

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**FORMAS NORMAIS E
ESTABILIDADE DE EQUILÍBRIOS
PARA SISTEMAS HAMILTONIANOS**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

FÁBIO DOS SANTOS

Sob orientação do professor Cláudio Vidal Diaz

Recife, 2004.

Santos, Fábio dos

Formas normais e estabilidade de equilíbrios para sistemas hamiltonianos / Fábio dos Santos. – Recife : O Autor, 2004.

210 folhas : il., fig., tab.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2004.

Inclui bibliografia.

1. Matemática – Equações diferenciais. 2. Sistemas hamiltonianos – Formas normais – Simplificações – Estabilidade de equilíbrios. 3. Problema restrito dos três corpos – Estabilidade dos pontos de libração. I. Título.

517.93

CDU (2.ed.)

UFPE

515.35

CDD (22.ed.)

BC2006-176

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado:

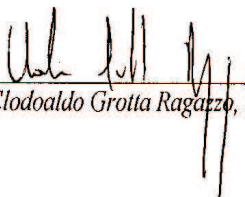


José Cláudio Vidal Diaz, DMAT-UFPE

Orientador



Hildeberto Eulálio Cabral, DMAT-UFPE



Clodoaldo Grotta Ragazzo, IME-USP

**FORMAS NORMAIS E ESTABILIDADE
DE EQUILÍBRIOS PARA SISTEMAS
HAMILTONIANOS**

Por

Fábio dos Santos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 3271-8414 – Fax: (081) 3271-1833
RECIFE – BRASIL

Março - 2004

Aos meus pais, meus irmãos e minha noiva.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais José Inácio e Arlete, por vários motivos que não vou explicitá-los aqui, pois gastaria muitas páginas.

Ao professor Cláudio Vidal por sua orientação, dedicação, disponibilidade e amizade.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

Aos professores Hildeberto Cabral e Clodoaldo Ragazzo, por participarem da banca examinadora.

A minha noiva Cristina Carvalho pela amizade, companheirismo e compreensão.

Aos meus irmãos Naldison e Unaldo e minhas irmãs Ana, Neuma, Flávia, Fabiana e Ada, que sempre torceram por mim.

A todos meus colegas do dmat-UFPE que contribuíram, direta ou indiretamente, para realização deste trabalho.

Aos meus amigos Adson Mota, Adriano Veiga e Gleidson Gomes que compartilharam seus conhecimentos e suas amizades.

A todos os professores e funcionários do Dmat-UFPE e do Dma-UFS que, direta ou indiretamente, tiveram um papel importante na minha formação.

A todos os meus amigos sergipanos e pernambucanos, que sempre torceram por mim.

RESUMO

Nesta dissertação, fizemos um estudo detalhado das formas normais e da estabilidade de equilíbrios para sistemas Hamiltonianos autônomos e periódicos e aplicamos ao estudo da estabilidade dos pontos de libração do problema restrito dos três corpos nos casos planar circular e espacial circular. Estudamos formas normais para sistemas Hamiltonianos lineares e não-lineares. Para os lineares, consideramos um algoritmo para obter a forma normal quando os autovalores são imaginários puros, um teorema que permite obter a forma normal quando os autovalores são distintos e uma tabela que fornece formas normais para funções Hamiltonianas quadráticas. Para os não lineares, aprendemos as teorias das formas normais de Gustavson, de Birkhoff e de Lie para sistemas Hamiltonianos autônomos e periódicos e, com base nestas teorias, obtivemos a forma normal de algumas funções Hamiltonianas. Estudamos a estabilidade de equilíbrios para sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares (autônomos e periódicos) e não-lineares, além disso, adaptamos alguns teoremas para sistemas Hamiltonianos. Com base nos Teoremas de Arnold-Moser e Cabral-Meyer, estudamos a estabilidade para sistemas Hamiltonianos periódicos com um grau de liberdade e sistemas autônomos com dois. Estudamos também a estabilidade para sistemas Hamiltonianos periódicos com dois graus de liberdade e generalizamos alguns resultados para sistemas com n graus de liberdade. No último capítulo, mostramos que os três pontos de libração colineares do problema restrito dos três corpos são instáveis e analisamos em que condições temos a estabilidade dos triangulares.

ABSTRACT

In this Dissertation, we studied in detail the normal forms and stability of equilibria for autonomous and periodic Hamiltonian systems and applying it to study the stability of the of libration points of the restricted three-body problem in the planar circular and space circular cases. We studied normal forms for linear and nonlinear Hamiltonian systems. For linear systems, we considered an algorithm to obtain the normal form when the eigenvalues are purely imaginary, a theorem that allows to obtain the normal form when the eigenvalues are different and a table that supply normal forms for quadratic Hamiltonian functions. For the nonlinear systems, we learnt the theories of Gustavson's, Birkhoff's and Lie's normal forms for autonomous and periodic Hamiltonian systems and, based in those theories, we obtained the normal forms of some Hamiltonian functions. We studied stability of equilibria for linear and nonlinear ordinary differential equations (autonomous and periodic), and after that, we adapted some theorems for Hamiltonian systems. Using Arnold-Moser and Cabral-Meyer theorems, we studied the stability of periodic Hamiltonian systems with one degree of freedom and the stability of autonomous Hamiltonian systems with two degrees of freedom. We also studied stability for periodic Hamiltonian systems with two degrees of freedom and generalized some results for systems with n degrees of freedom. In the last chapter, we showed that the three colinear libration points of the restricted three body problem are unstable and we also analysed in what conditions we have the stability of the triangular libration points.

Sumário

Introdução	12
1 Preliminares	15
1.1 Sistemas Hamiltonianos em \mathbb{R}^{2n}	15
1.1.1 O problema dos n-corpos	17
1.1.2 O problema de Kepler	18
1.1.3 Redução do número de graus de liberdade	19
1.1.4 Sistemas Hamiltonianos lineares	19
1.2 Transformações simpléticas	21
1.2.1 Transformações simpléticas	22
1.2.2 Exemplos de transformações simpléticas	26
1.2.3 Fluxos Hamiltonianos	33
1.2.4 Funções geradoras	34
1.3 Sistemas Hamiltonianos lineares periódicos: o Teorema de Floquet-Liapunov	38
1.4 O Teorema da Curva Invariante	40

2	Formas normais para sistemas Hamiltonianos lineares	45
2.1	Introdução	45
2.2	Algoritmo para o caso onde os autovalores são imaginários puros	46
2.3	Normalização do Hamiltoniano quadrático no caso em que os autovalores são distintos: Normalização de Birkhoff	50
2.4	Tabela de formas normais para Hamiltonianos quadráticos	52
2.5	Obtenção da forma normal de um sistema Hamiltoniano linear periódico	53
2.6	Forma normal do Hamiltoniano quadrático periódico no caso em que os expoentes característicos são imaginários puros	54
3	A forma normal de Gustavson e de Birkhoff	55
3.1	Introdução	55
3.2	Definições básicas e notações	57
3.3	A forma normal de Gustavson e de Birkhoff	60
3.4	Formas normais para funções Hamiltonianos periódicas com um grau de liberdade	68
3.4.1	Normalização da parte cúbica do Hamiltoniano	69
3.4.2	Normalização de H_4	70
3.4.3	A normalização no caso não ressonante	71
3.5	Formas normais para funções Hamiltonianas periódicas com dois graus de liberdade	72
3.5.1	Normalização dos termos cúbicos	72
3.5.2	Normalização de H_4	75
3.6	Formas normais para funções Hamiltonianas autônomas com dois graus de liberdade	77

3.6.1	Forma normal sob ressonância de segunda ordem	77
3.6.2	Forma normal sob ressonância de terceira ordem	83
3.6.3	Forma normal sob ressonância de quarta ordem	85
4	A forma normal de Lie	88
4.1	Introdução	88
4.2	O algoritmo para obtenção da transformada de Lie	89
4.3	A forma normal de Lie	93
4.4	O caso não autônomo	95
4.5	Unicidade da forma normal de Lie	98
4.6	Forma normal num equilíbrio	100
4.6.1	O caso onde a matriz da parte linear é simples	100
4.6.2	O caso autônomo geral	103
4.6.3	O caso periódico	107
4.7	Aplicações a funções Hamiltonianas autônomas com dois graus de liberdade	110
4.7.1	O caso em que os autovalores são imaginários puros e distintos	110
4.7.2	O caso de um autovalor nulo e o outro imaginário puro	113
5	Resultados gerais sobre estabilidade de equilíbrios	116
5.1	Introdução e definições	116
5.2	Sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes	118
5.3	Sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes periódicos	121

5.4	Sistemas Hamiltonianos quase lineares	122
5.5	Estabilidade de equilíbrios para sistemas autônomos	124
5.5.1	O método direto de Liapunov	124
5.5.2	O método direto de Chetaev	130
5.6	Estabilidade de equilíbrios para sistemas não autônomos	133
5.6.1	O método direto de Liapunov	133
5.6.2	O método direto de Chetaev	135
6	Estabilidade de equilíbrios para sistemas Hamiltonianos periódicos	140
6.1	Introdução	140
6.2	Estabilidade formal de equilíbrios para sistemas Hamiltonianos periódicos	141
6.3	Sistemas com um grau de liberdade	142
6.3.1	O Teorema de Cabral-Meyer para sistemas Hamiltonianos periódicos com um grau de liberdade	142
6.3.2	O Teorema de Arnold-Moser para sistemas Hamiltonianos periódicos com um grau de liberdade	146
6.3.3	Aplicação do Teorema de Arnold-Moser ao estudo da estabilidade no caso não ressonante	148
6.3.4	Aplicação do Teorema de Cabral-Meyer ao estudo da estabilidade no caso ressonante	148
6.4	Sistemas com dois graus de liberdade	151
6.4.1	Estabilidade sob única ressonância de terceira ordem	152
6.4.2	Estabilidade sob única ressonância de quarta ordem	154
6.5	Resultados para sistemas com n graus de liberdade	156

7	Estabilidade de equilíbrios para sistemas Hamiltonianos autônomos	160
7.1	Introdução	160
7.2	O Teorema de Arnold-Moser para sistemas Hamiltonianos autônomos com dois graus de liberdade	161
7.3	O Teorema de Cabral-Meyer para sistemas Hamiltonianos autônomos com dois graus de liberdade	166
7.3.1	Addendum ao Teorema de Cabral-Meyer	171
7.4	Aplicação do Teorema de Arnold-Moser ao estudo da estabilidade no caso não ressonante	172
7.5	Aplicação do Teorema de Cabral-Meyer ao estudo da estabilidade em alguns casos ressonantes	173
7.5.1	Estabilidade sob ressonância de primeira ordem: aplicação do addendum ao Teorema de Cabral-Meyer	174
7.5.2	Estabilidade sob ressonância de segunda ordem	178
7.5.3	Estabilidade sob ressonância de terceira ordem	180
7.5.4	Estabilidade sob ressonância de quarta ordem	180
7.6	Sistemas com três graus de liberdade	181
8	O problema restrito dos três corpos	183
8.1	Formulação e subproblemas	183
8.2	Equações do movimento	185
8.3	Pontos de Libração	188
8.4	Estabilidade linear dos pontos de libração	191

8.4.1	O caso planar circular	192
8.4.2	O caso espacial circular	195
8.5	Normalização da parte quadrática do Hamiltoniano	197
8.6	Relações de ressonância no caso planar circular	199
8.7	O Hamiltoniano do movimento perturbado	200
8.8	Estabilidade dos pontos de libração no caso planar circular	201
8.8.1	Estabilidade de L_4 na razão crítica das massas	204
8.8.2	Estabilidade de L_4 quando $\mu = 0$	204
8.9	Resultados sobre estabilidade dos pontos de libração no caso espacial circular . . .	205

Bibliografia

Introdução

O objetivo principal desta dissertação é apresentar as teorias de formas normais e estabilidade de equilíbrios para sistemas Hamiltonianos e aplicá-las ao estudo da estabilidade dos pontos de libração do problema restrito dos três corpos. Usamos como principal referência o livro "Pontos de libração em mecânica celeste e cosmodinâmica" de Markeev [24]. Outras referências muito usadas nesta dissertação foram Cabral ([6] e [7]), Vidal ([36], [37] e [38]) e Meyer [25].

Sobre formas normais e estabilidade de equilíbrios para sistemas Hamiltonianos, tendo em vista que:

- não existem boas referências sobre os assuntos. O trabalho mais completo é o livro de Markeev [24], o qual, com o uso do teorema de Cabral-Meyer [6], é possível reescrever muitos resultados sobre estabilidade, deste livro, de forma mais compacta e elegante;
- existem muitos problemas de interesse prático e teórico nas teorias que ainda não foram resolvidos;
- há grande aplicabilidade das teorias em problemas de interesse prático, em particular, à problemas da Mecânica Celeste, como por exemplo ao estudo da estabilidade dos pontos de libração do problema restrito dos três corpos.

Resolvemos escrever um trabalho que contivesse grande parte do que está no livro de Markeev [24], melhorando alguns resultados e demonstrações, acrescentando alguns problemas que encontram-se apenas em artigos, generalizando alguns resultados do mesmo, resultados que ainda não haviam

sido obtidos. Também, fizemos um estudo da estabilidade dos pontos de libração do problema restrito dos três corpos nos casos planar circular e espacial circular.

Esta dissertação está dividida em oito capítulos. O primeiro é dado ao nível de preliminares. Nele, são fornecidos alguns conceitos básicos sobre a teoria dos sistemas Hamiltonianos, das transformações simpléticas, o Teorema da Curva Invariante[26] e tem por objetivo fornecer conceitos essenciais para melhor compreensão deste trabalho, sendo necessário, também, conhecimentos básicos de Álgebra Linear, Análise no \mathbb{R}^n e Equações Diferenciais Ordinárias.

No capítulo 2, fornecemos um algoritmo para obtenção de formas normais para sistemas Hamiltonianos lineares autônomos no caso em que os autovalores são imaginários puros. Em seguida, apresentamos um teorema para obtenção da forma normal no caso em que os autovalores são distintos. Baseado em Arnold [1], mostramos uma tabela de formas normais para Hamiltonianos quadráticos, de acordo com seus autovalores. Encerramos o capítulo com um breve comentário sobre a obtenção da forma normal para um sistema Hamiltoniano linear periódico.

No capítulo 3, desenvolvemos a teoria das formas normais de Gustavson[12] e Birkhoff[4] para sistemas Hamiltonianos autônomos e periódicos e obtemos a forma normal de algumas funções Hamiltonianas que serão usadas posteriormente. Neste capítulo, são também fornecidos alguns conceitos importantes para o estudo das formas normais.

O quarto capítulo é dedicado ao estudo do método de Lie para obtenção da forma normal para sistemas Hamiltonianos autônomos e periódicos. Este capítulo é parte de um seminário que apresentei no curso de Sistemas Dinâmicos Hamiltonianos ministrado por Vidal[37], nele, usei como principais referências Meyer[25] e Cabral[7].

No capítulo 5, desenvolvemos a teoria da estabilidade de equilíbrios para sistemas de equações diferenciais ordinárias dando ênfase aos sistemas Hamiltonianos. Aqui, são fornecidos teoremas que caracterizam a estabilidade de equilíbrios para sistemas lineares (Hamiltonianos e não Hamiltonianos) e não lineares. Para os não lineares fornecemos os métodos direto de Liapunov e Chetaev[8] no caso autônomo e não autônomo.

O sexto capítulo é dedicado ao estudo da estabilidade de equilíbrios para sistemas Hamiltonianos periódicos. Com o uso do teorema de Arnold-Moser([2] e [3]) e Cabral-Meyer[6] fazemos um

estudo da estabilidade para sistemas com um grau de liberdade no caso não ressonante e em alguns casos ressonantes. Abordamos também sistemas com dois graus de liberdade, nos quais, fazemos generalizações de alguns resultados para sistemas Hamiltonianos com n graus de liberdade.

No sétimo capítulo, estudamos estabilidade para sistemas Hamiltonianos autônomos. Para os sistemas com dois graus de liberdade fornecemos os Teoremas de Arnold-Moser([2] e [3]) e Cabral-Meyer[6], os quais usamos para concluir sobre a estabilidade do equilíbrio no caso ressonante e em alguns casos não ressonantes.

Finalmente, no capítulo 8 fazemos uma aplicação das teorias desenvolvidas ao estudo da estabilidade dos cinco pontos de libração do problema restrito dos três corpos nos casos planar circular e espacial circular.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, o qual será essencial para todo o desenvolvimento deste trabalho, forneceremos a teoria básica dos sistemas Hamiltonianos, das transformações simpléticas e, também, o Teorema da Curva Invariante [26]. As primeiras seções serão usados em quase toda parte deste trabalho, enquanto, o Teorema da Curva Invariante, nas demonstrações dos Teoremas de Arnold-Moser ([2] e [3]) e Cabral-Meyer[6].

1.1 Sistemas Hamiltonianos em \mathbb{R}^{2n}

A segunda lei de Newton dá origem a um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem em \mathbb{R}^n , o qual pode ser escrito como um sistema de equações diferenciais ordinárias em \mathbb{R}^{2n} . Na maioria das vezes, podemos escrever este sistema numa forma bem particular, chamada de sistema Hamiltoniano.

Definição 1 *Um Sistema Hamiltoniano é um sistema de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem da forma*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ é uma função diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ chamada de Hamiltoniano. Os vetores $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ e $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ são chamados posição e momento, respectivamente, e t geralmente de tempo. As variáveis \mathbf{p} e \mathbf{q} são ditas conjugadas. O número inteiro n é o número de graus de liberdade do sistema. O conjunto onde as variáveis posição estão definidas é chamado de espaço das configurações e o espaço que descreve as posições versus momentos é chamado de espaço de fase.

$$\text{Se } \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \text{ e } J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \text{ podemos escrever o sistema (1.1) na forma:}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = J \nabla_{\mathbf{z}} H(\mathbf{z}, t). \quad (1.2)$$

Verifica-se que a matriz J é ortogonal e anti-simétrica, isto é, $J^{-1} = J^T = -J$. Também é fácil verificar que $\det J = 1$.

Quando a função Hamiltoniana, H , não depende de t o sistema (1.1) é dito autônomo e, em caso contrário, não autônomo.

Muitas propriedades importantes dos sistemas Hamiltonianos são formulados em termos de um operador chamado colchete de Poisson. Sejam F , G e H funções reais diferenciáveis definidas no aberto $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Definição 2 O colchete de Poisson de F e G é definido por

$$\{F, G\} = \nabla F^T J \nabla G = \frac{\partial F^T}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial F^T}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}. \quad (1.3)$$

Verifica-se facilmente que $\{, \}$ é uma aplicação bilinear, anti-simétrica e satisfaz a identidade de Jacobi:

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0. \quad (1.4)$$

Se $\phi_t(t_0, \mathbf{z}_0)$ representa a solução de (1.1) com condição inicial (t_0, \mathbf{z}_0) , então

$$\frac{d}{dt} F(t, \phi_t(t_0, \mathbf{z}_0)) = \frac{\partial}{\partial t} F(t, \phi_t(t_0, \mathbf{z}_0)) + \{F, G\}(\phi_t(t_0, \mathbf{z}_0)), \quad (1.5)$$

com isso, temos que ao longo das soluções do sistema Hamiltoniano (1.1) vale a identidade:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

e, portanto, num sistema Hamiltoniano autônomo a função Hamiltoniana é constante ao longo de suas soluções. Uma função que é constante ao longo das soluções de um sistema EDO's é dita uma integral deste sistema.

Vamos agora ver um teorema que relaciona o colchete de Poisson com integrais do sistema Hamiltoniano (1.1):

Teorema 1 *Sejam F , G e H como acima e independente de t . Então:*

(i) H é uma integral para (1.1);

(ii) F é uma integral primeira de (1.1) se, e somente se, $\{F, H\} = 0$;

(iii) Se F e G são integrais para (1.1) então $\{F, G\}$ também é.

Demonstração. O ítem (i) segue dos comentários acima. A demonstração do ítem (ii) é consequência da identidade (1.5). O ítem (iii) segue da identidade de Jacobi. ■

1.1.1 O problema dos n-corpos

Vamos agora ver um exemplo importante de um problema que pode ser escrito como um sistema Hamiltoniano, trata-se do problema dos n-corpos, o qual consiste em dar informações sobre o movimento de n partículas materiais, submetidas unicamente a ação de suas atrações gravitacionais. Se $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n \in \mathbb{R}^3$ denotam os vetores posição das partículas de massas positivas m_1, \dots, m_n , as equações de Newton para o movimento são:

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i \neq j} G \frac{m_i m_j}{q_{ij}^3} (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.6)$$

onde $q_{ij} = \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|$ são chamadas de distâncias mútuas.

Introduzindo o potencial Newtoniano

$$U = U(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} G \frac{m_i m_j}{q_{ij}}, \quad (1.7)$$

e usando as notações $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ e $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$, o sistema (1.6) assume a forma:

$$M\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla_{\mathbf{q}}U(\mathbf{q}). \quad (1.8)$$

Seja $\mathbf{p} = M\dot{\mathbf{q}}$ o vetor momento linear do sistema, isto é, $\mathbf{p}_i = m_i\dot{\mathbf{q}}_i$, $i = 1, \dots, n$. Podemos escrever o sistema (1.8) na seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = M^{-1}\mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}}U(\mathbf{q}), \end{cases} \quad (1.9)$$

que corresponde a um sistema Hamiltoniano com função Hamiltoniana

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T M^{-1}\mathbf{p} + U(\mathbf{q}). \quad (1.10)$$

Com essa formulação temos que o estudo do problema dos n-corpos se resume ao estudo de um sistema Hamiltoniano, inicialmente com $3n$ graus de liberdade.

1.1.2 O problema de Kepler

Outro exemplo importante de um problema que pode ser escrito como um sistema Hamiltoniano, é dado por um caso especial do problema dos 2-corpos onde assumimos que um dos corpos está fixo na origem do sistema referencial, chamado de problema de Kepler. Neste caso, a equação que descreve o movimento do outro corpo tem a forma:

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{Gm}{\|\mathbf{q}\|^3}\mathbf{q}, \quad (1.11)$$

onde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ é o vetor posição do outro corpo, m a massa do corpo fixo na origem e G a constante de gravitação universal. Denote $\mu = Gm$. Da equação (1.11) temos que a energia potencial do sistema é dado por

$$U(\mathbf{q}) = \frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|}, \quad (1.12)$$

e com isto, temos que a função Hamiltoniana do sistema é

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2 - \frac{\mu}{\|\mathbf{q}\|}, \quad (1.13)$$

onde $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$.

1.1.3 Redução do número de graus de liberdade

Considere o sistema Hamiltoniano autônomo com função Hamiltoniana

$$H = H(q, p, \varepsilon) \quad (1.14)$$

e seja $H = h$ a superfície de energia com h fixo. Suponhamos que é possível escrever p_n na forma:

$$p_n = -K(q, p_1, \dots, p_{n-1}, h, \varepsilon). \quad (1.15)$$

Aqui assumimos que $H_{p_n} \neq 0$, e como $\dot{q}_n = H_{p_n}$ é diferente de zero, podemos eliminar a variável t da equação diferencial e usarmos q_n como a nova variável tempo. As equações diferenciais que resultam são:

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dq_n} &= \frac{H_{p_i}}{H_{p_n}} = \frac{\partial K}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dq_n} &= -\frac{H_{q_i}}{H_{p_n}} = -\frac{\partial K}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (1.16)$$

onde $i = 1, \dots, n-1$, e usamos o fato que

$$H(q, p_1, \dots, p_{n-1}, -K; \varepsilon) = h.$$

Lembramos que a análise acima é só local, já que usamos o Teorema da Função Implícita.

O sistema (1.16) é um sistema Hamiltoniano com $n-1$ graus de liberdade e função Hamiltoniana K .

1.1.4 Sistemas Hamiltonianos lineares

Vamos agora estudar um caso particular muito importante de sistemas Hamiltonianos.

Se o Hamiltoniano for uma forma quadrática em \mathbf{z} , isto é,

$$H = H(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T S(t) \mathbf{z}, \quad (1.17)$$

onde $S(t)$ é uma matriz simétrica para cada t , temos que o sistema associado é da forma:

$$\dot{\mathbf{z}} = JS(t)\mathbf{z} = A(t)\mathbf{z}, \quad (1.18)$$

onde $A(t) = JS(t)$. Quando isto ocorre o sistema Hamiltoniano (1.18) é dito um sistema Hamiltoniano linear.

A seguinte definição será importante no estudo dos sistemas Hamiltonianos lineares:

Definição 3 Uma matriz $A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é dita Hamiltoniana se $A^T J + JA = 0$. O conjunto de todas as matrizes Hamiltonianas $2n \times 2n$ é denotado por $sp(n, \mathbb{R})$.

Observação: A matriz $A(t)$ do sistema (1.18) é uma matriz Hamiltoniana para cada t . Com efeito,

$$JA(t) = J^2 S(t) = -S(t) = S(t)J^2 = S(t)^T J J = -(JS(t))^T J = -A(t)^T J, \quad (1.19)$$

donde $A(t)^T J + JA(t) = 0$.

O seguinte teorema nos dá uma caracterização das matrizes Hamiltonianas:

Teorema 2 As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) A é Hamiltoniana;
- (ii) $A = JA^T J$;
- (iii) $A = JR$, onde R é simétrica;
- (iv) JA é simétrica.

Demonstração.

((i) \implies (ii)) Segue da identidade $J^{-1} = -J$.

((ii) \implies (iii)) Basta tomar $R = A^T J$. Com efeito, $R^T = J^T A = -J(JA^T J) = A^T J = R$, logo $A = JR$, com R simétrica.

((iii) \implies (iv)) Se $A = JR$, com R simétrica então, $JA = J^2 R = -R$ e assim JA é simétrica.

((iv) \implies (i)) Se JA é simétrica então, $JA = (JA)^T = A^T J^T = -A^T J$, logo $A^T J + JA = 0$ e portanto A é Hamiltoniana. ■

O seguinte resultado é muito importante no estudo dos sistemas Hamiltonianos lineares:

Proposição 1 O polinômio característico $P_A(\lambda)$ de uma matriz Hamiltoniana A é par, isto é, $P_A(\lambda) = P_A(-\lambda)$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det(JS - \lambda I) = \det(JS - \lambda I)^T = \det(S^T J^T - \lambda I) = \det(-SJ - \lambda I) \\
&= \det(J^2 SJ + \lambda IJJ) = \det(J(JS + \lambda I)J) = \det J \det(JS + \lambda I) \det J \\
&= \det(JS + \lambda I) = \det(A + \lambda I) = P_A(-\lambda).
\end{aligned}$$

■

Vamos agora ver condições para que uma matriz A seja Hamiltoniana:

(i) Se

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ então,

$$A^T J + JA = \begin{pmatrix} 0 & a+d \\ a-d & 0 \end{pmatrix},$$

logo, uma matriz 2×2 é Hamiltoniana se, e somente se, o seu traço é nulo.

(ii) Agora, no caso geral, se

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

com $a, b, c, d \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ temos que:

$$A^T J + JA = \begin{pmatrix} c - c^T & a^T + d \\ -a - d^T & b^T - b \end{pmatrix},$$

logo, A é uma matriz Hamiltoniana se, e somente se, $a^T + d = 0$ e b e c são simétricas.

1.2 Transformações simpléticas

Nesta seção, vamos fornecer definições e propriedades importantes sobre as transformações simpléticas. Estudaremos, também, propriedades do fluxo de um sistema Hamiltoniano e um

método para obter transformações simpléticas por meio de uma função denominada de função geradora.

1.2.1 Transformações simpléticas

Vamos iniciar esta seção fornecendo uma das definições mais importantes para o estudo dos sistemas Hamiltonianos.

Definição 4 Uma matriz $T \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ satisfazendo a identidade

$$T^T J T = \mu J, \quad (1.20)$$

onde μ é uma constante não nula, é dita uma matriz μ -simplética. Quando $\mu = 1$, T é dita simplética. O conjunto de todas as matrizes simpléticas em $M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é denotado por $Sp(n, \mathbb{R})$.

O seguinte teorema nos fornece algumas propriedades das matrizes μ -simpléticas:

Teorema 3 Se T é uma matriz μ -simplética então:

(a) T é invertível, T^{-1} é μ^{-1} -simplética e $T^{-1} = -\mu J T^T J$;

(b) T^T é μ -simplética;

(c) Se S é ν -simplética então TS é $\mu\nu$ -simplética.

Demonstração. Como T é μ -simplética e $\det J = 1$, temos que

$$(\det T)^2 = \det(T^T) \det J \det T = \det(T^T J T) = \det(\mu J) = \mu^{2n}$$

donde segue que T é invertível. As demais fórmulas seguem de (1.20). ■

Este teorema implica que $Sp(n, \mathbb{R})$ é um grupo, e um subgrupo de $Gl(2n, \mathbb{R})$.

Se $T(t)$ é uma matriz $2n \times 2n$ invertível para cada t , a mudança de variáveis $\zeta = U(t)\mathbf{z}$ transforma o sistema Hamiltoniano linear (1.18) no sistema

$$\dot{\zeta} = (T^{-1}AT - T^{-1}\dot{T})\zeta, \quad (1.21)$$

onde $U(t) = T^{-1}(t)$. Em geral, este sistema de equações não é Hamiltoniano, contudo:

Teorema 4 *Se $U(t)$ é uma transformação μ -simplética então o sistema (1.21) é um sistema Hamiltoniano linear.*

Demonstração. Se $U(t)$ é uma matriz μ -simplética então $T(t)$ é μ^{-1} -simplética. Como $TJT^T = \mu^{-1}J$ para todo t , temos que $\dot{T}JT^T + TJ(\dot{T})^T = 0$, donde segue que $(T^{-1}\dot{T})J + J(T^{-1}\dot{T}) = 0$, e portanto $T^{-1}\dot{T}$ é uma matriz Hamiltoniana. Temos também que $T^{-1}J = \mu JT^T$, donde segue que $T^{-1}AT = T^{-1}JST = \mu JT^T ST = J(\mu T^T ST)$ é Hamiltoniana também. Logo $T^{-1}AT - T^{-1}\dot{T}$ é Hamiltoniana. ■

Este teorema nos diz que uma mudança de coordenadas simplética preserva a forma Hamiltoniana linear de um sistema de equações. No entanto, a recíproca é falsa, pois a mudança de coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{q}, 2\mathbf{p})$ preserva a forma Hamiltoniana das equações mas não é simplética.

Já temos a definição de transformação linear simplética. Com base nesta definição vamos entender o conceito de transformação simplética.

Definição 5 *Seja a transformação de coordenadas $E : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^{2n} . Dizemos que E é uma transformação simplética ou uma transformação canônica de coordenadas se $D_{\mathbf{z}}E(\mathbf{z}, t)$ é uma matriz simplética, isto é, E é um difeomorfismo, para todo t , e satisfaz*

$$[D_{\mathbf{z}}E(\mathbf{z}, t)]^T J D_{\mathbf{z}}E(\mathbf{z}, t) = J. \quad (1.22)$$

Usaremos a notação

$$\zeta = (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = E(\mathbf{z}, t) = E(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (1.23)$$

e $Z(\zeta, t)$ para a inversa de E .

Vimos que uma transformação simplética linear preserva a forma Hamiltoniana dos sistemas Hamiltonianos lineares. Em geral, isto também é válido, isto é, se definimos a função "Hamiltoniana" transformada por:

$$H^*(\zeta) = H^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = H(\mathbf{Z}(\zeta, t), t), \quad (1.24)$$

e sendo $\mathcal{U} = E(U \times I)$ então verifica-se que:

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta} &= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t)\dot{\mathbf{z}} \\
&= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t)J \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \right)^T \\
&= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t)J \left(\frac{\partial H^*}{\partial \zeta}(\zeta, t) \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \right)^T \\
&= \frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) + J \frac{\partial H^{*T}}{\partial \zeta}(\zeta, t) \\
&= J \nabla_{\zeta} H^*(\zeta, t) + \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{Z}(\zeta, t)}.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

A notação no segundo termo desta expressão, significa primeiro derivar com respeito a t e logo substituir $\mathbf{z} = \mathbf{Z}(\zeta, t)$.

Da última relação em (1.25) segue teorema:

Teorema 5 *A transformação de coordenadas simplética $E(\mathbf{z}) = \zeta$ que não depende de t transforma o sistema Hamiltoniano com função Hamiltoniana $H = H(\mathbf{z})$ num novo sistema Hamiltoniano, cuja função Hamiltoniana H^* é definida por*

$$H^*(\zeta) = H(E(\mathbf{z})). \tag{1.26}$$

Analisaremos o caso onde a transformação simplética (1.22) depende de t . Neste caso para ter um teorema análogo ao anterior devemos supor que o conjunto

$$\mathcal{U}_t := \{\zeta \in \mathbb{R}^{2n} / (\zeta, t) \in \mathcal{U} \times I\}, \tag{1.27}$$

é uma bola em \mathbb{R}^{2n} para cada t fixo. Demonstraremos que nestas condições existe uma função diferenciável $R : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{z}, t) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{Z}(\zeta, t)} = J \nabla_{\zeta} R(\zeta, t). \tag{1.28}$$

Portanto, temos o seguinte resultado:

Teorema 6 *Suponha que a transformação de coordenadas $E(\mathbf{z}, t) = (\zeta, t)$ é simplética e além disso o contra-domínio $\mathcal{U} = E(U \times I)$ satisfaz a condição (1.27), então ela transforma o sistema*

Hamiltoniano com função Hamiltoniana $H = H(\mathbf{z})$ num novo sistema Hamiltoniano, cuja função Hamiltoniana é definida por

$$H^*(\zeta, t) + R(\zeta, t) \quad (1.29)$$

Demonstração. Precisamos demonstrar que a função diferenciável R é o gradiente de uma função diferenciável a valores reais, para isto é suficiente demonstrar ¹ que a seguinte função

$$\Gamma(\zeta, t) = J \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{Z}(\zeta, t)} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \zeta}(\zeta, t) \quad (1.30)$$

é simétrica, isto é, $\Gamma = \Gamma^T$. Derivando a relação (1.22) com respeito a t temos

$$\frac{\partial^2 E^T}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) J \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) = 0, \quad (1.31)$$

donde

$$\frac{\partial E^{-T}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial^2 E^T}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) J + J \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial E^{-1}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) = 0. \quad (1.32)$$

Substituindo $\mathbf{z} = \mathbf{Z}(\zeta, t)$ em (1.32) e lembrando que $\frac{\partial E^{-1}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{Z}(\zeta, t), t) = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \zeta}(\zeta, t)$, então temos que $-\Gamma^T + \Gamma = 0$. ■

Observação: No caso em que \mathcal{U}_t não é uma bola, o teorema acima só é válido localmente, isto é, em cada ponto ζ de \mathcal{U} existe uma função R como no teorema definida sobre uma vizinhança de ζ tal que o teorema é válido, mas R não necessariamente pode ser definida globalmente como uma única função a valores reais sobre todo \mathcal{U} .

Existe uma generalização dos resultados anteriores para o caso de transformações μ -simpléticas ou transformações simpléticas com multiplicador $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, definidas como difeomorfismos e usando a mesma notação das transformações simpléticas elas devem satisfazer a propriedade:

$$[D_{\mathbf{z}}E(\mathbf{z}, t)]^T J D_{\mathbf{z}}E(\mathbf{z}, t) = \mu J, \quad (1.33)$$

onde μ é uma constante. Facilmente verifica-se

$$D_{\mathbf{z}}E(\mathbf{z}, t) J [D_{\mathbf{z}}E(\mathbf{z}, t)]^T = \mu J.$$

¹Teorema. Seja $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^k$, onde \mathcal{O} é simplesmente conexo (uma bola aberta por exemplo), então $F = \nabla f$ se, e somente se, $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ é simétrica

Da mesma forma que as transformações simpléticas as transformações μ -simpléticas preservam a estrutura Hamiltoniana das equações, logo os Teoremas 5 e 6 são válidos com a substituição da função Hamiltoniana H^* pelo Hamiltoniano

$$H^*(\zeta, t) = \mu H(\mathbf{Z}(\zeta, t), t). \quad (1.34)$$

Outro resultado importante sobre as transformações simpléticas é o seguinte:

Teorema 7 *Seja T uma matriz simplética. Se λ é um autovalor de T então λ^{-1} também é.*

Demonstração. Como T é simplética, temos que $T^T = -JT^{-1}J$ e $\det T = \pm 1$. Se λ é um autovalor de T , tem-se:

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det(T - \lambda I) = \det(T^T - \lambda I) = \det(-JT^{-1}J + \lambda JJ) \\ &= \det(-T^{-1} + \lambda I) = \det(\lambda(\lambda^{-1}T^{-1} - I)) = \lambda^{2n} \det T^{-1} \det(T - \lambda^{-1}I) \\ &= \pm \lambda^{2n} p_T(\lambda^{-1}), \end{aligned}$$

donde segue o resultado. ■

Usando o fato que o determinante de uma matriz é igual ao produto de seus autovalores, segue o corolário do teorema acima:

Corolário 1 *O determinante de uma matriz simplética é igual a 1.*

Uma consequência importante deste corolário é que uma transformação simplética preserva volume.

1.2.2 Exemplos de transformações simpléticas

Vamos agora ver alguns exemplos de transformações simpléticas. Muitas destas transformações serão usadas nos capítulos seguintes.

Exemplo 1: Consideremos a mudança de coordenadas polares no plano dada por:

$$\Phi : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y = 0\}. \quad (1.35)$$

Usando a notação acima $\mathbf{z} = (r, \theta)$ e $\zeta = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e definindo

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta). \quad (1.36)$$

É claro que Φ é um difeomorfismo e satisfaz:

$$[D_{\mathbf{z}}\Phi(\mathbf{z})]^T J D_{\mathbf{z}}\Phi(\mathbf{z}) = rJ, \quad (1.37)$$

onde $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Portanto, a transformação Φ não é simplética. No entanto uma "pequena" alteração permite-nos conseguir uma transformação simplética a partir das coordenadas polares no plano. De fato, considere a transformação

$$\Psi(r, \theta) = (\sqrt{2r} \cos \theta, \sqrt{2r} \sin \theta) = \eta \quad (1.38)$$

onde $\mathbf{z} = (r, \theta)$ são definidas como antes. Verifica-se neste caso que

$$[D_{\mathbf{z}}\Psi(\mathbf{z})]^T J D_{\mathbf{z}}\Psi(\mathbf{z}) = J. \quad (1.39)$$

As novas variáveis (r, θ) são chamadas variáveis ação-ângulo. Este tipo de transformação simplética será usada em várias partes deste trabalho.

Exemplo 2: Consideremos \mathbb{R}^{2n} com coordenadas $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ e seja a mudança de coordenadas independente de t :

$$E : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \quad (1.40)$$

definida por

$$\mathbf{Q} = \alpha \mathbf{q}, \quad \mathbf{P} = \alpha \mathbf{p}, \quad (1.41)$$

onde α é uma constante não nula. Logo,

$$T := \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} = \alpha \text{diag}(1, \dots, 1) = \alpha I \quad (1.42)$$

onde I é a matriz identidade de $2n \times 2n$. Portanto,

$$T^T J T = \alpha^2 J, \quad (1.43)$$

isto é, a transformação de coordenadas E é $\mu := \alpha^2$ -simplética.

Aplicaremos esta transformação de coordenadas ao problema dos n -corpos cujo Hamiltoniano é dado por:

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|}. \quad (1.44)$$

O Hamiltoniano transformado é dado por

$$H^*(\zeta) = \alpha^2 H(E^{-1}(\zeta)), \quad (1.45)$$

onde $\zeta = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$. Substituindo $\mathbf{q} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{Q}$ e $\mathbf{p} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{P}$ em (1.45) obtemos

$$\begin{aligned} H^*(\zeta) &= \alpha^2 \left[\frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{P}_i\|^2}{2m_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{G\alpha m_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{P}_i\|^2}{2m_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{G\alpha^3 m_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Esta mudança de coordenadas nos permite supor $G = 1$ (para isso, basta considerar α tal que $G\alpha^3 = 1$). Desta forma não existe perda de generalidade em supor desde o início que no problema dos n -corpos a constante de Gravitação Universal vale 1.

Exemplo 3: Consideremos novamente \mathbb{R}^{2n} de coordenadas $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ e seja a mudança de coordenadas independente de t :

$$E : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \quad (1.47)$$

definida por

$$\mathbf{Q} = \alpha\mathbf{q}, \quad \mathbf{P} = \beta\mathbf{p}, \quad (1.48)$$

onde α e β são constantes não nulas por enquanto. Logo,

$$T := \frac{\partial E}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & \beta I \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

onde I é a matriz identidade de $n \times n$. Portanto,

$$T^T J T = \alpha\beta J, \quad (1.50)$$

isto é, a transformação de coordenadas E é $\mu := \alpha\beta$ -simplética.

Exemplo 4: Consideremos um Hamiltoniano autônomo e analítico que possui um ponto crítico na origem, assim

$$H(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T S\mathbf{z} + K(\mathbf{z}) \quad (1.51)$$

onde S é a matriz Hessiana de H em $\mathbf{z} = 0$, e K é tal que as derivadas parciais de primeira e segunda ordem anulam-se na origem. A mudança de variáveis

$$E : \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{w} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{z} \quad (1.52)$$

com ε constante não nula, como no exemplo 2, com $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$ é ε^{-2} simplética. Assim o novo Hamiltoniano satisfaz:

$$\begin{aligned} H^*(\mathbf{w}) &= \frac{1}{\varepsilon^2}H(E^{-1}\mathbf{z}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}H(\varepsilon\mathbf{w}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\frac{1}{2}\varepsilon^2\mathbf{w}^T S\mathbf{w} + K(\varepsilon\mathbf{w}) \right] \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{w}^T S\mathbf{w} + \frac{1}{\varepsilon^2}K(\varepsilon\mathbf{w}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{w}^T S\mathbf{w} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Para explicar o significado de $O(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}K(\varepsilon\mathbf{w})$ devemos lembrar que pelas hipóteses K começa ao menos com termos de terceira ordem no desenvolvimento em série de Taylor em torno da origem quando consideramos a variável original \mathbf{z} , isto é,

$$K(\mathbf{z}) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{2n}=3} a_{i_1}\dots a_{i_{2n}}z_1^{i_1}\dots z_{2n}^{i_{2n}} + \dots$$

onde ... significa termos de ordem superior. Substituindo \mathbf{z} por $\varepsilon\mathbf{w}$, teremos que

$$K(\varepsilon\mathbf{w}) = \varepsilon^3 \left[\sum_{i_1+i_2+\dots+i_{2n}=3} a_{i_1}\dots a_{i_{2n}}w_1^{i_1}\dots w_{2n}^{i_{2n}} + \dots \right] \quad (1.54)$$

onde a expressão ... dentro do colchete pode ser fatorado por ε . Note que estamos assumindo \mathbf{z} próximo da origem, ou seja, $\varepsilon\mathbf{w}$ deve estar próximo da origem. Logo,

$$|\varepsilon^{-2}K(\varepsilon\mathbf{w})| \leq C\varepsilon \quad (1.55)$$

para alguma constante $C \geq 0$ e para \mathbf{w} numa vizinhança da origem e ε limitado, ou podemos supor que ε é suficientemente pequeno e \mathbf{w} é limitado.

As equações de movimento assumem a forma:

$$\dot{\mathbf{w}} = A\mathbf{w} + O(\varepsilon), \quad A = JS. \quad (1.56)$$

Pelos comentários anteriores, supondo $\|\mathbf{w}\| = 1$ e ε próximo da origem, segue-se que a transformação de coordenadas (1.52) é útil para estudar as equações próximas de um ponto crítico. Note que se desprezamos os termos de ordem ε , então o sistema (1.56) fica linear em \mathbf{w} , desta forma temos que os termos lineares são os mais importantes.

Exemplo 5: Consideremos a seguinte mudança de coordenadas:

$$(I, \phi) = E(r, \varphi) = (\varepsilon^{-\alpha} r, \varphi), \quad (1.57)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $r = (r_1, \dots, r_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $I = (I_1, \dots, I_n)$ e $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$. Verifica-se que esta transformação é $\varepsilon^{-\alpha}$ -simplética. De fato,

$$[D_{\mathbf{z}}E(\mathbf{z})]^T J D_{\mathbf{z}}E(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-\alpha} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \varepsilon^{-\alpha} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \varepsilon^{-\alpha} J. \quad (1.58)$$

Logo, se tomamos a função Hamiltoniana

$$H = H(r, \varphi) = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \quad (1.59)$$

onde H_s é um polinômio homogêneo de grau $s/2$ nas variáveis r e 2π periódico em cada φ_j , então o novo Hamiltoniano é dado por

$$K = \varepsilon^{-\alpha} H(\varepsilon^\alpha I, \phi) = K_2 + \varepsilon^{-\alpha+3/2} K_3 + \varepsilon^{-\alpha+2} K_4 + \dots \quad (1.60)$$

onde K_s denota um polinômio homogêneo de grau $s/2$ nas variáveis r e 2π periódico em cada ϕ_j .

Exemplo 6: A mudança de coordenadas $(y_1, y_2, y_3, y_4) \rightarrow (q_1, q_2, p_1, p_2)$ do \mathbb{R}^4 em \mathbb{C}^4 , dada pelas relações:

$$q_1 = y_1 + iy_3, \quad q_2 = y_2 + iy_4, \quad (1.61)$$

$$p_1 = y_1 - iy_3, \quad p_2 = y_2 - iy_4,$$

Define uma transformação $2i$ -simplética. Esta transformação será muito usada nos capítulos 3 e 4.

Como aplicação desta transformação de coordenadas consideremos a função Hamiltoniana na forma:

$$H = \frac{1}{2}\omega_1(y_1^2 + y_3^2) + \frac{1}{2}\omega_2(y_2^2 + y_4^2). \quad (1.62)$$

O novo Hamiltoniano é igual a $2iH$, onde H é a função Hamiltoniana acima expressa em termos de q_k, p_k pela fórmula (1.61), ou seja,

$$2iH = i\omega_1 q_1 p_1 + i\omega_2 q_2 p_2. \quad (1.63)$$

Exemplo 7: Introduzamos as variáveis reais r_k, ϕ_k pelas relações

$$q_k = \sqrt{2r_k}e^{i\phi_k}, \quad p_k = \sqrt{2r_k}e^{-i\phi_k} \quad (1.64)$$

Esta transformação é $\frac{1}{2i}$ -simplética.

Como aplicação destas coordenadas considere o Hamiltoniano:

$$H = i\omega_1 q_1 p_1 + i\omega_2 q_2 p_2. \quad (1.65)$$

Nas variáveis r_k, ϕ_k a função Hamiltoniana terá a forma:

$$H = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2. \quad (1.66)$$

Exemplo 8: Seja o Hamiltoniano H na seguinte forma:

$$H = \frac{1}{2}\omega(q^2 + p^2) + 2u(q^3 - 3qp^2) + 2v(p^3 - 3pq^2) + H'(q, p, t), \quad (1.67)$$

onde

$$u = x\cos(mt) - y\sin(mt), \quad v = x\sin(mt) + y\cos(mt), \quad (1.68)$$

com x e y constantes satisfazendo $x^2 + y^2 > 0$, a função H' sendo 2π -periódica em t e $H' = O((|q| + |p|)^4)$.

Façamos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{2r} \operatorname{sen}(-\omega t + \phi + \theta), \\ p &= \sqrt{2r} \operatorname{cos}(-\omega t + \phi + \theta), \end{aligned} \quad (1.69)$$

onde

$$\operatorname{sen} 3\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \operatorname{cos} 3\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1.70)$$

De acordo com o exemplo 1 desta seção, a mudança de variáveis $(q, p) \mapsto (r, \phi)$ define uma mudança de coordenadas simplética. Para obter a função Hamiltoniana escrita nas novas coordenadas, de acordo com teorema 1.28, temos que ele é dado por:

$$K(r, \phi, t) = H(r, \phi, t) + R(r, \phi, t). \quad (1.71)$$

Verifica-se que $H(r, \phi, t) = \omega r + \sqrt{2(x^2 + y^2)} r \sqrt{r} \cos 3\phi + O(r^2)$. Da identidade (1.25), temos que a função resto é dada por $R(r, \phi) = -\omega r$ e, com isso, temos que

$$K(r, \phi) = 4\sqrt{2(x^2 + y^2)} r \sqrt{r} \cos 3\phi + O(r^2). \quad (1.72)$$

Exemplo 9: Considere a função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) - \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2) + \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=3} h_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} p_1^{l_1} p_2^{l_2} + \dots \quad (1.73)$$

A fim de colocar o Hamiltoniano (1.73) numa forma apropriada, inicialmente, faça a mudança canônica de coordenadas:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{i}{\omega_1}x_3, & p_1 &= \frac{1}{2}i\omega_1 x_1 + x_3, \\ q_2 &= -\frac{i}{2}x_2 + \frac{1}{\omega_2}x_4, & p_2 &= -\frac{1}{2}\omega_2 x_2 + ix_4. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Nas novas variáveis a função Hamiltoniana é escrita na forma:

$$H = i\omega_1 x_1 x_3 + i\omega_2 x_2 x_4 + \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=3} h'_{k_1 k_2 l_1 l_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{l_1} x_4^{l_2}. \quad (1.75)$$

Os coeficientes em (1.75) são expressos em termos dos coeficientes da função Hamiltoniana (1.73).

Exemplo 10: Seja o Hamiltoniano na forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (x_j^2 + y_j^2) + H_3 + H_4 + \dots, \quad (1.76)$$

onde ω_j é um número real, e H_m é um polinômio homogêneo de grau m relativamente a x_j, y_j , dependendo de uma maneira 2π periódica no tempo. Usando às variáveis complexas conjugadas

$$z_k = x_k + iy_k, \quad \bar{z}_k = x_k - iy_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

O Hamiltoniano (1.76) assume a forma

$$2iH = i \sum_{k=1}^n \omega_k \bar{z}_k z_k + \dots \quad (1.77)$$

1.2.3 Fluxos Hamiltonianos

Vamos agora fornecer propriedades importantes do fluxo de um sistema Hamiltoniano. Como primeira propriedade, temos o seguinte teorema:

Teorema 8 *A matriz solução fundamental $Z(t, t_0)$ de um sistema Hamiltoniano linear é simplética para todo $t, t_0 \in I$. Reciprocamente, se $Z(t, t_0)$ é uma função diferenciável de matrizes simpléticas, então Z é a matriz solução de um sistema Hamiltoniano linear.*

Demonstração. Se $U(t) = Z(t, t_0)^T J Z(t, t_0)$ então, $U(t_0) = J$ e

$$\dot{U}(t) = \dot{Z}^T J Z + Z^T J \dot{Z} = Z^T (A^T J + J A) Z = 0, \quad (1.78)$$

donde seque que $U(t) = J$, para todo t , e com isso temos que $Z(t, t_0)$ é simplética para todo t . Se $Z^T J Z = J$, para todo t , então $\dot{Z}^T J Z + Z^T J \dot{Z} = 0$, donde $(\dot{Z} Z^{-1})^T J + J(\dot{Z} Z^{-1}) = 0$. Isto mostra que $\dot{A} = Z Z^{-1}$ é Hamiltoniana e $\dot{Z} = A Z$. ■

Corolário 2 *Uma matriz constante A é Hamiltoniana se, e somente se, e^{tA} é simplética para todo t .*

Vamos estender este teorema para sistemas Hamiltonianos não lineares autônomos. Denote por $\phi_t(\mathbf{z})$ o fluxo do sistema Hamiltoniano (1.2), o qual supomos autônomo e que está definido na região $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$. Temos que:

Teorema 9 *Para cada t , a aplicação $\mathbf{z} \mapsto \phi_t(\mathbf{z})$ é simplética.*

Demonstração. Seja $M(t, \mathbf{z}) = D_{\mathbf{z}} \phi_t(\mathbf{z})$. Vamos mostrar que M é uma matriz simplética para cada $\mathbf{z} \in \Omega$. Denotando por $H_{\mathbf{z}}$ o gradiente de H , pela definição de fluxo temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(\mathbf{z}) = J H_{\mathbf{z}}(\phi_t(\mathbf{z})). \quad (1.79)$$

Diferenciando com respeito a \mathbf{z} obtemos

$$\dot{M} = \Phi M, \quad (1.80)$$

onde $\Phi = JH_{\mathbf{z}\mathbf{z}}$. Como $H_{\mathbf{z}\mathbf{z}}$ é uma matriz simétrica, temos que $J\Phi$ também é, assim, $M^T J \dot{M} = M^T J \Phi M$. Conseqüentemente, $M^T J \dot{M} = -\dot{M}^T J M$ e, então

$$\frac{d}{dt}(M^T J M) = \dot{M}^T J M + M^T J \dot{M} = 0. \quad (1.81)$$

Donde segue que $M^T J M$ é uma matriz constante, e como $\phi_0(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ para todo \mathbf{z} , temos que $M(\mathbf{0}) = 0$, assim, $M^T J M = J$. Logo $M = M(t, \mathbf{z})$ é uma matriz simplética. ■

Como uma transformação simplética preserva volume, temos o seguinte corolário, as vezes chamado de teorema de Liouville, do teorema acima:

Corolário 3 (Liouville) *O fluxo $\phi_t(\mathbf{z})$ de um sistema Hamiltoniano define um difeomorfismo que preserva volume para cada t .*

1.2.4 Funções geradoras

Vamos, agora, obter um processo para construção de transformações simpléticas por meio de uma função chamada função geradora.

Seja

$$\Omega = d\mathbf{q} \wedge d\mathbf{p} = \sum_{j=1}^n dq_j \wedge dp_j. \quad (1.82)$$

Considere a mudança de coordenadas $U : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$. Assuma que \mathbf{Q} e \mathbf{P} estão definidas numa bola U de \mathbb{R}^{2n} .

Nas condições acima, a mudança de coordenadas, E , é simplética se, e somente se, $d\mathbf{q} \wedge d\mathbf{p} = d\mathbf{Q} \wedge d\mathbf{P}$.

Sabemos que uma k -forma ω é fechada se $d\omega = 0$. Definindo as 1-formas $\sigma_1 = \mathbf{q}d\mathbf{p} - \mathbf{Q}d\mathbf{P}$ e $\sigma_3 = \mathbf{p}d\mathbf{q} - \mathbf{P}d\mathbf{Q}$, temos que σ_1 e σ_3 são fechadas se, e somente se, $\sigma_2 = \sigma_1 + d(\mathbf{Q}\mathbf{P}) = \mathbf{q}d\mathbf{p} + \mathbf{P}d\mathbf{Q}$ e $\sigma_4 = \sigma_3 + d(\mathbf{Q}\mathbf{P}) = \mathbf{p}d\mathbf{q} + \mathbf{Q}d\mathbf{P}$ também são. Temos que E é simplética se, e somente se $\sigma_1, \sigma_2,$

σ_3 e σ_4 são fechadas. O lema de Poincaré nos diz que toda forma fechada é localmente exata, assim, a mudança de coordenadas E é simplética se, e somente se, existem funções $S_1 = S_1(\mathbf{p}, \mathbf{P})$, $S_2 = S_2(\mathbf{p}, \mathbf{Q})$, $S_3 = S_3(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ e $S_4 = S_4(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ tais que $dS_i = \sigma_i$, $i = 1, \dots, 4$.

Estas informações fornecem uma forma fácil de construir transformações simpléticas. Por exemplo, assuma que exista uma função $S_1 = S_1(\mathbf{p}, \mathbf{P})$ tal que $\frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}, \mathbf{P})d\mathbf{p} + \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{p}, \mathbf{P})d\mathbf{P} = dS_1 = \sigma_1$. Isto acontece se, e somente se, $\frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{q}$ e $-\frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{Q}$. Portanto, qualquer mudança de coordenadas que satisfaz estas duas últimas condições é simplética. Assumindo, agora, que o Hessiano de S_1 é não singular, segue-se do Teorema da Função Implícita que podemos tirar \mathbf{P} como função de \mathbf{q} e \mathbf{p} e também \mathbf{P} como função de \mathbf{q} e \mathbf{p} . Assim, de forma similar temos:

Teorema 10 *As seguintes mudanças de coordenadas definem mudanças de coordenadas simpléticas:*

$$(a) \mathbf{q} = \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}, \mathbf{P}), \mathbf{Q} = -\frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{p}, \mathbf{P}), \text{ quando } \frac{\partial^2 S_1}{\partial \mathbf{p} \mathbf{P}}(\mathbf{p}, \mathbf{P}) \text{ é não singular}$$

$$(b) \mathbf{q} = \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}), \mathbf{P} = \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}), \text{ quando } \frac{\partial^2 S_2}{\partial \mathbf{p} \mathbf{Q}}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) \text{ é não singular}$$

$$(c) \mathbf{p} = \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}), \mathbf{P} = -\frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}), \text{ quando } \frac{\partial^2 S_3}{\partial \mathbf{p} \mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \text{ é não singular}$$

$$(d) \mathbf{p} = \frac{\partial S_4}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}), \mathbf{Q} = -\frac{\partial S_4}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}), \text{ quando } \frac{\partial^2 S_4}{\partial \mathbf{p} \mathbf{P}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \text{ é não singular}$$

As funções S_i , $i = 1, \dots, 4$ são chamadas funções geradoras ou funções geratrizes.

Vamos agora ver alguns exemplos de funções geradoras:

Exemplo 1: Seja $S_2(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) = \mathbf{p}\mathbf{Q}$, então $\frac{\partial^2 S_2}{\partial \mathbf{p} \mathbf{Q}}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) = I$ é não singular. Assim, ela define uma mudança de coordenadas simpléticas $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ dada por $\mathbf{q} = \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}$, $\mathbf{P} = \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) = \mathbf{p}$. Esta aplicação é a identidade.

Exemplo 2: (Transformações de Mathieu) Suponhamos que temos uma transformação $Q = f(q)$

com $\frac{\partial f}{\partial q}$ invertível, então esta transformação pode ser estendida a uma transformação simplética definida por S_4 (como no Teorema 10) da seguinte forma:

$$S_4(q, P) = f(q)^T P, \quad (1.83)$$

assim, $p = \frac{\partial f}{\partial q}(q)^T P$, $Q = f(q)$, isto é,

$$(q, p) \rightarrow \left(Q = f(q), P = \frac{\partial f}{\partial q}(q)^{-T} p \right). \quad (1.84)$$

Exemplo 3: (Coordenadas polares) Sejam (x, y) as coordenadas usuais no plano e (X, Y) seus momentos conjugados. Suponhamos que nosso objetivo é mudar para coordenadas polares (r, θ) no plano e estender esta transformação a uma mudança de coordenadas simpléticas. Sejam (R, Θ) as variáveis conjugadas de (r, θ) . Fazendo $q = (r, \theta)$ e $Q = f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) := (x, y)$ temos que $\frac{\partial f}{\partial q}$ é invertível. Então aplicando o exemplo anterior com $p = (R, \Theta)$ e $P = (X, Y)$ tem-se

$$S = S_4(q, P) = f(q)^T P = X r \cos \theta + Y r \sin \theta, \quad (1.85)$$

e, assim,

$$x = \frac{\partial S}{\partial X} = r \cos \theta, \quad R = \frac{\partial S}{\partial r} = X \cos \theta + Y \sin \theta = \frac{xX + yY}{r} \quad (1.86)$$

$$y = \frac{\partial S}{\partial Y} = r \sin \theta \quad \Theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = -X r \sin \theta + Y r \cos \theta = xY - yX.$$

Se nós pensamos no movimento no plano de uma partícula de massa m , então $X = m\dot{x}$ e $Y = m\dot{y}$ são o momento linear nas direções de x e y ; assim, $R = m\dot{r}$ é o momento linear na direção de r , e $\Theta = mx\dot{y} - my\dot{x} = mr^2\dot{\theta}$ é o momento angular. A transformação inversa é

$$X = R \cos \theta - \left(\frac{\Theta}{r}\right) \sin \theta, \quad (1.87)$$

$$Y = R \sin \theta + \left(\frac{\Theta}{r}\right) \cos \theta.$$

Uma aplicação imediata das coordenadas polares simpléticas é o problema de Kepler no plano.

Usando as notações acima o Hamiltoniano associado a este problema é dado por

$$H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r}. \quad (1.88)$$

Note que como H é independente de θ , ela é uma variável ignorável, e logo Θ é uma integral. As equações do movimento são

$$\dot{r} = R, \quad \dot{\theta} = \frac{\Theta}{r^2} \quad (1.89)$$

$$\dot{\Theta} = -\frac{\Theta^2}{r^3} + \frac{\mu}{r^2}, \quad \dot{\Theta} = 0.$$

Exemplo 4 (Cálculo da função resto): Consideremos a mudança de coordenadas $E : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ dada, explicitamente, pela função geradora $S = S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ através da relação

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}. \quad (1.90)$$

Vamos obter a função resto, isto é, a função $R = R(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ tal que

$$\frac{\partial E}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)|_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})=E^{-1}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)} = J\nabla_{(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}R(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), \quad (1.91)$$

isto é,

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}(E^{-1}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), t) = \frac{\partial R}{\partial \mathbf{P}}((\mathbf{Q}, \mathbf{P}), t), \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(E^{-1}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), t) = -\frac{\partial R}{\partial \mathbf{Q}}((\mathbf{Q}, \mathbf{P}), t). \quad (1.92)$$

Mostraremos que $R(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$. Com efeito, inicialmente, se R é como acima então

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t). \quad (1.93)$$

Por outro lado, pela própria definição de S temos que

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (1.94)$$

Exemplo 5: Façamos a mudança canônica de variáveis $(q_k, p_k) \rightarrow (Q_k, P_k)$ pelas fórmulas

$$Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}, \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad (1.95)$$

onde a função geradora S tem a forma

$$S = q_1 P_1 + q_2 P_2 + \varepsilon W \equiv q_1 P_1 + q_2 P_2 + \varepsilon \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=2} w_{k_1 k_2 l_1 l_2}(t) q_1^{k_1} q_2^{k_2} P_1^{l_1} P_2^{l_2}.$$

A função $w_{k_1 k_2 l_1 l_2}$ é escolhida 2π -periódica e tal que no novo Hamiltoniano os termos de ordem ε assumem a forma mais simples possível. De (1.95), temos que a forma explícita da transformação $(q_k, p_k) \rightarrow (Q_k, P_k)$ até os termos de ordem ε é:

$$q_k = Q_k - \varepsilon \frac{\partial W}{\partial P_k}, \quad (1.96)$$

$$p_k = P_k + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial Q_k},$$

onde na função W as variáveis q_1, p_1 são mudadas para Q_1, P_1 . Nas variáveis Q_k, P_k a nova função Hamiltoniana H' , de acordo com o exemplo anterior, é calculada pela fórmula

$$H' = H + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (1.97)$$

onde H é a função Hamiltoniana antiga, expressa em termos de Q_k, P_k através das fórmulas (1.96).

1.3 Sistemas Hamiltonianos lineares periódicos: o Teorema de Floquet-Liapunov

O objetivo desta seção é fornecer o teorema de Floquet-Liapunov, teorema que será usado em vários capítulos deste trabalho. Vamos começar com algumas preliminares.

Definição 6 Dizemos que uma matriz $n \times n$ D tem um logaritmo se existe uma matriz $n \times n$ B tal que $D = e^B$. Neste caso, dizemos que B é o logaritmo de D e escrevemos $B = \log D$.

O seguinte lema será importante na demonstração do teorema de Floquet-Liapunov:

Lema 1 Toda matriz $n \times n$ invertível tem um logaritmo.

Demonstração. Seja D uma matriz $n \times n$ invertível. Se $D = \text{diag}[D_1, \dots, D_k]$, onde cada D_j é uma matriz invertível e se existem matrizes B_1, \dots, B_k com $e^{B_j} = D_j$, pondo $B = \text{diag}[B_1, \dots, B_k]$ temos que $e^B = D$. Com isso é suficiente mostrar que uma matriz elementar de Jordan J com autovalor não nulo tem logaritmo. Escrevemos $J = \lambda I + N = \lambda(I + R)$, onde $R = \frac{1}{\lambda}N$ e consideramos a matriz $B = (\ln \lambda)I + S$, onde $S = \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{j+1} \frac{R^j}{j}$, sendo m a ordem de J e $\ln \lambda$ uma das determinações do logaritmo de λ . Observemos que $S = \log(I + R)$, pois $R^j = 0$ para $j \leq m$. Assim, $e^S = I + R$. Como $(\ln \lambda)I$ e S comutam, temos que $e^B = e^{(\ln \lambda)I + S} = e^{(\ln \lambda)I} e^S = \lambda(I + R) = J$. Fica, assim, demonstrado o lema. ■

Considere o sistema de equações diferenciais linear e periódico

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad (1.98)$$

onde $A(t)$ é uma matriz T -periódica, isto é, $A(t + T) = A(t)$ para todo t . Independente do sistema (1.98) ser Hamiltoniano ou não temos o seguinte resultado:

Lema 2 Se $X(t)$ é uma matriz fundamental do sistema (5.4) então $X(t + T) = X(t)X(T)$, para todo t .

Demonstração. Seja $U(t) = X(t+T)$ e $V(t) = X(t)X(T)$. Temos que $\dot{U}(t) = A(t)U(t)$ e $\dot{V}(t) = A(t)V(t)$, e como $U(0) = Z(T) = V(0)$, segue do teorema da unicidade para equações diferenciais que $U(t) = V(t)$. ■

Definição 7 A matriz $X(T)$ é chamada matriz de monodromia da equação (1.98). Os autovalores ρ de $X(T)$ são chamados de multiplicadores característicos. Cada número complexo λ tal que $\rho = e^{\lambda T}$ é chamado expoente característico.

Os multiplicadores característicos não dependem da escolha de uma matriz de monodromia, isto é, da solução particular usada para definir a matriz de monodromia. De fato, se $X(t)$ e $Y(t)$ são duas matrizes fundamentais do sistema (1.98), então, para cada t , existe uma matriz não singular $D(t)$ tal que $Y(t) = X(t)D(t)$. Como $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ e $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$, temos que

$$A(t)X(t)D(t) = A(t)Y(t) = \dot{Y}(t) = \dot{X}(t)D(t) + X(t)\dot{D}(t) = A(t)X(t)D(t) + X(t)\dot{D}(t) \quad (1.99)$$

e, como $X(t)$ é inversível, temos que $\dot{D}(t) = 0$ para todo t , donde $D(t) = D$ é uma matriz constante. Assim,

$$X(t)X(T)D = X(t+T)D = Y(t+T) = Y(t)Y(T) = X(t)DY(T) \quad (1.100)$$

donde $X(T) = DY(T)D^{-1}$, ou seja, as matrizes $X(T)$ e $Y(T)$ são semelhantes. Como matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores, segue o resultado.

Para sistemas Hamiltonianos periódicos, isto é, sistemas da forma:

$$\dot{\mathbf{z}} = A(t)\mathbf{z}, \quad (1.101)$$

onde A é uma matriz Hamiltoniana T -periódica, temos o seguinte teorema:

Teorema 11 (Floquet-Liapunov) Seja $Z(t)$ a matriz fundamental da equação (1.101). Existem matrizes $n \times n$ B e $Q(t)$, com B Hamiltoniana constante e $Q(t)$ T -periódica e simplética, tais que

$$Z(t) = Q(t)e^{tB}. \quad (1.102)$$

Demonstração. A matriz $Z(t+T)$ também é uma matriz fundamental da equação (1.101). Assim, suas colunas são linearmente independentes e como, pelo lema 2, $Z(t+T) = Z(t)Z(T)$, temos que

$Z(T)$ é inversível. Então, pelo lema 1, existe uma matriz B tal que $Z(T) = e^{TB}$. Como $Z(t)$ é Hamiltoniana, pelo corolário 2, temos que B é Hamiltoniana. Considere a matriz $Q(t) = Z(t)e^{-tB}$. Temos que $Z(t) = Q(t)e^{tB}$, $Q(t+T) = Q(t)$ e, Pelo corolário 2, $Q(t)$ é simplética para cada t . Como queríamos demonstrar. ■

Uma consequência muito importante do teorema acima é o seguinte:

Corolário 4 *A transformação linear e simplética $\mathbf{z} = Q(t)\mathbf{w}$ transforma o sistema Hamiltoniano periódico (1.101) no sistema Hamiltoniano $\dot{\mathbf{w}} = B\mathbf{w}$.*

É fácil verificar que os autovalores de B são os expoentes característicos da matriz $A(t)$, o qual, As vezes, falamos simplesmente expoentes característicos de (1.101).

1.4 O Teorema da Curva Invariante

O objetivo desta seção é enunciar o Teorema da Curva Invariante, resultado que será de grande importância para provar o teoremas de Arnold-Moser e de Cabral-Meyer. Esta seção tem como base o livro de Meyer [25].

Consideremos o difeomorfismo

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + f(\mathbf{x}) \quad (1.103)$$

de uma vizinhança de um ponto fixo $\xi \in \mathbb{R}^m$; assim $f(\xi) = 0$ e $\frac{\partial f(\xi)}{\partial \mathbf{x}} = 0$. Os autovalores de A são chamados *multiplicadores* do ponto fixo.

Definição 8 *Um ponto fixo é dito ser positivamente (respectivamente negativamente) estável se para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|F^k(\mathbf{x}) - \xi\| < \varepsilon$ para todo $\|\mathbf{x} - \xi\| < \delta$ e $k > 0$ (respectivamente $k < 0$). O ponto fixo é dito estável se ele for positivamente e negativamente estável. O ponto fixo é dito ser instável se ele não é estável. O ponto fixo é dito ser assintoticamente estável se ele for positivamente estável, e existe um $\eta > 0$ tal que $F^k(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ para todo $\|\mathbf{x} - \xi\| < \eta$.*

Analogamente aos critérios de equações diferenciais ordinárias, temos os seguintes resultados:

- Se todos os multiplicadores tem módulo menor do que 1, então o ponto fixo é assintoticamente estável.
- Se existe um multiplicador com módulo maior do que 1, então o ponto fixo é instável.
- Se consideramos o difeomorfismo linear $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, e se todos os multiplicadores tem módulo 1, então o ponto fixo é estável, mas não é assintoticamente estável.
- Se um difeomorfismo é um symplectomorfismo, isto é, é um difeomorfismo simplético então o primeiro ítem não se aplica, já que se λ é um autovalor então λ^{-1} também será autovalor de A . De fato, se um autovalor $\lambda = a + ib$ de A tem módulo $\sqrt{a^2 + b^2}$ menor do que 1, então o módulo de λ^{-1} será $(a^2 + b^2)^{-1/2}$, que tem módulo maior do que 1.
- Consideremos o caso planar onde o difeomorfismo definido por (1.103) possui um ponto fixo em $(0, 0)$. Então esta aplicação preserva área. Além disso, suponhamos que a origem é um ponto fixo elíptico, isto é, os autovalores de A , λ e $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$ e $|\lambda| = 1$. Se $\lambda = 1$ é uma raiz da unidade (isto é, $\lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = i, \lambda = e^{\pm 2\pi i/3}$), então tipicamente a origem é estável.
- Considerando ainda o caso planar onde λ não é uma raiz m -ésima da unidade para $m = 1, 2, 3, 4$, a aplicação pode ser colocada na forma normal até termos de ordem três, isto é, existe uma mudança de coordenadas simpléticas as variáveis ação -ângulo, (I, φ) , tal que nestas coordenadas,

$$F : (I, \varphi) \rightarrow (I', \varphi'),$$

onde,

$$I' = I + c(I, \varphi) \tag{1.104}$$

$$\varphi' = \varphi + \omega + \alpha I + d(I, \varphi),$$

$\lambda = e^{\omega i}$, e a e d são funções de ordem $O(I^{3/2})$.

Pelo momento assumamos que c e d são nulos; assim, a aplicação (1.104) leva o círculo $I = I_0$ nele mesmo, e se $\alpha \neq 0$, cada círculo é rotacionado num ângulo $\omega + \alpha I_0$.

Se $\omega + \alpha I_0 = 2\pi \frac{p}{q}$, onde p e q são primos relativos entre si, então cada ponto sobre o círculo $I = I_0$ é um ponto periódico de período q .

Se $\omega + \alpha I_0 = 2\pi\delta$, onde δ é irracional, então as órbitas de um ponto sobre o círculo $I = I_0$ são densas. Um dos famosos Teoremas em Mecânica Hamiltoniana estabelece que muitos destes círculos persistem como curvas invariantes. De fato, existem suficientes curvas invariantes que asseguram a estabilidade do ponto fixo. Este é o chamado *Teorema da Curva Invariante*.

Lembremos que se δ é um número irracional e $\varepsilon > 0$ é dado, então existem p e q números inteiros primos entre si tal que

$$\left| \delta - \frac{p}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{q}. \quad (1.105)$$

Esta fórmula nos diz muito mais do que quando um número irracional pode ser aproximado por um número racional; ela diz também quão boa é esta aproximação. Podemos construir números irracionais os quais realmente são bem aproximados por números racionais, digamos, para os quais $|\delta - p/q| < \frac{\varepsilon}{q^2} < \frac{\varepsilon}{q^{223}}$, tomando uma expansão decimal com uma sequência arbitrariamente longa de zeros. No entanto, existem irracionais os quais podem ser "defeituosamente" aproximados por números racionais no seguinte sentido:

Teorema 12 *Seja U qualquer intervalo fechado, e seja $K > 0$ uma constante fixa. Então o conjunto*

$$U(K) = \left\{ \delta \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap U \mid \left| \delta - \frac{p}{q} \right| > \frac{K}{q^3}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} \quad (1.106)$$

é denso em U e tem medida positiva. A medida de $U(K)$ tende a zero quando K tende a zero. Além disso, todos os números algébricos irracionais como $\sqrt{2}$ pertencem a $U(K)$ para algum $K > 0$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em Arnold [1]. ■

Tais números irracionais são ditos defeituosamente aproximados por racionais.

Já estamos com todas as preliminares para enunciar a seguinte versão do Teorema da Curva Invariante:

Teorema 13 (Teorema da Curva Invariante) *Considere a aplicação $F : (r, \varphi) \rightarrow (r', \varphi')$ dada por:*

$$r' = r + \varepsilon^{r+s} c(r, \varphi, \varepsilon) \tag{1.107}$$

$$\varphi' = \varphi + \omega + \varepsilon^s h(r) + \varepsilon^{r+s} d(r, \varphi, \varepsilon),$$

onde

(i) c e d são funções diferenciáveis para $0 \leq a \leq r < b < \infty$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$;

(ii) para todo φ c e d são funções 2π -periódicas em φ ;

(iii) r e s são inteiros $s \geq 0$, $r \geq 1$;

(iv) h é uma função diferenciável para $0 \leq a \leq r < b < \infty$;

(v) $\frac{dh}{dr} \neq 0$ para $0 \leq a \leq r < b < \infty$;

(vi) se E é qualquer curva fechada contínua da forma

$$E = \{(r, \varphi) / r = \Theta(\varphi), \Theta : \mathbb{R} \rightarrow [a, b] \text{ contínua e } 2\pi\text{-periódica}\},$$

então, $E \cap F(E) \neq \emptyset$.

Então para ε suficientemente pequeno, existe uma curva contínua, Γ , F -invariante da forma

$$\Gamma = \{(r, \varphi) / r = \Phi(\varphi), \Phi : \mathbb{R} \rightarrow [a, b] \text{ contínua e } 2\pi\text{-periódica}\}.$$

O número de rotação de F sobre Γ é um número irracional o qual é defeituosamente aproximado por números racionais no sentido do teorema anterior.

Demonstração. A demonstração deste teorema é muito técnica e pode ser encontrada em Siegel [30].

■

Comentários. 1) A hipótese (v) é a hipótese "twist" discutida anteriormente e a aplicação F , é uma perturbação da aplicação twist para ε pequeno.

2) A hipótese (vi) aplica-se ao exemplo óbvio onde F aplica cada ponto radialmente fora ou dentro. Se F preserva área, então a hipótese (vi) é automaticamente satisfeita.

3) Desde que o teorema pode ser aplicado a qualquer subintervalo de $[a, b]$, o teorema implica a existência de um número infinito de curvas invariantes. De fato, a demonstração mostra que a

medida das curvas invariantes é positiva e tende à medida do anel $a \leq r \leq b$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Se $s = 0$ e K estão fixados, então existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo número irracional δ , $h(a) < \delta < h(b)$, satisfazendo (1.106) existe uma curva invariante para F com número de rotação δ .

Capítulo 2

Formas normais para sistemas Hamiltonianos lineares

Neste capítulo, vamos fornecer um algoritmo devido a Burgoyne [5] para obtenção de formas normais para sistemas Hamiltonianos lineares com autovalores imaginários puros. Forneceremos, também, o processo de normalização de Birkhoff para sistemas Hamiltonianos lineares no caso em que os autovalores são distintos. Seguindo Arnold [1], vamos fornecer uma tabela de formas normais para funções Hamiltonianas quadráticas. Na última seção, faremos um breve comentário sobre o caso periódico.

2.1 Introdução

Considere o sistema Hamiltoniano linear autônomo real

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}, \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}$. Se $P \in Sp(n, \mathbb{R})$, então a mudança de variáveis reais e simplética $\mathbf{z} = P\mathbf{w}$ é tal que

$$\dot{\mathbf{w}} = P^{-1}\dot{\mathbf{z}} = P^{-1}A\mathbf{z} = P^{-1}AP\mathbf{w} = B\mathbf{w}, \quad (2.2)$$

onde $B = P^{-1}AP$. Observe que

$$B^T J + JB = P^T A^T P^{-T} P^T J P + P^T J P P^{-1} A P = P^T (A A^T J + J A) P = 0, \quad (2.3)$$

donde segue que $B \in sp(n, \mathbb{R})$ e, portanto, a mudança de variáveis $\mathbf{z} = P\mathbf{w}$ leva o sistema (2.1) no sistema Hamiltoniano linear real $\dot{\mathbf{w}} = B\mathbf{w}$.

Em alguns problemas é importante encontrar uma matriz simplética P tal que a matriz B assume uma forma particularmente simples, chamada de forma normal. A matriz P deve ser real, pois assim conduz a sistemas Hamiltonianos lineares reais.

Observe que se definirmos a relação \simeq entre matrizes $A, B \in sp(n, \mathbb{R})$ da seguinte forma:

$$A \simeq B \Leftrightarrow \exists P \in Sp(n, \mathbb{R}) / B = P^{-1}AP, \quad (2.4)$$

verifica-se facilmente que esta relação define uma relação de equivalência. O problema de encontrar uma forma normal para uma matriz $A \in sp(n, \mathbb{R})$ consiste em encontrar um elemento B da classe de A que tem uma forma particularmente simples.

Do ponto de vista da função Hamiltoniana, queremos obter uma transformação simplética tal que o Hamiltoniano transformado, a 'forma normal', contenha poucos termos.

2.2 Algoritmo para o caso onde os autovalores são imaginários puros

Nesta seção vamos fornecer um algoritmo para obtenção da forma normal no caso em que os autovalores são imaginários puros. Esta seção foi feita baseado do artigo de Burgoyne [5].

Inicialmente suponha que o polinômio característico de A é $P(\lambda) = (\lambda^2 + \alpha^2)^n$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$. Desta forma temos que o polinômio minimal de A é $p_{min}(\lambda) = (\lambda^2 + \alpha^2)^m$ para algum inteiro m , $1 \leq m \leq n$. Vamos iniciar nosso algoritmo fazendo uma decomposição de A como soma de uma matriz simples (tem $2n$ autovetores linearmente independentes reais ou complexos) Hamiltoniana

mais uma matriz nilpotente. A matriz S dada por

$$S = A \left\{ I + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{4\alpha^2} \begin{pmatrix} 2j \\ j \end{pmatrix} (A^2 + \alpha^2 I) \right\}, \quad (2.5)$$

é uma matriz semi-simples e Hamiltoniana. Observe que a matriz

$$N = -A \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{4\alpha^2} \begin{pmatrix} 2j \\ j \end{pmatrix} (A^2 + \alpha^2 I) \quad (2.6)$$

é tal que $N^m = 0$, donde temos que N é nilpotente, e como $A = S + N$ temos a decomposição desejada. Para maiores detalhes sobre esta decomposição você pode consultar vários livros de Algebra Linear, por exemplo, Hoffman [14].

Sejam $K_i = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} / N^i \mathbf{z} = 0\}$, $i = 0, \dots, m$. Note que $K_0 = \{0\}$ e $K_m = \mathbb{R}^{2n}$. Defina a 2-forma canônica ω por $\omega(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \mathbf{z}^T J \mathbf{w}$, para todo $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2n}$. Nosso próximo passo é construir certos subespaços de \mathbb{R}^{2n} . Ponha $W_0 = \{0\}$ e vamos construir subespaços W_j , $j > 0$, de \mathbb{R}^{2n} por um processo recursivo que descreveremos a seguir:

(i) Obtenha um inteiro $t = t_j$, $0 \leq t \leq m$, tal que

$$W_{j-1}^\perp \cap K_{t+1} = W_{j-1}^\perp, \quad \text{mas } W_{j-1}^\perp \cap K_t \neq W_{j-1}^\perp, \quad (2.7)$$

onde $W_{j-1}^\perp = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} / \omega(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = 0, \forall \mathbf{w} \in W_{j-1}\}$. Note que se $N = 0$ (isto é, $m = 1$), então $t = 0$.

(ii) Escolha $\mathbf{z} \in W_{j-1}^\perp$ tal que $\mathbf{z} \notin K_t$ e $\omega(\mathbf{z}, N^t S^{(t+1) \bmod 2} \mathbf{z}) = \varepsilon_j$, onde $\varepsilon_j^2 = 1$.

(iii) Defina Z_j como sendo o espaço gerado por $\mathbf{z}, N\mathbf{z}, \dots, N^t \mathbf{z}, S\mathbf{z}, NS\mathbf{z}, \dots, N^t S\mathbf{z}$.

(iv) Defina W_j por $W_j = Z_j + W_{j-1}$. Se $W_j \neq \mathbb{R}^{2n}$ repita o processo até obter $W_l = \mathbb{R}^{2n}$ para algum inteiro l .

Vamos agora construir uma base para o subespaço Z_j encontrado acima. Existem dois casos: um quando t for par e outro quando t for ímpar.

Quando t for ímpar: Seja \mathbf{z} o vetor encontrado acima, com $\varepsilon = \varepsilon_j = \omega(\mathbf{z}, N^t \mathbf{z})$ e $r = \frac{1}{2}(t+1)$.

Ponha $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}$ e forme \mathbf{z}_i , $1 \leq i \leq r$, como segue:

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{z}_{i-1} + \frac{\varepsilon}{2\alpha^2} \omega(\mathbf{z}_{i-1}, SN^{t+1-2i} \mathbf{z}_{i-1}) N^{2i-1} S \mathbf{z}_{i-1}. \quad (2.8)$$

Ponha $\tilde{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{z}_r$ e construa $\tilde{\mathbf{z}}_i$, $1 \leq i \leq r-1$ usando

$$\tilde{\mathbf{z}}_i = \tilde{\mathbf{z}}_{i-1} - \frac{\varepsilon}{2} \omega(\tilde{\mathbf{z}}_{i-1}, N^{t-2i} \tilde{\mathbf{z}}_{i-1}) N^{2i} \tilde{\mathbf{z}}_{i-1}. \quad (2.9)$$

No caso $r = t = 1$ esta última construção deve ser omitida. Ponha

$$\tau = \tau_j = \begin{cases} 0, & \text{se } j = 1 \\ \sum_{i=1}^{j-1} (t_i + 1), & \text{se } j \neq 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Sendo $\mathbf{z}^* = \tilde{\mathbf{z}}_{r-1}$, a base desejada de Z_j é a base B cujos elementos são

$$b_{\tau+2i-1} = N^{i-1} \mathbf{z}^*, \quad b_{n+\tau+2i-1} = (-1)^{i-1} \varepsilon N^{t+1-i} \mathbf{z}^* \quad (2.11)$$

$$b_{\tau+2i} = \frac{1}{\alpha} SN^{i-1} \mathbf{z}^*, \quad b_{n+\tau+2i} = (-1)^{i-1} \frac{\varepsilon}{\alpha} SN^{t+1-i} \mathbf{z}^*,$$

para $i = 1, \dots, t+1$. Temos que $\omega_{ij} = \omega(b_i, b_j) = J_{ij}$, $i, j = 1, \dots, 2t+2$, logo esta é uma base simplética de Z_j . Nesta base, a matriz da restrição de A ao subespaço Z_j é

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & -X_1^T \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

onde

$$X_1 = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & L & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & L \end{pmatrix}, \quad e \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \Delta \end{pmatrix},$$

$$\text{com } L = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \Delta = \begin{pmatrix} (-1)^{r-1} \varepsilon & 0 \\ 0 & (-1)^{r-1} \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Quando t for par: Seja \mathbf{z} o vetor encontrado acima, com $\varepsilon = \varepsilon_j = \omega(\mathbf{z}, N^t S \mathbf{x})$ e $r = \frac{1}{2}t$. Ponha $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}$ e forme \mathbf{z}_i , $1 \leq i \leq r$, como segue:

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{z}_{i-1} - \frac{\varepsilon}{2} \omega(\mathbf{z}_{i-1}, N^{t+1-2i} \mathbf{z}_{i-1}) N^{2i-1} S \mathbf{z}_0. \quad (2.13)$$

No caso $r = t = 0$ esta construção deve ser omitida. Ponha $\tilde{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{z}_r$ e construa $\tilde{\mathbf{z}}_i$, $1 \leq i \leq r$ usando

$$\tilde{\mathbf{z}}_i = \tilde{\mathbf{z}}_{i-1} - \frac{\varepsilon}{2} \omega(\tilde{\mathbf{z}}_{i-1}, N^{t-2i} S \tilde{\mathbf{z}}_{i-1}) N^{2i} \tilde{\mathbf{z}}_{i-1}. \quad (2.14)$$

No caso $r = t = 0$ esta última construção deve ser omitida. Ponha

$$\tau = \tau_j = \begin{cases} 0, & \text{se } j = 1 \\ \sum_{i=1}^{j-1} (t_i + 1), & \text{se } j \neq 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Sendo $\mathbf{z}^* = \tilde{\mathbf{z}}_r$, a base desejada de Z_j é a base B cujos elementos são

$$b_{\tau+i} = \sqrt{\alpha} N^{i-1} \mathbf{z}^* \text{ e } b_{n+\tau+i} = (-1)^{i-1} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha}} S N^{t+1-i} \mathbf{z}^*, \quad (2.16)$$

para $i = 1, \dots, t+1$. Temos que $\omega_{ij} = \omega(b_i, b_j) = J_{ij}$, $i, j = 1, \dots, 2t+2$, logo esta é uma base simplética de Z_j . Nesta base, a matriz da restrição de A ao subespaço Z_j é

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ -Y_2 & -Y_1^T \end{pmatrix},$$

onde

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\varepsilon\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon\alpha & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \varepsilon\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\varepsilon\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz de A sobre \mathbb{R}^{2n} com respeito a base $\{b_1, \dots, b_{2n}\}$ é

$$Z = \begin{pmatrix} E & F \\ G & -E^T \end{pmatrix},$$

com

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \text{ e } G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{pmatrix} E_j & F_j \\ G_j & -E_j^T \end{pmatrix}$$

é uma matriz $(2t_j + 2) \times (2t_j + 2)$ tipo X ou Y , definidas acima.

Vamos agora ao caso geral em que o polinômio característico de A é da forma $p(\lambda) = \prod_i (\lambda^2 + \alpha_i^2)^{n_i}$, onde $\alpha_i \neq \alpha_j$ para $i \neq j$ e $\alpha_i > 0$ para todo i . Neste caso defina $L_i = \prod_{j \neq i} (A^2 + \alpha_j^2)^{n_j}$, então os espaços $V_i = L_i(\mathbb{R}^{2n})$ de dimensão $2n_i$, são subespaços invariantes por A ($A(V_i) \subset V_i$) e são dois a dois ortogonais, isto é, $\omega(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$ para todo $\mathbf{v}_i \in V_i$ e $\mathbf{v}_j \in V_j$, $i \neq j$. O algoritmo acima pode ser aplicado a cada matriz A_i obtida restringindo A ao subespaço V_i . Como resultado final a matriz A na nova base assume a forma

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & -Q^T \end{pmatrix},$$

com

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \quad e \quad S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{pmatrix} Q_j & R_j \\ S_j & -Q_j^T \end{pmatrix}$$

é uma matriz $n_i \times n_i$ tipo Z , definida acima.

2.3 Normalização do Hamiltoniano quadrático no caso em que os autovalores são distintos: Normalização de Birkhoff

Vamos agora fornecer um teorema que permite obter a forma normal de uma matriz Hamiltoniana no caso em que seus autovalores são distintos. Sua demonstração mostra o processo para obtenção da mesma.

Teorema 14 *Suponha que os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ da matriz $A = JS$ são distintos. Então, existe uma matriz simplética T tal que a transformação linear simplética $\mathbf{z} = T\mathbf{w}$ leva o Hamiltoniano H associado ao sistema (2.1) no Hamiltoniano \bar{H} dado por:*

$$\bar{H}(\mathbf{w}) = \bar{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k. \quad (2.17)$$

Demonstração. Como $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são distintos, a matriz A é diagonalizável e, portanto, existe uma matriz invertível C tal que

$$C^{-1}JSC = L, \quad (2.18)$$

onde

$$L = \begin{pmatrix} L_0 & 0 \\ 0 & -L_0 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

sendo a matriz $L_0 = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.

Da igualdade acima e usando os fatos $S^T = S$, $J^T = -J$ e $J^2 = -I$ chegamos a $PJSP^{-1} = L$, onde $P = (J^{-1}C^T J)^{-1}$. Assim, a matriz P também diagonaliza JS . Como os autovalores de JS são distintos, os subespaços próprios são unidimensionais, de modo que existe uma matriz diagonal,

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & -B_2 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

tal que $C = PB$. Como $JB = C^T J C$ é anti-simétrica, $B_1 = B_2$. Considere a matriz diagonal

$$Q = \begin{pmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

e seja $D = CQ$. Então D também diagonaliza JS , isto é, $D^{-1}JSD = L$. Além disso, D é simplética, pois

$$D^T J D = Q^T C^T J C Q = Q J B Q = J. \quad (2.22)$$

Assim, a transformação linear $\mathbf{z} = D\mathbf{w}$ é simplética e leva o sistema Hamiltoniano (2.1) no sistema $\dot{\mathbf{w}} = D^{-1}JSD\mathbf{w} = L\mathbf{w}$, que pode ser escrito na forma $\dot{\mathbf{w}} = J\bar{H}\mathbf{w}$, onde

$$\bar{H}(\mathbf{w}) = \bar{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{h=1}^n \lambda_h \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h. \quad (2.23)$$

■

Suponha que $\lambda_j = \omega_j i \neq 0$. Fazendo a mudança simplética linear de coordenadas

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{1}{\sqrt{2i}}(Q_j - iP_j), \\ v_j &= \frac{1}{\sqrt{2i}}(Q_j + iP_j) \end{aligned} \quad (2.24)$$

o Hamiltoniano nas coordenadas Q_j, P_j assume a forma:

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (Q_j^2 + P_j^2). \quad (2.25)$$

Com isso, temos o seguinte corolário do teorema acima:

Corolário 5 *Suponha que os autovalores da matriz $A = JS$ são distintos, imaginários puros e não nulos, digamos $\lambda_j = \omega_j i$, $j = 1, \dots, n$. Então, existe uma matriz simplética T tal que a transformação linear simplética $\mathbf{z} = T\mathbf{Z}$ leva o Hamiltoniano H associado ao sistema (2.1) no Hamiltoniano (2.25).*

Quando o Hamiltoniano quadrático H está na forma (2.25), dizemos que H está na forma normal de Birkhoff.

2.4 Tabela de formas normais para Hamiltonianos quadráticos

Nesta seção, vamos fornecer uma tabela de formas normais para funções Hamiltonianas, de acordo com seus autovalores e as características de sua forma canônica de Jordan. Esta seção tem como base o livro de Arnold [1].

Sejam A a matriz como em (2.1) e H a função Hamiltoniana associada ao sistema (2.1). Os autovalores de A podem ser de um dos quatro tipos: nulos, $\pm a$, $\pm ib$ e $\pm a \pm bi$ ($a \neq 0, b \neq 0$). Na tabela 2.1, exibimos a forma normal para um quadrático, classificados de acordo com as características da forma canônica de Jordan de A . Nela, as funções F e G são definidas por:

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^k (b^2 p_{2j} p_{2k-2j+2} + q_{2j} q_{2k-2j+2}) - \sum_{j=1}^{k+1} (b^2 p_{2j-1} p_{2k-2j+3} + q_{2j-1} q_{2k-2j+3})$$

e

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^k \left(-\frac{1}{b^2} q_{2j-1} q_{2k-2j+1} + q_{2j} q_{2k-2j+2} \right) - \sum_{j=1}^{k-1} (b^2 p_{2j+1} p_{2k-2j+1} + p_{2j+2} p_{2k-2j+2}).$$

Com a tabela 2.1, podemos obter a forma normal da função Hamiltoniana, conhecendo os autovalores da matriz do sistema linear associado e sua forma canônica de Jordan.

Autovalores	Blocos de Jordan	Forma normal da função Hamiltoniana
Nulos	uma quadra de ordem k	$H = \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1}$ (para $k = 0, H = 0$)
$\pm a$	um par de ordem k	$H = -a \sum_{j=1}^k p_j q_j + \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1}$
$\pm bi$	um par de ordem $2k + 1 > 3$	$H = \pm \frac{1}{2} F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \sum_{j=1}^{2k} p_j q_{j+1}$
$\pm bi$	um par de ordem 1	$H = \pm \frac{1}{2} (b^2 p_1^2 + q_1^2)$
$\pm bi$	um par de ordem $2k > 2$	$H = \pm \frac{1}{2} G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - b^2 \sum_{j=1}^k p_{2j-1} q_{2j} + \sum_{j=1}^k p_{2j} q_{2j-1}$
$\pm bi$	um par de ordem 2	$H = \pm \frac{1}{2} (\frac{1}{b^2} q_1^2 + q_2^2) - b^2 p_1 q_2 + p_2 q_1$
$\pm a \pm bi$	Uma quadra de ordem k	$H = -a \sum_{j=1}^{2k} p_j q_j + b \sum_{j=1}^k (p_{2j-1} q_{2j}) + \sum_{j=1}^{2k-2} p_j q_{j+2}$

Tabela 2.1: Formas normais de Hamiltonianos quadráticos

2.5 Obtenção da forma normal de um sistema Hamiltoniano linear periódico

Considere o sistema Hamiltoniano linear periódico

$$\dot{\mathbf{z}} = A(t)\mathbf{z}, \quad (2.26)$$

onde $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}$ e $A(t) = A(t + 2\pi)$ para todo t . Como consequência do teorema de Floquet-Liapunov (corolário 4), existe uma transformação de coordenadas, $\mathbf{w} = Q(t)\mathbf{z}$, simplética e 2π -periódica em t que leva o sistema Hamiltoniano linear periódico (2.26) no sistema Hamiltoniano linear autônomo

$$\dot{\mathbf{w}} = B\mathbf{w}, \quad (2.27)$$

onde $w \in \mathbb{R}^{2n}$ e B é uma matriz Hamiltoniana constante. A normalização do sistema (2.27) pode ser feita usando os métodos discutidos anteriormente, com isso, temos o processo para obtenção da forma normal de (2.26).

2.6 Forma normal do Hamiltoniano quadrático periódico no caso em que os expoentes característicos são imaginários puros

Vamos agora obter a forma normal da função Hamiltoniana quadrática $H = H(\mathbf{z}, t)$ 2π -periódica em t no caso em que seus expoentes característicos são imaginários puros e distintos, digamos, $\lambda_j = \omega_j i$, $j = 1, \dots, n$. De acordo com o corolário 4, existe uma transformação de coordenadas, $\mathbf{w} = Q(t)\mathbf{z}$, simplética e 2π -periódica em t que leva o sistema Hamiltoniano linear associado a H no sistema Hamiltoniano linear autônomo (2.27). Os expoentes característicos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores da matriz B , com isso, de acordo com o corolário 5, existe uma mudança de coordenadas simplética tal que H nas novas coordenadas se escreve na forma:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (Q_j^2 + \bar{Q}_j^2). \quad (2.28)$$

Com isso, em capítulos seguintes, sempre que os expoentes característicos de um sistema periódico linear forem distintos e imaginários puros, assumiremos que a função Hamiltoniana tem a forma (2.28).

Capítulo 3

A forma normal de Gustavson e de Birkhoff

Neste capítulo, estudaremos a forma normal de Gustavson [12] e de Birkhoff [4]. Forneceremos algumas definições importantes no estudo das formas normais e um teorema cuja demonstração fornece o processo para obtenção da forma normal e da função geradora para sistemas Hamiltonianos autônomos e periódicos. Nas últimas seções, vamos obter a forma normal de uma função Hamiltoniana com um, dois e n graus de liberdade, em alguns casos que serão utilizados posteriormente.

3.1 Introdução

Considere o sistema Hamiltoniano

$$\dot{\mathbf{z}} = J\nabla_{\mathbf{z}}H(\mathbf{z},t), \quad (3.1)$$

onde H é uma função analítica relativamente a \mathbf{z} numa vizinhança da origem e 2π -periódica (ou autônoma) em t . Suponha que a origem é uma posição de equilíbrio de (3.1), de modo que o desenvolvimento de H numa vizinhança da origem começa com termos quadráticos

$$H(\mathbf{z},t) = H_2(\mathbf{z},t) + H_3(\mathbf{z},t) + \dots, \quad (3.2)$$

onde H_k é um polinômio homogêneo de grau k , relativo a \mathbf{z} e 2π -periódica (ou autônoma) em t . Procuremos uma mudança de coordenadas simplética numa vizinhança da origem, $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$, de modo que seja mais simples a estrutura do novo Hamiltoniano

$$\Gamma(\mathbf{Z}, t) = \Gamma_2(\mathbf{Z}, t) + \Gamma_3(\mathbf{Z}, t) + \dots, \quad (3.3)$$

onde Γ_k seja um polinômio homogêneo de grau k relativo a $\mathbf{Z} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ e 2π -periódica (ou autônoma) em t .

Por exemplo, no caso autônomo, se conseguíssemos $\Gamma(\mathbf{Z})$ dependendo apenas em termos dos produtos $R_k = Q_k P_k$, então o novo sistema Hamiltoniano

$$\dot{\mathbf{Z}} = J\nabla_{\mathbf{Z}}\Gamma(\mathbf{Z}) \quad (3.4)$$

poderia ser escrito na forma

$$\begin{cases} \dot{Q}_k = \frac{\partial \Gamma}{\partial R_k} Q_k \\ \dot{P}_k = -\frac{\partial \Gamma}{\partial R_k} P_k, \quad k = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3.5)$$

donde teríamos $\dot{R}_k = \dot{Q}_k P_k + Q_k \dot{P}_k = 0$, de modo que R_k seria constante ao longo das soluções do sistema. Assim, Γ_k também seria constante e o sistema poderia ser integrado imediatamente com suas soluções dadas, explicitamente, por

$$\begin{cases} Q_k(t) = Q_k(0) e^{\frac{\partial \Gamma}{\partial R_k} t} \\ P_k(t) = P_k(0) e^{-\frac{\partial \Gamma}{\partial R_k} t}, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3.6)$$

Expressando R_1, \dots, R_n em termos de $\mathbf{z}=(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ teríamos n integrais primeiras linearmente independentes para o sistema (3.1).

Seja $\dot{\mathbf{z}} = JS\mathbf{z}$ a parte linear do sistema (3.1). Poderia se provar também que $\frac{\partial \Gamma}{\partial R_1}, \dots, \frac{\partial \Gamma}{\partial R_n}$ seriam imaginários puros quando os autovalores de $A = JS$ fossem e, assim, teríamos a conclusão de que a solução de equilíbrio do sistema seria estável.

Em síntese, a obtenção de uma transformação simplética que simplificasse o Hamiltoniano da forma descrita, permitiria que se conseguissem todas as informações essenciais sobre o sistema

de equações, na vizinhança do equilíbrio: existência do número ótimo de integrais primeiras linearmente independentes, estabilidade do equilíbrio e a própria dinâmica do sistema, dadas pela dinâmica das soluções descritas anteriormente.

Depois destas considerações é ótimo saber que tal transformação existe, no caso autônomo, quando os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A são linearmente independentes sobre os racionais. Isto foi demonstrado por G. D. Birkhoff [4] na década de vinte e o novo Hamiltoniano é chamado a Forma Normal de Birkhoff. Todavia, o processo de obtenção deste novo Hamiltoniano é formal, resultante da comparação de coeficientes para resolver a equação. Assim, é desanimador tomar conhecimento que este processo geralmente é divergente, como foi provado por C. L. Siegel, em 1941, de modo que as importantes conclusões descritas acima não valem, a não ser em casos raríssimos que, mesmo assim, ainda apresentam grande dificuldade na verificação da convergência da forma normal. Depois disto, é natural que não se tenha grandes motivações para o estudo desta forma normal, mas é bom saber que informações importantes podem ser obtidas utilizando-se a forma normal somente até certo grau (que depende do problema estudado). Assim é que um importante resultado devido a V. I. Arnold sobre a estabilidade de equilíbrios de sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade, que em alguns casos, requer o conhecimento da forma normal de Birkhoff somente até grau quatro.

3.2 Definições básicas e notações

Nesta seção, vamos fornecer algumas definições básicas para o estudo das formas normais e fixar algumas notações usadas neste capítulo.

Façamos a seguinte mudança de coordenadas $2i$ -simplética na função Hamiltoniana (3.3):

$$x_j = Q_j + iP_j, \quad \bar{x}_j = Q_j - iP_j, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (3.7)$$

Podemos expressar o Hamiltoniano $\Gamma = \Gamma(\mathbf{Z}, t)$ nas coordenadas complexas x_j e \bar{x}_j , que denotaremos por \mathcal{H} , pela identidade

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, t) = 2i\Gamma\left(\frac{\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}}{2}, \frac{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}}{2i}, t\right) = \mathcal{H}_2(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, t) + \mathcal{H}_3(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, t) \dots \quad (3.8)$$

A tabela 3.2 fornece a notação para a forma do termo geral dos Hamiltonianos H , Γ e \mathcal{H} . Usaremos as notações: $k = (k_1, \dots, k_n)$ e $l = (l_1, \dots, l_n)$ e suas componentes são inteiros positivos. $h_{kl} = h_{k_1 \dots k_n l_1 \dots l_n}$, $\gamma_{kl} = \gamma_{k_1 \dots k_n l_1 \dots l_n}$, $g_{kl} = g_{k_1 \dots k_n l_1 \dots l_n}$ são funções 2π -periódicas em t (ou autônoma). $\mathbf{x}^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$, $\mathbf{q}^k = q_1^{k_1} \dots q_n^{k_n}$, $\mathbf{p}^l = p_1^{l_1} \dots p_n^{l_n}$, $\mathbf{Q}^k = Q_1^{k_1} \dots Q_n^{k_n}$ e $\mathbf{P}^l = P_1^{l_1} \dots P_n^{l_n}$. $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $|l| = l_1 + \dots + l_n$.

Função Hamiltoniana	Termo geral da função Hamiltoniana
$H = H(\mathbf{z}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$	$H_j = \sum_{ k + l =j} h_{kl}(t) \mathbf{q}^k \mathbf{p}^l$
$\Gamma = \Gamma(\mathbf{Z}, t) = \Gamma(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$	$\Gamma_j = \sum_{ k + l =j} \gamma_{kl}(t) \mathbf{Q}^k \mathbf{P}^l$
$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, t)$	$\mathcal{H}_j = \sum_{ k + l =j} g_{kl}(t) \mathbf{x}^k \bar{\mathbf{x}}^l$

Tabela 3.1: Notações para os termos gerais das funções Hamiltonianas

Observação 1 A fórmula (3.8) nos diz que $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, t)$ é imaginário puro e, portanto, deve satisfazer a identidade $\mathcal{H} = -\overline{\mathcal{H}}$, donde segue que $g_{kl} = -\bar{g}_{lk}$. Aplicando a mudança de coordenadas inversa de (3.7), temos que as funções Hamiltonianas Γ e \mathcal{H} estão relacionados pela identidade

$$\Gamma(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \frac{1}{2i} \mathcal{H}(\mathbf{Q} + i\mathbf{P}, \mathbf{Q} - i\mathbf{P}, t). \quad (3.9)$$

Da relação (3.9), é possível obter uma relação, por meio de um sistema de equações lineares inversível, entre os coeficientes γ_{kl} e g_{kl} .

Suponha que os expoentes característicos (autovalores no caso autônomo) da matriz do sistema linearizado são $\omega_1 i, \dots, \omega_n i$. Se $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$, considere o $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ -módulo

$$M_\omega = \{k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n, / \langle k, \omega \rangle = k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n = 0 \pmod{1}\}. \quad (3.10)$$

No caso autônomo, devemos substituir $0 \pmod{1}$ por 0 . Observe que o símbolo $= 0 \pmod{1}$ pode ser substituído por $\in \mathbb{Z}$.

Definição 9 Dizemos que o Hamiltoniano $\Gamma(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ está na forma normal de Gustavson se, quando expresso em série de potências de \mathbf{x} e $\bar{\mathbf{x}}$, ele só contém termos da forma $\mathbf{x}^k \bar{\mathbf{x}}^l$, com $k - l \in M_\omega$, isto é, o coeficiente g_{kl} de $\mathbf{x}^k \bar{\mathbf{x}}^l$ é nulo quando $k - l$ não está em M_ω .

Vamos agora dar uma definição muito importante no estudo das formas normais.

Definição 10 Dizemos que os expoentes característicos (autovalores no caso autônomo) $\lambda_j = \omega_j i$, $j = 1, \dots, n$, da matriz do sistema (3.2) linearizado não apresentam ressonâncias até ordem s , inclusive, se

$$m_1 \omega_1 + \dots + m_n \omega_n \neq 0 \pmod{1} \quad (3.11)$$

para todo $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ satisfazendo as igualdades

$$|m_1| + \dots + |m_n| = k, \quad (k = 1, \dots, s). \quad (3.12)$$

No caso autônomo, devemos substituir $\neq 0 \pmod{1}$ por $\neq 0$

Se $\omega_1, \dots, \omega_n$ e 1 ($\omega_1, \dots, \omega_n$ no caso autônomo) são linearmente independentes sobre os racionais, então $M_\omega = 0$ de modo que $\Gamma(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ só contém termos da forma

$$\mathbf{x}^k \bar{\mathbf{x}}^k = (Q_1^2 + P_1^2)^{k_1} + \dots + (Q_n^2 + P_n^2)^{k_n}, \quad (3.13)$$

e dizemos que $\Gamma(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ está na forma normal de Birkhoff.

Considere o operador diferencial

$$D = \sum_{j=1}^n \omega_j \left(Q_j \frac{\partial}{\partial P_j} - P_j \frac{\partial}{\partial Q_j} \right) + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.14)$$

O operador D escrito nas coordenadas complexas x_j, \bar{x}_j assume a forma:

$$D = i \sum_{j=1}^n \omega_j \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \bar{x}_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \right) + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.15)$$

Note que no caso autônomo, a expressão $\frac{\partial}{\partial t}$ em (3.14) e (3.15) é desnecessária.

No caso autônomo, a definição de forma normal é equivalente a exigir que $D\Gamma = 0$, pois, como neste caso vale

$$D(\mathbf{x}^k \bar{\mathbf{x}}^l) = i \sum_{j=1}^n \omega_j (k_j - l_j) \mathbf{x}^k \bar{\mathbf{x}}^l = i \langle \omega, k - l \rangle \mathbf{x}^k \bar{\mathbf{x}}^l, \quad (3.16)$$

temos que os números $i \langle \omega, k - l \rangle$ são autovalores do operador diferencial D agindo sobre séries formais de potências.

3.3 A forma normal de Gustavson e de Birkhoff

Vamos agora fornecer um teorema que garante a existência de uma transformação simplética (formal) do coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ que leva o Hamiltoniano (3.2) na sua forma normal de Gustavson. A sua demonstração mostra o processo para obtenção da mesma e, também, para obtenção da função geradora, tanto para sistemas Hamiltonianos autônomos quanto periódicos.

Teorema 15 *Existe uma transformação (formal) simplética de coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ que leva o Hamiltoniano 2π -periódico em t (ou autônomo)*

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \omega_k (q_k^2 + p_k^2) + H_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \dots \quad (3.17)$$

na sua forma normal de Gustavson $\Gamma(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$.

Demonstração. A demonstração será feita por indução. Inicialmente, observe que os termos quadráticos já estão normalizados. Escreveremos a transformação simplética desejada, às vezes denominada de transformação de Birkhoff [4], com a ajuda da função geradora $S = S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ na forma implícita

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}, \quad (3.18)$$

onde

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{P} + S_3(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) + S_4(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) + \dots, \quad (3.19)$$

sendo S_j polinômios homogêneos de grau j em \mathbf{q}, \mathbf{P} e 2π -periódico em t dados por:

$$S_j(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{|k|+|l|=j} s_{kl}(t) \mathbf{q}^k \mathbf{P}^l, \quad (3.20)$$

onde $s_{kl}(t) = s_{kl}(t + 2\pi)$.

De acordo com o exemplo 4 da seção 1.2.4, temos que a relação entre o novo e o antigo Hamiltoniano é dada por:

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = \Gamma\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}, \mathbf{P}, t\right). \quad (3.21)$$

Isso nos fornece a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{2} \left\{ q_k^2 + \left(P_k + \frac{\partial S_3}{\partial q_k} + \dots \right)^2 \right\} + H_3\left(\mathbf{q}, \mathbf{P} + \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{q}} + \dots, t\right) + \dots + \frac{\partial S}{\partial t} = \\ \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{2} \left\{ \left(q_k + \frac{\partial S_3}{\partial P_k} + \dots \right)^2 + P_k^2 \right\} + \Gamma_3\left(\mathbf{q} + \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{P}} + \dots, \mathbf{P}, t\right) + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

Seja G_k a função que aplicada a um polinômio homogêneo fornece os termos de grau k , por exemplo: $G_3(x^2 + 3x^3 + y^3 + y^{20}) = 3x^3 + y^3$. Vamos agora obter as relações para os termos de grau 3, 4, 5 e em geral.

Os termos de grau 3 devem satisfazer a relação:

$$\sum_{k=1}^n \omega_k P_k \frac{\partial S_3}{\partial q_k} + H_3(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) + \frac{\partial S_3}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \omega_k q_k \frac{\partial S_3}{\partial P_k} + \Gamma_3(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t). \quad (3.23)$$

Nesta demonstração denotaremos por D o operador definido por:

$$D = \sum_{j=1}^n \omega_j \left(P_j \frac{\partial}{\partial q_j} - q_j \frac{\partial}{\partial P_j} \right) + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.24)$$

Observe que no caso autônomo o termos $\frac{\partial}{\partial t}$ é desnecessário. Usando o operador D , os termos de grau 3 devem satisfazer a relação:

$$\Gamma_3(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) - DS_3(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = H_3(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t). \quad (3.25)$$

Os termos de grau 4 devem satisfazer a relação:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{2} \left[\left(\frac{\partial S_3}{\partial q_k} \right)^2 + 2P_k \frac{\partial S_4}{\partial q_k} \right] + H_4(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) + G_4 \left(H_3 \left(\mathbf{q}, \mathbf{P} + \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{q}}, t \right) \right) + \frac{\partial S_4}{\partial t} = \\ & \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{2} \left[\left(\frac{\partial S_3}{\partial P_k} \right)^2 + 2q_k \frac{\partial S_4}{\partial P_k} \right] - \Gamma_4(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) + G_4 \left(\Gamma_3 \left(\mathbf{q} + \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{P}}, \mathbf{P}, t \right) \right), \end{aligned} \quad (3.26)$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} \Gamma_4(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) - DS_4(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) &= H_4(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) + \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{2} \left[\left(\frac{\partial S_3}{\partial q_k} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_3}{\partial P_k} \right)^2 \right] + \\ & G_4 \left(H_3 \left(\mathbf{q}, \mathbf{P} + \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{q}}, t \right) - \Gamma_3 \left(\mathbf{q} + \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{P}}, \mathbf{P}, t \right) \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Os termos de grau 5 devem satisfazer a relação:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \omega_k \left[P_k \frac{\partial S_5}{\partial q_k} + \frac{\partial S_3}{\partial q_k} \frac{\partial S_4}{\partial q_k} \right] + H_5(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) + \\ & G_5 \left(H_3 \left(\mathbf{q}, \mathbf{P} + \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial S_4}{\partial \mathbf{q}}, t \right) + H_4 \left(\mathbf{q}, \mathbf{P} + \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial S_4}{\partial \mathbf{q}}, t \right) \right) + \frac{\partial S_5}{\partial t} = \\ & \sum_{k=1}^n \omega_k \left[q_k \frac{\partial S_5}{\partial P_k} + \frac{\partial S_3}{\partial P_k} \frac{\partial S_4}{\partial P_k} \right] + \Gamma_5(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) - G_5 \left(\Gamma_3 \left(\mathbf{q} + \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{P}} + \frac{\partial S_4}{\partial \mathbf{P}}, \mathbf{P}, t \right) \right) - \\ & G_5 \left(\Gamma_4 \left(\mathbf{q} + \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{P}} + \frac{\partial S_4}{\partial \mathbf{P}}, \mathbf{P}, t \right) \right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

ou,

$$\begin{aligned} \Gamma_5(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) - DS_5(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) &= H_5(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) + \sum_{k=1}^n \omega_k \left[\frac{\partial S_3}{\partial q_k} \frac{\partial S_4}{\partial q_k} - \frac{\partial S_3}{\partial P_k} \frac{\partial S_4}{\partial P_k} \right] + \\ G_5 \left(H_3 \left(\mathbf{q}, \mathbf{P} + \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial S_4}{\partial \mathbf{q}}, t \right) + H_4 \left(\mathbf{q}, \mathbf{P} + \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial S_4}{\partial \mathbf{q}}, t \right) \right) &+ \\ G_5 \left(\Gamma_3 \left(\mathbf{q} + \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{P}} + \frac{\partial S_4}{\partial \mathbf{P}}, \mathbf{P}, t \right) - \Gamma_4 \left(\mathbf{q} + \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{P}} + \frac{\partial S_4}{\partial \mathbf{P}}, \mathbf{P}, t \right) \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Em geral, comparação dos termos de grau s nos fornece

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \omega_k P_k \frac{\partial S_s}{\partial q_k} + C_1(H_3, \dots, H_{s-1}, S_3, \dots, S_{s-1}) + H_s(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) + \frac{\partial S_s}{\partial t} = \\ \sum_{k=1}^n \omega_k q_k \frac{\partial S_s}{\partial P_k} + C_2(\Gamma_3, \dots, \Gamma_{s-1}, S_3, \dots, S_{s-1}) + \Gamma_s(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \end{aligned} \quad (3.30)$$

para certas funções C_1 e C_2 dependente dos termos anteriores a s . Escrevendo em função do operador D , devemos ter

$$\Gamma_s(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) - DS_s(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = K_s(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \quad (3.31)$$

sendo $K_s = H_s + C_{s-1}$, onde $C_{s-1} = C_{s-1}(H_3, \dots, H_{s-1}, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{s-1}, S_3, \dots, S_{s-1}, t)$. Portanto, as relações acima nos mostram que conhecendo os termos S_3, \dots, S_{s-1} e $\Gamma_3, \dots, \Gamma_{s-1}$ então, de (3.31) obtemos a relação entre o termo Γ_s do Hamiltoniano normalizado e o termo S_s da função geradora.

Agora, para concluir a demonstração do teorema, mostraremos que, por indução, podemos determinar Γ_s e S_s de (3.31). Inicialmente, escrevendo o operador D nas coordenadas complexas agora definidas por

$$x_j = q_j + iP_j, \quad \bar{x}_j = q_j - iP_j, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (3.32)$$

obtemos

$$D = i \sum_{j=1}^n \omega_j \left(\bar{x}_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.33)$$

onde, introduzindo as seguintes notações:

$$H_s \left(\frac{x_j + \bar{x}_j}{2}, \frac{x_j - \bar{x}_j}{2i}, t \right) = \sum_{|k|+|l|=s} g_{kl} \mathbf{x}^k \bar{\mathbf{x}}^l, \quad (3.34)$$

$$S_s = S_s \left(\frac{x_j + \bar{x}_j}{2}, \frac{x_j - \bar{x}_j}{2i}, t \right) = \sum_{|k|+|l|=s} f_{kl} \mathbf{x}^k \bar{\mathbf{x}}^l, \quad (3.35)$$

$$K_s \left(\frac{x_j + \bar{x}_j}{2}, \frac{x_j - \bar{x}_j}{2i}, t \right) = \sum_{|k|+|l|=s} a_{kl} \mathbf{x}^k \bar{\mathbf{x}}^l. \quad (3.36)$$

A relação (3.31), escrita nas coordenadas x_j, \bar{x}_j definidas em (3.32) assume a forma:

$$\Gamma_s(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, t) - DS_s(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, t) = K_s(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, t), \quad (3.37)$$

donde, obtemos a seguinte relação entre os coeficientes:

$$\frac{df_{kl}}{dt} + i\langle \omega, l-k \rangle f_{kl} - g_{kl} = -a_{kl}, \quad (3.38)$$

onde usamos a notação $\langle \omega, l-k \rangle = \omega_1(l_1 - k_1) + \dots + \omega_n(l_n - k_n)$.

O caso autônomo: Suponha que a função Hamiltoniana inicial H é autônoma. Neste caso, podemos escolher S_3, \dots, S_s autônomas e, com isso, o sistema de equações diferenciais (3.51) reduz-se ao sistema de equações algébricas

$$i\langle \omega, l-k \rangle f_{kl} = g_{kl} - a_{kl}. \quad (3.39)$$

Se $\langle \omega, l-k \rangle \neq 0$, podemos tomar $g_{kl} = 0$ e portanto os coeficientes da função geradora serão dados por

$$f_{kl} = -\frac{a_{kl}}{i\langle \omega, l-k \rangle}.$$

No caso $\langle \omega, l-k \rangle = 0$, a eliminação do termo g_{kl} não é possível. Neste caso teremos $g_{kl} = a_{kl}$ e, para f_{kl} , podemos atribuir valores arbitrários.

O caso periódico: Inicialmente, usando o método da variação de parâmetros, temos que a solução geral do sistema (3.51) é:

$$f_{kl}(t) = f_{kl}(0)e^{ib_{kl}t} + e^{ib_{kl}t} \int_0^t e^{-ib_{kl}x} (g_{kl} - a_{kl}) dx, \quad (3.40)$$

onde $\langle \omega, l-k \rangle = b_{kl}$. Pretendemos saber quando esta solução é periódica.

Se b_{kl} não é inteiro a solução (3.40) é 2π -periódica se

$$f_{kl}(0) = \frac{\int_0^{2\pi} e^{ib_{kl}x} (a_{kl} - g_{kl}) dx}{1 - e^{i2\pi b_{kl}}}. \quad (3.41)$$

Neste caso, já que a existência de soluções periódicas não depende da escolha de g_{kl} , podemos tomar $g_{kl} = 0$.

No caso em que $\mathbf{b}_{kl}=\mathbf{m}$ é inteiro, se escolhemos

$$g_{kl} = \frac{e^{imt}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-imt} a_{kl} dt, \quad (3.42)$$

a solução (3.40) é periódica para qualquer $f_{kl}(0)$. Para obter os coeficientes da função geradora é só substituir g_{kl} na solução (3.40). Desta maneira, no caso periódico tanto a transformação normalizadora S quanto a função Γ serão 2π -periódicas em t . ■

Vamos agora ver alguns comentários que ajudarão a entender melhor o teorema acima e sua demonstração.

Comentários: (1) A demonstração do teorema mostra o processo de construção da forma normal e da função geradora. A obtenção dos primeiros termos da forma normal é, freqüentemente, o primeiro passo na análise da dinâmica do sistema Hamiltoniano numa vizinhança do equilíbrio. Por exemplo, para o estudo da estabilidade de equilíbrios, com a normalização do Hamiltoniano (3.17) até termos de quarta ordem, em alguns casos, com o uso do teorema de Arnold-Moser é possível demonstrar a estabilidade do equilíbrio. Às vezes, com a normalização do Hamiltoniano até termos de terceira ordem, usando o teorema de Cabral-Meyer é possível decidir a estabilidade do equilíbrio. Quando obtemos a forma normal da função Hamiltoniana até um número finito de termos a transformação simplética que leva H na sua forma normal é uma transformação convergente (analítica), enquanto, na obtenção da forma normal de todos os termos, a transformação é dada por uma série formal, a qual não sabemos sobre a sua convergência.

(2) No teorema acima, assumimos que a parte quadrática da função Hamiltoniana é da forma:

$$H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \omega_k (q_k^2 + p_k^2). \quad (3.43)$$

Isto implica em dizer que os autovalores da matriz do sistema linearizado são $\lambda_j = \omega_j i$, $j = 1, \dots, n$ e, portanto, imaginários puros. Esta hipótese não foi por acaso, ela é baseada em alguns fatos relacionados ao estudo da estabilidade de equilíbrios, assunto que será abordado neste trabalho. Quando entre os autovalores do sistema linearizado existe um com parte real não nula, mostraremos adiante que a origem é um equilíbrio instável e raramente aparece em problemas da mecânica sistemas com um dos autovalores da matriz do sistema linearizado nulo. Com isso, para o estudo

da estabilidade, o caso de maior interesse é o quando os autovalores são imaginários puros. Pelo corolário 5 do capítulo 2, segue que quando os autovalores da matriz do sistema linearizado são imaginários puros e distintos podemos supor que a parte quadrática do Hamiltoniano tem a forma (3.43).

(3) Em grau 3, temos que $C_2 = 0$ e em grau 4 C_3 é dado por:

$$C_3 = \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{2} \left[\left(\frac{\partial S_3}{\partial q_j} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{P}_j} \right)^2 \right] + G_4(H_3(\mathbf{q}, \mathbf{P} + S_3(\mathbf{q}, \mathbf{P})) - \Gamma_3((q, \mathbf{P} + S_3(\mathbf{q}, \mathbf{P}))).$$

Nas coordenadas complexas C_3 é dada por:

$$C_3 = \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{2} \left[\left(\frac{S_3}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{S_3}{\partial \bar{x}_j} \right)^2 \right] + G_4(H_3(\mathbf{q}, \mathbf{P} + S_3(\mathbf{q}, \mathbf{P})) - \Gamma_3((q, \mathbf{P} + S_3(\mathbf{q}, \mathbf{P}))).$$

(4) Suponha que temos um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade. As possibilidades para $k_1 + k_2 + l_1 + l_2 = s$ com $k_j \geq 0$ e $l_j \geq 0$ são dadas pelas tabelas 3.3 e 3.4 para os casos $s = 3$ e $s = 4$ respectivamente. Note que, em geral, existem 21 termos para $s = 3$ e 36 para $s = 4$. Na maioria das vezes, com a normalização, reduzimos consideravelmente o número de termos da função Hamiltoniana, com mostraremos no próximo comentário.

(5) Suponha, novamente, que temos um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade e que $\omega_1 = \omega_2 \neq 0$, ou seja, temos ressonância 1 : 1 e, desta forma $M_\omega = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 / m\omega_1 + n\omega_2 = 0\} = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 / (m + n)\omega_1 = 0\}$. Devemos ter $n = -m$ e, portanto M_ω é o módulo gerado por $(1, -1)$. Assim, para encontrar os termos que devem aparecer no Hamiltoniano normalizado Γ devemos olhar para aqueles termos $(k, l) \in M_\omega$, ou seja, tais que $k_1 + k_2 = l_1 + l_2$ com $k_1 + k_2 + l_1 + l_2 = s$.

Para a normalização dos termos cúbicos, isto é, quando $s = 3$, tem-se $k - l \notin M_\omega$, para todo k, l , donde, $\Gamma_3 = 0$. Logo, podemos eliminar completamente os termos cúbicos.

Em grau 4, $k - l \in M_\omega$ apenas para os valores da tabela 3.5. Assim, somente podem aparecer 9 termos no Hamiltoniano normalizado, são eles: $|x_1|^4$, $x_1^2 \bar{x}_1 \bar{x}_2$, $x_1^2 \bar{x}_2^2$, $x_1 \bar{x}_1^2 x_2$, $|x_1|^2 |x_2|^2$, $x_1 x_2 \bar{x}_2^2$, $\bar{x}_1^2 x_2^2$, $\bar{x}_1 x_2^2 \bar{x}_2$ e $|x_2|^4$.

k_1	3	0	0	0	2	2	2	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
k_2	0	3	0	0	1	0	0	2	2	2	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
l_1	0	0	3	0	0	1	0	0	1	0	2	2	2	0	0	1	1	0	1	1
l_2	0	0	0	3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	2	2	2	0	1	1	1

Tabela 3.2: Relações no caso $s = 3$.

k_1	4	0	0	0	3	3	3	1	0	0	1	0	0	1	0	0	2	2	2	0	0	0
k_2	0	4	0	0	1	0	0	3	3	3	0	1	0	0	1	0	2	0	0	2	2	0
l_1	0	0	4	0	0	1	0	0	1	0	3	3	3	0	0	1	0	2	0	2	0	2
l_2	0	0	0	4	0	0	1	0	0	1	0	0	1	3	3	3	0	0	2	0	2	2

Tabela 3.3: Relações no caso $s = 4$.

(6) Encontramos no livro de Markeev [24] um argumento interessante para normalização dos termos cúbicos do Hamiltoniano, o qual fornece também a função geradora, o qual fazemos questão de explica-lo a continuação.

Utilizando a função geradora $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{P} + S_3(\mathbf{q}, \mathbf{P})$, onde

$$S_3(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \sum_{|k|+|l|=3} s_{kl} \mathbf{q}^k \mathbf{P}^l, \quad (3.44)$$

temos que as equações

$$\begin{aligned} Q_j &= \frac{\partial S}{\partial P_j} = q_j + \frac{\partial S_3}{\partial P_j}, \\ p_j &= \frac{\partial S}{\partial q_j} = P_j + \frac{\partial S_3}{\partial q_j}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

definem uma mudança de coordenadas simpléticas, $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$.

As relações (6.12), consideradas como equações relativamente a q_j, p_j ($j = 1, 2, \dots, n$), mostram que as quantidades q_j, p_j (em conformidade com o Teorema da Função implícita) são, para Q_j, P_j suficientemente pequenas, funções analíticas numa vizinhança da origem das coordenadas $Q_j =$

k_1	2	2	2	2	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
k_2	1	1	0	0	2	2	2	1	0	1	1	0	1	1
l_1	1	0	1	1	1	0	1	2	2	2	0	2	2	1
l_2	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	2	1	1	1

Tabela 3.4: Continuação das relações no caso $s = 4$.

k_1	2	2	2	1	1	1	0	0	0
k_2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
l_1	2	1	0	2	1	0	2	1	0
l_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Tabela 3.5: Relações no caso $s = 4$ para ressonância 1:1

$P_j = 0$. Daí, segue que:

$$\begin{aligned} q_j &= Q_j - \frac{\partial S_3(Q_j, P_j, t)}{\partial P_j} + \dots, \\ p_j &= P_j + \frac{\partial S_3(Q_j, P_j, t)}{\partial Q_j} + \dots, \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde os termos não escritos têm ordem superior a dois, relativamente a Q_j, P_j . Aqui usamos fortemente o fato que $\frac{\partial S_3}{\partial P_j}$ é um polinômio homogêneo de grau 2. Com isso, a transformação simplética definida por (6.12) leva o Hamiltoniano $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ no Hamiltoniano $\Gamma(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ definido por:

$$\Gamma(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H\left(\mathbf{Q} - \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{P}} + \dots, \mathbf{P} + \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{Q}} + \dots, t\right) + \frac{\partial S_3}{\partial t}\left(\mathbf{Q} - \frac{\partial S_3}{\partial \mathbf{P}} + \dots, t\right), \quad (3.47)$$

onde ... são termos de ordem superior a quatro em \mathbf{Q}, \mathbf{P} .

De (3.21), temos que a parte cúbica do Hamiltoniano normalizado é dada por:

$$\Gamma_3(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{j=1}^n \omega_j \left(P_j \frac{\partial S_3}{\partial Q_j} - Q_j \frac{\partial S_3}{\partial P_j} \right) + H_3 + \frac{\partial S_3}{\partial t}, \quad (3.48)$$

onde todas as funções do lado direito estão sendo avaliadas em $(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$.

Façamos a seguinte mudança de coordenadas $2i$ -simplética:

$$x_j = Q_j + iP_j, \quad \bar{x}_j = Q_j - iP_j (j = 1, \dots, n). \quad (3.49)$$

A relação (3.48) escrita nestas coordenadas é dada por:

$$\mathcal{H}_3(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, t) = \sum_{j=1}^n \omega_j \left(\bar{x}_j \frac{\partial S_3}{\partial \bar{x}_j} - x_j \frac{\partial S_3}{\partial x_j} \right) + H_3\left(\frac{x_j + \bar{x}_j}{2}, \frac{x_j - \bar{x}_j}{2i}, t\right) + \frac{\partial S_3}{\partial t}\left(\frac{x_j + \bar{x}_j}{2}, \frac{x_j - \bar{x}_j}{2i}, t\right). \quad (3.50)$$

Desta relação, usando as mesmas notações da demonstração do teorema 15, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{df_{kl}}{dt} + i \langle \omega, l - k \rangle f_{kl} = g_{kl} - a_{kl}. \quad (3.51)$$

De agora em diante o processo é idêntico ao utilizado na demonstração do teorema 15.

Vamos nas próximas seções, com base na demonstração do teorema 15, obter a forma normal para a função Hamiltoniana (3.2) para alguns casos particulares de funções Hamiltonianas com um, dois e n grau de liberdade. Estas formas normais serão úteis neste trabalho para estudar a estabilidade de equilíbrios para sistemas Hamiltonianos autônomos e periódicos, assuntos abordados nos capítulos 6 e 7.

3.4 Formas normais para funções Hamiltonianas periódicas com um grau de liberdade

Assuma, nesta seção, que a função Hamiltoniana H definida em (3.2) tem um grau de liberdade e seja $\lambda = \omega i \neq 0$ seu expoente característico. A definição 10 (relação de ressonância), para este caso, diz que λ apresenta relação de ressonância de ordem k se, e somente se, $k\omega$ é um número inteiro. Vamos agora obter a forma normal de alguns termos do Hamiltoniano (3.2) em alguns casos que serão usados adiante. Neste caso, de acordo com a seção 2.6, podemos assumir sem perda de generalidade que a parte quadrática tem a forma:

$$H_2(q, p, t) = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2). \quad (3.52)$$

Vamos na próxima seção normalizar a parte cúbica H_3 de H .

3.4.1 Normalização da parte cúbica do Hamiltoniano

Vamos, agora, obter a forma normal da parte cúbica H_3 da função Hamiltoniana. Inicialmente, assumamos que o 3ω não é inteiro. Neste caso, de acordo com a demonstração do teorema 15, já que $b_{30} = -3\omega$, $b_{03} = 3\omega$, $b_{21} = -\omega$ e $b_{12} = \omega$ não são inteiros e, assim, podemos eliminar completamente os termos cúbicos de H . Vamos obter os coeficientes da função geradora.

Inicialmente, sabemos que os coeficientes da função geradora nas coordenadas complexas x e \bar{x} devem satisfazer

$$f_{kl}(t) = f_{kl}(0)e^{-ib_{kl}t} - e^{-ib_{kl}t} \int_0^t e^{ib_{kl}x} (a_{kl} - g_{kl}) dx, \quad (3.53)$$

onde

$$f_{kl}(0) = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-ib_{kl}x} (h_{kl}^\# - g_{kl}) dx}{1 - e^{i2\pi b_{kl}}}. \quad (3.54)$$

Usando as notações $f_{kl} = u'_{kl} + iv'_{kl}$, $g_{kl} = u_{kl} + iv_{kl}$, $a_{kl} = u_{kl}^\# + iv_{kl}^\#$ e $J_1(t) + iJ_2(t) = \int_0^t e^{ib_{kl}x} (a_{kl} - g_{kl}) dx$, por meio de cálculos simples, temos que:

$$\begin{aligned} s_{30} &= 2(u'_{30} + u'_{21}), \quad s_{03} = 2(v'_{30} - v'_{21}), \\ s_{21} &= 2(u'_{21} - 3u'_{30}), \quad s_{12} = -2(v'_{30} + v'_{21}), \\ u'_{kl} &= F_{kl}(t) \operatorname{sen}(b_{kl}t) + G_{kl}(t) \operatorname{cos}(b_{kl}x) \\ v'_{kl} &= F_{kl}(t) \operatorname{cos}(b_{kl}t) - G_{kl}(t) \operatorname{sen}(b_{kl}x) \\ F_{kl}(t) &= \frac{1}{2} [\operatorname{cot} g(\pi b_{kl}) J_1(2\pi) + J_2(2\pi)] - J_2(t), \\ G_{kl}(t) &= \frac{1}{2} [\operatorname{cot} g(\pi b_{kl}) J_2(2\pi) + J_1(2\pi)] - J_1(t), \\ J_1(t) &= \int_0^t (u_{kl}^\# \operatorname{cos}(b_{kl}x) + v_{kl}^\# \operatorname{sen}(b_{kl}x)) dx \\ J_2(t) &= \int_0^t (u_{kl}^\# \operatorname{sen}(b_{kl}x) - v_{kl}^\# \operatorname{cos}(b_{kl}x)) dx \\ u_{30}^\# &= \frac{1}{8} (h_{30} - h_{12}), \quad v_{30}^\# = \frac{1}{8} (h_{03} - h_{21}), \\ u_{21}^\# &= \frac{1}{8} (3h_{30} + h_{12}), \quad v_{21}^\# = \frac{1}{8} (3h_{03} - h_{21}). \end{aligned}$$

Assuma agora que $3\omega = m$ é inteiro. Neste caso a eliminação completa de H_3 não é possível, no entanto, podemos escreve-lo numa forma bem simples. De acordo com a demonstração do teorema 15, podemos eliminar g_{21} e g_{12} , já que $b_{21} = -\omega$ e $b_{12} = \omega$ não são inteiros. Com isso, e usando o fato $g_{30} = \bar{g}_{03}$, temos que

$$\mathcal{H}_3(x, \bar{x}, t) = g_{30}x^3 + \bar{g}_{30}\bar{x}^3 = 2\text{Re}(g_{30}x^3) = 2u_{30}(Q^3 - 3QP^2) + 2v_{30}(P^3 - 3Q^2P). \quad (3.55)$$

De (3.42), temos que

$$g_{30} = \frac{e^{imt}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} a_{30}^d dt. \quad (3.56)$$

Donde segue que:

$$u_{30} = x_{30}\cos(mt) - y_{30}\sin(mt),$$

$$v_{30} = x_{30}\sin(mt) + y_{30}\cos(mt),$$

sendo

$$x_{30} = \text{Re}\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} h_{30}^\# dt\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_{30}^\# \cos(mt) + v_{30}^\# \sin(mt)) dt,$$

$$y_{30} = \text{Im}\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} h_{30}^\# dt\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (v_{30}^\# \cos(mt) - u_{30}^\# \sin(mt)) dt.$$

3.4.2 Normalização de H_4

Se o número 3ω não é inteiro, de acordo com o que foi discutido na subseção anterior, através de uma transformação de Birkhoff, podemos eliminar os termos cúbicos do Hamiltoniano, isto é, num sistema de coordenadas conveniente, podemos assumir H da forma:

$$H(q, p, t) = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) + H_4(q, p, t) + H_5(q, p, t) + \dots, \quad (3.57)$$

onde H_i é um polinômio homogêneo de grau i nas variáveis q, p e 2π -periódico em t .

Se $4\omega = m$ for inteiro, a parte quarta do Hamiltoniano escrito nas coordenadas complexas x e \bar{x} é dada por:

$$\mathcal{H}_4(x, \bar{x}, t) = g_{40}x^4 + g_{22}x^2\bar{x}^2 + g_{04}\bar{x}^4. \quad (3.58)$$

Usando $g_{04} = \bar{g}_{40}$, $g_{22} = \bar{g}_{22}$ e as notações $g_{kl} = u_{kl} + iv_{kl}$, temos que

$$\Gamma(Q, P, t) = \frac{\omega}{2}(Q^2 + P^2) + \frac{u_{22}}{4}(Q^2 + P^2)^2 + u_{40}(Q^4 - 6Q^2P^2 + P^4) - 4v_{40}QP(Q^2 - P^2) + H^+, \quad (3.59)$$

onde, usando o processo descrito na demonstração do teorema 15 (forma análoga ao processo da subseção anterior), obtemos

$$u_{40} = x_{40} \cos(mt) - y_{40} \sin(mt), \quad v_{40} = x_{30} \cos(mt) + y_{40} \sin(mt),$$

$$x_{40} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_{40}^* \cos(mt) + v_{40}^* \sin(mt)) dt,$$

$$y_{40} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (v_{40}^* \cos(mt) - u_{40}^* \sin(mt)) dt,$$

$$u_{40}^* = \frac{1}{8}(h_{40} - h_{22} + h_{04}), \quad v_{40}^* = \frac{1}{8}(h_{13} - h_{31}),$$

$$u_{22} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (3h_{40} + h_{22} + 3h_{04}) dt,$$

e a função H^+ é 2π -periódica em t e $H^+ = O((|Q| + |P|)^5)$.

3.4.3 A normalização no caso não ressonante

Se $k\omega$ não é inteiro para nenhum $k \leq 2n$ inteiro então, de acordo com a demonstração do teorema 15, como $b_{kl} = (l - k)\omega$ não é inteiro para $l \neq k$, podemos eliminar os termos de grau ímpar e alguns de ordem par. Os únicos termos que não podem ser eliminados do Hamiltoniano são aqueles em que $k = l$. Com isso, existe uma mudança de coordenadas simplética tal que o Hamiltoniano H escrito nas novas coordenadas assume a forma:

$$H(q, p, t) = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) + \frac{c_2}{2}(q^2 + p^2)^2 \dots + \frac{c_n}{2}(q^2 + p^2)^n + H^+(q, p, t), \quad (3.60)$$

onde H^+ é analítica com respeito a q, p com ordem não inferior a $2n + 1$ e 2π -periódica em t . A demonstração do teorema 15 mostra como obter os coeficientes c_2, \dots, c_n .

3.5 Formas normais para funções Hamiltonianas periódicas com dois graus de liberdade

Suponha, agora, que a função Hamiltoniana periódica H dada em (3.2) tenha dois graus de liberdade, ou seja, H é da forma:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2, t) = H_2(q_1, q_2, p_1, p_2, t) + H_3(q_1, q_2, p_1, p_2, t) \dots, \quad (3.61)$$

onde H_k é um polinômio homogêneo de grau k nas variáveis reais q_1, q_2, p_1, p_2 e 2π -periódico em t . Vamos normalizar alguns termos de H quando os expoentes característicos do sistema linearizado forem imaginário puros e distintos, digamos, $\lambda_j = i\omega_j$, $j = 1, 2$. Neste caso, de acordo com o que foi discutido na seção 2.6, num sistema de coordenadas convenientes é possível escrever o Hamiltoniano na forma:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2, t) = \frac{\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_2^2 + p_2^2) + H_3(q_1, q_2, p_1, p_2, t) + \dots, \quad (3.62)$$

onde H_s são polinômios homogêneos de grau s nas variáveis q_1, q_2, p_1, p_2 e 2π -periódicos em t , digamos

$$H_s(q_1, q_2, p_1, p_2, t) = \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} h_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} p_1^{l_1} p_2^{l_2}, \quad (3.63)$$

sendo $h_{k_1 k_2 l_1 l_2} = h_{k_1 k_2 l_1 l_2}(t)$ uma função 2π -periódica em t .

3.5.1 Normalização dos termos cúbicos

No caso em que λ_1 e λ_2 não apresentam relações de ressonância de terceira ordem, temos que $b_{k_1 k_2 l_1 l_2} = \omega_1(l_1 - k_1) + \omega_2(l_2 - k_2)$ não é inteiro para $k_1 + k_2 + l_1 + l_2 = 3$ e, assim, podemos eliminar completamente os termos cúbicos de H . Os coeficientes da função geradora pode ser facilmente

calculado usando o processo descrito na demonstração do teorema 15, o qual nos fornece:

$$\begin{aligned}
s_{0300} &= u_{0003} + u_{0102}, & s_{0102} &= u_{0102} - 3u_{0003}, \\
s_{0201} &= v_{0102} + 3v_{0003}, & s_{0003} &= v_{0102} - v_{0003}, \\
s_{3000} &= u_{0030} + u_{1020}, & s_{1020} &= u_{1020} - 3u_{0030}, \\
s_{2010} &= v_{1020} + 3v_{0030}, & s_{0030} &= v_{1020} - v_{0030}, \\
s_{1002} &= u_{0111} - u_{0012} - u_{0210}, & s_{1200} &= u_{0012} + u_{0210} + u_{0111}, \\
s_{0210} &= v_{0111} + v_{0012} + v_{0210}, & s_{0111} &= 2(u_{0210} - u_{0012}), \\
s_{0012} &= v_{0111} - v_{0012} - v_{0210}, & s_{1101} &= 2(v_{0012} - v_{0210}), \\
s_{0120} &= u_{1011} - u_{0021} - u_{2001}, & s_{2100} &= u_{0021} + u_{2001} + u_{1011}, \\
s_{2001} &= v_{1011} + v_{0021} + v_{2001}, & s_{0021} &= v_{1011} - v_{0021} - v_{2001}, \\
s_{1011} &= 2(u_{2001} - u_{0021}), & s_{1110} &= 2(v_{0021} - v_{2001}); \\
u_{k_1 k_2 l_1 l_2} &= g(t) \operatorname{sen} a_{kl} t + f(t) \operatorname{cos} a_{kl} t, \\
v_{k_1 k_2 l_1 l_2} &= g(t) \operatorname{cos} a_{kl} t - f(t) \operatorname{sen} a_{kl} t; \\
g(t) &= \operatorname{cotg} \pi a_{kl} I_1(2\pi) + I_2(2\pi) - 2I_2(t), \\
f(t) &= I_1(2\pi) - \operatorname{cotg} \pi a_{kl} I_2(2\pi) - 2I_1(t), \\
I_1(t) &= \int_0^t (u'_{k_1 k_2 l_1 l_2} \operatorname{cos} a_{kl} x - v'_{k_1 k_2 l_1 l_2} \operatorname{sen} a_{kl} x) dx, \\
I_2(t) &= \int_0^t (u'_{k_1 k_2 l_1 l_2} \operatorname{sen} a_{kl} x + v'_{k_1 k_2 l_1 l_2} \operatorname{cos} a_{kl} x) dx;
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
u'_{0003} &= \frac{1}{8}(h_{0300} - h_{0102}), & v'_{0003} &= \frac{1}{8}(h_{0201} - h_{0003}), \\
u'_{0102} &= \frac{1}{8}(h_{0102} + 3h_{0300}), & v'_{0102} &= \frac{1}{8}(h_{0201} + 3h_{0003}), \\
u'_{0030} &= \frac{1}{8}(h_{3000} - h_{1020}), & v'_{0030} &= \frac{1}{8}(h_{2010} - h_{0030}), \\
u'_{1020} &= \frac{1}{8}(h_{1020} + 3h_{3000}), & v'_{0102} &= \frac{1}{8}(h_{2010} + 3h_{0030}), \\
u'_{0111} &= \frac{1}{4}(h_{1200} + h_{1002}), & v'_{0111} &= \frac{1}{4}(h_{0012} + h_{0210}), \\
u'_{0012} &= \frac{1}{8}(h_{1200} - h_{1002}) - h_{0111}, & v'_{0012} &= \frac{1}{8}(h_{0210} - h_{0012}) + h_{1101}, \\
u'_{0210} &= \frac{1}{8}(h_{1200} - h_{1002}) + h_{0111}, & v'_{0210} &= \frac{1}{8}(h_{0210} - h_{0012}) - h_{1101}, \\
u'_{1011} &= \frac{1}{4}(h_{2100} + h_{0120}), & v'_{1011} &= \frac{1}{4}(h_{2001} + h_{0021}), \\
u'_{0021} &= \frac{1}{8}(h_{2100} - h_{0120}) - h_{1011}, & v'_{0021} &= \frac{1}{8}(h_{2001} - h_{0021}) + h_{1110}, \\
u'_{2001} &= \frac{1}{8}(h_{2100} - h_{0120}) + h_{1011}, & v'_{2001} &= \frac{1}{8}(h_{2001} - h_{0021}) - h_{1110},
\end{aligned}$$

Suponha, agora, que λ_1 e λ_2 apresentam uma única relação de ressonância de terceira ordem.

Obteremos a forma normal nos seguintes casos: (1) $3\omega_1 = m$;

(2) $3\omega_2 = m$;

(3) $\omega_1 + 2\omega_2 = m$;

(4) $2\omega_1 + \omega_2 = m$.

Nestes casos, o anulamento completo da parte cúbica da função Hamiltoniana é impossível, mas ela pode ser conduzida a uma forma normal que reflete o caráter da ressonância do problema e, nas novas variáveis Q_j, P_j a função Hamiltoniana é escrita na forma:

$$\Gamma(Q_1, Q_2, P_1, P_2, t) = \frac{1}{2}\omega_1(Q_1^2 + P_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2(Q_2^2 + P_2^2) + \Gamma_3(Q_1, Q_2, P_1, P_2, t) + O((r_1 + r_2)^2), \quad (3.65)$$

sendo $r_j = \frac{1}{2}(Q_j^2 + P_j^2)$.

No primeiro caso, temos que $b_{0030} = 3\omega$ é inteiro e os demais $b_{k_1 k_2 l_1 l_2}$ com $k_1 + k_2 + l_1 + l_2 = 3$ não são inteiros. Assim, o Hamiltoniano nas coordenadas x_j, \bar{x}_j se escreve na forma:

$$\mathcal{H}(x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, t) = g_{0030}\bar{x}_1^3 + \bar{g}_{0030}x_1^3 = 2\text{Re}(g_{0030}\bar{x}_1^3), \quad (3.66)$$

donde, temos que Γ_3 é dado por:

$$\Gamma_3 = 2u_{0030}(Q_1^3 - 3Q_1Q_1^2) - 2v_{0030}(P_1^3 - 3P_1Q_1^2). \quad (3.67)$$

De forma completamente análoga, chegamos as expressões de Γ_3 casos (2)-(3), o qual obtemos:

$$(2) \Gamma_3 = 2u_{0003}(Q_2^3 - 3Q_2P_2^2) - 2v_{0003}(P_2^3 - 3P_2Q_2^2);$$

$$(3) \Gamma_3 = -2u_{0012}[Q_1(P_2^2 - Q_2^2) + 2P_1Q_2P_2] - 2v_{0012}[P_1(P_2^2 - Q_2^2) - 2Q_1Q_2P_2];$$

$$(4) \Gamma_3 = -2u_{0021}[Q_2(P_1^2 - Q_1^2) + 2P_2Q_1P_1] - 2v_{0021}[P_2(P_1^2 - Q_1^2) - 2Q_2Q_1P_1],$$

onde, por meio de cálculos simples, os quais usamos o processo descrito na demonstração do teorema 15, obtivemos

$$u_{k_1k_2l_1l_2} = x_{k_1k_2l_1l_2} \cos mt + y_{k_1k_2l_1l_2} \sen mt, \quad (3.68)$$

$$v_{k_1k_2l_1l_2} = -x_{k_1k_2l_1l_2} \sen mt + y_{k_1k_2l_1l_2} \cos mt,$$

sendo

$$x_{k_1k_2l_1l_2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u'_{k_1k_2l_1l_2} \cos mt - v'_{k_1k_2l_1l_2} \sen mt) dt, \quad (3.69)$$

$$y_{k_1k_2l_1l_2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u'_{k_1k_2l_1l_2} \sen mt + v'_{k_1k_2l_1l_2} \cos mt) dt.$$

Os coeficientes $u'_{k_1k_2l_1l_2}$ e $v'_{k_1k_2l_1l_2}$ foram fornecidos no início desta subseção.

3.5.2 Normalização de H_4

Suponha, agora, que os expoentes característicos $\omega_1 i$ e $\omega_2 i$ não apresentam relações de ressonância de terceira ordem. Neste caso, de acordo com a seção anterior, podemos assumir sem perda de generalidade que $H_3 = 0$ (os coeficientes da função geradora foram dados na seção anterior), assim, podemos supor

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2, t) = \frac{\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_2^2 + p_2^2) + H_4(q_1, q_2, p_1, p_2, t) + \dots \quad (3.70)$$

Mas, nos termos de quarta ordem do Hamiltoniano escrito nas coordenadas complexas $x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2$, sempre aparecerão os termos em que $k_1 = l_1$ e $k_2 = l_2$. Temos, assim, que H_4 se escreve na forma:

$$H_4(q_1, q_2, p_1, p_2, t) = c_{20}(q_1^2 + p_1^2)^2 + c_{11}(q_1^2 + p_1^2)(q_2^2 + p_2^2) + c_{02}(q_2^2 + p_2^2)^2 + H'_4(q_1, q_2, p_1, p_2, t) \quad (3.71)$$

onde, por meio do processo descrito na demonstração do teorema 15, obtemos

$$c_{20} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (h_{2020} + 3h_{0040} + 3h_{4000}) dt,$$

$$c_{11} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (h_{2200} + h_{0220} + h_{2002} + h_{0022}) dt,$$

$$c_{02} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (h_{0202} + 3h_{0004} + 3h_{0400}) dt.$$

Vamos obter H'_4 no caso em que os expoentes característicos apresentam uma única relação de ressonância de quarta ordem. Abordaremos os seguintes casos:

- (1) $4\omega_1 = m$;
- (2) $4\omega_2 = m$;
- (3) $2(\omega_1 + \omega_2) = m$;
- (4) $\omega_1 + 3\omega_2$;
- (5) $3\omega_1 + \omega_2$.

No primeiro caso, observando que $b_{k_1 k_2 l_1 l_2}$ só é inteiro quando $(k_1, k_2, l_1, l_2) = (4, 0, 0, 0)$ ou $(k_1, k_2, l_1, l_2) = (0, 0, 4, 0)$, obtemos

$$\mathcal{H}'_4(x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, t) = g_{4000}x_1^4 + \bar{g}_{0040}\bar{x}_1^4 = 2\text{Re}(\bar{g}_{0400}\bar{x}_1^4), \quad (3.72)$$

donde, temos que Γ_4 é dado por:

$$H'_4 = 2u_{0040}[(q_2^2 - p_2^2)^2 - 4q_2^2 p_2^2] 2v_{0040} q_2 p_2 (p_2^2 - q_2^2), \quad (3.73)$$

sendo

$$u_{k_1 k_2 l_1 l_2} = x_{k_1 k_2 l_1 l_2} \cos mt + y_{k_1 k_2 l_1 l_2} \text{sen } mt, \quad (3.74)$$

$$v_{k_1 k_2 l_1 l_2} = -x_{k_1 k_2 l_1 l_2} \text{sen } mt + y_{k_1 k_2 l_1 l_2} \cos mt.$$

Os coeficientes $x_{k_1 k_2 l_1 l_2}$ e $y_{k_1 k_2 l_1 l_2}$ foram fornecidos na seção anterior.

No caso em que $x_{0040}^2 + y_{0040}^2 \neq 0$, fazendo uma mudança de coordenadas análoga a do exemplo 8 da seção 1.2.2, obtemos a seguinte expressão para H :

$$H(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + H'_4 + \dots \quad (3.75)$$

onde

$$H'_4 = H'_4(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = \sqrt{x_{0040}^2 + y_{0040}^2} \text{sen}(4\phi_1) r_1^2 \quad (3.76)$$

De forma completamente análoga, nos casos (2)-(5) obtemos as seguintes formas normais:

$$(2) H'_4(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = \sqrt{x_{0004}^2 + y_{0004}^2} \text{sen}(4\phi_2) r_2^2;$$

$$(3) H'_4(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = \sqrt{x_{2200}^2 + y_{2200}^2} \text{sen} 2(\phi_1 + \phi_2);$$

$$(4) H'_4(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = \sqrt{x_{1300}^2 + y_{1300}^2} \text{sen}(\phi_1 + 3\phi_2);$$

$$(5) H'_4(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = \sqrt{x_{3100}^2 + y_{3100}^2} \text{sen}(3\phi_1 + \phi_2).$$

No caso em que $\omega_1 i$ e $\omega_2 i$ não apresentam relações de ressonância de quarta ordem, $b_{k_1 k_2 l_1 l_2}$ nunca é inteiro, assim, $H'_4 = 0$ e, portanto, nas variáveis ação-ângulo, a função Hamiltoniana assume a forma:

$$H(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + H_5 + \dots, \quad (3.77)$$

onde os coeficientes c_{20} , c_{11} e c_{02} foram dados no início desta seção.

3.6 Formas normais para funções Hamiltonianas autônomas com dois graus de liberdade

Nesta seção, vamos supor que a função Hamiltoniana H dada em (3.2) seja autônoma e tenha dois graus de liberdade, ou seja, H é da forma:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = H_2(q_1, q_2, p_1, p_2) + H_3(q_1, q_2, p_1, p_2) \dots, \quad (3.78)$$

onde H_k é um polinômio homogêneo de grau k nas variáveis reais q_1, q_2, p_1, p_2 , digamos

$$H_s(q_1, q_2, p_1, p_2) = \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} h_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} p_1^{l_1} p_2^{l_2}, \quad (3.79)$$

sendo $h_{k_1 k_2 l_1 l_2}$ constantes reais.

Nesta seção, vamos normalizar alguns termos da função Hamiltoniana quando os autovalores da matriz do sistema linearizado $\omega_1 i$ e $\omega_2 i$ apresentam certas relações de ressonância.

3.6.1 Forma normal sob ressonância de segunda ordem

Suponhamos que $\omega_1 i$ e $\omega_2 i$ apresentam a relação de ressonância de segunda ordem $\omega_1 = \omega_2$. Vamos obter a forma normal de H em dois casos: quando a matriz do sistema linearizado é diagonalizável e quando não é.

No caso em que a matriz do sistema linearizado é diagonalizável, de acordo com a tabela da seção 2.4, num sistema de coordenadas conveniente, a parte quadrática do Hamiltoniano H_2 assume a forma:

$$H_2 = \frac{\omega}{2}(q_1^2 + p_1^2) - \frac{\omega}{2}(q_2^2 - p_2^2). \quad (3.80)$$

De acordo com o comentário (5) da seção 3.3, na forma normal de Gustavson de H não aparecerão termos de terceira ordem e nos termos de quarta ordem, nas coordenadas complexas (definidas no mesmo comentário) só poderão aparecer os termos $|x_1|^4$, $x_1^2 \bar{x}_1 \bar{x}_2$, $x_1^2 \bar{x}_2^2$, $x_1 \bar{x}_1^2 x_2$, $|x_1|^2 |x_2|^2$, $x_1 x_2 \bar{x}_2^2$, $\bar{x}_1^2 x_2^2$, $\bar{x}_1 x_2^2 \bar{x}_2$ e $|x_2|^4$. Fazendo a mudança de coordenadas $(x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2) \rightarrow (q_1, q_2, p_1, p_2)$ e em seguida, mudando para as variáveis ação-ângulo de forma análoga ao exemplo 8 da seção 1.2.2, obtemos a seguinte expressão para a função Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H = & \omega(r_1 - r_2) + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + \\ & 2r_1r_2[k_{2002}\cos 2(\phi_1 + \phi_2) - l_{2002}\sin 2(\phi_1 + \phi_2)] + \\ & 2r_1^{3/2}r_2^{1/2}[k_{1120}\sin 2(\phi_1 + \phi_2) - l_{1120}\cos 2(\phi_1 + \phi_2)] + \\ & 2r_1^{1/2}r_2^{3/2}[k_{1102}\sin(\phi_1 + \phi_2) - l_{1120}\cos(\phi_1 + \phi_2)] + O((r_1 + r_2)^{5/2}) \end{aligned} \quad (3.81)$$

onde

$$c_{20} = -x_{2020} - \frac{3}{2}u_{1,1} + \frac{1}{2}u_{2,2} - \frac{1}{2}u_{4,4} - \frac{3\omega^2}{8}u_{7,7} + \frac{\omega^2}{24}u_{8,8},$$

$$c_{11} = x_{1111} + 2u_{1,6} + 2u_{3,3} - \frac{\omega^2}{6}u_{8,8} - 2u_{2,5} - 2u_{4,4} + \frac{\omega^2}{6}u_{9,9},$$

$$c_{02} = -x_{0202} - \frac{3}{2}u_{5,5} - \frac{1}{2}u_{6,6} + \frac{1}{2}u_{3,3} + \frac{3\omega^2}{8}u_{10,10} - \frac{\omega^2}{24}u_{9,9},$$

$$k_{2002} = x_{2002} - \frac{1}{2}u_{1,3} - u_{2,4} + \frac{\omega^2}{8}u_{7,9} + u_{3,6} + \frac{1}{2}u_{4,5} - \frac{\omega^2}{8}u_{8,10},$$

$$l_{2002} = y_{2002} - \frac{1}{2}v_{1,3} + v_{2,4} + \frac{\omega^2}{8}v_{7,9} - v_{3,6} + \frac{1}{2}v_{4,5} - \frac{\omega^2}{8}v_{8,10},$$

$$k_{1120} = x_{1102} - \frac{1}{2}u_{2,1} + u_{1,4} + u_{3,2} - \frac{1}{2}u_{2,6} - \frac{1}{2}u_{6,4} - \frac{\omega^2}{4}u_{8,7} - \frac{\omega^2}{12}u_{9,8},$$

$$l_{1120} = y_{1102} - \frac{1}{2}v_{2,1} + v_{1,4} + v_{3,2} - \frac{1}{2}v_{2,6} - \frac{1}{2}v_{6,4} - \frac{\omega^2}{4}v_{8,7} - \frac{\omega^2}{12}v_{9,8},$$

$$k_{1102} = x_{1102} + \frac{1}{2}u_{6,2} + u_{2,3} - 2u_{5,3} - u_{4,6} + \frac{1}{2}u_{6,5} + \frac{\omega^2}{4}u_{9,10} - \frac{\omega^2}{12}u_{8,9},$$

$$l_{1102} = y_{1102} + \frac{1}{2}v_{6,2} + v_{2,3} - 2v_{5,3} - v_{4,6} + \frac{1}{2}v_{6,5} + \frac{\omega^2}{4}v_{9,10} - \frac{\omega^2}{12}v_{8,9},$$

$$u_{i,j} = x_i x_j + y_i y_j, \quad v_{i,j} = x_i y_j - x_j y_i, \quad (i, j = 1, \dots, 10),$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}h_{1020} - \frac{3}{2\omega^2}h_{3000}, \quad y_1 = \frac{3\omega}{2}h_{0030} + \frac{1}{2\omega}h_{2010},$$

$$x_2 = -\omega h_{0021} - \frac{1}{\omega}h_{2001}, \quad y_2 = h_{0120} + \frac{1}{\omega^2}h_{2100},$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}h_{0111} - \frac{1}{2}h_{1002} + \frac{1}{2\omega^2}h_{1200}, \quad y_3 = -\frac{\omega}{2}h_{0012} + \frac{1}{2\omega}h_{0211} + \frac{1}{2\omega}h_{1101},$$

$$x_4 = -\frac{\omega}{2}h_{0021} + \frac{1}{2\omega}h_{1110} + \frac{1}{2\omega}h_{2001}, \quad y_4 = -\frac{\omega}{2}h_{0120} - \frac{1}{2}h_{1011} + \frac{1}{2\omega^3}h_{2100},$$

$$x_5 = \frac{3\omega}{2}h_{0003} + \frac{1}{1\omega}h_{0201}, \quad y_5 = -\frac{1}{2}h_{0102} - \frac{3}{2\omega^2}h_{0300},$$

$$x_6 = h_{1002} + \frac{1}{\omega^2}h_{1200}, \quad y_6 = -\omega h_{0012} - \frac{1}{\omega}h_{0210},$$

$$x_7 = h_{0030} - \frac{1}{\omega^2}h_{2010}, \quad y_7 = \omega h_{1020} - \frac{1}{\omega^3}h_{3000},$$

$$x_8 = \frac{1}{\omega}h_{0120} - \frac{1}{\omega}h_{1011} - \frac{1}{\omega^3}h_{2100}, \quad y_8 = h_{0021} + \frac{1}{\omega^2}h_{1110} - \frac{1}{\omega^2}h_{2001},$$

$$x_9 = -h_{0012} + \frac{1}{\omega^2}h_{0210} - \frac{1}{\omega^2}h_{1101}, \quad y_9 = \frac{1}{\omega}h_{0111} - \frac{1}{\omega}h_{1002} + \frac{1}{\omega^3}h_{1200},$$

$$x_{10} = -\frac{1}{\omega}h_{0102} + \frac{1}{\omega^3}h_{0300}, \quad y_{10} = -h_{0003} + \frac{1}{\omega^2}h_{0201},$$

$$x_{2020} = -\frac{1}{2}(3\omega^2 h_{0040} + h_{2020} + \frac{3}{\omega^2} h_{4000})$$

$$x_{1111} = \omega^2 h_{0022} + h_{0220} + h_{2002} + \frac{3}{\omega^2} h_{2200}$$

$$x_{0202} = -\frac{1}{2}(3\omega^2 h_{0004} + h_{0202} + \frac{3}{\omega^2} h_{0400})$$

$$x_{2002} = \frac{1}{4}(\omega^2 h_{0022} + h_{0220} + h_{1111} + h_{2002} + \frac{1}{\omega^2} h_{2200})$$

$$y_{2002} = \frac{1}{4}(-\omega h_{0121} - \omega h_{1012} + \frac{1}{\omega} h_{1210} + \frac{1}{\omega} h_{2101})$$

$$x_{1120} = \frac{1}{4}(3\omega h_{0130} + \omega h_{1021} + \frac{1}{\omega} h_{2110} + \frac{3}{\omega} h_{3001})$$

$$y_{1120} = \frac{1}{4}(-3\omega h_{0031} + h_{1120} - h_{2011} + \frac{3}{\omega^2} h_{3100})$$

$$x_{1102} = \frac{1}{4}(3\omega h_{1003} + \omega h_{0112} + \frac{1}{\omega} h_{1201} + \frac{3}{\omega} h_{0310})$$

$$x_{1102} = \frac{1}{4}(-3\omega h_{0013} + h_{0211} - h_{1102} + \frac{3}{\omega^2} h_{1300})$$

No caso em que a matriz do sistema linearizado não é diagonalizável, de acordo com a tabela 2.1 da seção 2.4, a parte quadrática do Hamiltoniano, num sistema de coordenadas conveniente, assume a forma:

$$H_2 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \omega(q_1 p_2 - q_2 p_1). \quad (3.82)$$

Com já havíamos dito, sob ressonância de primeira ordem a parte quadrática do Hamiltoniano normalizado é identicamente nula e, por meio do processo descrito na demonstração do teorema 15, obtemos a seguinte expressão para os termos de quarta ordem do Hamiltoniano normalizado:

$$H_4 = (p_1^2 + p_2^2)[A(p_1^2 + p_2^2) + B(q_1 p_2 - q_2 p_1) + C(q_1^2 + q_2^2)]. \quad (3.83)$$

onde

$$A = \frac{k_{2002}}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}(l_{2011} + l_{1102}), \quad C = -\frac{1}{4}(2c_{20} + c_{11} + 2c_{02}),$$

$$c_{20} = x_{2020} - 9u_{10,7} + 4u_{6,1} + u_{1,6} + u_{9,8} - u_{5,2} - u_{4,3},$$

$$c_{11} = x_{1111} + 4(u_{9,8} - u_{8,9} + u_{4,3} - u_{3,4}) + 2(u_{6,5} - u_{5,6} + u_{2,1} - u_{1,2}),$$

$$c_{02} = x_{2020} + 9u_{7,10} - 4u_{1,6} - u_{6,1} - u_{8,9} + u_{2,5} + u_{3,4},$$

$$k_{2002} = x_{2020} + 3(u_{9,10} - u_{10,9}) + 2(u_{2,3} - u_{3,2}) + u_{3,6} - u_{6,3}$$

$$l_{2011} = y_{2011} - 6v_{10,8} - 4v_{3,1} + 2v_{6,2} + 2v_{9,9} + v_{2,2} - v_{5,3}$$

$$l_{1102} = y_{2011} - 6v_{8,10} - 4v_{1,3} + 2v_{2,6} + 2v_{9,9} + v_{2,2} - v_{3,5}$$

$$x_{2002} = \frac{1}{2}(3h_{0040} + h_{0022} + 3h_{0004}),$$

$$x_{2020} = \frac{1}{4}(h_{2020} - h_{2002} + h_{1111} - h_{0220} + h_{0202}),$$

$$x_{1111} = -(h_{2020} + h_{2002} + h_{0220} + h_{0202}),$$

$$y_{2011} = \frac{1}{4}(-h_{1021} - 3h_{1003} + 3h_{0130} + h_{0112}),$$

$$u_{i,j} = e_i x_j + f_i y_j, \quad v_{i,j} = e_i y_j - f_i x_j, \quad (i, j = 1, \dots, 10), \quad \Omega = \omega^{-1},$$

$$e_1 = \Omega y_1 + \Omega^2 x_2 - 2\Omega^3 y_3,$$

$$f_1 = -\Omega x_1 + \Omega^2 y_2 + 2\Omega^3 x_3,$$

$$e_2 = \Omega y_2 + 2\Omega^2 x_3,$$

$$f_2 = -\Omega x_2 + 2\Omega^2 y_3,$$

$$e_3 = \Omega y_3,$$

$$f_3 = -\Omega x_3,$$

$$e_4 = \Omega y_4 - \Omega^2(x_1 - x_5) + 2\Omega^3(y_2 - y_6) + 6\Omega^4 x_3,$$

$$f_4 = -\Omega x_4 - \Omega^2(y_1 - y_5) - 2\Omega^3(x_2 - x_6) + 6\Omega^4 y_3,$$

$$e_5 = \Omega y_5 - \Omega^2(x_2 - 2x_6) + 4\Omega^3 y_3,$$

$$f_5 = -\Omega x_5 - \Omega^2(y_2 - 2y_6) - 4\Omega^3 x_3,$$

$$e_6 = \Omega y_6 - \Omega^2 x_3,$$

$$f_6 = -\Omega x_6 - \Omega^2 y_3,$$

$$e_7 = \frac{\Omega}{3} y_7 + \frac{\Omega^2}{9} x_8 - \frac{2\Omega^3}{27} y_9 - \frac{2\Omega^4}{27} x_{10},$$

$$f_7 = -\frac{\Omega}{3} x_7 + \frac{\Omega^2}{9} y_8 + \frac{2\Omega^3}{27} x_9 - \frac{2\Omega^4}{27} y_{10},$$

$$e_8 = \frac{\Omega}{3} y_8 + \frac{2\Omega^2}{9} x_9 - \frac{2\Omega^3}{3} y_{10},$$

$$f_8 = -\frac{\Omega}{3} x_8 + \frac{2\Omega^2}{9} y_9 + \frac{2\Omega^3}{9} x_{10},$$

$$e_9 = \frac{\Omega}{3} y_9 + \frac{\Omega^2}{3} x_{10},$$

$$f_9 = -\frac{\Omega}{3} x_9 + \frac{\Omega^2}{3} y_{10},$$

$$e_{10} = \frac{\Omega}{3} y_{10},$$

$$f_{10} = -\frac{\Omega}{3} x_{10},$$

$$x_i = \frac{x_i^*}{2\sqrt{2}},$$

$$y_i = \frac{y_i^*}{2\sqrt{2}}, \quad (i = 1, \dots, 10),$$

$$x_1^* = -h_{2010} - h_{1101} + h_{0210}, \quad y_1^* = h_{2001} - h_{1110} - h_{0201},$$

$$x_2^* = -2h_{1020} - 2h_{1002}, \quad y_2^* = -2h_{0120} - 2h_{0102},$$

$$x_3^* = -3h_{0030} - h_{0012}, \quad y_3^* = -h_{0021} - 3h_{0003},$$

$$x_4^* = 3h_{3000} + h_{1200}, \quad y_4^* = h_{2100} + 3h_{0300},$$

$$x_5^* = 2h_{2010} + 2h_{0210}, \quad y_5^* = 2h_{2001} + 2h_{0201},$$

$$x_6^* = h_{1020} - h_{1002} + h_{0111}, \quad y_6^* = h_{1011} - h_{0120} + h_{0102},$$

$$x_7^* = h_{3000} - h_{1200}, \quad y_7^* = h_{2100} - h_{0300},$$

$$x_8^* = h_{2010} - h_{1101} - h_{0210}, \quad y_8^* = h_{2001} + h_{1110} - h_{0201},$$

$$x_9^* = h_{1020} - h_{1002} - h_{0111}, \quad y_9^* = h_{1011} + h_{0120} - h_{0102},$$

$$x_{10}^* = h_{0030} - h_{0012}, \quad y_{10}^* = h_{0021} - h_{0003}.$$

3.6.2 Forma normal sob ressonância de terceira ordem

Nesta subseção, vamos obter a forma normal de Gustavson no caso em que os autovalores $\omega_1 i, \omega_2 i$ da matriz do sistema linearizado apresentam a relação de ressonância de terceira ordem $\omega_1 = 2\omega_2$. Inicialmente, suponhamos que a parte quadrática do Hamiltoniano, escrito num sistema de coordenadas conveniente, assume a forma:

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) - \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2). \quad (3.84)$$

A fim de obter a forma normal do Hamiltoniano H até termos de terceiro grau, começaremos fazendo a mudança complexa de coordenadas simpléticas

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{i}{\omega_1}y_1, & p_1 &= \frac{i}{2}\omega_1 x_1 + y_1 \\ q_2 &= -\frac{i}{2}x_2 + \frac{1}{\omega_2}y_2, & p_2 &= -\frac{1}{2}\omega_2 x_2 + iy_2 \end{aligned} \quad (3.85)$$

Nas varáveis x_1, x_2, y_1, y_2 a função Hamiltoniana é escrita na forma:

$$H = i\omega_1 x_1 y_1 + i\omega_2 x_2 y_2 + \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=3}^{\infty} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2} y_1^{l_1} y_2^{l_2}. \quad (3.86)$$

Se $\gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} = x_{k_1 k_2 l_1 l_2} + iy_{k_1 k_2 l_1 l_2}$, cálculos simples mostram que $x_{k_1 k_2 l_1 l_2}$ e $y_{k_1 k_2 l_1 l_2}$ estão relacionados com os coeficientes $h_{k_1 k_2 l_1 l_2}$ do Hamiltoniano inicial por meio das seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned}
x_{0030} &= h_{0030} - \frac{1}{\omega_1^2} h_{2010}, & y_{0030} &= \frac{1}{\omega_1} h_{1020} - \frac{1}{\omega_1^3} h_{3000}, \\
x_{1020} &= -\frac{1}{2} h_{1020} - \frac{3}{2\omega_1^2} h_{3000}, & y_{1020} &= \frac{3\omega_1}{2} h_{0030} + \frac{1}{2\omega_1} h_{2010}, \\
x_{0120} &= \frac{1}{\omega_1} h_{0120} - \frac{1}{\omega_1} h_{1011} - \frac{1}{\omega_2 \omega_1^2} h_{2100}, & y_{0120} &= h_{0021} + \frac{1}{\omega_1 \omega_2} h_{1110} - \frac{1}{\omega_1} h_{2001}, \\
x_{1011} &= -\omega_1 h_{0021} - \frac{1}{\omega_1} h_{2001}, & y_{1011} &= \frac{\omega_1}{\omega_2} h_{0120} + \frac{1}{\omega_1 \omega_2} h_{2100}, \\
x_{0021} &= \frac{1}{\omega_2} h_{0120} - \frac{1}{\omega_1} h_{1011} - \frac{1}{\omega_2 \omega_1^2} h_{2100}, & y_{0021} &= h_{0021} + \frac{1}{\omega_1 \omega_2} h_{1110} - \frac{1}{\omega_1^2} h_{2001} \\
x_{1002} &= -\frac{\omega_1}{2\omega_2} h_{0111} - \frac{1}{2} h_{1002} + \frac{1}{2\omega_2^2} h_{1200}, & y_{1002} &= -\frac{\omega_1}{2} h_{0012} + \frac{\omega_1}{2\omega_2^2} h_{0210} + \frac{1}{2\omega_2} h_{1101} \\
x_{0012} &= -h_{0012} + \frac{1\omega_2^2}{\omega_1 \omega_2} h_{0210} - \frac{1}{\omega_1 \omega_2} h_{1101}, & y_{0012} &= \frac{1}{\omega_2} h_{0111} - \frac{1}{\omega_1} h_{1002} + \frac{1}{\omega_1 \omega_2^2} h_{1200}, \\
x_{0111} &= \frac{\omega_2}{\omega_1} h_{1002} + \frac{1}{\omega_1 \omega_2} h_{1200}, & y_{0111} &= -\omega_2 h_{0012} - \frac{1}{\omega_2} h_{0210}, \\
x_{0201} &= -\frac{\omega_2}{4} h_{0102}, & y_{0201} &= \frac{3\omega_2^2}{4} h_{0003} + \frac{1}{4} h_{0201}, \\
x_{0003} &= -\frac{1}{\omega_2} h_{0102} + \frac{1}{\omega_2^3} h_{0300}, & y_{0003} &= -h_{0003} + \frac{1}{\omega_2^2} h_{0201}.
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Para os dez restantes termos, temos a seguinte identidade:

$$\gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} = (y_{k_1 k_2 l_1 l_2} + ix_{k_1 k_2 l_1 l_2}) \left(-\frac{\omega_1}{2}\right)^{l_1 - k_1} \left(\frac{\omega_2}{2}\right)^{l_2 - k_2}. \tag{3.88}$$

Utilizando uma transformação de Birkhoff $(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (Q'_1, Q'_2, P'_1, P'_2)$, eliminamos todos os termos de terceiro grau do Hamiltoniano, exceto os ressonantes, o qual conduz o Hamiltoniano a forma:

$$H = H = i\omega_1 Q'_1 P'_1 + i\omega_2 Q'_2 P'_2 + \gamma_{1002} Q'_1 P'^2_2 + \gamma_{0210} Q'^2_2 P'_1 + H_4 + \dots \tag{3.89}$$

Voltemos as variáveis reais por meio da transformação simplética:

$$\begin{aligned}
Q'_1 &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1}} (Q_1 - iP_1), & Q'_2 &= \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} (iQ_2 - P_2) \\
P'_1 &= \frac{\sqrt{\omega_1}}{2} (-iQ_1 + P_1), & P'_2 &= \frac{\sqrt{\omega_2}}{2} (Q_2 - iP_2).
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Se $x_{1002}^2 + y_{1002}^2 \neq 0$, introduzindo a mudança de coordenadas

$$Q_j = \sqrt{2r_j} \text{sen}(\phi_j - \theta_j), \quad , \quad P_j = \sqrt{2r_j} \text{cos}(\phi_j - \theta_j), \quad (j = 1, 2), \quad (3.91)$$

onde $\theta_2 = 0$ e θ_1 satisfaz as relações

$$\text{sen}(\theta_1) = \frac{y_{1002}}{\sqrt{x_{1002}^2 + y_{1002}^2}}, \quad \text{cos}(\theta_1) = \frac{x_{1002}}{\sqrt{x_{1002}^2 + y_{1002}^2}}, \quad (3.92)$$

temos que a função Hamiltoniana H , escrita em termos das novas coordenadas, assume a forma:

$$H = 2\omega_2 r_1 - \omega_1 r_2 - r_2 r_1^{1/2} \sqrt{\omega_2(x_{1002}^2 + y_{1002}^2)} \text{sen}(\phi_1 + 2\phi_2) + O((r_1 + r_2)^2). \quad (3.93)$$

3.6.3 Forma normal sob ressonância de quarta ordem

Vamos, agora, obter a forma normal até quarto grau da função Hamiltoniana H no caso em que os autovalores $\omega_1 i, \omega_2 i$ apresentam a relação de ressonância de quarta ordem $\omega_1 = 3\omega_2$. Nesta seção, seguiremos os mesmos passos e as mesmas notações da seção anterior.

As expressões para os coeficientes $\gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2}$ de alguns termos de quarta ordem do Hamiltoniano (3.86), são:

$$\begin{aligned} \gamma_{2020} &= -\frac{\omega_1^2}{2} h_{0040} - \frac{3}{\omega_1^2} h_{4000} - \frac{1}{2} h_{2020}, \\ \gamma_{1111} &= \omega_1 \omega_2 h_{0022} + \frac{1}{\omega_1 \omega_2} h_{2200} + \frac{\omega_1}{\omega_2} h_{0220} + \frac{\omega_2}{\omega_1} h_{2002} \\ \gamma_{0202} &= -\frac{3\omega_2^2}{2} h_{0004} - \frac{3}{2\omega_2^2} h_{0400} - \frac{1}{2} h_{0202} \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\gamma_{1003} = u_{1003} + iv_{1003}$$

$$\gamma_{0310} = -\frac{\omega_2^2}{4\omega_1} (u_{1003} - iv_{1003}),$$

onde

$$\begin{aligned} u_{1003} &= \frac{\omega_1}{2} h_{0013} + \frac{1}{2\omega_2^3} h_{1300} - \frac{1}{2\omega_2} h_{1102} - \frac{\omega_1}{2\omega_2^2} h_{0211}, \\ v_{1003} &= -\frac{\omega_1}{2\omega_2} h_{0112} - \frac{1}{2} h_{1003} + \frac{1}{2\omega_2^2} h_{1201} + \frac{\omega_1}{2\omega_2^2} h_{0310}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Por meio de uma transformação de Birkhoff, podemos eliminar os termos de terceiro grau no Hamiltoniano (3.86) e, dos termos de quarto grau, permanecem os ressonantes e os que contêm

apenas os produtos $Q'_j P'_j$. A normalização da função Hamiltoniana até os termos de quarto grau tem a forma:

$$H = i\omega_1 Q'_1 P'_1 - c_{20}(Q'_1 P'_1)^2 + c_{11}(Q'_1 P'_1)(Q'_2 P'_2) + c_{02}(Q'_2 P'_2)^2 + \quad (3.96)$$

$$l_{1003} Q'_1 P'^3_2 + l_{0310} Q'^3_2 P'_1 + H_5 + \dots,$$

onde

$$c_{20} = -\gamma_{2020} - \frac{27\omega_2^2}{8}(x_{0030}^2 + y_{0030}^2) - \frac{3}{2}(x_{1020}^2 + y_{1020}^2) - \frac{9}{10}(x_{0120}^2 + y_{0120}^2) +$$

$$\frac{1}{2}(x_{1011}^2 + y_{1011}^2) + \frac{9\omega_2^2}{56}(x_{0021}^2 + y_{0021}^2),$$

$$c_{11} = \gamma_{1111} - \frac{3}{2}(x_{1002}^2 + y_{1002}^2) + \frac{3\omega_2^2}{10}(x_{0012}^2 + y_{0012}^2) - \frac{9\omega_2^2}{14}(x_{0021}^2 + y_{0021}^2) -$$

$$\frac{18}{5}(x_{0120}^2 + y_{0120}^2) + 2(x_{0111}x_{1020} + y_{0111}y_{1020}) - \frac{4}{\omega_2}(x_{0201}y_{1011} + x_{1011}y_{0201}),$$

$$c_{02} = -\gamma_{0202} - \frac{2\omega_2^2}{8}(x_{0003}^2 + y_{0003}^2) + \frac{6}{\omega_2^2}(x_{0201}^2 + y_{0201}^2) - \frac{1}{6}(x_{1002}^2 + y_{1002}^2) -$$

$$\frac{1}{2}(x_{0111}^2 + y_{0111}^2) - \frac{3\omega_2^2}{40}(x_{0012}^2 + y_{0012}^2), \quad (3.97)$$

$$l_{1003} = x_{1003} + iy_{1003}, \quad l_{0310} = -\frac{\omega_2^2}{12}(x_{1003} - iy_{1003}),$$

$$x_{1003} = u_{1003} - \frac{9}{5}(x_{0120}x_{0012} + y_{0120}y_{0012}) - \frac{1}{\omega_2}(x_{1002}y_{1011} + x_{1011}y_{1002}) +$$

$$\frac{4}{\omega_2^2}(x_{1002}x_{0201} + y_{1002}y_{0201}) + \frac{3}{2}(x_{0003}x_{0111} + y_{0003}y_{0111}),$$

$$y_{1003} = v_{1003} - \frac{9}{5}(x_{0120}y_{0012} - x_{0120}y_{0012}) - \frac{1}{\omega_2}(y_{1002}y_{1011} - x_{1011}x_{1002}) +$$

$$\frac{4}{\omega_2^2}(x_{0210}y_{1002} - x_{1002}y_{0201}) + \frac{3}{2}(x_{0111}y_{0003} - x_{0003}y_{0111}).$$

As expressões para $x_{k_1 k_2 l_1 l_2}$ e $y_{k_1 k_2 l_1 l_2}$ são as mesmas listadas na subseção anterior. Voltemos as variáveis reais por meio da transformação simplética:

$$Q'_1 = \frac{1}{\sqrt{\omega_1}}(Q_1 - iP_1), \quad Q'_2 = \frac{1}{\sqrt{\omega_2}}(iQ_2 - P_2) \quad (3.98)$$

$$P'_1 = \frac{\sqrt{\omega_1}}{2}(-iQ_1 + P_1), \quad P'_2 = \frac{\sqrt{\omega_2}}{2}(Q_2 - iP_2),$$

e, no caso em que $x_{1003}^2 + y_{1003}^2 \neq 0$, por meio da mudança de coordenadas

$$Q_j = \sqrt{2r_j} \text{sen}(\phi_j - \theta_j), \quad , \quad P_j = \sqrt{2r_j} \text{cos}(\phi_j - \theta_j), \quad (j = 1, 2), \quad (3.99)$$

onde $\theta_2 = 0$ e θ_1 satisfaz as relações

$$\operatorname{sen}(\theta_1) = \frac{y_{1003}}{\sqrt{x_{1003}^2 + y_{1003}^2}}, \quad \operatorname{cos}(\theta_1) = -\frac{x_{1003}}{\sqrt{x_{1003}^2 + y_{1003}^2}}, \quad (3.100)$$

obtemos

$$H = 3\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \omega_2 r_1^{1/2} r_2^{3/2} \sqrt{x_{1003}^2 + y_{1003}^2} \operatorname{cos}(\phi_1 + 3\phi_2) + O((r_1 + r_2)^{5/2}). \quad (3.101)$$

Capítulo 4

A forma normal de Lie

Neste capítulo, vamos desenvolver a teoria da forma normal de Lie (ou método de Deprit-Hori ([9] e [18])) para sistemas Hamiltonianos. Nas primeiras seções desenvolveremos a teoria geral e, na última seção, estudamos a forma normal numa vizinhança do equilíbrio, para sistemas Hamiltonianos autônomos e periódicos. Este capítulo é parte de um seminário que apresentei no curso de Sistemas Dinâmicos Hamiltonianos ministrado por Vidal [37]. Nele, usei como principais referências Meyer [25] e Cabral [7].

4.1 Introdução

Considere a função Hamiltoniana que depende de um pequeno parâmetro ε , $H = H(\mathbf{z}, \varepsilon)$. Use uma função $W = W(\mathbf{z}, \varepsilon)$ como uma função Hamiltoniana tendo o parâmetro ε como o tempo, isto é,

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\varepsilon} = J\nabla W(\mathbf{z}, \varepsilon) \quad (4.1)$$

e considere a solução $\phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)$ desta equação que satisfaz $\phi(\mathbf{Z}, 0) = \mathbf{Z}$. A aplicação $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)$ define uma transformação simplética próxima da identidade que leva o Hamiltoniano $H = H(\mathbf{z}, \varepsilon)$ no Hamiltoniano $H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon) = H(\phi(\mathbf{Z}, \varepsilon), \varepsilon)$. A função H^* as vezes é chamada de transformada de Lie de H gerada por W e é denotada por $\mathcal{L}_W H$. O método de Deprit-Hori consiste em obter uma função

$W(\mathbf{z}, \varepsilon)$ de tal forma que seja mais simples o novo Hamiltoniano H^* . Este método foi desenvolvido por Deprit [9] e estendido por Kamel[19] e Henrard ([15],[16] e [17]). O método de Deprit original era somente para sistemas Hamiltonianos, mas as extensões de Kamel e Henrard foram para sistemas de equações não Hamiltonianas. Aqui trataremos somente do caso Hamiltoniano.

4.2 O algoritmo para obtenção da transformada de Lie

Suponha que a expansão de H , W e H^* em séries de potências de ε sejam

$$H(\mathbf{z}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} H_i^0(\mathbf{z}), \quad (4.2)$$

$$W(\mathbf{z}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} W_{i+1}(\mathbf{z}), \quad (4.3)$$

$$\mathcal{L}_W H(\mathbf{Z}, \varepsilon) = H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} H_0^i(\mathbf{z}). \quad (4.4)$$

O seguinte teorema forma a base do processo:

Teorema 16 *As funções $\{H_j^i\}$ ($i = 1, 2, \dots$, $j = 0, 1, \dots$) definidas acima satisfazem as identidades recursivas*

$$H_j^i = H_{j+1}^{i-1} + \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \{H_{j-k}^{i-1}, W_{k+1}\}, \quad (4.5)$$

onde $\{ , \}$ é o colchete de Poisson.

Demonstração. Inicialmente, defina o operador diferencial $\mathcal{D} = \mathcal{D}_W$ por

$$\mathcal{D}F(\mathbf{z}, \varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\mathbf{z}, \varepsilon) + \{F, W\}(\mathbf{z}, \varepsilon). \quad (4.6)$$

Note que

$$\mathcal{D}F(\mathbf{z}, \varepsilon)_{\mathbf{z}=\phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(\mathbf{z}, \varepsilon)_{\mathbf{z}=\phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)}. \quad (4.7)$$

Agora, considere a seqüência de funções definida indutivamente por $H^0 = H$, $H^i = \mathcal{D}H^{i-1}$, $i \geq 1$, cujas expansões em série de potências é

$$H^i(\mathbf{z}, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} H_j^i(\mathbf{z}). \quad (4.8)$$

Como

$$\mathcal{D}\left(\frac{\varepsilon^j}{j!}H_j^{i-1}\right)(\mathbf{z}, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^j}{j!}\{H_j^{i-1}, W\}(\mathbf{z}, \varepsilon) + \frac{\varepsilon^{j-1}}{(j-1)!}H_j^{i-1}(\mathbf{z}), \quad (4.9)$$

temos que

$$\begin{aligned} H^i(\mathbf{z}, \varepsilon) &= \mathcal{D}H^{i-1}(\mathbf{z}, \varepsilon) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} [H_{j+1}^{i-1} + \{H_j^{i-1}, W\}]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A soma que envolve o colchete de Poisson pode ser analisada da seguinte forma, onde fazemos $l = j + k$ e, subsequenteemente, escreva j em lugar de l :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} \{H_j^{i-1}, W\} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j+k}}{j!k!} \{H_j^{i-1}, W_{k+1}\} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l \frac{l!}{(l-k)!k!} \frac{\varepsilon^l}{l!} \{H_{l-k}^{i-1}, W_{k+1}\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \{H_{j-k}^{i-1}, W_{k+1}\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Logo as funções H_j^i relacionam-se por (4.5). Resta mostrar que H^* tem a expansão dada por (4.4).

Pelo desenvolvimento em série de Taylor e por (4.7) tem-se

$$\begin{aligned} H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon)_{\varepsilon=0} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} (H(\mathbf{z}, \varepsilon)_{\mathbf{z}=\phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)})_{\varepsilon=0} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} (\mathcal{D}^i H(\mathbf{z}, \varepsilon)_{\mathbf{z}=\phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)})_{\varepsilon=0} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} H_0^i(\mathbf{z}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

■

Para construir a mudança de coordenadas simplética $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)$ basta notar que $\mathcal{L}_W I(\mathbf{Z}, \varepsilon) = \phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)$, onde I é a aplicação identidade.

A dependência das funções $\{H_j^i\}$ pode ser facilmente entendida considerando o triângulo de Lie, dado a seguir:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & H_0^0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & H_1^0 \rightarrow H_0^1 \\
 & & & & & & \downarrow \quad \downarrow \\
 & & & & & & H_2^0 \rightarrow H_1^1 \rightarrow H_0^2 \\
 & & & & & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 & & & & & & H_3^0 \rightarrow H_2^1 \rightarrow H_1^2 \rightarrow H_0^3 \\
 & & & & & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow
 \end{array}$$

Os coeficientes da expansão do Hamiltoniano antigo, H , estão na coluna a esquerda, e os coeficientes do novo Hamiltoniano estão sobre a diagonal. A fórmula dada em (4.5) estabelece que para calcular qualquer elemento no triângulo de Lie, é necessário ter as entradas na coluna em cada etapa a esquerda e acima. Por exemplo, para calcular a expansão em série para H^* através dos termos de ordem ε^2 , primeiro calculamos H_0^1 pela fórmula

$$H_0^1 = H_1^0 + \{H_0^0, W_1\},$$

a qual nós dá o termo de ordem ε , e então calculamos

$$H_1^1 = H_2^0 + \{H_1^0, W_1\} + \{H_0^0, W_2\},$$

$$H_0^2 = H_1^1 + \{H_0^1, W_1\}.$$

Então,

$$H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon) = H_0^0(\mathbf{Z}) + \varepsilon H_0^1(\mathbf{Z}) + \frac{\varepsilon^2}{2} H_0^2(\mathbf{Z}) + \dots$$

Vamos agora ver um exemplo que mostra como a transformada de Lie pode simplificar um problema.

Exemplo (Equação de Duffing) O Hamiltoniano associado a equação de Duffing é dado por:

$$H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2) + \frac{\gamma}{4}q^4 \quad (4.13)$$

em coordenadas retangulares (q, p) . Nas variáveis ação ângulo, (r, ϕ) , ele é dado por

$$H = r + \frac{\gamma}{8} r^2 (3 + 4 \cos 2\phi + \cos 4\phi). \quad (4.14)$$

Considerando γ como um pequeno parâmetro e fazendo $\varepsilon = \frac{\gamma}{8}$ temos que

$$H(r, \phi, \varepsilon) = H_0^0(r, \phi) + \varepsilon H_1^0(r, \phi),$$

onde

$$H_0^0 = r, \quad H_1^0 = r^2 (3 + 4 \cos 2\phi + \cos 4\phi). \quad (4.15)$$

Da fórmula (4.5) no Teorema (16) temos que

$$H_0^1 = H_1^0 + \{H_0^0, W_1\}, \quad (4.16)$$

assim,

$$H_0^1 = r^2 (3 + 4 \cos 2\phi + \cos 4\phi) + \frac{\partial W_1}{\partial \phi}. \quad (4.17)$$

Escolha $W = W_1$ tal que H_0^1 tenha 'poucos' termos (esta é uma definição de 'forma normal').

Escolhendo

$$W = W_1 = -r^2 (2 \sin 2\phi + \frac{1}{4} \sin 4\phi),$$

temos que

$$H_0^1 = 3r^2.$$

Com esta definição de W , o Hamiltoniano nas novas coordenadas, (J, θ) , será

$$H(J, \theta, \varepsilon) = J + \frac{3\gamma}{8} J^2 + O(\gamma^2), \quad (4.18)$$

e as equações de movimento serão

$$J = O(\gamma^2), \quad \dot{\theta} = -1 - \frac{3\gamma}{4} J + O(\gamma^2). \quad (4.19)$$

Nestas coordenadas, sem considerar os termos em $O(\gamma^2)$, a solução move-se sobre círculos $J = \text{constante}$ e com velocidade uniforme $-1 - \frac{3\gamma}{4} J$. ■

4.3 A forma normal de Lie

Na seção anterior, aprendemos a calcular a transformada de Lie de uma função Hamiltoniana H , gerada por W , e vimos um exemplo que mostra como a transformada de Lie pode simplificar um problema. Uma pergunta que deve surgir é quanto a existência e obtenção de função W de tal forma que $\mathcal{L}_W H$ esteja numa forma mais simples. Nesta seção, vamos dar a resposta a esta pergunta, desenvolvendo um processo no qual $\mathcal{L}_W H$ tem uma forma mais simples que H , denominada forma normal de Lie de H .

Teorema 17 (Teorema da Perturbação geral) *Sejam $\{\mathcal{P}_i\}_{i=0}^\infty$, $\{\mathcal{L}_i\}_{i=0}^\infty$, e $\{\mathcal{R}_i\}_{i=0}^\infty$ seqüências de espaços vetoriais de funções diferenciáveis definidas sobre um domínio comum O em \mathbb{R}^{2n} com as seguintes propriedades:*

(i) $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, \dots$;

(ii) $H_i^0 \in \mathcal{P}_i$, $i = 0, 1, \dots$;

(iii) $\{\mathcal{P}_i, \mathcal{R}_j\} \subset \mathcal{P}_{i+j}$, $i, j = 0, 1, \dots$;

(iv) para qualquer $D \in \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, \dots$, existem $B \in \mathcal{L}_i$ e $C \in \mathcal{R}_i$ tal que

$$B = D + \{H_0^0, C\}. \quad (4.20)$$

Então existe W , como em (4.3) dado anteriormente, com $W_i \in \mathcal{R}_i$, $i = 1, 2, \dots$, que gera uma mudança de variáveis simplética próxima da identidade, $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{Z}$, tal que $\mathcal{L}_W H$ tem uma expansão em série como em (4.4), com $H_0^i \in \mathcal{L}_i$, $i = 1, 2, \dots$

Demonstração. Vamos fazer a seguinte hipótese indutiva sobre as funções H_j^i , W_i e H_0^i que aparecem no triângulo de Lie:

(I_n) $H_j^i \in \mathcal{P}_{i+j}$ para $1 \leq i+j \leq n$ e $W_i \in \mathcal{R}_i$, $H_0^i \in \mathcal{L}_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Observe que (I_0) é verdadeiro, pois $H_0^0 \in \mathcal{P}_0$ e \mathcal{Q}_0 e \mathcal{R}_0 são conjuntos vazios. Assuma que I_{n-1} é verdadeira. Pela equação (4.5)

$$H_{n-1}^1 = H_n^0 + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} \{H_{n-1-k}^0, W_{k+1}\} + \{H_0^0, W_n\}. \quad (4.21)$$

Por (ii) temos que $H_n^0 \in \mathcal{P}_n$, $H_{n-1-k}^0 \in \mathcal{P}_{n-1-k}$ ($k = 0, 1, \dots, n-2$) e $H_0^0 \in \mathcal{P}_0$, da hipótese de indução tem-se $W_{k+1} \in \mathcal{R}_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, n-2$), logo por (iii) temos que $\{H_{n-1-k}^0, W_{k+1}\} \in \mathcal{P}_n$. Assim de

(4.21) temos

$$H_{n-1}^1 = L^1 + \{H_0^0, W_n\}, \quad (4.22)$$

onde $L^1 \in \mathcal{P}_n$ e é conhecido.

$$\begin{aligned} H_{n-2}^2 &= H_{n-1}^1 + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \{H_{n-1-k}^0, W_{k+1}\} \\ &= L^1 + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \{H_{n-1-k}^0, W_{k+1}\} + \{H_0^0, W_n\}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

e portanto $H_{n-2}^2 = L^2 + \{H_0^0, W_n\}$, com $L^2 \in \mathcal{P}_n$. Analogamente temos

$$H_{n-s}^s = L^s + \{H_0^0, W_n\} \quad (4.24)$$

onde $L^s \in \mathcal{P}_n$ para $s = 1, 2, \dots, n$. Em particular, para $s = n$ segue que

$$H_0^n = L^n + \{H_0^0, W_n\}. \quad (4.25)$$

Pela relação (iv), podemos escolher uma solução $H_0^n \in \mathcal{L}_n$ e $W_n \in \mathcal{R}_n$ da equação (4.25). Segue de (4.24) e da hipótese (ii) que $H_{n-s}^s \in \mathcal{P}_n$ para $s = 1, 2, \dots$. Assim, I_n é verdadeira e o teorema está demonstrado. ■

A equação de Lie (4.20) é a co-razão do problema de perturbação. H_0^0 define um sistema não perturbado quando $\varepsilon = 0$. A aplicação $L = \{H_0^0, \cdot\}$ define um operador linear chamado **operador de Lie**. A idéia é analisar este operador para determinar em que espaços de funções a equação (4.20) é solúvel. Estritamente falando, o Hamiltoniano (4.4) tem seus termos nos espaços \mathcal{P} 's ($H_i^0 \in \mathcal{P}_i$), e a equação na forma normal tem seus termos nos espaços \mathcal{L} 's ($H_i^i \in \mathcal{L}_i$). Os espaços \mathcal{L} 's são menores que os espaços \mathcal{P} 's ($\mathcal{L}_i \subset \mathcal{P}_i$) e portanto, os coeficientes H_0^i são mais simples que os coeficientes H_i^0 . Neste caso dizemos que $H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon)$ é a forma normal de Lie de $H(\mathbf{z}, \varepsilon)$. A transformação é gerada por uma equação diferencial Hamiltoniana com Hamiltoniano W nos espaços \mathcal{R} 's ($W_i \in \mathcal{R}_i$). D é um termo antigo, B é um novo termo e C é um gerador.

Este teorema é formal, ou seja, a convergência da série não foi discutida. Em interessantes casos a série diverge, mas ainda, podemos obter informações valiosas analisando os primeiros termos da forma normal. O seguinte resultado mostra que podemos parar o processo em qualquer ordem,

digamos N , para obter uma mudança simplética a qual é um polinômio em ε e logo é convergente. Da demonstração do teorema acima, é claro que os termos de ordem superior a N na série H^* não são afetados pelo truncamento de H .

Corolário 6 *Seja $N \geq 1$ dado, e sejam $\{\mathcal{P}_i\}_{i=0}^N, \{\mathcal{L}_i\}_{i=0}^N$, e $\{\mathcal{R}_i\}_{i=0}^N$ seqüências de espaços vetoriais de funções diferenciáveis definidas sobre um domínio comum O em \mathbb{R}^{2n} com as seguintes propriedades:*

(i) $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{P}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N;$

(ii) $H_i^0 \in \mathcal{P}_i, \quad i = 0, 1, \dots, N;$

(iii) $\{\mathcal{P}_i, \mathcal{R}_j\} \subset \mathcal{P}_{i+j}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N;$

(iv) *para qualquer $D \in \mathcal{P}_i, i = 1, 2, \dots, N$, existe $B \in \mathcal{L}_i$ e $C \in \mathcal{R}_i$ tal que*

$$B = D + \{H_0^0, C\}. \quad (4.26)$$

Então existe um polinômio W ,

$$W(\mathbf{z}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\varepsilon^i}{i!} W_{i+1}(\mathbf{z}), \quad (4.27)$$

com $W_i \in \mathcal{R}_i, i = 1, 2, \dots, N$, tal que a mudança de variáveis $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)$, onde $\phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)$ é a solução geral de (4.1), transforma o Hamiltoniano convergente

$$H(\mathbf{z}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} H_i^0(\mathbf{z}), \quad (4.28)$$

no Hamiltoniano convergente

$$H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \frac{\varepsilon^i}{i!} H_0^i(\mathbf{z}) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (4.29)$$

com $H_0^i \in \mathcal{L}_i, i = 1, 2, \dots, N$.

4.4 O caso não autônomo

Assuma agora que a função Hamiltoniana depende do tempo, t , e de um pequeno parâmetro ε , isto é, $H = H(\mathbf{z}, t, \varepsilon)$. Use uma função $W = W(\mathbf{z}, t, \varepsilon)$ como uma função Hamiltoniana tendo o parâmetro ε como o tempo e t como um parâmetro simples, isto é,

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\varepsilon} = J\nabla W(\mathbf{z}, t, \varepsilon) \quad (4.30)$$

e considere a solução $\phi(\mathbf{Z}, t, \varepsilon)$ desta equação que satisfaz $\phi(\mathbf{Z}, t, 0) = (\mathbf{Z}, t)$. A aplicação $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{Z}, t, \varepsilon)$ define uma transformação simpléctica próxima da identidade que leva o Hamiltoniano $H = H(\mathbf{z}, t, \varepsilon)$ no Hamiltoniano $K(\mathbf{Z}, t, \varepsilon) = H^*(\mathbf{Z}, t, \varepsilon) + R(\mathbf{Z}, t, \varepsilon)$, onde $H^*(\mathbf{Z}, t, \varepsilon) = H(\phi(\mathbf{z}, t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ é a transformada de Lie de H e R é a função resto.

Suponha que a expansão de H , W , H^* e R em séries de potências de ε sejam

$$H(\mathbf{z}, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} H_i^0(\mathbf{z}, t), \quad (4.31)$$

$$W(\mathbf{z}, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} W_{i+1}(\mathbf{z}, t), \quad (4.32)$$

$$\mathcal{L}_W H(\mathbf{Z}, t, \varepsilon) = H^*(\mathbf{Z}, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} H_0^i(\mathbf{Z}, t), \quad (4.33)$$

$$R(\mathbf{Z}, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} R_0^i(\mathbf{Z}, t). \quad (4.34)$$

Então H^* pode ser calculado pela fórmula (4.5). Veremos agora como calcular a função resto.

Teorema 18 *A função resto é dada por*

$$R(\mathbf{Z}, t, \varepsilon) = - \int_0^{\varepsilon} \mathcal{L}_W \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) (\mathbf{Z}, t, \varepsilon) d\varepsilon. \quad (4.35)$$

Demonstração. Fazendo a mudança de variáveis simpléctica $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{Z}, t, \varepsilon)$ no sistema associado ao Hamiltoniano H , temos que o novo sistema assume a forma

$$\dot{y} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}(\mathbf{Z}, t, \varepsilon) \right)^{-1} J \nabla_x H(\phi(\mathbf{Z}, t, \varepsilon), t, \varepsilon) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}(\mathbf{Z}, t, \varepsilon) \right)^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{Z}, t, \varepsilon) \quad (4.36)$$

Mas, da teoria das transformações simplécticas temos que

$$J \nabla R(\mathbf{Z}, t, \varepsilon) = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}(\mathbf{Z}, t, \varepsilon) \right)^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{Z}, t, \varepsilon). \quad (4.37)$$

$A(\varepsilon) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{Z}, t, \varepsilon)$ é a matriz solução fundamental de

$$\frac{dA}{d\varepsilon} = \left(J \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{z}^2}(\phi(\mathbf{Z}, t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right) A, \quad A(0) = I. \quad (4.38)$$

Diferenciando

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{Z}, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = J \nabla W(\phi(\mathbf{Z}, t, \varepsilon), t, \varepsilon)$$

com respeito a t mostra-se que a matriz

$$B(\varepsilon) = \frac{\partial \phi(\mathbf{Z}, t, \varepsilon)}{\partial t}$$

satisfaz

$$\frac{dB}{d\varepsilon} = \left(J \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{z}^2}(\phi(\mathbf{Z}, t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right) B + J \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}(\phi(\mathbf{Z}, t, \varepsilon), t, \varepsilon). \quad (4.39)$$

Como $\phi(\mathbf{Z}, t, 0) = y$, $B(0) = 0$ e também temos que

$$B(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon A(s) A(s)^{-1} J \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}(\phi(\mathbf{Z}, t, \varepsilon), t, \varepsilon) ds; \quad (4.40)$$

além disso,

$$\begin{aligned} J \nabla R(\mathbf{Z}, t, \varepsilon) &= - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}(\mathbf{Z}, t, \varepsilon) \right)^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{Z}, t, \varepsilon) \\ &= -A(\varepsilon)^{-1} B(\varepsilon) \\ &= - \int_0^\varepsilon A(s)^{-1} J \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{z} \partial t}(\phi(\mathbf{Z}, t, \varepsilon), t, \varepsilon) ds \\ &= - \int_0^\varepsilon J A(s)^T \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{z} \partial t}(\phi(\mathbf{Z}, t, \varepsilon), t, \varepsilon) ds \\ &= -J \frac{\partial}{\partial \mathbf{Z}} \int_0^\varepsilon \frac{\partial W}{\partial t}(\phi(\mathbf{Z}, t, \varepsilon), t, \varepsilon) ds \\ &= -J \frac{\partial}{\partial \mathbf{Z}} \int_0^\varepsilon \mathcal{L}_W \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) (\mathbf{Z}, t, \varepsilon) ds. \end{aligned}$$

Com isso a demonstração está concluída. ■

Seja

$$S = S(\mathbf{z}, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} S_i^0(\mathbf{z}, t), \quad (4.41)$$

onde $S_i^0 = -\frac{\partial W_{i-1}}{\partial t}$. Calcule a transformada de Lie de S pela relação (4.5) e obtemos

$$\mathcal{L}_W(S) = S^* = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} S_i^0(\mathbf{z}, t). \quad (4.42)$$

Então $R_0^i = S_0^{i-1}$.

Por exemplo, vamos calcular a expansão em série de $K = H^* + R$ até os termos da ordem ε^2 .

Ponha $K_0^0 = H_0^0$ e calcule K_0^1 pela fórmula

$$K_0^1 = H_0^1 + R_0^1 = H_1^0 + \{H_0^0, W_1\} - \frac{\partial W_1}{\partial t},$$

que nos dá o termo de ordem ε . Calcule

$$H_1^1 = H_1^0 + \{H_1^0, W_1\} + \{H_0^0, W_2\}, \quad H_0^2 = H_1^1 + \{H_0^1, W_1\},$$

$$R_0^2 = -\frac{\partial W_1}{\partial t} - \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial t}, W_1 \right\},$$

temos que $K_0^2 = H_0^2 + R_0^2$. Então

$$K(\mathbf{Z}, t, \varepsilon) = K_0^0(\mathbf{Z}, t) + K_0^1(\mathbf{Z}, t) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 K_0^2(\mathbf{Z}, t) + \dots$$

O teorema da perturbação geral no caso não autônomo assume a forma:

Teorema 19 (Teorema da perturbação geral no caso não autônomo) *Sejam $\{\mathcal{P}_i\}_{i=0}^\infty, \{\mathcal{L}_i\}_{i=0}^\infty$, e $\{\mathcal{R}_i\}_{i=0}^\infty$ seqüências de espaços vetoriais de funções diferenciáveis definidas sobre um domínio comum O em $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$. Seja $\dot{\mathcal{R}}_i$ o espaço das derivadas das funções de \mathcal{R}_i . Assuma que:*

(i) $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, \dots$;

(ii) $H_i^0 \in \mathcal{P}_i$, $i = 0, 1, \dots$;

(iii) $\{\mathcal{P}_i, \mathcal{R}_j\} \subset \mathcal{P}_{i+j}$ e $\{\mathcal{P}_i, \dot{\mathcal{R}}_j\} \subset \mathcal{P}_{i+j}$, $i, j = 0, 1, \dots$;

(iv) para qualquer $D \in \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, \dots$, existem $B \in \mathcal{L}_i$ e $C \in \mathcal{R}_i$ tal que

$$B = D + \{H_0^0, C\} - \frac{\partial C}{\partial t}. \quad (4.43)$$

Então existe W , como em (4.32) dado anteriormente, com $W_i \in \mathcal{R}_i, i = 1, 2, \dots$, que gera uma mudança de variáveis simplética próxima da identidade, $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{Z}$, tal que $\mathcal{L}_W H$ tem uma expansão em série como em (4.33), com $H_0^i \in \mathcal{L}_i, i = 1, 2, \dots$

A idéia da demonstração é praticamente a mesma do caso autônomo. Uma das mudanças é que na calculo de K , usamos dois triângulos de Lie, um para o cálculo de H^* e outro para o cálculo de S . Para ver detalhes sobre a demonstração o leitor pode consultar Meyer [25].

4.5 Unicidade da forma normal de Lie

Seja $\{\mathcal{P}\}_{i=0}^\infty$ uma família de espaços vetoriais de funções diferenciáveis definidas numa vizinhança da origem de \mathbb{R}^{2n} . Suponhamos que $\{H_0^0, f\} \in \mathcal{P}_i$ para cada $f \in \mathcal{P}_i$ ($i = 0, 1, \dots$) e considere

o operador linear

$$L_i : \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_i, \quad f \mapsto \{H_0^0, f\} \quad (i = 0, 1, \dots). \quad (4.44)$$

Dizemos que L_i é simples se $\mathcal{P}_i = \mathcal{L}_i \oplus \mathcal{R}_i$, onde $\mathcal{L}_i = \ker L_i$ e $\mathcal{R}_i = \text{Im} L_i$.

Um dos importantes casos onde podemos aplicar o Teorema 17 é quando o operador L_i definido acima é simples. Neste caso a equação de Lie (4.24) tem uma única solução. Isto não é suficiente para garantir a unicidade da forma normal. De fato, precisamos de uma condição extra. Usando as notações acima provaremos o seguinte lema:

Lema 3 *Se L_i é simples então, para todo $D \in \mathcal{P}_i$ existe $B \in \mathcal{L}_i$ e $C \in \mathcal{R}_i$ tal que*

$$B = D + \{H_0^0, C\}.$$

Além disso, B e C são únicos.

Demonstração. Dado $D \in \mathcal{P}_i$ existem $B \in \mathcal{L}_i$ e $D' \in \mathcal{R}_i$ tal que $D = B + D'$. Tomando $\bar{C} \in \mathcal{P}_i$ satisfazendo $L_i(\bar{C}) = -D'$ temos que existem $C' \in \mathcal{L}_i$ e $C \in \mathcal{R}_i$ com $\bar{C} = C' + C$, donde segue que $B = D + L_i(C)$. Isto prova a existência de B e C . Para a unicidade, se $B_1 \in \mathcal{L}_i$ e $C_1 \in \mathcal{R}_i$ também satisfazem a equação de Lie, isto é, $B_1 = D + \{H_0^0, C_1\}$, então $B_1 - B = L_i(C_1 - C)$, com isto, temos que $B_1 - B, C_1 - C \in \mathcal{L}_i \cap \mathcal{R}_i$, donde concluímos que $B_1 = B$ e $C_1 = C$. ■

Vamos agora ver um teorema que diz em que condições temos a unicidade da forma normal de Lie.

Teorema 20 *Sejam $\{\mathcal{P}_i\}_{i=0}^\infty, \{\mathcal{L}_i\}_{i=0}^\infty$, e $\{\mathcal{R}_i\}_{i=0}^\infty$ seqüências espaços vetoriais de funções diferenciáveis definidas sobre um domínio comum O em \mathbb{R}^{2n} com as seguintes propriedades:*

- (i) $H_i^0 \in \mathcal{P}_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots;$
- (ii) $\{\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j\} \subset \mathcal{P}_{i+j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots$

Então existe W com uma expansão formal da forma (4.5) com $W_i \in \mathcal{R}_i$ ($i = 1, 2, \dots$), tal que W gera uma mudança de coordenadas, $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{Z}, \varepsilon)$, simplética próxima da identidade a qual transforma o Hamiltoniano $H(\mathbf{z}, \varepsilon)$ com série formal (4.2) no Hamiltoniano $H^(\mathbf{Z}, \varepsilon)$ com série formal dada por (4.4) com $H_0^i \in \mathcal{L}_i, i = 1, 2, \dots$. Além disso, se*

(iii) $\{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j\} = 0, i, j = 1, 2, \dots,$

então os termos da forma normal são únicos.

Desde que $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{P}_i$, o subespaço \mathcal{L}_i é, em princípio mais simples que \mathcal{P}_i , o teorema anterior diz que estamos simplificando o Hamiltoniano. Os coeficientes H_0^i devem, em princípio, ser mais simples que os coeficientes H_i^0 . Dizemos que $H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon)$ está na forma normal de Lie.

4.6 Forma normal num equilíbrio

Considere um Hamiltoniano analítico, H , o qual tem uma solução de equilíbrio na origem de \mathbb{R}^{2n} . Então H tem um desenvolvimento em série de Taylor em torno da origem da forma:

$$H(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i(\mathbf{z}), \quad (4.45)$$

onde H_i é um polinômio homogêneo de grau $i + 2$. Assim, $H_0(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T S \mathbf{z}$, onde $S \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é simétrica. A equação linearizada do sistema associado a (4.45) em torno do ponto de equilíbrio $\mathbf{z} = 0$ é

$$\dot{\mathbf{z}} = A \mathbf{z}, \quad (4.46)$$

onde $A = JS$. A solução geral de (4.46) é $\varphi(\mathbf{z}, t) = e^{At} \mathbf{z}$. Para o estudo das soluções de (4.45) próximo da solução de equilíbrio será importante colocar as equações do movimento na forma normal.

Nesta seção usaremos as notações $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}\mathbb{Z}_+^{2n} = \{m = (m_1, \dots, m_{2n}) / m_i \in \mathbb{Z}, m_i \geq 0\}$ e $|m| = m_1 + \dots + m_{2n}$. Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ e $m \in \mathcal{Z}$ definimos $\mathbf{z}^m = z_1^{m_1} \dots z_{2n}^{m_{2n}}$ e $k_m = k_{m_1 \dots m_{2n}}$.

4.6.1 O caso onde a matriz da parte linear é simples

No caso em que a matriz da parte linear é simples, o seguinte teorema nos fornece uma caracterização da forma normal de Lie:

Teorema 21 Se $A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é simples, então existe uma mudança formal de coordenadas simpléticas,

$$\mathbf{z} = \phi(\mathbf{z}) = \mathbf{Z} + \dots, \quad (4.47)$$

a qual transforma o Hamiltoniano (4.45) no Hamiltoniano

$$H^*(\mathbf{Z}) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(\mathbf{Z}), \quad (4.48)$$

onde H^i é um polinômio homogêneo de grau $i + 2$ tal que

$$\{H^i, H_0\} = 0, \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (4.49)$$

isto é, H^i é uma integral primeira para o sistema linearizado (4.46).

Demonstração. Se ε é um número real não nulo então, $\mathbf{z} = \varepsilon \mathbf{u}$ define uma mudança de coordenadas ε^{-2} -simplética. O novo Hamiltoniano é

$$\tilde{H}(\mathbf{u}, \varepsilon) = \varepsilon^{-2} H(\varepsilon \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} H_i^0(\mathbf{u}),$$

onde $H_i^0(\mathbf{u}) = i! H_i(\mathbf{u})$.

Seja \mathcal{P}_i o espaço linear de todos os polinômios homogêneos de grau $i + 2$ e seja $L_i : \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_i$ a aplicação linear definida por $L_i(G) = \{H_0^0, G\}$. Sejam $\mathcal{L}_i = \ker L_i$ e $\mathcal{R}_i = \text{Im} L_i$. Vamos caracterizar estes subespaços.

Por hipótese, a matriz A da parte linear é simples e, portanto, diagonalizável. Sejam v_1, \dots, v_{2n} uma base de autovetores para A correspondente aos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$.

Qualquer $K \in \mathcal{P}_i$ pode ser escrito na forma:

$$K(\mathbf{u}) = \sum_{|m|=i} k_m \mathbf{u}^m = \sum_{m_1 + \dots + m_{2n} = i+2} k_{m_1 \dots m_{2n}} u_1^{m_1} \dots u_{2n}^{m_{2n}},$$

onde $\mathbf{u} = u_1 v_1 + \dots + u_{2n} v_{2n}$ e $m \in \mathbb{Z}$. Isto significa que o conjunto dos monômios

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}^m = u_1^{m_1} \dots u_{2n}^{m_{2n}} / |m| = i + 2\}$$

forma uma base para o espaço \mathcal{P}_i . Desde que $A\mathbf{u} = \lambda_1 u_1 v_1 + \dots + \lambda_{2n} u_{2n} v_{2n}$ e que $L_i(G)(\mathbf{u}) = -DG(\mathbf{u})A\mathbf{u}$, temos que

$$L_i(\mathbf{u}^m) = - \langle \lambda, m \rangle \mathbf{u}^m,$$

onde usamos a notação $\langle \lambda, m \rangle = m_1 \lambda_1 + \dots + m_{2n} \lambda_{2n}$. Isto diz que os elementos de \mathcal{B} são autovetores de L_i com autovalores $-\langle \lambda, m \rangle$, com isto, temos que

$$\mathcal{L}_i = \{\mathbf{u}^m / |m| = i+2 \text{ e } \langle \lambda, m \rangle = 0\} \text{ e } \mathcal{R}_i = \{\mathbf{u}^m / |m| = i+2 \text{ e } \langle \lambda, m \rangle \neq 0\}.$$

Obviamente, $\mathcal{P}_i = \mathcal{L}_i \oplus \mathcal{R}_i$, portanto o teorema anterior aplica-se e garante a existência de uma função geradora $W(\mathbf{u}, \varepsilon)$, com $W_i \in \mathcal{R}_i$ tal que o Hamiltoniano transformado

$$\tilde{H}(\mathbf{v}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} H_0^i(\mathbf{v})$$

tem os termos $H_0^i \in \mathcal{L}_i$, isto é, $\{H_0^i, H_0\} = L_i(H_0^i) = 0$, $i = 0, 1, \dots$

A aplicação $\mathbf{Z} = \varepsilon \mathbf{v}$ é ε^{-2} -simplética, assim o novo Hamiltoniano é dado por

$$H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon) = \varepsilon^2 \tilde{H}(\varepsilon^{-1} \mathbf{Z}, \varepsilon) = \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \varepsilon^{-i-2} H_0^i(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} H_0^i(\mathbf{z}).$$

Desde que a composição

$$\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{u} = \varepsilon^{-1} \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{Z} = \varepsilon \mathbf{v}$$

é simplética, sua inversa $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{Z})$ define uma transformação simplética da forma $\mathbf{z} = \mathbf{Z} + \dots$ e é tal que o Hamiltoniano transformado $H^*(\mathbf{Z}) = H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon)$ tem a expansão

$$H^*(\mathbf{Z}) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(\mathbf{Z}),$$

onde $H^i = \frac{1}{i!} H_0^i$, satisfaz a equação $\{H^i, H_0\} = 0$ para $i = 0, 1, \dots$. Com isto fica demonstrado o teorema. ■

Como corolário do teorema acima, re-obtemos a forma normal de Birkhoff, vista no capítulo anterior.

Corolário 7 (Forma normal de Birkhoff) *Assuma que a parte quadrática do Hamiltoniano (4.45) é da forma*

$$H_0(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (z_j^2 + z_{j+n}^2), \quad (4.50)$$

onde os ω_j 's são linearmente independente sobre os inteiros. Então, existe uma mudança formal de coordenadas simplética $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z} + \dots$ a qual transforma o Hamiltoniano (4.45) no Hamiltoniano (4.48), onde H^i é um polinômio homogêneo de grau $i+2$ nas variáveis

$$r_1 = \frac{1}{2} (Z_1^2 + Z_{n+1}^2), \dots, r_n = \frac{1}{2} (Z_n^2 + Z_{2n}^2). \quad (4.51)$$

Além disso, neste caso, a forma normal é única.

Demonstração. Note que os autovalores da matriz do sistema linearizado são $\lambda_j = \omega_j i$, $j = 1, \dots, n$, os quais são distintos e, portanto, a matriz do sistema linearizado é diagonalizável sobre \mathbf{C} , ou equivalentemente, é simples. Considere a seguinte mudança de coordenadas $2i$ -simplética:

$$x_j = z_j + iz_{n+j}, \quad \bar{x}_j = z_j - iz_{n+j}, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (4.52)$$

A parte quadrática do Hamiltoniano nas novas coordenadas é dado por:

$$\mathcal{H}_0(x_j, \bar{x}_j) = 2iH_0\left(\frac{x_j + \bar{x}_j}{2}, \frac{x_j - \bar{x}_j}{2i}\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \bar{x}_j. \quad (4.53)$$

Denotaremos por $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 + \mathcal{H}^1 + \dots$ o Hamiltoniano normalizado nas variáveis complexas (4.52).

Pelo teorema anterior (teorema 21) podemos assumir que \mathcal{H}^i é da forma $\mathcal{H}^j(\mathbf{x}) = \sum_{|m|=j+2} k_m \mathbf{x}^m$, onde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. A solução geral do sistema linear é $x_j(t) = x_{j,0} e^{\lambda_j t}$, $\bar{x}_j(t) = \bar{x}_{j,0} e^{-\lambda_j t}$ para $j = 1, \dots, n$. A fórmula (4.49) implica que

$$\sum k_m e^{t[(m_1 - m_{n+1})\lambda_1 + \dots + (m_n - m_{2n})\lambda_n]} \mathbf{y}^m \quad (4.54)$$

é constante em t e isto implica que $(m_1 - m_{n+1})\lambda_1 + \dots + (m_n - m_{2n})\lambda_n = 0$. Mas desde que os λ_j são independentes sobre os inteiros, isto implica que $m_1 = m_{n+1}, \dots, m_n = m_{2n}$. Isto é, \mathcal{H}^i é uma função somente dos n produtos $x_1 \bar{x}_1, \dots, x_n \bar{x}_n$.

Pelo comentários acima, o kernel consiste daquelas funções que dependem somente de $r_1 = x_1 \bar{x}_1, \dots, r_n = x_n \bar{x}_n$ e não das variáveis ação-ângulo. Portanto, a condição extra (iii) do teorema 20 é satisfeita, e assim a forma normal é única.

Agora, aplicando a mudança de coordenadas $\frac{1}{2i}$ -simplética, inversa de (4.52), temos que H^j é um polinômio homogêneo de grau $j + 2$ nas variáveis (4.51). ■

4.6.2 O caso autônomo geral

Vamos ver agora como obter a forma normal no caso autônomo geral. O método de Elphick [10] é baseado no seguinte lema de Álgebra Linear conhecido como método alternativo de Fredholm e um produto interno definido sobre os polinômios homogêneos.

Lema 4 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita o qual possui um produto interno. Seja $A : V \rightarrow V$ uma transformação linear e A^* sua adjunta. Então $V = R \oplus K^*$ onde R é a imagem de A e K^* é o kernel de A^* .*

Demonstração. Inicialmente, observe que se $\mathbf{z} \in R \cap K^*$ então $A^*\mathbf{z} = 0$ e existe $\mathbf{u} \in V$ tal que $A\mathbf{u} = \mathbf{z}$, assim $0 = \langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{z} \rangle = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$, donde segue que $\mathbf{z} = 0$ e, portanto, $R \cap K^* = \{0\}$. Seja K o núcleo de A . Sabemos que $\dim V = \dim R + \dim K$, mas como $\dim K = \dim K^*$ e $\dim R \cap K^* = 0$ temos que $\dim V = \dim R + \dim K^* = \dim(R + K^*)$. Logo $V = R \oplus K^*$. ■

Seja $\mathcal{P} = \mathcal{P}_i$ o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau i na variável $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Assim se $P \in \mathcal{P}$, tem-se

$$P(\mathbf{z}) = \sum_{|m|=i} k_m \mathbf{z}^m = \sum_{|m|=i} k_{m_1 m_2 \dots m_{2n}} z_1^{m_1} \dots z_{2n}^{m_{2n}}. \quad (4.55)$$

Defina o operador diferencial $P(\partial)$

$$P(\partial) = \sum_{|m|=i} k_m \frac{\partial^m}{\partial \mathbf{z}^m}, \quad (4.56)$$

onde introduzimos a notação

$$\frac{\partial^m}{\partial \mathbf{z}^m} = \frac{\partial^{m_1}}{\partial z_1^{m_1}} \frac{\partial^{m_2}}{\partial z_2^{m_2}} \dots \frac{\partial^{m_{2n}}}{\partial z_{2n}^{m_{2n}}}. \quad (4.57)$$

Seja $Q \in \mathcal{P}$,

$$Q(\mathbf{z}) = \sum_{|\tilde{m}|=i} \tilde{k}_{\tilde{m}} \mathbf{z}^{\tilde{m}}$$

um outro polinômio homogêneo e defina o seguinte produto interno sobre \mathcal{P}

$$\langle P, Q \rangle = P(\partial)Q(\mathbf{z}). \quad (4.58)$$

Para verificar que (4.58) define de fato um produto interno observe que

$$\frac{\partial^m \mathbf{z}^{\tilde{m}}}{\partial \mathbf{z}^m} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq \tilde{m} \\ m! = m_1 \dots m_{2n}!, & \text{se } m = \tilde{m}, \end{cases}$$

assim

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{|m|=i} m! k_m \tilde{k}_{\tilde{m}}. \quad (4.59)$$

Seja $A = JS$ uma matriz Hamiltoniana onde S é a matriz simétrica do Hamiltoniano quadrático H_0 ; assim, $H_0(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T S\mathbf{z}$. Seja o operador linear $L_A : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, onde

$$L_A(P) = \{H_0^0, P\} = -D_x P(\mathbf{z})A\mathbf{z} = -\frac{d}{dt}P(e^{At})_{t=0}. \quad (4.60)$$

Lema 5 *Seja $A : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ como acima. Então o adjunto de L_A com respeito ao produto interno definido acima é L_{A^T} .*

Demonstração. Devemos mostrar que

$$\langle P, L_A(Q) \rangle = \langle L_{A^T}(P), Q \rangle, \quad (4.61)$$

para todo $P, Q \in \mathcal{P}_i$. Inicialmente observe que se $y = Bx$ então

$$\frac{\partial F(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^j} = \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{\partial F(\mathbf{z})}{\partial y^i} \right) \left(\frac{\partial y^i}{\partial \mathbf{z}^j} \right) = \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{\partial F(\mathbf{z})}{\partial y^i} \right) B_{ji},$$

donde segue que $\partial_{\mathbf{z}} = B^T \partial_y$. Daí,

$$\langle P, Q \circ B \rangle = P(\partial_x)Q(Bx) = P(B^T \partial_y)Q(\mathbf{z}) = \langle P \circ B^T, Q \rangle.$$

Isto vale qualquer que seja $B \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$, em particular, fazendo $B = e^{At}$ temos que $\langle P, Q \circ e^{At} \rangle = \langle P \circ e^{A^T t}, Q \rangle$. Derivando esta relação com respeito a t e depois fazendo $t = 0$ obtemos o resultado desejado. ■

Teorema 22 *Existe uma mudança formal de coordenadas simplética, $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z} + \dots$, a qual transforma o Hamiltoniano (4.45) em*

$$H^*(\mathbf{Z}) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(\mathbf{Z}), \quad (4.62)$$

onde H^i é um polinômio homogêneo de grau $i + 2$ tal que

$$\{H_0^T, H^i\} = 0, \quad (4.63)$$

para todo $i = 0, 1, \dots$, onde H_0^T é o Hamiltoniano do sistema $\dot{\mathbf{z}} = A^T \mathbf{z}$, sendo A a matriz do sistema linearizado associado a H .

Demonstração. Se ε é um número real não nulo então, $\mathbf{z} = \varepsilon \mathbf{u}$ define uma mudança de coordenadas ε^{-2} -simplética. O novo Hamiltoniano é

$$\tilde{H}(\mathbf{u}, \varepsilon) = \varepsilon^{-2} H(\varepsilon \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} H_i^0(\mathbf{u}),$$

onde $H_i^0(\mathbf{u}) = i! H_i(\mathbf{u})$.

Seja \mathcal{P}_i o espaço linear de todos os polinômios homogêneos de grau $i + 2$ e seja $L_A : \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_i$ a aplicação linear definida por $L_A(G) = \{H_0^0, G\}$. Pelos lemas 2 e 3 temos que $\mathcal{P}_i = \mathcal{L}_i \oplus \mathcal{R}_i$, onde $\mathcal{R}_i = \text{Im}(L_A)$ e $\mathcal{L}_i = \text{Ker}(L_{A^T})$. Se $D \in \mathcal{P}_i$, como $\mathcal{P}_i = \mathcal{L}_i \oplus \text{Im}(L_{A^T})$, existem $B \in \mathcal{L}_i$ e $C' \in \text{Im}(L_{A^T})$ tal que $D = B + C'$. Seja $\bar{C} \in \mathcal{P}_i$ tal que $L_{A^T}(\bar{C}) = -C'$. Como $\bar{C} \in \mathcal{P}_i$ existem $C \in \mathcal{R}_i$ e $C'' \in \mathcal{L}_i$ tal que $\bar{C} = C + C''$, assim, $L_{A^T}(\bar{C}) = L_{A^T}(C)$, donde seque que $B = D + L_{A^T}(C)$. Logo a condição (iv) do teorema da perturbação geral é satisfeita. A verificação das demais condições são simples e portanto, existe uma mudança formal de coordenadas simplética, $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}$, tal que o Hamiltoniano nas novas coordenadas é

$$\tilde{H}(\mathbf{v}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} H_0^i(\mathbf{v})$$

tem os termos $H_0^i \in \mathcal{L}_i$, isto é, $\{H_0^T, H_0^i\} = L_{A^T}(H_0^i) = 0$, $i = 0, 1, \dots$

A aplicação $\mathbf{Z} = \varepsilon \mathbf{v}$ é ε^{-2} -simplética, assim o novo Hamiltoniano é dado por

$$H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon) = \varepsilon^2 \tilde{H}(\varepsilon^{-1} \mathbf{Z}, \varepsilon) = \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \varepsilon^{-i-2} H_0^i(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} H_0^i(\mathbf{z}).$$

Desde que a composição

$$\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{u} = \varepsilon^{-1} \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{Z} = \varepsilon \mathbf{v}$$

é simplética, sua inversa $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{Z})$ define uma transformação simplética da forma $\mathbf{z} = \mathbf{Z} + \dots$ e é tal que o Hamiltoniano transformado $H^*(\mathbf{Z}) = H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon)$ tem a expansão

$$H^*(\mathbf{Z}) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(\mathbf{Z}),$$

onde $H^i = \frac{1}{i!} H_0^i$, satisfaz a equação $\{H_0^T, H^i\} = 0$ para $i = 0, 1, \dots$. Com isso, fica demonstrado o teorema. ■

4.6.3 O caso periódico

Na seção anterior vimos alguns teoremas que dão informações sobre a forma normal de sistemas Hamiltonianos autônomos na vizinhança de uma posição de equilíbrio. Vamos agora generalizar o teorema anterior para o caso de um sistema Hamiltoniano periódico.

Considere o Hamiltoniano $H = H(\mathbf{z}, t)$ analítico em \mathbf{z} e 2π -periódico em t , isto é, $H(\mathbf{z}, t) = H(\mathbf{z}, t + 2\pi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, que tem uma solução de equilíbrio na origem de \mathbb{R}^{2n} . Então H tem um desenvolvimento em série de Taylor em torno da origem da forma

$$H(\mathbf{z}, t) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i(\mathbf{z}, t), \quad (4.64)$$

onde H_i é um polinômio homogêneo de grau $i + 2$ em \mathbf{z} e 2π -periódico em t . Como consequência do teorema de Floquet-Liapunov (corolário 4) temos que existe uma mudança de variáveis simplética e 2π -periódica que transforma a parte linear do sistema constante em t , assim, podemos assumir que $H_0 = H_0(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T S \mathbf{z}$, onde $S \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é simétrica. A equação linearizada em torno do ponto de equilíbrio $\mathbf{z} = 0$ é

$$\dot{\mathbf{z}} = A \mathbf{z}, \quad (4.65)$$

onde $A = JS$.

Teorema 23 *Seja $H_0^T(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T R \mathbf{z}$ o Hamiltoniano associado ao sistema $\dot{\mathbf{z}} = A^T \mathbf{z}$. Então existe uma mudança formal de coordenadas simplética e 2π -periódica, $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{Z}, t) = \mathbf{Z} + \dots$, a qual transforma o Hamiltoniano (4.64) no Hamiltoniano*

$$H^*(\mathbf{Z}, t) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(\mathbf{Z}, t), \quad (4.66)$$

onde H^i é um polinômio homogêneo de grau $i + 2$ em \mathbf{Z} e 2π -periódica em t tal que

$$\{H_0^T, H^i\} - \frac{\partial H^i}{\partial t} = 0, \quad (4.67)$$

para $i = 0, 1, \dots$

Demonstração. Se ε é um número real não nulo então, $\mathbf{z} = \varepsilon \mathbf{u}$ define uma mudança de coordenadas ε^{-2} -simplética. O novo Hamiltoniano é

$$\tilde{H}(\mathbf{u}, \varepsilon) = \varepsilon^{-2} H(\varepsilon \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} H_i^0(\mathbf{u}),$$

onde $H_i^0(\mathbf{u}) = i!H_i(\mathbf{u})$.

Seja \mathcal{P}_i o espaço linear de todos os polinômios homogêneos de grau $i+2$ em \mathbf{z} e 2π -periódico em t . Seja $L_i : \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_i$ a aplicação linear definida por $L_i(G) = \{H_0^0, G\} - \frac{\partial G}{\partial t}$. Verifica-se que o adjunto de L_i , que denotaremos por L_i^* , é dado por $L_i^*(F) = \{H_0^T, F\} - \frac{\partial F}{\partial t}$. Pelo lemas 2 da seção anterior temos que $\mathcal{P}_i = \mathcal{L}_i \oplus \mathcal{R}_i$, onde $\mathcal{R}_i = \text{Im}(L_i)$ e $\mathcal{L}_i = \text{Ker}(L_i^*)$. Se $D \in \mathcal{P}_i$, como $\mathcal{P}_i = \mathcal{L}_i \oplus \text{Im}(L_i^*)$, existem $B \in \mathcal{L}_i$ e $C' \in \text{Im}(L_i^*)$ tal que $D = B + C'$. Seja $\bar{C} \in \mathcal{P}_i$ tal que $L_i^*(\bar{C}) = -C'$. Como $\bar{C} \in \mathcal{P}_i$ existem $C \in \mathcal{R}_i$ e $C'' \in \mathcal{L}_i$ tal que $\bar{C} = C + C''$, assim, $L_i^*(\bar{C}) = L_i^*(C)$, donde segue que $B = D + L_i^*(C) = D + \{H_0^T, C\} - \frac{\partial C}{\partial t}$. Logo a condição (iv) do teorema da perturbação geral no caso não autônomo é satisfeita. A verificação das demais condições são simples e portanto, existe uma mudança formal de coordenadas simplética, $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}$, tal que o Hamiltoniano nas novas coordenadas é

$$\tilde{H}(\mathbf{v}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} H_0^i(\mathbf{v})$$

tem os termos $H_0^i \in \mathcal{L}_i$, isto é, $\{H_0^T, H_0^i\} = L_{A^T}(H_0^i) = 0$, $i = 0, 1, \dots$

A aplicação $\mathbf{Z} = \varepsilon \mathbf{v}$ é ε^{-2} -simplética, assim o novo Hamiltoniano é dado por

$$H^*(\mathbf{Z}, \varepsilon) = \varepsilon^2 \tilde{H}(\varepsilon^{-1} \mathbf{Z}, \varepsilon) = \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \varepsilon^{-i-2} H_0^i(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} H_0^i(\mathbf{z}).$$

Desde que a composição

$$\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{u} = \varepsilon^{-1} \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{Z} = \varepsilon \mathbf{v}$$

é simplética, sua inversa $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{Z})$ define uma transformação simplética da forma $\mathbf{z} = \mathbf{Z} + \dots$ e é tal que o Hamiltoniano transformado $H^*(\mathbf{Z}, t) = H^*(\mathbf{Z}, t, \varepsilon)$ tem a expansão

$$H^*(\mathbf{Z}, t) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(\mathbf{Z}, t),$$

onde $H^i = \frac{1}{i!} H_0^i$, satisfaz a equação $\{H_0^T, H^i\} - \frac{\partial H^i}{\partial t} = L_i^*(H^i) = 0$ para $i = 0, 1, \dots$. Com isto fica demonstrado o teorema. ■

Corolário 8 *Suponha que a matriz A do sistema (4.65) é uma matriz simples com autovalores $\lambda_j = \omega_j i$, $j = 1, \dots, n$. Assuma que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e i (ou $\omega_1, \dots, \omega_n$ e 1) são linearmente independentes sobre os inteiros, ou equivalentemente, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ não apresentam relações de ressonância de qualquer*

ordem. Então existe uma mudança de coordenadas simplética (formal) e T -periódica, $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{z}) = \mathbf{Z} + \dots$ que transforma o Hamiltoniano (4.64) no Hamiltoniano autônomo

$$H^*(\mathbf{Z}) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(\mathbf{Z}), \quad (4.68)$$

onde H^i é um polinômio homogêneo de grau $i + 2$ em \mathbf{Z} tal que

$$\{H_0, H^i\} = 0, \quad (4.69)$$

para todo $i = 0, 1, \dots$. O Hamiltoniano H^* é função apenas das n variáveis r_1, \dots, r_n definidas em (4.51), isto é, ele está na forma normal de Birkhoff.

Demonstração. Inicialmente, façamos a mudança de coordenadas $2i$ -simplética definida em (4.52) e usando as mesmas notações do corolário 7, temos que a parte linear do sistema nas novas variáveis assume a forma:

$$\mathcal{H}_0(x_j, \bar{x}_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \bar{x}_j. \quad (4.70)$$

Seja $A = A^T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n)$. Um termo típico da forma normal dada no teorema anterior é da forma:

$$h(\mathbf{x}, t) = a_m e^{ikt} \mathbf{x}^m.$$

Da relação (4.67) segue que $h(e^{A^T t} \mathbf{x}, t) = a_m e^{ik + (m_1 - m_{n+1} \lambda_1 + \dots + (m_n - m_{2n}) \lambda_n) \lambda_n} \mathbf{x}^m$ é constante em t , donde $ik + (m_1 - m_{n+1} \lambda_1 + \dots + (m_n - m_{2n}) \lambda_n) \lambda_n = 0$. Da hipótese de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e i serem linearmente independentes sobre os inteiros segue que $k = 0, m_1 = m_{n+1}, \dots, m_n = m_{2n}$. Logo o Hamiltoniano \mathcal{H} nas variáveis complexas x_j, \bar{x}_j é função das n variáveis $r_j = x_j \bar{x}_j$, $j = 1, \dots, n$. Fazendo a mudança de coordenadas inversa de (4.52), temos que o Hamiltoniano nas variáveis z_1, \dots, z_n é função apenas das n variáveis r_1, \dots, r_n definidas em (4.51). Com isso, o Hamiltoniano descrito está na forma normal de Birkhoff e o teorema está demonstrado. ■

4.7 Aplicações a funções Hamiltonianas autônomas com dois graus de liberdade

Nesta seção usaremos o método de Lie para encontrar certas restrições nos coeficientes do Hamiltoniano normalizado.

Considere a função Hamiltoniana autônoma com dois graus de liberdade

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + H_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \dots \quad (4.71)$$

onde os H_s são polinômios homogêneos de grau s nas variáveis (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Suponha a origem é uma solução de equilíbrio para o sistema Hamiltoniano associado a H e que os autovalores da matriz do sistema linearizado são λ_1 e λ_2 . Vamos obter a forma normal de Lie na vizinhança da origem no caso em que λ_1 e λ_2 são imaginários puros distintos e quando $\lambda_1 = 0$ e λ_2 é imaginário puro.

4.7.1 O caso em que os autovalores são imaginários puros e distintos

Suponha que λ_1 e λ_2 são imaginários puros distintos, digamos, $\lambda_1 = \omega_1 i$ e $\lambda_2 = \omega_2 i$ com $\omega_1 \neq \omega_2$. Neste caso, de acordo com o corolário 5, existe transformação simplética tal que H_2 escrito nas novas coordenadas, que por simplicidade usaremos a mesma notação, assume a forma:

$$H_0 = \frac{\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_2^2 + p_2^2). \quad (4.72)$$

Se A é a matriz do sistema linear associado a (4.72), verifica-se que $A^T = -A$, donde segue que:

$$H_0^T(\mathbf{z}) = H_0^T(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T R \mathbf{z} = -H_0(\mathbf{z}), \quad (4.73)$$

onde $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Assim, temos que a equação de Lie assume a forma:

$$0 = \{H_0^T, H^s\} = -\{H_0, H^s\} = -\omega_1 \left[q_1 \frac{\partial H^s}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial H^s}{\partial q_1} \right] - \omega_2 \left[q_2 \frac{\partial H^s}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial H^s}{\partial q_2} \right] \quad (4.74)$$

onde o novo Hamiltoniano, ou seja, o Hamiltoniano na forma normal, é dado por:

$$H^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \sum_{s=2}^{\infty} H^s(\mathbf{Q}, \mathbf{P}). \quad (4.75)$$

sendo H^s são polinômios homogêneos de grau s nas variáveis (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) , isto é,

$$H^s = \sum_{|(k,l)|=s} h_{kl} \mathbf{Q}^k \mathbf{P}^l \quad (4.76)$$

onde $k = (k_1, k_2)$, $l = (l_1, l_2)$, $|(k,l)| = k_1 + k_2 + l_1 + l_2$, $s \geq 2$.

Para obter as restrições ou condições necessárias sobre os coeficientes do Hamiltoniano na forma normal é conveniente introduzir a seguinte mudança de coordenadas $2i$ -simplética:

$$x_1 = Q_1 + iP_1, \quad \bar{x}_1 = Q_1 - iP_1 \quad (4.77)$$

$$x_2 = Q_2 + iP_2, \quad \bar{x}_2 = Q_2 - iP_2$$

Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial H^s}{\partial q_j} = \frac{\partial H^s}{\partial x_j} + \frac{\partial H^s}{\partial \bar{x}_j}, \quad \frac{\partial H^s}{\partial p_j} = i \left[\frac{\partial H^s}{\partial x_j} - \frac{\partial H^s}{\partial \bar{x}_j} \right] \quad (4.78)$$

a equação (4.74) considerada no termo $x^k \bar{x}^l$ nas novas variáveis assume a forma

$$0 = \{H_0^T(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}), \mathbf{x}^k \bar{\mathbf{x}}^l\} = [\omega_1(k_1 - l_1) + \omega_2(k_2 - l_2)] \mathbf{x}^k \bar{\mathbf{x}}^l. \quad (4.79)$$

Observe que

$$|k_1 - l_1| + |k_2 - l_2| \leq k_1 + k_2 + l_1 + l_2 = s,$$

portanto, se ω_1 e ω_2 não apresentam relações de ressonância até ordem s temos que $H^s(x, \bar{x}) = 0$, se s for ímpar. Se s for par, so aparecem no Hamiltoniano os termos onde $(k_1, k_2) = (l_1, l_2)$.

Caso ω_1 e ω_2 apresentem relações de ressonância de ordem três, então deveremos determinar H^1 . Desde que $s = 3$ tem-se as relações $k_1 + k_2 + l_1 + l_2 = 3$ e assim todas as possíveis combinações são dadas na seção 3.3.

De (4.74) obtemos as seguintes restrições sobre h_{kl} :

$$\begin{aligned}
h_{1020} &= h_{0201} = h_{2010} = h_{0102} = 0 \\
h_{3000} &= h_{0300} = h_{0030} = h_{0003} = 0 \\
h_{2001} &= \frac{1}{2}h_{0021}, \quad h_{1110} = \frac{\omega_2}{\omega_1}h_{0021} = \frac{\omega_2}{\omega_1}h_{0021} = \frac{\omega_2}{\omega_1}h_{0021} \\
h_{2100} &= -h_{0120}, \quad h_{1011} = \frac{\omega_2}{\omega_1}h_{2100} = \frac{\omega_2}{\omega_1}h_{2100} = \frac{\omega_2}{\omega_1}h_{2100} \\
h_{1200} &= -h_{1002}, \quad h_{0111} = -\frac{\omega_1}{\omega_2}h_{1002} = -\frac{\omega_1}{\omega_2}h_{1002} = -\frac{\omega_1}{\omega_2}h_{1002} \\
h_{0012} &= -h_{0210}, \quad h_{1101} = -\frac{\omega_1}{\omega_2}h_{0210} = -\frac{\omega_1}{\omega_2}h_{0210} = \frac{\omega_1}{\omega_2}h_{0210} \\
h_{0120} &= \frac{2\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_1^2}h_{2100} = \frac{2\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_1^2}h_{2100}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1}h_{0021} &= \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1}h_{0021} = 0 \\
\frac{4\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2}h_{1002} &= \frac{4\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2}h_{1002} = 0 \\
-\frac{4\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1}h_{2100} &= -\frac{4\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1}h_{2100} = 0 \\
\frac{\omega_1^2 - 4\omega_2^2}{\omega_2}h_{1002} &= \frac{\omega_1^2 - 4\omega_2^2}{\omega_2}h_{0210} = 0
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Assim, a forma normal H^1 da parte cúbica é dada por:

$$\begin{aligned}
H^1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \frac{\omega_2}{\omega_1}h_{0021} q_1q_2p_1 - h_{1002} q_1q_2^2 + h_{2100} q_1^2q_2 + h_{0210} q_2^2p_1 - \\
&\frac{\omega_1}{\omega_2}h_{1002} q_2p_1p_2 + h_{0021} p_1^2p_2 - \frac{\omega_1}{\omega_2} h_{0210} q_1q_2p_2 + \frac{\omega_2}{\omega_1} h_{2100} q_1p_1p_2 - \\
&h_{0210} p_1p_2^2 + h_{1002} q_1p_2^2 + \frac{1}{2}h_{0021} q_1^2p_2 + h_{1002} q_1p_2^2 \\
&= h_{1002}[-q_1q_2^2 - \frac{\omega_1}{\omega_2} q_2p_1p_2 + q_1p_2^2] + h_{0210}[q_2^2p_1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} q_1q_2p_2 - p_1p_2^2] + \\
&h_{0021}[p_1^2p_2 + \frac{\omega_2}{\omega_1} q_1q_2p_1 + \frac{1}{2}q_1^2p_2] + h_{2100}[q_1^2q_2 + \frac{\omega_2}{\omega_1} q_1p_1p_2 - q_2p_1^2].
\end{aligned} \tag{4.82}$$

4.7.2 O caso de um autovalor nulo e o outro imaginário puro

Suponhamos que $\lambda_1 = 0$ e que $\lambda_2 = \omega_2 i \neq 0$. Dependendo da matriz do sistema linearizado ser diagonalizável ou não, temos dois casos a analisar.

No caso em que a matriz do sistema linearizado é diagonalizável, de acordo com a tabela da seção 2.4, existe uma transformação de coordenadas simpléticas tal que a parte quadrática da função Hamiltoniana H_2 assume a forma:

$$H_2(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{\delta_2 \omega_2}{2} (q_2^2 + p_2^2), \quad (4.83)$$

onde $\delta_2 = \pm 1$. Assumamos que o termo geral de grau s da forma normal H^* da função Hamiltoniana H definida em (4.71) tem a forma:

$$H^s = \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} h_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} p_1^{l_1} p_2^{l_2}, \quad (4.84)$$

o qual, pela equação de lie (4.49), deve satisfazer

$$0 = \{H_2, H^s\} = \nabla H_0^T J \nabla H^s, \quad (4.85)$$

que nos conduz a seguinte identidade:

$$q_2 \frac{\partial H^s}{\partial p_2} = p_2 \frac{\partial H^s}{\partial q_2}. \quad (4.86)$$

Isso nos diz que

$$\sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} l_2 h_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2+1} p_1^{l_1} p_2^{l_2-1} - k_2 h_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2-1} p_1^{l_1} p_2^{l_2+1} = 0, \quad (4.87)$$

o que implica $k_2 = l_2 = 0$ e, portanto, devemos ter

$$H^s = H^s(q_1, p_1) = \sum_{k_1+l_1=s} h_{k_1 0 l_1 0} q_1^{k_1} p_1^{l_1}. \quad (4.88)$$

Por exemplo, a forma normal de H_3 tem a forma:

$$H^3 = H^3(q_1, p_1) = h_{3000} q_1^3 + h_{2010} q_1^2 p_1 + h_{1020} q_1 p_1^2 + h_{0040} p_1^3. \quad (4.89)$$

Para os termos de quarta ordem obtemos

$$H^4 = H^4(q_1, p_1) = h_{4000} q_1^4 + h_{3010} q_1^3 p_1 + h_{2020} q_1^2 p_1^2 + h_{1030} q_1 p_1^3 + h_{0030} p_1^4. \quad (4.90)$$

Vamos, agora, obter a forma normal de Lie no caso em que a matriz do sistema linearizado não é diagonalizável. Neste caso, pela tabela da seção 2.4, podemos assumir sem perda de generalidade que a parte quadrática do Hamiltoniano tem a forma:

$$H_2(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{\delta_1}{2} q_1 + \frac{\delta_2 \omega_2}{2} (q_2^2 + p_2^2), \quad (4.91)$$

onde $\delta_1 = \pm 1$ e $\delta_2 = \pm 1$.

Com o objetivo de caracterizar os termos do Hamiltoniano na forma normal, façamos a seguinte mudança de coordenadas simplética:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1, & x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_2 + ip_2) \\ y_1 &= p_1, & y_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_2 - ip_2). \end{aligned} \quad (4.92)$$

A parte quadrática da função Hamiltoniana H_2 nas novas coordenadas assume a forma

$$H_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = -\frac{\delta_1}{2} y_1^2 + \delta_2 \omega_2 x_2 y_2, \quad (4.93)$$

e, através de cálculos simples, obtemos

$$H_2^T(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{\delta_2}{2} x_1^2 + \delta_2 \omega_2 x_2 y_2. \quad (4.94)$$

Se denotamos por

$$H^s = \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} \gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2} y_1^{l_1} y_2^{l_2}, \quad (4.95)$$

o termo de grau s do Hamiltoniano normalizado, devemos ter

$$0 = \{H_2^T, H^s\} = \nabla H_0^T J \nabla H^s \quad (4.96)$$

que nos conduz a seguinte identidade:

$$\gamma_{k_1 k_2 l_1 l_2} [\delta_1 k_1 x_1^{k_1-1} x_2^{k_2} y_1^{l_1+1} y_2^{l_2} + \delta_2 (l_2 - k_2) x_1^{k_1} x_2^{k_2} y_1^{l_1} y_2^{l_2-1}]. \quad (4.97)$$

Os termos que podem aparecer em H^s são os termos em que

$$\delta_1 k_1 x_1^{k_1-1} x_2^{k_2} y_1^{l_1+1} y_2^{l_2} + \delta_2 (l_2 - k_2) x_1^{k_1} x_2^{k_2} y_1^{l_1} y_2^{l_2-1} = 0, \quad (4.98)$$

mas, isso é possível se, e somente se, $k_1 = 0$ e $k_2 = l_2$. Com isso, temos que o termo geral do Hamiltoniano normalizado H^s escrito nas coordenadas iniciais q_1, q_2, p_1, p_2 é da forma:

$$H^s = \sum_{2k+l=s} h_{0klk} p_1^l (q_2^2 + p_2^2)^k, \quad (4.99)$$

ou, equivalentemente

$$H^s = \sum_{j=0}^{[s]} h_{0,s-j,j,j} p_1^{s-2j} (q_2^2 + p_2^2)^j = h_{0s00} p_1^s + \sum_{j=1}^s h_{0,s-j,j,j} p_1^{s-2j} (q_2^2 + p_2^2)^j. \quad (4.100)$$

Capítulo 5

Resultados gerais sobre estabilidade de equilíbrios

Neste capítulo, vamos desenvolver a teoria da estabilidade para equações diferenciais ordinárias dando ênfase aos sistemas Hamiltonianos. Estudaremos a estabilidade da origem para sistemas lineares autônomos e periódicos (Hamiltonianos e não Hamiltonianos) enquanto, para os sistemas não lineares, vamos fornecer teoremas importantes sobre estabilidade, como os teoremas de Liapunov e o de Chetaev.

5.1 Introdução e definições

Considere a equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \tag{5.1}$$

onde $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 definida no aberto $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Observe que o ponto $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ é uma solução de (5.1) se, e somente se, $f(\mathbf{x}_0, t) = 0$, para todo $t \geq 0$. Neste caso, dizemos que \mathbf{x}_0 é uma solução de equilíbrio ou, simplesmente, um equilíbrio da equação (5.1).

Sabe-se da teoria básica de EDO que cada solução $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ em W depende continuamente de t e das condições iniciais (\mathbf{x}_0, t_0) . Em particular, prova-se que pequenas mudanças ou perturbações em \mathbf{x}_0 produzem pequenas mudanças em $\mathbf{x}(t)$ num intervalo ao redor de t_0 . Mostra-se também que duas soluções que começam próximas, permanecem próximas durante um intervalo de tempo suficientemente grande, mas finito. Uma pergunta que se faz é se duas soluções que se iniciam próximas permanecem próximas para todo tempo, ou será que existem soluções que desviam-se, não importando o quão próximas elas se iniciaram. Questões como estas pertencem a um ramo da matemática conhecido como teoria da estabilidade.

Vamos agora definir estabilidade de uma solução de (5.1) num tempo t_0 . A grosso modo, dizemos que uma solução $\mathbf{x}(t)$ de (5.1) é estável em $t = t_0$ quando toda solução $\bar{\mathbf{x}}(t)$ que se inicia com valores próximos de $\mathbf{x}(t_0)$ está definida para todo $t \geq t_0$ e permanece próxima durante todo o tempo. Vamos a definição precisa:

Definição 11 (*Estabilidade no sentido de Liapunov*) Uma solução $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ de (5.1) é:

(a) *estável em $t = t_0$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que para qualquer $\mathbf{x} \in B_\delta(\tilde{\mathbf{x}}(t_0))$, a solução $\mathbf{x}(t)$ que se inicia em \mathbf{x} quando $t = t_0$, está definida para todo $t \geq t_0$ e $\mathbf{x}(t) \in B_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}(t))$, para todo $t \geq t_0$;*

(b) *assintoticamente estável se é estável e além disso, existe um número positivo $\delta_1 < \delta$ tal que $\|\mathbf{x}\| < \delta_1$ implica $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\| = 0$;*

(c) *instável quando não é estável.*

Seja $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ uma solução de (5.1). Fazendo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t)$, temos que $\mathbf{x}(t)$ é solução de (5.1) se, e somente se, $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)$ é uma solução de

$$\dot{\mathbf{z}} = g(\mathbf{z}, t), \quad (5.2)$$

onde $g(\mathbf{z}, t) = f(\mathbf{z}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t), t) - f(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)$. A solução de equilíbrio da equação (5.1) corresponde a solução de equilíbrio $\tilde{\mathbf{z}} = 0$ do sistema (5.2). Com isso o estudo da estabilidade da equação (5.1) se reduz ao estudo da estabilidade do equilíbrio $\tilde{\mathbf{z}} = 0$ do sistema (5.2).

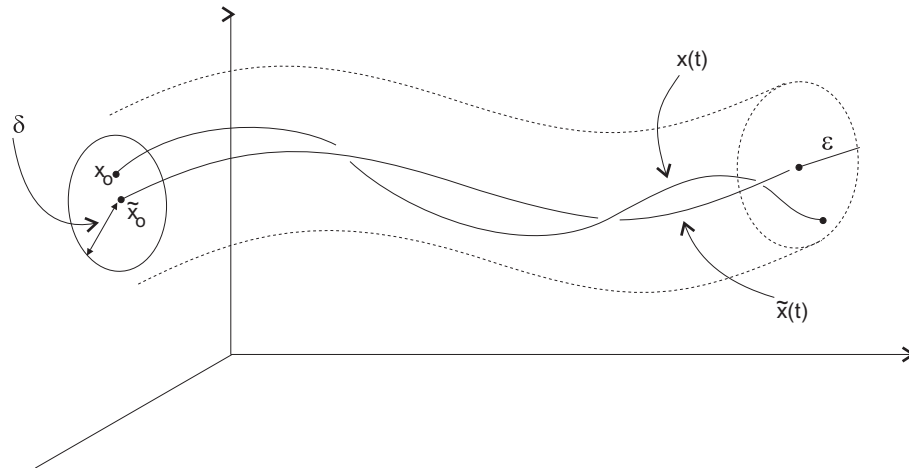


Figura 5.1: Estabilidade no sentido de Liapunov.

Devido ao grande valor prático e teórico, a teoria da estabilidade é hoje uma das áreas mais importantes de toda a Matemática. Frequentemente, em problemas das engenharias, da física, ou da própria Matemática, precisa-se saber sobre a estabilidade de uma solução de EDO. Na mecânica celeste, por exemplo, é de grande interesse prático saber sobre a estabilidade de soluções particulares do problema dos n -corpos. No último capítulo deste trabalho, estudaremos a estabilidade de cinco soluções particulares de um subproblema do problema dos três corpos. Vamos a partir de agora, desenvolver a teoria da estabilidade.

5.2 Sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

Nesta seção vamos estudar estabilidade da solução de equilíbrio $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$, do sistema de equações diferenciais linear

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (5.3)$$

onde A é uma matriz $n \times n$ constante.

A matriz A pode ser vista como um operador linear no \mathbb{R}^n , $x \mapsto Ax$, o qual pode ser estendido a um operador linear $A_{\mathbb{C}}$ no espaço complexo \mathbb{C}^n definido por $A_{\mathbb{C}}(x + iy) = Ax + iAy$. Sejam

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ todos os autovalores distintos da matriz $A_{\mathbb{C}}$ e $\{z_{11}, \dots, z_{m_1 1}, \dots, z_{1k}, \dots, z_{m_k k}\}$ uma base de Jordan de \mathbb{C}^n tal que

$$A_{\mathbb{C}}(z_{ij}) = \begin{cases} \lambda_j z_{ij} + z_{i+1j}, & j = 1, \dots, k, \beta = 1, \dots, m_k - 1 \\ \lambda_j z_{ij}, & j = 1, \dots, k, \beta = m_k, \end{cases}$$

onde m_k é a dimensão do bloco de Jordan associado a λ_j .

Uma condição necessária e suficiente para que

$$z(t) = \zeta_{11}(t)z_{11} + \dots + \zeta_{m_1 1}(t)z_{m_1 1} + \dots + \zeta_{1k}(t)z_{1k} + \dots + \zeta_{m_k k}(t)z_{m_k k}$$

seja uma solução da equação $\dot{z}(t) = A_{\mathbb{C}}z(t)$ é que

$$\dot{\zeta}_{1j} = \lambda_j \zeta_{1j}, \quad \dot{\zeta}_{2j} = \lambda_j \zeta_{2j} + \zeta_{1j}, \dots, \quad \dot{\zeta}_{m_j j} = \lambda_j \zeta_{m_j j} + \zeta_{m_j - 1j}$$

para $j = 1, \dots, k$. Assim, a solução fica

$$z(t) = \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j t} [\zeta_{1j} z_{1j} + (\zeta_{1j} t + \zeta_{2j}) z_{2j} + \dots + (\frac{1}{m_j!} t^{m_j} \zeta_{1j} + \dots + \frac{1}{1!} t \zeta_{m_j - 1j} + \zeta_{m_j j}) z_{m_j j}].$$

é fácil ver que

$$\bar{z}(t) = \sum_{j=1}^k e^{\bar{\lambda}_j t} [\bar{\zeta}_{1j} \bar{z}_{1j} + (\bar{\zeta}_{1j} t + \bar{\zeta}_{2j}) \bar{z}_{2j} + \dots + (\frac{1}{m_j!} t^{m_j} \bar{\zeta}_{1j} + \dots + \frac{1}{1!} t \bar{\zeta}_{m_j - 1j} + \bar{\zeta}_{m_j j}) \bar{z}_{m_j j}]$$

também é uma solução de $\dot{z}(t) = A_{\mathbb{C}}z(t)$. Assim as partes real, $x(t) = \frac{z(t) + \bar{z}(t)}{2}$ e imaginária, $y(t) = \frac{z(t) - \bar{z}(t)}{2i}$ são soluções reais do sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Com estas considerações fica demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 24 *Uma solução geral do sistema (5.3) é da forma*

$$x(t) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{m_j-1} (A_{lj} t^l e^{\alpha_j t} \cos(b_j t) + B_{lj} t^l e^{\alpha_j t} \sin(b_j t))$$

onde $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ são os autovalores de A , m_j é a dimensão do bloco de Jordan associado ao autovalor λ_j e A_{lj} e B_{lj} são vetores fixos do \mathbb{R}^n para $j=1, \dots, k$ e $l=1, \dots, m_j$.

Segue do teorema acima o seguinte teorema:

Teorema 25 *A solução nula do sistema (5.3) é:*

(I) *Se A é uma matriz não singular:*

- (a) *assintoticamente estável se, e somente se, todos os autovalores de A tem parte real negativa;*
- (b) *estável, mas não assintoticamente estável, se A tem ao menos um par de autovalores imaginários puros de multiplicidade um, nenhum autovalor imaginário puro com de multiplicidade maior que um, e nenhum autovalor com parte real positiva;*
- (c) *instável nos demais casos.*

(II) *Se A é uma matriz singular:*

- (a) *estável se os autovalores não nulos tem parte real negativa ou se a matriz A é diagonalizável e os autovalores não nulos são imaginários puros;*
- (b) *instável se existe algum autovalor com parte real positiva;*

Vamos agora estudar a estabilidade da origem do sistema Hamiltoniano linear com coeficientes constantes, isto é, do sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz Hamiltoniana constante.

Pela proposição 1 do capítulo 1, temos que o polinômio característico de uma matriz Hamiltoniana é par. Assim, se λ é um autovalor de A , $-\lambda$, $\bar{\lambda}$, $-\bar{\lambda}$ também são. Com isso e pelo teorema 25 segue o seguinte teorema:

Teorema 26 *Seja o sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz Hamiltoniana constante. A solução de equilíbrio nula deste sistema é :*

- (a) *se A é uma matriz não singular, nunca pode ser assintoticamente estável e só pode ser estável se todos os autovalores são imaginários puros e a matriz A for diagonalizável;*
- (b) *se A é uma matriz singular, nunca pode ser assintoticamente estável e só pode ser estável se a matriz A for diagonalizável.*

Este teorema nos fornece uma caracterização da estabilidade de um sistema Hamiltoniano linear

com coeficientes constantes.

5.3 Sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes periódicos

Na seção anterior vimos que a solução de um sistema de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes pode ser encontrada. Para equações diferenciais lineares a coeficientes variáveis, só em casos particulares é possível encontrar todas as soluções. Nesta seção vamos estudar a estabilidade de equações diferenciais lineares com coeficientes periódicos, ou seja, sistema de equações diferenciais da forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad (5.4)$$

onde $A(t)$ é uma matriz T -periódica, isto é, $A(t+T) = A(t)$ para todo t . Neste caso, é possível reduzir a equação a uma outra com coeficientes constantes, $\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$, por meio de uma mudança linear de coordenadas, $\mathbf{x} = Q(t)\mathbf{y}$. Vejamos:

Teorema 27 (Floquet) *Seja $X(t)$ a matriz fundamental da equação (5.4). Existem matrizes $n \times n$, B e $Q(t)$, com B constante e $Q(t)$ T -periódica tais que*

$$X(t) = Q(t)e^{tB}. \quad (5.5)$$

Demonstração. A matriz $X(t+T)$ também é uma matriz fundamental da equação (5.4). Assim, suas colunas são linearmente independentes e como, pelo lema 2 da seção 1.3, $X(t+T) = X(t)X(T)$, temos que $X(T)$ é inversível. Então, pelo lema 1 da seção 1.3, existe uma matriz B tal que $X(T) = e^{TB}$. Considere a matriz $Q(t) = X(t)e^{-tB}$. Temos que $X(t) = Q(t)e^{tB}$ e que $Q(t+T) = Q(t)$. ■

Seja $X(t)$ a matriz fundamental da equação (5.4), e seja $X(t) = Q(t)e^{tB}$ a decomposição de $X(t)$ dada pelo teorema de Floquet. Fazendo a mudança de variáveis $\mathbf{x} = Q(t)\mathbf{y}$ então, para a solução $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{v}$ da equação (5.4) temos

$$\mathbf{y}(t) = Q^{-1}(t)\mathbf{x} = Q^{-1}(t)X(t)\mathbf{v} = e^{tB}\mathbf{v}.$$

Logo $\mathbf{y}(t)$ é solução de $\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$ com B constante. Como as soluções do sistema $\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$ são polinômios em t multiplicados por $e^{\lambda t}$, então o teorema de Floquet nos diz que as soluções de (5.4) consistem de um produto de polinômios em t , $e^{\lambda t}$ e termos T -periódicos. Com essas considerações e pelo teorema de Floquet segue o teorema abaixo:

Teorema 28 *A solução nula do sistema (5.4) é:*

- (a) *assintoticamente estável se, e somente se, todos os expoentes característicos têm parte real negativa;*
- (b) *estável se, e somente se, todos os expoentes característicos têm parte real ≤ 0 enquanto os expoentes com parte real nula devem ter multiplicidade 1;*
- (c) *instável se, e somente se, existe algum expoente característico com parte real positiva.*

No caso de um sistema Hamiltoniano linear com coeficientes periódicos, isto é, do sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad (5.6)$$

onde $A(t)$ é uma matriz Hamiltoniana para cada t e T -periódica, o teorema acima pode ser posto na seguinte forma:

Teorema 29 *A solução nula do sistema (5.6) nunca pode ser assintoticamente estável e, é estável se, e somente se, a matriz de monodromia é diagonalizável e tem autovalores com módulo unitário.*

5.4 Sistemas Hamiltonianos quase lineares

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + g(\mathbf{z}, t) \quad (5.7)$$

onde A é uma matriz Hamiltoniana e a função g é tal que:

$$g(0, t) \equiv 0 \quad \text{e} \quad g(\mathbf{z}, t) = O(\mathbf{z}) \quad \text{quando} \quad \mathbf{z} \rightarrow 0 \quad \text{para cada} \quad t, \quad (5.8)$$

onde $g(\mathbf{z}, t) = O(\mathbf{z})$ significa

$$\lim_{\mathbf{z} \rightarrow 0} \frac{g(\mathbf{z}, t)}{\|\mathbf{z}\|} = 0$$

para cada $t \in I$.

Um sistema deste tipo chama-se *quase-linear*. Aplicando um resultado conhecido da literatura, o qual pode ser encontrado em Hale [13], podemos enunciar o seguinte teorema para o estudo da estabilidade da solução de equilíbrio nula do sistema (5.7):

Teorema 30 *Consideremos o sistema (5.7) definido em $\Omega_b = \{(\mathbf{z}, t) \in U \times I / \|\mathbf{z}\| < b\}$ satisfazendo a propriedade (5.8), com g contínua, $g(\mathbf{z}, t) = O(\mathbf{z})$ uniformemente em t e suponha ainda que o sistema (5.7) tenha soluções únicas em todo ponto. Então, se algum valor próprio de A tem parte real positiva, a solução de equilíbrio nula do sistema não linear (5.7) é instável.*

Seja H uma função Hamiltoniana de classe C^2 tal que o sistema Hamiltoniano associado a H possui uma solução de equilíbrio na origem, de modo que o desenvolvimento de H em série de Taylor numa vizinhança da origem é da forma:

$$H(\mathbf{z}) = H(0) + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \text{Hess}H(0) \mathbf{z} + r(\mathbf{h}) \quad (5.9)$$

onde $\text{Hess}H$ significa a matriz Hessiana de H e \mathbf{h} é um ponto próximo da origem. Verifica-se que

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Portanto, denotando por $A = J\text{Hess}H(0)$, tem-se que esta matriz é Hamiltoniana e obtemos que o Teorema 30 pode ser aplicado ao sistema associado a H . No caso em que H é analítica, o desenvolvimento de H em torno da origem nos fornece:

$$H(\mathbf{z}) = H(0) + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \text{Hess}H(0) \mathbf{z} + \dots \quad (5.10)$$

onde os pontos denota os termos de ordem superior. Também podemos aplicar o Teorema 30.

No caso em que A tem autovalores imaginários puros, em geral nada podemos afirmar da estabilidade da solução de equilíbrio do sistema não linear. Neste caso podem acontecer as duas possibilidades, isto é, tanto estabilidade como instabilidade.

5.5 Estabilidade de equilíbrios para sistemas autônomos

Nesta seção vamos fornecer os métodos direto de Liapunov e de Chetaev para estudo da estabilidade de equilíbrios para sistemas autônomos.

5.5.1 O método direto de Liapunov

O método direto de Liapunov para estudo da estabilidade foi desenvolvido pelo matemático Russo A. Liapunov [23] no final do século XIX. Ele não consiste na integração das equações diferenciais do movimento perturbado, mas em encontrar funções das variáveis \mathbf{x} e t , tais que sua derivada total (com respeito a t) tem certas propriedades devido a forma das equações do movimento. Desde que o método aplica-se diretamente as equações do movimento, sem qualquer conhecimento das soluções, o método é conhecido como método direto.

O mesmo Liapunov reconheceu, que ele foi levado a este método como consequência do trabalho de Poincaré [27]. A idéia por trás do método pode ser trazida do resultado de Lagrange baseado num fato físico bem conhecido: numa certa posição de equilíbrio um sistema conservativo tem energia potencial mínima, então esta posição corresponde a um equilíbrio estável, se a posição de equilíbrio não corresponde a um mínimo então o equilíbrio é instável, ou seja, um sistema físico perde energia potencial numa vizinhança de um ponto de equilíbrio estável.

Considere o sistema de EDO autônoma de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad (5.11)$$

onde $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 definida no aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Denotaremos por $\varphi_t(\mathbf{x})$ o fluxo associado a este sistema.

Seja $V : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$ também seja contínua. Ponhamos, para cada $\mathbf{x} \in \Delta$,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \left\langle \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, f(\mathbf{x}) \right\rangle .$$

Se $\mathbf{x}(t)$ é uma solução de (5.11), então

$$\frac{dV}{dt}(x(t)) \Big|_{t=0} = \dot{V}(\mathbf{x}(t)) \Big|_{t=0},$$

isto é, \dot{V} é a derivada de V ao longo das soluções de (5.11) e é uma função contínua. Observe que \dot{V} pode ser calculado diretamente de $f(\mathbf{x})$ e, portanto, não envolve integração.

A teoria que será desenvolvida a seguir permanece válida para a função escalar V for somente contínua sobre um aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Neste caso

$$\dot{V}(\zeta) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(x(h, \zeta)) - V(\zeta)}{h} \quad (5.12)$$

onde $x(h, \zeta)$ é a solução de (5.11) com valor inicial ζ em $h = 0$. Se V é contínua e localmente Lipschitz, então pode-se mostrar que esta última definição é equivalente a

$$\dot{V}(\zeta) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(\zeta + hf(\zeta)) - V(\zeta)}{h}.$$

Em algumas aplicações é necessário considerar funções $V(\mathbf{x})$ as quais não têm derivada parciais contínuas em todos os pontos \mathbf{x} . Por outro lado, as funções $V(\mathbf{x})$ são usualmente diferenciáveis por partes com o conjunto de descontinuidade nas derivadas de V acontecendo sobre uma superfície de dimensão mais baixa que a do espaço de base \mathbb{R}^n .

Se f e V são de classe $C^1(\Delta)$ então, para cada $x \in \Delta$ a derivada de V ao longo da solução $\varphi_t(\mathbf{x})$ de (5.11) é:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} V(\varphi_t(x)) \Big|_{t=0} = \langle DV(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \rangle.$$

Desde que as demonstrações dos teoremas a seguir não usam a diferenciabilidade de V , eles serão estabelecidos sem esta hipótese, mas com a definição de V dada por (5.12).

Definição 12 *Seja a função $V : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ que contém \mathbf{x}_0 . Dizemos que:*

- (a) V é definida positiva em \mathbf{x}_0 se $V(\mathbf{x}_0) = 0$ e $V(\mathbf{x}) > 0$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$.
- (b) V é definida negativa em \mathbf{x}_0 se $-V$ for definida positiva em \mathbf{x}_0 .
- (c) V é uma função de Liapunov para a solução de equilíbrio \mathbf{x}_0 da equação (5.11) se ela é definida positiva em \mathbf{x}_0 e se $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$, para todo $\mathbf{x} \in \Delta$.

Um primeiro resultado é o seguinte:

Teorema 31 (Teorema de Liapunov para estabilidade no caso autônomo) *Se existe uma função de Liapunov de classe C^1 para a solução de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema (5.11), então o equilíbrio é estável.*

Demonstração. Sejam $r > 0$ tal que $\bar{B}_r(\mathbf{0}) \subset \Delta$ e $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < r$. Defina

$$m_\varepsilon = \min\{V(\mathbf{x})/\mathbf{x} \in \partial B_\varepsilon(\mathbf{0})\}.$$

Como V é definida positiva, temos que $m_\varepsilon > 0$. Assim, pela continuidade de V e usando o fato que $V(\mathbf{x}) = 0$, temos que existe $\delta > 0$ tal que $V(\mathbf{x}) < m_\varepsilon$, para todo $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{0})$. Pelo teorema do Valor Médio, existe $s \in [0, t]$ tal que

$$V(\varphi_t(\mathbf{x})) - V(\mathbf{x}) = \dot{V}(\varphi_s(\mathbf{x}))(t - 0)$$

e como $\dot{V}(\varphi_t(\mathbf{x})) \leq 0$, para todo $\mathbf{x} \in \Delta$ temos que $V(\varphi_t(\mathbf{x})) \leq V(x)$, donde $V(\varphi_t(\mathbf{x})) < m_\varepsilon$, para todo $t \geq 0$ onde a solução esta definida. Se existisse t_1 tal que $\varphi_{t_1}(\mathbf{x}) \in \partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$, então, $V(\varphi_{t_1}(\mathbf{x})) \geq m_\varepsilon$. Uma contradição. Logo $\varphi_t(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(\mathbf{0})$, para todo $t \geq 0$ onde a solução está definida. Observe que a solução está definida para todo $t \geq 0$, desde que ela fica dentro de um compacto. Isto prova a estabilidade do equilíbrio. ■

Corolário 9 *Se o sistema (5.11) possui uma integral primeira F definida positiva (ou negativa) numa vizinhança da solução de equilíbrio e todas as soluções estão definidas para todo tempo, então a solução de equilíbrio é estável.*

Demonstração. Basta definir $V(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$ e notar que $\dot{V} \equiv 0$. ■

Exemplo: Considere a EDO de segunda ordem

$$\ddot{x} + q(x) = 0,$$

onde q é uma função contínua que satisfaz $xq(x) > 0$, $\forall x \neq 0$. Esta equação pode ser escrita na forma $\dot{x} = y$ e $\dot{y} = -q(x)$. A energia total do sistema é $E = \frac{y^2}{2} + \int_0^x q(s)ds$. Como E não depende

explicitamente de t , temos que E é uma integral primeira para o sistema. Observe que E é definida positiva. Assim, pelo corolário (9) temos que a origem é um ponto de equilíbrio estável para este sistema.

Um caso particular importante deste exemplo corre quando $q(x) = x$. Neste caso, a equação correspondente é a equação fundamental das oscilações, $\ddot{x} + x = 0$.

Vamos agora enunciar um resultado relativo a sistemas mecânicos da forma:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U(\mathbf{r}), \quad (5.13)$$

onde $U : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 , definida no aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Um tal sistema é denominado sistema Newtoniano potencial. A formulação Hamiltoniana deste sistema é obtida da seguinte forma. Faça

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \nabla_{\mathbf{r}} U. \end{cases}$$

Logo, se definirmos

$$H = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 - U(\mathbf{r}), \quad (5.14)$$

o sistema assume a forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \end{cases} \quad (5.15)$$

A seguinte proposição foi primeiro provada por Dirichlet, e formulada por Lagrange[21]:

Proposição 2 (Teorema de Dirichlet-Lagrange) *Seja o sistema mecânico (5.13) e suponha que \mathbf{r}_0 é um ponto crítico de U e é um máximo local isolado, então a solução de equilíbrio $(\mathbf{r}_0, \mathbf{0})$ do sistema Hamiltoniano (5.15) é estável.*

Demonstração. Sejam $U_0 = U(\mathbf{r}_0)$ e $\varepsilon > 0$ tal que $U(\mathbf{r}) < U_0$ para $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| < \varepsilon$. Defina

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + U_0 = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 - U(\mathbf{r}) + U_0.$$

A função V é positiva definida na vizinhança $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| < \varepsilon$ com \mathbf{v} arbitrário, e como $\dot{V} = \dot{H} \equiv 0$, pelo teorema (31) segue o resultado. ■

Para sistemas mecânicos da forma $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r})$, na proposição 2 devemos assumir que o ponto crítico isolado é um mínimo local.

No caso de um sistema Hamiltoniano linear autônomo a função Hamiltoniana é da forma:

$$H(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T S \mathbf{z}, \quad (5.16)$$

ou seja, a função Hamiltoniana é uma forma quadrática em \mathbb{R}^{2n} . Se H for definida positiva (ou negativa) então, como H é uma integral primeira para o sistema associado, pelo corolário 9 temos que a origem é um equilíbrio estável. No caso em que H não é definida positiva (ou negativa) nada podemos afirmar.

Suponhamos agora que H é uma função Hamiltoniana autônoma com n graus de liberdade, analítica numa vizinhança da origem e tal que a origem é um equilíbrio para o sistema associado. Logo, desenvolvendo H em série de Taylor numa vizinhança da origem temos que

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + H_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \dots, \quad (5.17)$$

onde H_s é um polinômio homogêneo de grau s nas variáveis \mathbf{q} e \mathbf{p} . Se assumimos que a parte quadrática é definida positiva (ou negativa) temos que H é uma integral primeira definida positiva (ou negativa) numa vizinhança da origem e, pelo corolário 9, temos que a origem é um equilíbrio estável para o sistema Hamiltoniano associado a H . Com estes comentários, temos demonstrado o seguinte corolário do teorema 9:

Corolário 10 *Seja H como em (5.17). Se $H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é definida positiva (ou negativa), então a origem é um equilíbrio estável para o sistema associado a H .*

Vamos ver agora um teorema que nos fornece um critério para decidir instabilidade de equilíbrios:

Teorema 32 (Teorema de Liapunov para instabilidade no caso autônomo) *Suponha que a origem é uma solução de equilíbrio do sistema (5.11). Seja V uma função real de classe C^1 definida numa*

vizinhança da origem tal que $\dot{V}(\mathbf{x})$ é definida positiva para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $V(\mathbf{0}) = 0$. Se em cada vizinhança de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ existe \mathbf{x} tal que $V(\mathbf{x}) > 0$, então a origem é um equilíbrio instável.

Demonstração. Para qualquer solução $\varphi_t(\mathbf{x})$ de (5.11) temos que

$$V(\varphi_t(\mathbf{x})) - V(\mathbf{x}) = \int_0^t \dot{V}(\varphi_s(\mathbf{x})) ds \geq 0,$$

donde $V(\varphi_t(\mathbf{x})) \geq V(\mathbf{x})$, $\forall t \geq 0$. Sejam $r > 0$ tal que $\bar{B}_r(\mathbf{0}) \subset \Delta$ e $\varepsilon > 0$ dado. Por hipótese, existe $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, com $\|\mathbf{x}\| < \min\{\varepsilon, r\}$ tal que $V(\mathbf{x}) > 0$. Seja $\varphi_t(\mathbf{x})$ a solução de (5.11) que satisfaz $\varphi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Como V é contínua, $\bar{B}_r(\mathbf{0})$ é compacto e $V(\mathbf{0}) = 0$ temos que existem $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que $|V(\mathbf{y})| \leq M$, para todo $\mathbf{y} \in \bar{B}_r(\mathbf{0})$ e $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{0})$, donde segue que $V(\mathbf{y}) \in B_{V(\mathbf{x})}(\mathbf{0})$. Sabemos que a solução $\varphi_t(\mathbf{x})$ existe sobre algum intervalo $[0, t_1)$ e assumiremos que t_1 é o primeiro ponto no qual $\|\varphi_t(\mathbf{x})\| = r$. Se nenhum t_1 é o primeiro então $t_1 = \infty$, pois $\varphi_t(\mathbf{x})$ estará contido num compacto $\bar{B}_r(\mathbf{0})$. Vamos mostrar que $t_1 = \infty$ não é possível. Como $V(\varphi_t(\mathbf{x}))$ é não decrescente no intervalo $[0, t_1)$, temos que $V(\mathbf{y}) > V(\mathbf{x}) > 0$ e por outro lado $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{0})$, assim, $V(\mathbf{y}) \in B_{V(\mathbf{x})}(\mathbf{0})$, e então devemos ter $\|\varphi_t(\mathbf{x})\| > \delta$, para todo $t \in [0, t_1)$. Defina

$$\mu = \min\{\dot{V}(\mathbf{y}) / \|\mathbf{y}\| \mid \mathbf{y} \in [\delta, r]\}.$$

Como \dot{V} é contínua sobre o compacto $K = \{\mathbf{y} \in \Delta / \|\mathbf{y}\| \in [\delta, r]\}$, este mínimo existe e é assumido em algum ponto $\bar{\mathbf{y}} \in K$. Como \dot{V} é definida positiva, temos $\mu > 0$. Assim, temos $\dot{V}(\varphi_t(\mathbf{x})) \geq \mu > 0$, para todo $t \in [0, t_1)$ e conseqüentemente, $V(\mathbf{x}) \geq V(\mathbf{x}) + \mu t$, o que implica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\varphi_t(\mathbf{x})) = \infty.$$

Mas isto contradiz o fato de $|V(\mathbf{y})| \leq M$, $\forall \mathbf{y} \in \bar{B}_r(\mathbf{0})$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, não existe $\delta > 0$ tal que $\varphi_t(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(\mathbf{0})$, para todo $t \geq 0$, pois devemos ter $t = t_1$ finito tal que $\|\varphi_{t_1}(\mathbf{x})\| = r$. Assim, a solução $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ não pode ser estável. ■

Corolário 11 *Suponha que a origem é uma solução de equilíbrio do sistema (5.11). Seja V uma função real de classe C^1 definida positiva numa vizinhança de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tal que $\dot{V}(\mathbf{x})$ é definida positiva para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, então o equilíbrio é instável.*

Outro corolário do teorema acima é o seguinte:

Corolário 12 *Suponha que a origem é uma solução de equilíbrio do sistema (5.11). Suponha que existe uma função real V de classe C^1 tal que:*

(i) $V(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0}$ quando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$;

(ii) \dot{V} é definida positiva (ou negativa) numa vizinhança da origem;

(iii) V assume valores positivos (ou negativos) em cada vizinhança da origem suficientemente pequena;

Então o equilíbrio é instável.

5.5.2 O método direto de Chetaev

Vamos agora fornecer um método direto para decidir instabilidade, trata-se do método de Chetaev.

Teorema 33 (Teorema de Chetaev no caso autônomo) *Suponha que a origem é uma solução de equilíbrio do sistema (5.11) e que $\Delta_1 \subset B_a(\mathbf{0}) \subset \Delta$ é aberto. Suponha que exista uma função escalar V que tem as seguintes propriedades:*

(a) $V(\mathbf{x})$ e $\dot{V}(\mathbf{x})$ são definidas positivas sobre Δ_1 ;

(b) $V(\mathbf{x}) = 0$, para todo $x \in \bar{\Delta}_1 \cap \bar{\Delta}_2$, onde Δ_2 denota o complementar de Δ_1 em $\bar{B}_a(\mathbf{0})$;

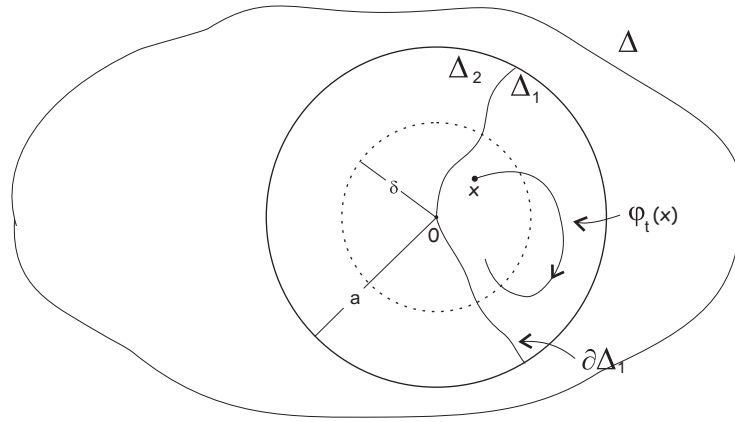
(c) $\mathbf{0} \in \bar{\Delta}_1 \cap \bar{\Delta}_2$.

Então a solução de equilíbrio é instável.

Demonstração. Assumamos que a solução de equilíbrio é estável, então dado ε , $0 < \varepsilon < a$, podemos encontrar $\delta > 0$, $0 < \delta < a$, tal que $\|\mathbf{x}\| \leq \delta$ implica $\|\varphi(t, \mathbf{x})\| \leq \varepsilon$ para $t \geq 0$. Podemos escolher $\mathbf{x} \in \Delta_1$ desde que $\mathbf{0} \in \bar{\Delta}_1$ e por conseguinte $V(\mathbf{x}) > 0$.

Devemos mostrar que com esta escolha $\varphi(t, \mathbf{x})$ permanece em Δ_1 para todo t (conforme figura 5.2). Seja $\theta = \inf\{t > 0 / \varphi(t, \mathbf{x}) \notin \Delta_1\}$.

Em primeiro lugar notemos que $\theta > 0$, caso contrário existiria uma sequência $t_n > 0$ com $t_n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow +\infty$, tal que $\varphi(t_n, \mathbf{x}) \in \Delta_2$. Logo tem-se $\varphi(t_n, \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \bar{\Delta}_2$, por outro lado $\mathbf{x} \in \Delta_1 \subset \bar{\Delta}_1$, de onde pelo ítem (b) tem-se $V(\mathbf{x}) = 0$. Mas, isto é impossível pela escolha de \mathbf{x} . Se θ é finito e distinto de 0, então pelo mesmo argumento precedente vemos que por um lado $\varphi(\theta, \mathbf{x}) \in \bar{\Delta}_2$; e

Figura 5.2: Comportamento das soluções em Δ_1 .

por outro lado para $t < \theta$, implica $\varphi(t, \mathbf{x}) \in \Delta_1$ e desde que $\varphi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \varphi(\theta, \mathbf{x})$ se $t \rightarrow \theta$, de onde $\varphi(\theta, \mathbf{x}) \in \bar{\Delta}_1$. Logo,

$$\varphi(\theta, \mathbf{x}) \in \bar{\Delta}_1 \cap \bar{\Delta}_2, \quad \text{e por (b)} \quad V(\varphi(\theta, \mathbf{x})) = 0. \quad (5.18)$$

Por outro lado, para $0 \leq s < \theta$, $\varphi(s, \mathbf{x}) \in \Delta_1$ e $\dot{V}(\varphi(s, \mathbf{x})) > 0$. Por conseguinte:

$$V(\varphi(\theta, \mathbf{x})) - V(\mathbf{x}) = \int_0^\theta \dot{V}(\varphi(s, \mathbf{x})) ds > 0$$

e

$$V(\varphi(\theta, \mathbf{x})) > V(\mathbf{x}) > 0,$$

o qual é uma contradição com (5.18). Então devemos admitir que $\theta = +\infty$, ou que é equivalente a assumir que $\varphi(t, \mathbf{x}) \in \Delta_1$ para todo $t \geq 0$, e desde que $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$ em Δ_1 segue-se que $V(\varphi(t, \mathbf{x})) > V(\mathbf{x}) > 0$.

Considerando

$$\tilde{\Delta}_1 = \{\mathbf{y} \in \Delta_1 / V(\mathbf{y}) \geq V(\mathbf{x})\}.$$

Temos que $\tilde{\Delta}_1$ é fechado, pois se tomamos a sequência $\mathbf{x}_n \in \tilde{\Delta}_1$ com $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y}$ quando $n \rightarrow +\infty$, logo $V(\mathbf{x}_n) \geq V(\mathbf{x})$ para cada n , e então $V(\mathbf{y}) \geq V(\mathbf{x})$. Resta mostrar que $\mathbf{y} \in \tilde{\Delta}_1$. Se tivéssemos $\mathbf{y} \in \Delta_2$, por outro lado temos que $\mathbf{y} \in \bar{\Delta}_1$ segue-se por (b) que $V(\mathbf{y}) = 0$ o qual é um absurdo. Como $\tilde{\Delta}_1$ também é limitado segue-se que $\tilde{\Delta}_1$ é compacto. Logo, $\dot{V}(\mathbf{y})$ é positiva em $\tilde{\Delta}_1$ e é contínua e seja $m = \min_{\mathbf{y} \in \tilde{\Delta}_1} \dot{V}(\mathbf{y})$. Claramente $m > 0$.

Por outro lado, $\varphi(t, \mathbf{x}) \in \tilde{\Delta}_1$ para todo $t \geq 0$, assim

$$V(\varphi(t, \mathbf{x})) - V(\mathbf{x}) = \int_0^t \dot{V}(\varphi(s, \mathbf{x})) ds \geq m(t - t_0).$$

De onde deduzimos que $V(\varphi(t, \mathbf{x})) \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, mais isto não é possível desde que $V(\mathbf{y})$ é contínua e $\tilde{\Delta}_1$ é compacto. Assim esta contradição diz que a solução nula não pode ser estável. ■

Corolário 13 *Suponha que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é uma solução de equilíbrio do sistema (5.11). Suponha que exista uma função escalar V de classe C^1 limitada na região $V > 0$, para valores de \mathbf{x} numa vizinhança da origem, com $\dot{V}(\mathbf{x})$ definida positiva na região $V > 0$ e $V(\mathbf{0}) = 0$, então a solução de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é instável.*

Demonstração. Basta tomar $\Delta_1 = \{\mathbf{x} \in B_a(\mathbf{0}) / V(\mathbf{x}) > 0\}$.

Voltemos novamente aos sistemas mecânicos da forma (5.13). A função Hamiltoniana associada a (5.13) é dada em (5.14). Vamos considerar a região restrita a uma vizinhança suficientemente pequena da origem definida por:

$$C : H < 0, \quad \sum_{i=1}^n v_i r_i > 0. \quad (5.19)$$

O desenvolvimento de U em série de Taylor numa vizinhança da origem e da forma:

$$U = U_m + U_{m+1} + \dots$$

onde U_s é um polinômio homogêneo nas variáveis r_i . Assumiremos que a função U_m é definida positiva na região C definida em (5.19). Temos que:

Proposição 3 *Suponha que as condições acima sobre U são satisfeitas para o sistema mecânico (5.13), então a solução de equilíbrio $(\mathbf{r}_0, \mathbf{0})$ do sistema Hamiltoniano associado (5.15) é instável.*

Demonstração. Vamos considerar primeiro o caso onde $U = U_m$. Definamos a função

$$V = V(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -H \sum_{i=1}^n v_i r_i > 0.$$

A derivada total de V satisfaz

$$\dot{V} = -H \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{dr_i}{dt} + \sum_{i=1}^n r_i \frac{dv_i}{dt} \right) = -H(2\|\mathbf{v}\| + mU_m).$$

Logo, sobre a região C temos que $U > 0$ e assim \dot{V} é definida positiva, ou seja, a derivada de V e V possuem o mesmo sinal sobre a região C . Logo, o equilíbrio é instável.

No caso geral, isto é, quando $U = U_m + U_{m+1} + \dots$, o termo dentro do parêntese em \dot{V} continua sendo definido positivo em C numa vizinhança suficientemente pequena da origem. ■

5.6 Estabilidade de equilíbrios para sistemas não autônomos

Nesta seção vamos fornecer os métodos direto de Liapunov e de Chetaev para estudo da estabilidade de equilíbrios para sistemas não autônomos.

5.6.1 O método direto de Liapunov

Consideremos o sistema de EDO de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \quad (5.20)$$

onde a função $f : U \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (U é um aberto do \mathbb{R}^n), é uma função de classe C^1 . Podemos pensar que f é analítica relativamente a \mathbf{x} e contínua em relação a t na região

$$\Omega_a = B_a(\mathbf{0}) \times [t_0, \infty). \quad (5.21)$$

Definição 13 *Seja a função $V : U \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é um aberto do \mathbb{R}^n que contém \mathbf{x}_0 . Dizemos que:*

(a) *V é definida positiva em \mathbf{x}_0 se $V(\mathbf{x}_0, t) = 0$, para todo $t \geq 0$ e, se existe uma função $W : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida positiva em \mathbf{x}_0 tal que $V(\mathbf{x}, t) \geq W(\mathbf{x})$, para todo $(\mathbf{x}, t) \in U \times [0, \infty)$.*

(b) *V é definida negativa em \mathbf{x}_0 se $-V$ for definida positiva em \mathbf{x}_0 .*

(c) *V é uma função de Liapunov para a solução de equilíbrio \mathbf{x}_0 da equação (5.20) se ela é definida positiva em \mathbf{x}_0 e se $\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq 0$, para todo $(\mathbf{x}, t) \in U \times [0, \infty)$.*

Vamos, agora, ver como fica o teorema 31 no caso não autônomo.

Teorema 34 (Teorema de Liapunov para estabilidade no caso não autônomo) *Se existe uma função de Liapunov para a solução de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema (5.20), então o equilíbrio é estável.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < a$. Então, $\bar{B}_\varepsilon(\mathbf{0}) \times [0, \infty) \subset \Omega_a$. Seja $\omega = \min\{W(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \partial B_\varepsilon(\mathbf{0})\}$. Como $V(\mathbf{0}, 0) = 0$ e $V(\mathbf{x}, t)$ é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $V(\mathbf{x}, 0) \in B_\omega(\mathbf{0})$, para todo $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{0})$. Enquanto o ponto $(\mathbf{x}(t), t)$ estiver em Ω_a , teremos

$$W(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(t), t) = V(\mathbf{x}(0), 0) + \int_0^t \dot{V}(\mathbf{x}(s), s) ds \leq V(\mathbf{x}(0), 0).$$

Logo, se $\mathbf{x}(0) \in B_\delta(\mathbf{0})$ então $W(\mathbf{x}(t)) \in B_\omega(\mathbf{0})$, enquanto o ponto $(\mathbf{x}(t), t)$ estiver em Ω_a .

Assim, pela definição de ω , $\mathbf{x}(t) \in B_\omega(\mathbf{0})$. Seja β o extremo direito do intervalo máximo de definição desta solução em Ω_a . Se $\beta < \infty$, então $\bar{B}_\varepsilon(\mathbf{0}) \times [0, \beta) \subset \Omega_a$ é compacto e contém o ponto $(\mathbf{x}(t), t)$, para todo $t \in [0, \beta]$, o que não é possível. Logo, a solução está definida para todo $t \geq 0$ e como $\mathbf{x}(t) \in B_\varepsilon(\mathbf{0})$, para todo $t \geq 0$, temos que o $\mathbf{0}$ é estável.

Corolário 14 *Suponha que o sistema (5.20) possui uma integral primeira F (que não depende de t) definida positiva (ou negativa) numa vizinhança da solução de equilíbrio, então a solução de equilíbrio é estável.*

Demonstração. Basta definir $V(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x})$ e notar que $\dot{V} \equiv 0$. ■

Para a instabilidade o teorema de Liapunov no caso não autônomo assume a forma:

Teorema 35 (Teorema de Liapunov para instabilidade no caso não autônomo) *Suponha que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é uma solução de equilíbrio do sistema (5.20). Suponha que existe uma função real V de classe C^1 tal que:*

- (i) $V(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{0}$ quando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ uniformemente em t ;
- (ii) \dot{V} é definida positiva numa vizinhança da origem;
- (iii) A partir de certos valores de t , $V(\mathbf{x}, t)$ assume valores positivos em cada vizinhança suficientemente pequena da origem.

Então a solução $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é instável.

Demonstração. Suponha por absurdo que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é uma solução estável de (5.20). Sejam a e b constantes positivas tais que, para \mathbf{x} tal que $\|\mathbf{x}\| \in (a, b]$. Como, por (i), \dot{V} é definida positiva então existe uma função autônoma W tal que $\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \geq W(\mathbf{x}) > 0$ e $|V(\mathbf{x}, \mathbf{t})| \leq b$. A existência de a e b segue dos itens (i) e (ii). Da suposição de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ser estável, temos que existe $\delta > 0$ com $\delta < a$ tal que quando a solução começa em $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{0})$ então $\mathbf{x}(t) \in B_a(\mathbf{0})$, para todo $t \geq t_1$. Por (iii) podemos escolher \mathbf{x} tal que $V(\mathbf{x}, t_1) > 0$. Logo,

$$V(\mathbf{x}, t) - V(\mathbf{x}, t_1) = \int_{t_1}^t \dot{V}(\mathbf{x}(s), s) ds \geq 0,$$

para todo $t \geq t_1$. Assim $V(\mathbf{x}(t), t)$ é não decrescente. Considere agora o conjunto $S = \{\mathbf{y} / V(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \geq V(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \text{ e } \mathbf{x} \in B_a(\mathbf{0})\}$ e seja o anel $B = \{\mathbf{y} / \|\mathbf{y}\| \in [r, a] \text{ com } r > 0\}$. Temos que $S \subset B$ e portanto,

$$\mu = \inf_S V(\mathbf{y}, t) > \inf_B V(\mathbf{y}, t) > 0,$$

donde

$$V(\mathbf{x}, t) - V(\mathbf{x}, t_1) \geq \mu(t - t_1),$$

para todo $t \geq t_1$. Logo para $\|\mathbf{y}\| \leq a$, $V(\mathbf{y}, t)$ pode torna-se arbitrariamente grande, o que é uma contradição. ■

5.6.2 O método direto de Chetaev

Vamos agora apresentar o método direto de Chetaev no caso não autônomo. Começaremos com algumas definições importantes para o entendimento do teorema.

Definição 14 *O conjunto de valores das variáveis $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ sob as condições (5.21), satisfazendo a desigualdade $V > 0$, será denominada a região $V > 0$, e a superfície $V = 0$ será chamada a fronteira desta região.*

Se a função V depende explicitamente de t , então com as variações de t a região $V > 0$ também varia.

Definição 15 *Se a função W é limitada na região $V > 0$ de tal forma que para cada número positivo arbitrariamente pequeno ε , podemos encontrar um número $\delta > 0$ tal que para*

$$t \geq t_0, \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq \delta, \quad V \geq 0 \quad (5.22)$$

a desigualdade

$$|W| \leq \varepsilon$$

é satisfeita, dizemos que W admite limite superior infinitesimal na região $V > 0$.

Note que esta condição é satisfeita para toda função W que admite limite superior infinitesimal.

Definição 16 *A função $W(\mathbf{x}, t)$ será denominada de sinal definido na região $V > 0$ se ela pode anular-se nesta região somente na fronteira $V = 0$ e se para cada $\rho > 0$ arbitrariamente pequeno existe um número $l > 0$ tal que para todo, \mathbf{x} satisfazendo a condição $|V| \geq \rho$ a desigualdade $|W| \geq l$ é válida para todo $t \geq t_0$.*

Obviamente a função

$$\lambda V + W \quad (5.23)$$

será de sinal definido na região $V > 0$ se W é definida positiva ou identicamente nula enquanto λ é um número constante positivo. Se V é independente de t , cada função W independente de t será de sinal definido na região $V > 0$ se ela nunca anula-se na região $V > 0$ enquanto ela pode anular-se na fronteira da região $V > 0$ (i.e., em $V = 0$). Cada função é definida positiva em sua região $V > 0$.

Lema 6 *Cada função de sinal definido U será de sinal definido na região $V > 0$, se a função V admite limite superior infinitesimal na região $V > 0$.*

Demonstração. De fato, se V admite limite superior infinitesimal na região $V > 0$ então, por definição e comentário em (ii) feito anteriormente, temos que para cada número positivo arbitrário ε , existe $\delta > 0$ tal que a região $V > \varepsilon$ esta fora da esfera $\|\mathbf{x}\| = \delta$. Se U é de sinal definido, digamos positiva, então por definição existirá uma função definida positiva W independente de t tal que a função $U - W$ é não negativa. Portanto uma cota inferior (necessariamente positiva) da função W na região $\delta \leq \|\mathbf{x}\| \leq \eta$ será uma cota inferior para os valores da função U na região $V \geq \varepsilon$. ■

Proposição 4 *Seja*

$$\Omega : V = V(r, \phi) > 0, \quad r \in [0, \alpha], \quad \phi \in [\phi_1, \phi_2] \quad (5.24)$$

e assumamos que

$$\frac{dV}{dt} \geq Ar^\alpha g(\phi) + O(\varepsilon) \quad (5.25)$$

com ε suficientemente pequeno, $A > 0$ e $g(\phi) > 0$ para $\phi \in [\phi_1, \phi_2]$. Então dV/dt é definida positiva em Ω .

Demonstração. Basta observar que g é contínua e ϕ pertence ao compacto $[\phi_1, \phi_2]$ e, portanto, pelo Teorema de Bolzano-Weirstrass, g admite um valor mínimo o qual é positivo, digamos m . Dado $\varepsilon > 0$ com $V > \varepsilon$ devemos ter $r > \beta$ para algum $\beta > 0$. Logo,

$$\frac{dV}{dt} \geq A\beta^\alpha m + O(\varepsilon) \quad (5.26)$$

e, escolhendo ε suficientemente pequeno, por exemplo, um ε tal que $|O(\varepsilon)| < \frac{A\beta^\alpha m}{2}$ temos $\frac{dV}{dt} > \frac{A\beta^\alpha m}{2} = \delta$. ■

Teorema 36 (*Teorema de instabilidade de Chetaev, versão 1*) *Se para a EDO (5.1) do movimento perturbado é possível encontrar uma função V limitada na região $V > 0$, existindo para todo $t \geq t_0$ e para variáveis \mathbf{x} arbitrariamente pequenas, com derivada \dot{V} definida positiva na região $V > 0$ ao longo das equações do movimento, então o movimento perturbado de (5.1) é instável.*

Demonstração. Para uma função limitada V existem constantes t_0 e η tal que para todo valor das variáveis \mathbf{x} na região $V > 0$, satisfazendo, além das condições (5.21), a desigualdade

$$V < L \quad (5.27)$$

para algum $L > 0$.

É necessário provar que para um tal η não existe um λ positivo e suficientemente pequeno tal que para para perturbações iniciais \mathbf{x} , sujeitas à condição $\|\mathbf{x}\| = \lambda$, a desigualdade $\|\varphi(t, \mathbf{x})\| \leq \eta$ não é violada para algum $t > t_0$.

Provaremos este resultado por contradição. Assumamos que existe um tal valor de λ . Consideremos condições iniciais sobre a esfera S_λ tal que o valor inicial da função $V_0(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}, t_0)$ é

não nulo e positivo. Para V_0 suficientemente pequeno e para \dot{V} definida positiva na região $V > 0$, podemos encontrar um número não nulo m , tal que para as variáveis \mathbf{x} satisfazendo a condição $V \geq V_0$ o valor da função \dot{V} deverá satisfazer $\dot{V} \geq m$.

Portanto tão logo a desigualdade $V \geq V_0$ não é violada para todo valor de t com $t \geq t_0$, da equação

$$V(\mathbf{x}(t), t) - V_0 = \int_{t_0}^t \dot{V}(\mathbf{x}(s), s) ds \quad (5.28)$$

derivamos a desigualdade

$$V(\mathbf{x}(t)) \geq V_0 + m(t - t_0). \quad (5.29)$$

Esta desigualdade pode existir simultaneamente com a desigualdade (5.27) somente para valores de t menor que

$$t_0 + \frac{L - V_0}{m}. \quad (5.30)$$

As violações da desigualdade (5.27) significa neste caso que a segunda desigualdade em (5.21) tem sido violada. Assim, o movimento perturbado é instável. ■

Comentários: (1) Note que nas condições não exigimos que elas sejam satisfeitas numa vizinhança inteira da origem. É suficiente que as condições sejam satisfeitas somente na região $V > 0$.

(2) O Teorema será válido se a região $V > 0$ contém um subconjunto aberto Γ de pontos tais que $V(\mathbf{x}, t) > 0$ para $\mathbf{x} \in \Gamma$, e $V(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ para $\mathbf{x} \rightarrow \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$.

(3) A região $V > 0$ pode consistir de várias componentes conexas. Aplicações do Teorema anterior somente numa componente conexa C da região $V > 0$ pode ser de interesse. Para determinar C por uma única desigualdade $W > 0$ é suficiente considerar a função contínua W , igual a V na região C e igual a $-|V|$ fora de C .

Teorema 37 (Teorema de instabilidade de Chetaev, versão 2) *Suponhamos que para a EDO (5.1) do movimento perturbado é possível encontrar uma função V com derivada \dot{V} definida positiva; suponha que V admite limite superior infinitesimal; e suponha que para cada valor de t maior que uma certa constante, é possível tornar a função V de sinal definido com o mesmo sinal que*

sua derivada \dot{V} para uma apropriada escolha de \mathbf{x} numa vizinhança suficientemente pequena da origem. Então o movimento perturbado é instável.

Demonstração. Para a demonstração é suficiente notar que a função V deste teorema satisfaz as condições formuladas no teorema anterior, quando \dot{V} será definida positiva na região $V > 0$ desde que V admite limite superior infinitesimal. ■

Teorema 38 (Teorema de instabilidade de Chetaev, versão 3) *Suponhamos que para a EDO (5.1) do movimento perturbado é possível encontrar uma função V limitada para a qual a derivada $\dot{V} = \lambda V + W$, onde λ é uma constante positiva e W é mesmo nula ou ao menos semi-definida. Se W não é identicamente nula, suponhamos, também, que para todos os valores de t maiores que uma constante existem valores arbitrariamente pequenos de \mathbf{x} para os quais V e W tem o mesmo sinal. Então o movimento perturbado é instável.*

Demonstração. É uma consequência imediata dos comentários. ■

Capítulo 6

Estabilidade de equilíbrios para sistemas Hamiltonianos periódicos

Neste capítulo, estudaremos explicitamente a estabilidade de soluções de equilíbrio para sistemas Hamiltonianos periódicos com um e dois graus de liberdade e faremos algumas extensões para sistemas com número de graus de liberdade maior que dois. Apresentaremos dois dos principais teoremas sobre estabilidade de equilíbrios para sistemas Hamiltonianos periódico com um grau de liberdade, são eles: o Teorema de Cabral-Meyer [6] e o Teorema de Arnold-Moser ([2] e [3]). Também, aplicaremos esses teorema para concluir sobre a estabilidade em alguns casos de interesse.

6.1 Introdução

Considere o Hamiltoniano periódico com n graus de liberdade $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ analítico relativamente as variáveis \mathbf{q} e \mathbf{p} e 2π -periódico em relação a t . Suponha que a origem é uma solução de equilíbrio para o sistema associado a H , de modo que o desenvolvimento de H em série de potências numa vizinhança da origem é da forma:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + H_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \dots, \quad (6.1)$$

onde H_k é um polinômio homogêneo de grau k nas variáveis \mathbf{q}, \mathbf{p} e 2π -periódico em t . Se pelo menos um dos expoentes característicos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ da matriz do sistema linearizado tem parte real não nula, de acordo com o que foi discutido na seção 2.5 e, pelo teorema 30, temos que a origem é instável no sentido de Liapunov. No caso em que os expoentes característicos são imaginários puros, digamos $\lambda_j = \omega_j i$, $j = 1, \dots, n$, só em casos particulares sabe-se sobre a estabilidade da origem. Neste capítulo, nos deteremos a este caso.

Assumiremos, neste capítulo, que

$$H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (q_j^2 + p_j^2), \quad (6.2)$$

ou equivalentemente, o sistema linearizado é estável.

6.2 Estabilidade formal de equilíbrios para sistemas Hamiltonianos periódicos

Vamos, agora, definir um tipo de estabilidade diferente da estabilidade no sentido de Liapunov.

Definição 17 (Estabilidade formal) Dizemos que a solução de equilíbrio nula, do sistema associado ao Hamiltoniano (6.1) é **formalmente estável** se existe uma série de potências G , talvez divergente, que formalmente é uma integral primeira definida positiva com período 2π -periódico em t . Em outras palavras, todos os coeficientes da série de potências

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial G}{\partial t} \quad (6.3)$$

são identicamente nulos e um número finito de formas de grau mínimo na série G representa uma função definida positiva.

A noção de estabilidade formal é muito importante para analisar a estabilidade num intervalo de tempo muito grande, porém finito. A presença da estabilidade formal significa que a instabilidade no sentido de Liapunov não é detectada pelo cálculo de termos de ordem por mais elevada que seja no desenvolvimento do Hamiltoniano em séries de potências. Sob a existência de estabilidade

formal, se existem trajetórias que se afastam do movimento não perturbado, então o movimento ao longo dela se faz de modo extremamente lento. É fácil ver que a estabilidade no sentido de Liapunov implica na estabilidade formal. A recíproca não foi provada, mas, não se conhece um único exemplo que diga o contrário.

6.3 Sistemas com um grau de liberdade

Suponha que o Hamiltoniano periódico (6.1) tenha um grau de liberdade, isto é, H é da forma:

$$H(q, p, t) = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) + H_3(q, p, t) \dots, \quad (6.4)$$

onde H_k é um polinômio homogêneo de grau k nas variáveis reais q e p e 2π -periódico em t . Vamos estudar a estabilidade da origem quando o expoente característico do sistema linearizado for imaginário puro, isto é, $\lambda = i\omega \neq 0$. Nas duas seções seguintes, apresentaremos dois teoremas que vão permitir dizer algo sobre a estabilidade neste caso.

6.3.1 O Teorema de Cabral-Meyer para sistemas Hamiltonianos periódicos com um grau de liberdade

Suponha que o Hamiltoniano (6.4), num sistema de coordenadas simpléticas conveniente, se escreve na forma:

$$H = H(r, \varphi, t) = \Psi(\varphi)r^n + O(r^{n+1/2}), \quad (6.5)$$

onde $n = m/2$ com $m \geq 3$, inteiro. Suponhamos que H é analítica em \sqrt{r} , φ e t , τ -periódica em φ e T -periódica em t .

Normalmente, para escrever o Hamiltoniano (6.4) na forma (6.5), primeiro obtemos a forma normal de (6.4) e depois mudamos para as variáveis ação-ângulo.

Teorema 39 (Teorema de Cabral-Meyer para sistemas com um grau de liberdade) *Se H é a função Hamiltoniana definida em (6.5), então:*

(i) Se $\Psi(\varphi) \neq 0$ para todo φ , então a origem é uma solução de equilíbrio estável no sentido de Liapunov.

(ii) Se $\Psi(\varphi)$ tem um zero simples, isto é, se existe φ^* tal que $\Psi(\varphi^*) = 0$ e $\Psi'(\varphi^*) \neq 0$, então a origem é instável no sentido de Liapunov.

Demonstração.

(i) Suponhamos que $\Psi(\varphi) \neq 0$ para todo φ , digamos, $\Psi(\varphi) > 0$. Considere o Hamiltoniano truncado

$$h = \Psi(\varphi)r^n \quad (6.6)$$

e defina para cada $h > 0$, a variável $I = I(h)$ por

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^\tau r(h, \varphi) d\varphi, \quad (6.7)$$

onde

$$r(h, \varphi) = \frac{h^{1/n}}{\Psi(\varphi)^{1/n}}. \quad (6.8)$$

Considere a função geradora $S(I, \varphi)$ definida por

$$S(I, \varphi) = \int_0^\varphi r(h, \theta) d\theta. \quad (6.9)$$

Eliminando o fator $h^{1/n}$, obtemos

$$S(I, \varphi) = \beta IG(\varphi), \quad (6.10)$$

onde

$$\beta = 2\pi / \int_0^\tau \frac{d\theta}{\Psi(\theta)^{1/n}}, \quad G(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\Psi(\theta)^{1/n}}. \quad (6.11)$$

De acordo com o teorema 10 do capítulo 1, a função S define uma transformação simplética $(r, \varphi) \rightarrow (I, W)$ pelas relações:

$$W = \frac{\partial S}{\partial I} = \beta G(\varphi), \quad r = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \beta IG'(\varphi), \quad (6.12)$$

e o Hamiltoniano

$$H(r, \varphi, t) = \Psi(\varphi)r^n + O(r^{n+\frac{1}{2}}) \quad (6.13)$$

é transformado no novo Hamiltoniano (analítico em \sqrt{I}, W, t)

$$H(I, W, t) = \beta^n I^n + O(I^{n+\frac{1}{2}}), \quad (6.14)$$

desde que $G'(\varphi) = \Psi(\varphi)^{-1/n}$, temos que $\Psi(\varphi)G'(\varphi)^n = 1$.

Note que, como $\Psi(\varphi)$ is τ -periódica,

$$W(r, \varphi + \tau) = \beta G(\varphi + \tau) = \beta \int_0^{\varphi + \tau} \frac{d\theta}{\Psi(\theta)^{1/n}} = \quad (6.15)$$

$$= \beta \int_0^{\tau} \frac{d\theta}{\Psi(\theta)^{1/n}} + \beta \int_{\tau}^{\varphi + \tau} \frac{d\theta}{\Psi(\theta)^{1/n}} = 2\pi + W(r, \varphi), \quad (6.16)$$

assim, W é uma variável angular verdadeira. Portanto $K(I, W, t)$ é 2π -periódica em W e, claramente, T -periódico em t .

Considere a mudança de coordenadas $(I, W) \rightarrow (J, \psi)$ definida por

$$I = \sigma\gamma J, \quad W = \psi, \quad (6.17)$$

onde $\sigma > 0$ é um pequeno parâmetro, $1 \leq J \leq 2$ e γ é escolhido tal que $\beta^n \gamma^{n-1} = 1/n$. De acordo com o exemplo 3 subseção 1.2.2, a mudança de coordenadas 6.17 é simplética com multiplicador $\sigma\gamma$. Assim, o novo Hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{K}(J, \psi, t) = \frac{1}{n} \sigma^{n-1} J^n + O(\sigma^{n-\frac{1}{2}}), \quad (6.18)$$

e as correspondentes equações Hamiltonianas são

$$\frac{dJ}{dt} = O(\sigma^{n-\frac{1}{2}}), \quad \frac{d\psi}{dt} = -\sigma^{n-1} J^{n-1} + O(\sigma^{n-\frac{1}{2}}), \quad (6.19)$$

com o lado direito analítico em J, ψ, t , 2π -periódico em ψ e T -periódico em t , com $1 \leq J \leq 2$.

Integrando as equações (6.19) entre $t = 0$ e $t = T$, e denotando por J, ψ os valores iniciais e J_1, ψ_1 os valores finais, obtemos a aplicação

$$J_1 = J + \sigma^{n-\frac{1}{2}} F_1(J, \psi, \sigma) \quad (6.20)$$

$$\psi_1 = \psi - \sigma^{n-1} T J^{n-1} + \sigma^{n-\frac{1}{2}} F_2(J, \psi, \sigma),$$

definida e analítica na região $1 \leq J \leq 2$, $\psi \in \mathbb{R}$, $|\sigma| < \sigma_0$, with F_1, F_2 periódicas em ψ . Em virtude do caráter Hamiltoniano das equações diferenciais (6.19), de acordo com o corolário 3, temos que a aplicação (6.20) preserva área. Com isso, do Teorema da Curva Invariante (teorema 13) existe, para σ pequeno, curvas invariantes $J = J(\psi) = J(\psi + 2\pi)$, próximas de círculos, isto é, com

$J'(\psi) \sim 0$. Desde que $r = \sigma\gamma J$, a correspondente curva $r = r(\psi)$ pode ser tomada interior numa vizinhança suficientemente pequena da origem (tomando σ suficientemente pequeno). No espaço 3-dimensional (r, ψ, t) , identificando as seções $t = 0$ e $t = T$ obtemos um toro formado por curvas soluções que começam sobre a curva fechada $r = r(\psi)$. Pela unicidade das soluções, qualquer solução $(r(t), \psi(t))$ que começa num ponto interior da região limitada pela curva $r = r(\psi)$ não pode cruzar o toro e, portanto, $r(t)$ permanece pequena. Logo, $r(t)$ permanecerá pequena para todo t . Desde que as soluções estão no interior de um conjunto compacto elas estão definidas para todo tempo. Isto prova a estabilidade no sentido de Liapunov.

(ii) Agora provaremos a instabilidade. Assuma que $\Psi(\varphi^*) = 0$ and $\Psi'(\varphi^*) > 0$. Escolha $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\Psi(\varphi) \neq 0, \quad \text{e} \quad \Psi'(\varphi) > 0 \quad \text{para} \quad 0 < |\varphi - \varphi^*| \leq \delta. \quad (6.21)$$

Considere a função

$$V = r^n \sin \Phi, \quad (6.22)$$

onde $\Phi = \frac{\pi}{2\delta}(\varphi - \varphi^* + \delta)$.

Defina a região Ω como o conjunto de pontos (r, φ, t) tal que

$$\varphi^* - \delta < \varphi < \varphi^* + \delta. \quad (6.23)$$

Então, $V > 0$ em Ω e $V = 0$ sobre $\partial\Omega$, a fronteira de Ω . A derivada de V ao longo das soluções do sistema de equações associado a (6.5)

$$\dot{r} = \frac{\partial K}{\partial \varphi} = r^n \Psi'(\varphi) + O(r^{n+\frac{1}{2}}) \quad (6.24)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial K}{\partial r} = -nr^{n-1}\Psi(\varphi) + O(r^{n-\frac{1}{2}})$$

é dada por:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial t} = \quad (6.25)$$

$$= nr^{2n-1} \left[\Psi'(\varphi) \sin \Phi - \frac{\pi}{2\delta} \Psi(\varphi) \cos \Phi \right] + O(r^{2n-\frac{1}{2}}).$$

Para $0 < \varphi - \varphi^* < \delta$, temos $\pi/2 < (\pi/2\delta)(\varphi - \varphi^* + \delta) < \pi$ assim que $\cos \Phi < 0$. Também para $-\delta < \varphi - \varphi^* < 0$, tem-se $\cos \Phi > 0$ e portanto,

$$\Psi(\varphi) \cos \Phi < 0 \quad \text{sobre} \quad 0 < |\varphi - \varphi^*| < \delta. \quad (6.26)$$

Desde que $\Psi'(\varphi) > 0$ e $\sin \Phi > 0$ em $|\varphi - \varphi^*| < \delta$, temos $\Psi'(\varphi) \sin \Phi > 0$ neste intervalo. Como a função no interior dos colchetes que os dois somando não se anulam simultaneamente sobre o intervalo compacto $|\varphi - \varphi^*| \leq \delta$, segue-se que ela tem um mínimo positivo, e portanto, para r pequeno, concluímos que $dV/dt > 0$ sobre Ω , se r é suficientemente pequeno. Então, pelo Teorema de Chetaev no caso não autônomo, segue que o equilíbrio é instável. ■

6.3.2 O Teorema de Arnold-Moser para sistemas Hamiltonianos periódicos com um grau de liberdade

Suponha que o Hamiltoniano (6.4), escrito num sistema de coordenadas conveniente, assume a forma

$$H(r, \theta, t) = \frac{a}{b}r + \beta_2 r^2 + \dots + \beta_l r^l + \Psi(at + b\theta)r^m + H^\dagger(r, \theta, t) \quad (6.27)$$

onde

- (i) $m = l + 1/2$ ou $m = l + 1$ com $l \geq 1$;
- (ii) β_2, \dots, β_l são constantes;
- (iii) $\Psi(\cdot)$ é 2π -periódica e tem série de Fourier num único ângulo;
- (iv) $H^\dagger(r, \theta, t)$ é analítico em \sqrt{r} ; θ , e t e 2π -periódico em θ e t ;
- (v) $H^\dagger(r, \theta, t)$ é ao menos de ordem $r^{m+1/2}$.

Se o Hamiltoniano definido em (6.27) é tal que $a = 0$ e algum β_i é não nulo, então, escolhendo $\Psi(\varphi) = \beta_i$ onde i é o primeiro sub-índice com $\beta_i \neq 0$, pelo Teorema de Cabral-Meyer (teorema 39) segue que a origem é uma solução de equilíbrio estável. No caso em que $\beta_2 = \dots = \beta_l = 0$ então, fazendo a seguinte mudança de coordenadas dependendo de t :

$$r = I, \quad \phi = \frac{a}{b}t + \theta, \quad (6.28)$$

a qual é gerada pela função $S(r, \theta) = r(\theta + at/b)$, o Hamiltoniano nas novas coordenadas é

$$H = \Psi(b\phi)r^m + \dots, \quad (6.29)$$

e, assim, pelo Teorema de Cabral-Meyer 39 segue que se $\Psi(\varphi)$ nunca se anula então a solução de equilíbrio é estável. Se Ψ tem um zero simples então a solução de equilíbrio é instável.

No caso em que $a \neq 0$ e pelo menos um β_i é não nulo, temos o seguinte teorema:

Teorema 40 (Teorema de Arnold-Moser para sistemas com um grau de liberdade) *Considere o Hamiltoniano (6.27), onde $a \neq 0$ e pelo menos um β_i é não nulo, então a origem é uma solução de equilíbrio é estável.*

Demonstração. Suponhamos sem perda de generalidade que $\beta_2 \neq 0$ e faça o re-escalamento $J = \varepsilon^{-2}r$ e $\varphi = \varphi$ a qual é uma mudança de coordenadas ε^{-2} -simplética, assim o novo Hamiltoniano que continuaremos denotando por H é dado por:

$$H = \frac{a}{b}J + \varepsilon^2\beta_2J^2 + O(\varepsilon^3), \quad (6.30)$$

cujas equações de movimento devem satisfazer

$$\dot{J} = O(\varepsilon^3) \quad (6.31)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{a}{b} - 2\varepsilon^2\beta_2J + O(\varepsilon^3).$$

Integrando entre $t = 0$ e $t = 2\pi$, e denotando por J, φ os valores iniciais e por J_1 e φ_1 os valores finais, obtemos a aplicação

$$J_1 = J + O(\varepsilon^3) \quad (6.32)$$

$$\varphi_1 = \varphi - \frac{2\pi a}{b} - 4\pi\beta_2\varepsilon^2J + O(\varepsilon^3),$$

onde $O(\varepsilon^3)$ é uma função 2π -periódica em φ . De acordo com o corolário 3 do capítulo 1, esta aplicação (6.32) preserva área em virtude do caráter Hamiltoniano das equações diferenciais em (6.31). Portanto, pelo Teorema da Curva Invariante (teorema 13) existe, para ε pequeno, curvas invariantes $J = J(\varphi) = J(\varphi + 2\pi)$, próximas aos círculo, isto é, com $J'(\varphi) \sim 0$. Desde que $r = \varepsilon^2J$, a correspondente curva $r = r(\varphi)$ pode ser tomada interior numa vizinhança suficientemente pequena da origem (tomando ε suficientemente pequeno). No espaço 3-dimensional (r, φ, t) , identificando as seções $t = 0$ e $t = 2\pi$ obtemos um toro formado por curvas soluções que começam sobre a curva fechada $r = r(\varphi)$. Pela unicidade das soluções, qualquer solução $(r(t), \varphi(t))$ que começa num ponto interior da região limitada pela curva $r = r(\varphi)$ não pode cruzar o toro e portanto, $r(t)$ permanece pequena. Portanto, $r(t)$ permanecerá pequena para todo t . Desde que as soluções estão no interior de um conjunto compacto elas estão definidas para todo tempo. Isto prova a estabilidade do equilíbrio. ■

6.3.3 Aplicação do Teorema de Arnold-Moser ao estudo da estabilidade no caso não ressonante

Suponha que os expoentes característicos da parte linear do sistema (6.4) não apresentam relações de ressonância até ordem $2n$, isto é, $k\omega$ não é um inteiro para $k = 1, \dots, 2n$. Nestas condições, de acordo a subseção 3.4.3, existe uma mudança de coordenadas simpléticas tal que o Hamiltoniano (6.4) escrito nas novas coordenadas assume a forma:

$$H(q, p, t) = \omega r + c_2 r^2 \dots + c_n r^n + H^+(q, p, t), \quad (6.33)$$

onde $2r = q^2 + p^2$ e H^+ é analítica com respeito a q, p com ordem não inferior a $2n + 1$ e 2π -periódica em t .

No caso em que existe uma constante $c_k \neq 0$ para algum $2 \leq k \leq n$, pelo teorema de Arnold-Moser 40, segue que a origem é uma posição de equilíbrio estável.

6.3.4 Aplicação do Teorema de Cabral-Meyer ao estudo da estabilidade no caso ressonante

Vamos, agora, estudar a estabilidade do equilíbrio no caso em que $k\omega$ é inteiro para algum $2 \leq k \leq 2n$. Neste caso, em geral, não é possível escrever o Hamiltoniano (6.4) na forma (6.33) mas, muitas vezes, é possível escrever na forma (6.5) e, portanto, podemos aplicar o Teorema de Cabral-Meyer 39.

Inicialmente, como os multiplicadores característicos do sistema linearizado $e^{2\pi\omega it}$ e $e^{-2\pi\omega it}$ têm módulo unitário e são distintos, pelo teorema 29, segue que a origem é um equilíbrio linearmente estável. Independente 2ω ser ou não ser inteiro, para saber sobre a estabilidade do equilíbrio precisamos de mais algumas informações do tipo: 3ω é inteiro? e 4ω ?, pois, neste caso, precisamos normalizar mais termos da função Hamiltoniana para aplicar um dos teoremas vistos acima (Teorema de Arnold-Moser e Teorema de Cabral-Meyer).

Para o caso em que 3ω é inteiro (isto inclui o caso em que ω é inteiro), de acordo com o que foi visto na subseção 3.4.1, aplicando uma transformação de Birkhoff, é possível escrever o

Hamiltoniano (6.4) na forma

$$H(q, p, t) = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) + 3u_{30}(q^3 - 3qp^2) + 2v_{30}(p^3 - 3pq^2) + H^+(q, p, t), \quad (6.34)$$

onde

$$\begin{aligned} u_{30} &= x_{30}\cos(mt) - y_{30}\sin(mt), \quad v_{30} = x_{30}\sin(mt) + y_{30}\cos(mt), \\ x_{30} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u'_{30}\cos(mt) + v'_{30}\sin(mt)) dt, \\ y_{30} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (v'_{30}\cos(mt) - u'_{30}\sin(mt)) dt, \end{aligned}$$

$3\omega = m$ e a função H^+ é 2π -periódica em t e $H^+ = O((|q| + |p|)^4)$.

No caso em que $x_{30}^2 + y_{30}^2 \neq 0$, fazendo a mudança de coordenadas simplética definida no exemplo 8 da seção 1.2.2, temos que o Hamiltoniano assume a forma:

$$H(r, \phi, t) = 4\sqrt{2(x_{30}^2 + y_{30}^2)}r^{3/2}\sin(3\phi) + O(r^2). \quad (6.35)$$

Definindo $\Psi(\phi) = 4\sqrt{x_{30}^2 + y_{30}^2}\sin(3\phi)$, como Ψ tem zero simples, pelo Teorema de Cabral-Meyer 39, segue que a origem é uma solução de equilíbrio instável, com isso, temos demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 41 *Se $x_{30}^2 + y_{30}^2 \neq 0$ então a origem é um equilíbrio instável para o sistema Hamiltoniano associado a (6.4).*

No caso em que $x_{30}^2 + y_{30}^2 = 0$, temos que $u_{30} = v_{30} = 0$ e, portanto, $H_3(q, p, t) = 0$. Logo, temos que normalizar mais termos para saber sobre a estabilidade do equilíbrio, para isto precisamos saber se 4ω é inteiro ou não.

Se o número 3ω não é inteiro e $4\omega = m \in \mathbb{Z}$, de acordo com o que foi discutido na subseção 3.4.2, a forma normal da função Hamiltoniana até termos de quarta ordem é:

$$H(q, p, t) = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) + \frac{u_{22}}{4}(q^2 + p^2)^2 + u_{40}(q^4 - 6q^2p^2 + p^4) - 4v_{40}qp(q^2 - p^2) + H^+(q, p, t), \quad (6.36)$$

onde

$$u_{40} = x_{40}\cos(mt) - y_{40}\sin(mt), \quad v_{40} = x_{40}\sin(mt) + y_{40}\cos(mt),$$

$$x_{40} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u'_{40} \cos(mt) + v'_{40} \sin(mt)) dt,$$

$$y_{40} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (v'_{40} \cos(mt) - u'_{40} \sin(mt)) dt,$$

$$u_{22} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} u'_{22} dt,$$

e a função H^+ é 2π -periódica em t e $H^+ = O((|q| + |p|)^5)$.

No caso em que $x_{40}^2 + y_{40}^2 = 0$, temos que $u_{40} = v_{40} = 0$ e, portanto, a função Hamiltoniana se escreve na forma

$$H(q, p, t) = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) + \frac{u_{22}}{4}(q^2 + p^2)^2 + H^+(q, p, t). \quad (6.37)$$

Se $u_{22} \neq 0$, pelo teorema de Arnold-Moser 40, segue que a origem é uma posição de equilíbrio estável. No caso em que $u_{22} = 0$ temos que $H_4 = 0$ e, portanto, temos que normalizar mais termos para concluir sobre a estabilidade do equilíbrio.

Se $x_{40}^2 + y_{40}^2 \neq 0$, por meio de fórmulas análogas às definidas no exemplo 8 da seção 1.2.2, o Hamiltoniano pode ser posto na forma:

$$H(r, \phi, t) = [c_2 + b_2 \cos(\phi)]r^2 + H^+(r, \phi, t), \quad (6.38)$$

onde $b_2 = 4\sqrt{x_{40}^2 + y_{40}^2}$ e a função $H^+ = O(r^{5/2})$ é periódica relativamente a ϕ e t , com período 2π e 8π , respectivamente.

Definindo a função $\Psi(\phi) = c_2 + b_2 \cos(\phi)$, pelo teorema de Cabral-Meyer 39, temos que origem é uma solução de equilíbrio estável se $|c_2| > b_2$ e instável se $|c_2| \leq b_2$. Temos assim demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 42 *No caso em que $x_{40}^2 + y_{40}^2 \neq 0$, o equilíbrio é estável se $|c_2| > b_2$ e instável se $|c_2| \leq b_2$. Se $x_{40}^2 + y_{40}^2 = 0$ e $u_{22} \neq 0$, temos a estabilidade do equilíbrio.*

Vamos agora obter o resultado de estabilidade sob ressonância de ordem arbitrária.

Se $k\omega$ não é inteiro para $k = 1, \dots, 2n$, aplicando uma transformação de Birkhoff, podemos escrever o Hamiltoniano (6.4) na forma (6.33). Vimos que, quando um dos coeficientes c_1, \dots, c_n

do Hamiltoniano (6.33) é não nulo, então o equilíbrio é estável. No caso em que todos são nulos, o Teorema de Arnold-Moser 39 não pode ser aplicado e, precisamos normalizar mais termos no Hamiltoniano para obter informações sobre estabilidade.

Se o número $(2n + 1)\omega$ é inteiro, verifica-se que a função Hamiltoniana (6.4) pode ser levada à forma:

$$H(r, \phi, t) = ar^{n+1/2} \cos(2n + 1)\phi + O(r^{n+1}). \quad (6.39)$$

Defina $\Psi(\phi) = a \cos(2n + 1)\phi$. Se $a \neq 0$, como Ψ tem zero simples, pelo Teorema de Cabral-Meyer 39, segue que a origem é uma solução de equilíbrio instável.

Assuma, agora, que $a = 0$ ou o número $k\omega$ não é inteiro para $k = 1, \dots, 2n + 1$, mas $(2n + 2)\omega$ seja inteiro. Neste caso, o Hamiltoniano pode ser posto na forma:

$$H(r, \phi, t) = r^{n+1}[c + b \cos(2n + 2)\phi] + O(r^{n+3/2}), \quad (6.40)$$

onde b e c são constantes.

Definindo $\Psi(\phi) = c + b \cos(2n + 2)\phi$, pelo teorema de Cabral-Meyer 39, segue que:

- (i) se $|b| < |c|$, a origem é uma solução de equilíbrio estável;
- (ii) se $|b| \geq |c|$, a origem é uma solução de equilíbrio estável.

Com estas considerações temos demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 43 *Se $a \neq 0$ temos a instabilidade da solução nula. No caso em que $a = 0$, se $|b| \geq |c|$, a origem é instável e, se $|b| < |c|$ estável.*

6.4 Sistemas com dois graus de liberdade

Suponha, agora, que a função Hamiltoniana periódica H dada em (6.1) tenha dois graus de liberdade, ou seja, H é da forma:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2, t) = \frac{\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_2^2 + p_2^2) + H_3 + H_4 \dots, \quad (6.41)$$

onde H_k é um polinômio homogêneo de grau k nas variáveis reais q_1, q_2, p_1, p_2 e 2π -periódico em t . Nesta seção, estudaremos a estabilidade da solução de equilíbrio nula no caso em que os expoentes característicos apresentam uma única relação de ressonância de terceira ou quarta ordem.

6.4.1 Estabilidade sob única ressonância de terceira ordem

Suponha que ω_{1i} e ω_{2i} não apresentam relações de ressonância até segunda ordem e que apresenta uma única relação de ressonância de terceira ordem. Analisaremos os casos:

- (1) $3\omega_1 = m$;
- (2) $3\omega_2 = m$;
- (3) $\omega_1 + 2\omega_2 = m$;
- (4) $2\omega_1 + \omega_2 = m$.

Nestes casos, de acordo com a subseção 3.5.1, a forma normal do Hamiltoniano (6.41) tem parte cúbica dada, em cada um dos casos acima, por:

- (1) $H_3 = 2u_{3000}(q_1^3 - 3q_1p_1^2) + 2v_{3000}(p_1^3 - 3p_1q_1^2)$;
- (2) $H_3 = 2u_{0300}(q_2^3 - 3q_2p_2^2) + 2v_{0300}(p_2^3 - 3p_2q_2^2)$;
- (3) $H_3 = 2u_{1200}[q_1(q_2^2 - p_2^2) - 2q_2p_1p_2] - 2v_{1200}[p_1(q_2^2 - p_2^2) + 2q_1q_2p_2]$;
- (4) $H_3 = 2u_{2100}[q_2(q_1^2 - p_1^2) - 2q_2p_1p_1] - 2v_{2100}[p_2(q_1^2 - p_1^2) + 2q_2q_1p_1]$.

Nas fórmulas acima usamos as seguintes notações:

$$u_{k_1k_2l_1l_2} = x_{k_1k_2l_1l_2} \cos(mt) + y_{k_1k_2l_1l_2} \sin(mt),$$

$$v_{k_1k_2l_1l_2} = -x_{k_1k_2l_1l_2} \sin(mt) + y_{k_1k_2l_1l_2} \cos(mt),$$

$$x_{k_1k_2l_1l_2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u'_{k_1k_2l_1l_2} \cos(mt) + v'_{k_1k_2l_1l_2} \sin(mt)) dt,$$

$$y_{k_1k_2l_1l_2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (v'_{k_1k_2l_1l_2} \cos(mt) - u'_{k_1k_2l_1l_2} \sin(mt)) dt,$$

$$3\lambda = m.$$

Para cada um dos casos temos a seguinte afirmação:

Teorema 44 *Nos casos acima, se $x_{k_1k_2l_1l_2}^2 + y_{k_1k_2l_1l_2}^2 \neq 0$ então a origem é uma posição de equilíbrio instável do sistema Hamiltoniano associado a H .*

Demonstração. Vamos, inicialmente, ver a demonstração para o caso (1). O caso (2), segue de forma análoga ao (1).

Como, por hipótese, $x_{3000}^2 + y_{3000}^2 \neq 0$, após a mudança simplética (dependente do tempo) de coordenadas

$$q_j = \sqrt{2r_j} \operatorname{sen}(\phi_j - \omega_j t + \theta), \quad p_j = \sqrt{2r_j} \operatorname{cos}(\phi_j - \omega_j t + \theta), \quad (6.42)$$

onde

$$\operatorname{sen}(3\theta) = \frac{x_{3000}}{\sqrt{x_{3000}^2 + y_{3000}^2}}, \quad \operatorname{cos}(3\theta) = \frac{y_{3000}}{\sqrt{x_{3000}^2 + y_{3000}^2}}, \quad (6.43)$$

o Hamiltoniano assume a forma:

$$H(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = -4\sqrt{2(x_{0030}^2 + y_{0030}^2)} r_1^{3/2} \operatorname{sen}(3\phi_1) + O((r_1 + r_2)^2). \quad (6.44)$$

Para provar a instabilidade usaremos o Teorema de Chetaev 36. Seja V a função $V = V_1 V_2$ na forma:

$$V_1 = r_1^\alpha - r_2^2, \quad V_2 = r_1^{3/2} \operatorname{cos}(6\phi_1) \quad (\alpha > 2). \quad (6.45)$$

Para a região $V > 0$ tomamos $V_1 > 0$ e $\frac{-\pi}{12} < \phi_1 < \frac{\pi}{12}$. Observe que na fronteira desta região V_1 ou V_2 se anula e dentro, vale a igualdade

$$r_2 = \beta r_1^{\alpha/2}, \quad 0 < \beta < 1, \quad (6.46)$$

sendo $\beta^2 = \frac{r_2^2}{r_1^\alpha}$. O parâmetro α será escolhido de modo que a derivada de V ao longo das soluções do sistema Hamiltoniano associado a H seja definido positiva na região $V > 0$. Para $2 < \alpha < 3$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & 6\sqrt{2(x_{0030}^2 + y_{0030}^2)} r_1^{\alpha+2} [(2\alpha \operatorname{cos}(3\phi_1) + f_1) \operatorname{cos}(6\phi_1) + \\ & 3(1 - \beta^2)(\operatorname{cos}(3\phi_1) + \operatorname{sen}(3\phi_1) \operatorname{sen}(6\phi_1) + f_2)], \end{aligned} \quad (6.47)$$

onde as funções f_1 e f_2 tendem a zero quando r_1 tende a zero. Na região $V > 0$, ocorre a desigualdade

$$\operatorname{cos}(3\phi_1) > \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{cos}(3\phi_1) + \operatorname{sen}(3\phi_1) \operatorname{sen}(6\phi_1) \geq 1. \quad (6.48)$$

Portanto, de (6.46) e (6.47) e pela proposição 4, segue que na região $V > 0$, numa região suficientemente próxima da origem, a função $\frac{dV}{dt}$ é definida positiva e, de acordo com o Teorema de Chetaev 36, temos que o equilíbrio é instável.

No caso (3), após a mudança de coordenadas (6.42), onde, agora,

$$\operatorname{sen}(3\theta) = \frac{y_{0012}}{\sqrt{x_{0012}^2 + y_{0012}^2}}, \quad \operatorname{cos}(3\theta) = \frac{x_{0012}}{\sqrt{x_{0012}^2 + y_{0012}^2}}, \quad (6.49)$$

obtemos

$$H(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = -4\sqrt{2(x_{0012}^2 + y_{0012}^2)}r_2r_1^{1/2}\operatorname{sen}(\phi_1 + 2\phi_2) + O((r_1 + r_2)^2). \quad (6.50)$$

A instabilidade é demonstrada com a ajuda da função de Chetaev $V = V_1V_2$, onde

$$V_1 = r_2^\alpha - (r_2 - 2r_1)^2, \quad V_2 = r_2r_1^{1/2}\operatorname{cos}2(\phi_1 + 2\phi_2) \quad (2 < \alpha < 3). \quad (6.51)$$

A demonstração da instabilidade no caso (4) é análoga ao caso (3). ■

Observação: Se $x_{k_1k_2l_1l_2}^2 + y_{k_1k_2l_1l_2}^2 = 0$, temos que $H_3 = 0$ e, portanto, precisamos normalizar mais termos dos Hamiltoniano H para conhecer a estabilidade do equilíbrio.

6.4.2 Estabilidade sob única ressonância de quarta ordem

Suponhamos, agora, que os expoentes característicos ω_1i e ω_2i não apresentam relações de ressonância até terceira ordem (ou $H_3 = 0$) e que apresentam uma única relação de ressonância de quarta ordem, para qual temos as seguintes possibilidades:

- (1) $4\omega_1 = m$;
- (2) $4\omega_2 = m$;
- (3) $2(\omega_1 + \omega_2) = m$;
- (4) $\omega_1 + 3\omega_2 = m$;
- (5) $3\omega_1 + \omega_2 = m$.

Vamos estudar a estabilidade da origem em cada um destes casos. De acordo com a seção 3.5.2, temos que a forma normal do Hamiltoniano H , dado em (6.41), tem a forma:

$$H(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = \omega_1r_1 + \omega_2r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + H'_4 + \dots \quad (6.52)$$

onde, em cada um dos casos acima, H'_4 é dado respectivamente por:

- (1) $H'_4(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = \sqrt{x_{0004}^2 + y_{0004}^2} \text{sen}(4\phi_1) r_1^2;$
- (2) $H'_4(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = \sqrt{x_{0004}^2 + y_{0004}^2} \text{sen}(4\phi_2) r_2^2;$
- (3) $H'_4(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = \sqrt{x_{2200}^2 + y_{2200}^2} \text{sen}2(\phi_1 + \phi_2);$
- (4) $H'_4(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = \sqrt{x_{1300}^2 + y_{1300}^2} \text{sen}(\phi_1 + 3\phi_2);$
- (5) $H'_4(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, t) = \sqrt{x_{3100}^2 + y_{3100}^2} \text{sen}(3\phi_1 + \phi_2),$

desde que $x_{k_1 k_2 l_1 l_2}^2 + y_{k_1 k_2 l_1 l_2}^2 \neq 0$. No caso em que $x_{k_1 k_2 l_1 l_2}^2 + y_{k_1 k_2 l_1 l_2}^2 = 0$ ou $\omega_1 i, \dots, \omega_n i$ não apresentam relações de ressonância de quarta ordem, temos que $H'_4 = 0$. Neste caso, não temos critérios para conhecer a estabilidade do equilíbrio.

Introduzindo as seguintes notações:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sqrt{x_{0040}^2 + y_{0040}^2}, & B_1 &= c_{20}, \\
 A_2 &= \sqrt{x_{0004}^2 + y_{0004}^2}, & B_2 &= c_{02}, \\
 A_3 &= \sqrt{x_{2200}^2 + y_{2200}^2}, & B_3 &= c_{20} + c_{11} + c_{02}, \\
 A_4 &= 3\sqrt{3(x_{1300}^2 + y_{1300}^2)}, & B_4 &= c_{20} + 3c_{11} + c_{02}, \\
 A_5 &= 3\sqrt{3(x_{3100}^2 + y_{3100}^2)}, & B_5 &= 9c_{20} + 3c_{11} + c_{02},
 \end{aligned} \tag{6.53}$$

temos o seguinte teorema:

Teorema 45 *Se $A_j > |B_j|$, então a posição de equilíbrio é instável.*

Demonstração. Inicialmente, demonstraremos o caso (1). Para isto, considere a função de Chetaev na forma $V = V_1 V_2$, onde

$$V_1 = r_1^\alpha - r_2^2, \quad V_2 = r_1^2 \cos(4a\phi_1), \tag{6.54}$$

sendo $2 < \alpha < 3$ e $a = 1 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Para a região $V > 0$, tomemos a região $V_1 > 0$ e $\frac{-\phi}{8a} < \phi_1 < \frac{\pi}{8a}$. Na fronteira desta região V_1 ou V_2 se anula e no interior

$$r_2 = \beta r_1^{\alpha/2}, \quad (0 < \beta < 1). \tag{6.55}$$

A derivada de V ao longo das soluções do sistema Hamiltoniano associado a H é da forma:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & 4r_1\alpha + 3\{(\alpha A_1 \cos(4\phi_1))\cos(4a\phi_1) + 2(1 - \beta^2)[A_1 \cos(4\epsilon\phi_1) - \\ & B_1 \sin(4a\phi_1) + \epsilon \sin(4\phi_1)(A_1 \sin(4\phi_1) - B_1)]\}, \end{aligned} \quad (6.56)$$

onde as funções g_1 e g_2 são tão pequenas quanto se deseje quando r_1 tende a zero.

De (6.56) e pela proposição 4, para $A_1 > |B_1|$ e, tomando ϵ suficientemente pequena, a função $\frac{dV}{dt}$ é definida positiva na região $V > 0$, numa vizinhança da origem e, pelo Teorema de Chetaev 36, temos que o equilíbrio é instável.

No caso (3), a instabilidade é provada com a ajuda da função de Chetaev $V = V_1 V_2$, onde

$$V_1 = r_2^\alpha - (r_1 - r_2)^2, \quad V_2 = r_1 r_2 \cos 2a(\phi_1 + \phi_2), \quad (6.57)$$

onde $2 < \alpha < 3$ e $a = 1 + \epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$.

No caso (4), A função V pode ser tomada na forma $V = V_1 V_2$, onde

$$V_1 = r_2^\alpha - (r_2 - 3r_1)^2, \quad V_2 = r_1 r_2^{3/2} \cos 2a(\phi_1 + 3\phi_2), \quad (6.58)$$

onde $2 < \alpha < 3$ e $a = 1 + \epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$.

A demonstração no caso (2) é análogo ao (1) e, o caso (5) ao (4). ■

6.5 Resultados para sistemas com n graus de liberdade

Assumiremos, nesta seção, que o Hamiltoniano H definido em (6.1) tenha n graus de liberdade. Estudaremos a estabilidade da solução de equilíbrio nula no caso em que os expoentes característicos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ apresentam uma única relação de ressonância de terceira ou quarta ordem.

Inicialmente, suponha que os expoentes característicos apresentam uma única relação de ressonância de terceira ordem de uma das formas:

$$(1) \quad 3\omega_1 = m \in \mathbb{Z};$$

$$(2) 2\omega_1 + \omega_2 = m \in \mathbb{Z};$$

$$(3) \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = m \in \mathbb{Z}.$$

Nestes casos, a forma normal de Gustavson de H até os termos de terceira ordem, tem a forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (q_j^2 + p_j^2) + H_3^+ + H_4 + \dots, \quad (6.59)$$

onde H_3^+ , nos casos (1)-(3) é dado, respectivamente, por:

$$(1) H_3 = 2u_s(q_1^3 - 3q_1p_1^2) - 2v_s(p_1^3 - 3p_1q_1^2);$$

$$(2) H_3 = 2u_s[q_2(q_1^2 - p_1^2) - 2q_1q_1p_2] - 2v_s[p_2(q_1^2 - p_1^2) + 2q_1p_1p_2];$$

$$(3) H_3 = 2u_s[q_3(q_1q_2 - p_1p_2) - p_3(q_1p_2 + q_1q_2)] - 2v_s[p_3(q_1q_2 - p_1p_2) + q_3(q_1p_2 + q_1q_2)],$$

sendo

$$u_s = x_s \cos(mt) + y_s \sin(mt),$$

$$v_s = -x_s \sin(mt) + y_s \cos(mt),$$

$$x_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u'_s \cos(mt) - v'_s \sin(mt)) dt,$$

$$y_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (v'_s \cos(mt) + u'_s \sin(mt)) dt,$$

$$3\lambda = m.$$

Para estes casos, temos o seguinte teorema:

Teorema 46 *Se $x_s^2 + y_s^2 \neq 0$, então o equilíbrio é instável.*

Demonstração. Inicialmente, fazemos a mudança de coordenadas simplética,

$$q_j =, \quad p_j =, j = 1, \dots, n. \quad (6.60)$$

Com isso, o novo Hamiltoniano nos casos (1)-(3), tem a forma:

$$(1) H = A_1 r_1^{3/2} \sin(3\phi_1) + H_4 + H_5 + \dots, \text{ onde } A_1 = \text{fazer};$$

$$(2) H = A_2 r_1 r_2^{1/2} \sin(2\phi_1 + \phi_2) + H_4 + H_5 + \dots, \text{ onde } A_2 = \text{fazer};$$

$$(3) H = A_3 r_1^{1/2} r_2^{1/2} r_3^{1/2} \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + H_4 + H_5 + \dots, \text{ onde } A_3 = \text{fazer}.$$

Para provar a instabilidade usaremos o Teorema de Chetaev 36. Seja V a função $V = V_1 V_2 \dots V_n$ onde, nos casos (1)-(3)

- (1) $V_1 = r_1^{3/2} \cos(6\phi_1)$ e $V_j = r_1 - r_j$, $j = 2, \dots, n$;
 (2) $V_1 = r_1 r_2^{1/2}$ e $V_j = r_1 - r_j$, $j = 2, \dots, n$;
 (3) $V_1 = r_1 r_2 r_3 \cos 2(\phi_1 + \phi_3 + \phi_4)$ e $V_j = r_1 - r_j$, $j = 2, \dots, n$.

Para a região $V > 0$ tomamos $V_j > 0$, $j = 1, \dots, n$. Observe que na fronteira desta região V se anula e dentro, vale a igualdade

$$r_j = \beta_j r_1^{\alpha_j/2}, \quad 0 < \beta_j < 1, \quad (6.61)$$

sendo $0 < \beta_j = \frac{r_j}{r_1} < 1$. A derivada de V ao longo das equações do movimento, nos casos (1)-(3), valem:

$$(1) \dot{V} = \frac{3}{2} A_1 r_1^{n+1} g_1(\phi_1) + O(r_1^{n+3/2}),$$

onde

$$g_1(\phi_1) = 3[\cos(3\phi_1) + \sin(3\phi_1)\sin(9\phi_1)] + 2\gamma \cos(3\phi_1)\cos(6\phi_1),$$

sendo $\gamma = \sum_{i=2}^n \prod_{j \neq i, j=1}^n (1 - \beta_j)$;

$$(2) \dot{V} = \text{Fazer}$$

$$(3) \dot{V} = A_3 r_1^{n+5/2} g_3(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + O(r_1^{n+3}), \text{ onde } g_3(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) = \delta_1 \cos(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + \delta_2 \cos(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \cos 2(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3), \text{ sendo } \delta_1 = \text{ e } \delta_2 = .$$

Na região $V > 0$, ocorre a desigualdade

$$\cos(3\phi_1) > \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos(3\phi_1) + \sin(3\phi_1)\sin(6\phi_1) \geq 1. \quad (6.62)$$

Portanto, pela proposição 4, segue que na região $V > 0$, numa região suficientemente próxima da origem, a função $\frac{dV}{dt}$ é definida positiva e, de acordo com o Teorema de Chetaev 36, temos que o equilíbrio é instável. ■

Se $x_s^2 + y_s^2 = 0$, temos que $u_s = v_s = 0$ e, portanto, a parte cúbica da forma normal de Gustavson de H é nula, a resposta à estabilidade está nos termos de ordem superior a três. Vamos agora estudar a estabilidade neste caso, assumindo que os expoentes característicos apresentam uma única relação de ressonância de quarta ordem.

De forma análoga a normalização dos termos de quarta ordem do Hamiltoniano com dois graus de liberdade da subseção 3.5.2, sob a presença da única relação de ressonância de quarta ordem,

dadas nos casos (3) e (4) acima, o sistema Hamiltoniano com n graus de liberdade H , escrito num sistema de coordenadas conveniente assume a forma:

$$H = \omega_1 r_1 + \dots + \omega_n r_n + \sum_{j_1 + \dots + j_n = 2} c_{j_1 \dots j_n} r_{j_1}^{j_1} \dots r_{j_n}^{j_n} + H'_4 + \dots \quad (6.63)$$

onde $H'_4 = H'_4(r_1, \dots, r_n, \phi_1, \dots, \phi_n, t)$ é dado nos casos (3) e (4) respectivamente por:

$$(3) H'_4 = \sqrt{x_s^2 + y_s^2} \text{sen}(4\phi_j) r_j^2;$$

$$(4) H'_4 = \sqrt{x_s^2 + y_s^2} \text{sen}2(\phi_{j_1} + \phi_{j_2}),$$

desde que $x_s^2 + y_s^2 \neq 0$. No caso em que $x_s^2 + y_s^2 = 0$ ou $\omega_1 i, \dots, \omega_n i$ não apresentam relações de ressonância de quarta ordem, temos que $H'_4 = 0$.

Introduzindo as seguintes notações:

$$\begin{aligned} A_3 &= \sqrt{x_s^2 + y_s^2}, & B_3 &= c_k, \\ A_4 &= \sqrt{x_s^2 + y_s^2}, & B_4 &= \sum_{j_1 + \dots + j_n = 2} c_{j_1 \dots j_n}, \end{aligned} \quad (6.64)$$

sendo k a n -upla de números inteiros tal que a j -ésima componente fale dois e as demais zero. De forma idêntica a demonstração do Teorema 45, temos a validade do seguinte teorema:

Teorema 47 *Se $A_j > |B_j|$, então a posição de equilíbrio é instável.*

Capítulo 7

Estabilidade de equilíbrios para sistemas Hamiltonianos autônomos

Neste capítulo, forneceremos alguns resultados sobre estabilidade de equilíbrios para sistemas Hamiltonianos autônomos. Para os sistemas com dois graus de liberdade, apresentaremos dois teoremas muito importantes, são eles: o Teorema de Arnold-Moser ([2] e [3]) e o Teorema de Cabral-Meyer [6], os quais aplicaremos ao estudo da estabilidade do equilíbrio de alguns sistemas Hamiltonianos particulares.

7.1 Introdução

Considere o Hamiltoniano autônomo com n graus de liberdade

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + H_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \dots, \quad (7.1)$$

onde H_k é um polinômio homogêneo de grau k . Suponha que a origem é uma solução de equilíbrio do sistema associado a H . Se pelo menos um dos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ do sistema linearizado associado a H tem parte real não nula, pelo teorema 30, temos que a origem é instável no sentido de Liapunov. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, são imaginários puros e distintos, digamos, $\lambda_j = \omega_j i \neq 0$, de acordo

com o corolário 5, existe uma mudança de coordenadas simpléticas tal que H_2 escrito nas novas coordenadas (por simplicidade usaremos a mesma notação) assume a forma:

$$H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (q_j^2 + p_j^2). \quad (7.2)$$

Se $\omega_1, \dots, \omega_n$ têm o mesmo sinal, H_2 é definida positiva e, como consequência do corolário 10, temos que a origem é um equilíbrio estável. Para sistemas Hamiltonianos com um grau de liberdade, temos demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 48 *Suponha que o Hamiltoniano (7.1) tenha um grau de liberdade e seja $\lambda \neq 0$ o autovalor da matriz do sistema linearizado associado. Então, a origem é um equilíbrio estável se, e somente se, λ for imaginário puro.*

Para sistemas Hamiltonianos onde o número de graus de liberdade maior que um, só falta estudar o caso em que a parte real dos autovalores são todas nulas. O estudo destes casos ainda não está completo, no entanto, para sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade, nos últimos anos, devido a grandes Matemáticos como Arnold, Cabral, Markeev, Meyer, Moser, Sokol'skii entre outros, tem-se tido um progresso significativo, o qual mostraremos a continuação.

7.2 O Teorema de Arnold-Moser para sistemas Hamiltonianos autônomos com dois graus de liberdade

O Teorema da Curva Invariante 13 pode ser usado para estabelecer resultados sobre estabilidade de pontos de equilíbrio. Em particular, temos o Teorema de Arnold-Moser e o Teorema de Cabral-Meyer. Nesta seção, veremos o primeiro teorema e na próxima seção, o segundo.

Considere um sistema Hamiltoniano autônomo com dois graus de liberdade e Hamiltoniano H . Suponha que H está normalizado e que nas coordenadas simpléticas q_1, q_2, p_1, p_2 , H assume a forma:

$$H = H_2 + H_4 + \dots + H_{2N} + H^*, \quad (7.3)$$

onde

- (i) H é uma função real analítica numa vizinhança da origem de \mathbb{R}^4 ;
- (ii) H_{2k} , $1 \leq k \leq N$, é um polinômio homogêneo de grau k em r_1, r_2 , onde $r_j = \frac{q_j^2 + p_j^2}{2}$, $j=1,2$.
- (iii) H^* tem uma expansão em série que começa com termos de grau ao menos $2N + 1$;
- (iv) $H_2 = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2$ onde ω_i são números reais não nulos.

Existem algumas informações implícitas sobre a forma de H , são elas:

- (1) Se considerarmos o Hamiltoniano truncado $H = H_2$, ou seja, o sistema linearizado, então verifica-se que o problema corresponde ao movimento de dois osciladores harmônicos desacoplados com frequências ω_1 e ω_2 .
- (2) Se ω_1 e ω_2 possuem sinais iguais então, de acordo com a introdução, temos a estabilidade do equilíbrio.
- (3) H_{2k} , $1 \leq k \leq N$, depende unicamente de r_1 e r_2 , assim, H está na forma normal de Birkhoff até os termos de grau $2N$. Isso, de acordo com a demonstração do teorema 15, requer que ω_1 e ω_2 não apresentem relações de ressonâncias até ordem $2N$.

Teorema 49 (Teorema de Arnold-Moser para sistemas com dois graus de liberdade) *Assumindo as hipótese acima sobre o Hamiltoniano, se para algum k , $1 \leq k \leq N$, $D_{2k} = H_{2k}(\omega_2, \omega_1) \neq 0$, ou equivalentemente, H_2 não divide H_{2k} , então a origem é um equilíbrio estável no sentido de Liapunov para o sistema Hamiltoniano associado a (7.3).*

Demonstração. Assuma que $D_2 = \dots = D_{2N-2} = 0$, mas $D_{2N} \neq 0$. Assim, deve existir um polinômio homogêneo de grau $2k - 2$ tal que $H_{2k} = H_2 F_{2k-2}$. O Hamiltoniano (7.3) assume a forma:

$$H = H_2(1 + F_2 + \dots + F_{2N-2}) + H_{2N} + H^*. \quad (7.4)$$

Usando as variáveis simpléticas ação-ângulo $r_i = \frac{q_i^2 + p_i^2}{2}$, $\phi_i = \arctan(\frac{q_i}{p_i})$, e re-escalando as novas variáveis por $I_i = \varepsilon^2 J_i$ e $\phi_i = \phi_i$, onde ε é um parâmetro pequeno. Esta mudança de variáveis

é ε^{-2} -simplética; assim, o novo Hamiltoniano (por simplicidade usaremos a mesma notação) é dado por:

$$H = H_2 F + \varepsilon^{2N-2} H_{2N} + O(\varepsilon^{2N+1}), \quad (7.5)$$

onde $F = 1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots + \varepsilon^{2N-4} F_{2N-4} + \varepsilon^{2N-2} F_{2N-2}$.

Fixe uma vizinhança da origem, digamos $|J_i| \leq 4$, e chamemos ela de W . De agora em diante nos restringiremos em nossa análise às condições iniciais em W . Seja $h \in [-1, 1]$ um novo parâmetro. Desde que $F = 1 + O(\varepsilon^2)$, tem-se

$$H - \varepsilon^{2N-1} h = KF, \quad (7.6)$$

onde $K = H_2 + \varepsilon^{2N-2} H_{2N-2} + O(\varepsilon^{2N-1})$. Como $F = 1 + O(\varepsilon^2)$, segue que $F > 0$ para ε suficientemente pequeno, assim, o nível de energia $H = \varepsilon^{2N-1} h$ é o mesmo nível de $K = 0$. Seja $\mathbf{z} = (J_1, J_2, \phi_1, \phi_2)$, e considere o sistema Hamiltoniano

$$\dot{\mathbf{z}} = J\nabla H = (J\nabla K)F + K(J\nabla F). \quad (7.7)$$

Sobre o nível $K = 0$, as equações do movimento assume a forma:

$$\dot{\mathbf{z}} = J\nabla H = (J\nabla K)F. \quad (7.8)$$

Para ε suficientemente pequeno e F positiva, podemos re-parametrizar o tempo por $d\tau = F dt$ e as equações acima se torna:

$$\mathbf{z}' = J\nabla K, \quad (7.9)$$

onde $' = \frac{d}{d\tau}$.

Assim, temos mostrado que na vizinhança W , para ε pequeno, o fluxo definido por H sobre o conjunto de nível onde $H = \varepsilon^{2N-1} h$ é uma re-parametrização do fluxo definido por K sobre o nível $K = 0$. Logo, é suficiente considerar o fluxo definido por K sobre o conjunto $K = 0$. Para este fim, as equações do movimento definido por K são

$$\begin{aligned} J'_i &= O(\varepsilon^{2N-1}) \\ \phi'_1 &= -\omega_1 - \varepsilon^{2N-2} \frac{\partial H_{2N}}{\partial J_1} + O(\varepsilon^{2N-1}) \\ \phi'_2 &= \omega_2 - \varepsilon^{2N-2} \frac{\partial H_{2N}}{\partial J_2} + O(\varepsilon^{2N-1}), \end{aligned} \quad (7.10)$$

onde consideraremos as seguintes condições iniciais $J_i(0) = J_i$ e $\phi_i(0) = \phi_0$. Destas equações a aplicação de Poincaré (para maiores detalhes sobre a aplicação de Poincaré, o leitor pode consultar Meyer [25]) será calculada sobre a seção $\phi_2=0 \bmod 2\pi$ no conjunto de nível $K = 0$ e, o Teorema da Curva Invariante 13 será aplicado.

Da primeira equação temos $J_i(\tau) = J_i + O(\varepsilon^{2N-1})$. Por outro lado, levando em conta que

$$H_{2N} = H_{2N}(J_1, J_2) = \sum_{k_1+k_2=2N} a_{k_1, k_2} J_1^{k_1} J_2^{k_2}, \quad (7.11)$$

então

$$\frac{\partial H_{2N}}{\partial J_2} = \sum_{k_1+k_2=2N} k_2 a_{k_1, k_2} J_1^{k_1} J_2^{k_2-1}, \quad (7.12)$$

analogamente tem-se a fórmula para $\frac{\partial H_{2N}}{\partial J_1}$. Substituindo na fórmula (7.11) os valores de $J_i(\tau)$, obtemos

$$\frac{\partial H_{2N}}{\partial J_2}(\tau) = \sum_{k_1+k_2=2N} k_2 a_{k_1, k_2} J_1^{k_1} J_2^{k_2-1} + O(\varepsilon^{2N-1}) = \frac{\partial H_{2N}}{\partial J_2}(0) + O(\varepsilon^{2N-1}), \quad (7.13)$$

e, de forma análoga conseguimos

$$\frac{\partial H_{2N}}{\partial J_1}(\tau) = \frac{\partial H_{2N}}{\partial J_1}(0) + O(\varepsilon^{2N-1}) \quad (7.14)$$

Da última equação em (7.10) calculamos o tempo T necessário para ϕ_2 crescer em 2π , e ele é dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2} \left(1 + \frac{\varepsilon^{2N-2}}{\omega_2} \frac{\partial H_{2N}}{\partial J_2} \right) + O(\varepsilon^{2N-1}). \quad (7.15)$$

Integrando agora a segunda equação em (7.10) entre $\tau = 0$ e $\tau = T$ e denotando por $\phi^* = \phi_1(T)$ temos

$$\phi^* = \phi_1 + \left(-\omega_1 - \varepsilon^{2N-2} \frac{\partial H_{2N}}{\partial J_1} \right) T + O(\varepsilon^{2N-1}), \quad (7.16)$$

De (7.15) e (7.16), obtemos

$$\phi^* = \phi_1 - \frac{2\pi\omega_1}{\omega_2} - \frac{2\pi\varepsilon^{2N-2}}{\omega_2^2} \left(\omega_2 \frac{\partial H_{2N}}{\partial J_1} + \omega_1 \frac{\partial H_{2N}}{\partial J_2} \right) + O(\varepsilon^{2N-1}), \quad (7.17)$$

as derivadas parciais que aparecem na fórmula acima são avaliadas em (J_1, J_2) . Da relação

$$K = H_2 + O(\varepsilon^{2N-2}) = \omega_1 J_1 - \omega_2 J_2 + O(\varepsilon^{2N-2}) = 0 \quad (7.18)$$

temos que

$$J_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} J_1 + O(\varepsilon^{2N-2}). \quad (7.19)$$

Substituindo este valor de J_2 na última expressão e ϕ^* e usando a identidade de Euler para funções homogêneas obtemos

$$\phi^* = \phi_1 + \alpha + \varepsilon^{2N-2} \beta J_1^{N-1} + O(\varepsilon^{2N-1}), \quad (7.20)$$

onde $\alpha = -2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}$ e $\beta = -2\pi \frac{N}{\omega_2^{N+1}} H_{2N}(\omega_2, \omega_1)$. Pela hipótese $D_{2N} = H_{2N}(\omega_2, \omega_1) \neq 0$ temos que $\beta \neq 0$. Junto com a equação (7.19), a equação

$$J_1 \rightarrow J_1 + O(\varepsilon^{2N-1}) \quad (7.21)$$

define uma aplicação que preserva área de uma região anular, digamos $\frac{1}{2} \leq J_1 \leq 3$ para ε suficientemente pequeno. Pelo Teorema da Curva Invariante 13, para ε suficientemente pequeno, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, existe uma curva invariante para esta aplicação dada por $J_1 = \rho(\phi_1, \varepsilon)$, onde $\frac{1}{2} \leq \rho(\phi_1, \varepsilon) \leq 3$, para todo ϕ_1 , além disso ρ é contínua e 2π -periódica em ϕ_1 . Para todo ε , $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, todas as soluções de (7.10) as quais começam em $K = 0$ com condição inicial $J_1, J_2 < \frac{1}{2}$ deve ter $J_1 < 3$ para todo τ . Isto é verdade para $h \in [-1, 1]$ devido a uniformidade no erro estimado. Desde que $K = 0$ temos que $J_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} J_1 + \dots$, uma cota sobre J_1 implica uma cota sobre J_2 . Assim, existem constantes c e k tais que se $J_1(\tau)$ e $J_2(\tau)$ satisfazem a equações (7.10), começando sobre $K = 0$, e $J_i(0) < 0$, então $|J_i(\tau)| \leq k$ para todo τ , $h \in [-1, 1]$ e $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Voltando as coordenadas originais, $(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2)$ e ao Hamiltoniano original H , isto significa que para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, todas as soluções do sistema (7.3) as quais começam sobre $H = \varepsilon^{2N-1} h$ e satisfaz $|r_i(0)| \leq \varepsilon^2 c$ deve satisfazer $|r_i(t)| \leq \varepsilon^2 k$ para todo t , $h \in [-1, 1]$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Desde que h é arbitrário, os conjuntos onde $|r_i(t)| \leq \varepsilon^2 c$ (ou $\varepsilon^2 k$) e $H = \varepsilon^{2N-1} h$ representa uma vizinhança da origem e ela pode ser escolhida arbitrariamente pequena, basta tomar ε pequeno. Assim, a origem é estável. ■

7.3 O Teorema de Cabral-Meyer para sistemas Hamiltonianos autônomos com dois graus de liberdade

Considere o sistema Hamiltoniano autônomo com dois graus de liberdade H , o qual escrito num sistema de coordenadas convenientes tem a forma:

$$H(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2) = H_2(r_1, r_2) + \dots + H_{2l-2}(r_1, r_2) + H_m(r_1, r_2, a\phi_1 + b\phi_2) + H^*, \quad (7.22)$$

onde

- (i) $H_2 = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2$ onde ω_i são números reais;
- (ii) H_{2j} , $1 \leq j \leq N$, é um polinômio homogêneo de grau j em r_1, r_2 , onde $r_j = \frac{q_j^2 + p_j^2}{2}$, $j = 1, 2$;
- (iii) $H_m(r_1, r_2, a\phi_1 + b\phi_2)$ é um polinômio de grau m em $\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}$;
- (iv) H^* só contém termos de ordem maior que m nas variáveis $\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}$;
- (v) H é uma função real analítica nas variáveis $\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}, \phi_1, \phi_2$ e 2π -periódica em ϕ_1 e ϕ_2 .

O fato de H_m ser uma função do único ângulo $a\phi_1 + b\phi_2$ é equivalente ao fato que H_m é constante ao longo das soluções do sistema Hamiltoniano linear associado a H_2 , isto é, H_m é constante ao longo das soluções de $\dot{\phi}_1 = -\omega_1, \dot{\phi}_2 = -\omega_2, \dot{r}_1 = 0, \dot{r}_2 = 0$.

Seja

$$\psi(\phi) = H_m(\omega_2, \omega_1, a\phi), \quad (7.23)$$

onde $\phi = \phi_1 + \frac{b}{a}\phi_2$.

Seja $D_{2j} = H_{2j}(\omega_2, \omega_1)$. Se, para algum $j = 2, \dots, l-1$, temos $D_{2j} \neq 0$, então o Teorema de Arnold-Moser 49 afirma a estabilidade da solução de equilíbrio $q_i = p_i = 0$. Portanto, assumiremos que $D_{2j} = 0$, para $j = 2, \dots, l-1$ e, assim, H_m é o termo que decidirá a estabilidade ou instabilidade do equilíbrio.

Teorema 50 (Teorema de Cabral-Meyer para sistemas com dois graus de liberdade) *Se*

$\psi(\phi) \neq 0$ para todo ϕ , então a origem é um equilíbrio estável. Se ψ tem uma raiz simples, isto é, se existe ϕ^* tal que $\psi(\phi^*) = 0$ e $\psi'(\phi^*) \neq 0$, então a solução de equilíbrio é instável.

Demonstração. Para a demonstração seguiremos as idéias utilizadas anteriormente para provar o Teorema de Arnold-Moser 49. Desde que $D_{2j} = 0$, o polinômio homogêneo H_{2j} tem H_2 como um fator, isto é, $H_{2j} = H_2 F_{2j-2}$, onde o segundo fato é um polinômio homogêneo de grau $j-1$ em r_1, r_2 . Temos

$$H = H_2 F + H_m(r_1, r_2, \phi) + \dots, \quad (7.24)$$

com $F = 1 + F_2 + \dots + F_{2l-4}$. Próximo da origem os valores de F_{2j} são pequeno e podemos tomar o recíproco da função F ,

$$F^{-1} = 1 + \dots, \quad (7.25)$$

onde \dots representam os termos de grau ao menos 1 em r_1, r_2 . Portanto, $\tilde{H} = F^{-1}H$ pode ser escrita como

$$\tilde{H} = H_2 + H_m(r_1, r_2, a\phi_1 + b\phi_2) + \dots, \quad (7.26)$$

onde \dots representam termos de grau ao menos $m+1$ em $\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}$.

Como $H = F\tilde{H}$ as equações de movimento são da forma:

$$\dot{z} = J\nabla H = FJ\nabla\tilde{H} + \tilde{H}\nabla F, \quad (7.27)$$

onde $z = (r_1, r_2, \phi_1, \phi_2)$ e J é a usual matriz 4×4 anti-simétrica da mecânica definida na primeira seção do capítulo 1. Se fazemos a mudança na escala no tempo por $d\tau = Fdt$ e denotamos $' = /d\tau$ as equações de movimento sobre o conjunto $H = 0$ (ou $\tilde{H} = 0$) são:

$$z' = J\nabla\tilde{H}. \quad (7.28)$$

Assim, próximo do equilíbrio o fluxo definido por \tilde{H} sobre $\tilde{H} = 0$ é uma re-parametrização do fluxo definido por H sobre $H = 0$.

É suficiente provar a instabilidade sobre a superfície $H = 0$ ou, equivalentemente, sobre $\tilde{H} = 0$. Resolvendo a equação

$$0 = \tilde{H} = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + H_m(r_1, r_2, a\phi_1 + b\phi_2) + \dots, \quad (7.29)$$

para r_2 , obtemos

$$r_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} r_1 + \frac{1}{\omega_2} H_m(r_1, \frac{\omega_1}{\omega_2} r_1, a\phi_1 + b\phi_2) + O(r_1^{\frac{m+1}{2}}) \quad (7.30)$$

ou, equivalentemente

$$r_2 = \frac{b}{a}r_1 + \frac{1}{\omega_2^{\frac{m+2}{2}}} H_m(\omega_2, \omega_1, a\phi_1 + b\phi_2) r_1^{\frac{m}{2}} + O(r_1^{\frac{m+1}{2}}). \quad (7.31)$$

O lado direito destas equações são analíticas em $\sqrt{r_1}, \phi_1, \phi_2$.

Seja $H^\dagger(r_1, \phi_1, \phi_2)$ menos o lado direito desta expressão para r_2 . Das equações de movimento observamos que ϕ_2 é uma função crescente de τ e assim podemos usar ela como uma variável independente (tempo). Assim, a função H^\dagger define um Hamiltoniano com grau de liberdade dependente do tempo, 2π -periódico em ϕ_1 e ϕ_2 .

Agora usaremos a mudança de coordenadas simplética

$$\phi = \phi_1 + \frac{b}{a}\phi_2, \quad r = r_1 \quad (7.32)$$

a qual é gerada pela função

$$S(r, \phi_1, \phi_2) = r \left(\phi_1 + \frac{b}{a}\phi_2 \right). \quad (7.33)$$

Desde que a derivada de S com respeito ao tempo ϕ_2 é

$$\frac{\partial S}{\partial \phi_2} = r \frac{b}{a} = \frac{b}{a}r_1, \quad (7.34)$$

a nova função Hamiltoniana é dada por:

$$K(r, \phi, \phi_2) = \Psi(\phi)r^n + O(r^{n+\frac{1}{2}}), \quad (7.35)$$

onde $n = m/2$ e

$$\Psi(\phi) = -\frac{1}{\omega_2^{n+1}} H_m(\omega_2, \omega_1, a\phi). \quad (7.36)$$

Note que K é 2π -periódica em ϕ e $2a\pi$ -periódica em ϕ_2 . Por hipótese, $\Psi(\phi)$ tem um zero simples e, portanto, pelo Teorema de Cabral-Meyer para sistemas com um grau de liberdade (teorema 39), segue que $r = 0$ é um equilíbrio instável para o sistema Hamiltoniano definido por K . Conseqüentemente, o equilíbrio $q_i = p_i = 0$ é instável.

Se desejarmos provar a estabilidade do equilíbrio sobre o nível $H = 0$ poderíamos simplesmente aplicar o teorema 39. A instabilidade do equilíbrio sobre o nível de energia $H = 0$ implica na

instabilidade sobre qualquer nível. Já para estabilidade isso não é verdade, com isso, vamos fazer um pouco mais de esforço para obter o resultado da estabilidade.

Primeiro escalamos as variáveis ação $r_i = \varepsilon^2 J_i$, onde ε é a pequena variável escala. Ela é uma mudança de coordenadas simplética com multiplicador ε^{-2} ; assim, o Hamiltoniano H torna-se (nas variáveis J_1, J_2, ϕ)

$$H = H_2 F + \varepsilon^{m-2} H_m + O(\varepsilon^{m-1}), \quad (7.37)$$

onde agora,

$$F = 1 + \varepsilon^2 F_2 + \cdots + \varepsilon^{2l-4} F_{2l-4}. \quad (7.38)$$

Fixando uma vizinhança limitada da origem, digamos, $|J_i| \leq 4$ assim o termo $O(\varepsilon^{m-1})$ é uniforme e, daqui em diante, restringiremos nossa atenção a esta vizinhança. Seja h um novo parâmetro no intervalo $[-1, 1]$. Desde que $F = 1 + \cdots$, temos

$$H - \varepsilon^{m-1} h = KF, \quad (7.39)$$

onde

$$K = H_2 + \varepsilon^m H_{m-2} + O(\varepsilon^{m-1}). \quad (7.40)$$

Para ε suficientemente pequeno, a função F é positiva na vizinhança sob consideração e assim o conjunto de nível $H = \varepsilon^{m-1} h$ é o mesmo que o conjunto de nível $K = 0$. Seja $z = (J_1, J_2, \phi_1, \phi_2)$ e seja ∇ o gradiente com respeito a estas variáveis. As equações de movimento são

$$\dot{z} = J\nabla H = F(J\nabla K) + K(J\nabla F). \quad (7.41)$$

Sobre o conjunto de nível $K = 0$, as equações tornam-se

$$\dot{z} = F(J\nabla K). \quad (7.42)$$

Para ε pequeno, como foi observado anteriormente, F é positiva. Assim, a re-parametrização $d\tau = F dt$ transforma estas equações em

$$z' = J\nabla K(z), \quad (7.43)$$

onde "prima" denota a derivada com respeito a τ .

Temos assim demonstrado que na vizinhança considerada, e para ε pequeno, o fluxo definido por H sobre cada nível de energia $H = \varepsilon^{m-1}h$ é uma re-parametrização do fluxo definido por K sobre cada nível $K = 0$. Agora, a estabilidade do equilíbrio sobre cada nível de energia

$$H = \varepsilon^{m-1}h \quad (7.44)$$

garante que variando o parâmetro h , a estabilidade do equilíbrio. Assim, é suficiente provar a estabilidade da origem para o sistema (7.43), sobre o conjunto e nível $K = 0$.

Agora, de (7.40), temos que:

$$K = \omega_1 J_1 - \omega_2 J_2 + \varepsilon^{m-2} H_m(J_1, J_2, a\phi) + O(\varepsilon^{m-1}). \quad (7.45)$$

Agora procederemos ao cálculo do Hamiltoniano no conjunto $K = 0$ justamente como no caso de instabilidade para obter (com $n = m/2$)

$$K(r, \phi, \phi_2) = \varepsilon^{m-2} \Psi(\phi) r^n + O(\varepsilon^{m-1}). \quad (7.46)$$

A diferença é que K é analítica para $\frac{1}{2} \leq r \leq 3$ para todo ε pequeno, e assim pelo Teorema da Curva Invariante 13 existem toros invariantes os quais separam o toro $r = 1$ do toro $r = 2$ para ε pequeno, digamos, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Para todo $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ toda solução a qual começa com $r \leq 1$ devemos ter $r \leq 2$ para todo τ . Desde que sobre $K = 0$ temos $J_2 = (\omega_1/\omega_2)J_1 + \dots$ e uma cota ou limitação sobre $r = J_1$ implica numa cota ou limitação sobre J_2 . Assim existem constantes c e k tais que se $J_1(\tau), J_2(\tau)$ satisfazem o sistema: para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, começam sobre $K = 0$ e satisfaz $|J_1(0)|, |J_2(0)| \leq c$ então $|J_1(\tau)|, |J_2(\tau)| \leq k$ para todo τ e $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Retornando as variáveis originais não escaladas com Hamiltoniano original H isto significa que para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ todas as soluções as quais começam sobre $H = \varepsilon^m h$ e satisfazem $|r_1(0)|, |r_2(0)| \leq \varepsilon^2 c$ deve satisfazer $|r_1(\tau)|, |r_2(\tau)| \leq \varepsilon^2 k$ para todo t e todo $-1 \leq h \leq 1$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Assim o equilíbrio é estável. ■

Vamos agora ver alguns comentários sobre o teorema acima.

Comentários: (1) Observe que para o resultado da estabilidade poderíamos ter H_m independente

do ângulo. Assim, este teorema inclui o Teorema de Arnold-Moser 49.

(2) Na maioria das vezes, como veremos nas próximas seções, quando os autovalores do sistema linearizado apresentam relações de ressonância é possível, por meio de uma mudança de coordenadas simplética, escrever o Hamiltoniano original na forma (7.22) e, assim, obter a resposta sobre a estabilidade do equilíbrio.

(3) Com uso deste teorema, vamos reescrever na continuação algumas demonstrações de teoremas envolvendo estabilidade de equilíbrios sob presença de ressonâncias, encontradas no livro de Markeev[24], de forma muito compacta, já que, obtida a forma normal da função Hamiltoniana e escrevendo esta nas variáveis ação-ângulo, os teoremas são uma consequência do Teorema de Cabral-Meyer 50.

7.3.1 Addendum ao Teorema de Cabral-Meyer

Suponha, agora, que o Hamiltoniano H definido em (7.1) tenha dois graus de liberdade e que os autovalores da matriz do sistema linearizado são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \omega_2 i \neq 0$. Assuma que, num sistema de coordenadas convenientes o Hamiltoniano H assume a forma:

$$H(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2) = \delta_2 \omega_2 r_2 + H_m(r_1, r_2, \phi_1) + H^*, \quad (7.47)$$

onde

- (i) $\delta_2 = \pm 1$;
- (ii) $H_m(r_1, r_2, a\phi_1)$ é um polinômio de grau m em $\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}$, onde $r_j = \frac{q_j^2 + p_j^2}{2}$, $j = 1, 2$;
- (iii) H^* só contém termos de ordem maior que m nas variáveis $\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}$;
- (iv) H é uma função real analítica nas variáveis $\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}, \phi_1, \phi_2$ e 2π -periódica em ϕ_1 e ϕ_2 .

Addendum 1 (Addendum ao Teorema de Cabral-Meyer) *Seja $\psi(\phi_1) = H_m(\omega_2, 0, \phi_1)$. Se ψ tem um zero simples então, a origem é um equilíbrio instável para o sistema associado a H . No caso em que $\Psi(\phi_1) \neq 0$ para todo ϕ_1 , temos a estabilidade do equilíbrio.*

Demonstração. Como na demonstração do Teorema de Cabral-Meyer 50, é suficiente provar a instabilidade sobre a superfície $H = 0$. Resolvendo a equação

$$0 = H = \delta_2 \omega_2 r_2 + H_m(r_1, r_2, \phi_1) + \dots, \quad (7.48)$$

para r_2 , obtemos

$$r_2 = -\frac{1}{\delta_2 \omega_2} H_m(r_1, 0, \phi_1) + O(r_1^{\frac{m+1}{2}}). \quad (7.49)$$

ou, equivalentemente

$$r_2 = -\frac{1}{\delta_2 \omega_2^{\frac{m+2}{2}}} H_m(\omega_2, 0, \phi_1) r_1^{\frac{m}{2}} + O(r_1^{\frac{m+1}{2}}). \quad (7.50)$$

O lado direito destas equações são analíticas em $\sqrt{r_1}, \phi_1, \phi_2$.

Seja $H^\dagger(r_1, \phi_1, \phi_2)$ menos o lado direito desta expressão para r_2 . Das equações de movimento observamos que ϕ_2 é uma função crescente de t e, assim, podemos usar ela como uma variável independente (tempo). Assim, a função H^\dagger define um Hamiltoniano com grau de liberdade dependente do tempo, 2π -periódico em ϕ_1 e ϕ_2 . A nova função Hamiltoniana é dada por:

$$K(r_1, \phi_1) = \Psi(\phi_1) r_1^n + O(r_1^{n+\frac{1}{2}}), \quad (7.51)$$

onde $n = m/2$ e

$$\Psi(\phi_1) = \frac{1}{\delta_2 \omega_2^{n+1}} H_m(\omega_2, 0, \phi_1). \quad (7.52)$$

Note que K é 2π -periódica em ϕ e $2a\pi$ -periódica em ϕ_2 . Por hipótese, $\Psi(\phi)$ tem um zero simples e, portanto, pelo Teorema de Cabral-Meyer para sistemas com um grau de liberdade (teorema 39), segue que $r_1 = 0$ é um equilíbrio instável para o sistema Hamiltoniano definido por K . Conseqüentemente, o equilíbrio $q_i = p_i = 0$ é instável. No caso em que Ψ nunca se anula, seguindo os mesmos passos da demonstração do Teorema de Cabral-Meyer 50 segue a estabilidade do equilíbrio. ■

7.4 Aplicação do Teorema de Arnold-Moser ao estudo da estabilidade no caso não ressonante

Para um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade cujos autovalores $\omega_1 i, \omega_2 i$ não apresentam relações de ressonância até quarta ordem, de acordo com a demonstração do teorema 15,

por meio de uma mudança de coordenadas simplética, podemos colocar a função Hamiltoniana na forma:

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O((r_1 + r_2)^{5/2}). \quad (7.53)$$

Neste caso, temos demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 51 *Se $c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 \neq 0$ então, o equilíbrio é estável.*

No caso em que $c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 = 0$, precisamos de mais algumas informações quanto as relações de ressonância dos autovalores. Se que $\omega_1 i, \omega_2 i$ não apresenta relações de ressonância ordem $2N$, de acordo com a demonstração do Teorema 15, existe uma transformação de coordenadas tal que o Hamiltoniano escrito nas novas coordenadas assume a forma:

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + \sum_{i+j=2}^N c_{ij} r_1^i r_2^j + O((r_1 + r_2)^{2N+1/2}). \quad (7.54)$$

Novamente, pelo Teorema de Arnold-Moser 49, segue a validade do teorema:

Teorema 52 *No caso em que $c_{N0}\omega_2^N + c_{N-1,1}\omega_2^{N-1}\omega_1 + \dots + c_{0N}\omega_1^N \neq 0$, temos a estabilidade do equilíbrio.*

Este teorema fornece uma generalização do teorema imediatamente acima.

7.5 Aplicação do Teorema de Cabral-Meyer ao estudo da estabilidade em alguns casos ressonantes

Nesta seção, estudaremos a estabilidade da solução de equilíbrio nula para sistemas Hamiltonianos autônomos com dois graus de liberdade quando os autovalores $\omega_1 i, \omega_2 i$ da matriz do sistema linearizado apresentam certas relações de ressonância. Lembramos que $\omega_1 i$ e $\omega_2 i$ apresentam relações de ressonância de ordem k se, e somente se, existem inteiros m_1 e m_2 satisfazendo $|m_1| + |m_2| = k$ tais que $m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 = 0$. Observe que, os autovalores λ_1, λ_2 apresentam relações de ressonância de primeira ordem se, e somente se, um dos autovalores é nulo. Para $k = 2$ as possibilidades são $\omega_1 + \omega_2 = 0$ e $\omega_1 - \omega_2 = 0$. Para $k = 3$, as possibilidades são $\omega_1 + 2\omega_2 = 0$, $\omega_1 - 2\omega_2$, $-\omega_1 + 2\omega_2$, $2\omega_1 + \omega_2 = 0$, $-2\omega_1 + \omega_2 = 0$ e $2\omega_1 - \omega_2 = 0$.

7.5.1 Estabilidade sob ressonância de primeira ordem: aplicação do addendum ao Teorema de Cabral-Meyer

Suponha que $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \omega_2 i \neq 0$. Dependendo da matriz do sistema linearizado ser diagonalizável ou não, temos dois casos para estudar a estabilidade da solução de equilíbrio nula.

No caso em que a matriz do sistema linearizado é diagonalizável, de acordo com a subseção 4.7.2, a forma normal de H até termos de terceiro grau é da forma

$$H = \frac{\delta_2 \omega_2}{2} (q_2^2 + p_2^2) + H^3(q_1, q_2) + H^4(q_1, q_2, p_1, p_2) + \dots \quad (7.55)$$

onde $H^3(q_1, p_1) = h_{3000}q_1^3 + h_{2010}q_1^2 p_1 + h_{1020}q_1 p_1^2 + h_{0030}p_1^3$.

No caso em que $H^3 \neq 0$, a função Hamiltoniano H escrito nas variáveis ação-ângulo, definidas por

$$q_j = \sqrt{2r_j} \cos(\phi_j), \quad p_j = \sqrt{2r_j} \sin(\phi_j), \quad (j = 1, 2), \quad (7.56)$$

assume a forma

$$H = \delta_2 \omega_2 r_2 + r_1^{3/2} H^3(\cos(\phi_1), \sin(\phi_1)) + O((r_1 + r_2)^2). \quad (7.57)$$

Defina $\Psi(\phi) = \omega_2^{3/2} H^3(\cos(\phi_1), \sin(\phi_1))$. Note que H^3 tem sinal variável numa vizinhança da origem, o que implica em dizer que a equação $\Psi(\phi_1) = 0$ tem solução ϕ_1^* e, pelo addendum ao Teorema de Cabral-Meyer 1, temos o seguinte teorema:

Teorema 53 *Se $\Psi'(\phi_1^*) \neq 0$, temos que a origem é um equilíbrio instável.*

Se $H^3 \equiv 0$ ou Ψ não tem zero simples, temos que normalizar mais termos do Hamiltoniano para conhecer a estabilidade do equilíbrio. A normalização de H somente até termos de quarta ordem (observe que o processo é convergente) nos fornece (ver subseção 4.7.2):

$$H = \frac{\delta_2 \omega_2}{2} (q_2^2 + p_2^2) + H_4(q_1, p_1) + H^5 + \dots, \quad (7.58)$$

onde

$$H^4 = h_{4000}q_1^4 + h_{3010}q_1^3 p_1 + h_{2020}q_1^2 p_1^2 + h_{1030}q_1 p_1^3 + h_{0030}q_1^4. \quad (7.59)$$

No caso em que $H^4 \neq 0$, defina a função $\Psi(\phi_1) = \omega_2^2 H_4(\cos(\phi_1), \sin(\phi_1))$. Se H^4 tem sinal constante numa vizinhança da origem, temos que Ψ nunca se anula. No caso em que H^4 muda de sinal, Ψ tem um zero ϕ_1^* . Segue, assim, do addendum 1 o seguinte teorema:

Teorema 54 *Se $H^4(q_1, p_1)$ tem sinal constante numa vizinhança da origem, então o equilíbrio é estável. Quando $\Psi'(\phi_1^*) \neq 0$, temos a instabilidade do equilíbrio.*

Quando $H^4 \equiv 0$ ou Ψ não tem zero simples, a análise da estabilidade é passada aos termos de ordem superior a 4. Em geral, se M é o menor inteiro tal que $H^M \neq 0$, então a forma normal do Hamiltoniano até termos de ordem M (ver subseção 4.7.2) é dada por:

$$H = \frac{\delta_2 \omega_2}{2} (q_2^2 + p_2^2) + H^M(q_1, p_1) + H^{M+1}(q_1, q_2, p_1, p_2) + \dots, \quad (7.60)$$

sendo

$$H^M(q_1, p_1) = \sum_{k_1+l_1=M} h_{k_1 0 l_1 0} q_1^{k_1} p_1^{l_1}. \quad (7.61)$$

Com isso, podemos generalizar os dois teorema acima da seguinte forma:

Teorema 55 *Se $H^M(q_1, p_1)$ tem sinal constante numa vizinhança da origem temos a estabilidade do equilíbrio. No caso em que H^M tem sinal variável, se a função*

$$\Psi(\phi_1) = H^M(\cos(\phi_1), \sin(\phi_1)) \quad (7.62)$$

é tal que um dos seus zeros é simples, temos que o equilíbrio é instável.

Corolário 15 *No caso em que M é ímpar, se a função $\Psi(\phi_1)$ tem zero simples, temos a estabilidade do equilíbrio.*

Vamos, agora, estudar a estabilidade no caso em que a matriz do sistema linearizado não é diagonalizável. Neste caso, de acordo com a subseção 4.7.2, existe uma mudança simplética de coordenadas tal que o Hamiltoniano escrito nas novas coordenadas assume a forma:

$$H_2(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{\delta_1}{2} q_1 + \frac{\delta_2 \omega_2}{2} (q_2^2 + p_2^2) + H^3 + H^4 + \dots, \quad (7.63)$$

onde

$$H^s = h_{0s00} p_1^s + \sum_{j=1}^{[s/2]} h_{0,s-j,j,j} p_1^{s-2j} (q_2^2 + p_2^2)^j, \quad (7.64)$$

para $s = 3, 4, \dots$. Seja M o menor inteiro tal que $h_{0M00} \neq 0$. Então, temos o seguinte teorema:

Teorema 56 *Se M é ímpar, então a origem é uma solução de equilíbrio instável para os sistema associado a H . No caso em que M é par, temos que o equilíbrio é estável se $\delta_1 h_{0M00} > 0$ e instável em caso contrário, ou seja, se $\delta_1 h_{0M00} < 0$.*

Demonstração. Inicialmente, fazendo a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1, & q_2 &= \sqrt{2r_2} \operatorname{sen}(\phi_2), \\ p_1 &= p_1, & p_2 &= \sqrt{2r_2} \operatorname{cos}(\phi_2), \end{aligned} \quad (7.65)$$

temos que

$$\begin{aligned} H(q_1, p_1, r_2, \phi_2) &= \frac{\delta_1}{2} q_1 + \delta_2 \omega_2 r_2 + \dots + h_{0s00} p_1^s + 2 \sum_{j=1}^{[s/2]} h_{0,s-j,j,j} p_1^{s-2j} r_2^j \dots \\ &= \frac{\delta_1}{2} q_1 + \delta_2 \omega_2 r_2 + h_{0M00} p_1^M + 2 \sum_{s=3}^M \sum_{j=1}^{[s/2]} h_{0,s-j,j,j} p_1^{s-2j} r_2^j \dots \end{aligned} \quad (7.66)$$

Observe que H não depende de ϕ_2 e, portanto, $\dot{r}_2 = 0$, ou seja, r_2 é uma integral primeira para o sistema associado a H . Podemos, assim, reduzir o sistema associado a H ao sistema com um grau de liberdade associado a

$$K(q_1, p_1) = \frac{1}{\delta_2 \omega_2} \left[\frac{\delta_1}{2} p_1^2 + h_{0M00} p_1^M + K^M + K^{M+1} \right], \quad (7.67)$$

sendo

$$\begin{aligned} K^M &= K^M(q_1, p_1) = \sum_{s=3}^M \sum_{j=1}^{[s/2]} h_{0,s-2j,j,j}^* q_1^{2j} p_1^{s-2j}, \\ K^{M+1} &= O((q_1 + P_1)^{(M+1)/2}) \end{aligned} \quad (7.68)$$

onde $h_{0,s-2j,j,j}^*$ são constantes obtidas a partir de $h_{0,s-2j,j,j}$. Para o sistema associado, tomamos ϕ_2 como nova variável independente (tempo).

Para provar a primeira afirmação, usaremos o teorema da instabilidade de Liapunov 35. Como função de Liapunov, considere a função de sinal variável

$$V = \delta_2 \omega_2 q_1 (1 - M \delta_1 h_{0M00} p_1). \quad (7.69)$$

A derivada de V em relação a ϕ_2 ao longo das equações do movimento é dada por

$$\frac{dV}{d\phi_2} = M h_{0M00} (q_1^2 + p_1^{M-1}) + V^*, \quad (7.70)$$

onde V^* denota termos da forma $q_1^m p_1^k$, onde $3 \leq m+k \leq M-1$, com $m \neq 0$. Numa vizinhança suficientemente pequena da origem a função $dV/d\phi_2$ tem sinal definido. Temos assim demonstrado a primeira afirmação do teorema.

Para demonstrar a segunda parte do teorema, faremos uma mudança de coordenadas simplética $(q_1, q_2) \mapsto (r, \phi)$ dada por

$$q_1 = \sqrt{2}r^{M/(M+2)}S(\phi), \quad p_1 = \frac{M+2}{2\sqrt{2}}r^{2/(M+2)}C(\phi), \quad (7.71)$$

onde $S(\phi)$ e $C(\phi)$ são funções definidas pelas fórmulas

$$C'(\phi) = -S(\phi), \quad S'(\phi) = C^{M-1}(\phi), \quad C(0) = 1, \quad S(0) = 1, \quad C^M(\phi) + \frac{1}{2}MS^2(\phi) = 1.$$

A função Hamiltoniana H escrita nas novas coordenadas r e ϕ assume a forma

$$K(r, \phi) = r^\alpha \Psi(\phi) + O(r^{\alpha+1/2}), \quad (7.72)$$

onde $\alpha = \frac{2M}{M+2}$ e

$$\Psi(\phi) = \frac{\delta_1}{\delta_2 \omega_2} [S^2(\phi) + AC^M(\phi)], \quad (7.73)$$

sendo $A = \delta_1 h_{0M00} \left(\frac{M+2}{2\sqrt{2}}\right)^M$. Se $\delta_1 h_{0M00} > 0$, temos que $\Psi(\phi)$ nunca se anula e, em caso contrário, tem zero simples. Logo, pelo Teorema de Cabral-Meyer para sistemas Hamiltonianos com um grau de liberdade (teorema 39), segue a conclusão do teorema. ■

O coeficiente h_{0M00} está relacionado com os coeficiente do Hamiltoniano inicial. Por exemplo, se o Hamiltoniano inicial tem termo geral

$$H_s = \sum_{k_1+k_2+l_1+l_2=s} a_{k_1 k_2 l_1 l_2} q_1^{k_1} q_2^{k_2} p_1^{l_1} p_2^{l_2}, \quad (7.74)$$

temos que

$$h_{0300} = a_{0300}, \quad (7.75)$$

$$h_{0400} = a_{0400} - \frac{\delta_1}{2} a_{1100}^2 + \frac{3\delta_1}{2} a_{2100} a_{0300} - \frac{\delta_2}{\omega_2} a_{0210} a_{0201}.$$

7.5.2 Estabilidade sob ressonância de segunda ordem

Suponhamos, agora, que $\omega_1 i$ e $\omega_2 i$ apresentam a relação de ressonância de segunda ordem $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Estudaremos a estabilidade da origem em dois casos: quando a matriz do sistema linearizado é diagonalizável e quando não é.

No caso em que a matriz do sistema linearizado é diagonalizável, de acordo com a subseção 3.6.1, existe uma transformação simplética de coordenadas que transforma o Hamiltoniano inicial $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ em

$$\begin{aligned}
 H = & \omega(r_1 - r_2) + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + \\
 & 2r_1r_2[k_{2002}\cos 2(\phi_1 + \phi_2) - l_{2002}\sin 2(\phi_1 + \phi_2)] + \\
 & 2r_1^{3/2}r_2^{1/2}[k_{1120}\sin 2(\phi_1 + \phi_2) - l_{1120}\cos 2(\phi_1 + \phi_2)] + \\
 & 2r_1^{1/2}r_2^{3/2}[k_{1102}\sin(\phi_1 + \phi_2) - l_{1120}\cos(\phi_1 + \phi_2)] + O((r_1 + r_2)^{5/2})
 \end{aligned} \tag{7.76}$$

As fórmulas dos coeficientes $k_{2002}, l_{2002}, k_{1120}, l_{1120}, k_{1102}, l_{1102}, c_{20}, c_{11}, c_{02}$ foram dados na subseção 3.6.1.

Defina a função

$$\begin{aligned}
 \Psi(\phi) &= H_4(\omega_2, \omega_1, \phi) = H_4(\omega, \omega, \phi) \\
 &= \omega^2[a + b\cos(2\phi) + c\sin(2\phi) + d\cos(\phi) + e\sin(\phi)],
 \end{aligned} \tag{7.77}$$

onde $\phi = \phi_1 + \phi_2$, $a = c_{20} + c_{11} + c_{02}$, $b = k_{2002}$, $c = -l_{2002}$, $d = k_{1120} + k_{1102}$ e $e = -l_{1120} - l_{1102}$. Pelo Teorema de Cabral-Meyer 50, segue a validade do seguinte teorema:

Teorema 57 *Se a função $\Psi(\phi) = a + b\cos(2\phi) + c\sin(2\phi) + d\cos(\phi) + e\sin(\phi)$ nunca se anula então, o equilíbrio é estável. Se, no entanto, Ψ tem zero simples, temos a instabilidade do equilíbrio.*

No caso em que a matriz do sistema linearizado não é diagonalizável, de acordo com a subseção 3.6.1, num sistema de coordenadas conveniente (por simplicidade denotaremos pelas mesmas letras) H se escreve na forma:

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \omega(q_1p_2 - q_2p_1) + (p_1^2 + p_2^2)R(q_1, q_2, p_1, p_2) + H_5 + \dots, \tag{7.78}$$

onde $R(q_1, q_2, p_1, p_2) = A(p_1^2 + p_2^2) + B(q_1 p_2 - q_2 p_1) + C(q_1^2 + q_2^2)$. Os coeficientes A , B e C foram dados na subseção 3.6.1.

Teorema 58 *Se $A > 0$, o equilíbrio é formalmente estável. No caso em que $A < 0$, temos a instabilidade do equilíbrio.*

Demonstração. Por meio de uma mudança formal de coordenadas simpléticas, podemos por o Hamiltoniano H na forma:

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \omega(q_1 p_2 - q_2 p_1) + (p_1^2 + p_2^2)R(q_1, q_2, p_1, p_2) + \sum_{k_1+k_2+k_3=3}^{\infty} h_{k_1 k_2 k_3} (q_1^2 + p_2^2)^{k_1} (p_1^2 + p_2^2)^{k_2} (q_1 p_2 - q_2 p_1)^{k_3}. \quad (7.79)$$

Observe que a função $F = q_1 p_2 - q_2 p_1$ é uma integral primeira do sistema associado a H . Como H também é uma integral primeira (formal) do sistema associado a H , temos que a função $G = H - \omega F$ também é. Como $A > 0$, no desenvolvimento

$$G = G_2 + G_4 + \dots \quad (7.80)$$

a função

$$G_4 + G_4 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + (p_1^2 + p_2^2)[A(p_1^2 + p_2^2) + B(q_1 p_2 - q_2 p_1) + C(q_1^2 + q_2^2)] \quad (7.81)$$

é uma função definida positiva, donde, de acordo com a definição 17, temos que o equilíbrio é formalmente estável.

Para provar a instabilidade usaremos o Teorema da instabilidade de Liapunov (corolário 12).

Seja V a função dada por

$$V = q_1 p_1 + q_2 p_2. \quad (7.82)$$

Observe que V assume valores negativos (já que tem sinal variável) em cada vizinhança da origem, V tende a zero quando q_1, q_2, p_1 e p_2 tendem a zero e, ao longo das soluções do sistema Hamiltoniano associado a H , a função

$$\frac{dV}{dt} = -(q_1^2 + q_2^2) + 4A(p_1^2 + p_2^2)^2 + 2B(p_1^2 + p_2^2)(q_1 p_2 - q_2 p_1) + \dots \quad (7.83)$$

é negativa-definida quando $A < 0$, já que $q_1 p_2 - q_2 p_1$ é constante e próxima de zero numa vizinhança suficientemente pequena da origem. A função V satisfaz as hipóteses do corolário 12 e, portanto, se $A < 0$, temos a instabilidade do equilíbrio. ■

7.5.3 Estabilidade sob ressonância de terceira ordem

Suponhamos, nesta subseção, que $\omega_1 i$ e $\omega_2 i$ apresentam a relação de ressonância de terceira ordem $\omega_1 = 2\omega_2$. Neste caso, de acordo com a subseção 3.6.2, existe uma mudança de coordenadas simplética tal que o Hamiltoniano escrito nas novas coordenadas assume a forma:

$$H = 2\omega_2 r_1 - \omega_1 r_2 - r_2 r_1^{1/2} \sqrt{\omega_2(x_{1002}^2 + y_{1002}^2)} \text{sen}(\phi_1 + 2\phi_2) + O((r_1 + r_2)^2), \quad (7.84)$$

No caso em que $x_{1002}^2 + y_{1002}^2 \neq 0$, a função

$$\psi(\phi) = H_3(\omega_2, \omega_1, \phi) = -\omega_1 \omega_2^2 \sqrt{\omega_2(x_{1002}^2 + y_{1002}^2)} \text{sen}(\phi). \quad (7.85)$$

tem zero simples (por exemplo, $\phi^* = 0$) e, pelo Teorema de Cabral-Meyer 50, temos que o equilíbrio é instável. Se $x_{1002}^2 + y_{1002}^2 = 0$ e os autovalores não apresentam relações de ressonância de quarta ordem, então o Hamiltoniano H pode ser escrito na forma (7.54) e, pelo corolário 51, segue que se $c_{20}\omega_2^2 + 2c_{11}\omega_1\omega_2 + 4c_{02}\omega_1^2 \neq 0$ então o equilíbrio é estável. Podemos assim, afirmar a validade do seguinte teorema:

Teorema 59 *Se $x_{1002}^2 + y_{1002}^2 \neq 0$, o equilíbrio é instável. Se, no entanto, $x_{1002}^2 + y_{1002}^2 = 0$ e $c_{20}\omega_2^2 + 2c_{11}\omega_1\omega_2 + 4c_{02}\omega_1^2 \neq 0$, temos estabilidade.*

7.5.4 Estabilidade sob ressonância de quarta ordem

Suponha, agora, que $\omega_1 i$ e $\omega_2 i$ apresentam a relação de ressonância de quarta ordem $\omega_1 = 3\omega_2$. Neste caso, de acordo com a subseção 3.6.3, por meio de uma mudança de coordenadas simplética é possível escrever o Hamiltoniano na forma:

$$H = 3\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1 r_2 + c_{02}r_2^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \omega_2 r_1^{1/2} r_2^{3/2} \sqrt{x_{1003}^2 + y_{1003}^2} \cos(\phi_1 + 3\phi_2) + O((r_1 + r_2)^{5/2}). \quad (7.86)$$

Introduzindo a notação

$$a = c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{3}(\omega_1\omega_2)^{3/2}\sqrt{x_{1003}^2 + y_{1003}^2} \quad (7.87)$$

e considere a função

$$\psi(\phi) = H_4(\omega_2, \omega_1, \phi) = a + b\cos(\phi), \quad (7.88)$$

onde $\phi = \phi_1 + 3\phi_2$. Temos que ψ tem zero simples se $|a| \leq b$ e, em caso contrário, ψ nunca se anula, donde, pelo Teorema de Cabral-Meyer (teorema 50), temos demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 60 *Se $|a| \leq b$ então, o equilíbrio é instável. No entanto, se $|a| > 0$, temos estabilidade.*

7.6 Sistemas com três graus de liberdade

Considere o sistema Hamiltoniano autônomo com três graus de liberdade

$$H(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \omega_j (q_j^2 + p_j^2) + H_3(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \dots, \quad (7.89)$$

onde H_k é um polinômio homogêneo de grau k e $\omega_j \neq 0$, $j = 1, 2, 3$.

Fazendo a mudança de coordenadas simplética

$$q_j = \sqrt{2r_j} \operatorname{sen}(\phi_j), \quad p_j = \sqrt{2r_j} \operatorname{cos}(\phi_j), \quad (7.90)$$

o novo Hamiltoniano tem a forma:

$$H(r_1, r_2, r_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3) = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3 + H_3(r_1, r_2, r_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3) + \dots \quad (7.91)$$

Fixando a superfície de energia $H = h$, numa pequena vizinhança da origem podemos escrever r_3 na forma:

$$r_3 = -K(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad (7.92)$$

onde

$$K = -\frac{h}{\omega_3} + \frac{\omega_1}{\omega_2} r_1 + \frac{\omega_2}{\omega_3} r_2 + K_3(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3) + \dots, \quad (7.93)$$

sendo K_j polinômios homogêneos de grau j em $r_1, r_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3$. De acordo com a subseção 1.1.3, a função K representa um Hamiltoniano periódico com dois graus de liberdade tendo ϕ_3 como nova variável tempo. No caso em que apenas um dentre $3\omega_1, 3\omega_2, \omega_1 + 2\omega_2, 2\omega_1 + \omega_2, 4\omega_1, 4\omega_2, 2(\omega_1 + \omega_2), \omega_1 + 3\omega_2$ ou $3\omega_1 + \omega_2$ é múltiplo de ω_3 , os teoremas 44 e 45, da seção 6.4, fornecem um critério para conhecer a instabilidade da origem do sistema Hamiltoniano associado a K e, portanto, para o equilíbrio do sistema Hamiltoniano associado a H .

Capítulo 8

O problema restrito dos três corpos

O principal objetivo deste capítulo é fazer um estudo da estabilidade dos pontos de libração do problema restrito dos três corpos nos casos planar circular e espacial circular.

8.1 Formulação e subproblemas

Considere três corpos de massas positivas m_1, m_2 e m_3 movendo-se sob a ação mútua da atração gravitacional definida pela lei de Newton. Se $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ e \mathbf{q}_3 denotam os vetores posição das partículas de massas m_1, m_2 e m_3 , as equações de Newton para o movimento são:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{q_{12}^3} (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) + G \frac{m_1 m_3}{q_{13}^3} (\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1) \\ m_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 = G \frac{m_2 m_1}{q_{21}^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + G \frac{m_2 m_3}{q_{23}^3} (\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2) \\ m_3 \ddot{\mathbf{q}}_3 = G \frac{m_3 m_1}{q_{31}^3} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) + G \frac{m_3 m_2}{q_{32}^3} (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3), \end{array} \right. \quad (8.1)$$

onde $q_{ij} = \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|$, $i, j = 1, 2, 3$.

Suponha que $m_1 = 1 - \mu$ e $m_2 = \mu$, $\mu \in (0, 1/2]$, e que a massa m_3 é infinitesimal (corresponde a fazer $m_3 \rightarrow 0$), de modo que ela não influencia o movimento dos corpos m_1 e m_2 , chamados

de binários, mas é afetado por eles de forma usual. Nestas condições, as equações do movimento assumem a forma:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_1 = \frac{\mu}{q_{12}^3}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 = \frac{1-\mu}{q_{21}^3}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \\ \ddot{\mathbf{q}}_3 = \frac{1-\mu}{q_{31}^3}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) + \frac{\mu}{q_{32}^3}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3), \end{cases} \quad (8.2)$$

onde temos assumido sem perda de generalidade que $G = 1$ (mostramos no exemplo 2 da seção 1.2.2 que isso é possível). Se $\mathbf{q} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$, temos que

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{1}{\|\mathbf{q}\|^3}\mathbf{q}, \quad (8.3)$$

que corresponde a um problema de Kepler, cujas soluções são completamente conhecidas. Assim, o movimento de m_2 relativo a m_1 pode ser determinado. O estudo do movimento da massa m_3 é conhecido como problema restrito dos três corpos.

Seja r a distância entre m_1 e m_2 , p um parâmetro, e a excentricidade de sua órbita Kepleriana e θ a anomalia verdadeira. Então

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}. \quad (8.4)$$

Dependendo do valor da excentricidade podem-se distinguir as seguintes variantes do problema restrito de três corpos:

- (i) O problema restrito hiperbólico ($e > 1$): O movimento de m_2 é uma hipérbole;
- (ii) O problema restrito elíptico ($0 < e < 1$): O movimento de m_2 é uma elipse;
- (iii) O problema restrito circular ($e = 0$): O movimento de m_2 é uma circunferência;
- (iv) O problema restrito parabólico ($e = 1$): O movimento de m_2 é uma parábola;
- (v) O problema restrito linear: O movimento de m_2 é uma reta.

Se o corpo de massa infinitesimal, m_3 , permanece para todo tempo no plano do movimento de m_1 e m_2 , dizemos que o problema restrito correspondente é planar e, em caso contrário, espacial.

Dois exemplos servem para ilustrar a importância do problema restrito. Sabe-se que depois do Sol, o planeta mais pesado é Júpiter, o qual move-se numa elipse de excentricidade pequena,

a qual podemos assumir como primeira aproximação que ela é um círculo. Além disso, existem dois grupos de pequenos planetas, os asteróides Trojanos e Gregos, cujo movimento é controlado principalmente pelo Sol e Júpiter. Uma aproximação do seu movimento é dada por uma solução do problema restrito circular dos três corpos com o Sol e Júpiter com os primários. O segundo exemplo diz respeito à teoria Lunar, onde consideramos o movimento da Terra ao redor do Sol como circular. O corpo de massa infinitesimal aqui corresponde a Lua.

8.2 Equações do movimento

Introduzindo o potencial Newtoniano

$$U = U(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \frac{1 - \mu}{q_{13}} + \frac{\mu}{q_{23}} \quad (8.5)$$

as equações do movimento da partícula m_3 assumem a forma:

$$\ddot{\mathbf{q}}_3 = \nabla_{\mathbf{q}_3} U. \quad (8.6)$$

Esta é a forma de escrever as equações do movimento da massa m_3 num sistema de coordenadas genérico. Vamos escrever estas equações num sistema de coordenadas conveniente (sistema de coordenadas giratório), no qual as equações do movimento assumem uma forma particularmente simples.

Inicialmente vamos introduzir um sistema de coordenada $Oxyz$, com origem no centro de massa dos corpos m_1 e m_2 e com o plano Oxy coincidindo com o plano da órbita dos binários. Tomemos o eixo Ox ao longo da reta que liga m_1 a m_2 , na direção do corpo m_1 , com a menor mudança do eixo Ox para o eixo Oy coincidindo com o sentido de rotação de m_2 relativa ao corpo m_1 . O eixo Oz forma com os eixos Ox e Oy um sistema de coordenadas com a regra da mão direita.

Defina o referencial móvel:

$$e_1 = \frac{\mathbf{q}}{q}, \quad e_2 = e_3 \times e_1 \quad e \quad e_3 = \frac{\mathbf{C}}{c}, \quad (8.7)$$

onde $\mathbf{q} = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$, $C \neq 0$ é o momento angular, $q = \|\mathbf{q}\|$ e $c = \|C\|$. Derivando estas relações obtemos

$$\dot{e}_1 = \dot{\theta}e_2, \quad \dot{e}_2 = -\dot{\theta}e_1 \quad e \quad \dot{e}_3 = 0, \quad (8.8)$$

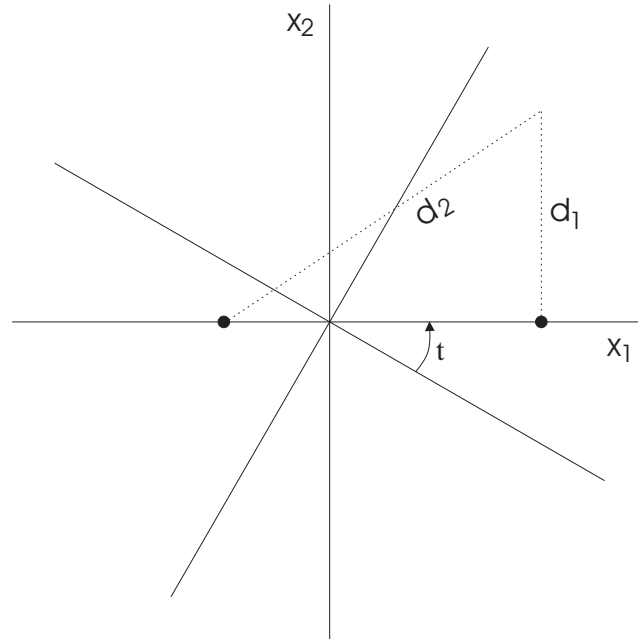


Figura 8.1: Sistema de coordenadas giratório.

onde θ representa o ângulo formado pelo vetor \mathbf{q} e o eixo Ox e, portanto, $\dot{\theta}$ representa a velocidade angular associado aos binários, ou seja, $\frac{c}{q^2}$. Por outro lado, temos que $(1 - \mu)\mathbf{q}_1 + \mu\mathbf{q}_2 = 0$ e $q = \|\mathbf{q}_1\| + \|\mathbf{q}_2\|$, assim, $\mathbf{q}_1 = -\|\mathbf{q}_1\| e_1$ e $\mathbf{q}_2 = \|\mathbf{q}_2\| e_2$. Logo,

$$\|\mathbf{q}_1\| = \mu q, \quad \|\mathbf{q}_2\| = (1 - \mu)q. \quad (8.9)$$

Seja $\mathbf{q}_3 = xe_1 + ye_2 + ze_3$ o vetor posição do corpo de massa infinitesimal. Assim, pelas equações (8.8) obtemos

$$\ddot{\mathbf{q}}_3 = (\ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2x)e_1 + (\ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2y)e_2 + \ddot{z}e_3 \quad (8.10)$$

e também verifica-se que

$$\nabla_{\mathbf{q}_3} U = U_x e_1 + U_y e_2 + U_z e_3. \quad (8.11)$$

Portanto, de (8.8) e (8.10) obtemos:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2x = U_x \\ \ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2y = U_y \\ \ddot{z} = U_z, \end{cases} \quad (8.12)$$

com

$$U = U(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mu) = \frac{1-\mu}{d_1} + \frac{\mu}{d_2}, \quad (8.13)$$

onde, de acordo com as equações (8.9), temos que

$$d_1 = q_{13} = \sqrt{(x + \mu r)^2 + y^2 + z^2} \quad e \quad d_2 = q_{23} = \sqrt{(x - (1-\mu)r)^2 + y^2 + z^2}. \quad (8.14)$$

Façamos agora a seguinte mudança de variáveis (devido a Nashville):

$$x = r\xi, \quad y = r\eta \quad e \quad z = r\zeta. \quad (8.15)$$

Além disso, tomemos como nova variável independente a anomalia verdadeira θ . Nestas novas variáveis as equações do movimento assumem a forma:

$$\begin{cases} \xi'' - 2\eta' = \frac{1}{1+e\cos\theta}\Omega\xi \\ \eta'' + 2\xi' = \frac{1}{1+e\cos\theta}\Omega\eta \\ \zeta'' = \frac{1}{1+e\cos\theta}\Omega\zeta, \end{cases} \quad (8.16)$$

onde $' = \frac{d}{d\theta}$ e

$$\Omega = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{2}e\cos\theta\zeta^2 + U. \quad (8.17)$$

Vamos agora obter a formulação Hamiltoniana deste sistema. Inicialmente faça:

$$p_\xi = \xi' - \eta, \quad p_\eta = \eta' + \xi, \quad p_\zeta = \zeta'. \quad (8.18)$$

Com isso, o sistema (8.16) pode ser escrito na forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi' = p_\xi + \eta \\ \eta' = p_\eta - \xi \\ \zeta' = p_\zeta \\ p'_\xi = p_\eta - \xi + \frac{1}{1+\epsilon\cos\theta}\Omega_\xi \\ p'_\eta = -p_\xi - \eta + \frac{1}{1+\epsilon\cos\theta}\Omega_\eta \\ p'_\zeta = \frac{1}{1+\epsilon\cos\theta}\Omega_\zeta, \end{array} \right. \quad (8.19)$$

que corresponde a um sistema Hamiltoniano com função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + p_\xi\eta - p_\eta\xi + \frac{\epsilon\cos\theta}{2(1+\epsilon\cos\theta)}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \frac{1}{1+\epsilon\cos\theta}\Omega. \quad (8.20)$$

8.3 Pontos de Libração

Em geral, o problema dos n -corpos não apresenta soluções de equilíbrio, pois se $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ fosse uma solução de equilíbrio de (1.8) teríamos

$$\nabla_{\mathbf{q}}U(\mathbf{q}_0) \cdot (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) = 0 \quad (8.21)$$

e, pela identidade de Euler para funções homogêneas concluiríamos que $U(\mathbf{q}_0) = 0$, uma contradição. Assim, como caso particular, temos que o problema restrito dos três corpos não apresenta soluções de equilíbrio. No entanto:

Teorema 61 *Nas coordenadas de Nashville definida em (8.15) temos cinco soluções de equilíbrio do problema restrito dos três corpos, a qual, três delas L_1 , L_2 e L_3 estão situados na reta que passa pelos corpos primários e os outros dois L_4 e L_5 formam com os primários triângulos equiláteros.*

Demonstração. Uma posição fixa (ξ_0, η_0, ζ_0) é uma solução de (8.16) se, e somente se, $\zeta_0 = 0$ e ξ_0 e η_0 satisfazem ao sistema de equações com duas incógnitas

$$\begin{cases} \frac{\xi+\mu}{r_1}U_{r_1} + \frac{\xi+\mu-1}{r_2}U_{r_2} = -\xi \\ \frac{\eta}{r_1}U_{r_1} + \frac{\eta}{r_2}U_{r_2} = -\eta. \end{cases} \quad (8.22)$$

O sistema de equações (8.22) é equivalente ao conjunto dos dois sistemas de equações

$$\begin{cases} \eta = 0 \\ \frac{\xi+\mu}{r_1}U_{r_1} + \frac{\xi+\mu-1}{r_2}U_{r_2} = -\xi \end{cases} \quad (8.23)$$

$$\begin{cases} U_{r_1} = -\frac{r_1}{r_2}U_{r_2} - r_1 \\ \frac{\xi+\mu}{r_1}U_{r_1} + \frac{\xi+\mu-1}{r_2}U_{r_2} = -\xi. \end{cases} \quad (8.24)$$

Vamos obter as soluções de equilíbrio de (8.15) ou equivalentemente, as soluções de (8.23) e (8.24). Consideremos, inicialmente, o sistema (8.24). Substituindo a expressão para U_{r_1} da primeira equação (8.24) na segunda equação, obtemos:

$$U_{r_2} = -\mu r_2, \quad (8.25)$$

e, então, da primeira equação segue-se que:

$$U_{r_1} = -(1-\mu)r_1. \quad (8.26)$$

Usando a expressão (8.13) para U , concluímos que o sistema de equações (8.24) tem uma única solução real, a qual $r_1 = r_2 = 1$. Esta solução corresponde a um dos pontos de libração triangulares L_4 e L_5 . O ponto L_4 é dada pelas coordenadas $(\frac{1-2\mu}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ e o ponto L_5 tem coordenadas $(\frac{1-2\mu}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$. Ele é simétrico ao ponto L_4 , relativamente ao eixo $O\xi$.

Os pontos de libração colineares são dados pelo segundo sistema de equações (8.23), o qual, para $\eta = \zeta = 0$, é escrito na forma:

$$f(\xi) = \xi - (1-\mu)\frac{|\xi+\mu|}{(\xi+\mu)^3} - \mu\frac{|\xi+\mu-1|}{(\xi+\mu-1)^3} = 0. \quad (8.27)$$

A função f é contínua e limitada em todo o eixo real, exceto nos valores de ξ iguais a $\pm\infty$, $-\mu$ e $1-\mu$, onde ela se torna infinita. Calculando a derivada de f , temos que

$$f'(\xi) = 1 + 2(1-\mu) \frac{|\xi+\mu|}{(\xi+\mu)^4} + 2\mu \frac{|\xi+\mu-1|}{(\xi+\mu-1)^4}. \quad (8.28)$$

Em cada um dos três intervalos

$$(-\infty, -\mu), \quad (-\mu, 1-\mu), \quad (1-\mu, +\infty), \quad (8.29)$$

em que o eixo numérico é decomposto pelos pontos de descontinuidade, a função f é estritamente crescente, pois $f'(\xi)$ é sempre positiva. Usando os seguintes fatos:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} f(\xi) &= -\infty, & \lim_{\xi \rightarrow \infty} f(\xi) &= \infty \\ \lim_{\xi \rightarrow \mu^-} f(\xi) &= \infty, & \lim_{\xi \rightarrow \mu^+} f(\xi) &= -\infty \\ \lim_{\xi \rightarrow (1-\mu)^-} f(\xi) &= \infty, & \lim_{\xi \rightarrow (1-\mu)^+} f(\xi) &= -\infty. \end{aligned}$$

Concluimos que, em cada um dos intervalos (8.29), existe uma, e somente uma, solução $\xi = \xi_0$ da equação (8.27). Por tradição é estabelecida que o equilíbrio que está no intervalo $(-\infty, -\mu)$ é denotado por L_3 , o equilíbrio do intervalo $(-\mu, 1-\mu)$ é denotado por L_1 e, finalmente, o ponto de libração L_2 fica no intervalo $(1-\mu, +\infty)$. ■

As soluções de equilíbrio nas coordenadas de Nashville são chamados de pontos de libração ou soluções de equilíbrio relativo do problema restrito dos três corpos. Num sistema de coordenadas fixo, os pontos de libração são soluções no qual os três corpos têm uma configuração invariável.

Os pontos de libração L_1 , L_2 e L_3 foram descobertos por Euler[11] em 1767, enquanto que L_4 e L_5 , por Lagrange[21] em 1772. No início, logo depois da descoberta dos pontos de libração, pensava-se que eles representavam apenas interesse teórico, como chegou a afirmar Lagrange[21]. Mas, a descoberta, no ano de 1906, de um grupo de asteróides movendo-se na vizinhança dos pontos de libração Lagrangeanos do sistema Sol-Júpiter mostrou o grande valor prático dos pontos de libração para o estudo do movimento dos corpos cósmicos no sistema solar. Em tempos bem recentes, o interesse nos pontos de libração cresceu bastante em virtude das necessidades práticas da pesquisa cósmica. Existem projetos de lançamentos de satélites artificiais na vizinhança dos pontos

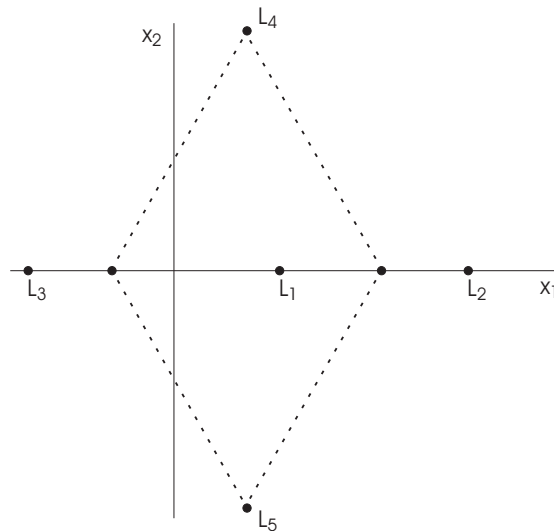


Figura 8.2: Pontos de libração do problema restrito dos três corpos.

de libração do sistema solar e, em primeiro lugar, do sistema Terra-Lua. No sistema Sol-Terra, o ponto de libração L_1 é utilizado pela NASA como base para o satélite *Solar and Heliospheric Observatory Satellite SOHO*, enquanto L_2 serve como base para o satélite WMAP. Frequentemente, enfatiza-se a importância da característica dinâmica singular dos pontos de libração sob o ponto de vista da astrodinâmica, da geofísica e da exploração. Ainda mais, os pontos de libração despertam o interesse dos engenheiros em virtude da possibilidade do interesse prático de suas aplicações: para a conexão com a Lua, para encontros na vizinhança da Lua e dos planetas, para a transferência interplanetária, para a investigação da esfera magnética da terra e para outros fins.

Os problemas de maior interesse sobre os pontos de libração são os de existência, estabilidade e construção de soluções periódicas na vizinhança do ponto de libração. Já mostramos a existência e, de agora por diante, nos deteremos em estudar a estabilidade dos pontos de libração do problema restrito planar e espacial circular dos três corpos.

8.4 Estabilidade linear dos pontos de libração

Nesta seção, vamos estudar a estabilidade linear dos cinco pontos de libração L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 do problema restrito dos três corpos nos casos planar circular e espacial circular.

8.4.1 O caso planar circular

Por comodidade, nesta seção, chamaremos as variáveis (ξ, η) que definiam o problema restrito circular dos três corpos, simplesmente de (x_1, x_2) . Sabemos que o Hamiltoniano definido neste problema é:

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2) - U - \frac{1}{2}\mu(1 - \mu) \quad (8.30)$$

onde

$$U = \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad (8.31)$$

com $r_1^2 = (x_1 + \mu)^2 + x_2^2$ e $r_2^2 = (x_1 + \mu - 1)^2 + x_2^2$. A matriz da parte linear do sistema associada ao sistema Hamiltoniano correspondente a (8.30) tem a forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ U_{x_1 x_1} & U_{x_1 x_2} & 0 & 1 \\ U_{x_1 x_2} & U_{x_2 x_2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.32)$$

onde

$$U_{x_1 x_1} = \Omega_{x_1 x_1} - 1, \quad U_{x_1 x_2} = \Omega_{x_1 x_2}, \quad U_{x_2 x_2} = \Omega_{x_2 x_2} - 1.$$

Lembremos que no problema restrito circular dos três corpos temos cinco soluções de equilíbrio, duas dadas explicitamente por

$$L_4 = \left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad e \quad L_5 = \left(\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (8.33)$$

e três da forma $L_i = (x^*, 0)$, $i = 1, 2, 3$, onde x^* satisfaz uma das três possibilidades:

- (a) $-\infty < x_1 < -\mu$, onde $r_1 = -x_1 - \mu$, $r_2 = 1 - x_1 - \mu$, $r_2 = r_1 + 1$;
- (b) $-\mu < x_1 < 1 - \mu$, onde $r_1 = x_1 + \mu$, $r_2 = 1 - x_1 - \mu$, $r_2 = 1 - r_1$;
- (c) $1 - \mu < x_1 < \infty$, onde $r_1 = x_1 + \mu$, $r_2 = x_1 + \mu - 1$, $r_2 = r_1 - 1$.

Vamos estudar a estabilidade linear dessas soluções particulares do problema restrito dos três corpos. Inicialmente, fazendo

$$s = (1 - \mu)r_1^{-3} + \mu r_2^{-3} > 0, \quad (8.34)$$

e por meio de cálculos simples, obtemos

$$\begin{aligned}\Omega_{x_1x_1} &= 1 + 2s - 3x_2[(1 - \mu)r_1^{-5} + \mu r_2^{-5}], \\ \Omega_{x_1x_2} &= 3x_2[(1 - \mu)(x_1 + \mu - 1)r_1^{-5} + \mu(x_1 + \mu)r_2^{-5}], \\ \Omega_{x_2x_2} &= 1 - s + 3x_2^2[(1 - \mu)r_1^{-5} + \mu r_2^{-5}].\end{aligned}\tag{8.35}$$

Com base nisso, obtemos a tabela:

	$\Omega_{x_1x_1}$	$\Omega_{x_1x_2}$	$\Omega_{x_2x_2}$	$\Omega_{x_1x_2}\Omega_{x_2x_2} - \Omega_{x_1x_2}^2$
L_1	$1 + 2s$	0	$1 - s$	$(1 + 2s)(1 - s)$
L_2	$1 + 2s$	0	$1 - s$	$(1 + 2s)(1 - s)$
L_3	$1 + 2s$	0	$1 - s$	$(1 + 2s)(1 - s)$
L_4	$\frac{3}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{4}\mu(1 - \mu)$
L_5	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{4}\mu(1 - \mu)$

Tabela 8.1: Derivadas de segunda ordem no problema restrito

O polinômio característico de (8.32) é dado por

$$\lambda^4 + (4 - \Omega_{x_1x_1} - \Omega_{x_2x_2})\lambda^2 + \Omega_{x_1x_1}\Omega_{x_2x_2} - \Omega_{x_1x_2}^2 = 0\tag{8.36}$$

Proposição 5 *Nos pontos colineares, a matriz (8.32) tem dois autovalores reais e dois imaginários puros.*

Demonstração. Tem-se da tabela acima que numa solução co-linear:

$$\Omega_{x_1x_1} > 0, \quad \text{e} \quad \Omega_{x_1x_2} = 0.\tag{8.37}$$

Mostraremos a seguir que $\Omega_{x_2x_2} < 0$. Analisaremos somente a solução de equilíbrio dada pela restrição em (c), isto é, para o equilíbrio $(x^*, 0)$ com $1 - \mu < x^*$ pois a justificativa nos outros casos é análoga. Neste caso temos,

$$r_1 = x^* + \mu, \quad r_2 = x^* - 1 + \mu.\tag{8.38}$$

Além disso, x^* satisfaz a equação:

$$x^* - \frac{1-\mu}{r_1^2} - \frac{\mu}{r_2^2} = 0. \quad (8.39)$$

Ou seja,

$$\frac{1-\mu}{r_1^2} = x^* - \frac{1-\mu}{r_1^2} = r_1 - \mu - \frac{1-\mu}{r_1^2}. \quad (8.40)$$

Então:

$$\begin{aligned} \Omega_{x_1x_1} &= 1 - s \\ &= 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \\ &= 1 - \frac{1}{r_2^3} \left[r_1 - \mu - \frac{\mu}{r_2} - \frac{\mu}{r_2^3} \right] \\ &= \frac{\mu}{r_1} \left[1 - \frac{1}{r_2} (r_2 - r_1) \right] \\ &= \frac{\mu}{r_1} \left[1 - \frac{1}{r_2} \right] < 0, \end{aligned} \quad (8.41)$$

pois, $r_1 = 1 + r_2$ e $0 < r_2 < 1$. Desta forma

$$B = -\Omega_{x_1x_1} \Omega_{x_2x_2} > 0. \quad (8.42)$$

Assim, de (8.36) segue a conclusão da proposição. ■

Da proposição acima e do teorema 26 segue que:

Teorema 62 *Os pontos de libração L_1 , L_2 e L_3 , do problema restrito planar circular dos três corpos, são linearmente instáveis.*

No caso das soluções de equilíbrio Lagrangeanos, temos o seguinte teorema:

Teorema 63 *Os pontos de libração L_4 e L_5 do problema restrito planar circular dos três corpos são linearmente estáveis se μ está no intervalo $\in (0, \mu^*)$ e linearmente instáveis se $\mu \in [\mu^*, \frac{1}{2})$, onde $\mu^* = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{69}}{9})$*

Demonstração. Neste caso, o polinômio característico da matriz da parte linear é dada por

$$P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu), \quad (8.43)$$

e, portanto, se denotarmos $\delta = \delta(\mu) = 27\mu(1 - \mu)$, temos que os autovalores da matriz da parte linear são

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - \delta(\mu)}}{2}}. \quad (8.44)$$

A equação do segundo grau $\delta(\mu) = 1$ tem uma raiz positiva dada por $\mu^* = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{69}}{9})$. Se $\delta(\mu) < 1$ (ou equivalentemente $\mu \in (0, \mu^*)$), então os autovalores são imaginários puros e distintos donde, pelo teorema 26, temos a estabilidade linear de L_4 e L_5 . Se $\delta(\mu) > 1$ (ou $\mu \in (\mu^*, 1/2)$), temos dois pares de autovalores complexos com parte real não nula e, também pelo teorema 26, temos a instabilidade linear do equilíbrio. Vamos, agora, analisar o caso onde $\mu = \mu^* = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{69}}{9})$. Neste caso, temos dois autovalores imaginários puros, a saber $\lambda = \pm \frac{\sqrt{2}i}{2}$. A matriz da parte linear, neste caso, é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{23}}{4} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{23}}{4} & \frac{5}{4} & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.45)$$

Os autovetores são

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \left(-\frac{\sqrt{23}}{5}, 1, -\frac{1}{5}, \frac{-\sqrt{23}}{5}\right) + i\left(-\frac{4\sqrt{2}}{5}, 0, \frac{-\sqrt{46}}{10}, \frac{-3\sqrt{2}}{10}\right) \\ \mathbf{e}_2 &= \left(-\frac{\sqrt{23}}{5}, 1, -\frac{1}{5}, \frac{-\sqrt{23}}{5}\right) + i\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}, 0, \frac{\sqrt{46}}{10}, \frac{3\sqrt{2}}{10}\right), \end{aligned} \quad (8.46)$$

ou seja, ela não é diagonalizável e, portanto, pelo teorema 26 segue a instabilidade linear do equilíbrio neste caso. ■

Com este teorema, completamos o estudo da estabilidade linear dos pontos de libração do problema restrito planar circular dos três corpos.

8.4.2 O caso espacial circular

Vamos, agora, estudar a estabilidade linear do pontos de libração do problema restrito espacial circular dos três corpos. Neste caso, temos as seguintes propriedades:

(a) A matriz da parte linear é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{x_1x_1} & U_{x_1x_2} & U_{x_1x_3} & 0 & 1 & 0 \\ U_{x_1x_2} & U_{x_2x_2} & U_{x_2x_3} & -1 & 0 & 0 \\ U_{x_1x_3} & U_{x_2x_3} & U_{x_3x_3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (8.47)$$

(b) No caso co-linear devemos adicionar os autovalores imaginários puros

$$\lambda_3 = \pm i \sqrt{U_{x_3x_3}(x_j^*, 0, 0)} = \pm i \sqrt{\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}}; \quad (8.48)$$

(c) No caso das soluções equiláteras L_4 e L_5 , temos que o polinômio característico é dado por:

$$(\lambda^2 + 1) \left(\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4} \mu (1 - \mu) \right), \quad (8.49)$$

ou seja, os autovalores são

$$\pm i, \quad \pm i \omega_1, \quad \pm i \omega_2. \quad (8.50)$$

Portanto, no caso espacial podemos concluir os seguintes teoremas:

Teorema 64 *Os pontos de libração L_1 , L_2 e L_3 , do problema restrito espacial circular dos três corpos, são linearmente instáveis.*

Este teorema nos diz que o teorema 62 ainda é válido para o problema restrito espacial circular dos três corpos. O mesmo vale para o teorema 63, ou seja, vale o seguinte teorema:

Teorema 65 *Os pontos de libração L_4 e L_5 do problema restrito dos três corpos espacial circular são linearmente estáveis se μ está no intervalo $\in (0, \mu^*)$ e linearmente instáveis se $\mu \in [\mu^*, \frac{1}{2})$, onde $\mu^* = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{69}}{9} \right)$*

8.5 Normalização da parte quadrática do Hamiltoniano

Nesta seção, utilizando o método descrito na seção 2.2, vamos obter a forma normal da parte quadrática da função Hamiltoniana do problema restrito dos três corpos no caso planar circular na vizinhança dos pontos de libração Lagrangeanos para $\mu \in (0, \mu^*]$.

Inicialmente, de acordo com a demonstração do teorema 63, no caso em que $\mu = \mu^*$ os autovalores da matriz do sistema linearizado são

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}i}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}i}{2}, \quad (8.51)$$

cada um com multiplicidade dois. Com isso, temos que o polinômio característico tem a forma

$$P(\lambda) = \left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (8.52)$$

Cálculos simples mostram que o polinômio minimal $p_{min}(\lambda)$ é igual ao polinômio característico. A matriz do sistema linearizado, neste caso, foi dada na demonstração do teorema 63.

Para a decomposição da matriz do sistema linearizado A como soma de uma matriz simples S com uma matriz nilpotente N , seguindo o algoritmo dado na seção 2.2, temos que

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2 + \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} & 0 \\ -2 + \sqrt{2} & 0 & 0 & -1 - \sqrt{2} \\ \frac{3}{2}(-2 + \sqrt{2}) & 0 & 0 & 2 - \sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}(-2 - \sqrt{2}) & 1 + \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (8.53)$$

e

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & 0 \\ 1 - \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 - \sqrt{2} \\ \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{2}) & 0 & 0 & -1 + \sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}(-2 - \sqrt{2}) & 1 + \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.54)$$

Como $N \neq 0$ e $N^2 = 0$, temos que $t = 1$. Vamos, agora, obter $\mathbf{z} \in W_0^\perp = \mathbb{R}^4$ tal que $N\mathbf{z} \neq 0$ e $\omega(\mathbf{z}, N\mathbf{z}) = \varepsilon$, onde $\varepsilon^2 = 1$. Se $\mathbf{z} = (\sigma, 0, 0, 0)$ para termos $\omega(\mathbf{z}, N\mathbf{z}) = -1$, podemos escolher $\sigma = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})^{-1/2}$. Logo, a forma normal de A é

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.55)$$

A função Hamiltoniana quadrática associada a matriz B é dada por

$$H_2(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(q_1 p_2 - q_2 p_1). \quad (8.56)$$

Usando o algoritmo da seção 2.2, temos que P tal que $B = P^{-1}AP$ e dada por

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sigma} & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}\sigma}{2} & \sqrt{2}\sigma & 0 \\ 0 & -\frac{3\sigma}{2} & \sigma & 0 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{4\sigma} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2\sigma} \end{pmatrix}, \quad (8.57)$$

onde $\sigma = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})^{-1/2}$.

Para obter a forma normal da parte quadrática da função Hamiltoniana quando $\mu \in (0, \mu^*)$, ou seja, onde $\delta > 1$, observe que o polinômio característico da matriz do sistema linearizado A é dado por

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + \eta_s^2)(\lambda^2 + \eta_l^2), \quad (8.58)$$

onde $\eta_s^2 = \frac{1}{2} + \frac{\zeta}{4} = \omega_1 i$ e $\eta_l^2 = \frac{1}{2} - \frac{\zeta}{4} = \omega_2 i$, com $\zeta = \sqrt{9\delta^2 - 32}$. Utilizando o algoritmo fornecido na seção 2.2, temos que a forma normal da matriz A é dada por

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_1 i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 i \\ -\omega_1 i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.59)$$

o qual tem com função Hamiltoniana associada

$$H_2 = \frac{\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) - \frac{\omega_2}{2}(q_2^2 + p_2^2). \quad (8.60)$$

A matriz de passagem P tal que $B = P^{-1}AP$ é dada por

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\eta_s \zeta}} A_s & \sqrt{\frac{2}{\eta_l \zeta}} A_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2\eta_s}{\zeta}} B_s & -\sqrt{\frac{2\eta_l}{\zeta}} B_l \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2\eta_s}{\zeta}} (\eta_s A_s - B_s) & -\sqrt{\frac{2\eta_l}{\zeta}} (\eta_l A_l - B_l) \\ \sqrt{\frac{2}{\eta_s \zeta}} (A_s - \eta_s B_s) & \sqrt{\frac{2}{\eta_l \zeta}} (A_l - \eta_l B_l) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.61)$$

onde

$$\begin{aligned} A_s &= \sqrt{\eta_s^2 + \frac{3}{2}(1 + \frac{\delta}{2})}, & B_s &= \sqrt{\eta_s^2 + \frac{3}{2}(1 - \frac{\delta}{2})}, \\ A_l &= \sqrt{\eta_l^2 + \frac{3}{2}(1 + \frac{\delta}{2})}, & B_l &= \sqrt{\eta_l^2 + \frac{3}{2}(1 - \frac{\delta}{2})}. \end{aligned} \quad (8.62)$$

8.6 Relações de ressonância no caso planar circular

Nesta seção vamos estudar as relações de ressonância dos autovalores do problema restrito dos três corpos. Esta análise é necessária para o estudo da estabilidade, pois precisaremos obter a forma normal do Hamiltoniano do problema restrito dos três corpos.

Vamos analisar o caso onde $\mu \in (0, \mu^*]$, isto é, quando os autovalores da matriz do sistema linearizado são dados por $\pm i\omega_1$ e $\pm i\omega_2$, com

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \delta})}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \delta})},\end{aligned}\tag{8.63}$$

onde $\delta = 27\mu(1 - \mu)$. Olharemos para as possíveis relações de ressonância entre os autovalores, isto é, quando

$$p\omega_1 = q\omega_2 \Leftrightarrow p\omega_1 - q\omega_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \delta})}}{\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \delta})}} = \frac{q}{p}\tag{8.64}$$

para algum $p, q \in \mathbb{Z}$ primos relativos. Desde que $\omega_1 \geq \omega_2$, segue-se que

$$q \geq p.$$

Por (8.64), obtemos

$$\sqrt{1 - \delta} = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2},$$

logo, devemos encontrar os valores de μ tais que

$$0 < \mu(1 - \mu) = \frac{m}{n}\tag{8.65}$$

onde

$$\sqrt{m} = 2qp\tag{8.66}$$

$$n = 27(q^2 + p^2)^2.$$

Resolvendo (8.65) encontramos que os valores de μ são dados por:

$$\mu = \mu_{pq} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{16}{27} \frac{p^2 q^2}{(q^2 + p^2)^2}}.\tag{8.67}$$

Assumindo que $\mu \in (0, \mu_1)$ o valor de μ dado em (8.67) só pode ser com de sinal positivo na raiz quadrada. Desde que \sqrt{m} é um inteiro par, os primeiros quatro valores de m são

$$4, 16, 36 \text{ e } 64$$

os quais nós dão os valores de

$$1, 2, 3, \text{ e } 4,$$

respectivamente, para o produto qp . Os correspondentes pares de inteiros q, p fornecem as ressonâncias

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 &\Leftrightarrow \omega_1 - \omega_2 = 0, \quad \text{ressonância } 1 : 1 \\ \omega_1 = 2\omega_2 &\Leftrightarrow \omega_1 - 2\omega_2 = 0, \quad \text{ressonância } 1 : 2 \\ \omega_1 = 3\omega_3 &\Leftrightarrow \omega_1 - 3\omega_2 = 0, \quad \text{ressonância } 1 : 3 \\ \omega_1 = 4\omega_4 &\Leftrightarrow \omega_1 - 4\omega_2 = 0, \quad \text{ressonância } 1 : 4 \end{aligned} \tag{8.68}$$

de ordem 2, 3, 4 e 5 respectivamente.

A primeira ressonância corresponde a $\mu = \mu^*$ e é chamada *razão crítica de Routh* e as outras são calculadas da equação $\mu(1 - \mu) = \frac{m}{n}$, de onde obtemos

$$\mu^* = \frac{9 - \sqrt{69}}{18} > \mu_1 = \frac{45 - \sqrt{1833}}{90} > \mu_2 = \frac{15 - \sqrt{213}}{30}. \tag{8.69}$$

Note que se $\mu \in (0, \mu^*)$ com $\mu \neq \mu_1$ e $\mu \neq \mu_2$, então não existem ressonâncias até quarta ordem.

8.7 O Hamiltoniano do movimento perturbado

No caso planar circular, temos que o ponto de libração L_4 tem posição $x_0 = (\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e momento $y_0 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \mu)$. Fazemos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} q_1 = x_1 - \frac{1}{2} + \mu, \quad p_1 = y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ q_2 = x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_2 = y_2 - \frac{1}{2} + \mu. \end{aligned} \tag{8.70}$$

Nas novas coordenadas, a solução de equilíbrio L_4 corresponde a solução nula. O desenvolvimento do Hamiltoniano nas novas coordenadas em torno da origem é da forma:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = H_2(q_1, q_2, p_1, p_2) + H_3(q_1, q_2, p_1, p_2) + \dots, \quad (8.71)$$

onde

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + p_1 q_2 - q_1 p_2 + \frac{1}{8}(q_1^2 - 8k - 5q_2^2),$$

$$H_3 = -\frac{7\sqrt{3}k}{36}q_1^3 + \frac{3\sqrt{3}}{16}q_1^2 q_2 + \frac{11\sqrt{3}k}{12}q_1 q_2^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16}q_2^3,$$

$$H_4 = \frac{37}{128}q_1^4 + \frac{25k}{24}q_1^3 q_2 - \frac{123}{64}q_1^2 q_2^2 - \frac{15k}{8}q_1 q_2^3 - \frac{3}{128}q_2^4,$$

$$H_5 = \frac{23\sqrt{3}k}{576}q_1^5 - \frac{285\sqrt{3}}{256}q_1^4 q_2 - \frac{215\sqrt{3}k}{288}q_1^3 q_2^2 + \frac{345\sqrt{3}}{128}q_1^2 q_2^2 + \frac{555\sqrt{3}k}{576}q_1 q_2^4 - \frac{33\sqrt{3}}{256}q_2^5,$$

$$H_6 = -\frac{331}{1024}q_1^6 + \frac{49k}{128}q_1^5 q_2 + \frac{6105}{1024}q_1^4 q_2^2 - \frac{35k}{64}q_1^3 q_2^3 - \frac{7965}{1024}q_1^2 q_2^4 - \frac{119k}{128}q_1 q_2^5 + \frac{383}{1024}q_2^6$$

onde $k = \frac{3\sqrt{3}(1-2\mu)}{4}$.

8.8 Estabilidade dos pontos de libração no caso planar circular

Nesta seção, vamos fazer um estudo completo da estabilidade dos cinco pontos de libração do problema restrito dos três corpos no caso planar circular. Inicialmente, da proposição 5, temos que nos pontos de libração L_1 , L_2 e L_3 a matriz do sistema linearizado tem dois autovalores reais e, portanto, do teorema 30, segue o seguinte teorema:

Teorema 66 *As soluções L_1 , L_2 e L_3 do problema restrito planar circular dos três corpos são instáveis.*

Vamos agora fazer uma análise rigorosa da estabilidade dos pontos de libração L_4 e L_4 , para isso, utilizaremos alguns resultados da teoria da estabilidade para sistema Hamiltonianos autônomos com dois graus de liberdade.

Teorema 67 *As soluções L_4 e L_5 do problema restrito planar circular dos três corpos são estáveis para todos os valores de μ em $(0, \mu^*)$, exceto para μ igual a*

$$\mu_1 = \frac{45 - \sqrt{1833}}{90} \text{ e } \mu_2 = \frac{15 - \sqrt{219}}{60}, \quad (8.72)$$

para os quais tem-se a instabilidade. Para $\mu \in (\mu^, 1/2)$, temos instabilidade.*

Demonstração. Inicialmente, para $\mu \in (\mu^*, 1/2)$, de acordo com a demonstração do teorema 63, a matriz do sistema linearizado tem autovalor com parte real não nula e, de acordo com o teorema 30, temos a instabilidade dos equilíbrios L_4 e L_5 .

Suponha, agora, que $\mu \in (0, \mu^*)$ com $\mu \neq \mu_1$ e $\mu \neq \mu_2$. Neste caso, de acordo com o que foi discutido na seção 8.6, temos que os autovalores dos sistema linearizado não apresentam relações de ressonância até quarta ordem e, portanto, a forma normal da função Hamiltoniana até quarta ordem é da forma:

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O((r_1 + r_2)^{5/2}). \quad (8.73)$$

Usando o processo descrito na demonstração do teorema 15, temos que os coeficientes c_{20} , c_{11} e c_{02} são dados por:

$$\begin{aligned} c_{20} &= \frac{\omega_2^2(124\omega_1^4 - 696\omega_1^2 + 81)}{144(1 - 2\omega_1^2)^2(1 - 5\omega_1^5)}, \\ c_{11} &= -\frac{\omega_1\omega_2(64\omega_1^2\omega_2^2 + 43)}{6(1 - 2\omega_1^2)(1 - 2\omega_2^2)(1 - 5\omega_1^2)(1 - 5\omega_2^2)}, \\ c_{02} &= \frac{\omega_1^2(124\omega_2^4 - 696\omega_2^2 + 81)}{144(1 - 2\omega_2^2)^2(1 - 5\omega_2^5)}. \end{aligned} \quad (8.74)$$

É fácil verificar que

$$D_4 = H_4(\omega_2, \omega_1) = c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 = \frac{644\omega_1^4\omega_2^4 - 541\omega_1^2\omega_2^2 + 36}{16(1 - 4\omega_1^2\omega_2^2)(4 - 25\omega_1^2\omega_2^2)}, \quad (8.75)$$

o qual anula-se no intervalo $(0, \mu^*)$ apenas quando $\mu = \mu_3 = 0,00109136\dots$, donde, pelo Teorema de Arnold-Moser 49, segue a estabilidade para $\mu \in (0, \mu^*)$ exceto, talvez, para $\mu = \mu_i$, ($i = 1, 2, 3$), os quais o teorema de Arnold-Moser 49 não se aplica.

Vamos agora estudar a estabilidade para os três valores excluídos do parâmetro μ . Para $\mu = \mu_1$, de acordo com a seção 8.6, temos a relação de ressonância de terceira ordem $\omega_1 = 2\omega_2$. De acordo com a subseção 3.6.2, a forma normal da função Hamiltoniana até os termos de terceira ordem tem a forma:

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + r_2 r_1^{1/2} [\alpha_1 \text{sen}(\phi_1 + 2\phi_2) + \beta_1 \text{cos}(\phi_1 + 2\phi_2)] + O((r_1 + r_2)^2), \quad (8.76)$$

onde $\alpha_1 = 1,322\dots$ e $\beta_1 = 0,298\dots$. Pelo teorema de Cabral-Meyer 50 segue a instabilidade.

No caso $\mu = \mu_2$, temos a relação de ressonância de quarta ordem. A normalização da função Hamiltoniana até quarta ordem (ver subseção 3.6.3) nos fornece:

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + r_2^{3/2} r_1^{1/2} (\alpha_2 \text{sen}(\phi_1 + 3\phi_2) + \beta_2 \text{cos}(\phi_1 + 3\phi_2)) + O((r_1 + r_2)^{5/2}), \quad (8.77)$$

onde $\omega_1 = 0,948\dots$, $\omega_2 = 0,316\dots$, $c_{20} = 0,137\dots$, $c_{11} = -2,176\dots$, $c_{02} = 0,246\dots$, $\alpha_2 = -1,461\dots$ e $\beta_2 = -4,235\dots$. Como

$$4,170\dots = |c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| < 3\sqrt{3(\alpha_2^2 + \beta_2^2)} = 23,282\dots$$

então, de acordo com o Teorema de Cabral-Meyer 50 segue a instabilidade.

Finalmente, para terminar a demonstração do teorema, vamos mostrar que para $\mu = \mu_3$ temos a estabilidade. Neste caso não temos relações de ressonância de nenhuma ordem e precisamos normalizar o Hamiltoniano até sexto grau, o qual obtemos os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0,959\dots, \quad \omega_2 = 0,281\dots, \quad c_{20} = 0,097\dots, \\ c_{11} &= -1,389\dots, \quad c_{02} = 0,398\dots, \quad c_{30} = -0,219\dots, \\ c_{21} &= 7,094\dots, \quad c_{12} = -209,931\dots \quad e \quad c_{03} = -14,528\dots, \end{aligned} \quad (8.78)$$

para os quais valem as desigualdades:

$$\omega_1 \neq \omega_2, \quad \omega_1 \neq 2\omega_2, \quad \omega_1 \neq 3\omega_2, \quad \omega_1 \neq 4\omega_2, \quad \omega_1 \neq 5\omega_2, \quad 2\omega_1 \neq 3\omega_2, \quad (8.79)$$

$$c_{30}\omega_2^3 + c_{21}\omega_2^2\omega_1 + c_{12}\omega_2\omega_1^2 + c_{03}\omega_1^3 = -66,631\dots \neq 0,$$

donde, pelo Teorema de Arnold-Moser 49, segue a estabilidade do equilíbrio. Com isso, fica completa a demonstração do teorema. ■

8.8.1 Estabilidade de L_4 na razão crítica das massas

De acordo com a seção 8.5, a transformação de coordenadas linear simplética definida pela matriz P , dada em (8.57), leva o Hamiltoniano H , dado em (8.71), no Hamiltoniano H^* com parte quadrática

$$H_2(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(q_1 p_2 - q_2 p_1). \quad (8.80)$$

De acordo a subseção 3.6.1, existe uma transformação simplética de coordenadas que leva H^* na forma normal

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \omega(q_1 q_2 - q_2 p_1) + (p_1^2 + p_2^2)R(q_1, q_2, p_1, p_2) + H_5 + \dots, \quad (8.81)$$

onde $R(q_1, q_2, p_1, p_2) = A(p_1^2 + p_2^2) + B(q_1 p_2 - q_2 p_1) + C(q_1^2 + q_2^2)$. Por meio das fórmulas fornecidas na subseção 3.6.1, obtivemos $A = 0.603 > 0$ e, de acordo com o teorema 58, temos que o equilíbrio é formalmente estável. Temos, assim, demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 68 *A solução L_4 do problema restrito planar circular dos três corpos é formalmente estável na razão crítica das massas (quando $\mu = \mu^*$).*

8.8.2 Estabilidade de L_4 quando $\mu = 0$

Nesta seção, vamos estudar a estabilidade do equilíbrio relativo L_4 quando um dos corpos primários tem massa nula, isto é, quando $\mu = 0$. Neste caso, o problema é equivalente ao estudo da estabilidade de órbitas circulares (equilíbrios num sistema de coordenadas giratório) do problema de Kepler.

De acordo com a demonstração do teorema 63, quando $\mu = 0$ os autovalores da matriz do sistema linearizado são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = i$. A mudança de coordenadas $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{Z}$ dada por $\mathbf{z} = M\mathbf{Z}$, onde

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{13}}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{4}{\sqrt{13}} \\ -\frac{1}{6} & \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2\sqrt{13}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2\sqrt{13}} & -\frac{3}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \end{pmatrix} \quad (8.82)$$

leva a parte quadrática da função Hamiltoniana a forma normal

$$H_2 = \frac{\delta_1}{2} q_1^2 + \frac{\delta_2}{2} (q_2^2 + p_2^2), \quad (8.83)$$

onde $\delta_1 = -1$ e $\delta_2 = 1$. Cálculos mostram que os coeficientes h_{0300}, h_{0400} do Hamiltoniano normalizado (a relação entre esses coeficiente e os coeficientes do Hamiltoniano com a parte quadrática normalizada foi dada em (7.75)), valem

$$h_{0300} = 0, \quad h_{0400} = \frac{81}{104} (13 - 4\sqrt{3}) \quad (8.84)$$

e, como $\delta_1 h_{0400} < 0$, pelo teorema 56, temos demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 69 *No caso em que $\mu = 0$, a solução de equilíbrio relativo L_4 é instável, ou equivalentemente, as órbitas circulares do problema de Kepler são instáveis.*

8.9 Resultados sobre estabilidade dos pontos de libração no caso espacial circular

Nesta seção, vamos dar algumas informações sobre a estabilidade dos cinco pontos de libração do problema restrito dos três corpos no caso espacial circular. Como na seção anterior, temos que a matriz do sistema linearizado na vizinhança dos pontos de libração co-lineares têm autovalores com parte real não nula e, pelo teorema 30, temos demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 70 *As soluções L_1, L_2 e L_3 do problema restrito espacial circular dos três corpos são instáveis.*

Sobre a estabilidade dos pontos de libração L_4 e L_5 para o problema restrito espacial circular dos três corpos, temos o seguinte teorema:

Teorema 71 *As soluções L_4 e L_5 do problema restrito espacial circular dos três corpos são instáveis para todos os valores de μ em $(\mu^*, 1/2)$, onde $\mu^* = \mu^* = \frac{9-\sqrt{69}}{18}$.*

Demonstração. A demonstração segue do fato que a matriz do sistema linearizado tem autovalores com parte real não nula e do teorema 30. ■

No caso em que $\mu \in (0, \mu^*]$, a resposta para sobre a estabilidade do equilíbrio ainda não esta completa. No entanto, para $\mu \in (0, \mu^*)$ demonstra-se (por exemplo em Markeev [24]) que os pontos de libração L_4 e L_5 do problema restrito espacial circular dos três corpos são estáveis para a maioria das condições iniciais (no sentido de medida de Lebesgue), exceto para

$$\mu_1 = \frac{45 - \sqrt{1833}}{90} \text{ e } \mu_2 = \frac{15 - \sqrt{219}}{60}, \quad (8.85)$$

para os quais, tem-se a instabilidade.

O caso em que $\mu = \mu^*$ foi tratado por Sokol'skii [34], onde se demonstra a estabilidade formal de L_4 .

Referências Bibliográficas

- [1] ARNOLD, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [2] ARNOLD, V. I. Proof of A. N. Kolmogorov's theorem on the preserving of quasiperiodic motions under small perturbations of the Hamiltonian. *Russ. Math. Surv.*, [S. l.], v.18, p.9-36, 1963.
- [3] ARNOLD, V. I. Small divisor problems in classical and celestial mechanics. *Russ. Math. Surv.*, [S. l.], v.18, p.9-36, 1963.
- [4] BIRKHOFF, G. D. *Dynamical systems*. Providence, 1927. (Amer. Math. Soc. Colloq.; 9).
- [5] BURGOYNE, N., CUSHMAN, R. Normal forms for real Hamiltonian systems with purely imaginary eigenvalues. *Celestial Mechanics*, [S. l.], v. 8, p. 435-443, 1974.
- [6] CABRAL, H. E., MEYER, K. R. Stability of equilibria and fixed points of conservative systems. *Nonlinearity*, [S. l.], v.12, p. 1351-1362, 1999.
- [7] CABRAL, H. E., DIACU, F. *Classical and celestial mechanics, the Recife lectures*. Princeton: Princeton Univ. Press, 2002. p. 117-169.
- [8] CHETAEV, N. *The stability of motion*. New York: Pergamom Press, 1961.
- [9] DEPRIT, A. Canonical transformations depending on a small parameter. *Celestial Mechanics*, [Netherlands], v. 72, p. 173-179, 1969.
- [10] ELPHICK, C.T., BRACHET, M., COULLET, P., IOOSS, G. A simple global characterization for normal forms of singular vector fields. *Physica*, [S. l.], v. 29D, p. 96-127, 1987.

- [11] EULER, L. *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentum*. [S. l.: s. n.], 1767.(
Novi Comm. acad. Imp. Petrop.).
- [12] GUSTAVSON, F. On constructing formal integrals of a Hamiltonian system near an equilibrium point. *Astron. Journ.*, [S. l.], v. 71, p. 670-686, 1966.
- [13] HALE, J. K. *Ordinary differential equations*. [S. l.]: Wiley-interscience, 1969.
- [14] HOFFMAN, K., KUNZE, R. *Álgebra linear*. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos, 1979.
- [15] HENRARD, J. Concerning the genealogy of long period families at L_4 . *Astronom. Astrophys.*, [S. l.], v. 5, p. 45-52, 1970.
- [16] HENRARD, J. On perturbation theory using Lie transforms. *Celestial Mechamics.*, [S. l.], v. 3, p. 107-120, 1970.
- [17] HENRARD, J. Periodic orbits emanating from a resonant equilibrium. *Celestial Mechamics.*, [S. l.], v. 1, p. 437-466, 1970.
- [18] HORI, G. Theory of general perturbations with unspecific canonical variables. *Publ. Astron. Soc. Japan*, Japan, v. 18, p. 287-296, 1966.
- [19] KAMEL, A. Pertubation method in the theory of nonlinear oscillations. *Celestial Mechanics*, [S. l.], v. 3, p. 90-99, 1970.
- [20] The Lagrange points. Disponível em: < <http://map.gsfc.nasa.gov/m-mm/ob-techorbit1.html> >
. Acessado em: 10 jan. 2004.
- [21] LAGRANGE, J. L. *Essais sur le problème des trois corps*. Paris, 1772.
- [22] LAGRANGE, J. L. *Analytic Mechamics*. Gostekhizdat: O krivykh, opredelyaemykh diffentsial'-nymi uravneniyami, 1950. v. 1. (2nd Russian edition translated from the French).
- [23] LYAPUNOV, A. M. *General problem of the stability of motion*. Gostekhizdat: Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya, 1950.

- [24] MARKEEV, A. P. *Pontos de libração em mecânica celeste e cosmodinâmica*. Tradução de Hidelberto E. Cabral. Recife, 1997. (Não publicado).
- [25] MEYER, K. R., HALL, G. R. *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the n-body problem*. New York: Springer-Verlag, 1992. (Applied mathematical science; v. 90).
- [26] MOSER, J. K. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys.*, [S. 1.], 1962.
- [27] POINCARÉ, H. *On curves defined by differential equations*. Gostekhizdat: O krivykh, opredelyaemykh differentsial'-nymi uravneniyami, 1947.
- [28] SANTOS, A. A. *Estabilidade dos pontos de libração no problema oblato dos 3-corpos*. 45f. 1998. Dissertação (Mestrado em Ciências), Universidade Federal de Pernambuco, 1998.
- [29] SCHMIDT, D. S. The stability of the Lagrangian L_4 . *Celestial Mechanics*, Netherlands, v. 45, p. 201-206, 1989.
- [30] SIEGEL, C. L., MOSER, J. K. *Lectures on celestial mechanics*. New York: Springer-Verlag, 1971.
- [31] HIRSCH, N. M., SMALE, S. *Differential equations, dynamical systems and linear álgebra*. New York: Academic Press, 1974.
- [32] SOKOL'SKII, A. G. On Stability of an autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom under first-order resonance. *Appl. Math. Mech.*, Moscow, v.41, p.24-33, 1976.
- [33] SOKOL'SKII, A. G. On Stability of an autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom in the case of equal frequencies. *Appl. Math. Mech.*, Moscow, v.38, p.791-799, 1974.
- [34] SOKOL'SKII, A. G. Stability of the Lagrange solutions of the restricted three body problem for the critical ratio of masses. *Appl. Math. Mech.*, [S. 1.], v.39, p.342-345, 1975.
- [35] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. (Projeto Euclides).
- [36] VIDAL, C. *Estabilidade de equações diferenciais ordinárias*. Recife, 2002. (Notas de curso).

-
- [37] VIDAL, C. *Sistemas dinâmicos Hamiltonianos*. Recife, 2003. (Notas de curso).
- [38] VIDAL, C. *Transformações simpléticas, formas normais e sistemas Hamiltonianos*. Recife, 2001. (Notas de curso).