus W$. Defina F_t da seguinte maneira.

Escolhemos uma isotopia $G_t : U \rightarrow U$ tal que:

- i) G_0 é a aplicação identidade.
- ii) G_t é a identidade numa vizinhança do bordo $\overline{U} \setminus U$, $0 \leq t \leq 1$ e
- iii) $G_1(U \cap C_0) \cap C'_0 = \emptyset$

Seja $\rho : \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1} \rightarrow [0, 1]$ uma função suave tal que, se $x \in \mathbb{R}^{r-1}$ e $y \in \mathbb{R}^{s-1}$ temos

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x|^2 + |y|^2 \leq 1, \\ 0, & \text{se } |x|^2 + |y|^2 \geq 2. \end{cases}$$

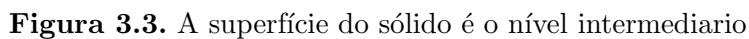
Definimos uma isotopia $H_t : U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1} \rightarrow U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1}$ por

$$H_t(u, x, y) = (G_{t\rho(x,y)}(u), x, y), \quad u \in U.$$

Então $F_t(w) = \varphi \circ H_t \circ \varphi^{-1}(w)$, $w \in W$ define a isotopia em W . Isto completa a prova do teorema. $\square$

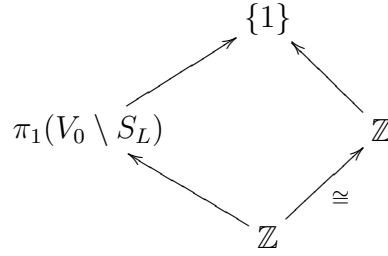
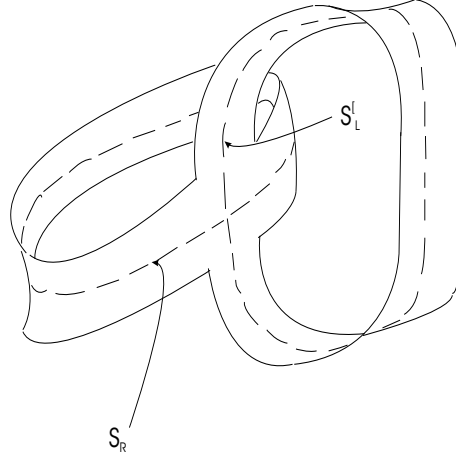
Teorema 3.2.7 Teorema forte de cancelamento. *Suponhamos que W , V_0 e V_1 são simplesmente conexos e $\lambda \geq 2$, $\lambda + 1 \leq n - 3$. Se $S_R.S'_L = \pm 1$, então W^n é difeomorfo a $V_0 \times [0, 1]$. Em consequência, se $S_R.S'_L = \pm 1$, então ξ pode-se alterar próximo de V e as esferas a direita e a esquerda em V se interceptam somente num ponto transversalmente. Portanto, as conclusões do teorema 3.1.6 são aplicadas.*

Prova: Pelo teorema 3.1.2 podemos modificar ξ de tal forma que S_R e S'_L se interceptam transversalmente. Se $S_R \cap S'_L$ não é um ponto só, então $S_R.S'_L = \pm 1$ implica que existem



Na realidade, V é simplesmente conexo como veremos na observação 3.2.3. Então é claro que no caso $\lambda \geq 3$, todas as hipóteses do teorema 3.2.3 são satisfeitas. Se $\lambda = 2$ fica mostrar que $\pi_1(V \setminus S_R) \rightarrow \pi_1(V) = \{1\}$ é injetiva. Isto é, $\pi_1(V \setminus S_R) = \{1\}$. Ora, de acordo ao primeiro teorema de cancelamento, as trajetórias de ξ determinam um difeomorfismo de $V_0 \setminus S_L$ sobre $V \setminus S_R$, onde S_L denota a 1-esfera de p em V_0 . Seja $N = U \times S_L$ uma vizinhança produto de S_L em V_0 . Como V_0 tem dimensão $n - 1$, segue de $n - \lambda - 1 = n - 3 \geq 3$ que U tem dimensão $n - 2 > 3$. Como $N \setminus S_L$ tem a homotopia de $S^{n-2} \times S^1$, concluímos que $\pi_1(N \setminus S_L) = \pi_1(U \times S^1) \cong \{1\} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, e das inclusões

segue-se o diagrama



Agora, o teorema de Van Kampen implica que $\pi_1(V_0 \setminus S_L) = \{1\}$. Isto completa a prova do teorema. $\square$

Observação 3.2.8 Pelo teorema 2.4.4, a inclusão $D_R^{n-\lambda}(p) \cup V \cup D_L^{\lambda+1}(q) \subseteq W$, é uma equivalência homotópica, portanto, $\pi_1(D_R^{n-\lambda}(p) \cup V \cup D_L^{\lambda+1}(q)) \cong \pi_1(W)$. Porém, o teorema de Van Kampen aplicado a somas amalgamadas, fornece o isomorfismo $\pi_1(D_R(p) \cup V \cup D_L(q)) \cong \pi_1(D_R^{n-\lambda}(p)) \times \pi_1(V) \times \pi_1(D_L^{\lambda+1}(q))$, desde que $\lambda \geq 2$ e $n - \lambda \geq 3$, segue-se então que $\pi_1(V) \cong \{1\}$.

Lema 3.2.9 Sejam V , M e M' como na hipótese do teorema 3.2.3. Existe uma métrica riemanniana em V tal que

- i) Na conexão associada, M e M' são subvariedades totalmente geodésicas de V (isto

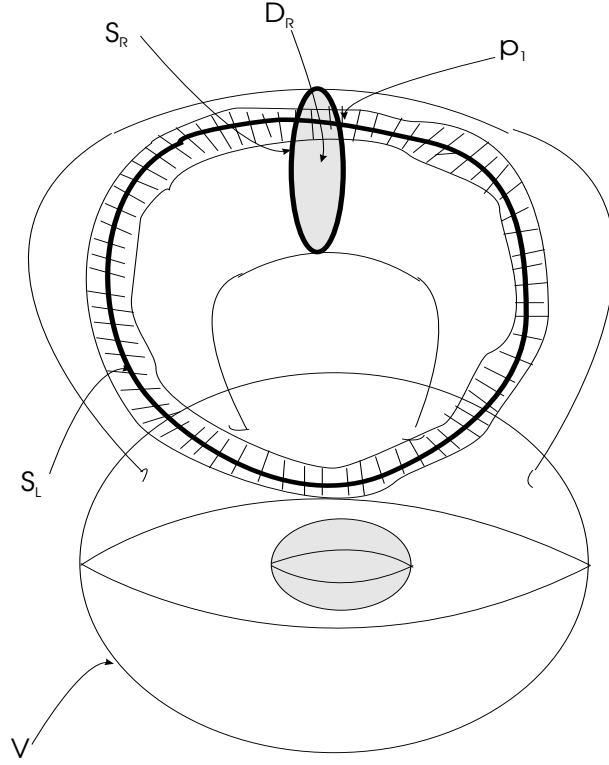


Figura 3.4. Processo final de cancelamento

é, uma subvariedade em V que é tangente a M e M' , está completamente contido em M e M').

- ii) Existem vizinhanças coordenadas N_p e N_q de p e q no qual a métrica é a métrica euclideana e $N_p \cap C$, $N_p \cap C'$, $N_q \cap C$ e $N_q \cap C'$ são segmentos de retas.

Prova: Desde que M e M' se interceptam transversalmente, sejam $p_1, \dots, p_k$ estes pontos de interseção com $p = p_1$ e $q = p_2$. Cobrimos $M \cup M'$ por vizinhanças coordenadas $W_1, \dots, W_m$ em V com difeomorfismos coordenados $h_i : W_i \rightarrow \mathbb{R}^{r+s}$, $i = 1, \dots, m$ tal que

(a). Existem vizinhanças coordenadas disjuntas $N_1, \dots, N_k$ com $p_i \in N_i \subseteq \overline{N_i} \subseteq W_i$ e $N_i \cap W_j = \emptyset$, $i = 1, \dots, k$ e $j = k+1, \dots, m$.

(b). $h_i(W_i \cap M) \subseteq \mathbb{R}^r \times 0$, $h_i(W_i \cap M') \subseteq 0 \times \mathbb{R}^s$, $i = 1, \dots, k$.

(c). $h_i(W_i \cap C)$ e $h_i(W_i \cap C')$ são segmentos de reta em $\mathbb{R}^{r+s}$, $i = 1, 2$.

Utilizando partição da unidade, construímos uma métrica riemanniana $\langle \vec{v}, \vec{m} \rangle$ no conjunto aberto $W_0 = W_1 \cup \dots \cup W_m$ por colar as métricas em W_i induzidas pelos h_i $i = 1, \dots, m$.

Por (a), esta métrica é euclideana nos N_i ($i = 1, \dots, k$). Com esta métrica e utilizando a aplicação exponencial, construímos vizinhanças tubulares abertas T e T' de M e M' em W_0 . Escolhendo estas vizinhanças suficientemente finas, podemos supor que $T \cap T' \subseteq N_1 \cup \dots \cup N_k$ e

$$h_i(T \cap T' \cap N_i) = OD_\epsilon^r \times OD_{\epsilon'}^s \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s = \mathbb{R}^{r+s}, \quad i = 1, \dots, k$$

para algum $\epsilon, \epsilon' > 0$ dependendo de i .

Seja $A : T \rightarrow T$ uma involução suave o qual é a aplicação antipodal em cada fibra de T . Defina uma nova métrica riemanniana $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_A$ em T por

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_A = \frac{1}{2}(\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle A_* \vec{v}, A_* \vec{w} \rangle).$$

Afirmção. Com respeito a esta métrica, M é uma subvariedade totalmente geodésica de T . Com efeito, seja ω uma geodésica em T tangente a M em algum ponto $z \in M$. Então A é uma isometria de T na nova métrica, portanto, leva geodésicas em geodésicas. Desde que M é o conjunto dos pontos fixos de A , segue que $A(\omega)$ e ω são geodésicas com os mesmos vetores tangentes a $A(z) = z$. Por unicidade da geodésica, A é a identidade em ω . Portanto, $\omega \subseteq M$, isto prova a nossa afirmação.

Similarmente definimos uma nova métrica $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_{A'}$ em T' . Segue da propriedade (b) e da forma de $T \cap T'$ que estas duas novas métricas coincidem com a anterior métrica em $T \cup T'$. Estendendo a todo V e restringindo a um conjunto aberto G com $M \cup M' \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq T \cup T'$ completamos a construção da métrica em V satisfazendo as condições 1 e 2. $\square$

Lema 3.2.10 *Se $f : M_1 \rightarrow M_2$ é uma aplicação contínua de variedades a qual é suave em um subconjunto fechado A de M_1 . Então existe uma aplicação suave $g : M_1 \rightarrow M_2$ tal que $g \cong f$ (g homotópico a f) e $g|_A = f|_A$.*

Prova: Ver [14], pág. 62 – 63. $\square$

Lema 3.2.11 *Seja $f : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação suave de variedades o qual é um mergulho no subconjunto fechado A de M_1 . Suponha que $\dim(M_2) \geq 2M_1 + 1$. Então existe*

um mergulho $g : M_1 \rightarrow M_2$ aproximando a f tal que $g \simeq f$ e $g|_A = f|_A$.

Prova: Ver [22], teorema 5. □

Prova da afirmação em teorema 3.2.3. Escolhemos uma métrica riemanniana em V fornecida pelo lema 3.2.5. Sejam $\tau(p)$, $\tau(q)$, $\tau'(p)$, $\tau'(q)$ os vetores unitários tangentes a os arcos orientados C de p a q e C' de q a p respectivamente. Desde que C é um espaço contrátil, o fibrado vetorial a C formado pelos vetores ortogonais a M é trivial. Usando este fato, construímos um campo vetorial de vetores unitários ao longo de C ortogonal a M e igual ao transporte paralelo de $\tau'(p)$ e $-\tau'(q)$ ao longo de $N_p \cap C$ e $N_q \cap C$ respectivamente.

Usando a aplicação exponencial, existe uma vizinhança de C_0 no plano e uma extensão de $\varphi_1|_{C_0}$ a um mergulho de esta vizinhança em V . Realmente, a aplicação exponencial fornece um mergulho local e então o mergulho global segue-se do teorema 1.1.4.

Similarmente, estendemos $\varphi_1|_{C'_0}$ a um mergulho de uma vizinhança de C'_0 usando o campo de vetores unitários ao longo de C' ortogonal a M' o qual ao longo de $N_p \cap C'$ e $N_q \cap C'$ consiste do transporte paralelo de $\tau(p)$ e $-\tau(q)$ respectivamente. Quando $r = 1$ isto é possível já que os números de interseção em p e q são opostos.

Agora, pela afirmação 2 do lema 3.2.5, estes mergulhos coincidem numa vizinhança de $C_0 \cup C'_0$ e daí definimos um mergulho

$$\varphi_2 : N \rightarrow V$$

de uma vizinhança de tipo anel N de $Bd(D)$ tal que $\varphi_2^{-1}(M) = N \cap C_0$ e $\varphi_2^{-1}(M') = N \cap C'_0$. Denotemos por S o bordo interior de N e seja $D_0 \subseteq D$ o disco limitado por S no plano.

Desde que o laço L é homotópico ao laço $\varphi_2(S)$, este último é contrátil em V . Realmente, $\varphi_2(S)$ é contrátil em $V \setminus (M \cup M')$. Para isto primeiramente vejamos o seguinte lema.

Lema 3.2.12 *Seja V_1^n , $n \geq 5$ é uma variedade, M_1 uma subvariedade de codimensão pelo menos 3, então um laço em $V_1 \setminus M_1$ que é contrátil em V_1 é também contrátil em $V_1 \setminus M_1$.*

Prova: Seja $g : (D^2, S^1) \rightarrow (V_1, V_1 \setminus M_1)$ uma contração em V_1 de um laço em $V_1 \setminus M_1$. Pela hipóteses temos que $\dim(V_1 \setminus M_1) \geq 5$ e os lemas 3.2.6 e 3.2.7 fornecem um mergulho

suave

$$h : (D^2, S^1) \rightarrow (V_1, V_1 \setminus M_1)$$

tal que $g|_{S^1}$ é homotópico a $h|_{S^1}$ em $V_1 \setminus M_1$. Desde que $h(D^2)$ é contrátil, o fibrado normal de $h(D^2)$ é trivial. Daí, pelo teorema da vizinhança tubular, existe um mergulho $H : D^2 \times \mathbb{R}^{n-2} \hookrightarrow V_1$ tal que $H(u, 0) = h(u)$ para $u \in D^2$. Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $|\vec{x}| < \epsilon$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n-2}$ implica $H(S^1 \times \vec{x}) \subseteq V_1 \setminus M_1$. Desde que $\text{codim}(M_1) \geq 3$, o lema 2.5.2 implica que existe $x_0 \in \mathbb{R}^{n-2}$, $|\vec{x}_0| < \epsilon$ tal que $H(D^2 \times \vec{x}_0) \cap M_1 = \emptyset$. Agora, em $V_1 \setminus M_1$ temos que

$$g|_{S^1} \simeq h|_{S^1} = H|_{S^1 \times 0} \simeq H|_{S^1 \times \vec{x}_0} \simeq \text{cte}$$

onde o último isomorfismo é consequência de ser V_1 simplesmente conexo. $\square$

Continuando com a prova da afirmação em teorema 3.2.3, vejamos que $\varphi_2(S)$ é contrátil em $V \setminus M \cup M'$, no entanto, o lema 3.2.8 implica que $\varphi_2(S)$ é contrátil em $V \setminus M'$ se $r \geq 3$, e quando $r = 2$ isto acontece já que $\pi_1(V \setminus M') \rightarrow \pi_1(V)$ é injetiva. Então, desde que $s \geq 3$, aplicando novamente o lema 3.2.8 segue-se que $\varphi_2(S)$ é também contrátil em $(V \setminus M') \setminus M = V \setminus (M \cup M')$.

Ora, escolhemos uma extensão continua de φ_2 a $U = N \cup D_0$ $\varphi_3 : U \rightarrow V$ tal que $\varphi'_2(\text{int}(D)) = V \setminus (M \cup M')$. Aplicando lemas 3.2.6 e 3.2.7 a $\varphi_3|_{\text{int}(D)}$ conseguimos um mergulho suave $\varphi_3 : U \rightarrow V$ coincidindo com φ_2 numa vizinhança de $U \setminus \text{int}(D)$ e tal que $\varphi_3(u) \notin M \cup M'$ se $u \notin C_0 \cup C'_0$.

Somente fica estender φ_3 a $U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1}$.

Seja $U' = \varphi_3(U)$ e escrevemos C , C' , C_0 e C'_0 em lugar de $U' \cap C$, $U' \cap C'$, $U \cap C_0$ e $U \cap C'_0$ respectivamente.

Afirmação. Existem campos vetoriais suaves $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}$, $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ ao longo de U' tal que

- i) $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}$ e $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ são ortonormais e ortogonais a U' .
- ii) $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}$ ao longo de C são tangentes a M .
- iii) $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ ao longo de C' são tangentes a M' .

Com efeito. Sejam τ e τ' os vetores velocidade normalizados ao longo de C e C' , e seja χ' o campo vetorial de vetores unitários ao longo de C' os quais são tangentes a U' e apontam para adentro ortogonal a C' . Então $\chi'(p) = \tau(p)$ e $\chi'_q = -\tau(q)$.

Escolhendo $r-1$ vetores $\xi_1(p), \dots, \xi_{r-1}(p)$ os quais são tangentes a M em p , ortogonais a U' e tal que o r -referencial $\tau(p), \xi_1(p), \dots, \xi_{r-1}(p)$ é positivamente orientado em $T_p(M)$. Fazendo transporte paralelo de estes $r-1$ vetores ao longo de C , obtemos $r-1$ campos vetoriais $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}$ ao longo de C . Estes campos vetoriais satisfazem 1 já que o transporte paralelo preserva produto interno. Também estes satisfazem 2 já que transporte paralelo ao longo de uma curva numa subvariedade totalmente geodésica M , leva vetores tangentes a M em vetores tangentes a M . Também, por continuidade, o r -referencial $\tau, \xi_1, \dots, \xi_{r-1}$ é positivamente orientado em $T(M)$ em cada ponto de C .

Ora, transportamos $\xi_1(p), \dots, \xi_{r-1}(p)$ paralelamente ao longo de $N_p \cap C'$ e também $\xi_1(q), \dots, \xi_{r-1}(q)$ ao longo de $N_q \cap C'$. Por hipóteses, os números de interseção de M e M' em p e q são respectivamente $+1$ e -1 . Isto nos diz que $\tau(p), \xi_1(p), \dots, \xi_{r-1}(p)$ é positivamente orientado em $N(M')$ no ponto p , e $\tau(q), \xi_1(q), \dots, \xi_{r-1}(q)$ é negativamente orientado em $N(M')$ no ponto q . Desde que $\chi'(p) = \tau(p)$ e $\chi'(q) = -\tau(q)$, podemos concluir que em todos os pontos de $N_p \cap C'$ e $N_q \cap C'$, os referenciais $\chi', \xi_1, \dots, \xi_{r-1}$ são positivamente orientados em $N(M')$.

O fibrado sobre C' de $(r-1)$ -referenciais $\zeta_1, \dots, \zeta_{r-1}$ ortogonais a M' e a U' tal que $\chi', \zeta_1, \dots, \zeta_{r-1}$ é positivamente orientado em $N(M')$, é trivial com fibra $SO(r-1)$, o qual é conexo. Daí, podemos estender $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}$ a um campo vetorial suave de $(r-1)$ -referenciais em $C \cup C'$ satisfazendo 1 e 2.

O fibrado sobre U' de $(r-1)$ -referenciais ortonormais e ortogonais a U' , é um fibrado trivial com fibra $O(r+s-2)/O(s-1) = V_{r-1}(\mathbb{R}^{r+s-2})$. Temos assim construído até agora uma seção transversal $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}$ de este fibrado sobre $C \cup C'$. Compondo $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}$ com a projeção na fibra, conseguimos uma aplicação suave de $C \cup C'$ em $O(r+s-2)/O(s-1)$ o qual é simplesmente conexo desde que $s \geq 3$. Daí, existe uma extensão continua a U' e pelo lema 3.2.7 existe uma extensão suave a U' . Assim, podemos definir $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}$ sobre todo U' satisfazendo 1 e 2.

Para definir os campos vetoriais restantes, observemos que o fibrado sobre U' de referenciais ortonormais $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ em $T(V)$ tal que η_i é ortogonal a U' e a $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}$, é trivial pois U' é contrátil. Sejam os campos vetoriais $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ em U' que são uma seção transversal de este fibrado. Então $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}, \eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ satisfaz 1. Ademais, desde que $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}$ são ortogonais a M' ao longo de C' , segue-se que $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ satisfaz 3 e termina a prova.

Continuação da prova da afirmação no teorema 3.2.3. Defina uma aplicação

$$U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1} \rightarrow V$$

por

$$(u, x_1, \dots, x_{r-1}, y_1, \dots, y_{s-1}) \rightarrow \exp\left[\sum_{i=1}^{r-1} x_i \xi_i(\varphi_3(u)) + \sum_{j=1}^{s-1} y_j \eta_j(\varphi_3(u))\right]$$

segue-se do teorema 1.1.4 e do fato que esta aplicação é um difeomorfismo local, que existe uma ϵ -vizinhança aberta N_ϵ em torno da origem em $\mathbb{R}^{r+s-2} = \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1}$ tal que se $\varphi_4 : U \times N_\epsilon \rightarrow V$ é a restrição de esta aplicação a $U \times N_\epsilon$, então φ_4 é um mergulho.

Defina um mergulho $\varphi : U \times \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^{s-1} \rightarrow V$ por $\varphi(u, z) = \varphi_4(u, \frac{\epsilon z}{\sqrt{1+|z|^2}})$. Desde que M e M' são subvariedades de V totalmente geodésicas, temos $\varphi(C_0 \times \mathbb{R}^{r-1} \times 0) \subseteq M$ e $\varphi(C'_0 \times 0 \times \mathbb{R}^{s-1}) \subseteq M'$. Por outra parte, desde que $\varphi(U \times 0) = U'$ intercepta transversalmente M e M' exatamente em C e C' , segue que para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $Im(\varphi)$ intercepta M e M' no produto de vizinhanças de C e C' . Isto implica $\varphi^{-1}(M) = C_0 \times \mathbb{R}^{r-1} \times 0$ e $\varphi^{-1}(M') = C'_0 \times 0 \times \mathbb{R}^{s-1}$. Assim, φ é o mergulho requerido.

3.3 CANCELANDO PONTOS CRÍTICOS DE ÍNDICES INTERMEDIÁRIOS

No que segue, M é uma n -variedade e a homologia considerada é a homologia integral.

Definição 3.3.1 Orientação local. *Uma orientação local de M num ponto p é a escolha de um gerador μ_p do grupo cíclico infinito $H_n(M|p)$.*

Definição 3.3.2 Orientações e homologia. *Uma orientação de uma n -variedade diferenciável é uma função $p \mapsto \mu_p$ fazendo corresponder a cada $p \in M$ uma orientação local $\mu_p \in H_n(M|p)$ satisfazendo a condição de “consistência local”, condição que cada $p \in M$ tem uma vizinhança $\mathbb{R}^n \subseteq M$ que contém uma bola aberta B centrada em p tal que as orientações locais μ_q em pontos $q \in B$ são imagens de um gerador μ_q de $H_n(M|B) \cong H_n(\mathbb{R}^n|B)$ pela aplicação natural $H_n(M|B) \cong H_n(M|q)$. Se uma orientação existe para M , então M é chamada orientável.*

Observação 3.3.3 *Uma variedade M tem um espaço de recobrimento $\widetilde{M}$ com duas orientações. Por exemplo $\mathbb{P}^2$ é coberto por $\mathbb{S}^2$, e a garrafa de Klein tem como espaço de recobrimento o toro dobro. A construção geral é da maneira seguinte:*

$$\widetilde{M} = \{ \mu_p \mid p \in M \text{ e } \mu_p \text{ 'é uma orientação local de } M \text{ em } p \}.$$

A aplicação $\mu_p \mapsto p$ define uma sobrejetividade $\widetilde{M} \rightarrow M$ o qual induz uma topologia em M e faz de este um espaço de recobrimento. Dado uma bola aberta $B \subseteq \mathbb{R}^n$ de raio finito e um gerador $\mu_B \in H_n(M|B)$, seja $U(\mu_B)$ o conjunto de todos os $\mu_p \in \widetilde{M}$ tal que $p \in B$, e μ_p é a imagem de μ_B pela aplicação natural $H_n(M|B) \rightarrow H_n(M|p)$. Tem-se que os conjuntos $U(\mu_B)$ formam uma base para a topologia em $\widetilde{M}$, e que a projeção $\widetilde{M} \rightarrow M$ é um espaço de recobrimento. A variedade $\widetilde{M}$ é orientável já que cada ponto $\mu_p \in \widetilde{M}$ tem uma orientação local canônica dado pelo elemento $\tilde{\mu}_p \in H_n(\widetilde{M}|\mu_p)$ correspondendo a μ_p pelo isomorfismo $H_n(\widetilde{M}|\mu_p) \cong H_n(U(\mu_B)|\mu_p) \cong H_n(B|p)$, e por construção estas orientações locais satisfazem a condição de consistência local o qual define uma orientação global.

Teorema 3.3.4 Se M é orientável, a aplicação $H_n(M) \rightarrow H_n(M|p) \cong \mathbb{Z}$ é um isomorfismo para cada $p \in M$

Prova: Ver [4], teorema 3.26. □

Definição 3.3.5 Gerador orientação. Um elemento de $H_n(M)$ cuja imagem em $H_n(M|p)$ é um gerador para todo p , é chamado gerador orientação para M .

Definição 3.3.6 Seja W uma variedade diferenciável compacta n -dimensional, orientada com $X = Bd(W)$. Pela observação 1.2.1 temos que X possui uma orientação bem definida.

Observação 3.3.7 Gerador orientação para M é também chamada classe fundamental para M (com coeficientes em $\mathbb{Z}$). Pelo teorema anterior, uma tal classe existe se M é fechada e orientável. A parte recíproca também é verdade, se $\mu \in H_n(M, \mathbb{Z})$ é uma classe fundamental e μ_p denota a sua imagem em $H_n(M|p)$, a função $p \mapsto \mu_p$ é uma orientação já que a aplicação $H_n(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(M|p)$ fatoriza-se através de $H_n(M|B, \mathbb{Z})$, onde B é qualquer bola aberta em M contendo a p . Além disso, M tem que ser compacta já que

μ_p pode ser não nulo para p na imagem de um ciclo representando a μ e esta imagem é compacta.

De acordo ao teorema 3.3.1, especificamos $[X] \in H_{n-1}(X)$ o gerador orientação induzido, onde $[X]$ é a imagem do gerador orientação $[W] \in H_n(W, X)$ sob o homomorfismo bordo $H_n(W, X) \rightarrow H_{n-1}(X)$ da seqüência exata para o par (W, X) .

Consideremos a correspondência entre orientação de uma variedade compacta M^n por meio de referenciais ordenados e a orientação de M por especificar um gerador $[M]$ de $H_n(M, \mathbb{Z})$. No que segue usaremos a segunda forma de orientar a M .

Consideremos as tríades n dimensionais (W, V, V') , (W', V', V'') e $(W \cup W', V, V'')$. Suponhamos também que f é uma função de Morse em $W \cup W'$ com pontos críticos $q_1, \dots, q_l \in W$ e $q'_1, \dots, q'_m \in W'$ tal que $q_1, \dots, q_l$ estão todos num mesmo nível e são de índice λ . Suponhamos também que $q'_1, \dots, q'_m$ estão todos num mesmo nível e são de índice $\lambda+1$, suponhamos também que V' é um nível não crítico entre eles. Escolhemos um campo vetorial tipo-gradiente para f e orientamos os discos a esquerda $D_L(q_1), \dots, D_L(q_l)$ em W e $D'_L(q'_1), \dots, D'_L(q'_m)$ em W' .

Orientação para o fibrado normal $N(D_R(q_i))$ de um disco a direita em W , é então determinado pela condição que o número de interseção de $D_L(q_i)$ com $D_R(q_i)$ no ponto q_i é $+1$. O fibrado normal $N(S_R(q_i))$ de $S_R(q_i)$ em V' é naturalmente isomorfo à restrição de $N(D_R(q_i))$ a $S_R(q_i)$. Daí, a orientação de $N(D_R(q_i))$ determina uma orientação para $N(S_R(q_i))$.

Combinando a definição e o argumento acima, concluímos que temos orientações bem definidas para discos a esquerda em W e W' ; também, existe uma forma natural de orientar as esferas a esquerda em V' e os fibrados normais das esferas a direita em V' . Portanto, o número de interseção $S_R(q_i) \cdot S'_L(q'_j)$ da esfera a esquerda com a esfera a direita em V' é bem definida.

Da seção 3, conhecemos que $H_\lambda(W, V)$ e $H_{\lambda+1}(W \cup W', W) \cong H_{\lambda+1}(W', V')$ são grupos Abelianos livres com geradores $[D_L(q_1)], \dots, [D_L(q_l)]$ e $[D'_L(q'_1)], \dots, [D'_L(q'_m)]$ representados pelos discos a esquerda respectivamente.

Lema 3.3.8 *Seja M uma variedade fechada orientada mergulhada em V' de dimensão λ com $[M] \in H_\lambda(M)$ o gerador orientação, e seja $h : H_\lambda(M) \rightarrow H_\lambda(W, V)$ o morfismo*

induzido pela inclusão. Então

$$h([M]) = S_R(q_1).M[D_L(q_1)] + \dots + S_R(q_l).M[D_L(q_l)] \quad (3.1)$$

onde $S_R(q_i).M$ denota o número de interseção de $S_R(q_i)$ e M em V' .

Prova: É suficiente supor que $l = 1$. Denotamos $q = q_1$, $D_L = D_L(q_1)$, $D_R = D_R(q_1)$ e $S_R = S_R(q_1)$. Devemos provar que $h([M]) = S_R.M[D_L]$.

Considera-se o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 H_\lambda(M) & \xrightarrow[\quad h_0 \quad]{\times S_R.M} & H_\lambda(V', V' \setminus S_R) \\
 \downarrow & & \downarrow h_1 \\
 H_\lambda(V') & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & H_\lambda(V \cup D_L, V \cup (D_L - \{q\})) \\
 \downarrow i_* & & \downarrow h_2 \\
 H_\lambda(W) & \searrow & H_\lambda(V \cup D_L) \\
 & & \downarrow h_3 \\
 & & H_\lambda(W, V)
 \end{array}$$

O retrato de deformação $r : W \rightarrow V \cup D_L$ do teorema 2.4.4 leva $V' \setminus S_R$ a $V \cup (D_L \setminus q)$, assim, o homomorfismo h_1 induzido por $r|_{V'}$ está bem definido. Também, o retrato por deformação de $V \cup (D_L \setminus q)$ a V induz o isomorfismo h_2 e todos os outros homomorfismos são induzidos por inclusão.

O diagrama é comutativo já que $i_* = (r|_{V'})_*$ (pois, as aplicações $i, r|_{V'} : V' \rightarrow W$ são homotópicas) e o diagrama de espaços topológicos e aplicações contínuas comutam pontualmente com $r|_{V'}$ no lugar de i .

Pelo lema 3.2.2 sabemos que $h_0([M]) = S_R.M\psi(\alpha)$, onde $\alpha \in H_0(S_R)$ é o gerador canônico e $\psi : H_0(S_R) \rightarrow H_\lambda(V', V' \setminus S_R)$ é o isomorfismo de Thom. Desde que o diagrama é comutativo, para ver que $h([M]) = S_R.M[D_L]$, é suficiente mostrar que

$$h_3 \circ h_2 \circ h_1(\psi(\alpha)) = [D_L] \quad (3.2)$$

Ora, desde que $\dim(V') - \dim(S_R) = \lambda$, a classe $\psi(\alpha)$ em $H_\lambda(V', V' \setminus S_R)$ é representado por qualquer disco orientado D^λ o qual intercepta S_R transversalmente num ponto

x com número de interseção $+1$. Agora, pelo teorema 2.4.3 e o fato que D_R é orientado temos que a imagem $r(D^\lambda)$ de D^λ pela retração r representa

$$D_R.D^\lambda = S_R.D^\lambda = +1$$

vezes o gerador orientação $h_2^{-1}h_3^{-1}([D_L])$ do grupo $H_\lambda(V \cup D_L, V \cup (D_L \setminus q))$. Segue-se que

$$h_1\psi(\alpha) = h_2^{-1}h_3^{-1}([D_L])$$

ou

$$h_3h_2h_1\psi(\alpha) = [D_L].$$

Isto completa a prova do teorema. $\square$

Corolário 3.3.9 *Com respeito as bases representadas pelos discos a esquerda orientados, a aplicação fronteira $\partial : H_{\lambda+1}(W \cup W', W) \rightarrow H_\lambda(W, V)$ para a triple $V \subseteq W \subseteq W \cup W'$ é dado pela matriz $[a_{ij}]$ de números de interseção $a_{ij} = S_R(q_i).S'_L(q'_j)$ em V' naturalmente determinadas pelas orientações correspondentes a os discos a esquerda.*

Prova: Consideremos os elementos da base $[D'_L(q'_j)] \in H_{\lambda+1}(W \cup W', W)$, podemos factorar a aplicação ∂ pela composição

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & H_\lambda(S'_L) \\
 & & & & \downarrow i_* \\
 H_{\lambda+1}(W \cup W', W) & \xrightarrow[e]{\cong} & H_{\lambda+1}(W', V') & \xrightarrow{\text{bordo}} & H_\lambda(V') \\
 & \searrow \text{bordo} & & & \downarrow \\
 & & H_\lambda(W) & \equiv & H_\lambda(W) \\
 & \searrow \partial & & & \downarrow \\
 & & H_\lambda(W, V) & \equiv & H_\lambda(W, V)
 \end{array}$$

Onde e é a inversa do isomorfismo cisão e i_* é a inclusão induzida.

Mas,

$$\text{bordo} \circ e([D'_L(q'_j)]) = i_*([S'_L(q'_j)]).$$

Portanto, a afirmação segue-se de lema 3.3.2 fazendo $M = S'_L(q'_j)$. $\square$

Dado qualquer cobordismo c representado pela tríade (W, V, V') , o teorema 2.5.4 nos diz que podemos fatorar $c = c_0 c_1 \dots c_n$, onde c_λ admite uma função de Morse com todos os seus pontos críticos num mesmo nível e de índice λ . Seja $c_0 c_1 \dots c_\lambda$ representado pela variedade $W_\lambda \subseteq W$, $\lambda = 0, 1, \dots, n$. Seja $W_{-1} = V$. Portanto

$$V = W_{-1} \subseteq W_0 \subseteq W_1 \subseteq \dots \subseteq W_n = W.$$

Defina $C_\lambda = H_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-1}) \cong H_*(W_\lambda, W_{\lambda-1})$ e seja $\partial : C_\lambda \rightarrow C_{\lambda-1}$ o homomorfismo bordo para a sequência exata da triple $W_{\lambda-2} \subseteq W_{\lambda-1} \subseteq W_\lambda$.

Teorema 3.3.10 $C_* = \{C_\lambda, \partial\}$ é uma cadeia complexa e $H_\lambda(C_*) = H_\lambda(W, V)$ para todo λ .

Prova: Da definição segue-se que $\partial^2 = 0$. Agora consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \\
 H_{\lambda+1}(W_{\lambda+1}, W_\lambda) & \longrightarrow & H_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-2}) & \longrightarrow & H_\lambda(W_{\lambda+1}, W_{\lambda-2}) \\
 & \searrow \partial & \downarrow & \nearrow & \\
 & & H_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-1}) & & \\
 & & \downarrow \partial & & \\
 & & H_{\lambda-1}(W_{\lambda-1}, W_{\lambda-2}) & &
 \end{array}$$

onde a horizontal é a sequência exata da triple $(W_{\lambda+1}, W_\lambda, W_{\lambda-2})$ e a vertical é a sequência exata da triple $(W_\lambda, W_{\lambda-1}, W_{\lambda-2})$. Desde que o diagrama comuta tem-se que $Nuc(\partial)/Im(\partial) \cong H_\lambda(W_{\lambda+1}, W_{\lambda-2})$. Isto é, $H_\lambda(C_*) \cong H_\lambda(W_{\lambda+1}, W_{\lambda-2})$. Porém, $H_\lambda(W_{\lambda+1}, W_{\lambda-2}) \cong H_\lambda(W, V)$. Portanto, $H_\lambda(C_*) \cong H_\lambda(W, V)$. $\square$

Teorema 3.3.11 Dualidade de Poincaré. Se (W, V, V') é uma tríade de variedades diferenciáveis de dimensão n e W é orientado, então para todo λ tem-se

$$H_\lambda(W, V) \cong H^{n-\lambda}(W, V').$$

Prova: Sejam $c = c_0 c_1 \dots c_n$ e $C_* = \{C_\lambda, \partial\}$ como acima e f uma função de Morse em W com campo vetorial tipo-gradiente ξ . Fixando orientações nos discos a esquerda de c_λ , istos formam uma base para $C_\lambda = H_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-1})$, com respeito a esta base, do corolário

3.3.3 temos que o homomorfismo fronteira $\partial : C_\lambda \rightarrow C_{\lambda-1}$ é determinado pela matriz de números de interseção das esferas a esquerda de c_λ com as esferas a direita de $c_{\lambda-1}$ e que possuem fibrados normais orientados.

Similarmente representamos $c_{n-\mu}c_{n-\mu+1}\dots c_n$ pela variedade $W'_\mu \subseteq W$ onde $\mu = 0, 1, \dots, n$ e seja $W'_{-1} = V'$. Definimos $C'_\mu = H_\mu(W'_\mu, W'_{\mu-1})$ e $\partial' : C'_\mu \rightarrow C'_{\mu-1}$. Desde que, os discos a esquerda são orientados, o fibrado normal $N(D_r)$ de D_r é orientado, junto com a orientação de W temos que D_R é orientado. Então $\partial : C'_\mu \rightarrow C'_{\mu-1}$ é determinado pela matriz de números de interseção de esferas a direita orientados com esferas a esquerda que possuem fibrados normais orientados.

Seja $C'^* = \{C'^\mu, \delta'\}$ a co-cadeia complexa dual da cadeia complexa $C'_* = \{C' - \mu, \partial'\}$. Isto é, $C'^* = \text{Hom}(C'_\mu, \mathbb{Z})$. Escolhemos a base de C'^μ como a base dual da base de $C'_{=\mu}$ o qual é determinado pelos discos a direita orientados de $c_{n-\mu}$ os quais são orientados. Ora, se D_L é um disco a esquerda orientado em C_λ , fazemos corresponder o disco a direita orientado de $c_{n-\lambda}$ representando um elemento de $C'^{n-\lambda}$, esta correspondência fornece um isomorfismo $C_\lambda \rightarrow C'^{n-\lambda}$.

Por outra parte, sabemos por corolário 3.3.3 que $\partial : C_\lambda \rightarrow C_{\lambda-1}$ é determinado pela matriz $[a_{ij}] = [S_R(p_i).S'_L(p'_j)]$, e então $\delta : C'^{n-\lambda} \rightarrow C'^{n-\lambda-1}$ é determinado pela matriz $[b_{ij}] = [S'_L(p'_j).S_R(p_i)]$. Mas W é orientado, assim pela observação 3.2.2 temos que $b_{ij} = (-1)^{\lambda-1}a_{ij}$. Isto implica que a ∂ corresponde $\pm\delta'$, passando ao quociente conseguimos o isomorfismo $H_\lambda(C'_*) \cong H^{n-\lambda}(C'^*)$, desde que o teorema 3.3.4 implica que $H_\lambda(C'_*) = H_\lambda(W, V)$ e $H_\mu(C'_*) = H_\mu(W, V')$ para cada λ e μ . Por outra parte, o último isomorfismo implica que $H^\mu(C'^*) \cong H^\mu(W, V')$ para cada μ . Porém, se dois complexos tem homologias isomorfas, as respectivas co-cadeias complexas tem co-homologias isomorfas. Isto implica que $H_\lambda(W, V) \cong H^{n-\lambda}(W, V')$. $\square$

Teorema 3.3.12 Teorema da base. *Seja (W, V, V') uma tríade de dimensão n com W conexo possuindo uma função de Morse f com todos os seus pontos críticos de índice $2 \leq \lambda \leq n-2$ num mesmo nível, e seja ξ um campo vetorial tipo-gradiente para f . Então, dado uma base para $H_\lambda(W, V)$, existe uma função de Morse f' e um campo vetorial tipo-gradiente ξ' para f' as quais coincidem com f e ξ numa vizinhança de $V \cup V'$. Além disso, f' tem os mesmos pontos críticos de f todos num mesmo nível e os discos a esquerda para ξ' com orientações apropriadas, determinam uma base de $H_\lambda(W, V)$.*

Prova: Sejam $p_1, \dots, p_k$ os pontos críticos de f e seja $\{b_1, \dots, b_k\}$ a base de $H_\lambda(W, V) \cong \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ (k - somandos) representados pelos discos a esquerda $D_L(p_1), \dots, D_L(p_k)$

com orientações fixadas. Sejam $D_R(p_1), \dots, D_R(p_k)$ os discos a direita com fibrados orientados e tal que a matriz $(D_R(p_i).D_L(p_j))$ é a matriz identidade. Consideremos um λ -disco orientado D mergulhado em W com $Bd(D) \subseteq V$. Então, D representa um elemento

$$l_1 b_1 + \dots + l_k b_k \in H_\lambda(W, V)$$

para alguns inteiros $l_1, \dots, l_k$. Isto é, D é homólogo a $l_1 D_L(p_1) + \dots + l_k D_L(p_k)$. Então

$$\begin{aligned} D_R(p_j).D &= D_R(p_j).[l_1 D_L(p_1) + \dots + l_k D_L(p_k)] \\ &= l_1 D_R(p_j).D_L(p_1) + \dots + l_k D_R(p_j).D_L(p_k) \\ &= l_j. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Portanto, D representa o elemento

$$D_R(p_1).Db_1 + \dots + D_R(p_k).Db_k$$

Devemos construir f' e ξ' tal que os novos discos a esquerda orientados sejam exatamente $D'_L(p_1), D'_L(p_2), \dots, D'_L(p_k)$ com

$$D_R(p_1).D'_L(p_1) = D_R(p_2).D'_L(p_1) = +1 \quad e \quad D_R(p_j).D'_L(p_1) = 0 \quad j = 3, \dots, k.$$

De isto, segue-se que a nova base é $\{b_1 + b_2, \dots, b_k\}$ o qual completaria a prova do teorema.

A continuação construiremos f' e ξ' . Pelo teorema 2.5.1, conseguimos uma função de Morse f_1 a qual coincide com f fora de uma vizinhança de p_1 tal que $f_1(p_1) > f(p_1)$ e f_1 tem os mesmos pontos críticos e campo vetorial tipo-gradiente que f . A continuação escolhemos t_0 tal que $f_1(p_1) > t_0 > f(p_1)$ e seja $V_0 = f_1^{-1}(t_0)$. Pelo lema 2.5.2, a $(\lambda - 1)$ -esfera a esquerda S_L de p_1 em V_0 e as $(n - \lambda - 1)$ -esferas a direita $S_R(p_i)$ de p_i , $(2 \leq i \leq k)$ em V_0 são disjuntas. Sejam pontos $a \in S_L$ e $b \in S_R(p_2)$. Por ser V_0 conexo, existe um mergulho $\varphi_1 : (0, 3) \rightarrow V_0$ tal que $\varphi(0, 3)$ intercepta S_L e $S_R(p_2)$ transversalmente em $\varphi_1(1) = a$ e $\varphi_1(2) = b$, e tal que $\varphi_1(0, 3) \cap (S_R(p_3) \cup \dots \cup S_R(p_k)) = \emptyset$

Afirmação. Existe um mergulho $\varphi : (0, 3) \times \mathbb{R}^{\lambda-1} \times \mathbb{R}^{n-\lambda-1} \rightarrow V_0$ tal que

- i) $\varphi(s, 0, 0) = \varphi_1(s)$ para $s \in (0, 3)$,
- ii) $\varphi^{-1}(S_L) = 1 \times \mathbb{R}^{\lambda-1} \times 0$, $\varphi^{-1}(S_R(p_2)) = 2 \times 0 \times \mathbb{R}^{n-\lambda-1}$ e
- iii) A imagem de φ não intercepta as outras esferas. Além disso, φ pode ser escolhido de tal forma que leva $1 \times \mathbb{R}^{\lambda-1} \times 0$ em S_L com orientação positiva e tal que, $\varphi((0, 3) \times \mathbb{R}^{\lambda-1} \times 0)$ intercepta $S_R(p_2)$ em $\varphi(2, 0, 0) = b$ com número de interseção $+1$.

Com efeito. Escolhemos uma métrica riemanniana para V_0 tal que o arco $A = \varphi(0, 3)$ seja ortogonal a S_L e a $S_R(p_2)$, além disso, pelo lema 3.2.5, estas esferas são subvariedades totalmente geodésicas de V_0 .

Sejam $\mu(a)$ e $\mu(b)$ $(\lambda - 1)$ -referenciais ortonormais em a e b tal que $\mu(a)$ é tangente a S_L em a com orientação positiva e $\mu(b)$ seja ortogonal a $S_R(p_2)$ em b com número de interseção $+1$. Desde que A é contrátil, o fibrado vetorial sobre A de $(\lambda - 1)$ -referenciais ortogonais a A , é trivial com fibra a variedade ortogonal de Stiefel $V_{\lambda-1}(\mathbb{R}^{n-2})$ o qual é conexo já que $\lambda - 1 < n - 2$. Daí podemos estender a uma seção transversal μ definida em A .

O fibrado vetorial sobre A formado por $(n - \lambda - 1)$ -referenciais ortogonais a A e a μ é um fibrado trivial com fibra $V_{n-\lambda-1}(\mathbb{R}^{n-\lambda-1})$. Seja η uma seção transversal suave.

Usando a aplicação exponencial associado a esta métrica, definimos o mergulho φ satisfazendo as condições da afirmação.

Continuando, utilizaremos φ para construir uma isotopia de V_0 o qual transforma S_L em $S_R(p_2)$ da seguinte maneira.

Fixamos $\delta > 0$ e seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [1, 2\frac{1}{2}]$ uma função suave tal que

$$\alpha(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u \geq 2\delta \\ > 2, & \text{se } u \leq \delta \end{cases}$$

Considerasse uma isotopia H_t de $(0, 3) \times \mathbb{R}^{\lambda-1} \times \mathbb{R}^{n-\lambda-1}$ tal que

- i) H_t é a identidade fora de algum conjunto compacto, $0 \leq t \leq 1$.
- ii) $H_t(1, \vec{x}, 0) = (t\alpha(\vec{x})^2 + (1 - t), \vec{x}, 0)$ para $\vec{x} \in \mathbb{R}^{\lambda-1}$.

Então definimos a isotopia F_t de V_0 por $F_t(v) = \varphi \circ H_t \circ \varphi^{-1}(v)$

$$F_t(v) = \begin{cases} \varphi \circ H_t \circ \varphi^{-1}(v), & \text{se } v \in \text{Im}(\varphi) \\ v, & \text{se de outra forma.} \end{cases}$$

Pelo corolário 2.3.3, seja uma vizinhança produto $V_0 \times [0, 1]$ mergulhado em W no lado direito de V_0 tal que não contem pontos críticos e $V_0 \times 0 = V_0$. Usando a isotopia F_t , alteramos o campo vetorial ξ como na observação 2.5.2, daí conseguimos um novo campo vetorial ξ' em W .

Desde que ξ e ξ' coincidem na esquerda de V_0 , segue-se que as esferas a direita em V_0 associadas a ξ' são precisamente $S_R(p_2), \dots, S_R(p_k)$. A esfera a esquerda de p_1 associada a ξ' é $S'_L = F_0(S_L)$. Da propriedade 2 de H_t sabemos que S'_L não intercepta $S_R(p_3), \dots, S_R(p_k)$. Daí, por teorema 2.5.1 podemos conseguir uma função de Morse f' coincidindo numa vizinhança de $Bd(W)$ com f_1 (e com f) possuindo a ξ' como campo vetorial tipo-gradiente e além, tem somente um valor crítico.

Para completar a prova somente precisamos que os novos discos a esquerda representem a nova base. Os discos a esquerda de $p_2, \dots, p_k$ associados a ξ' são ainda

$D_L(p_2), \dots, D_L(p_k)$ já que $\xi' = \xi$ em $f_1^{-1}(-\infty, t_0]$, (isto é, a esquerda de $V_0 \times [0, 1]$). Como temos a igualdade $\xi' = \xi$ a direita de $V_0 \times [0, 1]$, o novo disco a esquerda $D'_L(p_1)$ intercepta $D_R(p_1)$ em $p_1 = D'_L(p_1) \cap D_R(p_1)$ com número de interseção $D_R(p_1).D'_L(p_1) = +1$. Segue-se da propriedade 2 de H_t que $D'_L(p_1)$ intercepta transversalmente a $D_R(p_2)$ unicamente num ponto com número de interseção $D_R(p_2).D'_L(p_1) = +1$. Finalmente, a propriedade 3 de φ implica que $D'_L(p_1)$ é disjunto de $D_R(p_3), \dots, D_R(p_k)$, daí $D_R(p_i).D'_L(p_1) = 0$ para $i = 3, \dots, k$. Portanto, a nova base para $H_\lambda(W, V)$ representada pelos discos a esquerda associados a ξ' é $b_1 + b_2, b_2, \dots, b_k$. Isto completa a prova de nosso teorema. $\square$

Teorema 3.3.13 Teorema de eliminação de pontos críticos com índices intermediários. *Seja (W, V, V') uma tríade simplesmente conexa de dimensão $n \geq 6$ possuindo uma função de Morse sem nenhum ponto crítico de índice 0, 1 ou $n - 1, n$. Além disso, suponhamos $H_*(W, V) = 0$. Então (W, V, V') é um cobordismo produto.*

Prova: Seja c o cobordismo representado pela tríade (W, V, V') . Segue-se do teorema 2.5.4 que c pode ser expresso por $c_2 c_3 \dots c_{n-2}$. Assim c admite uma função de Morse f cuja restrição a cada c_λ é uma função de Morse com seus pontos críticos de índice λ , todos num mesmo nível. Consideremos a sequência de grupos abelianos livres

$$C_{n-2} \xrightarrow{\partial} C_{n-3} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_{\lambda+1} \xrightarrow{\partial} C_\lambda \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_2.$$

Para cada λ escolhemos uma base $z_1^{\lambda+1}, \dots, z_{k_{\lambda+1}}^{\lambda+1}$ para o núcleo de $\partial : C_{\lambda+1} \rightarrow C_\lambda$. Desde que $H_*(W, V) = 0$ segue-se do teorema 3.3.4, que a sequência acima é exata, daí podemos escolher $b_1^{\lambda+1}, \dots, b_{k_\lambda}^{\lambda+1} \in C_{\lambda+1}$ tal que $b_i^{\lambda+1} \rightarrow z_i^\lambda$ para $i = 1, \dots, k_\lambda$. Então $z_1^{\lambda+1}, \dots, z_{k_{\lambda+1}}^{\lambda+1}, b_1^{\lambda+1}, \dots, b_{k_\lambda}^{\lambda+1}$ é uma base para $C_{\lambda+1}$.

Desde que $2 \leq \lambda \leq \lambda + 1 \leq n - 2$, de acordo a teorema 3.3.6 podemos conseguir uma função de Morse f' e um campo vetorial tipo-gradiente ξ' em c tal que os discos a esquerda de c_λ e $c_{\lambda+1}$ representam a base de C_λ e $C_{\lambda+1}$.

Sejam p e q pontos críticos em c_λ e $c_{\lambda+1}$ correspondendo a z_1^λ e $b_1^{\lambda+1}$. Por aumentar f' numa vizinhança de p e diminuir f' numa vizinhança de q , obtemos $c_\lambda c_{\lambda+1} = c'_\lambda c_p c_q c'_{\lambda+1}$, onde c_p tem exatamente como ponto crítico p e c_q tem exatamente o ponto crítico q . Seja V_0 o nível entre c_p e c_q . Então $c_p c_q$ junto seus bordos são simplesmente conexos. Desde que $Bd(b_1^{\lambda+1}) = z_1^\lambda$, pelo corolário 3.3.3, as esferas $S_R(p)$ e $S_L(q)$ em V_0 tem número de interseção ± 1 . Portanto, o teorema forte de cancelamento implica que $c_p c_q$ é um cobordismo produto e f' junto a seu campo vetorial tipo-gradiente podem ser alterados no interior de $c_p c_q$ e f' não tem pontos críticos. Repetindo este procedimento podemos eliminar todos os pontos críticos. A afirmação segue-se então do teorema 2.3.3. $\square$

3.4 CANCELANDO PONTOS CRÍTICOS DE ÍNDICE 0 E 1

Nesta seção a tríade (W^n, V, V') é considerado possuindo uma função de Morse auto-indexada, e um campo vetorial tipo-gradiente. Seja

$$W_k = f^{-1}[-\frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}], \quad k = 0, 1, \dots, n \quad e \quad V_{k+} = f^{-1}(k + \frac{1}{2}).$$

Teorema 3.4.1 *Com as condições dadas anteriormente temos:*

- i) *Se $H_0(W, V) = 0$, os pontos críticos de índice 0 podem ser cancelados em igual número que os pontos críticos de índice 1.*
- ii) *Sejam W, V simplesmente conexos e $n \geq 5$. Se não existem pontos críticos de índice 0, podemos inserir para cada ponto crítico de índice 1, um par de pontos críticos de índices 2 y 3 e cancelar o ponto crítico de índice 1, também os pontos críticos de índice 2.*

Prova: **O caso: índice 0.** Vamos a considerar a homologia sobre $\mathbb{Z}_2$. Por teorema 3.3.4, trabalhando com os índices 0 e 1, da seqüência exata

$$H_1(W_1, W_0, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial} H_0(W_0, V, \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0$$

segue que o homomorfismo

$$H_1(W_1, W_0, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial} H_0(W_0, V, \mathbb{Z}_2)$$

é sobrejetivo. Usando o corolário 3.3.3, o homomorfismo ∂ é determinado pela matriz de números de interseção módulo 2 das $(n-1)$ -esferas a direita S_R^{n-1} é as 0-esferas a esquerda S_L^0 em V_{0+} . Por ser ∂ sobrejetiva, para qualquer S_R^{n-1} , existe pelo menos um S_L^0 com $S_R^{n-1} \cdot S_L^0 \neq 0$, isto nos diz que o número de pontos de interseção de S_R^{n-1} com S_L^0 é ímpar. Ora, o primeiro teorema de cancelamento nos diz que podemos diminuir este número e por indução finita conseguimos que este número é precisamente 1. Desde que estamos considerando pontos críticos de índices 0 e índice 1 temos a nossa afirmação. $\square$

A seguir utilizaremos o seguinte lema

Lema 3.4.2 *Dado $0 \leq \lambda \leq n$, existe uma aplicação suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1, \dots, x_n) = x_1$ fora de um conjunto compacto e f tem precisamente dois pontos críticos não degenerados p_1, p_2 de índices λ e $\lambda + 1$ respectivamente com $f(p_1) < f(p_2)$.*

Prova: Ver [12], pág. 101. □

Lema 3.4.3 *Se S_R^{n-2} é uma esfera a direita em V_{1+} , existe uma 1-esfera mergulhada em V_{1+} que tem uma interseção transversal com S_R^{n-2} e não intercepta uma outra esfera a direita.*

Prova: Seja um mergulho e um 1-disco $D \subseteq V_{1+}$ o qual tem a q_0 por ponto médio e intercepta a S_R^{n-2} transversalmente e no qual não tem interseção com esferas a direita. Transladamos os pontos finais de D ao longo das trajetórias de ξ a um par de pontos em V . Por ser V conexo com dimensão $n - 1 \geq 2$, estes pontos podem ser ligados por um caminho suave em V o qual não atinge as 0-esferas a esquerda em V . Este caminho pode ser trasladado a um caminho suave que liga os pontos finais de D em V_{1+} e evita todas as esferas a direita.

Construímos uma aplicação suave $g : S^1 \rightarrow V_{1+}$ tal que

- i) $g^{-1}(q_0)$ é um ponto $a \in S^1$ e g mergulha uma vizinhança fechada A de uma vizinhança de q_0 em D .
- ii) $g(S^1 \setminus \{a\})$ não intercepta nenhuma $(n - 2)$ -esfera a direita.

Desde que $\dim(V) = n - 1 \geq 3$, o lema 3.2.7 fornece um mergulho suave com estas propriedades. Isto completa a prova de nosso lema. □

Teorema 3.4.4 *Se dois mergulhos de uma variedade M^m numa variedade N^n são homotópicos com $n \geq 2m + 3$, então eles são suavemente isotópicos.*

Prova: Ver [22], teorema 6. □

Teorema 3.4.5 Teorema da extensão isotópica. *Seja M uma subvariedade compacta de uma variedade suave N com bordo. Se h_t , $0 \leq t \leq 1$ é uma isotopia suave de $i : M \hookrightarrow N$, então h_t é a restrição de uma isotopia suave h'_t $0 \leq t \leq 1$ da aplicação identidade $id_N : N \rightarrow N$ tal que h'_t fixa pontos fora de um subconjunto compacto de N .*

Prova: Ver [12], teorema 5.8. □

O caso: índice 1. Pela observação 3.2.3 temos que V_{2+} é simplesmente conexo. Por colagem de células de dimensões $n - 1$ e $n - 2$, temos que a inclusão $V_{2+} \subseteq W$ se fatoriza em inclusões associadas ao colagem de células como no teorema 2.4.4, realmente estas inclusões são equivalências homotópicas. As células de dimensões $n, n - 1, \dots$, correspondem a células de dimensões $3, 4, \dots$. Dado um ponto crítico p de índice 1, construímos uma 1-esfera S como no lema 3.4.3. Utilizando o lema 2.5.2 e observação 2.5.2, podemos ajustar o campo vetorial ξ de tal forma que S não intercepta 1-esferas em V_{1+} , então podemos remover S a direita de uma 1-esfera S_1 em V_{2+} .

Por estender uma vizinhança colar a direita de V_{2+} , podemos escolher como em teorema 2.2.5 funções coordenadas $x_1, \dots, x_n$ numa vizinhança U de $\mathbb{R}^n$ mergulhada nesta vizinhança colar, tal que $f|_U = x_n$. Utilizando o lema 3.4.2, alteramos f num subconjunto compacto de U e inserimos um par de pontos críticos auxiliares q, r de índices 2 e 3 com $f(q) < f(r)$.

Seja S_2 a 1-esfera a esquerda de q em V_{2+} . Desde que V_{2+} é simplesmente conexo, o teorema 3.4.4 e teorema 3.4.5 implicam que existe uma isotopia da identidade $V_{2+} \rightarrow V_{2+}$ levando S_2 em S_1 . Portanto, logo de ajustar ξ a direita de V_{2+} como na observação 2.5.2, a esfera a esquerda de q em V_{1+} é S a qual por construção intercepta a esfera a direita de p transversalmente em um ponto só.

Sem mudar ξ , podemos alterar f como no teorema 2.5.1 nos interiores de $f^{-1}[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ e de $f^{-1}[\frac{3}{2}, k]$ com $k = (f(q) + f(r))/2$. Finalmente, utilizando o teorema 2.5.1, subimos o nível de p e descemos o nível de q , daí para algum $\delta > 0$ temos

$$1 + \delta < f(p) < \frac{3}{2} < f(q) < 2 - \delta.$$

Ora, utilizando o primeiro teorema de cancelamento, alteramos f e ξ em $f^{-1}[1 + \delta, 2 - \delta]$, eliminando dessa forma os pontos críticos p e q . Finalmente por observação 2.5.1, removemos os níveis críticos de r . Repetindo este procedimento chegamos a eliminar todos os pontos críticos de índice 1. Isto completa a prova do teorema.

CAPÍTULO 4

O TEOREMA H-COBORDISMO E SUAS APLICAÇÕES

Esta seção está dedicada a provar o teorema principal de este trabalho.

Definição 4.0.6 *h-cobordismo*. *Um cobordismo c representado pela tríade (W, V, V') é um h -cobordismo se as inclusões $V \hookrightarrow W$ e $V' \hookrightarrow W$ são equivalências homotópicas. Isto equivale a dizer que V e V' são retratos por deformação de W . Neste caso dizemos que V e V' são h -cobordantes.*

Observação 4.0.7 *O conceito de h -cobordantes foi introduzido primeiro por Thom para o caso combinatório e por Kervaire e Milnor para o caso diferenciável. Isto envolve uma combinação da teoria de homotopia e teoria de cobordismo como indica a nossa definição anterior.*

Definição 4.0.8 Cobordismo simplesmente conexo. *Uma tríade (W, V, V') é dito simplesmente conexo se W , V y V' são simplesmente conexos.*

Observação 4.0.9 *Se (W, V, V') é uma tríade e $H_*(W, V) = 0$, então por dualidade de Poincaré (teorema 3.3.5), temos $H^*(W, V') = 0$, isto implica que $H_*(W, V') = 0$. Assim, $H_*(W, V) = 0$ se, e somente se, $H_*(W, V') = 0$.*

Definição 4.0.10 Espaço m -conexo. *Seja X um espaço conexo por caminhos, A subespaço conexo por caminhos de X e $x_0 \in A$. O par (X, A) é dito m -conexo se*

$$\pi_n(X, A, x_0) = 0 \quad \forall 1 \leq n \leq m.$$

Definição 4.0.11 Conexão entre grupos de homotopia e grupos de homologia.

Seja (X, A, x_0) uma triple e consideremos o grupo de homotopia

$$\pi_n(X, A, x_0) \quad n \geq 1.$$

Seja α um elemento arbitrário de $\pi_n(X, A, x_0)$ e consideremos a aplicação

$$\phi : (D^n, S^{n-1}, e_0) \rightarrow (X, A, x_0)$$

representando α , onde $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$. O sistema coordenado em $\mathbb{R}^n$, determina uma orientação em $\mathbb{R}^n$, daí um gerador σ_n do grupo cíclico infinito $H_n(D^n, S^{n-1})$. Como ϕ induz um homomorfismo

$$\phi_* : H_n(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_n(X, A),$$

então definimos

$$\begin{aligned} h_n : \pi_n(X, A, x_0) &\rightarrow H_n(X, A) \\ \alpha &\mapsto \phi_*(\sigma_n) \end{aligned} \tag{4.1}$$

h é realmente um homomorfismo (ver 6. Pag. 146).

Definição 4.0.12 Sistema local de grupos. Seja X um espaço topológico e $\{G_x\}_{x \in X}$ uma família de conjuntos indexada pelo espaço X . Dizemos que a família $\{G_x\}_{x \in X}$ é um sistema local de grupos se satisfaz as seguintes condições

- i) Para cada ponto $x \in X$, G_x é um grupo.
- ii) Para cada $\alpha : I \rightarrow X$ indo de x_0 a x_1 , existe um homomorfismo de G_{x_0} em G_{x_1} .

Um sistema local de grupos $\{G_x\}_{x \in X}$ num espaço X é simple se para todo $x_0 \in X$, $\pi_1(X, x_0)$ age simplesmente em G_{x_0} .

Definição 4.0.13 Espaços n -simple. Seja G um grupo agindo num grupo H . Dizemos que G age simplesmente em H se $gh = h$ para todo par $(g, h) \in G \times H$. Seja $n > 0$. Um

espaço X é dito n -simple se o sistema local $\{\pi_n(X, x_0)\}_{x_0 \in X}$ dos n -grupos de homotopia em X , é simple.

Teorema 4.0.14 Teorema do isomorfismo de Hurewicz. Se $n \geq 2$ e (X, A) é $(n - 1)$ -conexo, então o homomorfismo (4.0.1) é um epimorfismo. Ademais, se (X, A) é $(n - 1)$ -conexo e n -simple para $n \geq 2$, então

$$h_n : \pi_n(X, x_0) \cong H_n(X).$$

Prova: Ver [6], teorema 4.4. □

Definição 4.0.15 Equivalência homotópica fraca. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é dito Equivalência homotópica fraca se induz um isomorfismo $\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$ para todo $x_0 \in X$ e todo $n \geq 0$.

Teorema 4.0.16 Uma aplicação entre CW-complexos é uma equivalência homotópica fraca se, e somente se, é uma equivalência homotópica.

Prova: Ver [21], pag. 405. □

Teorema 4.0.17 Uma equivalência homotópica fraca induz isomorfismo dos correspondentes grupos de homologia singular. Reciprocamente, uma aplicação entre espaços simplesmente conexos o qual induz isomorfismos dos correspondentes grupos de homologia singular, é uma equivalência homotópica fraca.

Prova: Ver [21], pag. 406. □

Lema 4.0.18 Uma tríade simplesmente conexo (W, V, V') é um h -cobordismo se, e somente se, $H_*(W, V) = 0$.

Prova: Se a inclusão $V \hookrightarrow W$ é uma equivalência homotópica, então temos o isomorfismo $H_i(V) \cong H_i(W)$ para cada $i = 1, 2, \dots$. Ora, da sequência exata

$$0 \rightarrow H_i(V) \xrightarrow{\cong} H_i(W) \rightarrow H_i(W, V) \rightarrow 0$$

segue-se que $H_i(W, V) = 0$ para cada $i = 1, 2, \dots$. Isto é, $H_*(W, V) = 0$.

Reciprocamente, vejamos que (W, V, V') é um h -cobordismo. Considerando a sequência exata

$$0 \rightarrow \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(W) \rightarrow \pi_1(W, V) \rightarrow 0$$

e o fato de ser W e V simplesmente conexos, temos

$$\pi_1(V) = 0, \pi_1(W, V) = 0,$$

já que

$$H_*(W, V) = 0,$$

pelo teorema do isomorfismo de Hurewicz conseguimos

$$\pi_i(W, V) = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

De isto e da sequência exata

$$0 \rightarrow \pi_i(V) \rightarrow \pi_i(W) \rightarrow \pi_i(W, V) = 0 \rightarrow 0$$

segue-se que

$$\pi_i(V) \cong \pi_i(W)$$

Ora, W e V são CW -complexos, logo por teoremas 4.0.7 e 4.0.8, a inclusão $V \hookrightarrow W$ é uma equivalência homotópica. Já que a observação 4.0.2 nos diz que $H_*(W, V') = 0$, pelo mesmo argumento anterior conseguimos que a inclusão $V' \hookrightarrow W$ é uma equivalência homotópica. $\square$

Teorema 4.0.19 Teorema h -cobordismo. *Se (W, V, V') é um h -cobordismo simplesmente conexo com $\dim(W) = n \geq 6$, então (W, V, V') é difeomorfa a $(V \times [0, 1], V \times 0, V \times 1)$. Isto é, W é um cobordismo produto.*

Prova: Escolhemos uma função auto-indiceada f para (W, V, V') . Pelo lema 4.0.9 temos que $H_*(W, V) = 0$, segue-se então do teorema 3.4.1 que os pontos críticos de índice 0 e 1 podem ser eliminados. Substituindo a função de Morse f por $-f$, os pontos críticos de índice λ passam a ser pontos críticos de índice $n - \lambda$, portanto, os pontos críticos de índice n e $n - 1$ podem ser eliminados. A afirmação segue-se então de teorema 3.3.7. $\square$

Corolário 4.0.20 *Duas variedades fechadas simplesmente conexas de dimensão ≥ 5 que são h -cobordantes são difeomorfas.*

Prova: Se V e V' são h -cobordantes, o lema 4.0.9 implica que $H_*(W, V) = 0$ e a afirmação segue-se do teorema anterior. $\square$

O seguinte teorema é também conhecida como o "Teorema de Smale".

Teorema 4.0.21 Conjectura Generalizada de Poincaré. *Se M é uma variedade fechada simplesmente conexa de dimensão $n \geq 5$ com a homologia da n -esfera $\mathbb{S}^n$, então M é homeomorfa a $\mathbb{S}^n$. Se $n = 5$ ou 6 , então M é difeomorfa a $\mathbb{S}^n$.*

Prova: Suponhamos primeiro $n = 6$. Desde que M tem a homologia da n -esfera, existe uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ tal que $H_*(M) \cong H_*(\mathbb{S}^n)$, do teorema 4.0.7 e 4.0.8 segue-se que f é uma equivalência homotópica. Sejam $D_i^n \subseteq M$ ($i = 0, 1$) discos mergulhados disjuntos. Fazendo $W = M \setminus (\text{int}(D_0^n) \amalg \text{int}(D_1^n))$, então $(W, Bd(D_0^n), Bd(D_1^n))$ é um h -cobordismo simplesmente conexo. Pelo teorema do h -cobordismo, existe um difeomorfismo $F : (Bd(D_0^n) \times [0, 1], Bd(D_0^n) \times 0, Bd(D_0^n) \times 1) \rightarrow (W, Bd(D_0^n), Bd(D_1^n))$ o qual é a identidade em $Bd(D_0^n) = Bd(D_0^n) \times \{0\}$, pelo corolário 4.0.11, temos um difeomorfismo $f_1 : Bd(D_0^n) \times \{1\} \rightarrow Bd(D_1^n)$. Este a sua vez induz um homeomorfismo $\overline{f_1} : D_0^n \rightarrow D_1^n$ por $t.v \rightarrow t.f(v)$ com $t \in [0, 1]$ e $v \in \mathbb{S}^{n-1}$. Ora, considerando as inclusões $i_k : Bd(D_0^n) \times \{k\} \hookrightarrow Bd(D_0^n) \times [0, 1]$ ($k = 0, 1$), definimos um homeomorfismo $h : D_0^n \times \{0\} \cup_{i_0} Bd(D_0^n) \times [0, 1] \cup_{i_1} D_0^n \times \{1\} \rightarrow M$ por $h|_{D_0^n \times \{0\}} = id$, $h|_{Bd(D_0^n) \times [0, 1]} = F$ e $h|_{D_0^n \times \{1\}} = \overline{f_1}$. Porém h é claramente um homeomorfismo e a afirmação esta provada. $\square$

Para a prova do caso $n = 5$ precisamos os seguintes resultados

Proposição 4.0.22 Caracterização de n -discos suaves $\mathbb{D}^n$, $n \geq 6$. *Seja W^n uma n -variedade simplesmente conexa compacta, $n \geq 6$ com bordo simplesmente conexo. São equivalentes*

- i) W^n é difeomorfa a $\mathbb{D}^n$.
- ii) W^n é homeomorfo a $\mathbb{D}^n$.

iii) W^n é contrátil.

iv) W^n tem a homologia de um ponto.

Prova: É fácil ver $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$. Vejamos $4 \Rightarrow 1$. Seja D_0 um n -disco mergulhado em $Int(W)$, então $H_*(W \setminus Int(D_0), Bd(D_0)) \cong H_*(W, D_0) = 0$, onde o isomorfismo segue-se por escisão e a igualdade vem da hipóteses. Portanto, a tríade $(W \setminus Int(D_0), Bd(D_0), V)$ satisfaz as condições do teorema h -cobordismo. Consequentemente, o cobordismo $(W^n, \emptyset, V)$ é uma composição de $(D_0, \emptyset, Bd(D_0))$ com um cobordismo produto $(W \setminus Int(D_0), Bd(D_0), V)$. Segue-se então de teorema 2.3.7 que W é difeomorfa a D_0 . $\square$

Teorema 4.0.23 *Seja M uma variedade diferenciável fechada simplesmente conexa com a homologia da esfera $\mathbb{S}^n$. Então, se $n = 4, 5$ ou 6 ; M limita uma variedade contrátil e compacta.*

Prova: Ver [7]. $\square$

Observação 4.0.24 *O último teorema junto a teorema 4.0.13 implica então que M^n é difeomorfa a $\mathbb{S}^n$*

Observação 4.0.25 *Notemos que a prova do Teorema de Smale em teorema 4.0.12 não afirma a existência de um difeomorfismo $f : \mathbb{S}^n \rightarrow M$. A construção de $\bar{f}$ induzido por f , nos dá um homeomorfismo e não um difeomorfismo quando começamos de um difeomorfismo. A aplicação $\bar{f}$ é suave fora da origem de $\mathbb{D}^n$ mas não na origem. Não todo difeomorfismo $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ pode se estender a um difeomorfismo $\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ e que existem assim as chamadas esferas exóticas, isto é variedades fechadas homeomorfas a $\mathbb{S}^n$, porém não difeomorfas a $\mathbb{S}^n$.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] **R. BOTT**, Marston Morse and his Mathematical Works, Bull. Amer. Math. Soc.3, 1980 (907 – 950).
- [2] **M.P DO CARMO**, Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, 1963.
- [3] **V. GUILLEMIN - A. POLLAK**, Differential Topology, Prentice-Hill, 1974.
- [4] **A. HATCHER**, Algebraic Topology Notas da internet, 2001.
- [5] **P.J.HILTON**, An Introduction to Homotopy Theory, cambridge University Press, 1953.
- [6] **S.T. HU**, Homotopy theory, Academic Press, 1959.
- [7] **M. KERVAIRE e J. MILNOR**, Groups of Homotopy spheres, Annals of Math, vol 77, No 3, pg. 504-537, 1963.
- [8] **A. KOSINSKI**, Differential manifolds Academic Press, 1993.
- [9] **J.M. LEE**, Introduction to Smooth manifolds, Springer Verlag, New York 2001.
- [10] **W. LUCK**, A Basic Introduction tu Surgery Theory, Notas da Internet, 2004.
- [11] **M. G. MARRERO, J. M. ROIG, C. OLANO, E. O. DOMINGUES e J.L PINILLA**, Topologia, vol I, Alhambra, 1975.
- [12] **J. MILNOR**, Lectures on the H-Cobordism Theorem, Princeton University Press, 1965.
- [13] **J. MILNOR**, Morse Theory, Princeton University Press, 1963.
- [14] **MILNOR**, Differential Topology, Princeton University, 1958.
- [15] **MILNOR**, Towards the Poincaré Conjecture and the Classification of 3-manifolds, Nottices of the AMS, 2003.
- [16] **MILNOR**, The Poincaré Conjecture 99 years later: A Progress Report, Notas da internet, 2003.

- [17] **MILNOR**, **Two Complexes which are Homeomorphic but Combinatorially Distinct**, Ann. of Math, 74 1961 (575 – 590).
- [18] **J. MUNKRES**, **Elementary Differential Topology**, Princeton University Press, 1966.
- [19] **S. SMALE**, **The Generalized Poincaré Conjecture in Higher dimensions**, Bull. Amer. Math. Soc.66, 1960 (373 – 375).
- [20] **S. SMALE**, **On the Structure of Manifolds**, Amer. J. Math.84, 1962 (387–399).
- [21] **E. SPANIER**, **Algebraic Topology**, McGraw-Hill, 1966.
- [22] **H. WHITNEY**, **Differentiable Manifolds**, Annals of Math, vol 37, pag 645-680, 1936.