
Universidade Federal de Pernambuco

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Estudo do Problema dos Três Corpos

GLEIDSON GOMES

Orientador:

PROF. CLAUDIO VIDAL DIAZ

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

UFPE - Março de 2004

Agradecimentos

À Deus, por ter seguido ao meu lado em todo caminho, minha eterna gratidão.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

Agradeço também as seguintes pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para esta fase de minha vida. No âmbito acadêmico agradeço:

- Ao professor. Cláudio Vidal, pela orientação, dedicação, seus conselhos e amizade;
- Aos professores de matemática que me incentivaram nessa jornada: Paulo Figueiredo, Adriano Pedrosa, Manoel Lemos, Airtton Castro (meu grande amigo) e César Castilho (UFPE);
- Ao professor. Letterio Gatto (Polito/IT) por ter acreditado no meu potencial;
- As funcionárias Tânia, Creuza, Kléssia e Carlos (UFPE), pela amizade, pela dedicação e pela compreensão.

No âmbito pessoal, serei eternamente grato:

- À minha mãe - pela paciência e dedicação durante toda minha existência;
- Às minhas primas: Lara, Lilian, Liliane, Renata e Rafaela;
- À minha irmã pelo carinho;
- À minha namorada e amiga Joice, pela paciência e amizade;
- Aos meus tios, Heleno, Fatima, Duda, Val, severino e José, pelo incentivo e compreensão;

- À minha madrinha, pelo incentivo;
- Aos meus pais;
- Aos meus avós, por serem o começo de tudo;
- Aos amigos de sala: Severino e Fábio (meus irmãos de coração), Adson, Adriano e Ângelo, pelo companheirismo e discussões;
- Aos amigos que participaram direta ou indiretamente para a conclusão desta etapa, cuja lista seria extensa, e certamente omitiria alguns nomes, o que seria imperdoável. Por isso agradeço a todos eternamente;
- Em especial aos amigos: Marcus Vinícius, Ronaldo, Wilson Oliveira, Mázio, Admilson, Márcia, Selma, Cláudio Teles, Genivaldo, Gedeon, Alexandre e Carlos.

Resumo

Nesta dissertação, fizemos um estudo detalhado do problema dos três corpos. Inicialmente, formulamos o problema e vimos algumas propriedades básicas como, por exemplo, as dez integrais primeiras do movimento. Estudamos as singularidades do problema relacionando-as com as colisões, onde usamos os teoremas de Von Zeipel e Painlevé. Escrevemos, o problema em coordenadas giratórias, relativas, de Jacobi e baricentricas e mostramos várias técnicas para reduzir o número de graus de liberdade do sistema Hamiltoniano associado. Continuando o nosso estudo, tratamos de alguns resultados básicos que são consequência das integrais primeiras. Em alguns casos particulares do problema geral dos três corpos como, por exemplo, no caso planar, estudamos as soluções isosceles e o caso colinear. Descrevemos algumas soluções particulares, como as soluções homográficas, configurações centrais e as soluções de equilíbrio relativo, obtemos as relações entre as mesmas e estudamos a estabilidade linear, onde mostramos que as soluções de Euler são linearmente instáveis e as de Lagrange, estáveis sobre certas condições sobre as massas. A partir das soluções de equilíbrio relativo, utilizando o método da continuação de Poincaré, mostramos a existência de soluções periódicas na vizinhança das mesmas.

Abstract

In this dissertation, we have done an analytic detailed study of the three body problem. Initially we formulate the problem and some basic properties, such as, the ten first integrals of motion. We have also studied the singularities, relating them with the collisions of the 3-body problem. Here we use Von Zeipel's and Painlevé's theorems. We have written the problem in terms of different coordinates, namely, girating; relative; Jacobi and barycentric. We show several techniques to reduce the number of degrees of the freedom from of the associated Hamiltonian system. Following this, we discuss some basic results, that are consequences of the first integrals. In some particular cases of the three body problem, for instance, the planar case, we study isosceles solutions and the colinear case. We describe some particular solutions, such as the homographic solutions, central configurations and the relative equilibrium solutions, and relations between them and also we study the linear stability. In fact, we verify them the Euler equilibrium are unstable and the Lagrange equilibrium are stable some conditions about the masses. Using the Poincaré continuation method we prove the existence of periodic solutions of the three body problem. Finally, it is proved the Saari's conjecture in the case of equal masses.

Conteúdo

Introdução	2
1 Formulação do Problema dos três corpos	8
1.1 Aspectos Gerais	8
1.2 Propriedades básicas da função potencial	10
1.3 Formulação Hamiltoniana do problema	12
1.4 Definições básicas	12
1.5 Integrais	14
2 Singularidades no problema dos três corpos	17
2.1 Estudo da colisão total	17
2.2 Singularidades e colisões	20
3 Diferentes tipos de coordenadas	35
3.1 Sistema baricêntrico	35
3.2 Coordenadas heliocêntricas ou relativas	36
3.3 Coordenadas giratórias	39
4 Consequências das Integrais	42

<i>CONTEÚDO</i>	7
5 Sub-problemas do problema dos três corpos	49
5.1 O problema planar dos três corpos	49
5.2 O problema dos três corpos isósceles	50
5.2.1 Classificação das soluções isósceles	51
5.3 O caso colinear dos três corpos	56
5.4 Problema restrito dos três corpos	56
6 Soluções particulares	58
6.1 Configurações centrais	58
6.2 Soluções Homográficas	59
6.3 Classificação das soluções de equilíbrio relativo	64
6.4 Existência das soluções de equilíbrio relativo	66
6.5 Relação entre configurações centrais e equilíbrios	69
6.5.1 Coordenadas das soluções de equilíbrio equiláteras	69
7 Reduções no Problema dos Três Corpos	72
7.1 Redução no caso espacial	72
7.1.1 Método de Jacobi espacial	72
7.1.2 Redução de ordem 12 a ordem 8	76
7.2 Redução no caso Planar	82
7.2.1 Redução de 12 para 8	82
7.2.2 Redução de 8 para 6	84
7.2.3 Equilíbrios	86
7.3 O método de Jacobi	86
7.4 Aplicação do método de Jacobi	90

<i>CONTEÚDO</i>	8
8 Estabilidade linear das soluções de equilíbrio relativo	92
8.1 Estabilidade para o caso colinear	93
8.2 Caso equilátero	96
8.2.1 Obtenção do polinômio característico de grau 12	96
8.2.2 Obtenção do polinômio característico de grau 8	101
8.3 Análise do polinômio característico	102
8.4 Interpretação geométrica das condições de estabilidade	104
9 Existência de soluções periódicas	108
9.1 Soluções periódicas que preservam a configuração inicial	108
9.2 Soluções de forma fixa	109
9.3 Continuação de soluções periódicas do problema restrito para o problema geral des três corpos	110
10 Conjectura de Saari para o problema dos três corpos	113
10.1 O problema	114
10.2 Equilíbrio relativo	117
10.3 Redução	118
10.4 Massas iguais	122
A Resultados básicos de análise	131
B Resultados básicos de E.D.O.	133
C Soluções periódicas de problemas restringidos	134
C.1 O método da continuação de Poincaré e o Teorema do Centro de Liapunov	134

<i>CONTEÚDO</i>	1
C.2 Órbitas de Poincaré	136
C.3 Órbitas de Hill	138
C.4 Órbitas de Cometas	141
D Fibrção de Hopf	143
E O Teorema de Sturm	146
Bibliografia	147

Introdução e informações históricas do problema dos três corpos

Baseado nas suas leis de movimento, Newton (em 1687) estudou o movimento de dois corpos, levando em consideração apenas a atração gravitacional entre eles, problema resolvido facilmente, explicando com boa aproximação, por exemplo, as órbitas da Lua ao redor da Terra. Então ao adicionarmos mais um corpo não haveria muitas complicações para a resolução e, com mais um pouco de trabalho, teríamos a solução. Estava completamente enganado! Poincaré (em 1890) descobre e demonstra que, as equações Newtonianas considerando três corpos celestes em interação gravitacional, tornam-se insolúveis por quadratura. É necessário, portanto, usarmos uma série de aproximações, e aí surgem problemas inesperados. Na maioria dos casos, as pequenas mudanças provocam pequenos efeitos e tudo se encaixa mais ou menos bem, mas em alguns casos de estudo uma pequena perturbação pode provocar um grande efeito, um planeta pode até mudar de órbita e escapar do sistema solar.

Este problema é extremamente difícil como o próprio Newton reconheceu ao estudar o sistema **Sol-Terra-Lua**. Aliás, foi estudando este sistema que **Clairant e d'Alembert** [9] criaram a expressão "**Problema dos três corpos**" que veio designar o sistema de equações diferenciais quando $n = 3$ e, por extensão, hoje o designamos por "Problema dos $n - \text{corpos}$ ", para um valor qualquer de n . Citemos a seguir o seguinte trecho devido a Laplace [23]:

É a primeira peça de Euler sobre os movimentos de Júpiter e de Saturno que deve reportar as pesquisas sobre as perturbações dos movimentos planetários. Esta peça coroada pela Academia de Ciências em 1748 foi enviada ao secretário desta Academia em 27 de julho de 1747, alguns meses antes que Clairant e d'Alembert comunicassem à Academia

pesquisas análogas que eles haviam feito sobre o Problema dos Três Corpos que eles denominaram assim porque tinham aplicado suas soluções ao movimento da Lua atraída pelo Sol e pela Terra.

Em 1765, Euler mostra a existência de soluções particulares, em que os três corpos permanecem alinhados em cada instante, algumas configurações dos três corpos mostram-se periódicas e foi exatamente uma dessas que Euler encontrou. Considerando o problema restringido (onde um dos corpos possui massa infinitesimal) Lagrange, em 1772, mostrou matematicamente a existência de cinco pontos onde o corpo infinitesimal permanecia estável, apresentando comportamento previsível e, pelas medições da órbita de Jupiter, previu a existência de algum corpo em um desses pontos entre o planeta e o Sol. Em 1906, foi descoberta, pelo astrônomo Max Wolf, a existência do primeiro asteróide (de uma série), 588 Achilles, no ponto previsto. Tais pontos de estabilidade entre dois corpos são chamados hoje de *pontos Lagrangeanos*. Pontos como esses existem entre a Terra e o Sol e mesmo entre a Lua e a Terra e são pontos onde, especula-se, poderiam-se construir bases espaciais. Essa foi a primeira grande contribuição do problema dos três corpos para a ciência fora da matemática [37].

Marcolongo em seu apanhado histórico [26] chama a atenção para a grande quantidade de trabalhos publicados em Mecânica Celeste no que diz respeito ao problema dos três corpos, que por volta de 1918 já havia mais de 1000 trabalhos entre memórias e tratados. Citemos esse trecho:

O problema dos três corpos é o problema clássico dos tempos modernos;... . Depois de mais de um século e meio de estudos; depois de Poincaré [42] e do trabalho de Sundman [48], que conduziu a uma solução geral mas não totalmente analítica; resta ainda um amplo campo de investigações aos esforços dos matemáticos. ... A contagem não é fácil, sobretudo para minhas forças, pois que só a parte bibliográfica compreende certamente mais de mil entre memórias e tratados.

Hoje é muito difícil inferir com relação à quantidade de trabalhos sobre o problema dos três corpos, devido a grande quantidade de pesquisas nas diferentes abordagens.

Um outro fato histórico importante e que mostra a importância do problema dos três corpos é o seguinte [11]:

No começo do último quarto do século do século XIX, por sugestão de Gustav Mittag-Leffler, editor chefe da famosa revista Acta Mathematica Journal, o rei Oscar II da

Suécia Noruega conhecendo a importância do problema clássico do n -corpos, estabeleceu um prêmio para quem encontrar uma solução expressa como uma expansão em série das coordenadas (posição) tendo a reta como domínio de convergência. O prêmio foi outorgado a H. Poincaré mesmo ele não tendo resolvido o problema, mas devido a suas importantes contribuições científicas deste problema.

Uma outra citação deve-se a V.Szebehely [51]:

” Tomou tempo” diz A. Einstein referindo-se a esse como um dos mais importantes aspectos da criação científica. De fato, ele nos tomou 200 anos desde o Principia de Newton à Teoria de Poincaré da não integrabilidade do problema dos três corpos.

A seguir enunciaremos uma série de resultados importantes do Problema dos três Corpos após ter sido feita uma revisão bibliográfica do problema. Certamente, muitos artigos de pesquisas foram omitidos, pois o objetivo é simplesmente relacionar nomes e contribuições que consideramos cientificamente importantes.

- Clairant e Euler, mais ou menos entre 1760-1780 já haviam encontrado as dez integrais primeiras do problema dos três corpos (na verdade para n -corpos), seis das quais é associado ao centro de massa do sistema, três ao momento angular e uma da energia.
- Euler [15], em 1767 obteve três soluções particulares as quais os três corpos têm uma configuração colinear em cada instante.
- Lagrange [22], em 1772 mostra a existência de duas soluções particulares, as quais os três corpos formam um triângulo equilátero em cada instante.
- Jacobi [19], em 1843, reduziu o problema dos três corpos a um sistema de ordem 7.
- Jacobi [20], em 1845 fez uma investigação qualitativa do problema colinear de três corpos numa forma reduzida (palavras de Wintner).
- Liouville [25], em 1856 estudou a estabilidade dos pontos de libração colineares.
- Bruns [3], em 1887 mostrou que as únicas integrais primeiras que são funções algébricas das posições e velocidades são funções das dez integrais conhecidas.
- P. Painlevé [39], em 1897 mostrou que toda singularidade do problema dos três corpos é devida a colisão.

- Sundman [49], em 1909 mostrou que na colisão tripla a configuração dos corpos aproxima-se de uma configuração central.
- Sundman [48], em 1912 mostrou que singularidades devido a colisão podem ser regularizadas.
- Levi-Civita [24] (1916) faz a "Regularização do problema dos três corpos".
- J. Chazy [6] (1921) classificação das soluções isósceles do problema dos três corpos.
- J. Chazy [7] (1927) faz uma investigação qualitativa do problema colinear dos três corpos (palavras de Wintner).
- A. Wintner [56] (1936) publicou o trabalho "Continuação de órbitas circulares periódicas do problema restrito dos três corpos".
- C. Marchal [28] (1968) estudou a estabilidade das soluções de Lagrange do problema dos três corpos.
- D. Saari [44] (1970) prova a existência de "Movimento oscilatório no problema dos três corpos".
- R. Easton [12] (1971) caracteriza as superfícies $L = cte$, $C = cte$ e $H = cte$ no problema dos três corpos.
- V. Szebehely [51] (1971) classificou o movimento dos três corpos no caso planar.
- A. Kunitsyn [21] (1971) deu uma interpretação geométrica da condição de estabilidade.
- H. Cabral [5] (1973) estudou a topologia das variedades integrais.
- R. McGehee [30] (1974) introduz as coordenadas de McGehee e a variedade de colisão.
- M. Henon [17] (1974) mostra a existência de "Famílias de órbitas periódicas no problema dos três corpos".
- A. Ivanov [18] (1979) obtém resultados sobre a estabilidade de sistemas Hamiltonianos e os aplica ao problema planar dos três corpos, fazendo uma análise não linear da estabilidade no interior de uma das regiões de estabilidade determinada por Kunitsyn.

- C. Simó [45] (1980) regularização por continuidade com respeito às condições iniciais.
- R. Moeckel [31] (1981) estuda o caso isósceles ($m_1 = m_2$) usando as coordenadas de McGehee.
- C. Simó [46] (1981) analisa a colisão tripla do problema isósceles.
- R. Devaney [10] (1982) fez um estudo qualitativo do comportamento das soluções do problema planar isósceles, as quais passam próximo de uma colisão tripla.
- J. Waldvogel [54] (1982) usa coordenadas de Lamâitre para estudar este problema e, em particular, a colisão tripla e binária.
- R. Easton [14] (1984) estuda a existência de órbitas parabólicas no caso planar.
- C. Robinson [43] (1984) usou resultados de Easton para mostrar a existência de soluções oscilatórias no caso planar.
- R. Moeckel [32] (1984) introduz métodos geométricos e dinâmica simbólica.
- R. Moeckel [33] (1989) prova que existe "dinâmica caótica próxima de colisão tripla".
- H. Cabral [4] (1990) prova que as únicas soluções com inclinação constante igual a $\pi/2$ são os dois tipos de soluções isósceles não planares.
- Z. Xia [58] (1994) mostra a existência de: difusão de Arnold; soluções oscilatórias; captura e escape; fenômeno pseudo difusão de Arnold.
- A. Chenciner e R. Montgomery [8] (2000) exibiram uma solução periódica simples no caso em que as massas dos três corpos são iguais. Esta solução tem o formato de uma figura oito.
- C. McCord [29] (2002) demonstrou a conjectura de Saari no caso planar com massas iguais.
- R. Moeckel (2003)[34], usando álgebra computacional e geometria, demonstrou a conjectura de Saari no caso planar com massas quaisquer.

Do exposto acima e devido a sua grande importância para a ciência, em particular para a Mecânica Celeste e a Astronomia, dedicamos esse trabalho ao estudo detalhado sobre o Problema dos Três Corpos.

O presente trabalho foi organizado da seguinte forma:

No primeiro capítulo, iniciamos o estudo enfatizando alguns aspectos gerais do problema. Damos algumas definições básicas e provamos a existência de dez integrais primeiras.

No capítulo dois, trataremos das singularidades no problema dos três corpos, onde relacionamos estas com as colisões.

No terceiro capítulo trataremos o problema nos diferentes tipos de coordenadas, mostrando assim como simplificamos o tratamento do problema escolhendo convenientes mudanças de coordenadas.

O quarto capítulo é dedicado ao estudo de alguns resultados básicos que são consequências das integrais primeiras.

Dedicamos o quinto capítulo ao estudo de alguns subproblemas, como por exemplo, o problema restrito dos três corpos.

O sexto capítulo é dedicado ao estudo das soluções particulares do problema dos três corpos, onde estudamos as configurações centrais, as soluções homográficas e as soluções de equilíbrio relativo.

No sétimo capítulo, estudaremos alguns métodos de reduzirmos o número de graus de liberdade do sistema Hamiltoniano associado ao problema.

O oitavo capítulo é dedicado ao estudo da estabilidade linear das soluções de equilíbrio relativo.

Dedicamos o nono capítulo ao estudo das soluções periódicas usando o método da continuação de Poincaré.

No décimo capítulo, trataremos da conjectura de Saari, onde mostraremos para o caso planar e massas iguais, que as únicas soluções que possuem momento de inércia constante são os equilíbrios relativos.

Capítulo 1

Formulação do Problema dos três corpos

Neste capítulo introduzimos o problema dos três corpos e trataremos das formulações Newtoniana e Hamiltoniana deste problema, das propriedades básicas da função potencial e por último das grandezas conservativas.

1.1 Aspectos Gerais

Consideremos 3-massas pontuais movendo-se no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, submetidas apenas as ações gravitacionais mutuamente exercidas. As massas das partículas são m_1, m_2 e m_3 todas positivas, tendo como vetores posição $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_3$ respectivamente em relação a um sistema de coordenadas inercial do $\mathbb{R}^3$. Essa interação gravitacional é definida pela *Segunda Lei de Newton* através das seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{Gm_1m_3}{r_{31}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{Gm_2m_1}{r_{21}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{Gm_2m_3}{r_{32}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \\ m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 &= \frac{Gm_3m_1}{r_{13}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \frac{Gm_3m_2}{r_{23}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $r_{ij} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$ representa as distâncias mútuas e G é a constante de gravitação universal, podemos assumir sem perda de generalidade que $G = 1$.

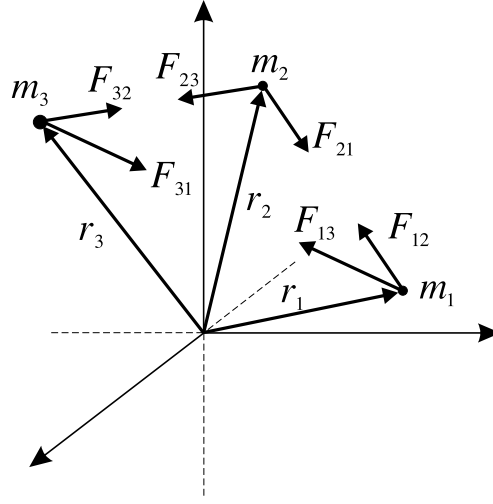


Figura 1.1: Problema dos três corpos

A presença das três massas determina no espaço um potencial gravitacional que é uma função escalar dos seus vetores posição e cuja expressão é dada por:

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \text{ uma vez que } G = 1. \quad (1.2)$$

A introdução da função potencial facilita a notação do conjunto de equações (1.1). Com efeito, podemos reescrever este conjunto de equações na seguinte forma condensada:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \nabla_{\mathbf{r}_i} U, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.3)$$

onde $\nabla_{\mathbf{r}_i} U$ representa o gradiente da função escalar U com relação ao vetor $\mathbf{r}_i$. As três massas dispostas no espaço determinam um triângulo cujo baricentro será denominado de *centro de massa*. As coordenadas do vetor $\mathbf{R}$ do centro de massa, em relação ao sistema inercial fixado, são uma média ponderada das coordenadas dos vetores posição das partículas cujos pesos são suas respectivas massas. Analiticamente, temos:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3), \text{ onde } M = \sum_{i=1}^3 m_i. \quad (1.4)$$

Fixando eixos retangulares e denotando as coordenadas do corpo de massa m_i por (x_i, y_i, z_i) e as coordenadas do centro de massa das três partículas por (X, Y, Z) temos que

$$X = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i x_i, \quad Y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i y_i, \quad \text{e} \quad Z = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i z_i.$$

Segue um resultado importante relativamente ao centro de massa, a saber:

Teorema 1. *Ao longo de cada solução das equações (1.1) ou (1.3), existem vetores constantes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ dependendo unicamente das condições iniciais tais que*

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{A}t + \mathbf{B}$$

isto é, o centro de massa desloca-se em linha reta com velocidade constante.

Demonstração. Somando as três equações (1.1), obtemos ao longo de cada solução a equação

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 + m_3\ddot{\mathbf{r}}_3 = 0. \quad (1.5)$$

Observe que, integrando temos

$$m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 + m_3\dot{\mathbf{r}}_3 = \tilde{\mathbf{A}}. \quad (1.6)$$

e integrando novamente, segue-se que

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 = \tilde{\mathbf{A}}t + \tilde{\mathbf{B}}. \quad (1.7)$$

Onde $\tilde{\mathbf{A}}$ e $\tilde{\mathbf{B}}$ são vetores constantes. Agora dividindo por M teremos

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}t + \mathbf{B},$$

onde $\mathbf{A} = \frac{1}{M}\tilde{\mathbf{A}}$ e $\mathbf{B} = \frac{1}{M}\tilde{\mathbf{B}}$. ■

1.2 Propriedades básicas da função potencial

Observe que $U : \mathbb{R}^9 - \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\Delta = \Delta_{12} \cup \Delta_{13} \cup \Delta_{23}$ com $\Delta_{ij} = \{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \in \mathbb{R}^9 / \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j\}$ $i \neq j$ é o conjunto das singularidades de U .

Se definirmos a ação $\mathbf{g} : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^9$ por $\mathbf{g} \cdot (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = (\mathbf{g}\mathbf{r}_1, \mathbf{g}\mathbf{r}_2, \mathbf{g}\mathbf{r}_3)$ com $\mathbf{g} \in SO(3)$, teremos que U é invariante por esta ação, ou seja,

$$U(\mathbf{g} \cdot (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)) = U(\mathbf{g}\mathbf{r}_1, \mathbf{g}\mathbf{r}_2, \mathbf{g}\mathbf{r}_3) = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3).$$

De fato, basta observar que

$$r_{ij} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| = \|\mathbf{g}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\| = \|\mathbf{g}\mathbf{r}_i - \mathbf{g}\mathbf{r}_j\|.$$

Além disso, U é invariante por translações, isto é, seja $\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) \in \mathbb{R}^9$, e defina

$$T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^9$$

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \mapsto (\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}, \mathbf{r}_3 + \mathbf{a}).$$

Temos que

$$U(T_{\mathbf{a}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)) = U(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1, \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2, \mathbf{r}_3 + \mathbf{a}_3) = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3),$$

pois

$$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = (\mathbf{r}_i + \mathbf{a}) - (\mathbf{r}_j + \mathbf{a}).$$

Por último, U é uma função homogênea de grau -1 , de fato ,

$$U(\lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)) = \lambda^{-1}U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3), \quad \lambda > 0.$$

Pois,

$$\|\lambda(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\| = \lambda\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|.$$

Proposição 2. *A primeira e segunda derivadas de U são dadas por*

$$DU(\mathbf{r})(\mathbf{v}) = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j),$$

$$D^2U(\mathbf{r})(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = S \left(\frac{3}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^2} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j) - (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_j) \right)$$

$$\text{onde } S = - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3}, \quad \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{w} \text{ pertencendo ao espaço das configurações.}$$

Demonstração. Para a primeira derivada temos que

$$DU(\mathbf{r})(\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^3 D_k U(\mathbf{r})(\mathbf{v}_k) = - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} m_i m_j \sum_{k=1}^3 D_k \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} \right) (\mathbf{v}_k).$$

Como

$$\begin{aligned} - \sum_{k=1}^3 D_k \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} \right) (\mathbf{v}_k) &= \frac{1}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^2} \sum_{k=1}^3 D_k (\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|) (\mathbf{v}_k) \\ &= \frac{1}{2\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3} \sum_{k=1}^3 D_k (\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^2) (\mathbf{v}_k) \\ &= \frac{1}{2\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3} \sum_{k=1}^3 2(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) D_k (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) (\mathbf{v}_k) \\ &= \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3}. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue.

Analogamente para a segunda derivada, usando que

$$D^2U(\mathbf{r})(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum D_k D_l(\mathbf{r})(\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_l)$$

■

1.3 Formulação Hamiltoniana do problema

O conjunto de equações (1.1) do movimento geral dos 3 corpos, desdobra-se, na verdade, em um sistema de 18 equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Isso ocorre porque se denotarmos por $\mathbf{v}_i$ o vetor velocidade de cada uma das massas, as equações (1.3) poderão ser escritas como:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i = \frac{1}{m_i} \nabla_{\mathbf{r}_i} U \end{cases}, i = 1, 2, 3, \quad (1.8)$$

ou, também; se definirmos o momento linear da i -ésima partícula, isto é, $\mathbf{p}_{\mathbf{r}_i} = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$, teremos:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{m_i} \mathbf{p}_{\mathbf{r}_i} \\ \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}_i} = \nabla_{\mathbf{r}_i} U, \end{cases}, i = 1, 2, 3. \quad (1.9)$$

Este sistema possui a forma Hamiltoniana, basta definir a função Hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{m_i} \|\mathbf{p}_{\mathbf{r}_i}\|^2 - U(\mathbf{r}). \quad (1.10)$$

Observe que tanto o vetor posição $\mathbf{r}_i$ como o vetor velocidade $\mathbf{v}_i$ são funções de suas coordenadas tridimensionais. Portanto, cada conjunto de equações (1.8) tornam-se seis equações diferenciais, totalizando dezoito equações para as três massas.

1.4 Definições básicas

Definição 3 (Reversibilidade). Considere a EDO $\dot{z} = f(z)$ onde $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável. Dizemos que o sistema acima é reversível (ou T -reversível) se existe uma aplicação linear inversível, $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \rightarrow -t$ tal que $f(z) = -T^{-1}f(Tz)$, ou $T \circ f = -f \circ T$.

Proposição 4. *O sistema (1.9) é reversível.*

Demonstração. Seja X_H um campo vetorial Hamiltoniano da função Hamiltoniana H dada em (1.10), onde

$$X_H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (H_{\mathbf{p}}, -H_{\mathbf{r}}).$$

O sistema (1.9) é equivalente ao sistema mecânico conservativo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\nabla U(\mathbf{r}) \end{cases}. \quad (1.11)$$

O sistema mecânico (1.11) admite sempre a seguinte reversibilidade ou involução reversa:

$$R : \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^9$$

dada por

$$R(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (\mathbf{r}, -\mathbf{p}).$$

De fato, R é um isomorfismo.

$$X_H \circ R(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (H_{\mathbf{p}}, -H_{\mathbf{r}}) \circ R(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (H_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, -\mathbf{p}), -H_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, -\mathbf{p})) = (-\mathbf{p}, -\nabla U(\mathbf{r})),$$

Por outro lado,

$$-R \circ X_H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (-(H_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}), -H_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}))) = -((H_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}), H_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}))) = (-\mathbf{p}, -\nabla U(\mathbf{r})).$$

Portanto,

$$X_H \circ R(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -R \circ X_H(\mathbf{r}, \mathbf{p}),$$

ou seja, o sistema (1.11)(ou 1.9) é reversível. ■

Comentário: Uma das importâncias da reversibilidade deve-se ao fato que basta analisarmos o que acontece com as soluções para $t > 0$, pois as mesmas propriedades são obtidas para $t < 0$.

Definição 5 (Momento de inércia). *Um elemento importante para nosso estudo, sobre tudo para o estudo das singularidades, é definido por:*

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \|\mathbf{r}_i\|^2 \quad (1.12)$$

o qual mede o "tamanho" do sistema e é chamado de momento de inércia. Em coordenadas retangulares teremos

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad (1.13)$$

Definição 6 (Momento angular). A função vetorial definida como segue:

$$J = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i, \quad (1.14)$$

ou em coordenadas retangulares por

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) &= J_x, \\ \sum_{i=1}^3 m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) &= J_y, \\ \sum_{i=1}^3 m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) &= J_z. \end{aligned} \quad (1.15)$$

chama-se momento angular do sistema.

Definição 7 (Energia). A energia total do sistema, denotada por E , é definida por:

$$E = T - U \quad (1.16)$$

onde T é a energia cinética devida ao movimento das massas, definida por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i\|^2 \quad (1.17)$$

e U é a energia potencial definida por (1.2)

Definição 8 (Integral Primeira). Uma função diferenciável $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$, onde $M \subset (\mathbb{R}^9 \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^9$, é uma integral primeira para o movimento dado pelo sistema (1.1) se ela é constante ao longo do movimento, ou seja, $\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) = 0$ para todo tempo onde a solução $\mathbf{r}(t)$ de (1.1) está definida.

1.5 Integrais

Teorema 9. Ao longo de cada solução das equações (1.1) ou (1.3) a energia total e o momento angular permanecem constantes

$$E = h, \quad \mathbf{J} = \mathbf{C}.$$

Demonstração. Derivando a equação (1.16) em relação ao tempo, temos

$$\dot{E} = \dot{T} - \dot{U} = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i - \sum_{i=1}^3 \nabla_i U \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^3 \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \nabla_i U) = 0.$$

Portanto, a energia total é conservada ao longo de cada solução.

Quanto ao momento angular, derivando a equação (1.14), em relação ao tempo, temos

$$\dot{\mathbf{J}} = \sum_{i=1}^3 m_i (\mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i) = - \sum_{i=1}^3 m_i (\ddot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{r}_i) = \left(- \sum_{i=1}^3 m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \right) \times \mathbf{r}_i.$$

Porém, das equações (1.1), temos

$$\sum_{i=1}^3 m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0.$$

Portanto, $\dot{\mathbf{J}} = 0$, donde concluímos o teorema. ■

Lema 10 (Identidade de Lagrange-Jacobi).

$$\ddot{I} = U + 2h$$

Demonstração. Desde que U é homogênea de grau -1 , da relação de Euler, temos

$$-U(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^T \nabla U(\mathbf{r}). \quad (1.18)$$

Por outro lado

$$\ddot{I}(\mathbf{r}(t)) = \sum_{i=1}^3 m_i \|\dot{\mathbf{r}}_i(t)\|^2 + \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i(t) m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t),$$

das equações (1.18) e (1.3) obtemos

$$\ddot{I}(\mathbf{r}(t)) = 2T(\dot{\mathbf{r}}(t)) - U(\mathbf{r}(t)).$$

Agora usando (1.16) segue o resultado. ■

Observe que do teorema 1, temos que as componentes dos vetores constantes $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{R}} = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ e $\mathbf{B} = \mathbf{R} - \dot{\mathbf{R}}t$, são funções algébricas das coordenadas $\mathbf{r}_i$ e $\dot{\mathbf{r}}_i$ (em $\mathbf{B}$ também intervém o tempo t). Portanto, temos seis integrais primeiras provenientes do centro de massa. Analogamente, do teorema 9 temos que a função energia e as três componentes do

momento angular, são também integrais primeiras, do sistema de equações (1.1). Assim, temos dez integrais algébricas no problema dos três corpos.

A importância de conhecermos uma integral primeira para um sistema de equações diferenciais ordinárias, está no fato, de podermos baixar o número de variáveis independentes de uma unidade, ou equivalentemente diminuirmos o número de graus de liberdade. Assim, para se obter a solução completa do problema geral dos três corpos, é necessário conhecer dezoito integrais primeiras do sistema. Sabemos que as leis de conservação da Mecânica fornecem apenas dez integrais primeiras para o problema dos três corpos e, além disso, os trabalhos de Bruns [3] e Poincaré [42] apontam às dificuldades envolvidas para se descobrir as integrais que faltam. Portanto, este problema ainda não apresenta uma solução completa. As soluções obtidas até agora são aquelas conseguidas sob certas condições bem particulares, ou seja, considerando as simetrias dos sistemas, as grandezas conservativas e escolhendo sistemas de coordenadas bastante convenientes.

Capítulo 2

Singularidades no problema dos três corpos

Neste capítulo faremos um estudo de uma solução que experimenta uma colisão total. Veremos que isto está diretamente relacionado com o momento angular através do teorema de Sundman, em seguida definiremos singularidade de um solução, relacionaremos estas com as colisões, relacionando assim com as singularidades do potencial.

2.1 Estudo da colisão total

Nesta seção estudaremos propriedades de uma solução que sofre uma colisão total das partículas, ou seja, todas as partículas ocuparem a mesma posição no espaço das configurações.

Primeiro vamos escrever o momento de inércia, I em termos de r_{ij} . Fixando j temos:

$$\sum_{i=1}^3 m_i (r_i - r_j)^2 = \sum_{i=1}^3 m_i r_i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^3 m_i r_i \right) r_j + r_j^2 \left(\sum_{i=1}^3 m_i \right) \quad (2.1)$$

onde usamos a notação $x^2 = \|x\|^2$ ($x \in \mathbb{R}^3$) e logo $(r_i - r_j)^2 = (r_i - r_j) \cdot (r_i - r_j) = r_{ij}^2$.

Como estamos considerando o centro de massa fixado na origem do sistema de coor-

denadas temos:

$$\sum_{i=1}^3 m_i (r_i - r_j)^2 = 2I + r_j^2 M \quad (2.2)$$

onde $M = \sum_{i=1}^3 m_i$. Multiplicando (2.2) por m_j

$$m_j \sum_{i=1}^3 m_i (r_i - r_j)^2 = 2Im_j + Mm_j r_j^2$$

e somando em j , temos

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_j m_i (r_i - r_j)^2 = 2IM + M \left(\sum_{j=1}^3 m_j r_j^2 \right)$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_j m_i (r_i - r_j)^2 = 2MI + 2MI. \quad (2.3)$$

Como $r_{ij} = 0$ quando $i = j$, temos:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 3} m_i m_j r_{ij}^2 = 2MI. \quad (2.4)$$

Para que ocorra colisão total, devemos ter $r_{ij} = 0$, para todo i, j (simultaneamente). Então de (2.1) temos que $I \rightarrow 0$, de onde segue-se que todas as partículas estão na origem.

Proposição 11. *Seja $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t))$ uma solução do problema dos três corpos que sofre colisão total em $t = t_*$. Então t_* é finito, ou seja, $t_* \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Sendo o potencial Newtoniano ao longo da solução $\mathbf{r}(t)$ igual a

$$U(t) = U(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t)) = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{r_{ij}(t)}, \quad r_{ij}(t) = \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\|$$

e notando que $r_{ij} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow t_*$. Então $U(t) \rightarrow \infty$. Portanto, pela identidade

$$\ddot{I} = T + h = U + 2h$$

onde h é a energia total, segue-se que $\ddot{I}(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow t_*$, pois h é constante. Suponhamos que a colisão total ocorra em tempo infinito. Desde que $\ddot{I}(t) \rightarrow \infty$, temos

que para todo $\epsilon > 0$, existe t_0 tal que $\ddot{I}(t) > \epsilon$ para todo $t \geq t_0$. Em particular, tomando $\epsilon = 2$, e integrando duas vezes temos

$$I(t) > t^2 + At + B$$

onde A e B são constantes, então $I \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$, o que é uma contradição, já que $I(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow t_*$. ■

A seguir mostraremos como a colisão total está relacionada com o momento angular, o seguinte teorema foi publicado por Sundman [48].

Teorema 12 (Sundman). *Seja $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t))$ uma solução do problema dos três corpos que sofre colisão total em $t = t_* \in \mathbb{R}$. Então $\mathbf{C} = 0$.*

Demonstração. Suponha que $I(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow t_*$. Então, $r_{ij} \rightarrow 0$ e $U \rightarrow \infty$. Pela identidade

$$\ddot{I} = U + 2h$$

temos que $\ddot{I}(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow t_*$. Em particular $\ddot{I}(t) > 0$ para um certo intervalo $(\tilde{t}, t_*)$. Usando o lema 58 do apêndice A, observamos que $\dot{I}(t) < 0$ para $t \in (\tilde{t}, t_*)$. Como

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i)$$

temos que

$$\|C\| = \left\| \sum_{i=1}^3 m_i (r_i \times \dot{r}_i) \right\| \leq \sum_i^3 m_i \|r_i\| \|\dot{r}_i\|. \quad (2.5)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$\left| \sum ab \right|^2 \leq \left(\sum a^2 \right) \left(\sum b^2 \right)$$

e escrevendo

$$\sum_i^3 m_i \|r_i\| \|\dot{r}_i\| = \sum_i^3 (\sqrt{m_i} \|r_i\|) (\sqrt{m_i} \|\dot{r}_i\|)$$

temos que

$$\|C\|^2 \leq \left(\sum_i^3 m_i \|r_i\|^2 \right) \left(\sum_i^3 m_i \|\dot{r}_i\|^2 \right) = 4IT$$

ou seja,

$$\|C\|^2 \leq 4IT = 4I(\ddot{I} - h).$$

Multiplicando por $\frac{-\dot{I}}{4I} > 0$, temos

$$\begin{aligned} -\|C\|^2 \frac{\dot{I}}{4I} &\leq -\ddot{I}\dot{I} + h\dot{I} \\ -\frac{\|C\|^2}{4} \dot{I}I^{-1} &\leq h\dot{I} - \ddot{I}\dot{I} \end{aligned}$$

e integrando entre $\tilde{t}$ e t segue que

$$\begin{aligned} \frac{\|C\|^2}{4} \log \frac{I(\tilde{t})}{I(t)} &\leq h(I(t) - I(\tilde{t})) - \frac{1}{2}\dot{I}^2(t) + \frac{1}{2}\dot{I}^2(\tilde{t}) \\ \|C\|^2 \log \left(\frac{1}{I(t)} \right) &\leq 4[hI(t) - \frac{1}{2}\dot{I}(t)^2 + K] \leq 4[hI(t) + K] \end{aligned}$$

donde

$$\|C\|^2 \leq \frac{4[hI(t) + K]}{\log(\frac{1}{I(t)})}.$$

Como $I(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow t_*$, então o numerador da expressão acima tende para K e o denominador para ∞ . Então,

$$\|C\|^2 \rightarrow 0$$

consequentemente

$$C \rightarrow 0.$$

■

2.2 Singularidades e colisões

Sendo o potencial U uma função real analítica em $\mathbb{R}^9 \setminus \Delta$, então pela Teoria Fundamental das Equações Diferenciais Ordinárias temos :

Teorema 13. *Dado $(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0) \in (\mathbb{R}^9 \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^9$, existe única solução $\mathbf{r}(t)$ de (1.1) definida no intervalo máximo $t_- < t < t_+$, contendo $t = 0$, com condições $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{\mathbf{r}}_0$. Além disso, todas as componentes de $\mathbf{r}(t)$ são funções analíticas de t e das coordenadas $\mathbf{r}_0$ e $\dot{\mathbf{r}}_0$.*

Um (ou ambos) dos extremos do intervalo máximo (t_-, t_+) pode ser infinito. Quando um deles é finito, digamos, $t^* = t_- > -\infty$ (ou $t^* = t_+ < +\infty$), dizemos que a solução possui uma singularidade em t^* . Como o sistema (1.9) é reversível, podemos considerar a solução em $[0, t^+)$ ou $(t^-, 0]$.

Definição 14. Se $t^* = +\infty$, a solução é dita regular; se $t^* < +\infty$, a solução é dita singular e t^* é dito uma singularidade da solução.

Definição 15. Suponha que $\mathbf{r}(t)$ tem uma singularidade em t^* ; esta singularidade é chamada uma singularidade de colisão se existir $\mathbf{r}^* \in \nabla$ tal que $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}^*$, quando $t \rightarrow t^*$. Em caso contrário, a singularidade é chamada singularidade sem colisão ou pseudocolisão.

Seja $\rho(\mathbf{r}(t)) : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}_+$, onde $\rho(\mathbf{r}(t)) = \min_{1 \leq i < j \leq 3} r_{ij}(t)$ e $r_{ij} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$, teremos:

Lema 16. Assumindo que $r_{ij}(t) \geq \beta$, então $\|\ddot{\mathbf{r}}(t)\| \leq \frac{M}{\beta^2}$.

Demonstração. De fato, como

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_j(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{r_{ij}^3}$$

temos

$$\|\ddot{\mathbf{r}}_i\| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 3} m_j \frac{1}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^2}$$

como $r_{ij}(t) \geq \beta$, então $\frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{r_{ij}}$. Assim, temos

$$\|\ddot{\mathbf{r}}_i\| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 3} m_j \frac{1}{r_{ij}^2} \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 3} m_j \frac{1}{\beta^2} = \frac{M}{\beta^2}.$$

■

Proposição 17. Se $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$ é solução analítica das equações (1.9) definida no intervalo maximal $[0, t^*)$, então t^* é uma singularidade se, e somente se,

$$\liminf_{t \rightarrow t^*} \rho(\mathbf{r}(t)) = 0$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja t^* uma singularidade. Suponha por absurdo que existe $\alpha > 0$ tal que $\liminf_{t \rightarrow t^*} \rho(\mathbf{r}(t)) \geq \alpha$. Portanto, pelo lema 62 do apêndice A, temos que existe t_0 pertencendo ao intervalo $[0, t^*)$ e β no intervalo $(0, \alpha]$, tal que $r_{ij}(t) \geq \beta$ para t pertencendo a $[t_0, t^*)$. Como $\mathbf{r}(t)$ é analítica, temos que $\ddot{\mathbf{r}}$ é integrável no intervalo $[t_0, t]$. Assim, usando a fórmula de Taylor em torno de t_0 temos

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + (t - t_0)\dot{\mathbf{r}}(t_0) + \int_{t_0}^t (t - \tau)\ddot{\mathbf{r}}(\tau)d\tau.$$

Logo, $\mathbf{r}(t)$ está bem definida no intervalo $[t_0, t]$. Portanto, existe $\mathbf{r}^*(t) = \lim_{t \rightarrow t^*} \mathbf{r}(t)$ (analogamente existe $\mathbf{p}^* = \lim_{t \rightarrow t^*} \dot{\mathbf{r}}(t)$). Portanto, existe $r_{ij}^* = \|r_i^* - r_j^*\|$ onde $r_{ij}^* = \lim_{t \rightarrow t^*} r_{ij}(t)$ e, por hipótese, temos que $r_{ij}^* \geq \beta$ para $i \neq j$, ou seja, todas as distâncias mútuas são positivas. Observe que o domínio de definição de $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$ depende de β (ou seja, de α), mas não depende da escolha das condições iniciais. Portanto, escolhendo as condições iniciais $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$ para t bastante próximo de t^* , temos que a solução é analítica em t^* , o que é uma contradição.

($\Leftarrow$) Suponha agora que $\liminf_{t \rightarrow t^*} \rho(r(t)) = 0$, observe que se $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ tende ∞ quando t tende a t^* , então r_{ij} tende para 0, ou seja, t^* é uma singularidade. Suponha que existe $b_1 > 0$ tal que $\|\ddot{\mathbf{r}}(t)\| \leq b_1$ num pequeno intervalo (t, t^*) . Como $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (\ddot{\mathbf{r}}_1(t), \ddot{\mathbf{r}}_2(t), \ddot{\mathbf{r}}_3(t))$, usando a norma da soma, segue que $\|\ddot{\mathbf{r}}_i\| \leq b_1$ para cada $i = 1, 2, 3$, mas $\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = (\ddot{x}_i(t), \ddot{y}_i(t), \ddot{z}_i(t)) \in \mathbb{R}^3$. Portanto, usando novamente a norma da soma, temos que $|\ddot{x}_i(t)| \leq b_1$, $|\ddot{y}_i(t)| \leq b_1$ e $|\ddot{z}_i(t)| \leq b_1$. Assim,

$$\int_t^{t^*} |\ddot{x}_i(t)| dt \leq \int_t^{t^*} b_1 dt.$$

Por outro lado,

$$\int_t^{t^*} |\ddot{x}_i(t)| dt \geq \left| \int_t^{t^*} \ddot{x}_i(t) dt \right|.$$

Daí integrando, temos

$$|\dot{x}_i(t)| \leq b_1(t^* - t) = b_2.$$

Repetindo o processo para cada uma das coordenadas teremos

$$\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| \leq b_2.$$

Como,

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{m_i} \mathbf{p}_i$$

tem-se

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{m_i} \dot{\mathbf{p}}_i = \nabla_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}).$$

Segue-se que $\nabla_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r})$ é limitado pois $\ddot{\mathbf{r}}$ é limitado por hipótese num pequeno intervalo (t, t^*) . Desde que

$$\frac{d}{dt}[U(\mathbf{r}_i(t))] = [DU(\mathbf{r}_i(t))] \cdot \dot{\mathbf{r}}_i(t) = [\nabla U(\mathbf{r}(t))]^T \cdot \dot{\mathbf{r}}_i(t)$$

teremos

$$\left\| \frac{d}{dt}[U(\mathbf{r}(t))] \right\| \leq \|\nabla U(\mathbf{r}(t))\| \cdot \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|,$$

ou seja,

$$\left\| \frac{d}{dt} U(\mathbf{r}(t)) \right\| \leq K \cdot b_2, \text{ onde } K = \|\nabla U(\mathbf{r}(t))\|$$

Assim, $\frac{d}{dt} U(\mathbf{r}(t))$ é limitado num pequeno intervalo (t, t^*) , então $U(\mathbf{r}(t))$ é limitado. De fato,

$$U(\mathbf{r}(t)) = \int_0^t \frac{d}{dt} U(\mathbf{r}(t)) dt$$

e, como a integral de uma função limitada é limitada, segue que U é limitada num pequeno intervalo (t, t^*) . Mas se o limite inferior de $\rho(\mathbf{r}(t))$ tende a 0 quando t tende para t^* , então o limite superior de $U(\mathbf{r}(t))$ tende para infinito, o que é uma contradição. ■

Teorema 18 (Painlevé). *Se $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$ é uma solução analítica das equações (1.9) definida no intervalo maximal $[0, t^*)$, então t^* é uma singularidade da solução se, e somente se,*

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \rho(\mathbf{r}(t)) = 0.$$

Demonstração. $(\Leftarrow)$ Se $\lim_{t \rightarrow t^*} \rho(\mathbf{r}(t)) = 0$, então por definição temos que

$$\liminf_{t \rightarrow t^*} \rho(\mathbf{r}(t)) = 0,$$

assim, usando a proposição anterior, temos que t^* é uma singularidade da solução.

$(\Rightarrow)$ Queremos mostrar que

$$\limsup_{t \rightarrow t^*} \rho(\mathbf{r}(t)) = 0.$$

Suponha que isto não é verdade, então existe $A > 0$ tal que $\limsup_{t \rightarrow t^*} \rho(\mathbf{r}(t)) > A$. Logo pelo lema 61 do apêndice A, existe uma sequência (t_ν) com ν pertencendo a $\mathbb{N}$ e t_ν tendendo a t^* , tal que $\lim_{t \rightarrow t^*} \rho(\mathbf{r}(t_\nu)) > A$. Portanto, $r_{ij}(t_\nu) > A$ para todo i, j com $1 \leq i < j \leq 3$. Como

$$U(\mathbf{r}(t)) = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{A}$$

temos

$$U(\mathbf{r}(t_\nu)) \leq B$$

para todo ν pertencente a $\mathbb{N}$, onde

$$B = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{A}.$$

Usando a igualdade

$$T(\mathbf{p}(t)) - U(\mathbf{r}(t)) = h$$

teremos

$$T(\mathbf{p}(t_\nu)) = h + U(\mathbf{r}(t_\nu)) \leq h + B$$

para todo ν pertencente a $\mathbb{N}$. Como

$$T = \frac{M}{2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = \frac{1}{2M} \|\mathbf{p}\|^2,$$

tem-se

$$T(\mathbf{p}(t_\nu)) = \frac{1}{2M} \|\mathbf{p}(t_\nu)\|^2 \leq h + B.$$

Donde

$$\|\mathbf{p}(t_\nu)\|^2 \leq 2M(h + B).$$

Portanto,

$$\|\mathbf{p}(t_\nu)\| \leq \sqrt{2M(h + B)},$$

ou seja, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|\mathbf{p}(t_\nu)\| \leq \gamma$$

para todo ν pertencente a $\mathbb{N}$. Observe que fixando t_ν e escolhendo $(\mathbf{r}(t_\nu), \mathbf{p}(t_\nu))$ como condições iniciais, temos que a solução $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$ é definida e analítica no seguinte intervalo $(t_\nu - \delta, t_\nu + \delta)$, onde δ depende de γ e de A pelo Teorema da Existência e Unicidade, note também que existe ν_0 tal que t^* pertence ao intervalo $(t_{\nu_0} - \delta, t_{\nu_0} + \delta)$. De fato, como t_ν tende para t^* , ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que se $\nu \geq N$, então $|t_\nu - t^*| < \epsilon$, fazendo $\delta = \epsilon$ segue a afirmação. Assim a solução é analítica em t^* , o que é uma contradição. ■

Proposição 19. *Se uma solução $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$ das equações (1.9) é definida no intervalo $[0, t^*)$ onde t^* é uma singularidade, então existe $I^* \in [0, \infty]$ tal que*

$$\lim_{t \rightarrow t^*} I(\mathbf{r}(t)) = I^*.$$

Demonstração. Como t^* é uma singularidade, pelo teorema 18 temos que

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \rho(\mathbf{r}(t)) = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow t^*} U(\mathbf{r}(t)) = \infty,$$

pois $\rho(\mathbf{r}(t)) = \min r_{ij}(t)$ e $U(\mathbf{r}(t)) = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$. Assim, usando a igualdade de Lagrange-Jacobi

$$\ddot{I}(\mathbf{r}(t)) = U(\mathbf{r}(t)) + 2h,$$

temos que $\ddot{I}(\mathbf{r}(t)) > 0$ para algum $\delta > 0$ e para todo $t \in (t^* - \delta, t^*)$, $\delta > 0$. Portanto, $\dot{I}(\mathbf{r}(t))$ é crescente em $(t^* - \delta, t^*)$. Logo $I(\mathbf{r}(t))$ não muda de sinal e é monótona próximo e a esquerda de t^* . Então existe

$$\lim_{t \rightarrow t^*} I(\mathbf{r}(t)) = I^* \geq 0.$$

■

Teorema 20 (Von Zeipel). *Seja $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$ uma solução analítica de (1.9) definida no intervalo $(t^*, 0]$ onde t^* é uma singularidade e, tal que $\lim_{t \rightarrow t^*} I(\mathbf{r}(t)) < \infty$, então a singularidade é devida a colisão.*

Antes de começarmos a demonstração vamos introduzir algumas notações:

Seja $P(A)$ o conjunto das partes do conjunto A , Seja $I \subset \{1, 2, \dots, N\}$ um conjunto de índices e considere

$$\Gamma = (\Gamma_i)_{i \in I} \subset P(\{1, 2, \dots, N\}), \text{ com } \Gamma_i \neq \emptyset$$

uma partição de $\{1, 2, \dots, N\}$, ou seja, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ qualquer que seja $i, j \in I$ e $\cup_{i \in I} \Gamma_i = \{1, 2, \dots, N\}$. O i -ésimo *aglomerado* $\{m_j \mid j \in \Gamma_i\}$. Se $N_j =$ é a cardinalidade de Γ_j , então a soma dos N_j é igual a N . Denotando por m_j^k a massa da k -ésima partícula do j -ésimo *aglomerado*, por $\mathbf{r}_{j,k}$ o vetor posição da origem a partícula m_j^k , $r_{jk} = \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\|$ e por $\mathbf{Z}_j$ o vetor posição da origem ao centro de massa do j -ésimo *aglomerado*, ou seja,

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{M_j} \sum_{k=1}^{N_j} m_j^k \mathbf{r}_{j,k}, \text{ onde } M_j = \sum_{k=1}^{N_j} m_j^k,$$

por ultimo denotando por $\mathbf{z}_{j,k} = \mathbf{r}_{j,k} - \mathbf{Z}_j$, o vetor posição do centro de massa do j -ésimo *aglomerado* a massa m_j^k .

Agora vamos a demonstração do teorema:

Demonstração. Seja

$$\Delta_{\Gamma_i} = \left\{ \mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N} \mid \sum_{1 \leq j < k \leq N_i} \|\mathbf{r}_{i,j} - \mathbf{r}_{i,k}\| = 0 \right\}$$

o conjunto das configurações para o qual todas as partículas correspondentes ao Γ_i estão em colisão. Note que se $\Gamma_i = \emptyset$, então Δ_{Γ_i} não está definido, se tem cardinalidade 1 então é igual a $\mathbb{R}^{3N}$ e se $\Gamma_i = \{i_1, i_2\}$ temos que coincide com a definição dada na seção (1.2). Seja

$$\Delta_{\Gamma} = \bigcap_{i \in I} \Delta_{\Gamma_i},$$

o conjunto das configurações onde as partículas em cada aglomerado estão em colisão simultaneamente. Note que Δ_{Γ} é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^9$.

Definindo a aplicação

$$\pi_{\Gamma} : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}, \quad \pi_{\Gamma}(\mathbf{r}) = (\pi_{\Gamma}^1 \mathbf{r}_1, \dots, \pi_{\Gamma}^N \mathbf{r}_N),$$

onde $\Pi_{\Gamma}^j \mathbf{r}_j = \mathbf{Z}_i$ e j pertence a Γ_i , ou seja, a aplicação π_{Γ} manda cada $\mathbf{r}_j$ no centro de massa do *aglomerado* que contem a partícula. Observe que π_{Γ} é uma aplicação linear, de fato, verifica-se que é uma projeção ortogonal para um dado produto interno de $\mathbb{R}^{3N}$. Considere $\mathbb{R}^{3N}$ como um espaço de Hilbert com produto escalar dado por

$$\langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}_j^T \tilde{\mathbf{r}}_j. \quad (2.6)$$

Note que

1. $\pi_{\Gamma} \circ \pi_{\Gamma} = \pi_{\Gamma}$; Note que $\pi_{\Gamma}(\mathbf{r})$ é uma nova configuração onde em cada *aglomerado* Γ_i as partículas foram deslocadas para o centro de massa do aglomerado, assim, aplicando π_{Γ} a nova configuração teremos o resultado anterior.
2. $\Delta_{\Gamma} = \text{Im}(\pi_{\Gamma})$; Se $\mathbf{r} \in \Delta_{\Gamma}$, significa que em cada Γ_i todas as N_i -partículas estão em colisão simultânea, portanto $\mathbf{r}_{i,k} = \mathbf{r}_{i,j}$ qualquer que seja k, j pertencente a $\{1, 2, \dots, N\}$, donde $\mathbf{r}_{i,k}$ para todo k , logo $\pi_{\Gamma}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ implicando que $\Delta_{\Gamma} \subset \text{Im}(\pi_{\Gamma})$. Se $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3N}$ e $\tilde{\mathbf{r}} = \pi(\mathbf{r})$ tem a propriedade de ter as mesmas coordenadas em cada *aglomerado* $\tilde{\mathbf{r}}_j = \mathbf{r}_k$ se $j, k \in \Gamma_i$ implica que $\tilde{\mathbf{r}} \in \Delta_{\Gamma_i}$ para todo i , ou seja, $\tilde{\mathbf{r}} \in \Delta_{\Gamma}$ donde segue que $\text{Im}(\pi_{\Gamma}) \subset \Delta_{\Gamma}$.
3. π_{Γ} é auto-adjunta, ou seja, $\langle \pi_{\Gamma} \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle = \langle \mathbf{r}, \pi_{\Gamma} \tilde{\mathbf{r}} \rangle$;

Defina $\langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle_{\Gamma_i} = \sum_{j \in \Gamma_i} m_j \mathbf{r}_j^T \tilde{\mathbf{r}}_j = \sum_{k=1}^{N_i} m_k^i \mathbf{r}_{i,k}^T \tilde{\mathbf{r}}_{i,k}$, observe que $\langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle = \sum_{i \in I} \langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle_{\Gamma_i}$.

$$\langle \pi_{\Gamma} \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle_{\Gamma_i} = \sum_{j \in \Gamma_i} m_j \mathbf{Z}_i^T \tilde{\mathbf{r}}_j = \mathbf{Z}_i^T \sum_{j \in \Gamma_i} m_j \tilde{\mathbf{r}}_j = M_i \mathbf{Z}_i^T \frac{1}{M_i} \sum_{j \in \Gamma_i} m_j \tilde{\mathbf{r}}_j = M_i \mathbf{Z}_i^T \tilde{\mathbf{Z}}_i.$$

Por outro lado fazendo algumas contas temos que $M_i \mathbf{Z}_i^T \tilde{\mathbf{Z}}_i = \langle \mathbf{r}, \pi_\Gamma \tilde{\mathbf{r}} \rangle_{\Gamma_i}$. Portanto,

$$\langle \pi_\Gamma \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle = \langle \mathbf{r}, \pi_\Gamma \tilde{\mathbf{r}} \rangle.$$

Com isto $\mathbf{Ker} \pi_\Gamma = (Im \pi_\Gamma)^\perp = (\Delta_\Gamma)^\perp$, logo o espaço das configurações $\mathbb{R}^{3N}$ pode ser decomposto como

$$\mathbb{R}^{3N} = \Delta_\Gamma \oplus \mathbf{Ker} \pi_\Gamma.$$

Além disso, denotando por

$$\pi^\Gamma = I_d - \mathbf{1}_\Gamma,$$

a projeção ortogonal sobre o complemento ortogonal de Δ_Γ , temos que $(\pi^\Gamma(\mathbf{r}))_j = \mathbf{r}_j - Z_i$ onde $j \in \Gamma_i$ e $(\pi^\Gamma(\mathbf{r}))_j = \mathbf{r}_j - Z_i = \mathbf{r}_{i,k} - Z_i = z_{i,k}$. Desde que $\pi^\Gamma(\mathbf{r}) \in \mathbf{Ker} \pi_\Gamma$, então pelo teorema de Pitágoras no espaço de Hilbert temos a seguinte relação:

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \|\pi^\Gamma(\mathbf{r})\|^2 + \|\pi_\Gamma(\mathbf{r})\|^2, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^9. \quad (2.7)$$

Observe que $\|\mathbf{r}\|^2 = \sum_{j=1}^N m_j \|\mathbf{r}_j\|^2$ donde segue que $I(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{r}\|^2$.

Definindo $I_\Gamma(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i \in I} M_i \|Z_i\|^2$, como o momento de inércia dos baricêntricos dos aglomerados, note que

$$I_\Gamma(\mathbf{r}) = I(\pi_\Gamma(\mathbf{r})) = \frac{1}{2} \|\pi_\Gamma(\mathbf{r})\|^2.$$

Seja $I_{\Gamma_i}(\mathbf{r}) = (1/2) \sum_{j=1}^{N_i} m_i^j \|\mathbf{z}_{i,j}\|^2$ o momento de inércia do aglomerado Γ_i em relação ao seu centro de massa, definamos

$$I^\Gamma(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \|\pi_\Gamma(\mathbf{r})\|^2 = \sum_{i \in I} M_i \|\mathbf{Z}_i\|^2. \quad (2.8)$$

Então, $I^\Gamma(\mathbf{r}) = I(\pi^\Gamma(\mathbf{r}))$, com isto temos que a relação 2.7 corresponde a

$$I(\mathbf{r}) = I^\Gamma(\mathbf{r}) + I_\Gamma(\mathbf{r}). \quad (2.9)$$

Podemos decompor também a função potencial U , como segue

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 U_{kj}(\mathbf{r}), \quad (2.10)$$

onde

$$U_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{se } k = j \\ m_k m_j \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|^{-1}, & \text{se } k \neq j \end{cases}.$$

Considerando o aglomerado como um sistema isolado temos

$$U_{\Gamma_i}(\mathbf{r}) = \sum_{k < j \in \Gamma_i} U_{kj}(\mathbf{r}).$$

Além disso, denotando o potencial dos aglomerados por

$$U_{\Gamma}(\mathbf{r}) = \sum_{i \in I} U_{\Gamma_i}(\mathbf{r}),$$

e o potencial de interação entre os aglomerados por

$$V_{\Gamma}(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) - U_{\Gamma}(\mathbf{r}). \quad (2.11)$$

O potencial U é invariante por translação, logo se $\mathbf{S} \in \Delta_{\Gamma_i}$, segue que $U_{\Gamma_i}(\mathbf{r} + \mathbf{S}) = U_{\Gamma_i}(\mathbf{r})$ ($\mathbf{S}_j = \mathbf{S}_k$ se $j, k \in \Gamma_i$). Portanto, se $\tilde{\mathbf{r}} \in \Delta_{\Gamma}$ implica que $U_{\Gamma}(\mathbf{r} + \tilde{\mathbf{r}}) = U_{\Gamma}(\mathbf{r})$, como $\Delta_{\Gamma} = \text{Im} \pi_{\Gamma}$ temos

$$U_{\Gamma}(\mathbf{r} + \pi_{\Gamma}(\tilde{\mathbf{r}})) = U_{\Gamma}(\mathbf{r}), \text{ para todo } \tilde{\mathbf{r}} \text{ em } \mathbb{R}^{3N}. \quad (2.12)$$

Denotando por ∇U_{Γ} o gradiente de U_{Γ} relativo ao produto escalar (2.6), definido por

$$\langle \nabla U_{\Gamma}(\mathbf{r}), \tilde{\mathbf{r}} \rangle = DU_{\Gamma}(\mathbf{r})\tilde{\mathbf{r}}, \text{ para todo } \tilde{\mathbf{r}} \text{ em } \mathbb{R}^{3N},$$

onde $DU_{\Gamma} : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ é a derivada de U_{Γ} . Diferenciando (2.12) com respeito a $\tilde{\mathbf{r}}$ temos $DU_{\Gamma}(\mathbf{r} + \pi_{\Gamma}(\tilde{\mathbf{r}})) \cdot D\pi_{\Gamma}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{h} = 0$, como π_{Γ} é linear, então $D\pi_{\Gamma}(\tilde{\mathbf{r}})\mathbf{h} = \pi_{\Gamma}(\mathbf{h})$, agora fazendo $\tilde{\mathbf{r}} = 0$ teremos

$$\langle \nabla U_{\Gamma}(\mathbf{r}), \pi_{\Gamma}(\mathbf{h}) \rangle = \langle \pi_{\Gamma} \nabla U_{\Gamma}(\mathbf{r}), \mathbf{h} \rangle = 0, \text{ para todo } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{3N}.$$

Logo $\pi_{\Gamma} \nabla U_{\Gamma}(\mathbf{r}) = 0$ para todo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3N}$. Usando as equações (1.3) e (2.11) obtemos

$$\pi_{\Gamma} \ddot{\mathbf{r}} = \pi_{\Gamma} \nabla U_{\Gamma}(\mathbf{r}), \text{ para todo } \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3N}. \quad (2.13)$$

Note que $\dot{I}(\mathbf{r}(t)) = \langle \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rangle$ e $\ddot{I}(\mathbf{r}(t)) = \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + \langle \mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}} \rangle$. Como $I_{\Gamma}(\mathbf{r}) = I(\pi_{\Gamma})$, temos que

$$\dot{I}_{\Gamma}(\mathbf{r}(t)) = \langle \pi_{\Gamma}(\dot{\mathbf{r}}(t)), \pi_{\Gamma}(\dot{\mathbf{r}}(t)) \rangle,$$

donde

$$\begin{aligned} \ddot{I}(\mathbf{r}(t)) &= \|\pi_{\Gamma}(\dot{\mathbf{r}}(t))\|^2 + \langle \pi_{\Gamma} \mathbf{r}(t), \pi_{\Gamma}(\ddot{\mathbf{r}}(t)) \rangle, \\ \ddot{I}_{\Gamma}(\mathbf{r}(t)) &= \|\pi_{\Gamma}(\dot{\mathbf{r}}(t))\|^2 + \langle \pi_{\Gamma} \mathbf{r}(t), \pi_{\Gamma} \nabla V_{\Gamma}(\mathbf{r}(t)) \rangle \end{aligned} \quad (2.14)$$

Considere o intervalo (t_*, t) e denote por $\mathbf{r}[t]$ o fecho de $\mathbf{r}((t^*, t))$. Como $\mathbf{r}[t]$ é compacto (basta usar que $\mathbf{r}[t]$ é limitado pois $I(\mathbf{r}(t))$ é limitado quando $t \rightarrow t^*$ para todo $t > t^*$, então o conjunto

$$\Delta^* = \bigcap_{t > t^*} \mathbf{r}[t] \subset \Delta$$

é também compacto pois é intersecção de compactos. se $I^* = \lim_{t \rightarrow t^*} I(\mathbf{r}(t))$, então $I(\mathbf{r}) = I^*$ para $\mathbf{r} \in \Delta^*$, de fato, $\Delta^* = \{\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3N} \mid \exists t_n \rightarrow t^* \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ e } \mathbf{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{r}(t_n)\}$. Seja G o conjunto de todas as partições Γ de $\{1, 2, \dots, N\}$ tal que $\Delta_\Gamma^* \neq \emptyset$, onde $\Delta_\Gamma = \Delta^* \cap \Delta_\Gamma$. Observe que $G \neq \emptyset$ e seja $\Omega \in G$ a partição com menor número de elementos. Observe que temos

$$V_\Omega(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) - U_\Omega(\mathbf{r}) = \sum_{k < j=1}^N U_{k,j}(\mathbf{r}) - \sum_{k < j \in \Omega_i} U_{k,j}(\mathbf{r}) \text{ para algum } i. \quad (2.15)$$

Definindo

$$U_{\Omega_i \Omega_j}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sum_{k \in \Omega_i} \sum_{s \in \Omega_j}, & \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \\ 0, & \Omega_i = \Omega_j, \end{cases}$$

temos

$$V_\Omega(\mathbf{r}) = \sum_{\Omega_i, \Gamma_j \in \Omega} U_{\Omega_i, \Omega_j}(\mathbf{r}), \quad (2.16)$$

a equação (2.16) é outra forma de escrevermos V_Ω dada em (2.11).

Desde que Δ_Ω^* é compacto, então existe uma vizinhança $\tilde{\Delta}$ de Δ_Ω^* tal que

$$\|\nabla V_\Omega(\mathbf{r})\| \leq \tilde{k} \text{ e } \langle \pi_\Omega(\mathbf{r}), \nabla V_\Omega(\mathbf{r}) \rangle \leq \tilde{k}, \text{ para todo } \mathbf{r} \in \tilde{\Delta}, \quad (2.17)$$

onde $\tilde{k}$ é uma constante dependendo de $\tilde{\Delta}$. De fato, vamos mostrar que V_Ω está bem definida em Δ_Ω^* , logo contínua.

Suponha que V_Ω tem uma singularidade em Δ_Ω^* , então existe $\tilde{\mathbf{r}} \in \Delta_\Omega^*$ tal que para $i \neq j$, $i, j \in I$ existem $k \in \Omega_i$, $s \in \Omega_j$ com $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_j$, neste caso podemos trocar Ω por $\tilde{\Omega}$, onde juntamos Ω_i e Ω_j num só elemento, $\tilde{\Omega}_i = \Omega_i \cup \Omega_j$, assim $\tilde{\Omega}$ é tal que $\mathbf{r} \in \Delta_{\tilde{\Omega}}^*$, $\tilde{\Omega} \in G$, logo $\tilde{\Omega}$ é uma partição com um conjunto a menos que Ω , o que é uma contradição.

Como o conjunto das singularidades de V_Ω é um conjunto fechado de $\mathbb{R}^{3N}$ que não intercepta Δ_Ω^* , então existe uma vizinhança $\tilde{\Delta}$ de Δ_Ω^* tal que $\tilde{\Delta}$ ainda não intercepta o conjunto das singularidades de V_Ω , portanto $V_\Omega(\mathbf{r})$, $\nabla V_\Omega(\mathbf{r})$, $\pi_\Omega(\mathbf{r})$ são contínuas no compacto $\tilde{\Delta}$, logo existe $\tilde{k}$ tal que (2.17) é satisfeita.

Um passo importante para a demonstração, é provar que

$$\Delta^* \subset \Delta_\Omega.$$

Suponha que Δ^* não está contido em Δ_Ω , e considere um conjunto aberto B tal que

$$\Delta^* \subset B \subset \bar{B} \subset \tilde{\Delta}.$$

Para um constante positiva σ , seja

$$B_\sigma = \{\mathbf{r} / \|\pi_\Omega(\mathbf{r})\| < \sigma\}$$

Desde que $\partial B \cap \Delta^* = \emptyset$, onde ∂B é dito bordo de B , este conjunto é compacto, assim, existe $\nu > 0$ e $\tau > t^*$, tal que

$$\mathbf{r}[\tau] \cap (\bar{B}_\nu \times \partial B) = \emptyset \text{ e } \bar{B}_\nu \times \bar{B} \subset \tilde{\Delta}. \quad (2.18)$$

De fato, a soma direta de dois espaços pode ser identificada como o produto cartesiano deles, então

$$\mathbf{r} = \pi_\Omega(\mathbf{r}) + \pi^\Omega(\mathbf{r}) = (\pi_\Omega(\mathbf{r}), \pi^\Omega(\mathbf{r})), \quad (2.19)$$

isto também é uma consequência de como π^Ω foi definida. Desde que por hipótese Δ^* não está contido em Δ_Ω , então existe σ no intervalo $(0, \tau)$ tal que $\mathbf{r}(t)$ não pertence a $\bar{B}_\sigma \times B$, para um instante infinito de tempo t . Consideremos então um valor específico de σ . Sejam α_i constantes positivas, tais que dado α_1 nós podemos encontrar $t_1 > t^*$ tal que

$$|I(\mathbf{r}(t)) - I^*| < \alpha_1 \sigma^2, \text{ para todo } t \in (t^*, t_1). \quad (2.20)$$

Observe que quando $t \rightarrow t^*$, a órbita $\mathbf{r}(t)$ se aproxima de Δ_Ω^* , $\mathbf{r}(t)$ entra e sai do conjunto $\bar{B}_\sigma \times B$ no mesmo numero de tempos. Assim de (2.18) este processo leva a um mudança em $\partial B \times B$ para valores de t no intervalo (t^*, t_1) . Portanto, podemos encontrar um intervalo de tempo $[t_2, t_3] \subset (t^*, t_1)$ tal que

$$|t_2 - t_3| < \alpha_2 \sigma, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{r}(t) \in \bar{B}_\sigma \times B, \text{ para todo } t \in [t_2, t_3],$$

$$I^\Omega(\mathbf{r}(t_2)) = I^\Omega(\mathbf{r}(t_3))\sigma^2 \quad (2.22)$$

e

$$\min_{t \in [t_2, t_3]} I^\Omega(\mathbf{r}(t)) < \alpha_3 \sigma^2. \quad (2.23)$$

Seja $\mu \in (t_1, t_2)$ tal que $I_\Omega(\mathbf{r}(\mu))$ é o maior valor da função $I_\Omega(\mathbf{r})$. Note que de (2.20) temos $I(\mathbf{r}(t)) - I^* > -\alpha_1\sigma^2$, desde que $I(\mathbf{r}) = I_\Omega(\mathbf{r}) + I^\Omega(\mathbf{r})$, segue

$$I_\Omega(\mathbf{r}(t)) > I^* - \alpha_1\sigma^2 - I^\Omega(\mathbf{r}(t))$$

por (2.23) temos que

$$I_\Omega > I^* - (\alpha_1 + \alpha_3)\sigma^2, \forall t \in [t_2, t_3].$$

Como $I(\mathbf{r}(\mu))$ é o máximo de $I(\mathbf{r}(t))$ no intervalo (t_1, t_2) segue que

$$I_\Omega(\mathbf{r}(\mu)) > I^* - \alpha_4\sigma^2,$$

onde $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_3$. Por outro lado, de (2.20) temos

$$I(\mathbf{r}(t_3)) < I^* + \alpha_1\sigma^2$$

donde

$$I_\Omega(\mathbf{r}(t_3)) + I^\Omega(\mathbf{r}(t_3)) < I^* + \alpha_1\sigma^2,$$

logo

$$I_\Omega(\mathbf{r}(t_3)) < I^* + \alpha_1\sigma^2 - \sigma^2,$$

ou seja,

$$I_\Omega(\mathbf{r}(t_3)) < I^* - \alpha_5\sigma^2,$$

onde $\alpha_5 = 1 - \alpha_1$. Portanto das duas desigualdades acima segue que

$$I_\Omega(\mathbf{r}(\mu)) - I_\Omega(\mathbf{r}(t_3)) > \alpha_6\sigma^2, \text{ onde } \alpha_6 = 1 - (2\alpha_1 + \alpha_3) \quad (2.24)$$

Assim, por (2.14), (2.16), (2.17), (2.18) e como $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ pertence $\bar{B}_\sigma \times \bar{B}$, temos que

$$\ddot{I}(\mathbf{r}(t)) \geq -\alpha_7, \text{ para todo } t \in [t_2, t_3]$$

onde $\alpha_7 = \tilde{k}$, olhando para a função $f(t) = I_\Omega(\mathbf{r}(t))$, e usando Taylor em torno de μ , para c entre μ e t teremos

$$I_\Omega(\mathbf{r}(t)) = I_\Omega(\mathbf{r}(\mu)) + \frac{(t - \mu)^2}{2} \ddot{I}_\Omega(\mathbf{r}(c)),$$

donde

$$I_\Omega(\mathbf{r}(t)) - I_\Omega(\mathbf{r}(\mu)) \geq -\frac{(t - \mu)^2}{2} \alpha_7,$$

logo

$$I_\Omega(\mathbf{r}(t_3)) - I_\Omega(\mathbf{r}(\mu)) \geq -\alpha_8(t_3 - \mu)^2, \text{ onde } \alpha_8 = \frac{\tilde{k}}{2}. \quad (2.25)$$

Da equação (2.25) segue que

$$I_{\Omega}(\mathbf{r}(\mu)) - I_{\Omega}(\mathbf{r}(t_3)) \leq \alpha_8(t_3 - \mu)^2,$$

donde

$$I_{\Omega}(\mathbf{r}(\mu)) - I_{\Omega}(\mathbf{r}(t_3)) < \alpha_8 \alpha_2^2 \sigma^2,$$

daí

$$I_{\Omega}(\mathbf{r}(\mu)) - I_{\Omega}(\mathbf{r}(t_3)) < \alpha_9 \sigma^2, \text{ com } \alpha_9 = \alpha_8 \alpha_2^2,$$

como $\alpha_6 = 1 - (2\alpha_1)$ e $\alpha_9 = \frac{\tilde{k}\sigma^2}{2}$, podemos escolher α_1 , α_2 e α_3 pequenos de modo que $\alpha_9 < \alpha_6$, mas isso contradiz (2.24), logo

$$\Delta^* \subset \Delta_{\Omega}.$$

Agora, temos que

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \pi^{\Omega}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.26)$$

Desde que $\Delta^* = \Delta_{\Omega}^*$, então existe t_4 tal que $\mathbf{r}(t)$ pertence a $\tilde{\Delta}$, para todo t no intervalo (t^*, t_4) . Usando (2.13) obtemos

$$\ddot{\pi}_{\Omega}(\mathbf{r}(t)) = \pi_{\Omega} \nabla_{\Omega} V(\mathbf{r}(t)), \text{ para todo } t \in (t^*, t_4)$$

e por (2.17) temos

$$\|\ddot{\pi}_{\Omega}(\mathbf{r}(t))\| < \tilde{k}, \text{ para todo } t \in (t^*, t_4).$$

Expandindo em série de Taylor segue que existe $\lim_{t \rightarrow t^*} \pi_{\Omega}(\mathbf{r}(t))$, então por (2.19) e (2.26), temos que $\lim_{t \rightarrow t^*} (\mathbf{r}(t))$ também existe, ou seja, t^* é uma singularidade devido a colisão. ■

Teorema 21 (Saari, 1973). *No problema colinear dos três corpos se t^* é uma singularidade, então t^* é uma singularidade devida a colisão.*

Demonstração. Suponha que $r_1 \leq r_2 \leq r_3$, observe que $r_1 \leq 0$. De fato, se $r_1 > 0$ e $m_i > 0$ para $i = 1, 2, 3$, então não pode acontecer $m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 = 0$. Note que usamos fortemente o fato de que o centro de massa encontra-se na origem. Suponha que t^* é uma singularidade que não é devida a colisão, então pelo teorema 20 temos que $I(\mathbf{r}(t))$ tende para infinito quando t tende a t^* . Como

$$I(\mathbf{r}(t)) = \frac{1}{M} \sum_{i < j} m_i m_j r_{ij}^2(t),$$

temos que existe $\beta > 0$, tal que

$$I(\mathbf{r}(t)) \leq \beta R^2(t)$$

para todo t , onde $R(t) = \max_{1 \leq i < j \leq 3} r_{ij}(t)$. Com efeito, basta tomarmos $\beta = \frac{1}{M} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} m_i m_j$.

Assim, $R(t)$ tende para ∞ quando t tende para t^* , mas como $r_1(t) \leq r_2(t) \leq r_3(t)$, então $R(t) = |r_3(t) - r_1(t)|$, portanto $|r_3(t) - r_1(t)|$ tende para ∞ quando t tende para t^* . Suponha que $r_3(t)$ é limitado, então $r_1(t)$ tende a $-\infty$. Como o centro de massa está na origem, temos que $\limsup_{t \rightarrow t^*} r_2(t)$ tende para ∞ quando t tende para t^* . Desde que por hipótese as partículas estão ordenadas, segue que $r_3(t)$ tende para infinito. Em outras palavras:

$$\limsup_{t \rightarrow t^*} r_3(t) = +\infty,$$

o que é uma contradição. Das equações (1.1) temos que

$$\ddot{r}_3(t) = \sum_{i=1}^2 \frac{m_i(r_i(t) - r_3(t))}{|r_i(t) - r_3(t)|^3},$$

como $r_i(t) - r_3(t) < 0$ para $i = 1, 2$, temos que $\ddot{r}_3(t) < 0$ para todo tempo onde a solução está definida, porém $r_3(t)$ é ilimitada e positiva, portanto pelo lema 59 do apêndice A temos uma contradição. ■

O seguinte teorema demonstrado por Painlevé [11] nos diz que no problema dos três corpos existe uma relação direta entre singularidades de uma solução e singularidades do potencial.

Teorema 22. *No problema dos três corpos todas as singularidades são devida a colisão.*

Demonstração. Queremos mostrar que se t^* é uma singularidade, então ao menos uma das distâncias mútuas deve tender a zero quando t tende a t^* , isto é, existem i e j com $i \neq j$ tal que $\lim_{t \rightarrow t^*} r_{ij}(t) = 0$. Assumamos que isto não é verdade, assim suponha que $\limsup_{t \rightarrow t^*} (r_{ij}(t)) > 0$ para todo i, j com $i \neq j$. Então decorre da definição que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $t \in (t^* - \delta, t^*)$, temos que $r_{ij}(t) < \limsup_{t \rightarrow t^*} (r_{ij}(t)) + \epsilon$. Pelo teorema 18, t^* é uma singularidade se, e somente se, $\rho(\mathbf{r}(t))$ tende a zero quando t tende para t^* , onde

$$\rho(\mathbf{r}(t)) = \min\{r_{12}(t), r_{23}(t), r_{13}(t)\}.$$

Disso deduzimos que ao menos duas das distâncias mútuas trocam o papel de ser o mínimo uma infinidade de vezes. Digamos que sejam r_{13} e r_{23} . Considere uma seqüência (t_ν) com

ν pertencendo a $\mathbb{N}$ e t_ν tendendo para t^* . Portanto, $r_{13}(t_\nu)$ e $r_{23}(t_\nu)$ tendem para 0, quando t tende para t^* (note que podemos escolher t_ν tal que $r_{13}(t_\nu) = r_{23}(t_\nu)$). Assim, pela desigualdade triangular, temos que $r_{12}(t_\nu)$ também tende para 0 quando t tende para t^* . Portanto, $I(t_\nu)$ tende para 0. Usando a proposição 19, temos que existe $\lim_{t \rightarrow t^*} I(\mathbf{r}(t))$ e é igual a I^* . Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow t^*} I(\mathbf{r}(t)) = 0.$$

Donde, pela definição de I , $r_{12}(t)$, $r_{13}(t)$ e $r_{23}(t)$ tendem a 0 quando t tende a t^* . Portanto, o limite de r_{ij} e, conseqüentemente, o limite superior de r_{ij} tendem a 0 quando t tende para t^* , o que é uma contradição. ■

Capítulo 3

Diferentes tipos de coordenadas

Este capítulo tem como objetivo, descrever o problema em diferentes coordenadas, que são mais convenientes que outras, dependendo do objetivo, mas que preservam a estrutura Hamiltoniana.

3.1 Sistema baricêntrico

Como $\mathbf{R}$ move-se uniformemente em linha reta, podemos escolher um sistema de referência cuja origem seja o centro de massa. De fato, de (1.5) segue que $\ddot{\mathbf{R}} = 0$ e usando a translação:

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, cujo o momento associado é $\mathbf{p}_{r_i} = (p_{x_i}, p_{y_i}, p_{z_i})$ e $\tilde{\mathbf{r}}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)$. Nas equações (1.1) elas não são alteradas. Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor quando seja conveniente que $\mathbf{R}$ está em repouso. Usando esta hipótese e considerando o ponto fixo $\mathbf{R}$ como a origem do sistema de coordenadas, temos uma simplificação no tratamento analítico do problema dos três corpos. Essa mudança de coordenadas facilita a interpretação do movimento pois o deslocamento das partículas passa a ser avaliado em relação ao seu centro de massa, onde os novos vetores posição são dados pela equação (3.1). A energia cinética T para o sistema (1.1) pode ser expressa de varias formas como

segue-se

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \quad (3.2)$$

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i (\dot{\tilde{x}}_i^2 + \dot{\tilde{y}}_i^2 + \dot{\tilde{z}}_i^2), \quad (3.3)$$

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{M} v_{ij}^2, \quad (3.4)$$

onde v_{ij} denota a velocidade de A_j relativa à A_i ,

$$v_{ij}^2 = (\dot{x}_j - \dot{x}_i)^2 + (\dot{y}_j - \dot{y}_i)^2 + (\dot{z}_j - \dot{z}_i)^2 = (\dot{\tilde{x}}_j - \dot{\tilde{x}}_i)^2 + (\dot{\tilde{y}}_j - \dot{\tilde{y}}_i)^2 + (\dot{\tilde{z}}_j - \dot{\tilde{z}}_i)^2. \quad (3.5)$$

Note que

$$r_{ij}^2 = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = (\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_i - \tilde{y}_j)^2 + (\tilde{z}_i - \tilde{z}_j)^2. \quad (3.6)$$

Assim, as equações, (1.2), (1.3) e (1.9) permanecem válidas. No entanto, de agora em diante ao mencionarmos o vetor posição $\mathbf{r}_i$, bem como sua derivada, estaremos nos referindo a este novo sistema baricêntrico de coordenadas.

3.2 Coordenadas heliocêntricas ou relativas

Sejam $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ os vetores posição dos corpos de massas m_1 , m_2 , m_3 no sistema inercial baricêntrico e agora consideremos os vetores posição dos corpos de massas m_1 , m_2 relativamente ao corpo de massa m_3 , a saber,

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 = (x_1 - x_3, y_1 - y_3, z_1 - z_3) \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 = (x_2 - x_3, y_2 - y_3, z_2 - z_3). \end{cases} \quad (3.7)$$

Considerando o corpo de massa m_3 como o "Sol", mesmo que m_3 não seja a maior massa, dizemos que $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ são os vetores heliocêntricos de m_1 e m_2 em relação a m_3 ; suas componentes são as coordenadas heliocêntricas de m_1 e m_2 . Portanto, um sistema heliocêntrico de coordenadas é um sistema com origem em um dos corpos e eixos paralelos aos eixos do sistema inercial veja figura 3.1, dessa forma o movimento relativo ao corpo de massa m_3 é como se este corpo estivesse em repouso. Das equações (3.7) segue que

$$m_1 \mathbf{r}_1 = m_1 \mathbf{x}_1 + m_1 \mathbf{r}_3$$

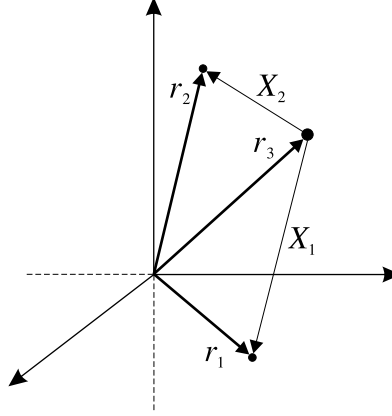


Figura 3.1: Sistema heliocêntrico

e

$$m_1 \mathbf{r}_2 = m_2 \mathbf{x}_2 + m_2 \mathbf{r}_3,$$

donde teremos

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 - (m_1 + m_2) \mathbf{r}_3 = m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2 \quad (3.8)$$

Agora, supondo o centro de massa na origem, isto é, $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{x}_2 + \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_3 &= -\frac{1}{M}(m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde M é a massa total do sistema.

Assim, conhecendo-se o movimento dos corpos de massas m_1 e m_2 em relação ao corpo de massa m_3 , conheceremos o movimento dos corpos de massas m_1 , m_2 e m_3 em relação ao centro de massa no sistema inercial. Usando as equações (3.7), temos a recíproca.

Das equações do movimento (1.1), temos

$$\ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{m_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) - \frac{m_1 + m_3}{\|\mathbf{x}_1\|^3}\mathbf{x}_1 - \frac{m_2}{\|\mathbf{x}_2\|^3}\mathbf{x}_2$$

e

$$\ddot{\mathbf{x}}_2 = \frac{m_1}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \frac{m_2 + m_3}{\|\mathbf{x}_2\|^3}\mathbf{x}_2 - \frac{m_1}{\|\mathbf{x}_1\|^3}\mathbf{x}_1.$$

Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 23. *As equações heliocêntricas do problema dos três corpos são*

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}}_1 &= q_{11}\mathbf{x}_1 + q_{12}\mathbf{x}_2 \\ \ddot{\mathbf{x}}_2 &= q_{21}\mathbf{x}_1 + q_{22}\mathbf{x}_2\end{aligned}\tag{3.10}$$

onde

$$q_{ii} = -\frac{m_i+m_3}{\|\mathbf{x}_i\|^3} - \frac{m_j}{\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|^3}\tag{3.11}$$

$$q_{ij} = \frac{m_j}{\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|^3} - \frac{m_j}{\|\mathbf{x}_j\|^3}, \text{ para } i \neq j.$$

Demonstração. A demonstração segue naturalmente dos comentários, que precedem o seu enunciado. ■

No que segue denotaremos os corpos de massas m_1, m_2 e m_3 , por A_1 , A_2 e A_3 respectivamente, e introduzindo uma nova notação como segue :

$$\begin{aligned}q_1 &= x_1 - x_3, & q_2 &= y_1 - y_3, & q_3 &= z_1 - z_3 \\ q_4 &= x_2 - x_3, & q_5 &= y_2 - y_3, & q_6 &= z_2 - z_3 \\ q_7 &= x_3, & q_8 &= y_3, & q_9 &= z_3.\end{aligned}\tag{3.12}$$

temos que coordenadas do corpo A_1 e A_2 relativas a A_3 são (q_1, q_2, q_3) e (q_4, q_5, q_6) respectivamente. Note que neste caso $\mathbf{x}_1 = (q_1, q_2, q_3)$, $\mathbf{x}_2 = (q_4, q_5, q_6)$ e $\mathbf{r}_3 = (q_7, q_8, q_9)$. A transformação simplética, que da origem às coordenadas (3.12), é dada pela função geradora

$$\begin{aligned}W &= p_1(x_1 - x_3) + p_2(y_1 - y_3) + p_3(z_1 - z_3) + p_4(x_2 - x_3) \\ &\quad + p_5(x_1 - x_3) + p_6(z_2 - z_3) + p_7x_3 + p_8y_3 + p_9z_3.\end{aligned}\tag{3.13}$$

As equações que definem a transformação canônica são as seguintes:

$$q_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad p_{x_j} = \frac{\partial W}{\partial x_j}, \quad p_{y_j} = \frac{\partial W}{\partial y_j}, \quad p_{z_j} = \frac{\partial W}{\partial z_j}, \quad i = 1, \dots, 9, j = 1, \dots, 3,\tag{3.14}$$

para $i = 1, 2, \dots, 9$ e $j = 1, 2, 3$. Donde teremos:

$$\begin{aligned}p_{x_1} &= p_1, \quad p_{x_2} = p_4, \quad p_{x_3} = -p_1 - p_4 + p_7, \\ p_{y_1} &= p_2, \quad p_{y_2} = p_5, \quad p_{y_3} = -p_2 - p_5 + p_8, \\ p_{z_1} &= p_3, \quad p_{z_2} = p_6, \quad p_{z_3} = -p_3 - p_6 + p_9.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Portanto, o novo Hamiltoniano é dado por

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2}\mu_1(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2}\mu_2(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\mu_3[(p_1 + p_4 - p_7)^2 + (p_2 + p_5 - p_8)^2] - U,
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

onde $\mu_i = \frac{1}{m_i}$ e

$$U = \frac{m_2 m_3}{r_1} + \frac{m_3 m_1}{r_2} + \frac{m_1 m_2}{r_3},$$

com

$$\begin{aligned}
 r_1^2 &= q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 \\
 r_2^2 &= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \\
 r_3^2 &= (q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2.
 \end{aligned}$$

3.3 Coordenadas giratórias

Nesta seção consideraremos um novo sistema de coordenadas (ξ, η, ζ) obtido a partir do sistema fixo (x, y, z) , com a origem no centro de massa, mediante uma rotação em torno do *eixo* z de um ângulo $\theta(t)$, conforme ilustrado na figura abaixo.

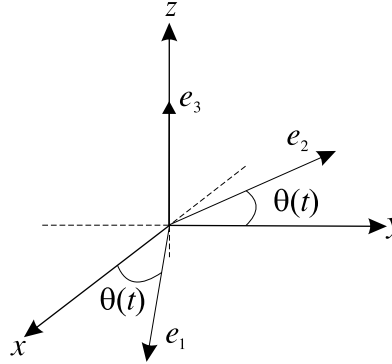


Figura 3.2: Sistema giratorio.

Seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ uma base desse novo sistema. Então, as coordenadas dessa nova base em relação à base original são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1 &= (\cos\theta, \sin\theta, 0), \\
 \mathbf{e}_2 &= (-\sin\theta, \cos\theta, 0), \\
 \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1).
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Nas novas coordenadas, o vetor posição $\mathbf{r}$ de uma partícula passa a ser dado por:

$$\mathbf{r} = \xi \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2 + \zeta \mathbf{e}_3. \quad (3.18)$$

Observe que ξ, η, ζ , são na verdade funções de t , isto é, $\xi = \xi(t), \eta = \eta(t), \zeta = \zeta(t)$. Assim, derivando (3.18) duas vezes em relação a t obtemos, respectivamente,

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{\xi} - \eta\dot{\theta})\mathbf{e}_1 + (\dot{\eta} + \xi\dot{\theta})\mathbf{e}_2 + \dot{\zeta}\mathbf{e}_3 \quad (3.19)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = [(\ddot{\xi} - \xi\dot{\theta}^2) - (\eta\ddot{\theta} + 2\xi\dot{\theta})]\mathbf{e}_1 + [(\ddot{\eta} - \eta\dot{\theta}^2) - (\xi\ddot{\theta} + 2\dot{\eta}\dot{\theta})]\mathbf{e}_2 + \ddot{\zeta}\mathbf{e}_3 \quad (3.20)$$

dado que

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \dot{\theta}\mathbf{e}_2, \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\theta}\mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{e}}_3 = 0.$$

Note que este sistema é exatamente o referencial baricêntrico que rotaciona em torno do eixo- z com uma velocidade angular constante ω , de modo que $\theta(t) = \omega t$ e $\dot{\theta} = \omega$. Para um observador posicionado sobre esse referencial, as massas parecem estar em repouso.

Desde que $\theta(t) = \omega t$, as equações (3.19) e (3.20) dos vetores velocidade e aceleração da i -ésima partícula tornam-se, respectivamente:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = (\dot{\xi}_i - \omega\eta_i)\mathbf{e}_1 + (\dot{\eta}_i + \omega\xi_i)\mathbf{e}_2 + \dot{\zeta}_i\mathbf{e}_3, \quad (3.21)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = (\ddot{\xi}_i - 2\omega\dot{\eta}_i - \omega^2\xi_i)\mathbf{e}_1 + (\ddot{\eta}_i + 2\omega\dot{\xi}_i - \omega^2\eta_i)\mathbf{e}_2 + \ddot{\zeta}_i\mathbf{e}_3. \quad (3.22)$$

Note que a energia cinética assume a forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i [(\dot{\xi}_i - \omega\eta_i)^2 + (\dot{\eta}_i + \omega\xi_i)^2 + \dot{\zeta}_i^2]. \quad (3.23)$$

Substituindo (3.22) na equação (1.3) e fazendo o produto interno em ambos os membros da igualdade pelos vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ da base, concluímos que as equações do movimento para o problema dos três corpos no referencial girante reduzem-se a:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_i - 2\dot{\xi}_i\omega - \xi_i\omega^2 &= \frac{1}{m_i}U_{1,i} \\ \ddot{\eta}_i + 2\dot{\eta}_i\omega - \eta_i\omega^2 &= \frac{1}{m_i}U_{2,i} \\ \ddot{\zeta}_i &= \frac{1}{m_i}U_{3,i} \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde $U_{i,j} = \langle \nabla_{\mathbf{r}_i} U, \mathbf{e}_j \rangle$ para $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$.

Considerando o momento da i -ésima partícula nas coordenadas giratórias, isto é, $\mathbf{p}_i = (p_{\xi_i}, p_{\eta_i}, p_{\zeta_i})$, temos que

$$\begin{aligned} p_{\xi_i} &= m_i(\dot{\xi}_i - \omega\eta_i) \\ p_{\eta_i} &= m_i(\dot{\eta}_i + \omega\xi_i) \\ p_{\zeta_i} &= m_i\dot{\zeta}_i. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Assim, o Hamiltoniano associado as equações (3.24) é dado por

$$H = \frac{1}{2m_1}(p_{\xi_1}^2 + p_{\eta_1}^2 + p_{\zeta_1}^2) + \frac{1}{2m_2}(p_{\xi_2}^2 + p_{\eta_2}^2 + p_{\zeta_2}^2) + \frac{1}{2m_3}(p_{\xi_3}^2 + p_{\eta_3}^2 + p_{\zeta_3}^2) - \quad (3.26)$$

$$\omega(\xi_1 p_{\eta_1} - \eta_1 p_{\xi_1} + \xi_2 p_{\eta_2} - \eta_2 p_{\xi_2} + \xi_3 p_{\eta_3} - \eta_3 p_{\xi_3}) - U,$$

onde U é a energia potencial dada por

$$U = \frac{m_2 m_3}{\rho_1} + \frac{m_3 m_1}{\rho_2} + \frac{m_1 m_2}{\rho_3}$$

com

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= (\xi_3 - \xi_2)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2 + (\zeta_3 - \zeta_2)^2, \\ \rho_2^2 &= (\xi_1 - \xi_3)^2 + (\eta_1 - \eta_3)^2 + (\zeta_1 - \zeta_3)^2, \\ \rho_3^2 &= (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

As equações de movimento assumem a forma:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \frac{1}{m_i} p_{\xi_i} + \omega\eta_i, \quad \dot{\eta}_i = \frac{1}{m_i} p_{\eta_i} - \omega\xi_i, \quad \dot{\zeta}_i = \frac{1}{m_i} p_{\zeta_i}, \\ \dot{p}_{\xi_i} &= \omega p_{\eta_i} + \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad \dot{p}_{\eta_i} = -\omega p_{\xi_i} + \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad \dot{p}_{\zeta_i} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

para $i = 1, 2, 3$. Observe que o coeficiente de ω na equação (3.26) corresponde a

$$\sum_{i=1}^3 (\xi_i p_{\eta_i} - \eta_i p_{\xi_i}) \quad (3.29)$$

que representa o momento angular do sistema em torno da origem, o qual permanece constante ao longo do movimento, como sabemos da seção 1.5.

Capítulo 4

Consequências das Integrais

Neste capítulo trataremos de alguns resultados básicos que são consequências das grandezas conservativas (as integrais primeiras) tratadas no capítulo 1 seção 1.5. No que segue vamos considerar sempre o centro de massa fixo na origem do sistema de coordenadas (isto é, $\mathbf{R} = 0$), ou seja, o sistema de coordenadas é um sistema baricêntrico e para facilitar a notação usaremos as variáveis $\mathbf{r}_i$ como sendo as variáveis $\tilde{\mathbf{r}}_i$. Em relação a um tal sistema o momento angular $\mathbf{J}$ é definido por (1.14) ao longo de uma solução, o seu valor constante será denotado por $\mathbf{C}$. Se tomarmos outro sistema baricentrico de coordenadas, a constante do momento angular é outra, digamos $\mathbf{C}^*$. No entanto, temos o seguinte resultado

Teorema 24. *O plano que passa pelo centro de massa e é perpendicular ao momento angular não depende do sistema de coordenadas usado.*

Demonstração. Antes de começarmos a demonstração, observemos que, se um sistema de coordenadas é obtido por meio de uma rotação Ω , e se um plano é definido no antigo sistema pela equação $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = 0$, então no novo sistema ele é definido pela equação $\mathbf{C}^* \cdot \mathbf{x}^* = 0$, onde $\mathbf{C}^* = \Omega \mathbf{C}$ e $\mathbf{x}^* = \Omega \mathbf{x}$. Como $\mathbf{r}^* = \Omega \mathbf{r}$, temos

$$\mathbf{C}^* = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i^* \times \dot{\mathbf{r}}_i^* = \Omega \left(\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \right) = \Omega \mathbf{C},$$

donde

$$\mathbf{C}^* \cdot \mathbf{r}^* = \Omega \mathbf{C} \cdot \Omega \mathbf{r} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{r},$$

a ultima igualdade segue do fato da rotação Ω ser um operador ortogonal. Assim, considerando a observação inicial segue do fato acima que o plano perpendicular a $\mathbf{C}$, passando

pelo centro de massa, independe do sistema de coordenadas. ■

Comentário. Este plano foi chamado por Laplace [53] de plano invariável.

Teorema 25. *É sempre possível escolher o sistema baricêntrico de coordenadas de modo que o momento angular seja dado por*

$$\mathbf{C} = (0, 0, c), \quad \text{onde } c = \|\mathbf{C}\|. \quad (4.1)$$

Demonstração. De fato, se $\mathbf{C} = 0$, em qualquer sistema inercial baricêntrico vale (4.1), já que $\mathbf{C} = (0, 0, 0)$. Se $\mathbf{C} \neq 0$, consideremos um novo sistema de coordenadas (x^*, y^*, z^*) tal que o plano invariável π^* seja (x^*, y^*) , o eixo x^* dirigido ao longo da reta ℓ interseção do plano invariável com o plano (x, y) e o eixo z^* dirigido no sentido do momento angular $\mathbf{C}$. Observe que o novo sistema é obtido do anterior (x, y, z) através de uma rotação Ω em torno da reta ℓ . Assim, a nova constante do momento angular é dada por $\mathbf{C}^* = \Omega \mathbf{C} = (0, 0, c)$. ■

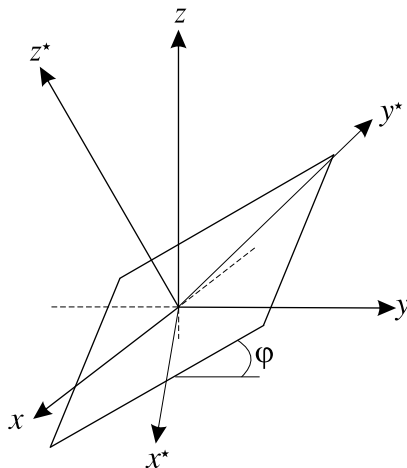


Figura 4.1: O momento angular num sistema de coordenadas conveniente

Definição 26 (Solução planar). Dizemos que uma solução do problema dos três corpos é planar se existe um plano fixo π^* tal que este plano contenha os três corpos para todo tempo.

Teorema 27. Se uma solução é planar e o momento angular não é nulo, então o plano invariável é aquele que contém os três corpos.

Demonstração. Note que o centro de massa pertence ao plano π^* . De fato, seja $\mathbf{n}$ o vetor normal ao plano π^* , no ponto P_0 , como $\langle \mathbf{n}, P_0 - \mathbf{r}_i \rangle = 0$ para cada $i = 1, 2, 3$, segue que $m_i \langle \mathbf{n}, P_0 - \mathbf{r}_i \rangle = 0$ para cada i , agora usando a bilinearidade do produto interno e somando, temos que $\langle \mathbf{n}, \mathbf{R} \rangle = 0$, isto é, o centro de massa $\mathbf{R} \in \pi^*$. Desde que π^* não depende de t podemos tomar um novo sistema de coordenadas de modo que o plano π^* seja o plano (x, y) . Então, ao longo do movimento temos $z_i = z_i(t) = 0$ e conseqüentemente $\dot{z}_i = \dot{z}_i(t) = 0$, para todo t e $i = 1, 2, 3$, assim das equações (1.15) segue que $\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = (0, 0, c)$ é perpendicular ao plano π^* , logo pelo teorema 24, este plano é o plano invariável. ■

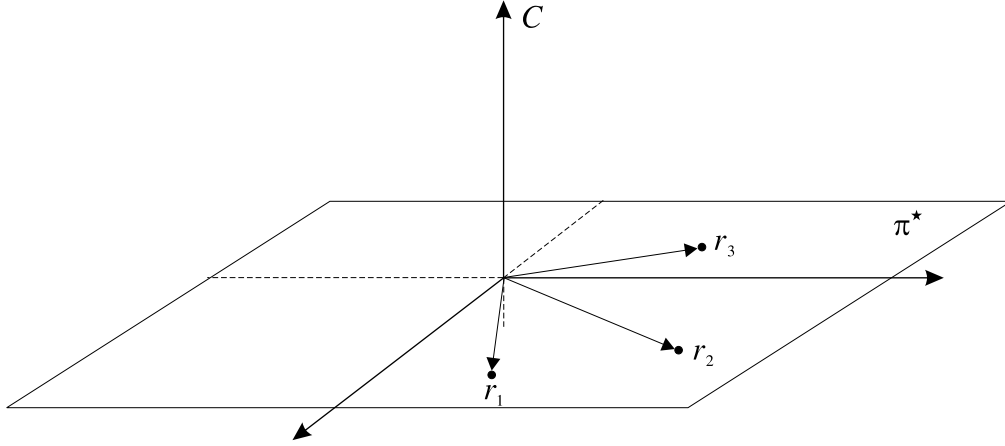


Figura 4.2: Plano invariável

Teorema 28. *Se o momento angular de uma solução do problema dos três corpos é nulo, então a solução é planar.*

Demonstração. Fixado um instante t_0 e escolhendo um sistema de coordenadas de modo que, neste instante, os corpos estejam no plano (x, y) . Então, $z_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$, em $t = t_0$, assim,

$$\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i, z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i, x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = (y_i \dot{z}_i, -x_i \dot{z}_i, x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i).$$

Considerando $\mathbf{C} = 0$ temos o seguinte sistema linear homogêneo em $\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3$

$$\begin{aligned} m_1 y_1 \dot{z}_1 + m_2 y_2 \dot{z}_2 + m_3 y_3 \dot{z}_3 &= 0 \\ m_1 x_1 \dot{z}_1 + m_2 x_2 \dot{z}_2 + m_3 x_3 \dot{z}_3 &= 0 \\ m_1 \dot{z}_1 + m_2 \dot{z}_2 + m_3 \dot{z}_3 &= 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

a terceira equação provindo do fato de que centro de massa está fixo na origem. Portanto, no instante t_0 , $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = 0$, ou, então,

$$\det \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

No primeiro caso, as posições e as velocidades dos três corpos estão no mesmo plano, no instante t_0 , logo, a solução é planar. Da Geometria Analítica, no segundo caso, os três corpos são colineares, no instante t_0 , e podemos fazer uma rotação nos eixos de modo que tenhamos $\dot{z}_3 = 0$ (na verdade as componentes da velocidade da massa m_3 todas nulas) em $t = t_0$. Assim, o novo sistema, é

$$\begin{aligned} m_1 y_1 \dot{z}_1 + m_2 y_2 \dot{z}_2 &= 0 \\ m_1 x_1 \dot{z}_1 + m_2 x_2 \dot{z}_2 &= 0 \\ m_1 \dot{z}_1 + m_2 \dot{z}_2 &= 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

Segue-se de (4.3), excluindo o caso já tratado dos $\dot{z}_i = 0$ que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ no instante t_0 , o que significa que as massas m_1 e m_2 ocupam a mesma posição no espaço. Concluimos assim, que a solução é planar. ■

Definição 29 (Sizígia). Dizemos que as três massas estão em sizígia num dado instante se elas são colineares, neste instante.

Teorema 30. Se o momento angular é diferente de zero, então no momento de uma sizígia, as três massas estão no plano invariável.

Demonstração. Como o centro de massa está fixo na origem, os três corpos são colineares com a origem, no instante da sizígia, ou seja, os vetores posição são da forma

$\mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{e}$, onde $\mathbf{e}$ é um vetor unitário, em outras palavras eles são linearmente dependentes, logo $\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_k = 0$ para $i, k = 1, 2, 3$. Assim, $(\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_k) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = 0$, isto é,

$$(\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot \mathbf{r}_k = 0. \quad (4.4)$$

Portanto, fazendo o produto interno $\mathbf{C} \cdot \mathbf{r}_k$, da equação (4.4), segue que

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{r}_k = 0.$$

Desde que por hipótese $\mathbf{C} \neq 0$, então esta equação é a equação do plano invariável, ou seja, a reta que contém os três corpos está no plano invariável. ■

Definição 31 (Solução retilínea). Dizemos que uma solução do problema dos três corpos é retilínea se existe uma reta fixa, Λ^* , que contenha os três corpos durante todo o tempo.

Teorema 32. Uma solução retilínea não pode estar definida para todo o tempo, devendo haver uma colisão em algum instante.

Demonstração. Tomemos um sistema de coordenadas com o eixo das abscissas definido pela reta que contém os três corpos, de modo que

$$\mathbf{r}_i = (x_i, 0, 0)$$

e suponhamos que a solução não experimenta nenhuma colisão, assim podemos ordenar três massas m_1, m_2, m_3 de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. Como o centro de massa está fixo na origem, a função x_3 é positiva. Agora, Das equações do movimento temos que $\ddot{x}_3 = \sum_{i=1}^2 m_i(x_1 - x_3) \|x_1 - x_3\|^{-3} < 0$ durante todo o tempo em que esteja definida a solução. Portanto, assumindo que a solução está definida para todo tempo teremos $\ddot{x}_3 < 0$ e $x_3 > 0$, o que é uma contradição pelo lema 58 do apêndice A. ■

Definição 33 (Solução colinear). Dizemos que uma solução do problema dos três corpos é colinear se em cada instante t , os três corpos estão em uma reta $\Lambda = \Lambda(t)$.

Obviamente toda solução retilínea é colinear, mas, como veremos no próximo parágrafo, existem soluções colineares que não são retilíneas.

Teorema 34. Toda solução colinear é planar.

Demonstração. Toda solução colinear está em sizígia em cada instante, logo se $C \neq 0$, pelo teorema 30 as três massas estão no plano invariável para todo tempo onde a solução está definida. Por outro lado, se $C = 0$, pelo teorema 28 a solução será planar. ■

Teorema 35. *Se uma solução colinear não é retilínea, então, em todos os instantes, a configuração será semelhante a configuração inicial.*

Demonstração. Sendo colinear, a solução é planar pelo teorema anterior. Logo, podemos tomar o plano do movimento como o plano (x, y) de um sistema fixo de coordenadas. Tomemos, agora, um sistema rotatório girando em torno do eixo dos z , com o eixo dos ξ coincidindo com a reta $\Lambda(t)$ que contém os três corpos em cada instante. Se θ é o ângulo de rotação temos, para as posições e as velocidades das três partículas, as seguintes expressões, obtidas de (3.19) e (3.20)

$$\mathbf{r}_i = \xi_i \mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\xi}_i \mathbf{e}_1 + \xi_i \dot{\theta} \mathbf{e}_2 \quad (4.5)$$

enquanto que para a aceleração, temos

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = (\ddot{\xi}_i - \xi_i \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_1 + (\xi_i \ddot{\theta} + 2\dot{\xi}_i \dot{\theta}) \mathbf{e}_2. \quad (4.6)$$

Como os corpos estão todos em $\Lambda(t)$, as componentes das forças perpendiculares a $\mathbf{e}_1$ são todas nulas, donde, por (4.6) temos

$$\xi_i \ddot{\theta} + 2\dot{\xi}_i \dot{\theta} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

ou seja, $(\xi^2 \dot{\theta})' = 0$. Integrando esta equação entre t e t_0 , obtemos

$$\xi_i^2(t) \dot{\theta}(t) = \xi_i^2(t_0) \dot{\theta}(t_0). \quad (4.7)$$

Como o centro de massa está fixo na origem, temos $m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + m_3 \xi_3 = 0$, logo em cada instante t , $\xi_i(t) \neq 0$, para pelo menos dois índices, digamos $i = 1, 2$. Note que $\dot{\theta}(t) \neq 0$ para todo t , pois por hipótese, a solução não é retilínea, ou seja, $\Lambda(t)$ é rotacionada. Suponhamos que seja $\dot{\theta}(t) > 0$, então segue-se por (4.7) que $\dot{\theta}(t_0) \neq 0$. Portanto, usando novamente (4.7) temos que

$$\xi_i(t) = \lambda(t) \xi_i(0), \quad i = 1, 2$$

onde $\lambda(t) = \sqrt{\frac{\dot{\theta}(t_0)}{\dot{\theta}(t)}}$. Observe que $\lambda(t)$ é determinado apenas por $\dot{\theta} = \dot{\theta}(t)$, independe de i . Para terminarmos a prova, novamente usando (4.7), temos também,

$$\xi_3(t) = \lambda(t) \xi_3(t_0).$$

Isto prova que a configuração das partículas em cada instante é semelhante a configuração no instante $t = 0$. ■

Das equações (4.5) teremos a seguinte expressão para o momento angular

$$\mathbf{C} = \left[\sum_{i=1}^3 m_i \xi_i^2 \dot{\theta} \right] \mathbf{e}_3. \quad (4.8)$$

Observe que se $\Lambda(t)$ não depende de t , ou seja, se a solução é retilínea, então tanto $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ como $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i(t)$ pertencem a reta $\Lambda(t)$, isto é, os vetores posição e velocidade são linearmente dependentes, logo $\mathbf{C} = 0$ por definição. Se $\Lambda(t)$ depende do tempo t , ou seja, a velocidade angular $\dot{\theta}(t)$ não é nula, então $\mathbf{C} \neq 0$. Dito de outra forma, da igualdade (4.8) temos como consequência imediata:

Teorema 36. 1) *Uma solução colinear é retilínea se, e somente se, o momento angular é nulo.*

2) *Numa solução colinear com momento angular não nulo, os corpos giram mais rapidamente ou lentamente, conforme estejam próximos ou afastados do centro de massa.*

Capítulo 5

Sub-problemas do problema dos três corpos

Neste capítulo apresentaremos diversos sub-problemas do problema dos três corpos, o estudo destes problemas é uma forma de nos aproximar ao estudo do problema geral dos três corpos.

5.1 O problema planar dos três corpos

Neste caso damos condições necessárias para que os três corpos continuem num mesmo plano durante todo o movimento. Para que isto aconteça, pelo Teorema da Existência e Unicidade das EDO, basta tomarmos posições e velocidades sobre um plano Π constante. De forma mais precisa, uma solução do problema dos três corpos é planar se, e somente se, num dado instante $\tilde{t}$ os vetores posição $\mathbf{r}_i(\tilde{t})$ e os vetores velocidades $\dot{\mathbf{r}}_i(\tilde{t})$, estão contidos num mesmo plano, o qual denotaremos como plano do movimento. De fato, se nos restringirmos ao plano $\Pi : ax + by + cz = 0$ (pois estamos considerando o centro de massa na origem) que contém estas condições iniciais, primeiro observe que as equações (1.8) podem ser transformadas num sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i &= \frac{1}{m_i} \dot{\mathbf{v}}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i &= \nabla_{\mathbf{r}_i} U, \end{cases} \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (5.1)$$

Portanto, esse sistema está bem definido sobre $M = \Pi \times \Pi$, visto que ele envolve apenas relações de distância e as velocidades das partículas. Assim, considerando uma condição inicial $(\mathbf{r}_i(\tilde{t}), \dot{\mathbf{r}}_i(\tilde{t})) \in M$ pela unicidade das soluções, a solução associada estará contida em M . Podemos supor sem perda de generalidade que o plano Π coincide com o plano xy , ou seja, $z = 0$. Assim, sendo $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ as equações (1.1) assumem a forma:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{m_1 m_3}{r_{31}^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{m_2 m_1}{r_{21}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{m_2 m_3}{r_{32}^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \\ m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 &= \frac{m_3 m_1}{r_{13}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \frac{m_3 m_2}{r_{23}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde $r_{ij} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$.

A presença dessas três massas determina no espaço um potencial gravitacional que é uma função escalar dos seus vetores posição e cuja expressão é dada por:

$$U = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}. \quad (5.3)$$

5.2 O problema dos três corpos isósceles

Mesmo no caso planar o estudo do problema dos três corpos é ainda bastante complicado, por tal motivo, estudos de sub-problemas deste também são de muito interesse.

Dizemos que uma solução do problema dos três corpos é *isósceles* se a configuração formada em cada instante é a de um triângulo isósceles, o qual não se reduz, identicamente, a um triângulo equilátero ou a um segmento de reta (embora isso possa ocorrer para valores isolados do tempo). Numa tal solução, a base do triângulo isósceles está bem definida, pois a ambigüidade ocorre, no máximo, para valores isolados do tempo e, por continuidade, também nestes instantes a base estará definida.

Teorema 37. *Numa solução isósceles, as massas das base são iguais.*

A primeira demonstração deste teorema foi feita em 1913 por MacMillan (veja Wileczynski[57]) e baseia-se nas singularidades complexas das equações. Outra demonstração apareceu em 1921, devida a Chazy [6] porém, continua a utilizar teoria das funções analíticas de uma

variável complexa.

Uma observação importante é, que se o triângulo se degenera identicamente em um triângulo equilátero ou em um segmento de reta, então as três massas podem ser quaisquer (conforme veremos no capítulo que trata das soluções de equilíbrio relativo).

Pelo teorema acima, para uma solução isósceles com $r_{13} = r_{23} \neq r_{12}$, devemos ter $m_1 = m_2$.

5.2.1 Classificação das soluções isósceles

Usando as coordenadas heliocêntricas $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ definidas no capítulo 3 seção 3.2, note que, para uma solução isósceles temos que $\|\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{x}_2\|$, porém nem todas as soluções com esta propriedade são isósceles, pois, o triângulo poderia se degenerar num segmento de reta ou num triângulo equilátero.

Teorema 38. *Considere uma solução do problema dos três corpos para o qual $\|\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{x}_2\|$. Então, a solução é isósceles se, e somente se,*

$$q_{11} = q_{22}, \quad q_{12} = q_{21} \neq 0 \text{ e } \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \neq 0, \quad (5.4)$$

onde os q_{ij} são dados pela equação (3.11)

Demonstração. Se $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = 0$, então $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ são colineares para todo tempo, donde pelas equações (3.7) segue que $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_3$ são colineares. Por outro lado, se $q_{12} = 0$, temos $q_{21} = 0$, então por (3.11) segue que $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = \|\mathbf{x}_2\|$, desde que por hipótese $\|\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{x}_2\|$, logo $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\| = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3\|$, ou seja, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_3$ formam um triângulo equilátero.

■

Teorema 39. *Tem-se uma solução isósceles com massas da base $m_1 = m_2$ se, e somente se,*

$$q_{11} = q_{22}, \quad q_{12} = q_{21} \neq 0 \text{ e } \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \neq 0, \quad (5.5)$$

Demonstração. Para uma solução isósceles com massas da base m_1 e m_2 , temos que $\|\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{x}_2\|$. Se $m_1 = m_2$ substituindo em (3.11) segue que $q_{11} = q_{22}$ e $q_{12} = q_{21}$.

Reciprocamente, se temos (5.5), segue que $q_{11} + q_{12} = q_{22} + q_{21}$, agora usando (3.11) temos que $\|\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{x}_2\|$. Observe que as desigualdades garantem o caráter isósceles da solução em vista do teorema 38. ■

Com o teorema 39, podemos dar as seguintes informações sobre a configuração de uma solução isósceles.

Teorema 40. *Para uma solução isósceles ocorre uma das seguintes possibilidades:*

1. *A solução é planar com uma partícula movendo-se sobre uma reta fixa e as outras duas partículas movendo-se simetricamente em relação a esta reta.*
2. *A solução é espacial, com uma partícula movendo-se sobre a reta que contém o momento angular e as outras duas, de massas iguais movendo-se simetricamente em relação a esta reta.*
3. *A solução é espacial, com uma das partículas movendo-se sobre o plano invariável e as outras duas, de massas iguais, movendo-se simetricamente em relação a este plano.*

Demonstração. Seja $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_3$ uma solução isósceles cujas massas da base são m_1 e m_2 , e definamos $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ como em (3.7). Por conveniência definamos os vetores $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ como segue

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \text{ e } \mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2.$$

Pelo teorema 39 temos que $q_{11} = q_{22}$ e $q_{12} = q_{21}$, logo

$$\ddot{\mathbf{X}}_1 = (q_{11} + q_{12})\mathbf{X}_1, \quad \ddot{\mathbf{X}}_2 = (q_{11} - q_{12})\mathbf{X}_2. \quad (5.6)$$

Note que $\frac{d}{dt}(\mathbf{X}_i \times \dot{\mathbf{X}}_i) = 0$ para $i = 1, 2$. De fato, $\frac{d}{dt}(\mathbf{X}_i \times \dot{\mathbf{X}}_i) = \mathbf{X}_i \times \ddot{\mathbf{X}}_i = 0$, pois por (5.6) $\ddot{\mathbf{X}}_i$ é múltiplo de $\mathbf{X}_i$. Assim,

$$\mathbf{X}_1 \times \dot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{A}_1 \text{ e } \mathbf{X}_2 \times \dot{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{A}_2 \quad (5.7)$$

com $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ vetores constantes.

A classificação das soluções isósceles seguirá da equação (5.7) juntamente com as seguintes igualdades:

$$\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = 0, \quad \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{A}_1 = 0, \quad \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{A}_2 = 0, \text{ e } \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = 0. \quad (5.8)$$

Com efeito, a primeira das igualdades (5.8) decorre do fato de que $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_1^2 - \mathbf{x}_2^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 - \|\mathbf{x}_2\|^2$, e desde que por hipótese $\|\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{x}_2\|$ segue a igualdade, das equações (5.7) segue que $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ são perpendiculares a $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ respectivamente, portanto $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{A}_1 = 0$ e $\mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{A}_2 = 0$. Para provarmos a quarta igualdade, primeiro observemos que

$$(\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_2)^2 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2. \quad (5.9)$$

Com efeito, por (5.7) temos que

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = (\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2)(\dot{\mathbf{X}}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_2) - (\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_2)(\mathbf{X}_2 \cdot \dot{\mathbf{X}}_1)$$

e diferenciando $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = 0$ segue que

$$\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_2 + \dot{\mathbf{X}}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = 0 \text{ ou } \mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_2 = -\dot{\mathbf{X}}_1 \cdot \mathbf{X}_2, \quad (5.10)$$

donde segue que

$$(\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_2)^2 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2.$$

Observe que de (5.9) temos que $\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_2$ é constante, portanto diferenciando em relação a t teremos $\dot{\mathbf{X}}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_2 + \mathbf{X}_1 \cdot \ddot{\mathbf{X}}_2 = 0$, ou seja, $\dot{\mathbf{X}}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_2 = -\mathbf{X}_1 \cdot \ddot{\mathbf{X}}_2$. Note que de (5.6) temos que $\mathbf{X}_1 \cdot \ddot{\mathbf{X}}_2 = (q_{11} - q_{12})\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2$ e pela primeira igualdade em (5.8), segue que $\mathbf{X}_1 \cdot \ddot{\mathbf{X}}_2 = 0$, logo $\dot{\mathbf{X}}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_2 = 0$, donde teremos $\dot{\mathbf{X}}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_2 + \ddot{\mathbf{X}}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_2 = 0$. Donde, substituindo as equações (5.6) teremos a seguinte igualdade

$$q_{11}(\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_2 + \dot{\mathbf{X}}_1 \cdot \mathbf{X}_2) + q_{12}(\dot{\mathbf{X}}_1 \cdot \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_2) = 0$$

que, devido a (5.10), se reduz a

$$2q_{12}(\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_2) = 0.$$

Como pelo teorema 39, $q_{12} \neq 0$, segue-se que $\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}}_2 = 0$, portanto, por (5.9), temos $\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = 0$. Para fazermos a classificação das soluções isósceles, observemos que $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ em função de $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_3$ são dadas por

$$\mathbf{X}_1 = -\frac{M}{m_1}\mathbf{r}_3, \text{ e } \mathbf{X}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (5.11)$$

A segunda igualdade segue facilmente das equações (3.7), a primeira segue do fato do centro de massa está fixo na origem e da igualdade, $m_1 = m_2$.

Note que $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_3 + \frac{1}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)$ e $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 + \frac{1}{2}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)$ e de (5.11) temos $\mathbf{r}_3 = -\frac{m_1}{M}\mathbf{X}_1$, segue daí que

$$\mathbf{r}_1 = \left(-\frac{m_1}{M} + \frac{1}{2}\right)\mathbf{X}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{X}_2, \quad \mathbf{r}_2 = \left(-\frac{m_1}{M} + \frac{1}{2}\right)\mathbf{X}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{X}_2. \quad (5.12)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= m_1(\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) + m_3\mathbf{r}_3 \times \dot{\mathbf{r}}_3 \\ &= \left[2m_1\left(-\frac{m_1}{M} + \frac{1}{2}\right) + m_3\left(\frac{m_1}{M}\right)^2\right]\mathbf{A}_1 + \frac{m_1}{2}\mathbf{A}_2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Observemos, também que $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ são vetores não nulos. De fato, $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = -2(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2)$, e desde que $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \neq 0$ segue que $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \neq 0$, logo $\mathbf{X}_1 \neq 0$ e $\mathbf{X}_2 \neq 0$.

Para, os vetores $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ temos, as quatro possibilidades seguintes:

$$(1)\mathbf{A}_1 =, \quad \mathbf{A}_2 = 0; \quad (2)\mathbf{A}_1 = 0, \quad \mathbf{A}_2 \neq 0; \quad (3)\mathbf{A}_1 \neq 0, \quad \mathbf{A}_2 = 0; \quad (4)\mathbf{A}_1 \neq 0, \quad \mathbf{A}_2 \neq 0.$$

A seguir analisaremos cada uma das possibilidades.

Caso (1). Das equações (5.7) segue que os vetores $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ possuem direções fixas¹ e pela primeira igualdade em (5.8) ele são perpendiculares, com eles são não nulos, segue que $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ definem um plano, que por (5.11) contém os corpos dispostos como na parte (1) do teorema (40). Note que por (5.13) temos que o momento angular é nulo para esta solução (esta configuração é dada pela figura 5.1).

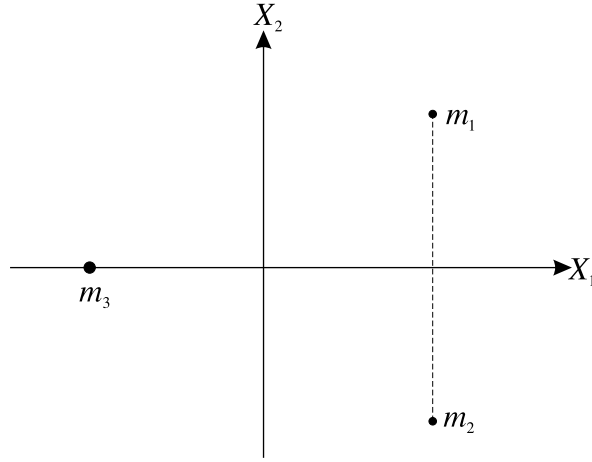


Figura 5.1: Solução isósceles do tipo 1.

Caso(2). Neste caso, segue das equações (5.7) que $\mathbf{X}_1$ possui direção fixa e $\mathbf{X}_2$ move-se perpendicularmente a $\mathbf{X}_1$. Das equações (5.11) segue-se que partícula de massa m_3 move-se sobre uma reta cuja a direção é dada pela direção de $\mathbf{X}_1$ e as massas m_1 e m_2 movendo-se simetricamente em relação a esta reta, note também que de (5.13) o momento angular é dado por $\frac{m_1}{2}\mathbf{A}_2 \neq 0$. Como por (5.8) $\mathbf{A}_2$ é perpendicular a $\mathbf{X}_2$ segue-se que o momento angular $\mathbf{C}$ possui a direção de $\mathbf{X}_1$. Portanto, temos a configuração descrita no item (2) do teorema (40) (esta configuração é dada pela figura 5.2).

Observação: Em todo os casos o plano formado por $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ não depende de t , e podemos supor que ele passa pela origem.

¹Basta usarmos a relação $\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{X}_j}{\|\mathbf{X}_j\|} \right) = \frac{(\mathbf{X}_j \times \dot{\mathbf{X}}_j) \times \mathbf{X}_j}{\|\mathbf{X}_j\|^3} = 0$

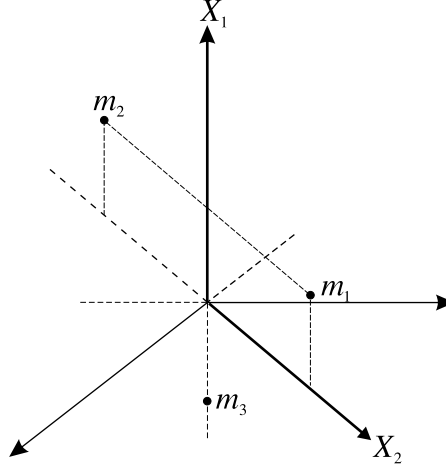


Figura 5.2: Solução isósceles do tipo 2.

Caso (3). Agora, $\mathbf{X}_2$ tem direção fixa e $\mathbf{X}_1$ move-se perpendicularmente $\mathbf{X}_2$. Observe que o momento angular $\mathbf{C}$ está na direção de $\mathbf{X}_2$. Assim, por (5.11) temos que a massa m_3 move-se no plano invariável formado por $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ e as massas m_1 e m_2 movendo-se simetricamente em relação a este plano, ou seja, a configuração dada pelo item (3) do teorema (40) veja a figura (5.3).

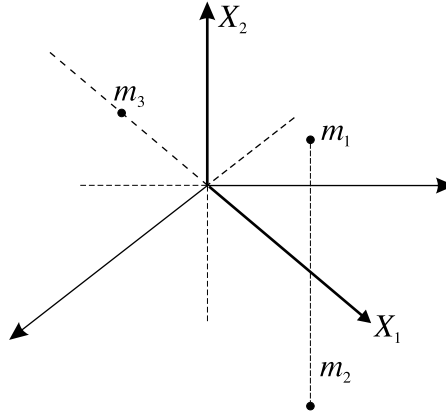


Figura 5.3: Solução isósceles do tipo 3.

Caso (4). Seja $\mathbf{v} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{A}_2$ das igualdades (5.8), segue-se que $\mathbf{X}_2$ e $\mathbf{A}_1$ são perpendiculares a $\mathbf{A}_2$, logo são paralelos a $\mathbf{v}$, note também que $\mathbf{X}_1$ é perpendicular a $\mathbf{A}_1$. Se $\mathbf{v} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{A}_2 = 0$, então $\mathbf{X}_1$ é paralelo a $\mathbf{A}_2$, assim $\mathbf{A}_2 = 0$, o que é uma contradição. Por outro lado se $\mathbf{v} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{A}_2 \neq 0$, temos que $\mathbf{X}_2$ é paralelo a $\mathbf{X}_1$, donde segue que $\mathbf{A}_1 = 0$ o que novamente uma contradição. Portanto o caso (4) não ocorre.

Com isso provamos que uma solução isósceles com massas da base m_1 e m_2 deverá ser

um dos três tipos descritos nos casos (1), (2) ou (3). ■

5.3 O caso colinear dos três corpos

Neste sub-problema damos condições sobre os três corpos de modo que eles fiquem sobre uma mesma reta ao longo do movimento. Para isto, pelo Teorema de Existência e Unicidade das EDO, basta tomar posições e velocidades iniciais sobre uma reta L constante. Podemos supor sem perda de generalidade que esta L seja o eixo x , isto é, $y = z = 0$. Assim, sendo $\mathbf{r}_i = (x_i, 0, 0)$ as equações (1.1) tornam-se:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (x_2 - x_1) + \frac{m_1 m_3}{r_{31}^3} (x_3 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= \frac{m_2 m_1}{r_{21}^3} (x_1 - x_2) + \frac{m_2 m_3}{r_{32}^3} (x_3 - x_2) \\ m_3 \ddot{x}_3 &= \frac{m_3 m_1}{r_{13}^3} (x_1 - x_3) + \frac{m_3 m_2}{r_{23}^3} (x_2 - x_3) \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde $r_{ij} = |x_i - x_j|$ representa as distâncias mútuas. A presença dessas três massas determina no espaço um potencial gravitacional que é uma função escalar dos seus vetores posição e cuja expressão é dada por:

$$U = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}. \quad (5.15)$$

5.4 Problema restrito dos três corpos

O *problema restrito dos três corpos* consiste no estudo do problema supondo que uma das massas, por exemplo m_3 , é zero, assim, esta massa não exerce influência sobre o movimento dos corpos de massas m_1 e m_2 (chamados de binários).

Consideremos os corpos dispostos como na figura

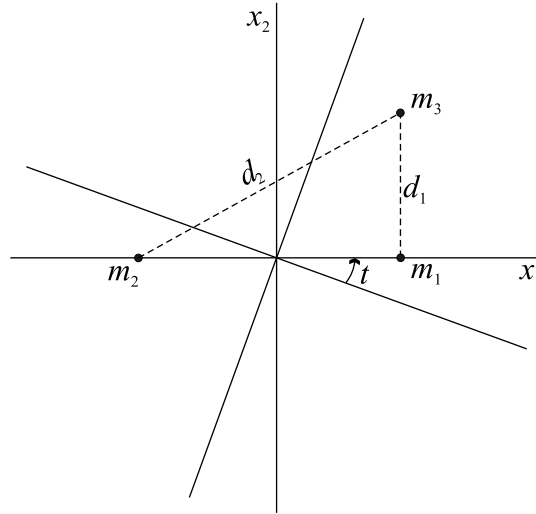


Figura 5.4: Problema restrito dos três corpos

O Hamiltoniano do problema restrito é dado por

$$H = \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{2} - \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{y} - U \quad (5.16)$$

onde

$$U = \frac{\mu}{d_1} + \frac{1-\mu}{d_2}, \quad (5.17)$$

$$d_1^2 = (x_1 - 1 + \mu)^2 + x^2, \quad d_2^2 = (x_1 + \mu)^2 + x^2 \quad (5.18)$$

e

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

As equações do movimento, para o problema restrito, são dadas por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y} + \mathbf{K} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{y}} = -\nabla U + \mathbf{K} \mathbf{y} \end{cases}. \quad (5.19)$$

Capítulo 6

Soluções particulares

Em 1767 Euler [15] descobriu uma classe especial de soluções periódicas do problema colinear dos três corpos na qual as partículas movem-se em órbitas elípticas (eventualmente circulares), formando uma configuração colinear, são chamadas de *soluções Eulerianas*. Lagrange em 1772 [22] descobriu outra classe de soluções periódicas, neste caso as partículas movem-se em órbitas elípticas formando uma configuração equilátera durante todo tempo em que estiver definida, São chamadas de *Soluções de Lagrange*. Neste capítulo, trataremos de um dos objetos de estudo de grande importância para a Mecânica Celeste, que são as chamadas *Configurações Centrais*, faremos a relação com as *Soluções Homográficas* e as *soluções de equilíbrio relativo*.

6.1 Configurações centrais

Considerando t fixo, a força gravitacional agindo sobre um corpo de massa m_i é definida pelo vetor

$$\nabla_{\mathbf{r}_i} U = \nabla_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Definição 41. Uma configuração $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \in \mathbb{R}^9 \setminus \Delta$ é dita uma configuração central (ou c.c.), se existe uma constante $\sigma > 0$ tal que

$$\nabla_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}) = \sigma m_i \mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.1)$$

Note que pela equação (1.3) teremos $\ddot{\mathbf{r}} = \sigma \mathbf{r}_i$, ou seja, o vetor aceleração de cada partícula é proporcional ao vetor posição da mesma. Um fato importante, é que se $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ é uma **c.c.**, então $\tilde{\mathbf{r}} = \beta \mathbf{r}_i$ para β real e positivo, também é uma **c.c.**. Queremos mostrar, que existe $\tilde{\sigma} > 0$ tal que $\nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} U(\tilde{\mathbf{r}}) = \tilde{\sigma} m_i \tilde{\mathbf{r}}_i$. Com efeito, como U é homogênea de grau -1 segue que o gradiente de U é homogênea de grau -2 , assim, $\nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} U(\tilde{\mathbf{r}}) = \beta^{-2} \nabla_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}) = \beta^{-2} \sigma m_i \mathbf{r}_i$, agora, tomando $\tilde{\sigma} = \beta^{-3} \sigma$, segue o resultado.

6.2 Soluções Homográficas

Definição 42 (Solução Homográfica). *Uma solução do problema dos três corpos $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t) \in \mathbb{R}^k$ para $i = 1, 2, 3$ e $k = 1, 2, 3$ (os valores de k correspondem ao tipo de solução, colinear, planar e espacial, respectivamente) é dita Homográfica, quando existe uma função escalar $r = r(t) > 0$, uma matriz ortogonal $\Omega(t) \in SO(k)$ e um vetor $\tau = \tau(t) \in \mathbb{R}^k$, tais que*

$$\mathbf{r}_i = r \Omega \mathbf{r}_i^0 + \tau, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.2)$$

Onde $\mathbf{r}_i, r, \Omega$ e τ estão definidas para todo tempo onde a solução estiver definida e $\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{r}_i(t_0)$.

Note que, pela definição (42), como estamos considerando o centro de massa na origem, isto é, $\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i = 0$, então o vetor translação $\tau(t)$ é nulo. De fato, basta multiplicarmos a equação (6.2) por m_i e somarmos em i . Assim, as soluções homográficas se caracterizam apenas pela existência de uma rotação $\Omega(t)$ e uma dilatação $r(t) > 0$. Portanto, uma solução homográfica é dada por

$$\mathbf{r}_i = r \Omega \mathbf{r}_i^0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.3)$$

Afirmção 1. *Desde que $\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{r}_i(t_0)$ segue-se que $r^0 = r(t_0) = 1$ e $\Omega^0 = \Omega(t_0) = I_d$.*

Demonstração. De fato, pela equação (6.3) segue que $\mathbf{r}_i(t) = r(t) \Omega(t) \mathbf{r}_i^0$, logo $\mathbf{r}_i(t_0) = r(t_0) \Omega(t_0) \mathbf{r}_i^0$, desde que por hipótese $\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{r}_i(t_0)$, temos que

$$\|\mathbf{r}_i^0\| = \|\mathbf{r}_i(t_0)\| = |r(t_0)| \|\Omega(t_0) \mathbf{r}_i^0\|$$

e como Ω é ortogonal segue que

$$\|\mathbf{r}_i^0\| = \|\mathbf{r}_i(t_0)\| = |r(t_0)| \|\mathbf{r}_i^0\|,$$

donde $|r(t_0)| = 1$, e como $r(t) > 0$ para todo t , logo $r(t_0) = 1$. Agora substituindo $r(t_0) = 1$ na igualdade $\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{r}_i(t_0) = r(t_0)\Omega(t_0)\mathbf{r}_i^0$, segue que $\Omega(t_0) = I_d$. ■

Lema 43. *Se uma função $f(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ é homogênea de grau k , ou seja, se $f(r\mathbf{X}) = r^k f(\mathbf{X})$ e invariante por rotações, então*

$$\nabla f(\mathbf{x}) = r^{k-1} \Omega \nabla f(\mathbf{X}). \quad (6.4)$$

Demonstração. Desde que por hipótese, $f(r\Omega\mathbf{X}) = r^k f(\mathbf{X})$, derivando em relação a $\mathbf{X}$, e aplicando em um vetor v , teremos

$$Df(r\Omega\mathbf{X}) \cdot v = r^k Df(\mathbf{X} \cdot v),$$

isto é,

$$\langle \nabla f(r\Omega\mathbf{X}), \Omega v \rangle = r^{k-1} \langle \nabla f(\mathbf{X}), v \rangle.$$

Uma vez que esta igualdade é válida para todo vetor v e como Ω é ortogonal, segue daí a fórmula do lema. ■

Como a função potencial U é homogênea de grau -1 e invariante por rotações, como foi visto no capítulo 1 seção 1.2, resulta do lema 43 que

$$\nabla_{\mathbf{r}_i} U(r\Omega\mathbf{r}_i^0) = r^{-2} \Omega \nabla_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}_i^0). \quad (6.5)$$

Derivando a equação (6.3) duas vezes em relação ao tempo teremos

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \Omega(\ddot{r}\mathbf{r}_i^0 + 2\dot{r}\Omega^T\dot{\Omega}\mathbf{r}_i^0 + r\Omega^T\ddot{\Omega}\mathbf{r}_i^0). \quad (6.6)$$

Agora, definindo

$$\Sigma = \Omega^T \dot{\Omega}, \quad (6.7)$$

teremos

$$\dot{\Sigma} = \dot{\Omega}^T \dot{\Omega} + \Omega^T \ddot{\Omega}. \quad (6.8)$$

Como $\Omega^T \Omega = I_d$, segue-se que $(\dot{\Omega}^T \Omega) = 0$, donde $\dot{\Omega}^T \Omega + \Omega^T \dot{\Omega} = 0$, segue que $\Omega^T \dot{\Omega} = -(\Omega^T \dot{\Omega})^T$, ou seja, $\Sigma = \Omega^T \dot{\Omega} \in A(3, \mathbb{R})$ (espaço das matrizes 3×3 anti-simétricas com coeficientes reais).

Por outro lado,

$$\dot{\Sigma} = (\dot{\Omega}^T \dot{\Sigma}) = \Omega^T \ddot{\Omega} + \dot{\Omega}^T \dot{\Omega}.$$

Como $\Sigma^T = \dot{\Omega}^T \Omega$, segue que $\Sigma^T \Omega^T = \dot{\Omega}^T$, e como $\Sigma^T = -\Sigma$, temos

$$\dot{\Omega}^T = -\Sigma \Omega^T. \quad (6.9)$$

Agora, substituindo (6.9) em (6.8) teremos

$$\Omega^T \ddot{\Omega} = \dot{\Sigma} + \Sigma^2, \quad (6.10)$$

assim podemos reescrever a equação (6.6) na forma

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \Omega[\ddot{r}I_d + 2\dot{r}\Sigma + r(\dot{\Sigma} + \Sigma^2)]\mathbf{r}_i^0.$$

Considerando a equação (6.5), tomando

$$K = r^2[\ddot{r}I_d + 2\dot{r}\Sigma + r(\dot{\Sigma} + \Sigma^2)] \quad (6.11)$$

e

$$\mathbf{a}_i = m_i^{-1} \nabla_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}_i^0)$$

podemos escrever as equações do movimento (1.3) sob a forma

$$K\mathbf{r}_i^0 = \mathbf{a}_i. \quad (6.12)$$

Observemos que se, em cada instante, a configuração é um triângulo equilátero, então a solução é homográfica.

Teorema 44. *Uma solução homográfica do problema dos três corpos é planar.*

Demonstração. No caso colinear pelo teorema 34 a solução é planar. Assim, supohamos que $\mathbf{r}_1^0$, $\mathbf{r}_2^0$ e $\mathbf{r}_3^0$ não sejam colineares, ou seja, $\mathbf{r}_\alpha^0 \times \mathbf{r}_\beta^0 \neq 0$ para algum α e β . Consideremos o sistema inercial com o plano de referencia sendo o plano que contém os três vetores, de modo que

$$\mathbf{r}_i^0 = (r_i^{0,I}, r_i^{0,II}, 0), \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.13)$$

As equações (6.12) podem ser escritas da seguinte forma

$$k_{\nu 1}(t)\mathbf{r}_i^{0,I} + k_{\nu 2}(t)\mathbf{r}_i^{0,II} = a_i^\nu, \quad i = 1, 2, 3, \quad \nu = I, II, III. \quad (6.14)$$

Onde a_i^ν é a ν -ésima componente do vetor $\mathbf{a}_i$. Note que, $a_i^{III} = 0$. De fato, como $m_i \mathbf{a}_i$ é a força gravitacional sobre a partícula de massa m_i , no instante $t = t_0$ e como por hipótese

$r_i^{0,III} = 0$ para todo i . Então, a componente da força gravitacional nesta direção é nula. Fixando $i = \alpha, \beta$ na equação (6.14) teremos um sistema linear com coeficientes constantes

$$\begin{cases} k_{\nu 1}(t)\mathbf{r}_\alpha^{0,I} + k_{\nu 2}(t)\mathbf{r}_\alpha^{0,II} = a_\beta^\nu \\ k_{\nu 1}(t)\mathbf{r}_\beta^{0,I} + k_{\nu 2}(t)\mathbf{r}_\beta^{0,II} = a_\beta^\nu, \end{cases} \quad (6.15)$$

cujas a forma matricial é $\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{a}$, onde $\mathbf{X} = (k_{\nu 1}(t), k_{\nu 2}(t))$, $\mathbf{a} = (a_\alpha^\nu, a_\beta^\nu)$ e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_\alpha^{0,I} & \mathbf{r}_\alpha^{0,II} \\ \mathbf{r}_\beta^{0,I} & \mathbf{r}_\beta^{0,II} \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Observe que a matriz $\mathbf{B}$ é invertível. Com efeito, $\det(\mathbf{B}) = \mathbf{r}_\alpha^0 \times \mathbf{r}_\beta^0 \neq 0$ por hipótese, logo usando o sistema $\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1}$ vemos que para $\nu = I, II$ os escalares $k_{\nu 1}$ e $k_{\nu 2}$ são combinações lineares com coeficientes constantes dos escalares a_α^ν e a_β^ν , portanto, são constantes e são nulos para $\nu = III$, pois $a_i^{III} = 0$ para todo i , assim

$$k_{12} + k_{21} = \text{const}, \quad k_{11} - k_{22} = \text{const}, \quad k_{31} = 0, \quad k_{32} = 0. \quad (6.17)$$

Como $\Omega^T \dot{\Omega} \in A(3, \mathbb{R})$, logo $\Omega = \Omega(t)$ determina um vetor $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t) \in \mathbb{R}^3$ e uma matriz $\Sigma = \Sigma(t) \in A(3, \mathbb{R})$ tal que

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} e \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Agora, substituindo as expressões de Σ e Σ^2 em (6.11) teremos

$$\begin{cases} r^3 s_1 s_2 = \text{const} \\ r^3 (s_1^2 - s_2^2) = \text{const}, \end{cases} \quad (6.19)$$

e

$$\begin{cases} -2\dot{r}s_2 + r(-\dot{s}_2 + s_3 s_1) = 0 \\ -2\dot{r}s_1 + r(-\dot{s}_1 + s_3 s_2) = 0. \end{cases} \quad (6.20)$$

Pelo sistema (6.19), temos que as funções $r^3 s_1^2$ e $r^3 s_2^2$ são constantes, Portanto, existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$s_1 = c_1 r^{-3/2}, \quad s_2 = c_2 r^{-3/2}. \quad (6.21)$$

Assim, substituindo s_1 e s_2 em (6.20) teremos o sistema homogêneo

$$\begin{cases} -2\dot{r}c_1 + r s_3 c_2 = 0 \\ r s_3 c_1 - 2\dot{r}c_2 = 0, \end{cases} \quad (6.22)$$

cuja forma matricial é $\mathbf{Q}\mathbf{y} = 0$, onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} s_3 r & -2\dot{r} \\ -2\dot{r} & r s_3 \end{bmatrix}.$$

Note que, $\det(\mathbf{Q}) = r^2 s_3^2 + \frac{1}{4}\dot{r}^2$, donde segue que $\det(\mathbf{Q}) = 0$ se, e somente se, $s_3 = \dot{r} = 0$. Observe que se c_1 ou c_2 é não nulo, segue por (6.22) que $s_3 = \dot{r} = 0$ para todo tempo t . Portanto, uma das seguintes condições deve ser satisfeita.

$$(1) \ c_1 = 0 \text{ e } c_2 = 0 \quad \text{ou} \quad (2) \ s_3(t) = 0, \ r(t) = \text{const.} \quad (6.23)$$

No caso (1) temos $s_1 = s_2 = 0$, donde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.24)$$

isto implica que a rotação $\Omega(t)$ se dá em torno do terceiro eixo, como escolhemos um sistema de modo que $\mathbf{r}_i^{0,III} = 0$, então, da equação (6.3) segue que $\mathbf{r}_i^{II}(t) = 0$ para todo tempo, ou seja, o movimento acontece no plano (r^I, r^{II}) e a solução é planar. Agora suponhamos que (2) seja válida, então de (6.21) vemos que s_1, s_2 e s_3 são constantes, com $s_3 = 0$. Assim, $\Sigma(t) = \text{const.}$, da equação (6.7) tem-se que

$$\Omega(t) = \Omega(t_0) \exp \int \Sigma(s) ds$$

donde

$$\Omega(t) = \Omega(t_0) \exp \Sigma t$$

daí $\Omega(t) = \Omega(t_0)[I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots]$ onde $A = \Sigma t$. Como $\Sigma \in A(3, \mathbb{R})$ tem-se que existe $u \in \mathbb{R}$, $u \neq 0$, tal que $\Sigma u = 0$. visto que $A = \Sigma t \in A(3, \mathbb{R})$ segue que $Au = 0$. Assim, $\Omega(t)u = \Omega(t_0)[I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots]u$ mostra que

$$\Omega(t)u = \Omega(t_0)u.$$

Considerando $\Omega(t_0) = I$ temos que $\Omega(t)u = u$, ou seja, $\Omega(t)$ é uma rotação em torno de um eixo fixo u . Resolvendo o sistema $\Sigma u = 0$ onde $u = (x, y, z)$ e

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix},$$

segue-se que o eixo de rotação é a reta $-s_2x + s_1y$, que está contida no plano determinado pelos vetores $\mathbf{r}_i^0$, $i = 1, 2, 3$ visto que $s_3 = 0$. Assim, como r é constante as partículas estariam descrevendo, órbitas circulares em torno de um eixo fixo, ao longo de uma solução espacial, o que é um absurdo. Portanto, o caso (2) não pode ocorrer. ■

Comentário: Aparentemente o fato demonstrado no teorema 44 é consequência direta da homogeneidade da função potencial U , se levassemos em conta a conservação do momento angular e o centro de massa. De fato, não é este o caso, pois, se considerassemos a força gravitacional inversamente proporcional ao cubo da distância, o resultado acima seria falso, para maiores detalhes veja [55].

As soluções homográficas estão classificadas da seguinte forma:

1. No primeiro tipo, consideramos as configurações que são dilatadas sem rotação, ou seja, $\Omega(t) \equiv I$. Estas soluções particulares são caracterizadas por:

$$\mathbf{r}_i = r\mathbf{r}_i^0, \text{ i.e., } (\Omega(t) \equiv I, r = r(t) > 0), \quad (6.25)$$

e são chamadas de soluções *soluções homotéticas*.

2. Outro tipo de solução são as que consideramos as configurações que são rotacionadas sem dilatação, ou seja, $r(t) = 1$, estas soluções se caracterizam por:

$$\mathbf{r}_i = \Omega\mathbf{r}_i^0, \text{ i.e., } (r(t) = 1, \Omega = \Omega(t)), \quad (6.26)$$

estas soluções são chamadas de *soluções de equilíbrio relativo*.

Note que uma solução homográfica não pode ser homotética e de equilíbrio relativo simultaneamente. De fato, suponha que $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ é homotética e de equilíbrio relativo, ou seja, $\mathbf{r}_i = r\mathbf{r}_i^0$ e $\mathbf{r}_i = \Omega\mathbf{r}_i^0$, segue-se então que $(rI - \Omega)\mathbf{r}_i^0 = 0$ para todo tempo t , então $r = 1$ e $\Omega = I$. Logo, $\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i^0$, para $i = 1, 2, 3$, i.e., é uma solução de equilíbrio, o que é um absurdo.

6.3 Classificação das soluções de equilíbrio relativo

Note que o problema geral dos três corpos não admite soluções de equilíbrio, ou seja, soluções da forma $\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i(t_0)$, pois caso contrário, teríamos $\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = 0$, ou seja, $\nabla_{\mathbf{r}_i}U = 0$

para $i = 1, 2, 3$. Por outro lado, fazendo o produto escalar das equações (1.3) por $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_3$ respectivamente, usando a relação de Euler e o fato de U ser homogênea de grau -1 temos que

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \nabla_{\mathbf{r}_i} U = -U = 0 \quad (6.27)$$

donde segue que $U = 0$, o que é um absurdo, pois U é uma soma de termos positivos, logo positiva. Porém como sabemos da seção (6.2) existem as *soluções de equilíbrio relativo*, ou seja, soluções para as quais cada corpo esteja fixo relativamente a um sistema móvel de coordenadas baricêntricas. Isto ocorre porque as forças de atração mútuas seriam compensadas pelas forças centrífugas devidas à rotação de cada corpo em torno do centro de massa do sistema. Para um observador que girasse em torno do eixo ortogonal ao plano das órbitas com a mesma velocidade angular, as partículas pareceriam estar em repouso, daí o nome *solução de equilíbrio relativo*.

Teorema 45. *Fixada a velocidade angular ω , uma solução $\mathbf{r}_i(t) = (\xi_i(t), \eta_i(t), z(t))$, para $i = 1, 2, 3$ do sistema (3.24) é uma solução de equilíbrio relativo se, e somente se, $(\xi_i(t_0), \eta_i(t_0))$ é uma solução do sistema algébrico*

$$\begin{cases} -\omega^2 \xi_i &= \frac{1}{m_i} U_{1,i} \\ -\omega^2 \eta_i &= \frac{1}{m_i} U_{2,i} \end{cases} \text{ para } i = 1, 2, 3. \quad (6.28)$$

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $\mathbf{r}_i(t) = (\xi_i(t), \eta_i(t), \zeta_i(t))$ uma solução de equilíbrio relativo, então $\xi_i(t) = \xi_i(t_0)$, $\eta_i(t) = \eta_i(t_0)$ e $\zeta_i(t) = \zeta_i(t_0)$, logo $\ddot{\xi}_i(t) = \dot{\xi}_i(t)$, $\ddot{\eta}_i(t) = \dot{\eta}_i(t)$ e $\ddot{\zeta}_i(t) = \dot{\zeta}_i(t)$. Portanto, as derivadas em (3.24) se anulam, daí as condições iniciais são uma solução do sistema algébrico (6.28), ou seja,

$$\begin{cases} -\omega^2 \xi_i(t_0) &= \frac{1}{m_i} U_{1,i} \\ -\omega^2 \eta_i(t_0) &= \frac{1}{m_i} U_{2,i} \end{cases}$$

$(\Leftarrow)$ Suponha agora que $(\xi_i(t), \eta_i(t))$ seja uma solução do sistema (6.28), então pondo $\mathbf{r}_i(t) = \xi_i \mathbf{e}_1 + \eta_i \mathbf{e}_2$ obtemos $\mathbf{r}_i(t) = (\xi_i(t), \eta_i(t))$, observe que $\xi_i(t) = -\frac{1}{\omega^2 m_i} U_{1,i} \in \mathbb{R}$. Onde, $\ddot{\xi}_i(t) = \dot{\xi}_i(t) = 0$ (analogamente para η_i). Portanto, $\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \dot{\mathbf{r}}_i(t) = 0$, ou seja, $\mathbf{r}_i(t) = (\xi_i(t), \eta_i(t))$ é uma solução de equilíbrio relativo. ■

No que segue, mostraremos que se existir uma solução de equilíbrio relativo planar satisfazendo (6.28), então se essa solução não for equilátera ela será necessariamente colinear.

De fato, suponha que existe uma solução de equilíbrio relativo planar satisfazendo (6.28) que não seja equilátera, considerando a terceira partícula no eixo ξ tal que $\eta_3 = 0$ e supondo que o triângulo formado pelas partículas possuem dois lados diferentes, por exemplo, $r_{13} \neq r_{23}$. Para $i = 3$ da segunda equação em (6.28), obtemos :

$$-\omega^2 \eta_3 = \frac{1}{m_3} \langle \nabla_3 U, \mathbf{e}_2 \rangle$$

donde

$$0 = \frac{1}{m_3} \left\langle \frac{m_3 m_1}{r_{13}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \frac{m_3 m_2}{r_{23}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3), \mathbf{e}_2 \right\rangle$$

e como $\mathbf{r}_i = \xi_i \mathbf{e}_1 + \eta_i \mathbf{e}_2$, teremos:

$$\frac{m_1}{r_{13}^3} \eta_1 + \frac{m_2}{r_{23}^3} \eta_2 = 0.$$

Por outro lado, como o centro de massa está na origem do sistema de coordenadas, temos que $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0$ e como $\mathbf{r}_i = (\xi_i, \eta_i)$, segue que $m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2 = 0$, da qual obtemos:

$$m_1 \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^3} \right) \eta_1.$$

Ora, para que o primeiro membro dessa igualdade se anule, devemos ter $\eta_1 = 0$, desde que por hipótese, $r_{13} \neq r_{23}$, e $m_1 \neq 0$. Mas se $\eta_1 = 0$ então, $\eta_2 = 0$. Portanto, para tal solução as três partículas estão alinhadas sobre o eixo das abcissas e a configuração é colinear.

6.4 Existência das soluções de equilíbrio relativo

Analisaremos inicialmente a existência no caso equilátero. Consideremos três massas m_1 , m_2 e m_3 dispostas nos vértices de um triângulo equilátero com centro de massa na origem do sistema e a massa m_3 no semi-eixo positivo das abcissas no sistema rotatório cuja velocidade ω será escolhida de tal forma que esta configuração seja uma solução de (6.28). Seja l o comprimento do lado do triângulo equilátero, de modo que $r_{12} = r_{13} = r_{23} = l$. Nestas condições teremos

$$\frac{1}{m_1} U_{1,1} = \frac{m_2}{l^3} (x_2 - x_1) + \frac{m_3}{l^3} (x_3 - \xi_1) = \frac{1}{l^3} [m_2 \xi_2 + m_3 \xi_3 - (m_2 + m_3) \xi_1], \quad (6.29)$$

note que da relação do centro de massa $m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + m_3\xi_3 = 0$, temos que $m_1\xi_1 = -(m_2\xi_2 + m_3\xi_3)$. Assim, substituindo na expressão (6.29) e usando $M = m_1 + m_2 + m_3$ obtemos

$$\frac{1}{m_1}U_{1,1} = -\frac{M}{l^3}\xi_1.$$

Analogamente, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{m_1}U_{1,i} &= -\frac{M}{l^3}\xi_i, \\ \frac{1}{m_1}U_{2,i} &= -\frac{M}{l^3}\eta_i.\end{aligned}$$

Note que para obtermos uma solução do sistema (6.28), basta tomarmos

$$\omega^2 = \frac{M}{l^3},$$

que é a terceira lei de Kepler. Observe que a menos de rotação existem exatamente duas soluções de equilíbrio relativo triangulares. Elas foram descobertas por Lagrange [22].

Provaremos agora a existência das soluções de equilíbrio relativo colineares. Para tal suponhamos as três massas estão sobre o eixo das abscissas do sistema rotatório de forma que $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$, ou seja, m_1 está a esquerda de m_2 e esta a esquerda de m_3 . Seja λ a distância entre m_1 e m_3 e, defina ρ e σ por:

$$\xi_2 - \xi_1 = \rho\lambda,$$

$$\xi_3 - \xi_2 = \sigma\lambda.$$

Note que $\rho + \sigma = \frac{\xi_3 - \xi_1}{\lambda} = 1$ e que, em virtude da relação $m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + m_3\xi_3 = 0$, teremos

$$m_1\xi_1 + m_2(\rho\lambda + \xi_1) + m_3(\xi_1 + \lambda) = 0$$

donde

$$M\xi_1 + \lambda(m_2\rho + m_3) = 0. \tag{6.30}$$

Reescrevendo ξ_1 e ξ_2 como segue

$$\xi_2 = \xi_3 - \sigma\lambda$$

$$\xi_1 = \xi_3 - \lambda$$

teremos

$$m_1(\xi_3 - \lambda) + m_2(\xi_3 - \sigma\lambda) + m_3(\xi_3) = 0.$$

Donde

$$M\xi_3 - (m_2\sigma + m_1) = 0. \tag{6.31}$$

Note que o segundo conjunto das equações (6.28) é facilmente verificado, já que $\eta_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$. Enquanto que o primeiro pode ser reescrito sob a forma

$$\begin{aligned} -\omega^2 \xi_1 &= \frac{m_2}{(\rho\lambda)^2} + \frac{m_3}{\lambda^2} \\ -\omega^2 \xi_2 &= -\frac{m_1}{(\rho\lambda)^2} + \frac{m_3}{(\sigma\lambda)^2} \\ -\omega^2 \xi_3 &= -\frac{m_1}{(\lambda)^2} - \frac{m_2}{(\sigma\lambda)^2}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Usando as equações (6.30) e (6.31) na primeira e terceira equação em (6.32) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{m_2\rho^{-2} + m_3}{m_2\rho + m_3} &= \frac{\omega^2 a^3}{M}, \\ \frac{m_2\sigma^{-2} + m_1}{m_2\sigma + m_1} &= \frac{\omega^2 a^3}{M}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Agora, consideremos a função

$$f(\rho) = \frac{m_2\rho^{-2} + m_3}{m_2\rho + m_3} - \frac{m_2(1-\rho)^{-2} + m_1}{m_2(1-\rho) + m_1}, \quad (6.34)$$

definida no intervalo $0 < \rho < 1$. Note que f é diferenciável, pois é composição de funções diferenciáveis, observamos facilmente que sua derivada é sempre negativa. Portanto, ela é decrescente. Como $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho) = +\infty$ e $\lim_{\rho \rightarrow 1} f(\rho) = -\infty$, segue-se que existe um único $\rho^* \in (0, 1)$ tal que $f(\rho^*) = 0$. Para este valor de ρ defina ω como

$$\frac{\omega^2 a^3}{M} = \frac{m_2(\rho^*)^{-2} + m_3}{m_2\rho^* + m_3}.$$

Portanto, as equações (6.33) são satisfeitas. Assim, tomando ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 definidos por (6.32) teremos uma solução para o sistema (6.28). Desta forma, temos uma solução de equilíbrio relativo com as partículas alinhadas da seguinte forma $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$. Usando uma permutação cíclica podemos afirmar que, a menos de rotação, existem exatamente, três configurações de equilíbrio relativo colineares. Estas foram descobertas por Euler [15]. Lagrange em sua memória "Essai sur le problème des trois corps" obteve novamente as soluções de Euler.

Lagrange considerava, as soluções por ele encontradas apenas de caráter teórico e não tinham qualquer aplicação em astronomia. Contudo, hoje sabemos que o Sol, Júpiter e os Asteróides do grupo Troiano formam, aproximadamente, a configuração de um triângulo equilátero. Recentemente, com a viagem da Voyager descobriu-se que Saturno e alguns de

seus satélites apresentam esta configuração. Portanto, é de interesse astronômico o estudo das soluções do problema dos três corpos próximas das soluções de Lagrange. A figura abaixo mostra as soluções de equilíbrio relativos no problema dos três corpos.

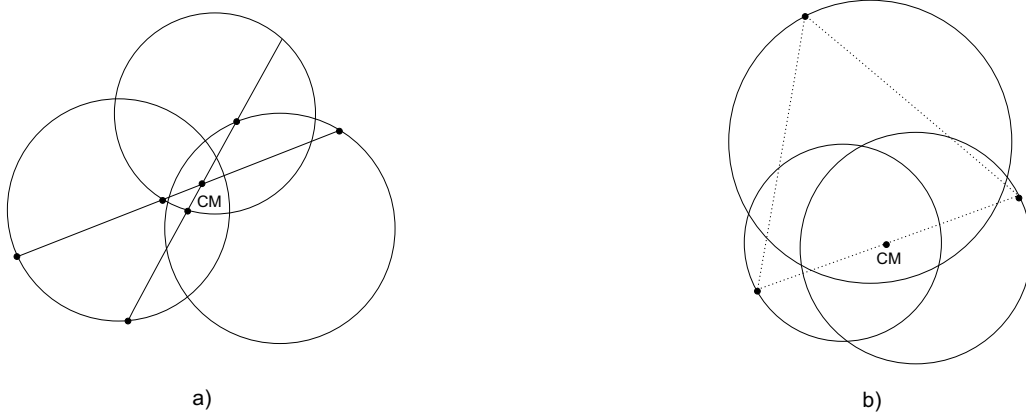


Figura 6.1: Soluções de equilíbrio relativo: (a) Colinear (b) Equilátera

6.5 Relação entre configurações centrais e equilíbrios

Seja $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ uma solução de equilíbrio equilátera, tal que $r_{12} = r_{13} = r_{23} = l$, com centro de massa fixo na origem, das equações (1.1) temos

$$\sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \frac{1}{l^3} m_j \sum_{j \neq i} m_i (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \frac{M}{l^3} m_j \mathbf{r}_j,$$

ou seja, temos uma configuração central com $\sigma = \frac{M}{l^3}$ que independe de j , logo $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ é uma **c.c.**

Em geral se os $\mathbf{r}_i$ s na equação (6.1) são coplanares a configuração é dita um *equilíbrio relativo*, e como pelo teorema 44 estas são planares segue-se que, as *soluções de equilíbrio relativo* são exatamente as configurações centrais no problema dos três corpos.

6.5.1 Coordenadas das soluções de equilíbrio equiláteras

Seja l o comprimento do lado do triângulo equilátero, tem-se

- Nas coordenadas giratórias definidas na seção (3.3) cosiderando as massas dispostas de forma coveniente no sistema de coordenadas, teremos para as posições

$$\begin{aligned}\xi_1^0 &= \frac{1}{2}l, & \eta_1^0 &= \frac{\sqrt{3}}{2}l, & \zeta_1^0 &= 0 \\ \xi_2^0 &= -\frac{1}{2}l, & \eta_2^0 &= \frac{\sqrt{3}}{2}l, & \zeta_2^0 &= 0 \\ \xi_3^0 &= 0, & \eta_3^0 &= 0, & \zeta_3^0 &= 0\end{aligned}\tag{6.35}$$

desta forma na solução de equilíbrio:

$$r_1 = l, \quad r_2 = l, \quad r_3 = l.\tag{6.36}$$

Por outro lado, das equações (3.28) sabemos que

$$p_{\xi_i}^0 = -\omega m_i \eta_i^0, \quad p_{\eta_i}^0 = \omega m_i \xi_i^0$$

assim, tem-se por (6.35) que

$$\begin{aligned}p_{\xi_1}^0 &= -\omega m_1 \frac{\sqrt{3}}{2}l, & p_{\eta_1}^0 &= \omega m_1 \frac{l}{2}, & p_{\zeta_1}^0 &= 0 \\ p_{\xi_2}^0 &= -\omega m_2 \frac{\sqrt{3}}{2}l, & p_{\eta_2}^0 &= -\omega m_2 \frac{l}{2}, & p_{\zeta_2}^0 &= 0 \\ p_{\xi_3}^0 &= 0, & p_{\eta_3}^0 &= 0, & p_{\zeta_3}^0 &= 0.\end{aligned}\tag{6.37}$$

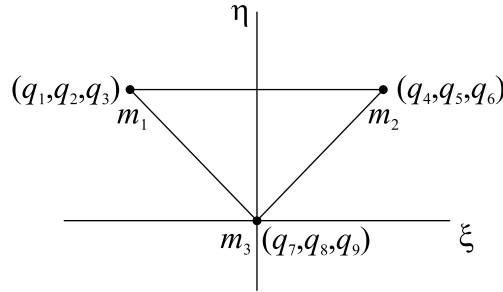


Figura 6.2: Coordenadas das soluções de equilíbrio

- Nas coordenadas relativas definidas na seção (3.2), agora considerando o sistema giratório, denotando por (q_1, q_2, q_3) , (q_4, q_5, q_6) e (q_7, q_8, q_9) as posições das partículas de massa m_1 , m_2 e m_3 respectivamente, dispostas como na figura (6.2).

Vemos que para as posições , temos:

$$\begin{aligned}q_1^0 &= -\frac{1}{2}l, & q_2^0 &= \frac{\sqrt{3}}{2}l, & q_3^0 &= 0 \\ q_4^0 &= +\frac{1}{2}l, & q_5^0 &= \frac{\sqrt{3}}{2}l, & q_6^0 &= 0 \\ q_7^0 &= 0, & q_8^0 &= 0, & q_9^0 &= 0,\end{aligned}\tag{6.38}$$

desta forma na solução de equilíbrio

$$r_1 = l, \quad r_2 = l, \quad r_3 = l. \quad (6.39)$$

Usando novamente as equações (3.28), os respectivos momentos são

$$\begin{aligned} p_1^0 &= -m_1\omega\frac{\sqrt{3}}{2}l, & p_2^0 &= -m_1\omega\frac{1}{2}l, & p_3^0 &= 0 \\ p_4^0 &= -m_2\omega\frac{\sqrt{3}}{2}l, & p_5^0 &= m_2\omega\frac{1}{2}l, & p_6^0 &= 0 \\ p_7^0 &= 0, & p_8^0 &= 0, & p_9^0 &= 0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

Capítulo 7

Reduções no Problema dos Três Corpos

Este capítulo tem como objetivo, descrever métodos que nos permitirão, reduzir o número de equações diferenciais de primeira ordem, que define o problema, facilitando assim o seu estudo.

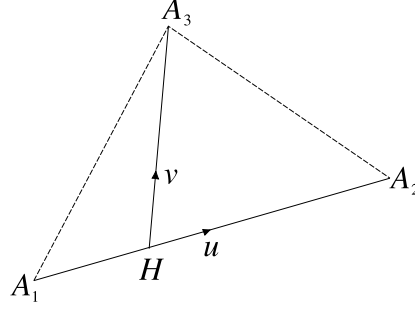
7.1 Redução no caso espacial

Nesta seção trataremos de alguns métodos para o caso espacial do problema dos três corpos.

7.1.1 Método de Jacobi espacial

Observe que nesta seção não estamos supondo que o centro de massa $\mathbf{R}$ está na origem. Denotamos o vetor A_1A_2 por $\mathbf{u}$ e o vetor HA_3 (onde H é o centro de massa de A_1 e A_2) por $\mathbf{v}$. O vetor A_2A_3 é dado por $-\alpha_1\mathbf{u} + \mathbf{v}$, e o vetor A_1A_3 é $-\alpha_2 + \mathbf{v}$, onde

$$\alpha_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_3}, \quad \alpha_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (7.1)$$

Figura 7.1: Vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Denotaremos as componentes de $\mathbf{u}$ por (u_1, u_2, u_3) e as componentes de $\mathbf{v}$ por (v_1, v_2, v_3) , e expressamos a energia cinética T em termos destas coordenadas por meio da relação (3.4). Omitindo por enquanto o termo originado do movimento de $\mathbf{R}$, os x -termos movimento relativo a $\mathbf{R}$ nos dá:

$$\frac{1}{2M} \{m_2 m_3 (-\alpha_1 \dot{u}_1 + \dot{v}_1)^2 + m_3 m_1 (\alpha_2 \dot{u}_1 + \dot{v}_1)^2 + m_1 m_2 \dot{u}_1^2\} = \frac{1}{2} m \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{v}_1^2, \quad (7.2)$$

onde

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (7.3)$$

Fazendo o mesmo com as outras variáveis obtemos

$$T = \frac{M}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{m}{2} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) + \frac{1}{2} \mu (\dot{v}_1^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{v}_3^2). \quad (7.4)$$

Temos

$$U = \frac{m_2 m_3}{r_1} + \frac{m_3 m_1}{r_2} + \frac{m_1 m_2}{r_3}, \quad (7.5)$$

onde

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \| -\alpha_1 \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2 = (-\alpha_1 u_1 + v_1)^2 + (-\alpha_1 u_2 + v_2)^2 + (-\alpha_1 u_3 + v_3)^2, \\ r_2^2 &= \| \alpha_2 \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2 = (\alpha_2 u_1 + v_1)^2 + (\alpha_2 u_2 + v_2)^2 + (\alpha_2 u_3 + v_3)^2, \\ r_3^2 &= \| \mathbf{u} \|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. \end{aligned} \quad (7.6)$$

As equações de movimento são

$$\begin{aligned} M \ddot{X} &= \frac{\partial U}{\partial X}, \quad m \ddot{u}_1 = \frac{\partial U}{\partial u_1}, \quad \mu \ddot{v}_1 = \frac{\partial U}{\partial v_1}, \\ M \ddot{Y} &= \frac{\partial U}{\partial Y}, \quad m \ddot{u}_2 = \frac{\partial U}{\partial u_2}, \quad \mu \ddot{v}_2 = \frac{\partial U}{\partial v_2}, \\ M \ddot{Z} &= \frac{\partial U}{\partial Z}, \quad m \ddot{u}_3 = \frac{\partial U}{\partial u_3}, \quad \mu \ddot{v}_3 = \frac{\partial U}{\partial v_3}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Propriedades deste sistema:

- Desde que U não contém (X, Y, Z) , obtemos

$$\ddot{X} = \ddot{Y} = \ddot{Z} \equiv 0,$$

isto implica simplesmente que $\mathbf{R}$ move-se uniformemente numa linha reta.

- As segundas e terceiras equações em (7.7) assumem a forma

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_1 &= -Au_1 + Bv_1, \quad \mu\ddot{v}_1 = Bu_1 - Cv_1 \\ m\ddot{u}_2 &= -Au_2 + Bv_3, \quad \mu\ddot{v}_2 = Bu_2 - Cv_2 \\ m\ddot{u}_3 &= -Au_3 + Bv_2, \quad \mu\ddot{v}_3 = Bu_3 - Cv_3 \end{aligned} \tag{7.8}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \frac{m_1 m_2 m_3}{(m_1 + m_2)^2} \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} \right) + \frac{m_1 m_2}{r_3^3} \\ B &= \frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right), \\ C &= m_3 \left(\frac{m_2}{r_1^3} + \frac{m_1}{r_2^3} \right). \end{aligned} \tag{7.9}$$

- Em geral temos

$$m\ddot{\mathbf{u}} = -A\mathbf{u} + B\mathbf{v}, \quad \mu\ddot{\mathbf{v}} = B\mathbf{u} - C\mathbf{v}. \tag{7.10}$$

- Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ estão determinados então a posição das três partículas relativas a $\mathbf{R}$ são dadas pelos vetores

$$-\alpha_2 \mathbf{u} - \frac{m_3}{M} \mathbf{v}, \quad \alpha_1 \mathbf{u} - \frac{m_3}{M} \mathbf{v}, \quad \frac{m_1 + m_2}{M} \mathbf{v}. \tag{7.11}$$

- É importante notar a forma elegante tomada pelas integrais do momento angular

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^3 m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = M(Y\dot{Z} - Z\dot{Y}) + m(u_2 \dot{u}_3 - u_3 \dot{u}_2) + \mu(v_2 \dot{v}_3 - v_3 \dot{v}_2), \\ b &= \sum_{i=1}^3 m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = M(Z\dot{X} - X\dot{Z}) + m(u_3 \dot{u}_1 - u_1 \dot{u}_3) + \mu(v_3 \dot{v}_1 - v_1 \dot{v}_3), \\ c &= \sum_{i=1}^3 m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = M(X\dot{Y} - Y\dot{X}) + m(u_1 \dot{u}_2 - u_2 \dot{u}_1) + \mu(v_1 \dot{v}_2 - v_2 \dot{v}_1). \end{aligned} \tag{7.12}$$

- Desde que o centro de massa $\mathbf{R}$ move-se uniformemente numa linha reta, os termos $M(Y\dot{Z} - Z\dot{Y})$ e $m(u_2\dot{u}_3 - u_3\dot{u}_2) + \mu(v_2\dot{v}_3 - v_3\dot{v}_2)$ são separadamente constantes.
- Assumindo que o centro de massa encontra-se na origem do sistema de coordenadas, tem-se que

$$T = \frac{m}{2}(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) + \frac{\mu}{2}(\dot{v}_1^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{v}_3^2), \quad (7.13)$$

com U definido por (7.5) e (7.6).

Agora considerando que o sistema gira em torno do eixo z e denotando, as coordenadas relativas aos eixo de rotação como, $\mathbf{u} = (q_1, q_2, q_3)$ e $\mathbf{v} = (q_4, q_5, q_6)$, teremos

$$\begin{aligned} T = & \frac{m}{2}[(\dot{q}_1 - \omega q_2)^2 + (\dot{q}_2 + \omega q_1)^2 + (\dot{q}_3 - \omega q_4] \\ & + \frac{\mu}{2}[(\dot{q}_4 + \omega q_3)^2 + (\dot{q}_5 - \omega q_6)^2 + (\dot{q}_6 + \omega q_5]. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Para encontrarmos a função Hamiltoniana associada a estas novas variáveis, desenvolvemos a expressão

$$\frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{\mu}{2}(\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2) - \frac{m}{2}\omega^2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - \frac{\mu}{2}\omega^2(q_4^2 + q_5^2 + q_6^2) - U \quad (7.15)$$

em termos dos p 's e q 's, onde definimos

$$\begin{aligned} p_1 &= m(\dot{q}_1 - \omega q_2), & p_2 &= m(\dot{q}_2 + \omega q_1) \\ p_3 &= m(\dot{q}_3 - \omega q_4), & p_4 &= \mu(\dot{q}_4 + \omega q_3) \\ p_5 &= \mu(\dot{q}_5 - \omega q_6), & p_6 &= \mu(\dot{q}_6 + \omega q_5) \end{aligned} \quad (7.16)$$

donde temos a seguinte função hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2\mu}(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) \quad (7.17)$$

$$- \omega(q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_4 p_5 - q_5 p_4 + q_6 p_7 - q_7 p_6) - U$$

onde

$$U = G \left(\frac{m_2 m_3}{r_1} + \frac{m_3 m_1}{r_2} + \frac{m_1 m_2}{r_3} \right), \quad (7.18)$$

com

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (-\alpha_1 q_1 + q_4)^2 + (-\alpha_1 q_2 + q_5)^2 + (-\alpha_1 q_3 + q_6)^2, \\ r_2^2 &= (\alpha_2 q_1 + q_4)^2 + (\alpha_2 q_2 + q_5)^2 + (\alpha_2 q_3 + q_6)^2, \\ r_3^2 &= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \end{aligned} \tag{7.19}$$

A redução feita nesta seção nos dá uma considerável simplificação do problema dos três corpos. Ela nos permite considerar o problema como um sistema de *duas partículas*, uma partícula de massa m em (u_1, u_2, u_3) e uma partícula de massa μ em (v_1, v_2, v_3) . As forças são derivadas de um potencial $-U$, onde $-U$ é definido por (7.5)-(7.6). As forças não estão na direção ou linha ligando as partículas, mas no entanto, elas são tais que seu momento angular ao redor da origem, a saber,

$$\mathbf{u} \times (A\mathbf{u} + B\mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (B\mathbf{u} - C\mathbf{v}), \tag{7.20}$$

é zero, isto é, o momento angular em torno da origem permanece constante.

7.1.2 Redução de ordem 12 a ordem 8

Vimos na seção 7.1.1 que o problema geral dos três corpos pode ser reduzido a um problema de dois corpos, uma partícula de massa m em (u_1, u_2, u_3) e uma partícula de massa μ em (v_1, v_2, v_3) movendo-se sobre a ação de uma força derivada de um potencial $-U$ definido em (7.5). O movimento das duas partículas é definido por um sistema de 12 equações Hamiltonianas, com função Hamiltoniana dada por

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2\mu}(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) - U. \tag{7.21}$$

onde

$$U = \frac{m_2 m_3}{r_1} + \frac{m_3 m_1}{r_2} + \frac{m_1 m_2}{r_3}, \tag{7.22}$$

com

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (-\alpha_1 q_1 + q_4)^2 + (-\alpha_1 q_2 + q_5)^2 + (-\alpha_1 q_3 + q_6)^2, \\ r_2^2 &= (\alpha_2 q_1 + q_4)^2 + (\alpha_2 q_2 + q_5)^2 + (\alpha_2 q_3 + q_6)^2, \\ r_3^2 &= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Devemos lembrar que

$$p_1 = m\dot{q}_1, \quad p_2 = mq_2, \quad p_3 = m\dot{q}_3 \quad (7.24)$$

$$p_4 = \mu\dot{q}_4, \quad p_5 = \mu q_5, \quad p_6 = \mu\dot{q}_6.$$

Nesta redução procederemos da seguinte forma. Primeiro, mudaremos das coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ a $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ usando a transformação simplética (ou mudança canônica de coordenadas) definida pelas equações

$$q_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad P_i = \frac{\partial W}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (7.25)$$

por meio da função geradora

$$\begin{aligned} W = W(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) = & [p_1 \cos(Q_3) + p_2 \sin(Q_3)] Q_1 \cos(Q_2) + \rho Q_1 \sin(Q_2) + \\ & [p_4 \cos(Q_6) + p_5 \sin(Q_6)] Q_4 \cos(Q_5) + \sigma Q_4 \sin(Q_5), \end{aligned} \quad (7.26)$$

com

$$\begin{aligned} \rho^2 = & [-p_1 \sin(Q_3) + p_2 \cos(Q_3)]^2 + p_3^2, \\ \sigma^2 = & [-p_4 \sin(Q_6) + p_5 \cos(Q_6)]^2 + p_6^2. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Explicitamente temos

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 [\cos(Q_2) \cos(Q_3) - \rho^{-1} (-p_1 \sin(Q_3) + p_2 \cos(Q_3)) \sin(Q_2) \sin(Q_3)], \\ q_2 &= Q_1 [\cos(Q_2) \sin(Q_3) - \rho^{-1} (-p_1 \sin(Q_3) + p_2 \cos(Q_3)) \sin(Q_2) \cos(Q_3)], \\ q_3 &= Q_1 \rho^{-1} p_3 \sin(Q_2), \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} P_1 &= (p_1 \cos(Q_3) + p_2 \sin(Q_3)) \cos(Q_2) + \rho \sin(Q_2), \\ P_2 &= Q_1 [-(p_1 \cos(Q_3) + p_2 \sin(Q_3)) \sin(Q_2) + \rho \cos(Q_2)], \\ P_3 &= \rho^{-1} [-p_1 \sin(Q_3) + p_2 \cos(Q_3)] P_2, \end{aligned} \quad (7.29)$$

e similarmente obtemos as expressões para os sub-índices 4, 5 e 6.

O significado físico destas novas coordenadas será dado a seguir. Observe primeiro que

$$Q_1^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \quad (7.30)$$

assim Q_1 é a distância de m a origem O no problema equivalente de dois corpos, ou seja, a distância r_3 no problema de três corpos original. Consideremos agora o movimento de

m no problema equivalente de dois corpos. Seja Om o raio que corta a esfera unitária em M , e seja Π o plano contendo O e a linha instantânea de movimento de m , ele corta o círculo máximo $z = 0$ sobre a esfera unitária em A . Então Q_3 é a *longitude do nodo* A , e $AM = Q_2$ (veja figura abaixo)

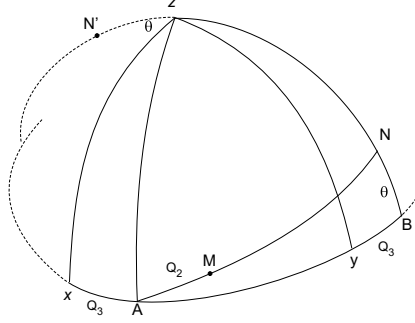


Figura 7.2: Novas coordenadas

Para verificar esta afirmação denotamos o ângulo xA por Q_3 e o ângulo AM por Q_2 , então as fórmulas da transformação são idênticas a aquelas definidas em (7.28). Seja agora o ponto B sobre $z = 0$ com longitude $\frac{1}{2}\pi + Q_3$, e seja Π o plano que corta o círculo máximo zB em N . O momento linear de m tem componentes (p_1, p_2, p_3) ao longo de Ox, Oy, Oz respectivamente. Portanto, sua componente na direção OB é dada por $(-p_1 \text{sen}(Q_3) + p_2 \cos(Q_3))$, e como o vetor momento esta sobre o plano Π , temos

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \rho^{-1}[-p_1 \text{sen}(Q_3) + p_2 \cos(Q_3)] \\ \text{sen}(\theta) &= \rho^{-1}p_3, \end{aligned} \tag{7.31}$$

onde θ é o ângulo BN . Um vetor unitário em OM é equivalente a $\cos(Q_2)$ em OA , $\text{sen}(Q_2)\cos(\theta)$ em OB , e $\text{sen}(Q_2)\text{sen}(\theta)$ em Oz . Portanto, as componentes de um vetor unitário em OM ao longo de Ox, Oy, Oz são

$$\begin{aligned} \cos(Q_2)\cos(Q_3) - \text{sen}(Q_2)\cos(\theta)\text{sen}(Q_3), \\ \cos(Q_2)\text{sen}(Q_3) + \text{sen}(Q_2)\cos(\theta)\cos(Q_3), \\ \text{sen}(Q_2)\text{sen}(\theta) \end{aligned}$$

e observando que estas correspondem a $\frac{q_1}{Q_1}, \frac{q_2}{Q_1}, \frac{q_3}{Q_1}$ respectivamente, recuperamos as fórmulas (7.28).

O significado físico dos P 's pode ser obtido das fórmulas (7.29). O momento linear de m é dado pelo vetor soma $(p_1 \cos(Q_3) + p_2 \sin(Q_3))$ em OA e ρ em ON . Portanto, P_1 é a componente do momento linear na direção OM , $P_1 = m\dot{Q}_1$. Em seguida, P_2 é a magnitude do momento angular ao redor de O (a direção do vetor momento angular é $O\bar{N}$, onde $\bar{N}$ é o pólo do plano Π). E finalmente, $P_3 (= P_2 \cos(\theta))$ é a componente do momento angular (para o movimento de m) em torno de Oz .

Das fórmulas (7.28)-(7.29), e as correspondentes fórmulas para os sub-índices 4, 5, 6, temos

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = P_1^2 + \frac{P_2^2}{Q_1^2}, \quad p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = P_4^2 + \frac{P_5^2}{Q_4^2}, \quad (7.32)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6}{Q_1 Q_4} &= \cos(Q_2) \cos(Q_5) \cos(Q_3 - Q_6) + \cos(Q_2) \sin(Q_5) \sin(Q_3 - Q_6) \cos(\varphi) - \\ &\quad \sin(Q_2) \cos(Q_5) \sin(Q_3 - Q_6) \cos(\theta) + \\ &\quad \sin(Q_2) \sin(Q_5) \cos(Q_3 - Q_6) \cos(\theta) \cos(\varphi) + \\ &\quad \sin(Q_2) \sin(Q_5) \sin(\theta) \sin(\varphi), \end{aligned} \quad (7.33)$$

e

$$\cos(\varphi) = \rho^{-1}[-p_1 \sin(Q_3) + p_2 \cos(Q_3)], \quad \sin(\varphi) = \rho^{-1} p_6, \quad (7.34)$$

$$\cos(\theta) = \frac{P_3}{P_2}, \quad \cos(\varphi) = \frac{P_6}{P_5}, \quad (7.35)$$

podemos expressar as variáveis q 's em termos dos Q 's e P 's, assim estamos agora em posição de expressar a fórmula (7.21) para H em termos dos Q 's e P 's.

Para expressar as componentes do momento angular em termos das novas variáveis, notemos que de (7.28)-(7.29), segue que

$$\begin{aligned} q_2 p_3 - q_3 p_2 &= P_2 \sin(\theta) \sin(Q_3), \\ q_3 p_1 - q_1 p_3 &= -P_2 \sin(\theta) \cos(Q_3), \\ q_1 p_2 - q_2 p_1 &= P_3. \end{aligned} \quad (7.36)$$

A última destas relações já foi provada, e as duas primeiras seguem-se da figura 7.1.2 . As

integrais do momento angular são

$$\begin{aligned} P_2 \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(Q_3) + P_5 \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(Q_6) &= a \\ -P_2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(Q_3) - P_5 \operatorname{sen}(\varphi) \cos(Q_6) &= b \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$P_3 + P_6 = c.$$

Isto completa o primeiro estágio da redução. Observe que a transformação de coordenadas utilizada não é uma transformação pontualmente bem definida, ou seja, as variáveis Q_1, Q_2, Q_3 não podem ser expressadas apenas como função de (q_1, q_2, q_3) .

No segundo estágio o objetivo será fazer uso das integrais do momento angular. Para isto fazemos primeiro a escolha Oz da direção do momento angular (o qual é constante), portanto $a = b = 0$, e usamos a transformacãocanônica na qual $P_3 + P_6$ torna-se a única variável momento angular.

Observe que o anulamento das duas primeiras componentes em (7.37) implica que $\operatorname{sen}(Q_3 - Q_6) = 0$, assim sem perda de generalidade podemos fazer $Q_3 = Q_6$, e consequentemente

$$P_2 \operatorname{sen}(\theta) = -P_5 \operatorname{sen}(\varphi), \quad (7.38)$$

o qual também é evidente geometricamente.

Devemos agora desacoplar o conjunto de fórmulas em dois conjuntos um para os subíndices 1, 2, 3 e outro para 4, 5, 6. Para isto usaremos a transformação de coordenadas de $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ a $(\mathbf{q}', \mathbf{p}')$ definida pelas equações

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}, \quad p'_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad (7.39)$$

onde

$$W = W(\mathbf{P}, \mathbf{q}') = q'_1 P_1 + q'_2 P_4 + q'_3 P_2 + q'_4 P_5 + q'_5 (P_3 - P_6) + q'_6 (P_3 + P_6). \quad (7.40)$$

Assim,

$$Q_1 = q'_1, Q_2 = q'_3, Q_3 = q'_5 + q'_6, Q_4 = q'_2, Q_5 = q'_4, Q_6 = -q'_5 + q'_6, \quad (7.41)$$

$$p'_1 = P_1, p'_2 = P_4, p'_3 = P_2, p'_4 = P_5, p'_5 = P_3 - P_6, p'_6 = P_3 + P_6$$

Como as transformações usadas não dependem de t o Hamiltoniano nas novas variáveis será simplesmente o Hamiltoniano antigo (7.21) nas variáveis q' e p' .

O primeiro ponto a observar é que q'_6 pode ser ignorado, pois p'_6 permanece constante ao longo do movimento; denotaremos $p'_6 = \beta$. Tem-se $q'_5 = 0$, e por (7.38)-(7.35) segue-se que

$$P_2^2 - P_3^2 = P_5^2 - P_6^2, \quad (7.42)$$

assim

$$p_3'^2 - p_4'^2 = P_2^2 - P_5^2 = (P_3 + P_6)(P_3 - P_6) = \beta p_5'. \quad (7.43)$$

Agora podemos substituir este valor para p_5 em H antes de formar as equações de movimento. Pois se a função assim formada é $H'(q'_1, q'_2, q'_3, q'_4, q'_5, p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, p'_6)$ temos (denotando qualquer variável entre $q'_1, q'_2, q'_3, q'_4, p'_1, p'_2, p'_3, p'_4$ por ψ)

$$\frac{\partial H'}{\partial \psi} = \frac{\partial H}{\partial \psi} + \frac{\partial H}{\partial p_5} \frac{\partial p_5}{\partial \psi}, \quad (7.44)$$

e lembremos que $\frac{\partial H}{\partial p_5} = \dot{q}'_5 = 0$ para todo tempo. Concluimos que no Hamiltoniano (o qual não contém q'_6) podemos colocar $q'_5 = 0$, $p'_6 = \beta$, e

$$p'_5 = \beta^{-1}(p_3'^2 - p_4'^2). \quad (7.45)$$

Assim temos uma função Hamiltoniana com apenas oito variáveis

$$(q'_1, q'_2, q'_3, q'_4, p'_1, p'_2, p'_3, p'_4);$$

ou seja, reduzimos o problema a um sistema de ordem oito.

Pode ser notado também que, se o sistema tem sido integrado, a coordenada ignorada q'_6 pode ser encontrada pela quadratura da equação

$$\dot{q}'_6 = \frac{\partial H}{\partial \beta}. \quad (7.46)$$

Para encontrar a forma explícita de H nas novas variáveis, os únicos termos que dão um certo problema são aqueles que se originam da expressão $\cos(\theta)\cos(\varphi) + \sin(\theta)\sin(\varphi)$ em (7.33). Agora, por (7.38)

$$\begin{aligned} \cos(\theta)\cos(\varphi) + \sin(\theta)\sin(\varphi) &= \cos(\theta)\cos(\varphi) - \frac{P_2}{P_5}\sin^2(\theta) \\ &= \frac{P_3P_6}{P_2P_5} - \frac{P_2}{P_5}\left(1 - \frac{P_3^2}{P_2^2}\right) \\ &= \frac{1}{P_2P_5}(P_3P_6 - P_2^2 + P_3^2) \\ &= \frac{1}{2p_3'p_4'}(\beta^2 - p_3'^2 - p_4'^2). \end{aligned} \quad (7.47)$$

Finalmente, nas variáveis novas, as equações de movimento são aquelas derivadas da função Hamiltoniana, com apenas oito variáveis definida por

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_1'^2 + \frac{p_3'^2}{q_1'^2} \right) + \frac{1}{2\mu} \left(p_2'^2 + \frac{p_4'^2}{q_2'^2} \right) - \frac{m_2 m_3}{r_1} - \frac{m_3 m_1}{r_2} - \frac{m_1 m_2}{q_1'}, \quad (7.48)$$

onde

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \alpha_1^2 q_1'^2 - 2\alpha_1 q_1' q_2' \left[\cos(q_3') \cos(q_4') + \frac{\beta^2 - p_3'^2 - p_4'^2}{2p_3' p_4'} \sin(q_3') \sin(q_4') \right] + q_2'^2 \\ r_2^2 &= \alpha_2^2 q_1'^2 - 2\alpha_2 q_1' q_2' \left[\cos(q_3') \cos(q_4') + \frac{\beta^2 - p_3'^2 - p_4'^2}{2p_3' p_4'} \sin(q_3') \sin(q_4') \right] + q_2'^2. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Comentário. Teoricamente é possível reduzir a ordem do sistema de oito para seis, para isto basta usar a integral da energia, mas, acontece que tal procedimento é bastante trabalhoso.

7.2 Redução no caso Planar

O problema dos três corpos planar traz consideráveis simplificações uma vez que ele reduz o sistema de EDO em seis equações imediatamente. Nesta seção veremos algumas mudanças de coordenadas que permitem diminuir o número de graus de liberdade no caso específico do problema no plano.

7.2.1 Redução de 12 para 8

Considerando as coordenadas relativas definidas na seção (3.12), mas agora para o referencial girante para o caso planar, temos que função Hamiltoniana definida em (3.16), é dada por

$$H = \frac{1}{2}\mu_1(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}\mu_2(p_3^2 + p_4^2) + \frac{1}{2}\mu_3[(p_1 + p_3 - p_5)^2 + (p_2 + p_4 - p_5)^2] - \quad (7.50)$$

$$\omega(q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_3 p_4 - q_4 p_3 + q_5 p_6 - q_6 p_5) - U,$$

onde $\mu_i = \frac{1}{m_i}$, e

$$U = \frac{m_2 m_3}{r_1} + \frac{m_3 m_1}{r_2} + \frac{m_1 m_2}{r_3} \quad (7.51)$$

com

$$\begin{aligned} r_1^2 &= q_3^2 + q_4^2 \\ r_2^2 &= q_1^2 + q_2^2 \end{aligned} \quad (7.52)$$

$$r_3^2 = (q_1 - q_3)^2 + (q_2 - q_4)^2.$$

Note que a função potencial U em (7.51) não depende de q_5 nem q_6 , assim as duas equações diferenciais nos dão:

$$\dot{p}_5 - \omega p_6 = 0, \quad \dot{p}_6 + \omega p_5 = 0. \quad (7.53)$$

De fato, pois

$$\dot{p}_5 = -\frac{\partial H}{\partial q_5} = \omega p_6,$$

donde

$$\dot{p}_5 - \omega p_6 = 0$$

Como as componentes do momento linear são:

$$p_{\xi_1} + p_{\xi_2} + p_{\xi_3} = p_5, \quad p_{\eta_1} + p_{\eta_2} + p_{\eta_3} = p_6. \quad (7.54)$$

Portanto, as equações (7.53) expressam a conservação do momento linear. Se o centro de massa $\mathbf{R}$ do sistema está no equilíbrio, ou seja, se

$$p_5 = p_6 = 0 \quad (7.55)$$

para todo tempo e se considerarmos a origem das coordenadas em $\mathbf{R}$, as coordenadas q_5, q_6 serão determinadas quando q_1, q_2, q_3, q_4 tem sido encontradas, por meio das relações :

$$Mq_5 = -m_1q_1 - m_2q_3, \quad Mq_6 = -m_1q_2 - m_2q_4. \quad (7.56)$$

De fato, de (7.55) temos que $M\dot{\mathbf{X}} = 0$, donde $M\mathbf{X} = A$, A uma constante. Agora considerando a origem no centro de massa, ou seja, $m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0$ teremos $Mx_3 = -m_1(x_1 - x_3) - m_2(x_2 - x_3)$. Assim, usando as equações (3.12), (3.14) e (3.16), no caso planar, teremos $Mq_5 = -m_1q_1 - m_2q_3$ (analogamente, obtemos $Mq_6 = -m_1q_2 - m_2q_4$).

Portanto, assumindo que o centro de massa está em repouso na origem do sistema de coordenadas, reduzimos o sistema de 12 para 8 equações. As equações que determinam as oito variáveis $q_1, q_2, q_3, q_4, p_1, p_2, p_3$ e p_4 são as equações Hamiltonianas derivadas da função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}\mu_1(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}\mu_2(p_3^2 + p_4^2) + \frac{1}{2}\mu_3[(p_1 + p_3)^2 + (p_2 + p_4)^2] - U. \quad (7.57)$$

7.2.2 Redução de 8 para 6

Mostraremos aqui como podemos reduzir ainda mais o sistema associado à função Hamiltoniana (7.57), de 8 para 6. Para isto usaremos o procedimento devido a Jacobi, e é chamado *eliminação do nodo*. O coeficiente de $-\omega$ em (7.18) representa o momento angular em torno da origem, O ; sabemos que ela tem um valor constante, um fato que foi inicialmente verificado das equações do movimento. A idéia central do Método de Jacobi é aplicar uma transformação de coordenadas na qual a expressão para o momento angular (o momento angular nas coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é dado por $(q_1p_2 - p_1q_2) + (q_3p_4 - p_3q_4) + (q_5p_6 - p_5q_6)$)

$$(q_1p_2 - q_2p_1) + (q_3p_4 - q_4p_3), \quad (7.58)$$

seja uma das variáveis.

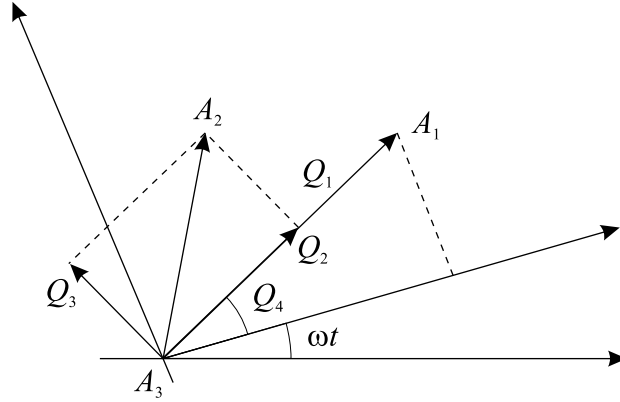


Figura 7.3: Eliminação do nodo

Para isto, começamos definindo a transformação

$$\begin{aligned} q_1 &= \cos(Q_4)Q_1, \\ q_2 &= \sin(Q_4)Q_1, \\ q_3 &= \cos(Q_4)Q_2 - \sin(Q_4)Q_3 \\ q_4 &= \cos(Q_4)Q_2 + \sin(Q_4)Q_3. \end{aligned} \quad (7.59)$$

O significado geométrico é evidente: (Q_1, Q_4) são as coordenadas polares de (q_1, q_2) no sistema móvel, e (Q_2, Q_3) são as componentes do vetor (q_3, q_4) ao longo e perpendicular ao vetor (q_1, q_2) (veja figura 7.3). Para encontrar a transformação de coordenadas procurada

a qual é a transformação conseguida ao estender (7.59) tornando-a simplética ou canônica precisamos da função geradora

$$W = p_1 \cos(Q_4) Q_1 + p_2 \sin(Q_4) Q_1 + p_3 (\cos(Q_4) Q_2 - \sin(Q_4) Q_3) + p_4 (\cos(Q_4) Q_2 + \sin(Q_4) Q_3). \quad (7.60)$$

As equações que definem a transformação de coordenadas devem satisfazer

$$q_r = \frac{\partial W}{\partial p_r}, \quad P_r = \frac{\partial W}{\partial Q_r}, \quad (r = 1, 2, 3, 4) \quad (7.61)$$

das quais segue-se que as expressões explícitas da transformação é dada pelas equações em (7.59) e as equações

$$\begin{aligned} p_1 &= \cos(Q_4) P_1 - \sin(Q_4) K \\ p_2 &= \sin(Q_4) P_1 + \cos(Q_4) K \\ p_3 &= \cos(Q_4) P_2 - \sin(Q_4) P_3 \\ p_4 &= \sin(Q_4) P_2 + \cos(Q_4) P_3, \end{aligned} \quad (7.62)$$

onde

$$K = \frac{P_4 - Q_2 P_3 + Q_3 P_2}{Q_1}.$$

Note que

$$P_4 = \frac{\partial W}{\partial Q_4} = q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_3 p_4 - q_4 p_3 \quad (7.63)$$

assim P_4 representa o momento angular conservado, e esta é a propriedade característica da transformação de coordenadas. A nova função Hamiltoniana que é simplesmente a função Hamiltoniana antiga nas novas coordenadas é

$$H = \frac{1}{2} \mu_1 (P_1^2 + K^2) + \frac{1}{2} \mu_2 (P_2^2 + P_3^2) + \frac{1}{2} \mu_3 \{ (P_1 + P_2)^2 + (P_3 + K)^2 \} - \omega P_4 - U. \quad (7.64)$$

Logo, H não contém Q_4 , e segue-se que P_4 permanece constante ao longo do movimento,

$$P_4 = \Gamma, \quad (7.65)$$

como já sabíamos. O sistema é assim reduzido efetivamente a um sistema com somente seis variáveis, a saber, $Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3$ e o Hamiltoniano fica da forma

$$H = \frac{1}{2} \mu_1 (P_1^2 + K^2) + \frac{1}{2} \mu_2 (P_2^2 + P_3^2) + \frac{1}{2} \mu_3 \{ (P_1 + P_2)^2 + (P_3 + K)^2 \} - U, \quad (7.66)$$

onde K é dado por

$$\frac{\Gamma - Q_2 P_3 + Q_3 P_2}{Q_1}.$$

Note que se o sistema das seis equações é integrável a variável restante Q_4 pode ser encontrada por meio de quadraturas pela equação

$$\dot{Q}_4 = \frac{\mu_1 K + \mu_3 (P_3 + K)}{Q_1} - \omega = \frac{\partial H}{\partial P_4}. \quad (7.67)$$

7.2.3 Equilíbrios

Para as posições temos

$$\begin{aligned} Q_1^0 &= l, & Q_2^0 &= \frac{1}{2}l, \\ Q_3^0 &= \frac{\sqrt{3}}{2}l, & Q_4^0 &= \Pi/3. \end{aligned} \quad (7.68)$$

Os respectivos momentos são

$$\begin{aligned} P_1^0 &= 0, & P_2^0 &= -m_2 \omega \frac{\sqrt{3}}{2}l, \\ P_3^0 &= \frac{1}{2}m_2 \omega l, & P_4^0 &= (m_1 + m_2) \omega l^2. \end{aligned} \quad (7.69)$$

7.3 O método de Jacobi

Nesta seção mostraremos uma outra forma de reduzirmos a sexta ordem as equações de movimento do problema de três corpos no plano.

Supondo que o movimento é tal que o centro de massa do sistema está em repouso, e o plano do movimento com $z = 0$. Com as notações da seção 7.1.1 no caso planar

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\mu}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2), \quad (7.70)$$

$$U = \frac{m_2 m_3}{r_1} + \frac{m_3 m_1}{r_2} + \frac{m_1 m_2}{r_3}, \quad (7.71)$$

onde

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \| -\alpha_1 \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2 = (-\alpha_1 x + \xi)^2 + (-\alpha_1 y + \eta)^2, \\ r_2^2 &= \| \alpha_2 \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2 = (\alpha_2 x + \xi)^2 + (\alpha_2 y + \eta)^2, \\ r_3^2 &= \| \mathbf{u} \|^2 = x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Cosideraremos que a rotação será em torno do eixo Oz com velocidade angular constante ω . Se, as coordenadas relativas aos eixos em rotação são, $\mathbf{u} = (q_1, q_2)$ e $\mathbf{v} = (q_3, q_4)$, temos

$$T = \frac{m}{2}[(\dot{q}_1 - \omega q_2)^2 + (\dot{q}_2 + \omega q_1)^2] + \frac{\mu}{2}[(\dot{q}_3 - \omega q_4)^2 + (\dot{q}_4 + \omega q_3)^2], \quad (7.73)$$

e as fórmulas para r_1, r_2, r_3 são inalteradas, como é imediato da geometria das novas variáveis, isto é,

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (-\alpha_1 q_1 + q_3)^2 + (-\alpha_1 q_2 + q_4)^2, \\ r_2^2 &= (\alpha_2 q_1 + q_3)^2 + (\alpha_2 q_2 + q_4)^2, \\ r_3^2 &= q_1^2 + q_2^2. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Para encontrar a função Hamiltoniana associada a estas novas variáveis, expressamos a expressão

$$\frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{\mu}{2}(\dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2) - \frac{m}{2}\omega^2(q_1^2 + q_2^2) - \frac{\mu}{2}\omega^2(q_3^2 + q_4^2) - U \quad (7.75)$$

em termos dos $p's$ e $q's$, onde definimos

$$\begin{aligned} p_1 &= m(\dot{q}_1 - \omega q_2), & p_2 &= m(\dot{q}_2 + \omega q_1) \\ p_3 &= \mu(\dot{q}_3 - \omega q_4), & p_4 &= \mu(\dot{q}_4 + \omega q_3), \end{aligned} \quad (7.76)$$

o qual nos dá a seguinte função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2\mu}(p_3^2 + p_4^2) - \omega(q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_3 p_4 - q_4 p_3) - U. \quad (7.77)$$

Agora a expressão

$$q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_3 p_4 - q_4 p_3 \quad (7.78)$$

é o valor do momento angular ao redor do centro de massa $\mathbf{R}$ como foi dado em (7.58), e verificamos facilmente das equações de Hamilton associadas a (7.77) que a expressão (7.78) permanece constante através do movimento. Faremos uso desta propriedade para reduzir o sistema relativo a (7.77) a um sistema de ordem 6. Uma técnica similar já foi usada na subseção 7.2.2 onde reduzimos de 8 para 6.

As componentes do vetor $\mathbf{u}$ relativa aos eixos rotatórios são (q_1, q_2) , e introduzimos coordenadas polares (Q_1, Q_4) tal que

$$\begin{aligned} q_1 &= \cos(Q_4)Q_1, \\ q_2 &= \sin(Q_4)Q_1. \end{aligned} \quad (7.79)$$

Denotando as componentes de $\mathbf{v}$ ao longo do sistema rotatório e perpendicular a $\mathbf{u}$ por (Q_2, Q_3) , tem-se

$$q_3 = \cos(Q_4)Q_2 - \sin(Q_4)Q_3 \quad (7.80)$$

$$q_4 = \cos(Q_4)Q_2 + \sin(Q_4)Q_3,$$

como é claro da figura abaixo.

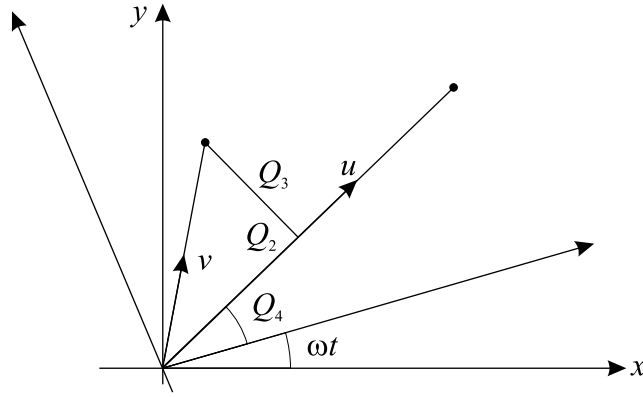


Figura 7.4: Interpretação das novas variáveis

Para encontrar a transformação de coordenadas procurada a qual é a transformação conseguida ao estender (7.79) e (7.80) tornando-a simplética ou canônica precisamos da função geradora

$$W = p_1 \cos(Q_4)Q_1 + p_2 \sin(Q_4)Q_1 + p_3 (\cos(Q_4)Q_2 - \sin(Q_4)Q_3) + p_4 (\cos(Q_4)Q_2 + \sin(Q_4)Q_3). \quad (7.81)$$

As equações definindo a transformação de coordenadas devem satisfazer

$$q_r = \frac{\partial W}{\partial p_r}, \quad P_r = \frac{\partial W}{\partial Q_r}, \quad (r = 1, 2, 3, 4), \quad (7.82)$$

das quais segue-se que as expressões explícitas da transformação é dada pelas equações em (7.79), (7.80) e as equações

$$\begin{aligned} p_1 &= \cos(Q_4)P_1 - \sin(Q_4)K \\ p_2 &= \sin(Q_4)P_1 + \cos(Q_4)K \\ p_3 &= \cos(Q_4)P_2 - \sin(Q_4)P_3 \\ p_4 &= \sin(Q_4)P_2 + \cos(Q_4)P_3, \end{aligned} \quad (7.83)$$

onde

$$K = \frac{P_4 - Q_2 P_3 + Q_3 P_2}{Q_1}.$$

Note que

$$P_4 = \frac{\partial W}{\partial Q_4} = q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_3 p_4 - q_4 p_3 \quad (7.84)$$

assim P_4 representa o momento angular conservado, e esta é a propriedade característica da transformação de coordenadas. A nova função Hamiltoniana que é simplesmente a função Hamiltoniana antiga nas novas coordenadas é

$$H = \frac{1}{2m}(P_1^2 + K^2) + \frac{1}{2\mu}(P_2^2 + P_3^2) - \omega P_4 - U. \quad (7.85)$$

Note que esta fórmula é mais simples do que aquela obtida na seção redução (7.2.2).

Agora,

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (-\alpha_1 q_1 + q_3)^2 + (-\alpha_1 q_2 + q_4)^2 = (-\alpha_1 Q_1 + Q_2)^2 + Q_3^2, \\ r_2^2 &= (\alpha_2 q_1 + q_3)^2 + (\alpha_2 q_2 + q_4)^2 = (\alpha_2 Q_1 + Q_2)^2 + Q_3^2, \\ r_3^2 &= q_1^2 + q_2^2 = Q_1^2, \end{aligned} \quad (7.86)$$

logo, H não contém Q_4 , e segue-se que P_4 permanece constante através do movimento,

$$P_4 = \Gamma, \quad (7.87)$$

como já sabíamos. O sistema é assim reduzido efetivamente a um sistema com somente seis variáveis, a saber, $Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3$ e o Hamiltoniano fica da forma

$$H = \frac{1}{2m}(P_1^2 + K^2) + \frac{1}{2\mu}(P_2^2 + P_3^2) - U, \quad (7.88)$$

onde K é dado por

$$\frac{\Gamma - Q_2 P_3 + Q_3 P_2}{Q_1}.$$

Note que se o sistema das seis equações tem sido integrado a variável restante Q_4 pode ser encontrada por meio de quadraturas pela equação

$$\dot{Q}_4 = \frac{1}{mQ_1^2}(\Gamma - Q_2 P_3 + Q_3 P_2) - \omega. \quad (7.89)$$

7.4 Aplicação do método de Jacobi

Uma aplicação do método de Jacobi descrito na seção 7.3 é a questão da existência de soluções de equilíbrio.

Note que da equação (7.89) se tal solução existe, devemos ter

$$\omega = \frac{K}{mQ_1}. \quad (7.90)$$

As equações de movimento do sistema (7.88) são

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_1 = \frac{1}{m}P_1, \\ \dot{Q}_2 = \frac{1}{\mu}P_2 + \frac{1}{m}\frac{KQ_3}{Q_1}, \\ \dot{Q}_3 = \frac{1}{\mu}P_3 - \frac{1}{m}\frac{KQ_2}{Q_1}, \\ \dot{P}_1 = \frac{1}{m}\frac{K^2}{Q_1} + \frac{\partial U}{\partial Q_1}, \\ \dot{P}_2 = \frac{1}{m}\frac{KP_3}{Q_1} + \frac{\partial U}{\partial Q_2}, \\ \dot{P}_3 = -\frac{1}{m}\frac{KP_2}{Q_1} + \frac{\partial U}{\partial Q_3}. \end{array} \right. \quad (7.91)$$

Para termos uma solução de equilíbrio o segundo membro da equação (7.91) devem ser todos nulos, assim usando (7.90) teremos

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = 0, \quad P_2 = -\mu\omega Q_3, \quad P_3 = \mu\omega Q_2, \\ mQ_1\omega^2 + \frac{\partial U}{\partial Q_1} = 0, \quad P_3\omega + \frac{\partial U}{\partial Q_2} = 0, \quad P_2\omega + \frac{\partial U}{\partial Q_3} = 0, \end{array} \right. \quad (7.92)$$

donde

$$mQ_1\omega^2 + \frac{\partial U}{\partial Q_1} = 0, \quad \mu Q_2\omega^2 + \frac{\partial U}{\partial Q_2} = 0, \quad \mu Q_3\omega^2 + \frac{\partial U}{\partial Q_3} = 0. \quad (7.93)$$

Portanto, as soluções de equilíbrio são os pontos (Q_1, Q_2, Q_3) onde a função

$$U + \frac{1}{2}(mQ_1^2 + \mu Q_2^2 + \mu Q_3^2)\omega^2 \quad (7.94)$$

tem valor estacionário.

Das equações (7.93) teremos

$$mQ_1\omega^2 - \left\{ \frac{m_2m_3}{r_1^3}\alpha_1(\alpha_1Q_1 - Q_2) + \frac{m_3m_1}{r_2^3}\alpha_2(\alpha_2Q_1 + Q_2) + \frac{m_1m_2}{r_3^3} \right\} = 0, \quad (7.95)$$

$$\mu Q_2\omega^2 - \left\{ \frac{m_2m_3}{r_1^3}(\alpha_1Q_1 - Q_2) + \frac{m_3m_1}{r_2^3}(\alpha_2Q_1 + Q_2) \right\} = 0, \quad (7.96)$$

e

$$\mu Q_3\omega^2 = m_3Q_3 \left(\frac{m_2}{r_1^3} + \frac{m_1}{r_2^3} \right). \quad (7.97)$$

Da equação (7.97) vemos que

$$\mu\omega^2 = m_3 \left(\frac{m_2}{r_1^3} + \frac{m_1}{r_2^3} \right), \quad (7.98)$$

ou

$$Q_3 = 0. \quad (7.99)$$

Suponhamos que (7.98) é mantido. Portanto, substituindo $\mu\omega^2$ no primeiro membro da equação (7.96), segue que

$$Q_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) = 0, \quad (7.100)$$

assim, desde que por (7.86) $Q_1 = r_3 \neq 0$, temos $r_1 = r_2$. Vamos supor que $r_1 = r_2 = l$, portanto, de (7.98), temos

$$\omega^2 = \frac{M}{l^3}. \quad (7.101)$$

Substituindo o valor de ω^2 no primeiro membro de (7.95) teremos

$$\frac{M}{l^3} = \frac{m_3}{l^3} + \frac{m_1 + m_2}{r^3}. \quad (7.102)$$

Portanto, $r_3 = l$, ou seja obtemos a solução de Lagrange como foi visto na seção 6.4.

Capítulo 8

Estabilidade linear das soluções de equilíbrio relativo

Neste capítulo estudaremos a *estabilidade linear* das soluções de equilíbrio relativo do problema dos três corpos que, sabemos, são de dois tipos: colinear ou equilátero. Por *estabilidade linear* queremos dizer que aproximamos o sistema de equações geral do problema por um sistema de equações lineares. Assim, as estimativas de estabilidade são feitas com base nos autovalores desse sistema linearizado. Provaremos que a configuração linear é sempre instável e a equilátera condicionalmente estável, i.e., estável dentro de certas condições apropriadas.

Para o estudo da estabilidade linear usaremos o seguinte argumento canônico da teoria de EDO para o caso particular de sistemas Hamiltonianos.

Agora, denotamos por q_i^0, p_i^0 as coordenadas da solução de equilíbrio da massa m_i . Desenvolvendo o Hamiltoniano associado H em série de Taylor em torno da solução de equilíbrio temos:

$$\begin{aligned} H &= H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) + H_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) + H_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) + \\ &(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0, \mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T \text{Hess} H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \mathbf{q} - \mathbf{q}_0, \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 + \dots \\ &= H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) + (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0, \mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T \text{Hess} H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0, \mathbf{p} - \mathbf{p}_0) + \dots \end{aligned} \tag{8.1}$$

Vamos supor que o sistema definido por H seja desviado do seu equilíbrio pela seguinte perturbação :

$$q_i = q_i^0 + u_i \quad (8.2)$$

$$p_i = p_i^0 + v_i$$

onde $i = 1, 2, \dots, 6$. e, além disso, u_i, v_i são pequenos desvios em torno da solução de equilíbrio.

A mudança de variáveis definida em (8.2) é uma transformação dita *simplética*, o que significa que ela preserva a estrutura hamiltoniana do sistema. Como estamos interessados no estudo da estabilidade de primeira ordem ou linear, então o procedimento a ser seguido é simplesmente substituir as novas variáveis em (8.1) e determinar explicitamente a parte linear a qual é dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

onde

$$A = J\text{Hess}H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0). \quad (8.4)$$

8.1 Estabilidade para o caso colinear

Dispomos as três massas sobre o eixo das abscissas ξ conforme ilustra a figura 8.1 e denotamos os valores dessas abscissas por ξ_1, ξ_2, ξ_3 para as massas m_1, m_2, m_3 , respectivamente, de modo que $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$. Ainda, denotamos por p_{ξ_i} a componente unidimensional da velocidade da i -ésima partícula, de modo que $\dot{\xi}_i = p_{\xi_i}$.

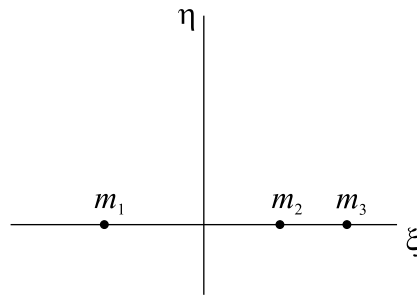


Figura 8.1: Configuração colinear

Usando as equações (3.24), observando que, de fato, apenas a primeira dessas equações será utilizada, de fato, o segundo membro da segunda equação será sempre nulo, pois $U_{2,i} = 0$, para $i = 1, 2, 3$, uma vez que as massas movimentam-se perpendicularmente ao vetor $\mathbf{e}_2$. Assim, para essa configuração colinear as equações do movimento tornam-se:

$$\ddot{\xi}_i = \omega^2 \xi_i + \frac{1}{m_i} U_{1,i}, \text{ para } i = 1, 2, 3. \quad (8.5)$$

Realizando a mudança de variáveis $\dot{\xi}_i = p_i$, podemos escrever (8.5) como o seguinte sistema de seis equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= p_{\xi_1} \\ \dot{\xi}_2 &= p_{\xi_2} \\ \dot{\xi}_3 &= p_{\xi_3} \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\dot{p}_{\xi_1} = \omega^2 \xi_1 + \frac{m_2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} + \frac{m_3}{(\xi_3 - \xi_1)^2}$$

$$\dot{p}_{\xi_2} = \omega^2 \xi_2 - \frac{m_1}{(\xi_2 - \xi_1)^2} + \frac{m_3}{(\xi_3 - \xi_2)^2}$$

$$\dot{p}_{\xi_3} = \omega^2 \xi_3 - \frac{m_1}{(\xi_3 - \xi_1)^2} - \frac{m_2}{(\xi_3 - \xi_2)^2}$$

cujas partes lineares são dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega^2 + \frac{2m_1}{(\xi_2 - \xi_1)^3} + \frac{2m_3}{(\xi_3 - \xi_1)^3} & -\frac{2m_2}{(\xi_2 - \xi_1)^3} & -\frac{2m_3}{(\xi_3 - \xi_1)^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2m_1}{(\xi_2 - \xi_1)^3} & \omega^2 + \frac{2m_1}{(\xi_2 - \xi_1)^3} + \frac{2m_3}{(\xi_3 - \xi_2)^3} & -\frac{2m_3}{(\xi_3 - \xi_2)^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2m_1}{(\xi_3 - \xi_1)^3} & -\frac{2m_2}{(\xi_3 - \xi_2)^3} & \omega^2 + \frac{2m_1}{(\xi_3 - \xi_1)^3} + \frac{2m_2}{(\xi_3 - \xi_2)^3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a qual está avaliada numa solução de equilíbrio colinear. Para facilitar o cálculo do polinômio característico faremos uso da seguinte identidade

$$\begin{pmatrix} C & D \\ -B & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -B - CD^{-1}C & -C \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

onde em nosso caso tem-se:

$$-C = -\lambda I, \quad D = I,$$

$$-B = \begin{pmatrix} \omega^2 + \frac{2m_1}{(\xi_2 - \xi_1)^3} + \frac{2m_3}{(\xi_3 - \xi_1)^3} & -\frac{2m_2}{(\xi_2 - \xi_1)^3} & -\frac{2m_3}{(\xi_3 - \xi_1)^3} \\ -\frac{2m_1}{(\xi_2 - \xi_1)^3} & \omega^2 + \frac{2m_1}{(\xi_2 - \xi_1)^3} + \frac{2m_3}{(\xi_3 - \xi_2)^3} & -\frac{2m_3}{(\xi_3 - \xi_2)^3} \\ -\frac{2m_1}{(\xi_3 - \xi_1)^3} & -\frac{2m_2}{(\xi_3 - \xi_2)^3} & \omega^2 + \frac{2m_1}{(\xi_3 - \xi_1)^3} + \frac{2m_2}{(\xi_3 - \xi_2)^3} \end{pmatrix}.$$

Logo o polinômio característico é dado pela expressão

$$p_A(\lambda) = -\det(\lambda^2 + B).$$

Usando álgebra elementar obtemos que o polinômio característico no caso colinear é dado por

$$p_A(\lambda) = (\lambda + \omega)(\lambda - \omega)(\lambda^4 + \alpha\lambda^2 + \beta),$$

onde

$$\alpha = -2 \left[\omega^2 + m_1 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + m_2 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{c^3} \right) + m_3 \left(\frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) \right] < 0$$

$$\beta = \omega^4 + 2m_1\omega^2 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + 2m_2\omega^2 \left(\frac{1}{c^3} + \frac{1}{b^3} \right) + 2m_3 \left(\frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) +$$

$$\frac{4m_1^2}{a^3b^3} + \frac{4m_2^2}{a^3b^3} + \frac{4m_3^2}{b^3c^3} +$$

$$4m_1m_2 \left(\frac{1}{a^3c^3} + \frac{1}{a^3b^3} \right) + 4m_1m_3 \left(\frac{1}{b^3c^3} + \frac{1}{a^3b^3} \right) + 4m_2m_3 \left(\frac{1}{a^3c^3} + \frac{1}{b^3c^3} \right) > 0,$$

pois $a = \xi_2 - \xi_1 > 0$ e $b = \xi_3 - \xi_1 > 0$ e $c = \xi_3 - \xi_2 > 0$. Portanto, existe o autovalor com parte real $\omega > 0$ da matriz A , assim a solução colinear é instável. A interpretação física desse fato matemático é que, se as massas estão alinhadas em equilíbrio, qualquer mínima perturbação fará com que se desalinhem e abandonem gradualmente o seu estado de equilíbrio.

Comentários:

- Desde que $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ o polinômio caraterístico possui duas raízes reais e quatro imaginárias puras.
- Verifica-se facilmente que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{2m_2}{a^3} + \frac{2m_3}{b^3} & -\frac{2m_2}{a^3} & -\frac{2m_3}{b^3} \\ -\frac{2m_1}{a^3} & \frac{2m_1}{a^3} + \frac{2m_3}{c^3} & -\frac{2m_3}{c^3} \\ -\frac{2m_1}{b^3} & -\frac{2m_2}{c^3} & \frac{2m_1}{b^3} + \frac{2m_2}{c^3} \end{pmatrix} = 0.$$

8.2 Caso eqüilátero

Nesta seção faremos o estudo da estabilidade linear, no caso planar, para as soluções eqüiláteras, usando as coordenadas relativas, as quais já foram estudadas na seção (3.12), mas considerando o referencial girante no caso planar, ou seja, trataremos com um sistema de doze equações diferenciais.

8.2.1 Obtenção do polinômio característico de grau 12

A função Hamiltoniana neste caso é dada pelo Hamiltoniano (7.50) na seção (7.2.1) desta forma o sistema de equações diferenciais ordinárias associado ao Hamiltoniano é dado por:

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 &= \mu_1 p_1 + \mu_3(p_1 + p_3 - p_5) + \omega q_2, & \dot{p}_1 &= \omega p_2 + U_{q_1} \\
 \dot{q}_2 &= \mu_1 p_2 + \mu_3(p_2 + p_4 - p_5) - \omega q_1, & \dot{p}_2 &= -\omega p_1 + U_{q_2} \\
 \dot{q}_3 &= \mu_2 p_3 + \mu_3(p_1 + p_3 - p_5) + \omega q_4, & \dot{p}_3 &= \omega p_4 + U_{q_3} \\
 \dot{q}_4 &= \mu_2 p_4 + \mu_3(p_2 + p_4 - p_6) - \omega q_3, & \dot{p}_4 &= -\omega p_3 + U_{q_4} \\
 \dot{q}_5 &= -\mu_3(p_1 + p_3 - p_5) + \omega q_6, & \dot{p}_5 &= \omega p_6 + U_{q_5} \\
 \dot{q}_6 &= -\mu_3(p_2 + p_4 - p_6) - \omega q_5, & \dot{p}_6 &= -\omega p_5 + U_{q_6}
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

O sistema linear avaliado na solução equilátera (6.38) no caso planar é :

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 &= \mu_1 p_1 + \mu_3(p_1 + p_3 - p_5) + \omega q_2, & \dot{p}_1 &= \omega p_2 + \sum_{j=1}^3 U_{q_1 q_j}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) q_j \\
 \dot{q}_2 &= \mu_1 p_2 + \mu_3(p_2 + p_4 - p_6) - \omega q_1, & \dot{p}_2 &= -\omega p_1 + \sum_{j=1}^3 U_{q_2 q_j}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) q_j \\
 \dot{q}_3 &= \mu_2 p_3 + \mu_3(p_1 + p_3 - p_5) + \omega q_4, & \dot{p}_3 &= \omega p_4 + \sum_{j=1}^3 U_{q_3 q_j}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) q_j \\
 \dot{q}_4 &= \mu_2 p_4 + \mu_3(p_2 + p_4 - p_6) - \omega q_3, & \dot{p}_4 &= -\omega p_3 + \sum_{j=1}^3 U_{q_4 q_j}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) q_j \\
 \dot{q}_5 &= -\mu_3(p_1 + p_3 - p_5) + \omega q_6, & \dot{p}_5 &= \omega p_6 + \sum_{j=1}^3 U_{q_5 q_j}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) q_j \\
 \dot{q}_6 &= -\mu_3(p_2 + p_4 - p_6) - \omega q_5, & \dot{p}_6 &= -\omega p_5 + \sum_{j=1}^3 U_{q_6 q_j}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) q_j
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

Para o processo de linearização do sistema (8.8) observe que

$$U_{q_i} = U_{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial q_i} + U_{r_2} \frac{\partial r_2}{\partial q_i} + U_{r_3} \frac{\partial r_3}{\partial q_i},$$

onde

$$\begin{aligned}
 U_{r_1} &= -m_2 m_3 \frac{1}{r_1^2} \\
 U_{r_2} &= -m_3 m_1 \frac{1}{r_2^2} \\
 U_{r_3} &= -m_1 m_2 \frac{1}{r_3^2} \\
 \frac{\partial r_1}{\partial q_j} &= 0, \quad j = 1, 2, 5, 6 \\
 \frac{\partial r_1}{\partial q_j} &= \frac{q_j}{r_1} \text{ para } j = 3, 4 \\
 \frac{\partial r_2}{\partial q_j} &= 0, \quad j = 3, 4, 5, 6 \\
 \frac{\partial r_2}{\partial q_j} &= \frac{q_j}{r_2} \text{ para } j = 1, 2 \\
 \frac{\partial r_3}{\partial q_j} &= 0, \quad j = 5, 6 \\
 \frac{\partial r_3}{\partial q_1} &= \frac{q_2 - q_3}{r_3}, \quad \frac{\partial r_3}{\partial q_2} = \frac{q_2 - q_4}{r_3} \\
 \frac{\partial r_3}{\partial q_3} &= -\frac{q_2 - q_3}{r_3}, \quad \frac{\partial r_3}{\partial q_4} = -\frac{q_2 - q_4}{r_3}
 \end{aligned} \tag{8.10}$$

analogamente calculamos as derivadas parciais de segunda ordem, donde obtemos

$$\begin{aligned}
 U_{q_1 q_1}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) &= \frac{1}{4} \frac{m_1 m_2 m_3}{l^3} \left[-\frac{1}{m_2} + 8 \frac{1}{m_3} \right] = -\frac{\theta}{4} [\mu_2 - 8\mu_3] \\
 U_{q_1 q_2}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) &= \frac{\theta}{4} 3\sqrt{3} \mu_2 \\
 U_{q_1 q_3}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) &= -\frac{\theta}{4} [8\mu_3] \\
 U_{q_1 q_j}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) &= 0, \quad j = 5, 6 \\
 U_{q_2 q_2}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) &= -\frac{\theta}{4} [-4\mu_3 + 5\mu_2] \\
 U_{q_2 q_j}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) &= 0, \quad j = 1, 3, 4, 5, 6 \\
 U_{q_3 q_3}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) &= \frac{\theta}{4} [-\mu_1 + 8\mu_3] \\
 U_{q_3 q_j}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) &= 0, \quad j = 4, 5, 6 \\
 U_{q_4 q_4}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) &= \frac{\theta}{4} [-4\mu_3 + 5\mu_1] \\
 U_{q_i q_j}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) &= 0, \quad i = 5, 6, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

onde $\theta = \frac{m_1 m_2 m_3}{l^3}$.

Note que as derivadas $H_{\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1} = H_{\mathbf{p}_3 \mathbf{q}_4} = H_{\mathbf{p}_5 \mathbf{q}_6} = +\omega$, $H_{\mathbf{p}_4 \mathbf{q}_3} = H_{\mathbf{p}_2 \mathbf{q}_1} = H_{\mathbf{p}_5 \mathbf{q}_3} = -\omega$ os outros termos $H_{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}$ são iguais a 0, analogamente para $H_{\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j}$ aparecem os termos μ_k , μ_r e termos $\mu_k + \mu_r$ para certos $r, k = 1, 2, 3$.

Agora, usando a notação matricial, o sistema linearizado de (8.8) pode ser representado de maneira condensada como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \tag{8.12}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} M & N \\ H & K \end{pmatrix}$$

com

$$M = K = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_3 & 0 & \mu_3 & 0 & -\mu_3 & 0 \\ 0 & \mu_1 + \mu_3 & 0 & \mu_3 & 0 & -\mu_3 \\ \mu_3 & 0 & \mu_2 + \mu_3 & 0 & -\mu_3 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 0 & \mu_2 + \mu_3 & 0 & -\mu_3 \\ -\mu_3 & 0 & -\mu_3 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & -\mu_3 & 0 & -\mu_3 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{\theta}{4}(\mu_2 - 8\mu_3) & \frac{3\theta}{4}\sqrt{3}\mu_2 & -2\theta\mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3\theta}{4}\sqrt{3}\mu_2 & -\frac{\theta}{4}(4\mu_3 - 5\mu_2) & 0 & \theta\mu_3 & 0 & 0 \\ -2\theta\mu_3 & 0 & -\frac{\theta}{4}(\mu_1 - 8\mu_3) & -\frac{3\theta}{4}\sqrt{3}\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta\mu_3 & -\frac{3\theta}{4}\sqrt{3}\mu_1 & -\frac{\theta}{4}(4\mu_3 - 5\mu_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando a forma simétrica das colunas 5, 6, 11 e 12 desta matriz segue-se que o polinômio característico satisfaz

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 + \omega^2)^2 \det \begin{pmatrix} -C & D \\ -B & -C \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

onde

$$B = - \begin{pmatrix} -\frac{\theta}{4}(\mu_2 - 8\mu_3) & \frac{3\theta}{4}\sqrt{3}\mu_2 & -2\theta\mu_3 & 0 \\ \frac{3\theta}{4}\sqrt{3}\mu_2 & -\frac{\theta}{4}(4\mu_3 - 5\mu_2) & 0 & \theta\mu_3 \\ -2\theta\mu_3 & 0 & -\frac{\theta}{4}(\mu_1 - 8\mu_3) & -\frac{3\theta}{4}\sqrt{3}\mu_1 \\ 0 & \theta\mu_3 & -\frac{3\theta}{4}\sqrt{3}\mu_1 & -\frac{\theta}{4}(4\mu_3 - 5\mu_1) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\omega \\ 0 & 0 & \omega & \lambda \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_3 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & \mu_1 + \mu_3 & 0 & \mu_3 \\ \mu_3 & 0 & \mu_2 + \mu_3 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 0 & \mu_2 + \mu_3 \end{pmatrix}.$$

Para o cálculo do determinante de 8×8 em (8.13) observamos primeiramente que

$$\begin{pmatrix} -C & D \\ -B & -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -B - CD^{-1}C & -C \end{pmatrix},$$

e verifica-se que

$$D^{-1} = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} \mu_2 + \mu_3 & 0 & -\mu_3 & 0 \\ 0 & \mu_2 + \mu_3 & 0 & -\mu_3 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 + \mu_3 & 0 \\ 0 & -\mu_3 & 0 & \mu_1 + \mu_3 \end{pmatrix},$$

onde $\sigma = \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_2$. Logo

$$DCD^{-1}C = \begin{pmatrix} \lambda^2 - \omega^2 & -2\lambda\omega & 0 & 0 \\ 2\lambda\omega & \lambda^2 - \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - \omega^2 & 2\lambda\omega \\ 0 & 0 & 2\lambda\omega & \lambda^2 - \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Após vários cálculos e considerações algébricas pode-se obter finalmente o seguinte polinômio característico de grau doze, associado à matriz $\mathbf{A}$:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \omega^2)^3(\lambda^4 + \omega^2\lambda^2 + k\omega^4) \quad (8.14)$$

onde

$$k = \frac{27}{4} \frac{m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}. \quad (8.15)$$

Agora, se o polinômio (8.14) possui apenas autovalores imaginários puro simples e podemos deduzir que a solução de equilíbrio possui ao menos estabilidade de primeira ordem. Não podemos fazer esta dedução, devido ao fator λ^2 , e da repetição do fator $(\lambda^2 + \omega^2)$, no primeiro membro de (8.14).

A seguir, utilizaremos os métodos desenvolvidos nas seções (7.2.1) e (7.2.2) para reduzirmos o grau do polinômio característico de 12 para 8 e depois ao grau 6.

8.2.2 Obtenção do polinômio característico de grau 8

Para isso, consideramos o Hamiltoniano definido em (7.57) no qual não aparecem as variáveis q_5, q_6, p_5 e p_6 . Procedendo de maneira análoga a subseção (8.2.1), onde o sistema linear agora é dado pela matriz

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{M} & \tilde{N} \\ \tilde{H} & \tilde{K} \end{pmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{M} = \tilde{K} &= \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{N} &= \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_3 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & \mu_1 + \mu_3 & 0 & \mu_3 \\ \mu_3 & 0 & \mu_2 + \mu_3 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 0 & \mu_2 + \mu_3 \end{pmatrix} \\ \tilde{H} &= \begin{pmatrix} -\frac{\theta}{4}(\mu_2 - 8\mu_3) & \frac{3\theta}{4}\sqrt{3}\mu_2 & -2\theta\mu_3 & 0 \\ \frac{3\theta}{4}\sqrt{3}\mu_2 & -\frac{\theta}{4}(4\mu_3 - 5\mu_2) & 0 & \theta\mu_3 \\ -2\theta\mu_3 & 0 & -\frac{\theta}{4}(\mu_1 - 8\mu_3) & -\frac{3\theta}{4}\sqrt{3}\mu_1 \\ 0 & \theta\mu_3 & -\frac{3\theta}{4}\sqrt{3}\mu_1 & -\frac{\theta}{4}(4\mu_3 - 5\mu_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Segue-se que o polinômio característico satisfaz

$$p_{\tilde{A}}(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \omega^2)(\lambda^4 + \omega^2\lambda^2 + k\omega^4) = 0 \quad (8.16)$$

onde k é dado pela mesma expressão (8.15).

Um ponto importante, é que não podemos esperar estabilidade se a perturbação for tal que o centro de gravidade não continue em repouso, portanto, consideraremos apenas as perturbações que o centro de massa permaneça parado. Para tal perturbação podemos fazer uma redução a sexta ordem como na seção (7.2.2), para o Hamiltoniano (7.66), avaliando em (7.68) e (7.69) temos que

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mu_1\omega^2 m_1^2 \left(\frac{l-1}{l}\right) + \mu_3\omega^2 \left(\frac{2m_1^2 l - m_2 m_1 - 2m_1^2}{l}\right) & \mu_3\omega^2 m_2(m_1 + m_2) & \mu_3 m_2 \omega^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{2m_1(1-l) - m_2 l}{2}\right] \\ \frac{(2\mu_1 + \mu_3)m_1 m_2 \omega^2}{2} + \frac{\mu_3 \omega(m_2^2 + 2m_1)}{4} & \frac{(\mu_1 + \mu_3)m_2 \omega^2}{4} & \frac{(\mu_1 + \mu_3)m_2 \omega^2 \sqrt{3}}{4} \\ \mu_1 m_1 m_2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \mu_3 m_2 \omega^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{m_2 + 2m_1}{2}\right) & -\frac{(\mu_1 + \mu_2)m_2^2 \omega^2}{2} & \frac{3}{4}(\mu_1 + \mu_3)m_2^2 \omega^2 \end{pmatrix},$$

onde $\mathbf{H}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{H}} - \mathbf{U}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}$.

Analogamente temos

$$\mathbf{H}_{\mathbf{P}\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\mu_1 m_1 \omega \frac{\sqrt{3}}{2} & -(\mu_1 + \mu_3)m_2 \omega \frac{\sqrt{3}}{4} & (\mu_1 + \mu_3)\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + m_1 \omega\right) \\ \mu_3 \omega \left[\frac{m_1 l}{2} + \frac{2m_1 + m_2}{4}\right] & \frac{\mu_3 \omega [m_2(\sqrt{3}-2) + 4m_1]}{4} & -\mu_3 m_2 \omega \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

e

$$\mathbf{H}_{\mathbf{P}\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 & \mu_3 & 0 \\ \mu_3 & \mu_2 + \frac{3(\mu_1 + \mu_3)}{4} & \frac{\mu_3(4\sqrt{3}-1)}{4} \\ 0 & \frac{3}{8} & \mu_2 + \mu_3 - \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Usando algebra de matrizes temos o seguinte polinômio

$$p_{\tilde{A}}(\lambda) = (\lambda^2 + \omega^2)(\lambda^4 + \omega^2\lambda^2 + k\omega^4) = 0 \quad (8.17)$$

onde k é dado por (8.15).

8.3 Análise do polinômio característico

Considerando o polinômio característico dado por:

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 + \omega^2)(\lambda^4 + \omega^2\lambda + k\omega^4),$$

onde $k = \frac{27}{4} \frac{m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} > 0$, e as raízes satisfazem a relação:

$$\lambda = \pm i\omega, \quad \lambda = \pm \frac{\sqrt{2}\omega}{2} \sqrt{[1 \pm \sqrt{1-4k}]}. \quad (8.18)$$

- Note que se existisse algum autovalor nulo teríamos: $-1 \pm \sqrt{1-4k} = 0$, donde $-1 + \sqrt{1-4k}$ se, e somente se, $k = 0$ uma vez que $-1 + \sqrt{1-4k} < 0$ o qual é absurdo pois as massas são positivas. Portanto, não existe nenhum autovalor nulo.
- Uma condição necessária para termos estabilidade linear é que todos os autovalores sejam imaginários puros. Para isto as expressões

$$-1 + \omega^2 \sqrt{1-4k} \quad \text{e} \quad -1 - \omega^2 \sqrt{1-4k}$$

devem ser ambas reais e negativas, ou seja, devemos ter

$$1 - 4k \geq 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad k \leq \frac{1}{4}. \quad (8.19)$$

Neste caso os autovalores são dados por:

$$\lambda = \pm i\omega, \quad \lambda = \pm i \frac{\omega \sqrt{2}}{2} [1 \mp \sqrt{1-4k}]^{1/2} \quad (8.20)$$

ou seja,

$$\pm i\omega, \quad \pm i\omega_1, \quad \pm i\omega_2 \quad (8.21)$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\omega}{2} [1 - \sqrt{1-4k}]^{1/2} \\ \omega_2 &= \frac{\omega}{2} [1 + \sqrt{1-4k}]^{1/2} \end{aligned} \quad (8.22)$$

- Para $0 < k < \frac{1}{4}$ tem-se que todos os autovalores são distintos. De fato, observe que $\omega_1 \neq \omega_2$. Portanto, a parte linear define uma matriz diagonalizável com autovalores imaginários puros logo, neste caso temos estabilidade linear.
- No caso limite, isto é, $k = \frac{1}{4}$ tem-se que

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{\omega}{\sqrt{2}} = \omega \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto, neste caso só teremos estabilidade linear se a matriz A for diagonalizável ou equivalentemente se o autoespaço associado ao autovalor ω_1 (ou ω_2) tiver dimensão dois.

Comentário. 1) É importante observar que se consideramos os termos não lineares no Hamiltoniano que define o problema dos três corpos, o caráter estável da parte linear que é diagonalizável no caso em que todos os autovalores são imaginários puros, isto é, $0 < k < \frac{1}{4}$ não implica estabilidade de Liapunov, pois os termos não lineares poderiam tornar a solução de equilíbrio tanto estável como instável no sentido de Liapunov.

2) Se no caso $k = \frac{1}{4}$ tivéssemos que a matriz linear é diagonalizável, logo estável, também nada podemos afirmar sobre a estabilidade no sentido de Liapunov considerando o Hamiltoniano completo, pois os termos não lineares poderiam tornar a solução de equilíbrio tanto estável como instável no sentido de Liapunov.

3) Se no caso $k = \frac{1}{4}$ tivéssemos que a matriz linear não é diagonalizável, logo instável, também nada podemos afirmar sobre a estabilidade no sentido de Liapunov considerando o Hamiltoniano completo, pois os termos não lineares poderiam tornar a solução de equilíbrio tanto estável como instável no sentido de Liapunov.

3) No caso $k > \frac{1}{4}$ temos que existe algum autovalor com parte real positiva, logo a solução de equilíbrio é instável tanto linearmente como quando adicionamos os termos não lineares. Ou seja, neste caso temos instabilidade no sentido de Liapunov.

8.4 Interpretação geométrica das condições de estabilidade

Nesta seção daremos uma interpretação geométrica para as condições de estabilidade para as soluções Lagrangeanas.

Vimos na seção (8.3) que a condição de estabilidade linear (nas massas) para as soluções equiláteras no problema geral dos três corpos deve obedecer a relação

$$k = \frac{27}{4} \frac{m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} < \frac{1}{4}, \quad (8.23)$$

isto é,

$$\frac{(m_1 + m_2 + m_3)^2}{m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2} > 27. \quad (8.24)$$

A seguir mostraremos que existe uma região de valores m_1, m_2, m_3 para os quais as condições necessárias para a estabilidade não são satisfeitas. Consideremos em (8.24)

a relação de igualdade, isto é,

$$\frac{(m_1 + m_2 + m_3)^2}{m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2} = 27, \quad (8.25)$$

que define no espaço (m_1, m_2, m_3) a fronteira da referida região.

A superfície em (8.25) admite uma interpretação geométrica simples, se abrimos mão de sua estrutura no espaço (m_1, m_2, m_3) e fazemos uso das seguintes considerações.

Note que cada conjunto de valores (m_1, m_2, m_3) determina de maneira única a posição do centro de massa do triângulo e, conseqüentemente, cada ponto do espaço (m_1, m_2, m_3) pertencente à superfície (8.25) corresponderá, univocamente, a um ponto situado no plano do triângulo. Vamos provar que o lugar geométrico de todos estes pontos é uma circunferência, cujo centro coincide com o centro geométrico do triângulo m_1, m_2, m_3 (isto é, o ponto de interseção de suas alturas).

Sejam $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ os raios-vetores das massas m_1, m_2, m_3 , respectivamente, considerados a partir do centro geométrico O do triângulo m_1, m_2, m_3 (veja figura abaixo).

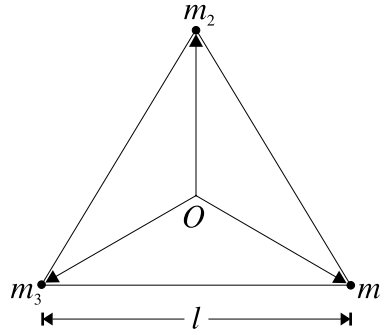


Figura 8.2: Centro geométrico do triângulo

Sendo l o lado do triângulo temos que

$$\|\mathbf{r}_1\| = \|\mathbf{r}_2\| = \|\mathbf{r}_3\| = \frac{l}{\sqrt{3}}. \quad (8.26)$$

Além disso,

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = \frac{\cos\theta}{\|\mathbf{r}_i\| \|\mathbf{r}_j\|} = \frac{-1/2}{\|\mathbf{r}_1\|^2} = -\frac{l^2}{6}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (8.27)$$

Em lugar das massas m_1, m_2, m_3 introduzamos as massas adimensionais

$$\mu_i = \frac{m_i}{M} \quad (8.28)$$

de modo que,

$$\sum_{i=1}^3 \mu_i = 1. \quad (8.29)$$

Fazendo as respectivas substituições podemos reescrever equação (8.25) sob a forma

$$3(\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3) = \frac{1}{9}. \quad (8.30)$$

Se o ponto $\mathbf{c}$ é o centro de massa dos três corpos m_1, m_2, m_3 , então para o seu raio-vetor $\mathbf{r}_c$, em virtude de (8.29) temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c &= \text{centro de massa} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3}{M} \\ &= m\mu_1\mathbf{r}_1 + m\mu_2\mathbf{r}_2 + m\mu_3\mathbf{r}_3, \end{aligned}$$

donde, em conformidade com (8.26) e (8.27), temos $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = 1 - 2(\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3)$ e assim

$$\|\mathbf{r}_c\|^2 = \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{r}_c = \frac{l^2}{3} \left[\sum_{i=1}^3 \mu_i^2 - (\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3) \right].$$

Levando em consideração (8.29) e (8.30), após transformações elementares, obtemos

$$\|\mathbf{r}_c\| = \frac{l}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{8}{3}}, \quad (8.31)$$

isto é, sob o preenchimento da condição (8.30), os vetores $\mathbf{r}_c$ do hodógrafo realmente estão numa circunferência cujo raio é fixo.

Por comparação de (8.23) e (8.31) é fácil ver que as condições necessárias para estabilidade linear são satisfeitas quando o centro de massa dos três corpos está fora da circunferência mencionada (as regiões achuriadas da figura 8.4) e não são satisfeitas quando o centro de massa está dentro dela.

Neste caso verifica-se a razão

$$\frac{\|\mathbf{r}_c\|}{\|\mathbf{r}_{max}\|} = \frac{8}{\sqrt{3}} = 0.943... \sim 1$$

onde $\|\mathbf{r}_{max}\| = \frac{a}{\sqrt{3}} = \|\mathbf{r}_j\|$, isto é, a fronteira da região de preenchimento das condições necessárias para a estabilidade linear aproxima-se muito dos vértices do triângulo, donde se segue a conclusão de que as condições necessárias para a estabilidade linear são satisfeitas somente quando uma das massas é muito grande relativamente às outras duas.

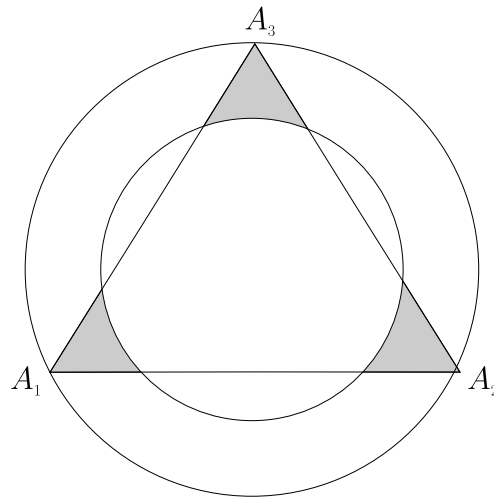


Figura 8.3: Interpretação geométrica da condição de estabilidade

Observemos que a interpretação examinada inclui o caso do problema restrito dos três corpos quando a massa de um dos três corpos é desprezivelmente pequena em relação às massas dos outros dois. Evidentemente, neste caso, o centro de massa deve estar sobre a reta que une as duas massas finitas, e portanto, a fronteira da região de estabilidade linear é formada pelos pontos de interseção da circunferência (8.31) com a reta mencionada.

Capítulo 9

Existência de soluções periódicas

Neste capítulo daremos alguns resultados sobre a existência de soluções periódicas para sistemas Hamiltonianos. Em particular para o problema dos Três corpos mostraremos que as órbitas circulares do problema de Kepler podem ser continuadas para o problema dos três corpos (planar), e também que existem famílias de soluções periódicas do problema restrito, que dependem de um parâmetro. Finalmente Mostraremos que algumas soluções periódicas do problema restrito podem ser continuadas para o problema geral dos três corpos.

9.1 Soluções periódicas que preservam a configuração inicial

Já vimos no capítulo 6 seção 6.4 que o problema dos três corpos possui exatamente 5 soluções de equilíbrio relativo, e pelo teorema 44 estas são planares. Desde que estas soluções são da forma

$$\mathbf{r}_i(t) = (\exp i\omega t)\mathbf{r}_i^0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.1)$$

onde ω é a velocidade angular e $\mathbf{r}_i^0$ é uma configuração central (colinear ou equilátera), estas soluções são $\frac{2\pi}{\omega}$ -periódicas, do problema dos três corpos bem particulares já que em cada instante a configuração é semelhante a uma configuração colinear ou equilátera (como mostra figura 6.1).

9.2 Soluções de forma fixa

Os triângulos equiláteros que são soluções de Lagrange, são invariantes tanto em tamanho como em forma. Lagrange também considerou a seguinte questão: Existem soluções em que as três partículas movem-se tal que a forma do triângulo é invariante, mas seu tamanho varia?

Para construirmos tais soluções, vamos utilizar números complexos. Sejam ξ_k, η_k as coordenadas do corpo de massa m_k e consideremos o número complexo

$$\varpi_k = \xi_k + i\eta_k = c_k q, \quad k = 1, 2, 3. \quad (9.2)$$

Onde os c 's são números complexos constantes distintos, e q é uma função complexa da variável t .

Queremos determinar uma função $q(t)$ e constantes complexas c_1, c_2, c_3 de modo que (9.2) seja uma solução do problema dos três corpos.

Como

$$r_{kl} = |\varpi_k - \varpi_l| = |c_k - c_l||q(t)|,$$

as equações do movimento podem ser escritas na forma

$$c_k \ddot{q} = \frac{q}{|q|^3} \sum_{l \neq k} m_l \frac{c_l - c_k}{|c_l - c_k|^3}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (9.3)$$

Desde que nem todos os c_k são nulos, segue que a função $\ddot{q}q^{-1}|q|^2$ é constante, seja $-\mu$ o valor dessa função, assim, uma solução para o sistema (9.2) é uma solução do sistema formado pela equação diferencial em q

$$\ddot{q} = -\frac{\mu}{|q|^3} q \quad (9.4)$$

e pelas equações

$$-c_k \mu = \sum_{l \neq k} m_l \frac{c_l - c_k}{|c_l - c_k|^3}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (9.5)$$

Note que a equação (9.4) para $\mu > 0$, descreve o movimento em um campo de força central Newtoniano em torno da origem, sabemos que as soluções, $q = q(t)$ são cônicas cujo foco é a origem. Portanto, dado um número complexo c , a função $\varpi(t) = cq(t)$ descreve uma cônica semelhante a anterior e com *eixo – maior* passando pelo ponto c .

Assim, se c_1, c_2, c_3 é uma solução do sistema (9.5) e $q(t)$ é uma solução da equação diferencial (9.4), tem-se que (9.2) define uma solução do problema dos três corpos, onde cada partícula descreve uma cônica com mesma excentricidade de $q(t)$.

Com isso, as soluções dadas por (9.2) tem a propriedade de que o triângulo formado pelas três partículas permanece semelhante a configuração inicial ao longo do movimento, e as cônicas descritas por elas possuem todas a mesma excentricidade. se as cônicas são elipses o movimento é periódico. Quando $q(t) = e^{i\omega t}$, temos as soluções de equilíbrio relativo, já estudadas na seção 6.4.

9.3 Continuação de soluções periódicas do problema restrito para o problema geral des três corpos

Nesta seção mostraremos que as órbitas elementares obtidas nas seções (C.2), (C.3) e (C.4) podem ser continuadas no problema geral dos três corpos para uma das três massas pequena.

Teorema 46 (Hadjidemetriou). *Todas as soluções periódicas elementares do problema restrito planar dos três corpos cujo período não é múltiplo de 2π podem ser continuadas no problema geral dos três corpos com uma massa pequena.*

Antes de demonstrarmos este teorema faremos algumas considerações.

Consideremos o Hamiltoniano (3.26) no caso planar e $m_3 = \epsilon^2$, teremos que este Hamiltoniano pode ser escrito da seguinte maneira

$$H_3 = \frac{\|\mathbf{p}_{\xi_3}\|^2}{2\epsilon^2} - \xi_3 \mathbf{K} \mathbf{p}_{\xi_3} - \sum_{i=1}^2 \frac{\epsilon^2 m_i}{\|\xi_i - \xi_3\|} + H_2, \quad (9.6)$$

onde H_2 representa o Hamiltoniano do problema dos dois corpos em coordenadas giratórias. Observe que ϵ mede o quão é pequena uma das massas e que órbitas fechadas das partículas finitas são circulares. Uma solução circular do problema dos dois corpos em coordenadas giratórias é um ponto crítico de H_2 . Portanto, seja $\mathbf{Z}^* = (a_1, a_2, b_1, b_2)$ um ponto crítico, pelo Teorema de Taylor, temos

$$H_2(\mathbf{Z}) = H_2(\mathbf{Z}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^*)^T \mathbf{S}(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^*) + O(\|\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^*\|^3), \quad (9.7)$$

onde $\mathbf{S}$ representa a Hessiana de H_2 calculada em $\mathbf{Z}^*$. Fazendo a mudança de coordenadas $\mathbf{Z} - \mathbf{Z} = \epsilon \mathbf{v}$, $\xi_3 = \tilde{\xi}$ e $p_{\xi_3} = \epsilon^3 \tilde{\eta}$, note que esta mudança é $\frac{1}{\epsilon^2}$ -simplética. Assim, o Hamiltoniano (9.6), será reescrito como

$$H_3 = G + \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{S} \mathbf{v} + O(\epsilon), \quad (9.8)$$

onde

$$G = \frac{\|\tilde{\eta}\|^2}{2} - \tilde{\xi}^T \mathbf{K} \tilde{\eta} - \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{\|\tilde{\xi} - \mathbf{a}_i\|}, \quad (9.9)$$

se considerarmos $m_1 = \mu$, $m_2 = 1 - \mu$, $\mathbf{a}_1 = (1 - \mu, 0)$ e $\mathbf{a}_2 = (-\mu, 0)$, G é simplesmente o Hamiltoniano do problema restrito. Note que o termo $\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{S} \mathbf{v}$ é simplesmente a linearização do problema dos dois corpos em torno das soluções circulares do problema dos dois corpos em coordenadas giratórias. Portanto, até ordem ϵ o Hamiltoniano (9.6) se desacopla no Hamiltoniano do problema restrito e no Hamiltoniano linearizado em torno da solução circular. Sejam $\mathbf{V} = (q_1, q_2, p_1, p_2)$, $M = \epsilon^3 + m_1 + m_2$, $\xi_i = \mathbf{a}_i - \epsilon q_i$, e $\mathbf{p}_{\xi_i} = m_i \mathbf{K} \mathbf{a}_i - \epsilon \mathbf{p}_i$. Então temos que o centro de massa, o momento linear e o momento angular nestas coordenadas são dados por

$$\mathbf{R} = \{\epsilon^2 \tilde{\xi} - \epsilon(m_1 q_1 + m_2 q_2)\} / M, \quad (9.10)$$

$$\mathbf{L} = \epsilon^2 \tilde{\eta} - \epsilon(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad (9.11)$$

$$\mathbf{J} = \epsilon^2 \tilde{\xi}^T \mathbf{K} \tilde{\eta} - (\mathbf{a}_1 - \epsilon \mathbf{q}_1)^T \mathbf{K} (m_1 \mathbf{K} \mathbf{a}_1 + \epsilon \mathbf{p}_1) - (\mathbf{a}_2 - \epsilon \mathbf{q}_2)^T \mathbf{K} (m_2 \mathbf{K} \mathbf{a}_2 + \epsilon \mathbf{p}_2). \quad (9.12)$$

Observe que quando $\epsilon = 0$ as equações (9.10), (9.11) e (9.12) dependem apenas das variáveis do problema dos dois corpos, (q_1, q_2, p_1, p_2) . Portanto, temos reduzido o problema a o problema com dois corpos. Usando as coordenadas de Jacobi definidas na seção (7.1.1) para dois corpos com $m_1 = \mu$ e $m_2 = 1 - \mu$, sendo $\nu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = (1 - \mu)\mu$, então o Hamiltoniano do problema dos dois corpos será

$$T = \frac{\|\beta\|^2}{2\nu} - \alpha^T \mathbf{K} - \frac{\nu}{\|\alpha\|}. \quad (9.13)$$

É importante notar que β e α representam a velocidade, a distância entre as partículas e foram escolhidas por conveniência. Agora em coordenadas polares temos

$$H = \frac{1}{2\nu} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \Theta - \frac{\nu}{r}. \quad (9.14)$$

E as equações do movimento são

$$\dot{r} = \frac{R}{\nu}, \quad \dot{R} = \frac{\Theta^2}{\nu r^3} - \frac{\nu}{r^2}, \quad \dot{\theta} = \frac{\Theta}{\nu r^2} - 1, \quad \dot{\Theta} = 0. \quad (9.15)$$

Note que Θ é uma integral, sendo a distância entre os primários igual a 1, então o equilíbrio relativo (solução circular) deve ter $r = 1$, portanto $\Theta = \nu$. O sistema linearizado em torno desta solução possui a forma

$$\begin{cases} \dot{r} &= \frac{R}{\nu} \\ \dot{R} &= -\nu r. \end{cases} \quad (9.16)$$

Observe que o sistema (9.16) é equivalente a

$$\ddot{r} + r = 0, \quad (9.17)$$

que é simplesmente o oscilador harmônico cuja frequência é igual a 1, e o Hamiltoniano é dado por

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{\nu} + \nu r^2 \right).$$

Assim, quando $\epsilon = 0$ o Hamiltoniano do problema dos três corpos é

$$H_R = G + S. \quad (9.18)$$

Agora vamos a demonstração do teorema:

Demonstração. Seja $\xi = \phi(t)$, $\eta = \psi(t)$ solução T -periódica do problema restrito com multiplicadores 1, 1, τ e τ^{-1} . Vamos supor que $\tau \neq 1$ e $T \neq 2k\pi$, para k inteiro. Assim, $\xi = \phi(t)$, $\eta = \psi(t)$, $r = 0$, $R = 0$ é uma solução T -periódica do problema dos três corpos quando $\epsilon = 0$. Os multiplicadores desta solução são 1, 1, τ , τ^{-1} e $\exp(\pm iT)$. Como T não é múltiplo de 2π , então $\exp(\pm iT) \neq 1$, logo esta solução é elementar. Portanto, pelo teorema 71 esta solução pode ser continuada no problema geral com $\epsilon \neq 0$, mas pequeno. ■

Capítulo 10

Conjectura de Saari para o problema dos três corpos

Em um sistema dinâmico cujo espaço de fase não é compacto, é natural a investigação de soluções limitadas. No problema dos $N - \text{corpos}$, onde surgem espaços de fase não compactos que são, os espaços das colisões e o espaço das soluções que escapam para infinito. Se considerarmos as colisões a medida natural de limitação é o momento de inércia $I(q) = \sum_{i=1}^N m_i q_i^2$, onde q_i é a posição da i -ésima partícula.

Uma série de artigos da década de 70 e 80, Don Saari investigou a limitação das soluções do problema de $N - \text{corpos}$. Em um desses artigos ele provou que se uma solução tem energia potencial constante para um intervalo finito de tempo, então ela possui energia potencial e momento de inércia constante para todo tempo. No mesmo artigo ele afirma: *qualquer solução de equilíbrio relativo serve como exemplo para o movimento desse tipo [ou seja, momento de inércia constante]. O autor ainda conjectura que qualquer solução do tipo acima é uma solução de equilíbrio relativo.*

A solução de equilíbrio relativo claramente tem momento de Inércia constante. Como as soluções de equilíbrio relativo não são completamente entendidas (apenas são conhecidas para o problema dos três corpos, ou o problema dos quatro corpos com massas iguais), mas são as mais conhecidas do problema do $N - \text{corpos}$. Portanto, a conjectura retrata com elegante simplicidade dois aspectos importantes das soluções do problema dos $N - \text{corpos}$:

Todas as soluções do problema dos N – corpos com momento de inércia constante são equilíbrio relativo

Esse capítulo tem como objetivo provar a conjectura de Saari para o problema planar dos três corpos com massas iguais.

Teorema 47. *Para três corpos com massas iguais, as soluções do problema planar do três corpos que tem momento de inércia constante, são as soluções de equilíbrio relativo.*

A prova é dada em três estágios. Primeiro, na seção 10.1 geramos uma série de equações que são consequência das condições que uma solução com momento de inércia deve satisfazer. Na seção 10.3 usamos as equações obtidas em 10.1 para reduzirmos o problema a encontrarmos raízes de funções de varias variáveis reais. Nestes dois estágios não usamos a hipótese de que as massas são iguais. Por ultimo, na seção 10.4 investigaremos essas raízes para as massas iguais.

10.1 O problema

No que segue denotaremos por $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ e $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ as seis posições e seus respectivos momentos, neste caso as equações do movimento são dadas por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = M^1 \mathbf{P} \\ \dot{\mathbf{P}} = -\nabla U(\mathbf{Q}), \end{cases} \quad (10.1)$$

onde $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2, m_3, m_3)$ e

$$U(\mathbf{Q}) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|}.$$

O momento de inércia é dado por

$$I(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T M \mathbf{Q}. \quad (10.2)$$

Como estamos interessados em soluções com momento de inércia constante, podemos fazer o seguinte reescalamto $\tilde{\mathbf{Q}} = \frac{1}{\alpha^2} \mathbf{Q}$, e $\tilde{\mathbf{P}} = \alpha \mathbf{P}$, assim consideraremos as soluções com momento de inércia $I(\mathbf{Q}) = 1$.

Consideremos agora a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \\ \mathbf{x}_2 &= \sqrt{\frac{m_3(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}} \left(\mathbf{q}_3 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{q}_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{q}_2 \right) \\ \mathbf{y}_1 &= \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \left(\frac{1}{m_2} \mathbf{p}_2 - \frac{1}{m_1} \mathbf{p}_1 \right) \\ \mathbf{y}_2 &= \sqrt{\frac{m_3 + m_1 + m_2}{m_3(m_1 + m_2)}} \left(\frac{1}{m_3} \mathbf{p}_3 - \frac{1}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_1 - \frac{1}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_2 \right). \end{aligned}$$

Introduzamos os vetores $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ posição e momento respectivamente. Podemos também fazer um reescalamento nas massas, de modo que $m_3 = 1$. Assim, nestas coordenadas o potencial $V(\mathbf{X}) = U(\mathbf{Q})$ é dado por

$$\begin{aligned} V(\mathbf{X}) = & \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{x}_1\|} + \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + 1}} \frac{m_1}{\|\mathbf{x}_2 - \sqrt{\frac{m_1}{m_2(m_1 + m_2 + 1)}} \mathbf{x}_1\|} \\ & + \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + 1}} \frac{m_1}{\|\mathbf{x}_2 + \sqrt{\frac{m_2}{m_1(m_1 + m_2 + 1)}} \mathbf{x}_1\|} \end{aligned} \quad (10.3)$$

Para a energia, o momento angular e o momento de inércia temos respectivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^T \mathbf{J} \mathbf{X} &= c \\ \frac{1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - V(\mathbf{X}) &= h \\ \mathbf{X}^T \mathbf{X} &= 1. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Onde

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nestas coordenadas as equações de movimento (10.1) são escritas como

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{Y} \\ \dot{\mathbf{Y}} = -\nabla V(\mathbf{X}), \end{cases} \quad (10.5)$$

Definindo $\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ segue que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) = (\dot{\mathbf{X}})^T \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \dot{\mathbf{X}} = (\dot{\mathbf{X}})^T \mathbf{X} + (\dot{\mathbf{X}})^T \mathbf{X},$$

usando $\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{X}}$ tem-se

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) = \mathbf{Y}^T \mathbf{X} + \mathbf{Y}^T \mathbf{X} = 2\mathbf{Y}^T \mathbf{X}, \quad (10.6)$$

analogamente

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) = 2\mathbf{X}^T \nabla V(\mathbf{X}) + 2\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}. \quad (10.7)$$

Como a função potencial é homogênea de grau de grau -1 , segue do teorema de Euler que

$$\mathbf{X}^T \nabla V(\mathbf{X}) = -V(\mathbf{X}),$$

donde

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) = 2[\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - V(\mathbf{X})].$$

Observe que se $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ é constante temos por (10.6) que $\mathbf{Y}^T \mathbf{X} = 0$ e por (10.7) que $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = V(\mathbf{X})$. Com isto, das equações (10.4) teremos

$$h = -\frac{1}{2}V(\mathbf{X}) \quad (10.8)$$

ou

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = -2h. \quad (10.9)$$

Assim, as soluções com momento de inércia constante possuem, energia cinética e energia potencial constante. Portanto, diferenciando (10.9) relação ao tempo segue que

$$2\mathbf{Y}^T \nabla V(\mathbf{X}) = 0, \quad (10.10)$$

donde, diferenciando novamente obtemos

$$\dot{\mathbf{Y}}^T \nabla V(\mathbf{X}) + \mathbf{Y}^T \left(\frac{d}{dt} \nabla V(\mathbf{X}) \right) = 0,$$

mas $\mathbf{Y}^T \left(\frac{d}{dt} \nabla V(\mathbf{X}) \right) = \mathbf{Y}^T D^2 V(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{X}}$ e pela equação (10.5) $\dot{\mathbf{Y}}^T \nabla V(\mathbf{X}) = \nabla V(\mathbf{X}^2)$, logo

$$(\nabla V(\mathbf{X}))^2 + \mathbf{Y}^T D^2 V(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{X}} = 0. \quad (10.11)$$

Em resumo as soluções com momento de inércia constante satisfazem as seguintes

relações

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^T \mathbf{X} &= 1 \\
V(\mathbf{X}) &= -2h \\
\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} &= -2h \\
\mathbf{Y}^T \mathbf{J} \mathbf{X} &= c \\
\mathbf{Y}^T \nabla V(\mathbf{X}) &= 0 \\
\nabla V(\mathbf{X}^2) + \mathbf{Y}^T D^2 V(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{X}} &= 0 \\
x_{11} &> 0 \\
x_{12} &= 0 \\
x_{22} &\geq 0
\end{aligned} \tag{10.12}$$

10.2 Equilíbrio relativo

Por definição $(\mathbf{X}(\mathbf{t}), \mathbf{Y}(t))$ é uma solução de equilíbrio relativo se, $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \mathbf{R}(\omega t) \mathbf{X}_0$, onde $\mathbf{R}(\omega t)$ é uma rotação. Assim, juntando as equações de movimento temos

$$\begin{cases} \mathbf{Y}(t) = c \mathbf{J} \mathbf{R}(\omega t) \mathbf{X}_0 \\ \nabla V(\mathbf{X}_0) = -V(\mathbf{X}_0) \mathbf{X}_0, \end{cases} \tag{10.13}$$

Portanto, para o momento angular fixo c , existe uma correspondência 1 – 1 entre os equilíbrio relativo e o vetor $\mathbf{X}_0$ satisfazendo $\nabla V(\mathbf{X}_0) = -V(\mathbf{X}_0) \mathbf{X}_0$.

Vamos nos restringir ao espaço das configurações

$$P = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^4 \setminus \Delta \mid \mathbf{X}^T \mathbf{X} = 1\} / SO_2.$$

Esse espaço tem a seguinte estrutura, fixando o produto escalar em s^3 , e fazendo o quociente por SO_2 teremos s^2 . O equador consiste das configurações colineares C , os pólos são as duas configurações equiláteras $E^\pm$. As colisões consistem de três pontos Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{23} , cada qual correspondendo a diferentes colisões binárias. Observe que estas colisões dividem o círculo das configurações colineares em três intervalos, cada um correspondendo à ordem das massas.

10.3 Redução

Esta seção usaremos as equações (10.12) para eliminarmos os parâmetros c e h , a variável momento e duas variáveis posições.

Note que o parâmetro h é facilmente eliminado pela condição $V(\mathbf{X}) = -2h$. No que segue sejam

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomemos uma base para o espaço tangente em $\mathbf{X}$ dada por $\{\mathbf{X}, \mathbf{JX}, \mathbf{J}_2\mathbf{X}, \mathbf{J}_3\mathbf{X}\}$. Escrevendo $\mathbf{Y}$ nesta base teremos

$$\mathbf{Y} = \alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{JX} + \gamma\mathbf{J}_2\mathbf{X} + \delta\mathbf{J}_3\mathbf{X}, \quad (10.14)$$

agora usando a condição $\mathbf{Y}^T\mathbf{X} = 0$ segue que $\alpha = 0$, analogamente a condição $\mathbf{Y}^T\mathbf{JX} = c$ implica que $\beta = c$. Portanto, conhecemos duas coordenadas de $\mathbf{Y}$, ou seja, nesta base temos

$$\mathbf{Y} = (0, c, y_2, y_3). \quad (10.15)$$

Para determinarmos as outras coordenadas vamos expressar $\nabla V(\mathbf{X})$ nesta base. Observe que pela homogeneidade de V temos que $\mathbf{X}\nabla V(\mathbf{X}) = -V(\mathbf{X})$, como $\mathbf{JX}$ é ortogonal a $\mathbf{X}$ segue que $(\mathbf{JX})^T\nabla V(\mathbf{X}) = 0$. Seja $a_i(\mathbf{X}) = (\mathbf{J}_i\mathbf{X})^T\nabla V(\mathbf{X})$, então

$$\nabla V(\mathbf{X}) = -V(\mathbf{X})\mathbf{X} + a_2(\mathbf{X})\mathbf{J}_2\mathbf{X} + a_3(\mathbf{X})\mathbf{J}_3\mathbf{X}$$

e

$$\mathbf{Y}^T\nabla V(\mathbf{X}) = -V(\mathbf{X})\mathbf{Y}^T\mathbf{X} + a_2(\mathbf{X})\mathbf{Y}^T\mathbf{J}_2\mathbf{X} + a_3\mathbf{Y}^T(\mathbf{X})\mathbf{J}_3\mathbf{X}$$

agora usando a condição $\mathbf{Y}^T\nabla V(\mathbf{X}) = 0$ segue que

$$a_2(\mathbf{X})y_2 + a_3(\mathbf{X})y_3 = 0. \quad (10.16)$$

Da condição $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = -2h$ temos $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = c^2 + y_2^2 + y_3^2 = -2h$, donde

$$y_2^2 + y_3^2 = -2h - c^2 = V(\mathbf{X}) - c^2$$

ou

$$y_2^2 + y_3^2 = V(\mathbf{X}) - c^2. \quad (10.17)$$

Note que $\mathbf{JX}$ é a componente rotacional de $\mathbf{Y}$, enquanto que a componente de $\mathbf{Y}$ no espaço formado por $\mathbf{J}_2 \mathbf{X}$ e $\mathbf{J}_3 \mathbf{X}$ é a componente tangente ao espaço de configurações P . Assim, como consequência de (10.15) e (10.17) temos

Proposição 48. *Se $(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t))$ é uma solução do problemas dos três corpos com momento de inércia constante, então a componente rotacional de $\mathbf{Y}(t)$ possui tamanho $|c|$ enquanto que a componente tangente ao espaço das configurações tem tamanho $\sqrt{V(\mathbf{X}) - c^2}$.*

Uma consequência desta proposição é que uma solução com momento de inércia constante, quando projetada no espaço das configurações, ou seja, quando removemos a componente rotacional, podem ser de dois tipos: Permanecem estacionárias ou movem-se com velocidade constante ao longo de um conjunto de nível da função potencial. Seja $P^* \subset P$ o complemento das configurações centrais em P , e seja V^* a restrição de V a P^* . Então cada conjunto de nível de V^* é uma variedade de dimensão 1: união de intervalos abertos e círculos.

Proposição 49. *Suponha que $(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t))$ é uma solução do problemas dos três corpos planar com momento de inércia constante e potencial V_0 . Então $c^2 \leq V_0$, com $c^2 = V_0$ se e somente se $(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t))$ é um equilíbrio relativo. Se $c^2 < V_0$, então a órbita contém pelo menos uma componente do conjunto de nível $V^*(\mathbf{X}) = V_0$.*

Demonstração. Suponha que $(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t))$ é um equilíbrio relativo, ou seja, $\mathbf{X}(t) = \mathbf{R}(\omega t) \mathbf{X}_0$ e $\mathbf{Y}(t) = c \mathbf{J} \mathbf{R}(\omega t) \mathbf{X}_0$, assim, $\mathbf{Y}(t) = c \mathbf{J} \mathbf{X}(t)$. Portanto, a componente tangencial é nula, isto é, $y_2^2 + y_3^2 = 0$, então pela proposição 48 segue que $c^2 = V_0$. Por outro lado, se $V(\mathbf{X}) - c^2 = 0$, então a componente tangencial é nula para todo tempo onde a solução estiver definida, ou seja, a solução é uma rotação pura, matematicamente temos

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{Y}(t) = c \mathbf{J} \mathbf{X}(t),$$

donde

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= c x_2 \\ \dot{x}_2 &= -c x_1, \end{cases}$$

com isso tem-se

$$\ddot{\mathbf{x}} = -c^2 \mathbf{x}_1.$$

Suponha agora que $c^2 < V_0$, olhando as componentes de $\mathbf{Y}$ sobre o espaço das configurações P , teremos $\|\dot{\mathbf{X}}\| = \|\mathbf{Y}\| = \sqrt{y_2^2 + y_3^2} = \sqrt{V_0 - c^2} > 0$, então a solução move-se com velocidade constante ao longo de P . Portanto, a solução não permanece estacionária como uma configuração central, mas move-se ao longo de uma componente de V . ■

Agora desenvolveremos condição necessária para que uma solução tenha momento de inércia constante, as quais podem ser testadas, em um ponto simples ao longo da órbita, em vez da órbita, inteira.

Voltemos as equações (10.16) e (10.17).

Se $a_2^2(\mathbf{X}) + a_3^2(\mathbf{X}) \neq 0$, ou seja, se $\mathbf{X}$ não é uma configuração central, resolvendo as equações (10.16) e (10.17) para y_2, y_3 temos

$$(y_2, y_3) = \pm \sqrt{\frac{V(\mathbf{X}) - c^2}{a_2^2 + a_3^2}} (a_3, -a_2),$$

assim, das equações (10.14) e (10.15) segue que

$$\mathbf{Y} = c\mathbf{JX} \pm \left(a_3(\mathbf{X})\mathbf{J}_2\mathbf{X} - a_2(\mathbf{X})\mathbf{J}_3\mathbf{X} \right) \sqrt{\frac{V(\mathbf{X}) - c^2}{a_2^2(\mathbf{X}) + a_3^2(\mathbf{X})}}.$$

Com h eliminado e $\mathbf{Y}$ determinado (a menos de sinal) como função de $\mathbf{X}$ e de c , a seguir eliminaremos duas variáveis posição, e expressaremos c em termos das duas variáveis restantes. Da condição $x_{12} = 0$, eliminamos imediatamente uma variável posição, como $\mathbf{X}^T\mathbf{X} = 1$ segue que

$$x_{11} = \sqrt{1 - x_{21}^2 - x_{22}^2},$$

portanto, temos eliminado duas das variáveis posição.

Para expressarmos c como função de $\mathbf{X}$, consideremos a equação

$$(\nabla V(\mathbf{X}))^T \nabla V(\mathbf{X}) + \mathbf{Y}^T D^2 V(\mathbf{X}) \mathbf{Y} = 0.$$

Vamos primeiro escrever $D^2 V(\mathbf{X})$ na base $\{\mathbf{X}, \mathbf{JX}, \mathbf{J}_2\mathbf{X}, \mathbf{J}_3\mathbf{X}\}$

Lema 50. *Expresso na base $\{\mathbf{X}, \mathbf{JX}, \mathbf{J}_2\mathbf{X}, \mathbf{J}_3\mathbf{X}\}$, o Hessiano tem a forma*

$$D^2V(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 2V(\mathbf{X}) & 0 & -2a_2 & -2a_3 \\ 0 & -V(\mathbf{X}) & -a_3 & a_2 \\ -2a_2 & -a_3 & a_{22} & a_{23} \\ -2a_3 & a_2 & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

onde $a_i = (J_i\mathbf{X})^T \nabla V(\mathbf{X})$.

Demonstração. Primeiro observe que $D^2V(\mathbf{X})\mathbf{X}$. De fato, em geral temos que

$$D^2V(\mathbf{X})\mathbf{X} = \left(\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \right) x_i, \dots, \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V}{\partial x_n} \right) x_i \right),$$

como $\nabla V(\mathbf{X})$ é homogênea de grau -2 segue que

$$D^2V(\mathbf{X})\mathbf{X} = -2\nabla V(\mathbf{X}).$$

Agora usando cálculo matricial e a definição de $v(\mathbf{X})$ teremos

$$D^2V(\mathbf{X})\mathbf{JX} = \mathbf{J}\nabla V(\mathbf{X}).$$

Usando estas duas identidades o resultado segue. ■

Considere $f(\mathbf{X}) = (\nabla V(\mathbf{X}))^T \nabla V(\mathbf{X}) + \mathbf{Y}^T D^2V(\mathbf{X})\mathbf{Y}$. Se $\mathbf{X}$ não é uma configuração central, então $f(\mathbf{X})$ pode ser escrita como

$$f(\mathbf{X}) = \alpha(\mathbf{X}) + \frac{(V(\mathbf{X}) - c^2)(\beta(\mathbf{X}) + \alpha(\mathbf{X})V(\mathbf{X}))}{\alpha(\mathbf{X})} \mp 2c\sqrt{\alpha(\mathbf{X})(V(\mathbf{X}) - c^2)},$$

onde

$$\alpha(\mathbf{X}) = a_2^2 + a_3^2 \tag{10.18}$$

e

$$\beta(\mathbf{X}) = a_{22}a_3^2 - 2a_{23}a_2a_3 + a_{33}a_2^2. \tag{10.19}$$

De fato, usando álgebra elementar e fazendo $y_2 = \lambda a_3$, $y_3 = -\lambda a_2$ tem-se que

$$f(\mathbf{X}) = V(\mathbf{X})(V(\mathbf{X}) - c^2) + \alpha(\mathbf{X}) + \lambda^2\beta(\mathbf{X}) - 2\lambda\alpha(\mathbf{X})c.$$

Agora tomando $\lambda = \pm \sqrt{\frac{(V(\mathbf{X}) - c^2)}{\alpha(\mathbf{X})}}$ segue o resultado.

Note que $\alpha(\mathbf{X})$ é a magnitude da componente tangencial de $\nabla V(\mathbf{X})$, então $\alpha(\mathbf{X}) = 0$ se $\mathbf{X}$ é uma **c.c.**.

Resolvendo a equação $f(\mathbf{X}) = 0$ para c teremos

$$c^2 = V + \frac{\alpha^2}{4\alpha^3 + (\beta + \alpha V)^2} \left(\beta - \alpha V \pm 2\sqrt{\alpha(-\beta V - \alpha^2)} \right). \quad (10.20)$$

Lema 51. *Se existe uma solução do problema dos três corpos planar com momento de inércia constante passando por $\mathbf{X}$, e $\mathbf{X}$ não é uma **c.c.**. Então,*

$$-\beta(\mathbf{X})V(\mathbf{X}) - \alpha^2(\mathbf{X}) \geq 0.$$

Demonstração. Suponha que tal solução existe, desde que por hipótese ela possui momento de inércia constante, segue pela proposição 49 segue que $V - c^2 \geq 0$, assim da equação (10.20) temos

$$0 \leq V - c^2 = \frac{-\alpha^2}{4\alpha^3 + (\beta + \alpha V)^2} \left(\beta - \alpha V \pm 2\sqrt{\alpha(-\beta V - \alpha^2)} \right).$$

Ou seja, a expressão do lado direito da igualdade deve ser real, em particular,

$$\sqrt{\alpha(\mathbf{X})(-\beta(\mathbf{X})V(\mathbf{X}) - \alpha^2(\mathbf{X}))}$$

deve ser real. Portanto,

$$\alpha(\mathbf{X})(-\beta(\mathbf{X})V(\mathbf{X}) - \alpha^2(\mathbf{X})) \geq 0.$$

Como $\mathbf{X}$ não é uma **c.c.** segue que $\alpha(\mathbf{X}) > 0$, logo $-\beta(\mathbf{X})V(\mathbf{X}) - \alpha^2(\mathbf{X}) \geq 0$. ■

10.4 Massas iguais

Observe que α , β e c^2 , dependem de V e das derivadas de V , que dependem das massas. Para simplificarmos o problema, no que segue consideraremos que as massas são iguais.

Da figura 10.4 observamos que existem três tipos de conjunto de nível de V^* em P^* , com uma bifurcação ocorrendo em $V^* = \frac{5}{\sqrt{2}}$, o nível das configurações centrais colineares:

- $V^* > \frac{5}{\sqrt{2}}$. Os conjuntos de nível são círculos, cada um encontrando um ponto de colisão.

- $V^* = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Os conjuntos de nível são arcos conectando-se as configurações centrais colineares.
- $V^* < \frac{5}{\sqrt{2}}$. Os conjuntos de nível são círculos, encontrando as configurações centrais equiláteras.

Um argumento a parte exigirá que para cada conjunto de nível não existe trajetória com momento de inércia constante.

Note que todas as trajetórias também passam através de uma configuração isósceles I_i , quando $V^* > \frac{5}{\sqrt{2}}$ passam também através de uma configuração colinear. As simetrias do problema nos permite considerarmos o arco colinear de C_3 ,

$$C_0 = \left\{ (\sqrt{1-x^2}, 0, x, 0) \mid 0 < x < \frac{1}{2} \right\}$$

e o arco isósceles

$$I_3 = \left\{ (x, 0, 0, \sqrt{1-x^2}) \mid 0 < x < 1 \right\}.$$

Especificamente, estamos interessados na intersecção do conjunto de nível $V^* = \frac{5}{\sqrt{2}}$ com I_3 , e com o sub-arco

$$\left\{ (x, 0, 0, \sqrt{1-x^2}) \mid \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \right\}.$$

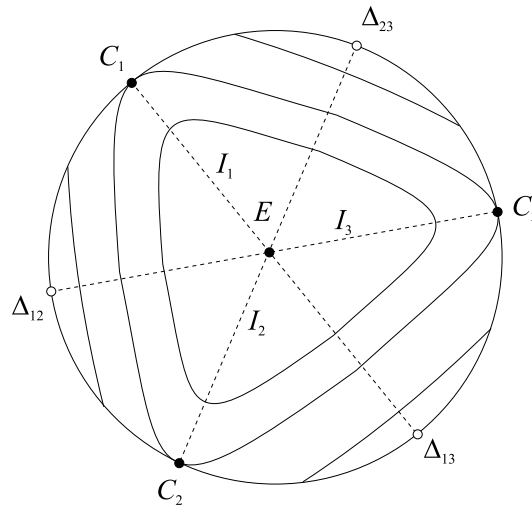


Figura 10.1: Função potencial no espaço das configurações

Lema 52. *Suponha que $\mathbf{X}(t)$ é uma solução do problema dos três corpos planar com momento de inércia constante, que não é um equilíbrio relativo. Se $\mathbf{X}(t)$ passa através de uma configuração isósceles $\mathbf{X}_0$ que não é uma c.c., então*

$$\iota(\mathbf{X}_0) = \frac{\partial^2 V}{\partial x_{21}^2}(\mathbf{X}_0) \frac{\partial c^2}{\partial x_{22}}(\mathbf{X}_0) - \frac{\partial^2 c^2}{\partial x_{21}^2}(\mathbf{X}_0) \frac{\partial V}{\partial x_{22}}(\mathbf{X}_0) = 0.$$

Se $\mathbf{X}(t)$ passa através de uma configuração colinear $\mathbf{X}_1$ que não é uma c.c., então

$$\chi(\mathbf{X}_1) = \frac{\partial^2 V}{\partial x_{22}^2}(\mathbf{X}_1) \frac{\partial c^2}{\partial x_{21}}(\mathbf{X}_1) - \frac{\partial^2 c^2}{\partial x_{22}^2}(\mathbf{X}_1) \frac{\partial V}{\partial x_{21}}(\mathbf{X}_1) = 0.$$

Demonstração. Vamos provar para o caso colinear, no caso isósceles o procedimento é idêntico.

Se $\mathbf{X}(t)$ é uma solução passando por $\mathbf{X}_1$, então $\mathbf{X}(t)$ varre um arco $\omega \in P^*$, sobre o qual V e c^2 devem ser constantes. Parametrizando P^* em torno de uma configuração colinear, por

$$(\sqrt{1 - x_{21}^2 - x_{22}^2}, 0, x_{21}, x_{22}).$$

Podemos escolher uma parametrização $\omega(s)$ com $\omega(0) = \mathbf{X}_1$ e

$$\omega(s) = (\sqrt{1 - \omega_1^2(s) - \omega_2^2(s)}, 0, \omega_1^2(s), \omega_2^2(s)),$$

tal que

$$\omega_1(-s) = \omega_1(s)$$

e $\omega_2(-s) = -\omega_2(s)$. Como v e c^2 são constantes todas as suas derivadas em relação a s são nulas em $s = 0$. Ou seja,

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial x_{21}} \frac{\partial \omega_1}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial x_{22}} \frac{\partial \omega_2}{\partial s}$$

e

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_{21}^2} \frac{\partial \omega_1}{\partial s} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_{21} \partial x_{22}} \frac{\partial \omega_2}{\partial s} \right) \frac{\partial \omega_1}{\partial s} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_{21}} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_{21} \partial x_{22}} \frac{\partial \omega_{21}}{\partial s} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_{22}^2} \frac{\partial \omega_2}{\partial s} \right) \frac{\partial \omega_2}{\partial s} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_{22}} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial s^2}.$$

Desde que V é simétrica com respeito a reflexão em x_{22} , em $s = 0$ segue que $\frac{\partial V}{\partial x_{22}}$ e $\frac{\partial \omega_1}{\partial s} = 0$.

Substituindo em $\frac{\partial V}{\partial s}(0)$ e $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(0)$, teremos

$$\frac{\partial V}{\partial s}(0) = 0 \tag{10.21}$$

e

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(0) = \frac{\partial V}{\partial x_{21}}(\mathbf{X}_1) \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial s^2}(0) + \frac{\partial^2 V}{\partial x_{22}^2}(\mathbf{X}_1) \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial s}(0) \right)^2. \tag{10.22}$$

Da equação (10.22) segue que

$$\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x_{22}^2}(\mathbf{X}_1)}{\frac{\partial V}{\partial x_{21}}(\mathbf{X}_1)} = -\frac{\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial s^2}(0)}{\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial s}(0)\right)^2}.$$

Analogamente para c^2 teremos

$$\frac{\frac{\partial^2 c^2}{\partial x_{22}^2}(\mathbf{X}_1)}{\frac{\partial c^2}{\partial x_{21}}(\mathbf{X}_1)} = -\frac{\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial s^2}(0)}{\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial s}(0)\right)^2}.$$

Usando as duas expressões acima teremos

$$\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x_{22}^2}(\mathbf{X}_1)}{\frac{\partial V}{\partial x_{21}}(\mathbf{X}_1)} = \frac{\frac{\partial^2 c^2}{\partial x_{22}^2}(\mathbf{X}_1)}{\frac{\partial c^2}{\partial x_{21}}(\mathbf{X}_1)}.$$

■

Lema 53. *Se $\mathbf{X} = (x_1, 0, 0, y_2)$ é uma configuração isósceles, então $D^2V(\mathbf{X})$ possui a forma*

$$D^2V(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 2V(\mathbf{X}) & 0 & 0 & -2a_3 \\ 0 & -V(\mathbf{X}) & -a_3 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_{22} & 0 \\ -2a_3 & 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Se $\mathbf{X} = (x_1, 0, x_2, 0)$ é uma configuração colinear, então $D^2V(\mathbf{X})$ possui a forma

$$D^2V(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 2V(\mathbf{X}) & 0 & -2a_2 & 0 \\ 0 & -V(\mathbf{X}) & 0 & a_2 \\ -2a_2 & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Primeiro observe que se $\mathbf{X}(s) = (s, 0, 0, \sqrt{1-s^2})$ é uma configuração isósceles, temos $\mathbf{J}_2\mathbf{X} = (0, \sqrt{1-s^2}, s, 0)$, que é normal a $\mathbf{X}$ enquanto que $\mathbf{J}_3\mathbf{X} = (\sqrt{1-s^2}, 0, 0, s)$ é a componente tangencial ao arco da configuração isósceles em P . Por definição $a_2 = \mathbf{X}^T \mathbf{J}_2^T \nabla V(\mathbf{X})$, usando cálculo matricial teremos que $a_2 = sa_2$ para todo s , donde $a_2 = 0$ e como sabemos $\mathbf{X} \mathbf{J}^T \nabla V(\mathbf{X})$. Portanto, como isso vale para todo s segue que as derivadas de $\mathbf{X}^T \mathbf{J}_2^T \nabla V(\mathbf{X})$ e $\mathbf{X}^T \mathbf{J}^T \nabla V(\mathbf{X})$ em relação a s são nulas. Portanto, temos que

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{X}^T \mathbf{J}^T \nabla V(\mathbf{X})) = 0,$$

donde

$$\left(\frac{d}{ds}(\mathbf{X})\right)^T \mathbf{J}^T \nabla V(\mathbf{X}) + \mathbf{X}^T \mathbf{J}^T D^2 V(\mathbf{X}) \left(\frac{d}{ds}(\mathbf{X})\right) = 0.$$

Por outro lado

$$\left(\frac{d}{ds}(\mathbf{X})\right)^T \mathbf{J}^T \nabla V(\mathbf{X}) = \frac{-sa_2}{\sqrt{1-s}} = 0,$$

pois $a_2 = 0$. Assim,

$$\mathbf{X}^T \mathbf{J}^T D^2 V(\mathbf{X}) \left(\frac{d}{ds}(\mathbf{X})\right) = 0.$$

Agora tomando $\frac{d}{ds}(\mathbf{X}) = \mathbf{J}_3 \mathbf{X}$, segue que

$$\mathbf{X}^T \mathbf{J}^T D^2 V(\mathbf{X}) \mathbf{J}_3 \mathbf{X} = 0.$$

Analogamente derivando $\mathbf{X}^T \mathbf{J}_2^T \nabla V(\mathbf{X})$ em relação a s tem-se

$$\left(\frac{d}{ds}(\mathbf{X})\right)^T \mathbf{J}_2^T \nabla V(\mathbf{X}) + \mathbf{X}^T \mathbf{J}_2^T D^2 V(\mathbf{X}) \left(\frac{d}{ds}(\mathbf{X})\right) = 0.$$

$$\left(\frac{d}{ds}(\mathbf{X})\right)^T \mathbf{J}_2^T \nabla V(\mathbf{X}) = a_2 = 0.$$

Logo

$$\mathbf{X}^T \mathbf{J}_2^T D^2 V(\mathbf{X}) \left(\frac{d}{ds}(\mathbf{X})\right) = 0.$$

Usando o mesmo argumento acima segue que

$$a_{23} = \mathbf{X}^T \mathbf{J}_2^T D^2 V(\mathbf{X}) \mathbf{J}_3 \mathbf{X} = 0.$$

Assim, temos o resultado.

Para a configuração colinear o procedimento é semelhante. ■

Lema 54. *Para todo $\mathbf{X}$ pertencendo a I_0 sobre o arco de configurações isósceles conectando a configuração equilátera com a configuração colinear,*

$$-a_{22}(\mathbf{X})V(\mathbf{X}) - a_3^2(\mathbf{X}) < 0.$$

Demonstração. Para as massas iguais a função potencial é dada por

$$V(\mathbf{X}) \frac{1}{\sqrt{2}\|\mathbf{x}_1\|} + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{x}_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{x}_1\|} + \frac{1}{\|\mathbf{x}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{x}_1\|} \right\}.$$

Para $\mathbf{X} = (x, 0, 0, \sqrt{1-x^2})$ temos

$$V(x, 0, 0, \sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2}x} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3-2x^2}},$$

$$a_3^2(\mathbf{X}) = \frac{1 - 2x^2}{2x^4(3 - 2x^2)^3} [(3 + 2x^2)(9 - 24x^2 + 28x^4) - 16x^3(3 - 2x^2)^{\frac{3}{2}}]$$

e

$$a_{22}(\mathbf{X}) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x^3} + \frac{8(3 - 2x^2 + 2x^4)}{\sqrt{2}(3 - 2x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Donde obtemos

$$-a_{22}(\mathbf{X})V(\mathbf{X}) - a_3^2(\mathbf{X}) = \frac{-6}{x^3(3 - 2x^2)^3} [8x^3 + (5x^2 - 3)\sqrt{3 - 2x^2}].$$

Que é negativo para x no intervalo $[\frac{1}{\sqrt{2}}]$ ■

Para o conjunto de nível $V^* = \frac{5}{\sqrt{2}}$, consideraremos a expressão $\iota(\mathbf{X})$ no ponto onde o arco isósceles intercepta este conjunto de nível. Sabemos que ao longo de I_3 tem-se

$$V(x, 0, 0, \sqrt{1 - x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3 - 2x^2}}.$$

considere a função

$$f(\mathbf{X}) = V(x, 0, 0, \sqrt{1 - x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3 - 2x^2}} - \frac{5}{\sqrt{2}},$$

observe que a derivada de f é negativa, portanto temos que $f(\mathbf{X}) = 0$ no intervalo $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, que vale exatamente

$$\frac{1}{5} \left(-1 + \frac{(-46 + \sqrt{546}i)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} + \frac{11}{(2(-46 + \sqrt{546}i))^{\frac{1}{3}}} \right),$$

e aproximadamente 0.39055.

Lema 55. *se $\mathbf{X}_0 = (x_0, 0, 0, \sqrt{1 - x_0^2})$ é uma configuração isósceles com $0.39 < x_0 < 0.4$, então $\iota_{\pm}(\mathbf{X}_0) \neq 0$.*

Demonstração. Por cálculo direto temos que

$$\iota_{\pm}(\mathbf{X}_0) \neq 0 = 3\sqrt{1 - x^2} \frac{\iota_1(x)\sqrt{\iota_4(x)} \pm \iota_2(x)}{\iota_3(x)\sqrt{\iota_4(x)}},$$

$$\begin{aligned}
\iota_1(x) = & 6(3 - 2x^2)^{\frac{3}{2}}(11160261 - 149866362x^2 + 919215783x^4 \\
& - 2427504390x^6 - 144630684x^8 + 19104004872x^{10} \\
& - 64061743968x^{12} + 129294600192x^{14} - 186535198080x^{16} \\
& + 182248206336x^{18} - 9984615555290x^{20} + 15430878720x^{22} \\
& + 11657610240x^{24} - 5934180352x^{26} + 7159316438x^{28}) \\
& + 6(-1007612136x^3 + 12193382304x^5 - 66756075480x^7 \\
& + 2145698942400x^9 - 449856382176x^{11} + 646561460736x^{13} \\
& - 585296347392x^{15} + 76683055104x^{17} + 722713881600x^{19} \\
& - 1206728699904x^{21} + 1007782594560x^{23} - 489803046912x^{25} \\
& + 136900681728x^{27} - 19996672000x^{29} + 1289093120x^{31})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iota_2(x) = & \sqrt{3}x(3 - 2x^2)(-2711943423 + 37708927596x^2 - 533736293679x^4 \\
& + 463090884955x^6 - 24434772862176x^8 + 72939205864944x^{10} \\
& - 88847427782048x^{12} - 209031294555072x^{14} + 1079108302402944x^{16} \\
& - 2143903217905152x^{18} + 227314076714352x^{20} - 970216893278208x^{22} \\
& - 649923804131328x^{24} + 1238330675441664x^{26} - 828224357474304x^{28} \\
& + 280903191183360x^{30} - 37435415298048x^{32} - 3249716330496x^{34} \\
& + 1068938362880x^{36} + 4x(3 - 2x^2)^{\frac{3}{2}}(559607373 \\
& - 6026540940x^2 + 31352361795x^4 + 24020070318x^6 \\
& - 1099105018560x^8 + 6051812022432x^{10} - 16574305086288x^{12} \\
& + 22933776885408x^{14} - 4289185830528x^{16} - 39285604620288x^{18} \\
& + 68078546751744x^{20} - 52097149251072x^{22} + 15868200775680x^{24} \\
& + 4015281217536x^{26} - 48178767742144x^{28} + 1313596465152x^{30} - 104828600320x^{32}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iota_3(x) = & x(3 - 2x^2)^4(8x^3 - (3 - 2x^2)^{\frac{3}{2}})^2(243 - 810x^2 + 1080x^4 + 2880x^6 \\
& - 5136x^8 + 2528x^{10} + 8x^3(3 - 2x^2)^{\frac{5}{2}}(22x^2 - 15))^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iota_4(x) = & x(8x^3(-3645 + 17496x^2 - 34020x^4 + 17280x^6 + 22032x^8 - 26496x^{10} + \\ & 3392x^{12})\sqrt{3-2x^2}(-2187 + 12393x^2 - 29160x^4 - 14580x^6 + 141264x^8 - \\ & 187920x^{10} + 38400x^{12} + 34112x^{14})).\end{aligned}$$

Testaremos para as raízes de $\iota_+(x)$ e $\iota_-(x)$ pelo teste das raízes de $\iota_1^2(x)\iota_4(x) - \iota_2^2(x)$. Isso assume a forma $p_1(x) - \sqrt{3-2x^2}p_2(x)$, para polinômios $p_1(x), p_2(x)$. Para encontrarmos raízes de $p_1(x) = \sqrt{3-2x^2}p_2(x)$, elevamos ao quadrado ambos os lados, donde obtemos $p_3(x) = p_1(x)^2 - (3-2x^2)p_2(x)^2 = 0$, com

$$\begin{aligned}p_3(x) = & 109418989231512359209x^2(1-2x^2)^{12}(3+4x^4)^{10}(-144+1179x^2 \\ & -3036x^4+5844x^6-6048x^8+3664x^{10}-1216x^{12}+192x^{14}) \\ & (729-4860x^2+14580x^4-47520x^6+196704x^8-512640x^{10}+915840x^{12} \\ & -1128960x^{14}+911616x^{16}-429056x^{18}+91136x^{20})^2(425329947-7210355292x^2 \\ & +566257866504x^4-326455204608x^6+1490887255986x^8 \\ & -5162796446616x^{10}+13830810128244x^{12}-28708354583136x^{14} \\ & +46667439692235x^{16}-60021663985836x^{18}+61331020652412x^{20} \\ & -49707888624576x^{22}+31662507664992x^{24}-15553175558784x^{26} \\ & +5722418668928x^{28}-1512994057216x^{30}+269814427392x^{32}-28906949632x^{36})\end{aligned}$$

O Teorema de Sturm 77 mostra que não existem raízes desta equação polinomial no intervalo $(0.39, 0.4)$, e então não existem raízes de $\iota_+(x)$ ou $\iota_-(x)$. ■

O último caso eliminado é $V^*(X) > \frac{2}{\sqrt{2}}$. A mesma análise ao longo de um arco isosceles poderia ser aplicado aqui, mas $\iota_+(x) = 0$ em um ponto ao longo de I_3 . Em vez de eliminar um ponto por um argumento *ad hoc*, nos eliminaremos todas as soluções de $V^*(X) > \frac{2}{\sqrt{2}}$ por envolver a parte colinear do lema 3. As soluções de c^2 produzem duas diferentes expressões $\chi_{\pm}(X)$, e mostramos que qualquer raiz de $\chi_{\pm}(X)$ é uma colisão ou uma configuração central. Como observamos acima, as simetrias do problema ao longo da restrição a um dos arcos $\mathcal{C}_0$ é uma colisão ou uma configuração central.

Proposição 56. *Se $X_0 = (\sqrt{1-x_0^2}, 0, x_0, 0)$ é uma configuração colinear que não é uma configuração central, então $\chi_{\pm}(X_0) \neq 0$.*

Demonstração. Cálculos diretos mostram que $\chi_{\pm}(x) = \chi_1(x)(\chi_2(x) \pm \chi_3(x))$, onde

$$\chi_1(x) = \frac{3x(32x^4 - 52x^2 + 29)}{(1-4x^2)(1-x^2)\sqrt{5+4x^2}} \quad (10.23)$$

$$(49 + 6024x^2 - 1430x^4 - 2816x^6 + 38400x^8 - 43008x^{10} + 16384x^{12})^{-2}$$

$$\begin{aligned} \chi_2(x) = & 6\sqrt{5+4x^2}(30184 + 561351x^2 + 10249160x^4 - 72323616x^6 \\ & + 189485568x^8 - 277907712x^{10} + 286279680x^{12} - 261033984x^{14} \end{aligned} \quad (10.24)$$

$$+ 221724672x^{16} - 142213120x^{18} + 53477376x^{20} - 8388608x^{22})$$

$$\begin{aligned} \chi_3(x) = & \sqrt{3(1-4x^2)}(222950 + 2232083x^2 - 68474164x^4 + 309903360x^6 \\ & - 648169728x^8 + 890162688x^{10} - 814043136x^{12} + 309903360x^{14} \end{aligned} \quad (10.25)$$

$$+ 344555520x^{16} - 597426176x^{18} + 362807296x^{20} - 83886080x^{22}).$$

Sobre o intervalo aberto $(0, 1/2)$ é fácil ver que $\chi_1(x)$ é positiva. A quantidade $\chi_2(x)^2 - \chi_3(x)^2$ é um polinômio de grau 46, cujas raízes são dadas pelas raízes de $\chi_+(x)$ e $\chi_-(x)$. O lema de Sturm mostra que o polinômio de grau 46, $\chi_2(x)^2 - \chi_3(x)^2$ não tem raiz no intervalo $(0, 1/2)$, logo $\chi_+(x)$ e $\chi_-(x)$ não tem raiz nesse intervalo. ■

Apêndice A

Resultados básicos de análise

Lema 57. *Seja f uma função definida em (a,b) de classe C^2 , $f(b) = 0$, $f > 0$ e $\ddot{f} > 0$ em (a,b) , então $\dot{f} \leq 0$.*

Demonstração. Seja $A = \{t \in (a,b) / \dot{f}(t) = 0\}$ o conjunto dos pontos críticos de f , note que A é um conjunto vazio. De fato, observe que se existe um ponto crítico de f ele deve ser de mínimo. Logo não existe dois pontos críticos (de mínimo), pois se existem t_1 e t_2 com $t_1 < t_2$ (ou $t_1 > t_2$) tal que $\dot{f}(t_1) = \dot{f}(t_2) = 0$ segue-se pelo teorema de Rolle que existe $s \in (t_1, t_2)$ tal que $\ddot{f}(s) = 0$ o que é uma contradição. Assim, se existe ponto crítico ele é único. Suponha agora que existe $t_1 \in (a,b)$ tal que $\dot{f}(t_1) = 0$, então $\dot{f}(t) < 0$ para $t \in (a, t_1)$ e $\dot{f}(t) > 0$ para $t \in (t_1, b)$, donde segue que $0 < \dot{f}(t_1) < \dot{f}(b) = 0$, o que é um absurdo, portanto $\dot{f}(t) \neq 0$ para todo t pertencendo ao intervalo (a,b) . Agora pelo Teorema do Valor Médio temos que existe $\theta \in (a,b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = \dot{f}(\theta)(b - a),$$

mas por hipótese $f(b) = 0$ daí temos $\dot{f}(\theta) < 0$, para todo θ no intervalo (a,b) . ■

Lema 58 (Convexidade). *Não existe função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável tal que $f > 0$ e $\ddot{f} < 0$ ou $f < 0$ e $\ddot{f} > 0$ em todo $\mathbb{R}$*

Demonstração. Suponha que existe tal função f . Observe que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\dot{f}(a) \neq 0$. De fato, se $\dot{f}(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Então $\ddot{f}(a) = 0$, contrariando a hipótese

de ser $\ddot{f}(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade, suponha que $\dot{f}(a) > 0$. seja $g(x) = f(x) + \dot{f}(a)(x-a)$ a reta tangente a $f(x)$ no ponto $(a, f(a))$. Como $\ddot{f}(x) < 0$, então $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq a$. Desde que por hipótese $\dot{f}(a) > 0$, temos que existe $\tilde{x} < a$ tal que $g(\tilde{x}) = 0$. como $f(\tilde{x}) < g(\tilde{x}) < 0$, segue que $f(\tilde{x}) < 0$, o que é uma contradição. ■

Lema 59 (Convexidade fraca). *Não existe função $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável tal que $f' > 0$ e $f'' < 0$ em (a, b) com $f(x)$ tendendo a infinito quando x tende para b .*

Demonstração. Suponha que existe tal função f . Desde que $f''(x) < 0$, então $f'(x)$ é decrescente, portanto, se $\tilde{x} < x$ segue que $f'(\tilde{x}) > f'(x)$. Assim, integrando entre $\tilde{x}$ e x , tem-se $f(x) < f'(\tilde{x})x + k$ onde k é uma constante. Agora fazendo x tender para b temos que por um lado $f(x)$ tende a infinito e por outro $f'(\tilde{x})b + k$, o que é um absurdo. ■

Definição 60. *Suponhamos que f definida num domínio D , seja limitada numa vizinhança do ponto c . Se $r > 0$, definamos $\phi(r)$ por*

$$\bullet \phi(r) = \sup\{f(x) : 0 < \|x - c\| < r, x \in D\},$$

e ponhamos

$$\bullet \limsup_{x \rightarrow c} f = \inf\{\phi(r) : r > 0\}.$$

Esta quantidade é chamada de limite superior restrito.

Lema 61. *Se $\limsup_{t \rightarrow c} f(t) = M$, então existe $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $t_n \rightarrow c$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = M$*

Lema 62. *Se $\liminf_{t \rightarrow t^*} \rho(r(t)) \geq a$, então existe t_0 em $[0, t^*)$ e β em $(0, a]$ tal que $r_{ij}(t) \geq \beta$ em $[t_0, t^*)$*

Demonstração. Seja $\psi(R) = \inf\{\rho(r(t))/0 < |t - t^*| < R, R > 0\}$ e considere $\alpha = \liminf_{t \rightarrow t^*} \rho(r(t))$ que é igual ao $\sup\{\psi(R), R > 0\}$ por definição. Assim $\psi(R) \leq \alpha$ para todo R . Tomando $a = \alpha$ temos que, se $0 < \beta < a$, então existe R_0 tal que $\beta < \psi(R_0) < a$, portanto $\beta < \inf\{\rho(r(t))/0 < |t - t^*| < R_0\}$, logo $\beta < \rho(r(t))$. Logo $\beta < r_{ij}(t)$ para todo t no intervalo $[t_0, t^*)$ ■

Apêndice B

Resultados básicos de E.D.O.

Teorema 63 (Picard). *Seja f uma função contínua e lipschitziana em $\Omega = I_\alpha \times B_\beta$, onde $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R} / |t - t_0| \leq \alpha\}$, $B_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| \leq \beta\}$. Se $\|f\| \leq M$ em Ω , então existe uma única solução de*

$$\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0$$

em I_ϵ , onde $\epsilon = \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$

Lema 64 (Método da variação dos parâmetros). *Seja $\Psi_t(\xi)$ o fluxo linear do sistema $\dot{X} = \mathbf{A}X$. Então a solução $X(t, t_0, \xi)$ da equação $\dot{X} = \mathbf{A}X + g(t, X)$ é dada implicitamente, por*

$$X(t, t_0, \xi) = \Psi_t(\xi) + \int_0^t \Psi_{t-s}(g(s, X(s, t_0, \xi)))ds$$

Definição 65. *Considere o sistema*

$$\dot{x} = f(t, x),$$

onde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aberto.

*Seja $g(t)$ uma órbita do sistema acima definida para $t \geq 0$. Dizemos que $g(t)$ é **estável** se para todo $\epsilon \geq 0$ existir $\delta > 0$ tal que se $h(t)$ também é solução do sistema acima e $|h(0) - g(0)| < \delta$ então $h(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ e $|h(t) - g(t)| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$. Se além disso existir δ_1 tal que $|h(0) - g(0)| < \delta_1$ implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} |h(t) - g(t)| = 0$, então g diz-se **assintoticamente estável**.*

Apêndice C

Soluções periódicas de problemas restringidos

C.1 O método da continuação de Poincaré e o Teorema do Centro de Liapunov

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias dependendo do parâmetro λ

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda). \quad (\text{C.1})$$

Seja $\tilde{\xi}$ um ponto de equilíbrio quando $\lambda = \tilde{\lambda}$, ou seja, $f(\tilde{\xi}, \tilde{\lambda}) = 0$.

Definição 66. *Uma continuação do ponto de equilíbrio $\tilde{\xi}$ é uma função contínua $u(\lambda)$ definida para λ numa vizinhança de $\tilde{\lambda}$ tal que $u(\tilde{\lambda}) = \tilde{\xi}$, e $u(\lambda)$ é um ponto de equilíbrio para todo λ , ou seja, $f(u(\lambda), \lambda) = 0$.*

Seja $\phi(t, \tilde{\xi}, \tilde{\lambda})$ uma solução T -periódica do sistema (C.1).

Definição 67. *Uma continuação para esta solução periódica é um par de funções contínuas, $u(\lambda)$, $\tau(\lambda)$, definidas para λ numa vizinhança de $\tilde{\lambda}$ tal que $u(\tilde{\lambda}) = \tilde{\xi}$, $\tau(\tilde{\lambda}) = T$, e $\phi(t, u(\lambda), \lambda)$ é $\tau(\lambda)$ -periódica.*

Definição 68. *Um ponto de equilíbrio $\tilde{\xi}$ do sistema (C.1) é dito elementar se $D_{\xi}f(\tilde{\xi}, \tilde{\lambda})$ é não singular, ou seja, se 0 não é auto valor de $D_{\xi}f(\tilde{\xi}, \tilde{\lambda})$.*

Os autovalores de $D_\xi f(\tilde{\xi}, \tilde{\lambda})$ são chamados de *multiplicadores característicos* ou de *expoentes característicos*.

Uma solução $\phi(t, \tilde{\xi}, \tilde{\lambda})$ é T -periódica se, e somente se, $\phi(T, \tilde{\xi}, \tilde{\lambda}) = \tilde{\xi}$.

Definição 69. Uma solução $\phi(t, \tilde{\xi}, \tilde{\lambda})$ é dita *elementar* se $+1$ é autovalor da matriz de monodromia $D_\xi \phi(T, \tilde{\xi}, \tilde{\lambda})$ com multiplicidade 1 para sistemas autônomos gerais e de multiplicidade 2 para sistemas Hamiltonianos.

Definição 70. Os autovalores de $D_\xi \phi(T, \tilde{\xi}, \tilde{\lambda})$ são chamados de *multiplicadores característicos* da solução periódica $\phi(t, \tilde{\xi}, \tilde{\lambda})$.

Teorema 71. Um ponto de equilíbrio elementar ou uma solução periódica elementar em um sistema com uma integral não degenerada (diferenciável) pode ser continuado.

Demonstração. Suponhamos que $(\tilde{\xi}, \tilde{\lambda})$ seja uma solução da equação $f(\xi, \lambda) = 0$, ou seja, $f(\tilde{\xi}, \tilde{\lambda}) = 0$ e $D_\xi(\tilde{\xi}, \tilde{\lambda})$ seja não singular, então pelo Teorema da Função Implícita existe uma função diferenciável $u(\lambda)$ tal que $u(\tilde{\lambda}) = \tilde{\xi}$ e $f(u(\lambda), \lambda) = 0$. Sabemos que a aplicação *tempo de primeiro retorno* e a aplicação *de Poincaré* são diferenciáveis (para maiores detalhes veja [52] e [36]). Portanto, podemos aplicar o Teorema da Função Implícita a função $\Phi(t, \xi, \lambda) = \phi(t, x, \lambda) - x$. Observe que $\Phi(T, \tilde{\xi}, \tilde{\lambda}) = 0$ e $D_\xi \Phi(T, \tilde{\xi}, \tilde{\lambda}) = D_\xi \phi(T, \tilde{\xi}, \tilde{\lambda}) - I$ é inversível. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função diferenciável $u(\lambda)$ definida numa vizinhança de $\tilde{\lambda}$ tal que $\Phi(T, u(\lambda), \lambda) = 0$, logo, temos uma continuação para a solução periódica $\phi(t, \tilde{\xi}, \tilde{\lambda})$. ■

Teorema 72. (Teorema do Centro de Liapunov) Suponhamos que um sistema com uma integral não-degenerada possua um ponto de equilíbrio com expoentes $\pm \omega i$, $\lambda_3, \dots, \lambda_m$, onde $i\omega$ é imaginário puro. Se $\lambda_j/i\omega$ não é inteiro para $j = 3, \dots, m$, então existe uma família a um parâmetro de órbitas periódicas proveniente do ponto de equilíbrio. Além disso, quando no aproximamos do ponto de equilíbrio ao longo desta família os períodos tendem a $2\pi/\omega$ e os multiplicadores não triviais tendem a $\exp(2\pi\lambda_j/\omega)$, $j = 3, \dots, m$.

Demonstração. Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio, considere o sistema

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + g(x), \text{ onde } g(0) = 0 \text{ e } D_x g(0) = 0. \quad (\text{C.2})$$

Como estamos interessados em soluções periódicas perto da origem, façamos o re-escalamento da variável $x \rightarrow \epsilon x$ onde ϵ é um pequeno parâmetro. Assim, o sistema (C.2) torna-se

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + O(\epsilon), \quad (\text{C.3})$$

e quando $\epsilon = 0$ o sistema (C.3) é linear. Desde que o sistema linear possui autovalores imaginários puros $\pm i\omega$, então da teoria das EDO's para sistemas lineares segue que este sistema possui uma solução periódica de período $2\pi/\omega$ da forma $\phi(t) = \exp(\mathbf{A})tv$, onde v é um vetor não nulo fixo. A matriz de monodromia associada a solução periódica $\phi(t)$ é dada por $\exp(2\pi/\omega \mathbf{A})$. Portanto, os multiplicadores característicos de são da forma $\exp(2\pi/\omega \lambda_j)$, onde λ_j é autovalor de $\mathbf{A}$. Desde que por hipótese, os multiplicadores não triviais são diferentes de $+1$, portanto, esta solução periódica é elementar. Pelo teorema 71, existe uma solução periódica do sistema (C.2) da forma

$$\exp(\mathbf{A}t)v + O(\epsilon).$$

Voltando as coordenadas originais, ou seja, sem o re-escalamento, a solução é da forma

$$\epsilon \exp(\mathbf{A}t)v + O(\epsilon^2),$$

e o resultado segue. ■

C.2 Órbitas de Poincaré

A essência do método da continuação é que o problema contenha uma órbita periódica para um certo parâmetro, cujos multiplicadores podem ser calculados. O caso especial do problema dos três corpos, em que uma das massas é infinitesimal, conhecido como *Problema Restrito dos Três Corpos*, possui um parâmetro μ , onde as massas variam com este parâmetro, e quando $\mu = 0$ o problema se reduz ao *problema de Kepler* em coordenadas giratórias. Sabemos que o *problema de Kepler* possui muitas soluções periódicas. Mas, todas as soluções possuem multiplicadores $+1$ em coordenadas fixas, enquanto as órbitas circulares possuem multiplicadores não triviais em coordenadas giratórias. Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 73 (Poincaré). *Se $c \neq 1$ e $\frac{1}{1-c^3}$ não é inteiro, então as órbitas circulares do problema de Kepler em coordenadas giratórias com momento angular c podem ser continuadas no problema restrito dos três corpos (planar) para valores pequenos de μ .*

Antes de iniciarmos a demonstração faremos algumas considerações:

O problema de Kepler é dado por

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}, \quad (\text{C.4})$$

onde $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ é o vetor posição e μ é a constante Gm , m é a massa do corpo fixo na origem. Definindo $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}}$, o Hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{\mu}{\|\mathbf{r}\|}. \quad (\text{C.5})$$

Agora, considerando x, y as coordenadas usuais no plano, X e Y os respectivos momentos conjugados, introduzindo as coordenadas polares r e θ no plano xy , com R, Θ conjugados de r, θ , e supondo que a partícula de massa m move-se no plano, então $X = m\dot{x}$, $Y = m\dot{y}$, $R = m\dot{r}$ são os momentos lineares de x, y , e r respectivamente, e $\Theta = mr^2\dot{\theta}$ é o momento angular, lembremos que a transformação inversa é dada por

$$\begin{cases} X &= R \cos \theta - \left(\frac{\Theta}{r}\right) \sin \theta, \\ Y &= R \sin \theta + \left(\frac{\Theta}{r}\right) \cos \theta \end{cases}. \quad (\text{C.6})$$

Neste caso, o Hamiltoniano (C.5) em coordenadas polares é dado por

$$H = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r}. \quad (\text{C.7})$$

Agora, com as preliminares acima vamos a demonstração do teorema 73

Demonstração. Considerando μ um pequeno parâmetro, o Hamiltoniano (5.16) torna-se

$$H = \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{2} - \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{y} - \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} + O(\mu). \quad (\text{C.8})$$

Quando $\mu = 0$, o problema restrito se reduz ao problema de Kepler em coordenadas giratórias. Portanto, em coordenadas polares quando $\mu = 0$ temos que

$$H = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \Theta - \frac{1}{r}, \quad (\text{C.9})$$

donde

$$\dot{r} = R, \quad \dot{R} = -\frac{\Theta^2}{r^3} + \frac{1}{r^2}, \quad \dot{\theta} = \frac{\Theta}{r^2} - 1, \quad \dot{\Theta} = 0. \quad (\text{C.10})$$

Assim, o momento angular é uma integral, ou seja, é constante ao longo do movimento.

Seja $\Theta = c$, onde c é constante fixa. Portanto, das equações (C.10) teremos

$$\dot{r} = R, \quad \dot{R} = \frac{1}{r^2} - \frac{c^2}{r^3}. \quad (\text{C.11})$$

Observe que se $c \neq 1$, a órbita circular $R = 0$, $r = c^2$ é periódica de período $|2\pi^3 c / (1 - c^3)|$. De fato, integrando $\dot{\theta} = \frac{\Theta}{r^2} - 1$ segue que $\theta = 1 - c^3/c^3 t$, logo quando $\theta = 2\pi$ temos o resultado. Note que para o Hamiltoniano (C.9) temos o seguinte sistema linearizado para esta solução

$$H_2 = \frac{1}{2}(R^2 - c^{-6}r^2), \quad (\text{C.12})$$

e as equações do movimento são dadas por

$$\begin{cases} \dot{r} &= R \\ \dot{R} &= -c^{-6}r. \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

Uma solução para o sistema (C.13) é dada por

$$r(t) = \exp(\pm ic^{-3})t. \quad (\text{C.14})$$

Como o sistema (C.13) é autônomo segue que os multiplicadores não triviais desta solução (órbita circular) são da forma $\exp(\pm T\alpha_j)$, onde os α_j são os autovalores da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^{-6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo os autovalores são $\alpha = \pm c^{-3}i$, e os multiplicadores não triviais são $\exp(\pm i2\pi/(1 - c^3))$. Desde que por hipótese $1/(1 - c^3)$ não é inteiro, segue que os multiplicadores não triviais são diferentes de $+1$. Portanto, pelo teorema 71 segue o resultado. ■

C.3 Órbitas de Hill

Agora introduzimos um pequeno parâmetro μ e consideramos que partícula de massa infinitesimal está muito próxima dos primários.

Teorema 74. *Existem duas famílias a um parâmetro de soluções periódicas (quase elípticas circulares) no problema restrito dos três corpos (planar) as quais circundam um primário para todos os valores da massa μ . Além disso, estas órbitas tendem ao primário.*

Demonstração. Vamos considerar que um dos primários esteja na origem, ou seja, fazendo a mudança $x_1 = x_1 + \mu$ e $y_2 = y_2 - \mu$ o Hamiltoniano (5.16) é reescrito como

$$H = \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{2} - \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{y} - \frac{\mu}{d_1} - \frac{1 - \mu}{d_2} - \mu^2, \quad (\text{C.15})$$

onde

$$d_1^2 = x_1^2 + x^2, \quad d_2^2 = (x_1 - 1)^2 + x^2. \quad (\text{C.16})$$

Considere a seguinte mudança de coordenadas

$$\mathbf{x} = \epsilon^2 \xi \quad \mathbf{y} = \frac{1}{\epsilon} \eta.$$

Note que esta transformação é $\frac{1}{\epsilon}$ simplética. Com efeito, seja E tal transformação, então

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_{\mathbf{z}}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon^2} & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T, \text{ onde } \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Portanto, $\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B}^T = \frac{1}{\epsilon}\mathbf{J}$ como queríamos. Observe que se $\|\xi\|$ se aproxima de 1, então $\|\mathbf{x}\|$ aproxima-se de ϵ^2 , ou seja, $\|\mathbf{x}\|$ é muito pequeno quando ϵ é pequeno. Assim, ϵ mede a distância da partícula infinitesimal ao primário que está na origem. Assim, o novo Hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon^2} \|\eta\|^2 - \epsilon \xi^T \mathbf{K} \eta - \frac{\mu}{\sqrt{(\epsilon^2 \xi_1 - 1)^2 + \epsilon^4 \xi_2}} - \frac{1 - \mu}{\sqrt{\epsilon^4 (\xi_1^2 + \xi_2^2)}} - \mu^2 \right]. \quad (\text{C.17})$$

Fazendo $c^2 = 1 - \mu$, podemos reescrever o Hamiltoniano (C.17) como

$$H = \frac{1}{2\epsilon^3} \|\eta\|^2 - \xi^T \mathbf{K} \eta - \frac{c^2}{\epsilon^3 \|\xi\|} - \frac{1}{\epsilon} \left[-\frac{\mu}{\sqrt{(\epsilon^2 \xi_1 - 1)^2 + \epsilon^4 \xi_2}} - \mu^2 \right]. \quad (\text{C.18})$$

Expandindo em série de Taylor, em torno de $\epsilon = 1$ a função $f(\epsilon) = \frac{\mu}{\sqrt{(\epsilon^2 \xi_1 - 1)^2 + \epsilon^4 \xi_2}} + \mu^2$ e reescalando o tempo por $\tau = \epsilon^{-3}t$ temos que o Hamiltoniano é multiplicado por ϵ^3 , ou seja, Hamiltoniano torna-se

$$H = \left\{ \frac{1}{2} \|\eta\|^2 - \frac{c^2}{\|\xi\|} \right\} - \epsilon^3 \xi^T \mathbf{K} \eta + O(\epsilon^4). \quad (\text{C.19})$$

Em coordenadas polares temos

$$H = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{c^2}{r} - \epsilon^3 \Theta + O(\epsilon^4). \quad (\text{C.20})$$

Donde as equações do movimento são

$$\dot{r} = R, \quad \dot{R} = \frac{\Theta^2}{r^3} - \frac{c^2}{r^2}, \quad \dot{\theta} = \frac{\Theta}{r^2} - \epsilon^3, \quad \dot{\Theta} = 0. \quad (\text{C.21})$$

Observe que nas equações (C.21) os termos de ordem ϵ^4 podem ser omitidos, neste caso temos um sistema em que Θ é uma integral. Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{r} &= R \\ \dot{R} &= \frac{\Theta^2}{r^3} - \frac{c^2}{r^2}, \end{cases} \quad (\text{C.22})$$

cujas soluções de equilíbrio são

$$\Theta = \pm c, \quad R = 0 \quad \text{e} \quad r = 1. \quad (\text{C.23})$$

Note que as soluções (C.23) são periódicas de período $T = \frac{2\pi}{c \mp \epsilon^3}$. O Hamiltoniano linearizado de (C.20) em $R = 0$ e $r = 1$ assume a forma

$$H_2 = \frac{1}{2}(c^2 r^2 + R^2), \quad (\text{C.24})$$

donde

$$\begin{cases} \dot{r} &= R \\ \dot{R} &= -c^2 r \end{cases}, \quad (\text{C.25})$$

em forma matricial temos

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ R \end{pmatrix}. \quad (\text{C.26})$$

Portanto, as soluções do sistema (C.26) são da forma $\exp(\pm ict)$, e novamente como o sistema é autônomo os multiplicadores não triviais das órbitas circulares de (C.21) possuem a forma $\exp(\pm T ic)$, isto é, são iguais a $\exp(\pm ic2\pi/(c \mp \epsilon^3))$. Agora, expandindo o período T em torno de 0, temos

$$\tau(\epsilon) = \frac{2\pi}{c} \pm \frac{2\pi}{c^2}\epsilon^3 + O(\epsilon^6).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{A}\tau(\epsilon)) \begin{pmatrix} r \\ R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos c\tau(\epsilon) & \sin c\tau(\epsilon) \\ -\sin c\tau(\epsilon) & \cos c\tau(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ R \end{pmatrix} \\ &\quad + \epsilon^3 \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ R \end{pmatrix} + O(\epsilon^6), \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

onde $a = 2\pi/c$. Observe que aqui usamos o fato que $\sin(2\pi + a\epsilon^3) = \sin(2\pi) + \cos(2\pi)a\epsilon^3 + r(a\epsilon^3)$ (analogamente para $\cos(2\pi + a\epsilon^3)$). Logo, os multiplicadores não triviais são iguais a $+1 \pm \epsilon^3 \frac{2\pi i}{c} + O(\epsilon^6)$.

Considere a aplicação de Poincaré na superfície de nível do Hamiltoniano proxima da órbita circular. Seja u as coordenadas desta superfície, onde $u = X - X^0(t)$, observe que $u = 0$ se, e somente se, $X = X^0(t)$, onde $X^0(t)$ é a órbita circular quando $\epsilon = 0$. Seja o

sistema dado por $\dot{X} = \mathbf{A}X + O(\epsilon^3) + O(\epsilon^4)$ então, pelo lema 64 do apêndice B temos que a solução para este sistema é dada por

$$\phi(t, X, \epsilon) = \exp \mathbf{A}t X + \exp \mathbf{A}t \int_0^t \exp(-\mathbf{A}s) [O(\epsilon^3) + O(\epsilon^4)] ds,$$

observe que $\phi(T, X_0, 0) = X_0$. Assim, a aplicação de Poincaré é $P(u, \tau(u, \epsilon), \epsilon) = u + \epsilon p(u) + O(\epsilon^4)$, onde $p(0) = 0$, e $D_u(0)$ possui autovalores $\frac{\pm 2\pi}{c}$, ou seja, é não singular. Agora defina $G(u, \epsilon) = \frac{P(u, \epsilon) - u}{\epsilon} = p(u) + O(\epsilon^3)$. Observe que $G(0, 0) = 0$ e $D_u(0, 0) = D_u p(0)$, portanto pelo Teorema da Função Implícita existe um função diferenciável $\tilde{u}(\epsilon)$ tal que $G(\tilde{u}(\epsilon), \epsilon) = 0$ para ϵ suficientemente pequeno. Portanto, as duas soluções podem ser continuadas das equações (C.21) para as equações gerais, onde os termos de $O(\epsilon^4)$ são incluídos. ■

C.4 Órbitas de Cometas

Teorema 75. *Existem duas famílias a um parâmetro de soluções periódicas (quase elípticas) no problema restrito dos três corpos (planar) as quais circundam um primário para todos os valores da massa μ . Estas órbitas tendem ao infinito.*

Demonstração. Agora introduzimos um pequeno parâmetro e consideramos órbitas que são fechadas no infinito. No Hamiltoniano (5.16), façamos a seguinte mudança de coordenadas $\mathbf{x} \rightarrow \epsilon^{-2}\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \rightarrow \epsilon\mathbf{y}$, esta mudança é ϵ -simplética. Então o novo Hamiltoniano é dado por

$$H = -\mathbf{xKy} + \epsilon^3 \left\{ \frac{\|y\|}{2} - \frac{1}{\|x\|} \right\} + O(\epsilon^5). \quad (\text{C.28})$$

Em coordenadas polares teremos

$$H = -\Theta + \epsilon \left[\frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \right] + O(\epsilon^3), \quad (\text{C.29})$$

donde as equações de movimento são

$$\dot{r} = \epsilon^3 R, \quad \dot{R} = \epsilon^3 \left(\frac{\Theta^2}{r^3} - \frac{1}{r^2} \right), \quad \dot{\theta} = -1 + \epsilon^3 \frac{\Theta}{r^2}, \quad \dot{\Theta} = 0. \quad (\text{C.30})$$

Como na seção C.3, omitimos os termos de $O(\epsilon^5)$ nas equações (C.30), assim com esta aproximação Θ é uma integral primeira. as soluções de equilíbrio (órbitas circulares) são

$$\Theta = \pm 1, R = 0, r = 1. \quad (\text{C.31})$$

Note que as soluções (C.31) são periódicas, cujo período é $T = \frac{2\pi}{\mp\epsilon^3}$. Linearizando o sistema em $\dot{R}$ e $\dot{r}$ em torno das soluções (C.31), segue que o sistema linearizado é dado por

$$\dot{r} = \epsilon^3 R, \quad \dot{R} = -\epsilon^3. \quad (\text{C.32})$$

Sabemos que o sistema (C.32) possui soluções da forma $\exp(\pm i\epsilon^3 t)$, e os multiplicadores não triviais das órbitas circulares (C.31) são $\exp(\pm i\epsilon^3 2\pi)/(1 \mp \epsilon)$ e expandindo como na seção (C.3) teremos que eles são iguais a $+1 \pm \epsilon^3 2\pi i + O(\epsilon^6)$. Portanto, repetindo o argumento da seção (C.3), segue que estas duas soluções podem ser continuadas. ■

Apêndice D

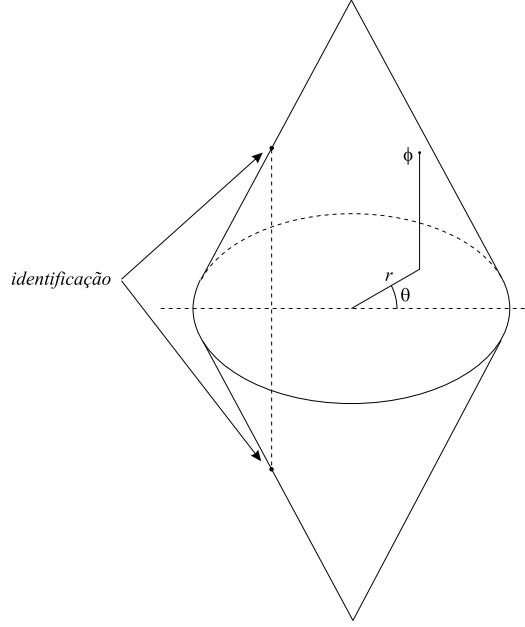
Fibração de Hopf

Teorema 76. *A esfera S^3 , é a união de círculos. Dois desses círculos formam um link. O espaço quociente obtido identificando-se um círculo com um ponto é a esfera S^2 .*

Demonstração. Consideremos as coordenadas polares r, θ, ρ, ϕ para $\mathbb{R}^4$, notemos que, sobre a esfera S^3 , $r^2 + \rho^2 = 1$, donde $\rho = \pm\sqrt{1-r^2}$, assim, podemos olhar apenas para r no intervalo $[0, 1]$. Sejam r, θ, ϕ as coordenadas em S^3 . Dessa forma, r, θ , são justamente as coordenadas polares para o disco unitário fechado. Para cada ponto do disco aberto existe um círculo com coordenadas ρ e $\phi \pmod{2\pi}$, porém observe que para $r \neq 1$ conseqüentemente $\rho \neq 0$, então o círculo colapsa para um ponto na vizinhança do disco. O modelo geométrico da esfera S^3 é dois cones sólidos, com pontos sobre a vizinhança dos cones identificados como mostra a figura D.1.

Note que para cada ponto do disco aberto com coordenadas (r, θ) existe um segmento perpendicular ao disco, a coordenada angular ϕ mede o tamanho deste segmento, observe que $\phi = 0$ é exatamente o disco, $\phi = \pi$ e $\phi = -\pi$ são respectivamente a fronteira superior e inferior do cone. Cada ponto da fronteira superior do cone com coordenadas $(r, \theta, \phi = \pi)$ é identificado com cada ponto da fronteira inferior do cone com coordenadas $(r, \theta, \phi = -\pi)$. Com esse modelo temos os seguintes fatos geométricos :

- Considere $0 < \alpha < 1$, então o conjunto $r = \alpha$ é um toro $T^2 \subset S^3$,
- Para $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, o conjunto $r = \alpha$ é um círculo.

Figura D.1: Modelo geométrico de S^3

Como r é uma integral para o par de osciladores harmônicos, estes conjuntos são invariantes pelo fluxo definido pelos osciladores harmônicos;

- Os círculos $r = 0$ e $r = 1$ são soluções periódicas, um dos círculos intercepta o disco limitado pelo outro círculo, ou seja, estes círculos formam um link. O círculo $r = 1$ é a fronteira do disco sombreado na figura D.2, observe que o disco $r = 0$ intercepta este disco uma vez;
- Se $\omega = \mu = 1$, neste caso todas as soluções são periódicas, e estas órbitas são círculos em S^3 com θ e ϕ variando de zero a 2π , exceto dois círculos especiais, onde $\phi = 0$ e θ variando e reciprocamente. Portanto, cada órbita semelhante corta o disco aberto, com $\phi = 0$, em um ponto. Assim, podemos identificar cada órbita semelhante com um único ponto onde ela intercepta o disco, observe que existe uma órbita especial que corta o disco exatamente no seu centro. Logo, podemos identifica-la com o centro. A outra é a fronteira externa ao círculo, que é uma órbita singular. Quando identificamos este círculo com um ponto, o disco fechado identifica-se com o círculo externo, tornando-se a esfera S^2 . ■

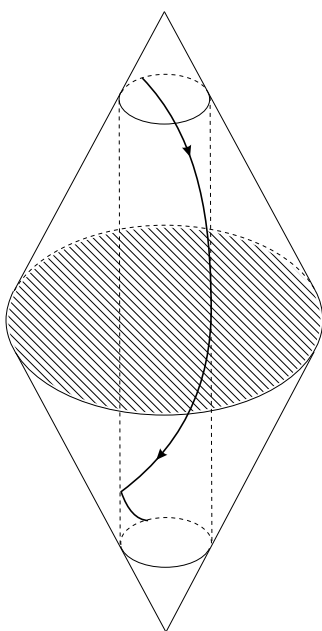


Figura D.2: Órbita sobre S^3

Apêndice E

O Teorema de Sturm

Suponha que $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ é um polinômio que não possui raízes múltiplas em $\mathbb{C}$. Então $MDC(p(t), p'(t)) = 1$, e a seqüência de polinômios $\{p_0(t), \dots, p_m(t)\}$ onde $p_0(t) = p(t)$, $p_1(t) = p'(t)$ e $p_i(t)$ é o negativo do resto da divisão de $p_{i-1}(t)$ por $p_{i-2}(t)$ em $\mathbb{Q}[t]$ vai, eventualmente, ter uma constante não nula $p_m(t)$ e todas as subseqüentes nulas. Esta seqüência de polinômios é denominada seqüência de Sturm associada a $p(t)$.

Teorema 77 (Teorema de Sturm). *Se os números reais a e b ($a < b$) não são raízes do polinômio $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$, então o número de raízes reais de $p(t)$ no intervalo $[a, b]$ é a diferença entre o número de mudança de sinais da seqüência de números reais $p_0(a), \dots, p_m(a)$ e o número de mudança de sinais da seqüência $p_0(b), \dots, p_m(b)$.*

Bibliografia

- [1] Arnold, V. I.: "Mathematical Methods of Classical." Spring verlag, New York, 1978.
- [2] Boccaletti, D. e Pucacco, G.: "Theory of Orbits". Spring verlag, New York, 1996.
- [3] Bruns, H. : Über die Integrale des Vielkörper-Problems. *Acta Math*, **11**, 35-96, 1887.
- [4] Cabral, H.: Constant inclination solutions in the three-body problem. *J. Diff. Eqs.*, **84**, 2 215-227, 1990.
- [5] Cabral, H.: On the Integral Manifolds of the N-Body Problem. *Inventiones Math.*, **20**, 59-72, 1973.
- [6] Chazy. J.: Sur les solutions isosceles du problème des trois corps, *Bull. Astron.*, **1**, 171-188, 1921.
- [7] Chazy. J.: *Bull. Soc. Math. de France*, **55**, 222-268, 1927.
- [8] Chenciner, A e Montgomery, R.: A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Annals of Mathematics*, **152**, 881-901, 2000.
- [9] Clairant e d'Lambert.: "Théorie de la Lune". Paris, 1747.
- [10] Devaney, R.: Motion near total collapse in the planar isosceles three-body problem. *Cel. Mech.*, **28**, 1-2, 25-36, 1982.
- [11] Diacu, F.N: "Singularities of to the n-body problem." Les publications CRM, Montréal, 1992.
- [12] Easton, R.: Some Topology of the Three-body problem. *J. Diff. Eqs.*, **10**, 371-377, 1971.

- [13] Easton, R.: Capture Orbits and Melnikov Integrals in the Planar Three-body problem. *Cel. Mech.*, **50**, 283-297, 1991.
- [14] Easton, R.: Parabolic Orbits in the Planar Three-body problem. *J. Diff. Eqs*, **52**, 116-134, 1984.
- [15] Euler, L.: De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium. *Nov. Comm.Petrop.*, **11**, 144-151, 1765.
- [16] Hadjidemetriou, J.: The continuation of periodic orbits from the restricted to the general Three-body problem. *Cel Mech*, **12**, 222-226, 1971.
- [17] Hénon. M.: Families of periodic orbits in the three-body problem. *Cel. Mech.*, **10**, 375, 1974.
- [18] Ivanov. A.: Investigation of stability of constant Lagrange solutions of the plane unrestricted three- body problem. *CPMM*, **43**, 5, 787-795, 1979.
- [19] Jacobi, C.: Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps. *Jour. Math.*, **26**, 115, 1843.
- [20] Jacobi, C.: Werke, **4**, 478-485, 1845.
- [21] Kunitsyn, A. L.: Geometric interpretation of necessary conditions of stability of triangular libration point of the general three-body problem. *Cel. Mech.*, **3**, 155-174, 1975.
- [22] Lagrange, J.L.: "Essais sur le problem des trois corps."Paris, 1772.
- [23] Laplace, P.S.: "Traité de Mécanique Céleste, Vol. V."Bachelier, Paris, 1825 (Chelsea Publ., 1969).
- [24] Levi-Civita.: Sur la régularisation du problème des trois corps. *Acta Math.*, **42**, 99, 1918.
- [25] Liouville, J.: Du problème des trois corps. *J. Math.*, **20**, 1856.
- [26] Marcolongo, R.: "Il Problema dei Tre Corpi."Hoepli, Milan, 1919.
- [27] Marchal, C.: "The Three-body problem."Elsevier Science Publisher B. V.,1990.

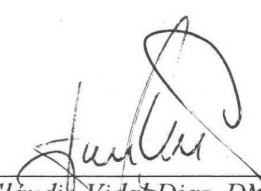
- [28] Marchal, C.: Etude de la stabilité des solutions de Lagrange du problème des trois corps. Cas où l'excentricité et les 3 masses sont quelconques. *Séminaire du Bureau des Longitudes*, 1968.
- [29] McCord, C.: *Saari conjecture for the planar three-body problem with equal masses*. Preprint *Cel. Mech.* 2004.
- [30] McGehee, R.: Triple collision in the collinear three-body problem. *Inv. Math.*, **27**, 191-227, 1971.
- [31] Moeckel, R.: Orbits of the three-body problem which pass infinitely close to triple collision. *Am. J. Math.*, **103**, 6, 1323-1341, 1981.
- [32] Moeckel, R.: Heteroclinic phenomena in the isosceles three-body problem. *SIAM*, **15**, 5, 857-876, 1984.
- [33] Moeckel, R.: Chaotic dynamics near triple collision. *Arch. Rat. Mech.*, **107**, 1, 37-69, 1989.
- [34] Moeckel, R.: *A computer-assisted proof of Saari's conjecture for the planar three-body problem*. Preprint (<http://www.math.umm.edu/rick/research/saari5.pdf>.)
- [35] Moser, J. and Siegel, C.: "Lectures on Celestial Mechanics." Springer Verlag, Berlin, 1971.
- [36] Meyer, K. e Hall, R.: "Introduction to Hamiltonian dynamical systems and N-body problem." Springer Verlag, New York, 1992.
- [37] O'Connor, J. e Robertson, E.: *Orbits and Gravitation*. Disponível em (<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Orbits.html>).
- [38] O'Connor, J. e Robertson, E.: *Jules Henri Poincaré*. Disponível em (<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Orbits.html>)
- [39] Painlevé, P.: Leçons sur la théorie analytique des équations dynamiques. *Acta Math.*, **13**, 259-265, 1890.
- [40] Palmore, J.: Saari's Conjecture Revisited. *Cel. Mech.*, **19**, 79-80, 1980.
- [41] Pars, L. A.: "A treatise on analytical dynamics." Heinemann, London, 1968.

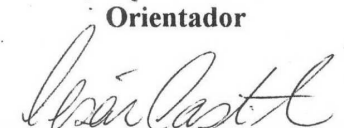
- [42] Poincaré, H.: Sur le problème des trois corps et les équation de la dynamique. *Acta Math.*, **13**, 259, 1890.
- [43] Robinson, C.: Homoclinic Orbits and Oscillation for the Planar The Three-body problem. *J. Diff. Eqs.*, **52**, 356-377, 1984.
- [44] Saari, D.: On oscillatory motion in the problem of three-body. *Cel. Mech.*, **1**, 343-346, 1970.
- [45] Simó, C.: Masses for which triple collision is regulrizable. *Cel. Mech.*, **21**, 25-36, 1980.
- [46] Simó, C.: Analysis of triple collision in the isosceles problem. *Classical Mechanics and Dynamical Systems*, 203-224, *Lectures Notes in Pure Appl. Math.*, **70**, New York, 1981.
- [47] Sotomayor, J.: "Lições de equações diferenciais ordinárias.", IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [48] Sundman, K.:Mémoire sur le problème de troi corps. *Acta Math.*, **36**, 105-179, 1912.
- [49] Sundman, K.: Nouvelles reserches sur le problème de troi corps. *Acta Soc. Sci. Fenn.*, **35**, 1909.
- [50] Szebehely, V.: Classification of the motions of three body in plane. *Cel. Mech.*, **4**, 111-118, 1971.
- [51] Szebehely, V.: "Theory of orbits." Academic Press, London, 1967.
- [52] Vidal, J. C.: "Uma introdução aos Sistemas Dinâmicos Hamiltoniano." Notas de Curso UFPE, Recife, 2003.
- [53] Vidal, J. C. e Cabral, H.: "Introdução À Mecânica Celeste." Notas de curso UFPE, Recife, 1999.
- [54] Waldvogel, J.: Symmetric and regularized coordinates on the plane triple collision manifold. *Cel. Mech.*, **28**, 69-82, 1982.
- [55] Wintner, A.: "The analytical foundations of celestial mechanics." Princeton University Press, New Jersey, 1947.
- [56] Wintner, A.: On the periodic analytic continuations of the circular restricted problem of three-body. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **4**, 435-439, 1936.

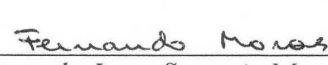
- [57] Wilczynski.: Reserche geometriche intorno al problem dei tre corpi. *Ann. di Mat.*, **21**, 17-31, 1913.
- [58] Xia, Z.: Arnold diffusion and oscillatory solutions in the planar three-body problem. *J. Diff. Eqs.*, **110**, 2, 289-321, 1994.

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado:


José Cláudio Vidal Diaz, DMAT-UFPE
Orientador


César Augusto Rodrigues Castilho, DMAT-UFPE


Fernando Jorge Sampaio Moraes, DF-UFPE

ESTUDO DO PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS

Por
Gleudson Gomes da Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL