MERGULHOS LIVRES ISOMÉTRICOS DE VARIEDADES COMPACTAS EM $\mathbb{R}^{s_n+4n+5}$

MARCOS GRILO ROSA

Orientador: Francisco Brito

Co-Orientador: Pedro Ontaneda

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Para meu denguinho, Quei

Resumo

Saber em que condições pode-se imergir ou mergulhar uma variedade em algum espaço euclideano foi um problema que ficou em aberto por um bom tempo. Em 1936, Whitney provou que qualquer variedade de Hausdorff e com base enumerável n-dimensional C^∞ V pode ser imersa em $\mathbb{R}^{2n}$ e mergulhada em $\mathbb{R}^{2n+1}$. Se V não tem componentes fechadas, este resultado pode ser refinado para $2n-1$ no caso das imersões e para $2n$ no caso dos mergulhos. Em 1954, John Nash provou, em seu artigo intitulado *C^1 Isometric Imbeddings*, que qualquer variedade riemanniana n-dimensional tem uma imersão isométrica C^1 em $\mathbb{R}^{2n}$ e um mergulho isométrico C^1 em $\mathbb{R}^{2n+1}$. Dois anos depois, o mesmo Nash provou, em seu artigo intitulado *The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds* que qualquer variedade compacta riemanniana C^k tem um mergulho isométrico C^k em $\mathbb{R}^{3\frac{n(n+1)}{2}+4n}$, para $3 \leq k \leq \infty$. Nesta dissertação apresentaremos uma versão para aplicações livres do Teorema de Nash sobre mergulhos isométricos de variedades compactas $C^\infty(C^a)$ em $\mathbb{R}^q$. Esta versão encontra-se no artigo *Embeddings and Dimensions in Riemannian Geometry* publicado originalmente em russo por Gromov e Rokhlin. Eles provaram que toda variedade riemanniana compacta $C^\infty(C^a)$ pode ser mergulhada livre e isometricamente em $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}+4n+5}$.

Palavras-Chave: Variedades Riemannianas, Aplicações Livres, Mergulhos Livres, Fibrados Vetoriais, Conjuntos Diferenciais.

ABSTRACT

To know where conditions can be immersed or be embedded a manifold in some euclideano space was a problem that was in open for a good time. In 1936, Whitney proved that any manifold of Hausdorff and with enumerable base n-dimensional C^1 V can be immersed in $\mathbb{R}^{2n}$ and embedded in $\mathbb{R}^{2n+1}$. If V does not have closed components, this result can be fine for $2n-1$ in the case of the immersions and for $2n$ in the case of the embeddings. In 1954, John Nash proved, in its intitled article C^1 Isometric Imbeddings, that any n-dimensional riemanniana manifold has a isometric immersion C^1 in $\mathbb{R}^{2n}$ and a isometric embedding C^1 in $\mathbb{R}^{2n+1}$. Two years later, the same Nash proved, in its intitled article The Imbedding Problem will be Riemannian Manifolds that any compact manifold riemanniana C^k has a isometric embedding C^k in $\mathbb{R}^{3\frac{n(n+1)}{2}+4n}$, for $3 \leq k \leq \infty$. In this dissertação we will present a version for free applications of the theorem of Nash on isometric embeddings of compact manifolds $C^1(C^a)$ in $\mathbb{R}^q$. This version originally meets in the article *Embeddings and Dimensions in Riemannian Geometry* published in russian for Gromov and Rokhlin. They had proved that all compact riemanniana manifold $C^1(C^a)$ can be embedding free and isometrically in $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}+4n+5}$.

Key Works: Riemannian Manifolds, Free Function, Free Embedding, Fibres, Diferential Sets.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por tudo.

Ao professor Francisco Brito, pela paciência, prestatividade, orientação precisa e segura. Muito obrigado, mesmo.

Ao professor Pedro Ontaneda pela idéia inicial, assistência e muito mais.

A Tânia, sempre prestativa.

Ao Professor Carloman Carlos Borges, pelo apoio.

Aos professores Haroldo Benatti e Maria Hildete, grandes incentivadores.

Ao grande camarada Aldi, com sua seriedade inconfundível.

A minha família, meu pai, minha mãe, meus irmãos e o grande Dick.

A Dona Noêmia e Seu João.

A todos aqueles que não lembro o nome agora.

Em especial, a minha Jaqueline, por estar ao meu lado esse tempo todo.

Conteúdo

PREFÁCIO

Saber em que condições pode-se imergir ou mergulhar uma variedade em algum espaço euclideano foi um problema que ficou em aberto por um bom tempo. Em 1936, Whitney provou que qualquer variedade de Hausdorff e com base enumerável n-dimensional C^∞ V pode ser imersa em $\mathbb{R}^{2n}$ e mergulhada em $\mathbb{R}^{2n+1}$. Se V não tem componentes fechadas, este resultado pode ser refinado para $2n-1$ no caso das imersões e para $2n$ no caso dos mergulhos. Além disso, se n não é uma potência de 2, qualquer variedade (de Hausdorff e com base enumerável) n-dimensional C^∞ pode ser mergulhada em $\mathbb{R}^{2n-1}$.

Em 1954, John Nash provou, em seu artigo intitulado *C^1 Isometric Imbeddings*, que qualquer variedade riemanniana n-dimensional tem uma imersão isométrica C^1 em $\mathbb{R}^{2n}$ e um mergulho isométrico C^1 em $\mathbb{R}^{2n+1}$. Dois anos depois, o mesmo Nash provou, em seu artigo intitulado *The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds* que qualquer variedade compacta riemanniana C^k tem um mergulho isométrico C^k em $\mathbb{R}^{3\frac{n(n+1)}{2}+4n}$, para $3 \leq k \leq \infty$.

Nesta dissertação apresentaremos uma versão para aplicações livres do Teorema de Nash sobre mergulhos isométricos de variedades compactas $C^\infty(C^a)$ em $\mathbb{R}^q$. Esta versão encontra-se no artigo *Embeddings and Dimensions in Riemannian Geometry* publicado originalmente em russo por Gromov e Rokhlin. Eles provaram que toda variedade riemanniana compacta $C^\infty(C^a)$ pode ser mergulhada livre e isometricamente em $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}+4n+5}$.

Nos capítulos 1 e 2, as variedades não são necessariamente riemannianas. Na seção 1.1, apresentamos algumas definições básicas e fixamos notações e terminologias. Fibrado vetoriais e seções estão presentes em toda a dissertação. Resultados sobre existência de seções aparecem na seção 1.2. Estes resultados serão utilizados, posteriormente, para demonstrar a existência de soluções unit'arias de conjuntos algébricos. Na seção 1.3, apresentamos a definição de aplicação livre e provamos a existência de mergulhos livres (não necessariamente isométricos) de variedades n-dimensionais em $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

No capítulo 2 lidamos com conjuntos diferenciais. Na seção 2.1 a idéia fundamental é construir subfibrados a partir de conjuntos algébricos. Com isso, podemos relacionar as soluções de um conjunto algébrico com seções do subfibrado associado (ao conjunto algébrico). Logo, a existência de soluções de conjuntos algébricos remete a existência de seções do subfibrado associado. Os resultados provados na seção 2.1 são consequências dos resultados da seção 1.2.

Na seção 2.2 estabelecemos proposições que garantem a existência e a unicidade de soluções de conjuntos diferenciais. Utilizamos um importante resultado em Equações Diferenciais Parciais: o Teorema de Cauchy-Kowalewsky.

No capítulo 3 as variedades são admitidas riemannianas. Na seção 3.1, mostramos que qualquer variedade compacta pode ser mergulhada isometricamente em $\mathbb{R}^q$, para q suficientemente grande. Destacamos a utilização do Teorema da Função Implícita de Nash. Na seção 3.2, estabelecemos a dimensão mínima para que haja mergulhos locais livres locais isométricos de variedades riemannianas compactas em espaços euclideanos. Destacamos a utilização do Lema de Janet juntamente com os resultados da seção 2.2 que garantem existem de soluções de conjuntos diferenciais. Na última seção, a 3.3, provamos o principal resultado desta dissertação.

Recife, Janeiro de 2004

1 MERGULHOS LIVRES

Neste capítulo fixaremos notações e terminologias assim como, apresentaremos definições e alguns resultados que serão utilizados na demonstração do teorema para mergulhos livres.

1.1 PRELIMINARES

Assumiremos conhecido o conceito de função C^∞ (ou C^∞-função) $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Uma função C^∞ $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é analítica em $a = (a_1, \ldots, a_m)$ se puder ser definida exatamente por sua série de Taylor em alguma vizinhança U_a contendo a, isto é,

$$f(x) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty} \frac{1}{i_1! \ldots i_m!} \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_m} f(a_1, \ldots, a_m)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_m^{i_m}} (x_1 - a_1)^{i_1} \ldots (x_m - a_m)^{i_m}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_m) \in U_a$. Uma função C^∞ $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ é analítica em $a = (a_1, \ldots, a_m)$ se cada função coordenada f_i é analítica. Usaremos a notação função C^a (ou C^a-função) para referirmos a funções analíticas.

Definição 1.1.1 *Um conjunto V é uma variedade n-dimensional se for um espaço topológico de Hausdorff com uma base enumerável e que satisfaz a seguinte condição:*

i) Para todo $p \in V$, existem uma vizinhança U de p e um homeomorfismo $x : U \to W$, onde W é um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.2 *Uma estrutura diferenciável $C^\infty(C^a)$ sobre uma variedade n-dimensional V é uma família $\{(x_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de aplicações $C^\infty(C^a)$ $x_\alpha : U_\alpha \subset V \to W_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, com U_α aberto de V e W_α aberto de $\mathbb{R}^n$, tal que:*

i) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = V$;

ii) Para todo α, β tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $x_\alpha \circ x_\beta^{-1} : x_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to W_\alpha$ é $C^\infty(C^a)$;

iii) A família $\{(x_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ é maximal relativamente às condições i) e ii).

Definição 1.1.3 *Uma variedade $C^\infty(C^a)$ (ou $C^\infty(C^a)$-variedade) é uma variedade com estrutura diferenciável $C^\infty(C^a)$.*

Se $p \in U_\alpha$ então o par (x_α, U_α) é uma parametrização de p e chamaremos $x_\alpha(p) = (x_1, \ldots, x_n)$ de coordenadas do ponto p. Sejam V_1 e V_2 variedades $C^\infty(C^a)$, m e n-dimensionais respectivamente. Uma aplicação $f : V_1 \to V_2$ é $C^\infty(C^a)$ se para cada $p \in V_1$, dada uma parametrização (y_α, W_α) de $f(p)$, existe uma parametrização (x_α, U_α) de p tal que $y_\alpha \circ f \circ x_\alpha^{-1}$ é $C^\infty(C^a)$ em $x_\alpha^{-1}(p)$.

Definição 1.1.4 *Sejam V variedade C^∞ n-dimensional e $C^\infty(p)$ o conjunto de funções C^∞ definidas em algum aberto que contém $p \in V$. Definimos o espaço T_pV tangente a V no ponto $p \in V$, o conjunto constituído de todas as aplicações $X_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ que satisfazem para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^\infty(p)$ as seguintes condições:*

i) $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha(X_p f) + \beta(X_p g)$;

ii) $X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g)$;

iii) $(X_p + Y_p)f = X_p f + Y_p f$;

iv) $(\alpha X_p)f = \alpha(X_p f)$.

Um vetor tangente a V em p é qualquer função $X_p \in T_pV$. O espaço tangente T_pV possui uma estrutura de espaço vetorial n-dimensional e dada uma parametrização (x, U), com $x(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p))$, $p \in U$, o conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ é uma base para T_pV que independe da parametrização (x, U).

Definição 1.1.5 *Sejam V_1 e V_2 variedades $C^\infty(C^a)$ e $f : V_1 \to V_2$ uma aplicação $C^\infty(C^a)$. Para cada $p \in V_1$ e $v \in T_pV_1$, escolha uma curva $C^\infty(C^a)$ $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to V_1$, com $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$. A diferencial de f no ponto p é a aplicação $d_pf : T_pV_1 \to T_{f(p)}V_2$ definida por $d_pf(v) = \beta'(0)$, onde $\beta = f \circ \alpha$.*

A aplicação d_pf é linear e não depende da escolha de α. Uma aplicação $C^\infty(C^a)$ $f : V_1 \to V_2$ é uma imersão $C^\infty(C^a)$ se $d_pf : T_pV_1 \to T_{f(p)}V_2$ é injetiva para todo $p \in V_1$. Se a imersão $C^\infty(C^a)$ f é um homeomorfismo então f é um mergulho $C^\infty(C^a)$ e seu conjunto imagem $f(V_1)$ é denominado subvariedade $C^\infty(C^a)$ de V_2.

Uma métrica riemanniana $C^\infty(C^a)$ g sobre uma variedade $C^\infty(C^a)$ V é uma forma diferencial quadrática positiva $C^\infty(C^a)$ definida sobre V, isto é, g é uma função $C^\infty(C^a)$ que associa a cada ponto da variedade V uma forma quadrática definida em T_pV. Usaremos, quando necessário, a notação g_p para indicar a forma quadrática definida em T_pV. Lembramos que dada uma forma quadrática Q podemos definir uma forma bilinear simétrica.

Dado $p \in V$, sejam (x, U) uma parametrização de p, com coordenadas $x(p) = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ uma base para T_pV. As funções $g_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \rangle$, $1 \leq i, j \leq n$ são chamadas de expressão da métrica riemanniana na parametrização (x, U).

Uma variedade riemanniana $C^\infty(C^a)$ é uma variedade $C^\infty(C^a)$ com uma métrica riemanniana. Seja $f : V_1 \to V_2$, um mergulho $C^\infty(C^a)$, com V_1, V_2 variedades $C^\infty(C^a)$. Sendo g métrica em V_2, denotaremos por $g(f)$ a métrica em V_1 induzida por f definida por:

$$g(f)(v) = g(d_p f(v))$$

para quaisquer $v \in T_pV_1$, $p \in V_1$. Suponhamos que V_1 e V_2 possuam métricas g_1 e g_2 respectivamente. Um difeomorfismo $f : V_1 \to V_2$ é uma isometria se:

$$g_1(v) = g_2(d_p f(v))$$

para quaisquer $v \in T_pV_1$ e $p \in V_1$.

Uma família de abertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = V$ é denominada cobertura de V. Uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é localmente finita se a interseção de qualquer subfamília infinita é vazia. O suporte de uma função $f : V \to \mathbb{R}$ é o fecho do conjunto de pontos $p \in V$ para os quais $f(p) \neq 0$, isto é, $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{p \in V; f(p) \neq 0\}}$.

Definição 1.1.6 *Uma partição da unidade C^∞ é uma coleção de funções C^∞ $\{\lambda_i : V \to \mathbb{R}\}_{i \in \mathbb{N}}$ definidas sobre uma variedade C^∞ V tal que:*

i) $\lambda_i(p) \geq 0$, *para todo* $p \in V$;

ii) $\{\text{supp}(\lambda_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ *forma uma cobertura localmente finita de* V*;*

iii) $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(p) = 1$*, para todo* $p \in V$*.*

Lembramos que dada uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de uma variedade $C^\infty(C^a)$ existe uma partição de unidade da variedade subordinada a $\{U_\alpha\}$. Além disso, em toda variedade $C^\infty(C^a)$ é possível definir uma métrica riemanniana.

Definição 1.1.7 *Sejam* V*,* B *variedades* C^∞ *e* $\pi : V \to B$ *uma aplicação* C^∞*. A tripla* (V, B, π) *é um fibrado vetorial* C^∞ *q-dimensional se:*

i) Para todo $b \in B$*,* $\pi^{-1}(b)$ *é um espaço vetorial real q-dimensional;*

ii) Para todo $b \in B$*, existem uma vizinhança* U *de* b *e um difeomorfismo* C^∞ $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^q$ *tal que a restrição* $p \circ \varphi|_{\pi^{-1}(b)}$ *é um isomorfismo linear, onde* p *é a projeção canônica de* $U \times \mathbb{R}^q$ *sobre* $\mathbb{R}^q$*.*

Chamaremos V de variedade total, B de base do fibrado, π de projeção e $\pi^{-1}(b)$ de fibra sobre o ponto b. Evidentemente que podemos definir fibrado vetorial C^a. Neste caso, a variedade total V e a base do fibrado B são variedades de classe C^a, o mesmo valendo para a aplicação projeção π e o difeomorfismo φ. Um fibrado vetorial $C^\infty(C^a)$ q-dimensional (V, B, π) é euclideano se existe uma função $\langle , \rangle : V \to \mathbb{R}$ tal que $\langle , \rangle$ é um produto interno sobre cada fibra $\pi^{-1}(b)$, $b \in B$.

Exemplo 1.1.1 *Construção do fibrado trivial.*

Seja B uma variedade $C^\infty(C^a)$ n-dimensional. Dado $b \in B$, o produto $\{b\} \times \mathbb{R}^q$ tem uma estrutura de espaço vetorial. De fato, basta definirmos as operações:

i) $(b, v) \oplus (b, w) = (b, v + w)$;

ii) $\lambda \odot (b, v) = (b, \lambda \cdot v)$.

Verifiquemos que $(B \times \mathbb{R}^q, B, \pi)$ é de fato um fibrado vetorial $C^\infty(C^a)$ q - dimensional, onde π é a projeção do produto $B \times \mathbb{R}^q$ sobre o primeiro fator.

Notemos que, para todo $b \in B$, $\pi^{-1}(b) = \{b\} \times \mathbb{R}^q$ e como já foi dito anteriormente, $(\{b\} \times \mathbb{R}^q, \oplus, \odot)$ tem estrutura de espaço vetorial q-dimensional. Além disso, para todo $b \in B$, podemos tomar uma vizinhança U de b e a aplicação identidade $i : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^q$, já que $\pi^{-1}(U) = U \times \mathbb{R}^q$. Sendo $p : U \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ a projeção usual, $p \circ i\ |_{\pi^{-1}(b)}: \pi^{-1}(b) = \{b\} \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ é um isomorfismo linear, pois $p \circ i(b, v) = v$. O fibrado $(B \times \mathbb{R}^q, B, \pi)$ é chamado de fibrado trivial.

Exemplo 1.1.2 *Construção do fibrado tangente.*

Sejam V uma variedade $C^\infty(C^a)$ n-dimensional e T_pV o espaço tangente no ponto $p \in V$. Seja $T(V) = \{(p, v); p \in V, v \in T_pV\}$ que possui uma estrutura diferenciável $2n$-dimensional. De fato, dado um ponto $(p, v) \in T(V)$, podemos tomar como coordenadas deste ponto $(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$, onde $(x_1, \ldots, x_n)$ são as coordenadas de $p \in V$ e $(v_1, \ldots, v_n)$ as coordenadas de $v \in T_p(V)$ na base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$.

Seja $\pi : T(V) \to V$ a projeção canônica, $\pi(p, v) = p$. A tripla $(T(V), V, \pi)$ é um fibrado vetorial $C^\infty(C^a)$ n-dimensional pois dado $p \in V$, $\pi^{-1}(p) = T_pV$ é um espaço vetorial n-dimensional. Além disso, sejam $p \in V$ e U vizinhança de p. Podemos definir a aplicação identidade de $\pi^{-1}(U)$ em $U \times \mathbb{R}^n$ desde que identifiquemos $T_pV \simeq \mathbb{R}^n$. Além disso, $p \circ \varphi_{|_{\pi^{-1}(p)}}$ é um isomorfismo linear. O fibrado $(T(V), V, \pi)$ é chamado de fibrado tangente sobre V.

Exemplo 1.1.3 *Outro exemplo de fibrado.*

Sejam V variedade n-dimensional e $Q_p(V)$ o conjunto das formas quadráticas definidas sobre T_pV. O conjunto $Q_p(V)$ tem estrutura de espaço vetorial s_n-dimensional, onde $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$. A união $Q(V)$ de todos os espaços $Q_p(V)$ tem estrutura natural $C^\infty(C^a)$. Podemos definir o fibrado vetorial s_n-dimensional $C^\infty(C^a)$ $(Q(V), V, \pi)$, onde π projeta uma forma quadrática em $Q_p(V)$ no ponto $p \in V$.

Definição 1.1.8 *Seja (V, B, π) fibrado vetorial $C^\infty(C^a)$ q-dimensional. Uma seção deste fibrado é uma aplicação $s : B \to V$ contínua tal que $s \circ \pi(v) = v$, para todo $v \in V$. Isto equivale a afirmar que $s(b) \in \pi^{-1}(b)$, para todo $b \in B$.*

Uma seção $s : B \to V$ é de classe $C^\infty(C^a)$ se s for uma aplicação $C^\infty(C^a)$. Podemos também, definir seções parciais, que são seções definidas sobre subvariedades de B. Um fato interessante é a existência de uma correspondência injetiva entre seções de um fibrado trivial $(B \times \mathbb{R}^q, B, \pi)$ e as aplicações contínuas $f : B \to \mathbb{R}^q$. De fato, sendo $C^0(B, \mathbb{R}^q)$ o conjunto das aplicações contínuas de $B \to \mathbb{R}^q$ e $S(B, B \times \mathbb{R}^q)$ o conjunto das seções do fibrado trivial $(B \times \mathbb{R}^q, B, \pi)$, definimos:

$$s : C^0(B, \mathbb{R}^q) \to S(B, B \times \mathbb{R}^q)$$

$$f \quad \mapsto \quad s(f)$$

onde $s(f)(b) = (b, f(b))$. É claro que $s(f)$ é uma seção pois suas funções coordenadas são contínuas. Diremos que f e $s(f)$ são associadas entre si. É claro que se f é de classe $C^\infty(C^a)$ então $s(f)$ também é de classe $C^\infty(C^a)$ e a recíproca também é verdadeira.

Exemplo 1.1.4 *Exemplo de seções.*

No exemplo 1.1.3, pode-se perceber que se V é uma variedade riemanniana, sua métrica g é uma seção de $(Q(V), V, \pi)$. De fato, basta lembrar que g associa a cada ponto $p \in V$ uma forma quadrática em T_pV. O mesmo vale para $(df)^2 : V \to Q(V)$, onde $df(p) = d_pf$ e $f : V \to \mathbb{R}$.

Definição 1.1.9 *Seja (V, B, π) um fibrado vetorial $C^\infty(C^a)$ q-dimensional e suponha que toda fibra $\pi^{-1}(b)$ contém uma subvariedade F_b k-dimensional. O conjunto $\{F_b\}_{b \in B}$ é um subfibrado k-dimensional do fibrado (V, B, π) se em todo ponto $b \in B$, existem uma vizinhança U_b de b e um difeomorfismo $C^\infty(C^a)$ $\varphi : \pi^{-1}(U_b) \to U_b \times \pi^{-1}(b)$ tais que para qualquer ponto $b' \in U_b$:*

i) A fibra $\pi^{-1}(b') \subset \pi^{-1}(U_b)$ é aplicada por φ sobre $b' \times \pi^{-1}(b)$;

ii) A subvariedade $F_{b'}$ é aplicada por φ sobre $b' \times F_b$.

Cada subvariedade F_b é chamada de fibra sobre o subfibrado $\{F_b\}_{b\in B}$. A união de todas as fibras sobre o subfibrado $\bigcup_{b\in B} F_b$ é chamada de variedade total do subfibrado. Um subfibrado é vetorial se cada fibra F_b é um subespaço vetorial de $\pi^{-1}(b)$.

Exemplo 1.1.5 *Exemplo de subfibrado.*

Sejam $(B\times\mathbb{R}^q, B, \pi)$ fibrado trivial $C^\infty(C^a)$ e F subvariedade k-dimensional $C^\infty(C^a)$ de $\mathbb{R}^q$. O conjunto $\{F_b = \{b\}\times F\}_{b\in B}$ é um subfibrado k-dimensional $C^\infty(C^a)$.

Podemos definir seção (seção parcial) de maneira análoga para subfibrados desde que a imagem da seção (seção parcial) esteja contida na variedade total do subfibrado, isto é, $s : B \to \bigcup_{b\in B} F_b$ é seção (seção parcial) se for contínua e se $s(b) \in F_b \subset \pi^{-1}(b)$ $(s_{|_{B'\subset B}})$.

Sendo E um espaço vetorial real, um subconjunto $A \subset E$ é um subespaço afim se para quaisquer vetores $x, y \in A$, o conjunto $R = \{(1-t)x+ty; t \in \mathbb{R}\}$ está contido em A. Lembramos que todo subespaço afim de E é um subespaço vetorial transladado.

Definição 1.1.10 *Seja (V, B, π) um fibrado vetorial $C^\infty(C^\alpha)$. Um subfibrado $\{F_b\}_{b\in B}$ é afim se para todo $b \in B$, a fibra F_b é um subespaço afim do espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$.*

Se o fibrado vetorial (V, B, π) é euclideano, então todo subfibrado afim $\{F_b\}_{b\in B}$ tem uma seção mínima s_0, no sentido que dada uma seção s, $||s_0(b)|| \leq ||s(b)||$, para todo $b \in B$, onde $||v||^2 = \langle v, v\rangle$. De fato, F_b é um subespaço do espaço vetorial real q-dimensional $\pi^{-1}(b)$. Logo, podemos escrevê-lo na forma $F_b = W_b + k$, onde W_b é um subespaço vetorial r-dimensional, $r \leq q$, e k é um vetor fixo de F_b. Seja $\beta = \{w_1, \ldots, w_r\}$ uma base ortogonal de W_b. Definiremos $s_0(b)$ pela equação:

$$s_0(b) = k - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle k, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} w_i$$

Este é o ponto mais próximo do vetor nulo, pois, dados $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ temos que

$$||k - \sum_{i=1}^{r} c_i w_i||^2 = ||k - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i - \sum_{i=1}^{r} (c_i - \frac{\langle k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle}) w_i||^2 =$$

$$= ||k - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle k, w_i \rangle w_i}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i||^2 + ||\sum_{i=1}^{r} (c_i - \frac{\langle k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle}) w_i||^2 \geq ||k - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i||^2$$

Na segunda igualdade usamos o fato de que $k - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle k, w_i \rangle w_i}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$ é ortogonal a cada w_i. A seção s_0 é de classe $C^\infty (C^a)$.

Definição 1.1.11 *Seja (V, B, π) um fibrado vetorial euclideano $C^\infty(C^a)$. Um subfibrado $\{E_b\}_{b \in B}$ é esférico se para todo $b \in B$, cada fibra E_b é uma esfera contida em algum subespaço afim do espaço euclideano $\pi^{-1}(b)$.*

Seja $\{F_b\}_{b \in B}$ um subfibrado afim do fibrado euclideano (V, B, π). Suponha que sua seção mínima $s_0 : B \to \bigcup_{b \in B} F_b$ satisfaça a desigualdade $\langle s_0(b), s_0(b) \rangle < 1$, para todo $b \in B$. Sejam S_b a esfera unitária de $\pi^{-1}(b)$ e $E_b = F_b \cap S_b$. Cada E_b é uma esfera unitária contida no subespaço afim F_b. O conjunto de todas as esferas E_b constitui o subfibrado esférico $\{E_b\}_{b \in B}$.

Seja $C^r(V_1, V_2)$ o conjunto das funções C^r $f : V_1 \to V_2$, com V_1 e V_2 variedades C^r, $r = 1, \ldots, \infty$, incluindo também o caso analítico. Sejam,

$\phi = \{\phi_i, U_i\}_{i \in A}$ uma família de cartas sobre V_1 localmente finita;
$K = \{K_i\}_{i \in A}$ família de subconjuntos compactos de V_1, com $K_i \subset U_i$;
$\psi = \{\psi_i, U_i\}_{i \in A}$ família de cartas sobre V_2;
$\epsilon = \{\epsilon_i\}_{i \in A}$ família de números positivos.

Sendo $f \in C^r(V_1, V_2)$, com $f(K_i) \subset V_i$, vamos definir

$$N(f; \phi, \psi, K, \epsilon) = \{g \in C^r(V_1, V_2);$$

$$g(K_i) \subset V_i, ||D^k(\psi_i f \phi_i^{-1})(x) - D^k(\psi_i g \phi_i^{-1})(x)|| < \epsilon_i, \forall x \in \phi_i(K_i), k = 0, \ldots, r\}$$

onde D^k representa a derivada de ordem k.

Definição 1.1.12 *Chamaremos $N(f;\phi,\psi,K,\epsilon)$ de vizinhança C^r forte de f. A topologia gerada por vizinhanças C^r fortes é chamada de topologia C^r forte.*

De maneira análoga, podemos definir topologia C^r forte para o conjunto das métricas definidas em uma variedade V C^r.

Definição 1.1.13 *Sejam $B \subset W$ subvariedade de uma variedade $C^\infty(C^a)$ W e (V,B,π) fibrado vetorial $C^\infty(C^a)$. Suponhamos que $f: V \to W$ é um mergulho $C^\infty(C^a)$ que satisfaz as seguintes condições:*

i) $\forall y \in f(V) \cap B$, $s(y) = 0 \in \pi^{-1}(y)$, onde $s: B \to V$ é uma seção;

ii) $f(V)$ é uma vizinhança aberta de B em W.

Diremos então que o par $(f,(V,B,\pi))$ é uma vizinhança tubular de B. Por abuso de linguagem, diremos apenas que $f(V)$ é uma vizinhança tubular de B.

Os seguintes teoremas topológicos serão utilizados:

Teorema 1.1.1 (Teorema de Aproximação de Whitney) *Sejam V_1, V_2, variedades n e k-dimensionais, respectivamente, $k \geq 2n$. Toda aplicação C^∞ $f: V_1 \to V_2$ pode ser C^∞ aproximada por imersões C^∞.*

Teorema 1.1.2 (Teorema do Mergulho de Whitney) *Toda variedade n-dimensional C^∞ pode ser C^∞-imersa em $\mathbb{R}^q$, $q \geq 2n$ e C^∞-mergulhada em $\mathbb{R}^q$, $q \geq 2n+1$.*

Este teorema pode ser refinado para $2n-1$ no caso das imersões e para $2n$ no caso dos mergulhos. Além disso, se n não é uma potência de 2, qualquer variedade n-dimensional C^∞ pode ser mergulhada em $\mathbb{R}^{2n-1}$.

Teorema 1.1.3 *Toda variedade n-dimensional C^∞ sem componentes fechadas pode ser C^∞-mergulhada em $\mathbb{R}^q$, $q \geq 2n-1$.*

1.2 EXISTÊNCIA DE SEÇÕES

Nesta seção apresentaremos resultados importantes sobre existência de seções. Tais resultados serão utilizados para garantir a existência de soluções de conjuntos algébricos.

Proposição 1.2.1 *Toda seção de um subfibrado de um fibrado vetorial C^∞ com base compacta pode ser C^0-aproximada por seções C^∞ deste subfibrado.*

Proposição 1.2.2 *Toda seção C^∞ de um subfibrado de um fibrado vetorial C^a com base compacta pode ser C^a-aproximada por seções C^a deste subfibrado.*

As demonstrações destas duas proposições podem ser encontradas em Norman Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, página 25, [7]. Agora apresentaremos mais duas proposições sobre a existência de seções.

Proposição 1.2.3 *Seja (V, B, π) um fibrado vetorial $C^\infty(C^a)$. Para qualquer subfibrado $\{F_b\}_{b\in B}$ de (V, B, π) e para quaisquer pontos $b_0 \in B$ e $s_0 \in F_{b_0}$, existe uma vizinhança U_{b_0} de b_0 e uma seção parcial $C^\infty(C^a)$ $s : U_{b_0} \to V$ do subfibrado $\{F_b\}_{b\in B}$ tal que $s(b_0) = s_0$.*

Demonstração. Da definição de subfibrado, dado um ponto $b_0 \in B$, existem uma vizinhança U_{b_0} de b_0 e difeomorfismo $C^\infty(C^a)$ $\varphi : \pi^{-1}(U_{b_0}) \to U \times \pi^{-1}(b_0)$. Defina

$$s : U_{b_0} \xrightarrow{f} U_{b_0} \times \{0\} \xrightarrow{\varphi^{-1}} \pi^{-1}(U_{b_0}) \subset V$$

$$b \mapsto f(b) = (b, 0) \mapsto s(b) = \varphi^{-1}(b, 0)$$

Observe que s é uma seção parcial $C^\infty(C^a)$, pois s é contínua e pela definição 1.1.9, $s(b) \in F_b$.

cqd

Proposição 1.2.4 *Seja (V, B, π) um fibrado vetorial $C^\infty(C^a)$, com B variedade compacta n-dimensional. Então todo subfibrado k-dimensional $\{F_b\}_{b\in B}$, $k \geq n$, tem uma seção $C^\infty(C^a)$. Se B não tem componentes fechadas então a proposição é verdadeira para $k = n - 1$.*

Demonstração. Pela proposição 1.2.1, basta construirmos uma seção C^0. Sejam $\{F_b\}_{b\in B}$ subfibrado de (V, B, π) e seja $\{V_j\}$ uma cobertura de B. Para cada ponto $x \in B$, escolha uma vizinhança U_x de x tal que $\overline{U}_x$ esteja contido em alguma vizinhança V_j. Por ser compacto, podemos escolher uma subcobertura finita para B, digamos $\{U_1, \ldots, U_m\}$.

Seja $A_0 = \{x_0\}$, onde x_0 é um ponto arbitrário de B e $A_n = \overline{U}_n \cup A_{n-1}$. Vamos definir $s_0 : A_0 \to V$, $s_0(x_0) = 0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Suponhamos definidas s_i seções, $i < n$ tal que $s_i \mid_{A_{i-1}} = s_{i-1}$. Vamos escolher uma vizinhança V_k que contenha $\overline{U}_n$. Seja $C_n = \overline{U}_n \cap A_{n-1}$. Observe que C_n é fechado em $\overline{U}_n$ pois $\overline{U_n}$ é fechado em B, que é compacto. Defina $h : C_n \to V$, $h(x) = \pi(s_{n-1}(x))$.

Vamos estender h a uma aplicação $h_1 : \overline{U_n} \to V$. Seja h_2 uma aplicação contínua tal que, para $x \in \overline{U_n}$, $\pi(h_2(x)) = x$. Então $\pi \circ h_2$ é contínua, e $h_2 \mid_{C_n} = s_{n-1} \mid_{C_n}$. Se definirmos $s_n(x) = s_{n-1}(x)$ para $x \in A_{n-1}$ e $s_n(x) = h_2(x)$ para todo $x \in A_n - A_{n-1}$, segue que s_n é contínua sobre A_n. Defina $g(x) = s_n(x)$ para todo $x \in A_n - A_{n-1}$. Como $B = \bigcup_n \mathrm{int} A_n$ segue que g é contínua.

cqd

Seja $\{F_b\}_{b\in B}$ subfibrado de um fibrado trivial $(B \times \mathbb{R}^q, B, \pi)$. Para cada $x \in F_b$, sejam $p_x^{\perp}$ a projeção ortogonal do espaço tangente $T_x(B \times \mathbb{R}^q)$ sobre o espaço tangente $T_x(F_b) \subset T_x(\{b\} \times \mathbb{R}^q)$ e p_b a projeção usual de $B \times \mathbb{R}^q$ sobre a fibra $\{b\} \times \mathbb{R}^q$.

Seja $s : B' \to B \times \mathbb{R}^q$ uma seção parcial C^∞ de um subfibrado $\{F_b\}_{b\in B}$, onde $B' \subset B$, é aberto. Sendo

$$d_b s : T_b B \to T_{s(b)}(B \times \mathbb{R}^q)$$

$$d_{s(b)} p_b : T_{s(b)}(B \times \mathbb{R}^q) \to T_{p_b \circ s(b)}(\{b\} \times \mathbb{R}^q)$$
$$p_{s(b)}^{\perp} : T_{s(b)}(B \times \mathbb{R}^q) \to T_{f(b)}(F_b)$$

onde $d_b s$ e $d_{s(b)} p_b$ são, respectivamente, a diferencial de s no ponto b e a diferencial de p_b no ponto $s(b)$, podemos definir a aplicação linear

$$R_b = p_{s(b)}^{\perp} \circ d_{s(b)} p_b \circ d_b s$$

Definição 1.2.1 *A seção s é regular se para todo $b \in B'$ a aplicação linear R_b é injetiva.*

Exemplo 1.2.1 *Exemplo de seção regular.*

Seja $\{F_b = \{b\} \times N\}_{b\in B}$ subfibrado de $(B \times \mathbb{R}^q, B, \pi)$, onde N é uma subvariedade de $\mathbb{R}^q$. Se $f : B' \to \mathbb{R}^q$ é uma imersão $C^\infty(C^a)$, então a seção associada a f, $s(f) = (b, f(b))$, do fibrado trivial $(B \times \mathbb{R}^q, B, \pi)$ é uma seção regular $C^\infty(C^a)$. Uma seção C^∞ s de $\{F_b\}_{b\in B}$ é regular se, e somente se, a aplicação associada é um mergulho C^∞.

Proposição 1.2.5 *Seja $(B \times \mathbb{R}^q, B, \pi)$ um fibrado trivial $C^\infty(C^a)$ onde B é uma variedade $C^\infty(C^a)$ n-dimensional. Seja $\{F_b\}_{b\in B}$ subfibrado k-dimensional, $k \geq n$. Então para cada ponto $b \in B$, existe uma vizinhança B' de b e uma seção parcial regular $C^\infty(C^a)$ $s : B' \to B \times \mathbb{R}^q$.*

Demonstração. Decorre do comentário anterior e do Teorema do Mergulho de Whitney (ver teorema 1.1.2).

Para o próximo teorema sobre seções regulares, precisamos do Teorema da Transversalidade de Thom. Antes apresentamos a seguinte definição.

Definição 1.2.2 *Sejam V_1, V_2 variedades $C^\infty(C^a)$ e seja N subvariedade de V_2. Diremos que uma aplicação $C^\infty(C^a)$ $f : V_1 \to V_2$ é transversal a N se para todo $p \in V_1$:*

i) ou $f(p) \notin N$

ii) ou $d_p f(T_p V_1) + T_{f(p)} N = T_{f(p)} V_2$ se $f(p) \in N$.

A condição *ii)* é chamada condição da transversalidade. A seguir, enunciamos o teorema clássico de Thom:

Teorema 1.2.1 (Teorema da Transversalidade de Thom) *Seja $f : V_1 \to V_2$ uma aplicação diferenciável e seja N uma subvariedade de V_2. Então existe arbitrariamente próxima a f uma aplicação $g : V_1 \to V_2$ transversal a N. Além disso, se a condição da transversalidade de f é satisfeita para todos os pontos de um conjunto fechado $F \subset V_1$, então podemos escolher g de tal maneira que $f_{|_F} = g_{|_F}$.*

A seguinte versão do Teorema da Transversalidade de Thom para seções também é válida.

Teorema 1.2.2 (Teorema da Transversalidade de Thom para seções) *Sejam (V, B, π) um fibrado vetorial $C^\infty(C^a)$ e $s : B \to V$ uma seção deste fibrado. Seja A uma subvariedade de V. Então existe arbitrariamente próxima de s uma seção $t : B \to V$ transversal a A. Além disso, se a condição da transversalidade de f é satisfeita para todos os pontos de um conjunto fechado $F \subset B$, então podemos escolher t de tal maneira que $s_{|_F} = t_{|_F}$.*

As demonstrações destes dois teoremas podem ser encontradas em [2].

Proposição 1.2.6 *Sejam $(B \times \mathbb{R}^q, B, \pi)$ fibrado trivial C^∞ com base compacta $C^\infty(C^a)$ n-dimensional. Então toda seção C^∞ de um subfibrado $C^\infty(C^a)$ k-dimensional, $k \geq 2n$, pode ser C^∞ aproximada por seções regulares $C^\infty(C^a)$ deste subfibrado.*

Demonstração. A versão C^a desta proposição pode ser reduzida a versão C^∞ pela proposição 1.2.2. Se o subfibrado é do tipo $\{F_b = \{b\} \times F\}_{b \in B}$, onde F é uma subvariedade de $\mathbb{R}^q$, então a proposição segue do Teorema de Aproximação de Whitney (ver teorema 1.1.1). De fato, seja $s : B \to \bigcup_{b \in B} F_b$ seção C^∞ de $\{\{b\} \times F\}_{b \in B}$. Pelo Exemplo 1.1.5, existe uma função C^∞ $f : B \to \mathbb{R}^q$ tal que $s(b) = (b, f(b))$.

Pelo Teorema de Aproximação de Whitney, f pode ser aproximada por imersões C^∞. Pelo Exemplo 1.2.1, concluímos que s pode ser aproximada por seções regulares C^∞. O caso geral é um pouco mais complicado e decorre do Teorema da Transversalidade de Thom.

1.3 APLICAÇÕES LIVRES

Nesta seção demonstraremos uma versão do Teorema de Nash para aplicações livres. Para provarmos este teorema, precisaremos de algumas definições:

Definição 1.3.1 *Seja $f : V \to \mathbb{R}^q$ uma aplicação C^2, com V variedade C^2 n-dimensional. Dado $p \in V$, sejam (x, U) sua parametrização com coordenadas*

$x(p) = (x_1, \ldots, x_n)$. O plano osculador de V no ponto $p \in V$ pela aplicação f é o espaço vetorial determinado pelo conjunto de vetores:

$$\{\frac{\partial f(p)}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i \partial x_j}\} \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

Usaremos a notação $T_p^2(f)$ para representar o plano osculador de V no ponto $p \in V$ pela aplicação f. O plano osculador $T_p^2(f)$ não depende da escolha de coordenadas.

Definição 1.3.2 *Mantendo as mesmas condições da definição 1.3.1, a aplicação f é livre se a dimensão de $T_p^2(f)$ é igual a $s_n + n$. Em outras palavras, a aplicação f é livre se o conjunto de vetores que determinam $T_p^2(f)$ é LI.*

A primeira conseqüência direta da definição é que toda aplicação livre é uma imersão diferenciável. De fato, sendo f livre e como já foi dito, o conjunto de vetores que determinam $T_p^2(f)$ é LI. Em particular, $\{\frac{\partial f(p)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(p)}{\partial x_n}\}$ é LI, o que é suficiente para f ser uma imersão diferenciável.

A segunda conseqüência direta da definição é que nenhuma variedade n-dimensional pode ser aplicada livremente em $\mathbb{R}^{s_n+n-1}$. Basta notar que o número máximo de vetores de um conjunto LI em $\mathbb{R}^{s_n+n-1}$ é $s_n + n - 1$.

Exemplo 1.3.1 *Construção de um mergulho livre de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^{s_n+n}$.*

Seja,

$$\varphi : \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^{n+s_n}$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n; x_1x_1, \ldots, x_ix_j, \ldots, x_nx_n), \ i \leq j$$

A aplicação φ é livre pois, sendo (x, U), com $x(p) = (x_1, \ldots, x_n)$, coordenadas de p, então

$$\frac{\partial \varphi(p)}{\partial x_i} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0; 0, \ldots, 0, x_1, 0, \ldots, 0, x_{i-1}0, \ldots, 0, 2x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(p)}{\partial x_1 \partial x_1} = (0, \ldots, 0; 2, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial^2\varphi(p)}{\partial x_1\partial x_n} = (0,\dots,0;0,\dots,0,1,0,\dots,0)$$

$$\frac{\partial^2\varphi(p)}{\partial x_2\partial x_2} = (0,\dots,0;0,0,\dots,0,2,0,\dots,0,0,\dots,0)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial^2\varphi(p)}{\partial x_2\partial x_n} = (0,\dots,0;0,0,\dots,0,0,0,\dots,1,0,\dots,0,0)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial^2\varphi(p)}{\partial x_n\partial x_n} = (0,\dots,0;0,\dots,0,2)$$

constituem um conjunto LI, isto é, $\dim T_p^2(\varphi) = n + s_n$, onde *dim* indica dimensão. Logo φ é um homeomorfismo e portanto, um mergulho livre.

Para a demonstrção do teorema sobre mergulhos livres, precisamos de duas observações.

Observação 1. Sejam $f : V \to \mathbb{R}^q$ uma aplicação livre e N subvariedade de V, $dim\ N = r \leq n$. Então, $f_{|N}$ ainda é uma aplicação livre. Para ver isto, sejam $p \in N$, (x, U), com $x(p) = (x_1,\dots,x_n)$, uma parametrização de $p \in U$, onde U é aberto em V, tal que $N \cap U = \{q; x_i(q) = 0, i = r+1,\dots,n\}$. Em particular, $(\widetilde{x}, N \cap U)$, com $\widetilde{x}(p) = (x_1,\dots,x_r)$ é uma parametrização de p em N. Como f é livre, temos que,

$$\frac{\partial f(p)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f(p)}{\partial x_n}$$

$$\frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_1\partial x_1},\dots,\frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i\partial x_j},\dots,\frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_n\partial x_n},\ 1\leq i\leq j\leq n$$

constituem um conjunto LI. Em particular, os vetores

$$\frac{\partial f(p)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f(p)}{\partial x_r}$$

$$\frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_1\partial x_1},\dots,\frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i\partial x_j},\dots,\frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_r\partial x_r},\ 1\leq i\leq j\leq n$$

também constituem um conjunto LI. Portanto, $f_{|_N}$ também é uma aplicação livre.

Observação 2. Uma aplicação φ suficientemente perto de uma aplicação livre f, na topologia forte C^2, é ainda livre. Desta observação, segue que uma variedade $C^\infty(C^a)$ que pode ser aplicada livremente em $\mathbb{R}^q$ pode ser $C^\infty(C^a)$ mergulhada livremente em $\mathbb{R}^q$.

De fato, pelo Teorema de Aproximação de Whitney (ver teorema 1.1.1), para $q \geq 2n+1$, qualquer aplicação contínua $f : V_1 \to V_2$, pode ser aproximada por mergulhos, onde V_1 e V_2 são variedades $C^\infty(C^a)$ n e q-dimensionais respectivamente. Como uma aplicação livre f é contínua, então f pode ser C^2-aproximada por mergulhos. Pela observação 2, concluímos que uma variedade $C^\infty(C^a)$ que pode ser $C^\infty(C^a)$ aplicada livremente em $\mathbb{R}^q$, pode ser $C^\infty(C^a)$ mergulhada em $\mathbb{R}^q$.

Teorema 1.3.1 *Toda variedade $C^\infty(C^a)$ n-dimensional pode ser $C^\infty(C^a)$ mergulhada livremente em $\mathbb{R}^{s_n+2n}$.*

Demonstração. Pelos comentários feitos na observação 2, basta provarmos que toda variedade $C^\infty(C^a)$ V n-dimensional pode ser $C^\infty(C^a)$ aplicada livremente em $\mathbb{R}^{n+s_n}$. Para isto, provaremos dois fatos:

1. V pode ser $C^\infty(C^a)$ aplicada livremente em $\mathbb{R}^q$, para algum q.
2. A existência de uma aplicação livre $C^\infty(C^a)$ $f : V \to \mathbb{R}^q$, $q > s_n + 2n$ implica a existência de uma aplicação livre $C^\infty(C^a)$ de V em $\mathbb{R}^{q-1}$.

Parte 1. Pelo Teorema de Whitney, V pode ser vista como uma subvariedade de um espaço euclideano W. Pelo exemplo 1.3.1, podemos construir uma aplicação $C^\infty(C^a)$ livre $f : W \to \mathbb{R}^q$, para q suficientemente grande. Pela observação 1, $f_{|V}$ é uma aplicação livre $C^\infty(C^a)$.

Parte 2. Seja $f : V \to \mathbb{R}^q$ uma $C^\infty(C^a)$-aplicação livre, $q > s_n + 2n$. Sejam:

Σ_p: esfera unitária do espaço osculador $T_p^2(f)$;
Σ : subvariedade de $V \times \mathbb{R}^q$ que consiste de todas as esferas $\{p\} \times \Sigma_p$, $p \in V$;
$\pi(\Sigma)$: imagem de Σ pela projeção canônica $\pi : V \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$;

Note que $\pi(\Sigma)$ é um subconjunto de S^{q-1} que consiste de todos os vetores unitários pertencentes a $T_p^2 f$. Dado $x \in (S^{q-1} - \pi(\Sigma)) \subset \mathbb{R}^q$, seja R_x o subespaço gerado por x e $(R_x)^\perp$ o subespaço ortogonal a R_x. Seja $\pi_x : \mathbb{R}^q \to (R_x)^\perp$, onde π_x é a projeção de $\mathbb{R}^q$ sobre $(R_x)^\perp$.

Afirmamos que $\pi_x \circ f$ é uma aplicação livre, para todo $x \in S^{q-1} - \pi(\Sigma)$, isto é, mostraremos que

$$\{\frac{\partial(\pi_x \circ f(p))}{\partial x_i}, \frac{\partial^2(\pi_x \circ f(p))}{\partial x_i \partial x_j}\}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

é um conjunto LI. De fato, usando a Regra da Cadeia e usando o fato de π_x ser linear, temos que

$$\frac{\partial(\pi_x \circ f(p))}{\partial x_i} = \frac{\partial \pi_x(f(p))}{\partial x_i} \circ \frac{\partial f(p)}{\partial x_i} = \pi_x \circ (\frac{\partial f(p)}{\partial x_i});$$

$$\frac{\partial^2(\pi_x \circ f(p))}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial \pi_x \circ f(p)}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\pi_x \circ \frac{\partial f(p)}{\partial x_j}) =$$

$$= \frac{\partial \pi_x(f(p))}{\partial x_i} \circ \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i \partial x_j} = \pi_x \circ \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Logo, o conjunto

$$\{\frac{\partial(\pi_x \circ f(p))}{\partial x_i}, \frac{\partial^2(\pi_x \circ f(p))}{\partial x_i \partial x_j}\}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

gera o espaço $\pi_x(T_p^2 f)$. Sendo assim,

$\{\frac{\partial \pi_x \circ f(p)}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 \pi_x \circ f(p)}{\partial x_i \partial x_j}\}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n$ é LI se, e somente se

$dim\ (\pi_x(T_p^2 f)) = s_n + n$ se, e somente se

$\pi_x \mid_{T_p^2 f}: T_p^2 f \to \pi_x(T_p^2 f)$ é injetiva se, e somente se

$\{0\} = \text{Ker}(\pi_x \mid_{T_p^2 f}) = T_p^2 f \cap \text{Ker}(\pi_x)$ se, e somente se

$$x \notin T_p^2 f.$$

onde, $\mathrm{Ker}(\pi_x) = \{v \in \mathbb{R}^q; \pi_x(v) = 0\}$. Note que $\mathrm{Ker}(\pi_x) = R_x$ e se $x \in T_p^2 f$ então $T_p^2 f \cap \mathrm{Ker}(\pi_x) = R_x$, já que R_x é o subespaço gerado por x.

Por fim, $x \notin T_p^2 f$ se, e somente se $x \notin \pi(\Sigma)$. É claro que se $x \notin T_p^2 f$ então $x \notin \pi(\Sigma)$. A verificação da recíproca é percebida pelo fato de que $x \in S^{q-1}$. Logo, se $x \notin \pi(\Sigma)$, x não pode pertencer a $T_p^2 f$, pois x é unitário e $\pi(\Sigma)$ consiste de todos os vetores unitários pertencentes a $T_p^2 f$.

Portanto, $\pi_x \circ f$ é uma aplicação livre. Por fim, notemos que $S^{q-1} - \pi(\Sigma)$ é diferente do vazio. De fato, $\pi(\Sigma)$ é a imagem de uma variedade $C^\infty(C^a)$ Σ de dimensão $s_n + 2n - 1 < q - 1$ por uma aplicação $C^\infty(C^a)$. Logo $\pi(\Sigma)$ tem medida nula em S^{q-1} e portanto $S^{q-1} - \pi(\Sigma) \neq \emptyset$.

cqd

2 CONJUNTOS DIFERENCIAIS

Neste capítulo as variedades não possuem necessariamente métrica riemanniana.

2.1 CONJUNTOS ALGÉBRICOS

Sejam V variedade n-dimensional $C^\infty(C^a)$ e $c_i : V \to \mathbb{R}^q$, $b_i : V \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ aplicações $C^\infty(C^a)$.

Definição 2.1.1 *Um sistema algébrico Σ de equações algébricas lineares q-dimensional de classe $C^\infty(C^a)$ sobre uma variedade $C^\infty(C^a)$ V é um sistema de equações da forma*

$$\langle c_i(v), f(v)\rangle = b_i(v) \qquad i = 1, \ldots, m,$$

para todo $v \in V$, onde $f : V \to \mathbb{R}^q$ é uma aplicação $C^\infty(C^a)$ que desempenha o papel de incógnita.

Usaremos a notação $\langle c_i, f\rangle = b_i$, $i = 1, \ldots, m$ para indicar que em cada ponto $v \in V$, tem-se

$$\langle c_i(v), f(v)\rangle = b_i(v) \qquad i = 1, \ldots, m,$$

Denotemos este sistema por $\Sigma(v)$. Assim, podemos pensar em Σ como sendo uma família, parametrizada por V, de m equações lineares em q variáveis. Se os vetores $\{c_1(v), \ldots, c_m(v)\}$ constituem um conjunto LI, dizemos que o sistema é regular e tem posto m.

Suponhamos que V tem uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e que para cada $\alpha \in A$, um sistema regular algébrico Σ_α de equações lineares de classe $C^\infty(C^a)$ q-dimensional e posto m esteja definido sobre U_α. Assim, denotando as equações de Σ_α por $\langle c_{i,\alpha}, f_\alpha\rangle = b_{i,\alpha}$, $i = 1, \ldots, m$, as funções $c_{i,\alpha}, f_\alpha, b_{i,\alpha}$ possuem domínio U_α.

Suponhamos ainda que os sistemas $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$ são dois a dois consistentes, isto é, para todos $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ tais que $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \neq \emptyset$, os sistemas $\Sigma_{\alpha_1}(v), \Sigma_{\alpha_2}(v)$ têm as mesmas soluções para todo $v \in U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$.

Definição 2.1.2 *O conjunto de sistemas $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ descrito acima é um conjunto algébrico $C^\infty(C^a)$ q-dimensional de posto m.*

Para cada $v \in V$, seja A_v o conjunto de todos os índices $\alpha \in A$ tal que $v \in U_\alpha$. Uma solução do conjunto algébrico $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma função $\varphi : V \to \mathbb{R}^q$ tal que para cada $v \in V$, o vetor $\varphi(v)$ satisfaz as equações dos sistemas $\Sigma_\alpha(v)$, para todo $\alpha \in A_v$.

O conjunto algébrico $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é homogêneo no ponto $v \in V$ se os sistemas $\Sigma_\alpha(v)$ são homogêneos para todo $\alpha \in A_v$, ou seja,

$$\langle c_i(v), f(v) \rangle = 0 \ , \ i = 1, \ldots, m$$

O conjunto algébrico é homogêneo se for homogêneo em todos os pontos $v \in V$. O nosso próximo passo é mostrar que dado um conjunto algébrico $\{\Sigma_\alpha\}$ $C^\infty(C^a)$ de dimensão q e posto m, pode-se obter um subfibrado afim $\{F_v\}_{v \in V}$, de dimensão $q - m$, do fibrado trivial $(V \times \mathbb{R}^q, V, \pi)$.

A fibra F_v sobre o ponto $v \in V$ do subfibrado afim $\{F_v\}_{v \in V}$ é dada pelo conjunto de vetores $(v, x) \in \{v\} \times \mathbb{R}^q$ tais que π satisfaz as equações dos sistemas $\Sigma_\alpha(v)$, para todo $\alpha \in A_v$, onde π é a projeção sobre $\mathbb{R}^q$. Ou seja, cada vetor $(v, x) \in \{v\} \times \mathbb{R}^q$ pertence a fibra F_v se a igualdade

$$\langle c_{i,\alpha}(v), \pi(v, x) \rangle = b_{i,\alpha}(v) \qquad i = 1, \ldots, m$$

é verificada, para todo $\alpha \in A_v$. A fibra F_v é um subfibrado afim pois contém o subespaço afim $\{(v, \lambda x + (1 - \lambda) y)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$, onde $(v, x), (v, y) \in \{v\} \times F_v$. Note que a dimensão de F_v é $q - m$, pois, por definição, os Σ_α são regulares.

O subfibrado afim $\{F_v\}_{v \in V}$, que acabamos de descrever é associado ao conjunto algébrico $\{\Sigma_\alpha\}$. As seções deste subfibrado afim são associadas às soluções do conjunto algébrico $\{\Sigma_\alpha\}$.

Basta observamos que dada uma solução $f : V \to \mathbb{R}^q$, podemos associar uma seção $s(f) : V \to \bigcup_{v\in V} F_v$, definida por $s(f)(v) = (v, f(v))$. Como para todo $v \in V$, $s(f)(v) = (v, f(v))$ satisfaz as equações do sistema algébrico $\{\Sigma_\alpha(v)\}$, $\alpha \in A_v$, então $(v, f(v)) \in F_v$, e portanto, $s(f)$ realmente é uma seção de $\{F_v\}_{v\in V}$.

Usando o fato descrito na seção 1.1, de que todo subfibrado afim de um fibrado euclideano admite uma seção mínima $C^\infty(C^a)$, podemos afirmar então, que todo conjunto algébrico tem uma solução mínima, isto é, uma solução, digamos f_0, tal que

$$\langle f_0(v), f_0(v)\rangle \leq \langle f(v), f(v)\rangle,$$

para qualquer solução f e para todo $v \in V$. A solução f_0 é única e de classe $C^\infty(C^a)$.

Suponhamos que a solução f_0 satisfaça a desigualdade $\langle f_0(v), f_0(v)\rangle < 1$, para todo $v \in V$. Do subfibrado afim $\{F_v\}_{v\in V}$ associado ao conjunto algébrico Σ_α, podemos encontrar um subfibrado esférico $\{E_v\}_{v\in V}$, constituído pelos vetores unitários $\{F_v\}_{v\in V}$, conforme já descrito no Capítulo 1.

O subfibrado $\{E_v\}_{v\in V}$ também é associado ao conjunto algébrico $\{\Sigma_\alpha\}$ e tem dimensão igual a $q - m - 1$. As seções deste subfibrado esférico são ditas associadas as soluções unitárias do conjunto algébrico, isto é, com as soluções f que satisfazem a equação $\langle f(v), f(v)\rangle = 1$, para todo $v \in V$.

Definição 2.1.3 *Seja $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$ um conjunto algébrico. Uma solução C^∞ unitária f de $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é regular se para cada $v \in V$ o conjunto de vetores $\{c_{j,\alpha}(v), f(v), \frac{\partial f(v)}{\partial x_i}\}$, $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n$ é um conjunto LI, para todo $\alpha \in A_v$, onde $x(v) = (x_1, \ldots, x_n)$ são as coordenadas de v.*

Soluções regulares de um conjunto algébrico são associados com seções regulares do subfibrado esférico associado. De fato, basta observar o Exemplo 1.2.1 e que se f é solução regular então $\{\frac{\partial f(v)}{\partial x_i}\}$, $i = 1, \ldots, n$ é LI, ou seja, f é imersão.

Soluções unitárias regulares de um conjunto algébrico são associados com seções regulares do subfibrado esférico associado. Com esta observação e com os comentários feitos anteriormente, obtemos quatro resultados cujas demonstrações são conseqüências de proposições já demonstradas.

Proposição 2.1.1 *Para $m \leq q$, todo conjunto algébrico $C^\infty(C^a)$ de dimensão q e posto m que é homogêneo em $v \in V$ tem uma solução unitária em uma vizinhança de v.*

Demonstração. Seja $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ um conjunto algébrico $C^\infty(C^a)$ de dimensão q e posto m homogêneo em $v \in V$. Pelos comentários feitos anteriormente, podemos construir um subfibrado esférico $\{E_v\}_{v \in V}$ do fibrado trivial $(V \times \mathbb{R}^q, V, \pi)$. Pela proposição 1.2.3, existe uma seção parcial $C^\infty(C^a)$ $s : U_v \to V \times \mathbb{R}^q$, onde U_v é uma vizinhança de um ponto arbitrário $v \in V$.

Vamos escolher exatamente o ponto $v \in V$ para o qual o conjunto algébrico é homogêneo. Como as seções do subfibrado esférico são associadas com soluções unitárias do conjunto algébrico, encontramos a solução desejada.

cqd

Proposição 2.1.2 *Para $q - m > n$, todo conjunto algébrico homogêneo $C^\infty(C^a)$ de dimensão q e posto m definido sobre um compacto n-dimensional tem uma solução unitária $C^\infty(C^a)$. Se V não tem componentes fechadas então a proposição é verdadeira para $q - m = n$.*

Demonstração. Vamos seguir o mesmo raciocínio anterior. Seja $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ um conjunto algébrico $C^\infty(C^a)$ de dimensão q e posto m homogêneo em $v \in V$. Pelos comentários feitos anteriormente, podemos construir um subfibrado esférico $\{E_v\}_{v \in V}$ do fibrado trivial $(V \times \mathbb{R}^q, V, \pi)$.

Como o subfibrado esférico tem dimensão $q - m > n$, pela proposição 1.2.4, existe uma seção $C^\infty(C^a)$ $s : B \to V \times \mathbb{R}^q$. Novamente usamos o fato de que as seções do subfibrado esférico são associadas com soluções unitárias do conjunto algébrico e portanto, encontramos a solução desejada. Se a variedade não tem componentes fechadas, a proposição 1.2.4 também garante o resultado para $q - m = n$.

cqd

Proposição 2.1.3 *Para $q - m > n$, todo conjunto algébrico $C^\infty(C^a)$ de dimensão q e posto m definido sobre uma variedade $C^\infty(C^a)$ n-dimensional e homogêneo em $v \in V$ tem uma solução unitária regular $C^\infty(C^a)$ em uma vizinhança de v.*

Demonstração. Segue o mesmo raciocínio anterior utilizando a proposição 1.2.5.

Proposição 2.1.4 *Para $q - m > 2n$, todo conjunto algébrico homogêneo $C^\infty(C^a)$ de dimensão q e posto m definida sobre um compacto n-dimensional tem uma solução unitária regular $C^\infty(C^a)$.*

Demonstração. Segue da proposição 1.2.6.

2.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES DE CONJUNTOS DIFERENCIAIS

Começaremos esta seção apresentando a definição de r-jet. Sejam V_1 e V_2 variedades $C^\infty(C^a)$ e $C^r(V_1, V_2)$ o conjunto das funções C^r $f : V_1 \to V_2$. Vamos definir uma relação de equivalência, determinando que $f, g \in C^r(V_1, V_2)$ são equivalentes em $v \in V_1$ se todas as suas derivadas parciais em v de ordem menor do que ou igual a r são todas iguais. Usaremos a notação $J_v^r f$ para representar a classe de equivalência de f em v.

Definição 2.2.1 *Com as notações acima, diremos que $J_v^r f$ é um r-jet de f no ponto v. Usaremos a notação $J_v^r(V_1, V_2)$ para representar o conjunto de todos os r-jets no ponto v, de aplicações $f \in C^r(V_1, V_2)$.*

Dado um sistema de coordenadas em uma vizinhança de v, podemos tomar como coordenadas de um r-jet de f no ponto v as coordenadas usuais de $f(v)$ e as coordenadas de suas derivadas parciais de ordem menor ou igual a r. Isto nos permite introduzir uma estrutura de espaço vetorial no conjunto $J_v^r(V_1, V_2)$.

Seja $J^r(V_1, V_2)$ a união de todos os $J_v^r(V_1, V_2)$, para todo $v \in V$. Sejam (x, U) e (y, W) cartas para V_1 e V_2. Vamos definir a aplicação,

$$\theta : J^r(U, W) \to J^r(x(U), y(W))$$

$$\theta(J_v^r f) = J_{f(v)}^r y f x^{-1}$$

que é uma bijeção. Sendo $J^r(x(U), y(V))$ um aberto do espaço vetorial $J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ que é isomorfo a um espaço euclideano de dimensão finita (ver [5]), então podemos tomar $(\theta, J^r(U, W))$ como uma carta para $J^r(V_1, V_2)$. Usando essas cartas, podemos construir uma topologia para $J^r(V_1, V_2)$. Além disso, $J^r(V_1, V_2)$ tem uma estrutura natural $C^\infty(C^a)$. Para maiores detalhes, consultar [5]. Sejam V variedade n-dimensional $C^\infty(C^a)$ e $f : V \to \mathbb{R}^q$ e $\pi : J^r(V, \mathbb{R}^q) \to V$ a projeção natural, definida por $\pi(J_v^r f) = v$. Então, a tripla $(J^r(V, \mathbb{R}^q), V, \pi)$ é um fibrado vetorial $C^\infty(C^a)$.

Definiremos agora uma versão "truncada"de um 2-jet de uma aplicação $f : V \to \mathbb{R}^q$ no ponto $v \in V$. Para isto, introduziremos uma segunda relação de equivalência em $C^2(V, \mathbb{R}^q)$. Diremos que $f, g \in C^2(V, \mathbb{R}^q)$ são equivalentes em $v \in V$ se todas as derivadas parciais de primeira e segunda ordem no ponto v são iguais com exceção da derivada parcial $\frac{\partial^2}{\partial x_n x_n}$, ou seja, não se exige que aconteça $\frac{\partial^2 f(v)}{\partial x_n \partial x_n} = \frac{\partial^2 g(v)}{\partial x_n \partial x_n}$.

De agora em diante, passaremos a usar também as notações $D_i f(v)$, $D_{ij} f(v)$ para indicar, respectivamente, as derivadas parciais $\frac{\partial f(v)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f(v)}{\partial x_i \partial x_j}$ de f no ponto v, onde v tem como coordenadas $x(v) = (x_1, \ldots, x_n)$. Isto não nos impedirá de utilizar a notação anterior. Observe que se duas funções f, g são equivalentes no sentido da primeira relação de equivalência, então f, g também são equivalentes no sentido da segunda relação de equivalência. Usaremos a notação $j_v^2 f$ para representar a classe de equivalência de f no sentido da segunda relação de equivalência.

Definição 2.2.2 *Com as notações acima, diremos que $j_v^2 f$ é um 2-jet truncado de f no ponto v. Usaremos a notação $j_v^2(V, \mathbb{R}^q)$ para representar o conjunto de todos os 2-jets truncados no ponto v, de aplicações $f \in C^2(V, \mathbb{R}^q)$.*

Do mesmo modo para r-jet, podemos tomar como coordenadas de um 2-jet truncado de f no ponto v as coordenadas usuais de $f(v)$ e as coordenadas de suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem, excetuando-se as coordenadas de $D_{nn} f(v)$. Isto nos permite introduzir uma estrutura de espaço vetorial no conjunto $j_v^2(V, \mathbb{R}^q)$, e por conseguinte, $j_v^2(V, \mathbb{R}^q)$ tem estrutura de um espaço euclideano.

Seja $j^2(V,\mathbb{R}^q)$ a união de todos os $j_v^2(V,\mathbb{R}^q)$, para todo $v \in V$. O conjunto $j^r(V,\mathbb{R}^q)$ tem uma estrutura natural $C^\infty(C^a)$ e sendo $\pi : j^2(V,\mathbb{R}^q) \to V$ a projeção natural, definida por $\pi(j_v^2 f) = v$, a tripla $(j^2(V,\mathbb{R}^q), V, \pi)$ é um fibrado vetorial $C^\infty(C^a)$. A prova destes fatos é análoga ao caso $J^r(V,\mathbb{R}^q)$. Por fim, observemos que a definição de 2-jet truncado permite a seguinte decomposição: $J^2(V,\mathbb{R}^q) = j^2(V,\mathbb{R}^q) \times \mathbb{R}^q$. Segue então que o fibrado $(J^2(V,\mathbb{R}^q), j^2(V,\mathbb{R}^q), \pi)$ é trivial, onde π é a projeção de cada fibra $j_v^2 f \times \mathbb{R}^q$ sobre $j_v^2 f$.

Neste momento, assumiremos que a variedade $C^\infty(C^a)$ V é da forma $V = V_0 \times (-a,a)$, onde V_0 é uma variedade compacta $C^\infty(C^a)$ $(n-1)$-dimensional e a é um número real positivo. Identificaremos a variedade $V_0 \times \{0\}$ com V_0 de maneira usual. Seja $(x_{0,\alpha}, U_{0,\alpha})$ sistema de coordenadas de V_0. Tomando $U_\alpha = U_{0,\alpha} \times (-a,a)$ e $x_\alpha(p,c) = (x_{0,\alpha}(p), c)$, onde $(p,c) \in U_{0,\alpha} \times (-a,a)$, obtemos um sistema de coordenadas para V, dado por (x_α, U_α). Este sistema de coordenadas é chamado de sistema especial de coordenadas. Logo, em coordenadas especiais, a última coordenada é sempre distinguida, isto é, independe do sistema especial.

Definição 2.2.3 *Um sistema especial de equações diferenciais de dimensão q e classe $C^\infty(C^a)$ sobre V é um sistema da forma*

$$\langle c_i(j_v^2 f), D_{nn} f(v)\rangle = b_i(j_v^2 f) \qquad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

onde $c_i : j^2(V,\mathbb{R}^q) \to \mathbb{R}^q$, $b_i : j^2(V,\mathbb{R}^q) \to \mathbb{R}$ são funções $C^\infty(C^a)$ e $f : V \to \mathbb{R}^q$ é uma aplicação $C^\infty(C^a)$ que desempenha o papel de incógnita.

Diremos que uma função f é uma solução deste sistema especial se for definida em uma vizinhança $U \subset V$ com valores em $\mathbb{R}^q$, isto é, $f : U \to \mathbb{R}^q$, tal que f satisfaça as equações da definição 2.2.3.

Sejam $(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ as coordenadas especiais de $v \in V = V_0 \times (-a,a)$. Diremos que uma função $f : U \to \mathbb{R}^q$, é uma solução formal do sistema especial se sua expansão em série de Taylor em x_n satisfaz formalmente as equações da Definição 2.2.3. Neste caso, a expansão em série de Taylor é dada pela expressão:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^r f(v)}{r! \partial x_n^r} x_n^r$$

onde $v \in V_0 \times \{0\}$.

Vamos acrescentar ao sistema da Definição 2.2.3, os seguintes dados iniciais: $f_{|U} = f_0$ e $D_n f_{|U} = f_1$, onde $f_0 : U \to \mathbb{R}^q$ e $f_1 : U \to \mathbb{R}^q$ são funções $C^\infty(C^a)$.

Definição 2.2.4 *Diremos que o sistema da Definição 2.2.3 é regular com respeito aos dados iniciais f_0 e f_1 se o conjunto de vetores $\{c_i(j_v^2(f_0+x_n f_1))\}$, $i = 1, ..., m$, é um conjunto LI, onde x_n é a n-ésima coordenada de $v \in V_0 \times (-a, a)$.*

Exemplo 2.2.1 *Exemplo de sistema especial de equações.*

Um exemplo simples de sistema especial de equações diferenciais é o sistema cujas funções c_i são constantes, definidas por $c_i(j_v^2 f) = e_i$, onde e_i é o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^q$. Consideraremos, neste caso, $m = q$. Este sistema também é regular com respeito a quaisquer dados iniciais. Além disso, o sistema pode ser reduzido a seguinte equação:

$$D_{nn} f(v) = (b_1(j_v^2 f), \ldots, b_q(j_v^2 f))$$

No caso geral, é natural tentar reduzir o sistema da Definição 2.2.3 para a forma simples descrita acima, ao resolvê-la para $D_{nn} f$. Isto equivale a resolver o sistema abaixo, considerando como incógnita a função $\varphi : V \to \mathbb{R}^q$:

$$\langle c_i, \varphi \rangle = b_i$$

onde $i = 1, \ldots, m$ e $c_i : j^2(V, \mathbb{R}^q) \to \mathbb{R}^q$, $b_i : j^2(V, \mathbb{R}^q) \to \mathbb{R}$ são funções $C^\infty(C^a)$. Este sistema definido sobre a variedade $j^2(V, \mathbb{R}^q)$ é de dimensão q e de classe $C^\infty(C^a)$. Diremos que este sistema é associado com o sistema da definição 2.2.3.

Seja $S(f_0, f_1)$ o subconjunto de $j^2(V, \mathbb{R}^q)$ definido da seguinte maneira: $S(f_0, f_1) = \{j_v^2 f'; f' = f_0 + x_n f_1, v \in V\}$, onde x_n é a n-ésima coordenada especial de $v \in V_0 \times (-a, a)$. Suponhamos agora que a variedade V_0 tem uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Além disso, suponha que para cada $\alpha \in A$, um sistema especial S_α de equações diferenciais de classe $C^\infty(C^a)$ q-dimensional esteja definido sobre $U_\alpha \times (-a, a)$.

Suponha também que sejam dadas funções $C^\infty(C^a)$ $f_0 : V \to \mathbb{R}^q$ e $f_1 : V \to \mathbb{R}^q$. Denotaremos por Σ_α o sistema algébrico associado com S_α. Assumiremos que em alguma vizinhança do conjunto $S(f_0, f_1)$ os sistemas Σ_α formam um conjunto algébrico.

Definição 2.2.5 *Com as hipóteses acima, diremos que os sistemas S_α e o par f_0 e f_1 constituem um conjunto diferencial de dimensão q e de classe $C^\infty(C^a)$ sobre V. Usaremos a notação $[\{S_\alpha\}, f_0, f_1]$.*

Chamaremos de dados iniciais as funções f_0 e f_1 e de conjunto algébrico associado ao conjunto $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Uma função $f : V_0 \to \mathbb{R}^q$ é uma solução do conjunto diferencial $[\{S_\alpha\}, f_0, f_1]$ se as condições iniciais $f_{|V_0} = f_0$ e $D_n f_{|V_0} = f_1$ forem satisfeitas e se f é uma solução do sistema S_α sobre todo conjunto $U_\alpha \times (-a, a)$.

Admitiremos sem demonstração o seguinte teorema:

Teorema 2.2.1 *[Teorema de Cauchy-Kowalewsky] Sejam dados os seguintes sistemas de equações em derivadas parciais de funções desconhecidas $u_1, \ldots, u_n$ com respeito às variáveis independentes $t, x_1, \ldots, x_n$:*

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n, \ldots, \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}, \ldots)$$

$$i, j = 1, \ldots, n; \quad k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k \leq n_j; \quad k_0 < n_j$$

Para $t = t_0$ considere as condições iniciais

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \phi_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) \quad k = 0, 1, \ldots, n_i - 1$$

Suponhamos que todas as funções F_i são analíticas em alguma vizinhança do *ponto* $(t^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, \phi^0_{j,k_0,k_1,\ldots,k_n}, \ldots)$, *onde*

$$\phi^0_{j,k_0,k_1,\ldots,k_n} = \left(\frac{\partial^{k-k_0}\phi^{(k_0)}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right)_{x_i=x_i^0}$$

$$i = 1, 2\ldots, n; \quad k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k \leq n_i$$

e as derivadas são calculadas no ponto $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$. *Se todas as funções* $\phi_j^{(k)}$ *são analíticas em alguma vizinhança do ponto* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, *então para o sistema acima, existe uma única solução analítica em alguma vizinhança do ponto* $(t^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

A prova deste teorema pode ser encontrada em [6]. Para encerrarmos esta seção, provaremos dois teoremas que garantem a existência de solução para todo conjunto diferencial. Para isso, precisaremos da seguinte versão do teorema de Cauchy-Kowalewsky:

Teorema 2.2.2 *Considere a equação*

$$D_{nn}f(v) = b(j_v^2 f) \tag{2}$$

As seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) Se b é uma aplicação C^a, *então a equação (2) possui uma única solução* C^a f *em alguma vizinhança* $V_0 \times (-\epsilon, \epsilon)$ *do conjunto* V_0 *tal que* $f_{|V_0} = f_0$ *e* $D_n f_{|V_0} = f_1$.

(ii) Se b é uma aplicação C^∞, *então existe uma única série formal* $\Sigma_{r=0}^{\infty}\varphi_r u_n^r$, *com* $\varphi_r \in C^\infty(V_0, \mathbb{R}^q)$ *e* $\varphi_0 = f_0$, $\varphi_1 = f_1$, *que satisfaz formalmente a equação (2).*

Demonstração. Decorre do próprio teorema de Cauchy-Kowalewsky, já que as coordenadas de $j_v^2 f$ são as coordenadas de v (dado um sistema de coordenadas) juntamente com as derivadas parciais de f.

cqd

Teorema 2.2.3 *Todo conjunto diferencial* C^a *tem uma única solução* C^a.

Demonstração. Seja $[\{S_\alpha\}, f_0, f_1]$ um conjunto diferencial C^a. Seja $\{\Sigma_\alpha\}$ o conjunto algébrico associado a $[\{S_\alpha\}, f_0, f_1]$. Pela definição de conjunto diferencial, $\{\Sigma_\alpha\}$ possui uma solução analítica φ em alguma vizinhança do conjunto $S(f_0, f_1)$ tal que $[\{S_\alpha\}, f_0, f_1]$ pode ser substituído pela equação $D_{nn}f(v) = \varphi(j_v^2 f)$.

Pelo item (i) do teorema 2.2.2, $D_{nn}f(v) = \varphi(j_v^2 f)$ possui uma solução C^a f, com dados iniciais $f_{|V_0} = f_0$ e $D_n f_{|V_0} = f_1$. Como já foi comentado antes, por ser solução da equação, f também é solução de $[\{S_\alpha\}, f_0, f_1]$ e desse modo, o teorema está provado.

cqd

O próximo teorema é a versão C^∞ do teorema 2.2.3. Mas antes, precisamos do seguinte lema:

Lema 2.2.1 *Para qualquer seqüência de funções C^∞ $\varphi_r : V_0 \to \mathbb{R}^q$, $r = 0, 1, \ldots$, existe uma função C^∞ $f : V \to \mathbb{R}^q$ com série de Taylor $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_r x_n^r$.*

Demonstração. Seja $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ as coordenadas especias de $v \in V = V_0 \times (-a, a)$. Seja $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função C^∞ limitada em U tal que $\lambda(x) = x$, para $x \in U$, onde $U = (-\delta, \delta)$ é uma vizinhança de zero, $\delta < a$. Seja $(k_r)_{r \in N}$ seqüência de números naturais que tende para o infinito rapidamente. Então a série

$$\sum_{r=0}^{\infty} (\frac{\lambda(k_r x_n)}{k_r})^r \varphi_r(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

converge na topologia C^∞ para uma função $f : V \to \mathbb{R}^q$. De fato, basta observar que λ é limitada e que $\frac{1}{k_r}$ tende para zero, se r tende para o infinito.

Vamos escolher $\delta_1 > 0$ tal que $|k_r x_n| < \delta_1$ e $\frac{\delta_1}{k_r} < \delta$. É claro que se $x \in (-\delta_1, \delta_1)$, então $\lambda(x) = x$. Logo,

$$\sum_{r=0}^{\infty} (\frac{\lambda(k_r x_n)}{k_r})^r \varphi_r(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{r=0}^{\infty} (\frac{k_r x_n}{k_r})^r \varphi_r(x_1, \ldots, x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} x_n^r \varphi_r(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

Derivando r-vezes, obtemos $\frac{\partial^r f}{\partial x_n^r} \mid_{V_0} = r!\varphi_r$.

Teorema 2.2.4 *Todo conjunto diferencial C^∞ tem uma solução formal.*

Demonstração. A demonstração é semelhante à do teorema 2.2.3. Seja $[\{S_\alpha\}, f_0, f_1]$ um conjunto diferencial C^∞. Seja $\{\Sigma_\alpha\}$ o conjunto algébrico associado a $[\{S_\alpha\}, f_0, f_1]$. Pela definição de conjunto diferencial, existe uma série formal $\Sigma_{r=0}^{\infty}\varphi_r x_n^r$ com $\varphi_r \in C^\infty(V_0, \mathbb{R}^q)$ e $\varphi_0 = f_0$, $\varphi_1 = f_1$, que formalmente satisfaz as equações de todos os sistemas S_α, em alguma vizinhança do conjunto $S(f_0, f_1)$.

Pelo item (ii) do teorema 2.2.2, então existe uma única série formal $\Sigma_{r=0}^{\infty}\varphi_r u_n^r$, com $\varphi_r \in C^\infty(V_0, \mathbb{R}^q)$ e $\varphi_0 = f_0$, $\varphi_1 = f_1$, que satisfaz formalmente a equação $D_{nn}f(v) = \varphi(j_v^2 f)$. Aplicando o lema anterior, existe uma função C^∞ $f : V \to \mathbb{R}^q$ com série de Taylor $\Sigma_{r=0}^{\infty}\varphi_r x_n^r$. Logo, f é a solução formal procurada.

cqd

3 MERGULHOS LIVRES ISOMÉTRICOS

A partir de agora, as variedades tratadas serão admitidas riemannianas.

3.1 MERGULHOS ISOMÉTRICOS EM DIMENSÕES SUFICIENTEMENTE ALTAS

Enunciaremos, sem demonstração, as versões C^∞ e C^a do Teorema da Função Implícita de Nash.

Teorema 3.1.1 *[Versão C^∞ do Teorema da Função Implícita de Nash] Seja V uma variedade compacta C^∞. Para todo mergulho livre C^∞ $f : V \to \mathbb{R}^q$ (imersão livre C^∞), existe uma vizinhança G na topologia forte C^∞ da métrica $g(f)$ tal que qualquer métrica nesta vizinhança é induzida por um mergulho livre C^∞ (imersão livre C^∞) $\varphi : V \to \mathbb{R}^q$.*

Teorema 3.1.2 *[Versão C^a do Teorema da Função Implícita de Nash] Seja V uma variedade compacta C^a. Para todo mergulho livre C^a $f : V \to \mathbb{R}^q$ (imersão livre C^a) e para qualquer forma quadrática diferencial C^a $h : T(V) \to \mathbb{R}$, existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer número real c, com $|c| < \epsilon$, a forma $g(f) + ch$ é induzida por um mergulho livre C^a (imersão livre C^a) $\varphi : V \to \mathbb{R}^q$.*

Lema 3.1.1 *Seja (V, B, π) um fibrado vetorial $C^\infty(C^a)$ com base compacta. Sejam s uma seção deste fibrado e F o conjunto de seções $C^\infty(C^a)$ tais que para qualquer vetor $v \in U$, onde U é uma vizinhança de $s(B)$, existem seções $f_1, \ldots, f_k \in F$ e números positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ com $\alpha_1 f_1(\pi(v)) + \ldots + \alpha_k f_k(\pi(v)) = v$. Então existem seções $s_1, \ldots, s_m \in F$ e funções positivas $C^\infty(C^a)$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m : B \to \mathbb{R}$ tais que $s = \alpha_1 s_1 + \ldots + \alpha_m s_m$.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração deste lema em duas partes:

1. Provaremos inicialmente que para todo $b \in B$, existem um conjunto de seções $s_1, \ldots, s_m \in F$ e um conjunto de números positivos $\beta_1, \ldots, \beta_m$ tais que $\beta_1 s_1(b) + \ldots + \beta_m s_m(b) = s(b)$;

2. Escolhendo exatamente as seções $s_1, \ldots, s_m$ acima, vamos definir

$$\phi : B \times \mathbb{R}^m \to V$$

$$(b, x_1, \ldots, x_m) \mapsto \phi(b, x_1, \ldots, x_m) = x_1 s_1(b) + \ldots + x_m s_m(b)$$

Sejam $Y = \phi^{-1}(s(B))$ e $\mathbb{R}^m_+ = \{(x_1, \ldots, x_m); x_i > 0, i = 1, \ldots, m\}$. Vamos tomar o conjunto $Y_+ = Y \cap (B \times \mathbb{R}^m_+)$. Mostraremos que o fibrado trivial $(B \times \mathbb{R}^m, B, \pi)$ possui uma seção α, $C^\infty(C^\alpha)$, tal que $\alpha(B) \subset Y_+$.

Parte 1. Por hipótese, dado qualquer vetor $v \in U$, onde U é uma vizinhança de $s(B)$, existem seções $f_1, \ldots, f_k \in F$ e números positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tais que $\alpha_1 f_1(\pi(v)) + \ldots + \alpha_k f_k(\pi(v)) = v$, $\forall v \in U$. Isto equivale a afirmar que para cada $b \in B$, existem seções $f_1, \ldots, f_k \in F$ e números positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tais que $\alpha_1 f_1(\pi(v)) + \ldots + \alpha_k f_k(\pi(v)) = v$, para todo $v \in \pi^{-1}(b)$. Mais ainda, para cada $b \in B$, existem seções $f_1, \ldots, f_k \in F$ e números positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tais que $\alpha_1 f_1(b) + \ldots + \alpha_k f_k(b) = s(b)$. Basta notar que $\pi(v) = b$, para todo $v \in \pi^{-1}(b)$.

Seja $U_b \subset \pi^{-1}(b)$, uma vizinhança de $s(b)$. Sendo s contínua, $s^{-1}(U_b)$ é uma vizinhança de b que satisfaz a condição de existirem seções $f_1, \ldots, f_k \in F$ e números positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tal que $\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_k f_k(x)) = s(x)$ para todo $x \in s^{-1}(U_b)$. Logo, podemos cobrir B com estas vizinhanças. Como B é compacto, podemos encontrar uma subcobertura finita de B.

Seja $U_1, \ldots, U_n$ a tal subcobertura finita de B. Cada U_i tem a seguinte propriedade: para cada $x \in U_i$, existem seções $f_1, \ldots, f_k \in F$ e números positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tais que $\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_k f_k(x)) = s(x)$. Seja $s_1, \ldots, s_m$ a união dos conjuntos de seções que satisfazem a propriedade acima para cada U_i e seja $\beta_1, \ldots, \beta_m$ a união dos números positivos correspondentes. Logo para cada $b \in B$, temos que

$$\beta_1 s_1(b) + \ldots + \beta_m s_m(b)) = s(b)$$

pois cada $b \in B$ pertence a algum U_i, para algum i.

Uma conseqüência desse resultado é que por s ser uma seção, isto é, $s(\pi(v)) = v$, $\forall v \in V$, então podemos afirmar que para cada $v \in V$, existem seções $s_1, \ldots, s_m \in F$ e números positivos $\beta_1, \ldots, \beta_m$ tais que $\beta_1 s_1(\pi(v)) + \ldots + \beta_m s_m(\pi(v)) = v$.

Parte 2. Observemos inicialmente que $\{Y \cap (b \times \mathbb{R}^m)\}$ é um subfibrado afim do fibrado trivial $(B \times \mathbb{R}^m, B, \pi)$. Como para todo $b \in B$ existe uma expansão $s(b) = \beta_1 s_1(\pi(b)) + \ldots + \beta_m s_m(\pi(b))$, com $\beta_1, \ldots, \beta_m$ positivos, segue que Y_+ intersecta toda fibra deste subfibrado.

Além disso, na topologia induzida em Y, $Y_+ = Y \cap \mathbb{R}^m_+$ é um aberto em Y. Logo, pela proposição 1.2.3, existe, para todo ponto $b \in B$, uma vizinhança U_b de b e uma seção parcial $\phi_b : U_b \to B \times \mathbb{R}^m$ $C^\infty(C^a)$ tal que $\phi_b(U_b) \subset Y_+$.

Seja $U_{b_1}, \ldots, U_{b_r}$ uma cobertura de B e seja $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ uma partição de unidade C^∞ subordinada a cobertura dada. Seja $\alpha = \lambda_1 \phi_{b_1} + \ldots + \lambda_r \phi_{b_r}$. Observe que $\alpha : B \to B \times \mathbb{R}^m$ define uma seção C^∞. Isto prova o lema para o caso C^∞.

Para o caso C^a, esta seção C^∞ pode ser substituída por uma seção C^a do subfibrado $\{Y \cap (b \times \mathbb{R}^m)\}$ que é suficientemente próxima de α na topologia C^0. Sendo $\alpha : B \to B \times \mathbb{R}^m$, uma seção da forma, digamos, $\alpha(b) = (b, \alpha_1(b), \ldots, \alpha_m(b))$, estaremos encontrando funções $\alpha_i : B \to \mathbb{R}$, $C^\infty(C^\alpha)$, positivas e que satisfazem a condição $s(b) = \alpha_1(b)s_1(b) + \ldots + \alpha_m(b)s_m(b)$, para todo $b \in B$.

cqd

Proposição 3.1.1 *Seja V variedade riemanianna compacta $C^\infty(C^a)$ com métrica g. Então existem funções reais $C^\infty(C^a)$ $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ e funções positivas $C^\infty(C^a)$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, todas com domínio V, tais que $g = \alpha_1(d\varphi_1)^2 + \ldots + \alpha_m(d\varphi_m)^2$.*

Demonstração. Sejam (V, B, π) um fibrado $C^\infty(C^a)$ q-dimensional, V variedade riemanniana $C^\infty(C^a)$ n-dimensional e $Q : V \to T(V)$ uma forma quadrática. Dado $p \in V$, seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormal de T_pV.

$$Q_p(v) = Q_p(v_1e_1 + \ldots + v_ne_n) = v_1^2 + \ldots + v_n^2 =$$

$$= \pi_1^2(v) + \ldots + \pi_n^2(v)$$

onde $\pi_i(v) = v_i$ e $v = v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n$.

Como Q_p, sendo uma forma quadrática, pode ser escrita como uma soma de quadrado de formas lineares, temos apenas que verificar que para toda forma linear L definida sobre T_pV existe uma função $C^\infty(C^a)$ $\psi : V \to \mathbb{R}$ tal que $d_p\psi = L$.

O caso C^a segue da existência de uma imersão analítica de V em um espaço euclideano. Para o caso C^∞, seja $L : T_pV \to \mathbb{R}$ uma forma linear. Existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de V e funções φ_α definidas em U_α tal que $L = d\psi_\alpha$ em U_α. Sendo V compacto, existe uma subcobertura finita $\{U_1, \ldots, U_m\}$ tal que $L = d\psi_j$ em U_j, $j = 1, \ldots, m$. Seja $\{\lambda_j\}$ partição da unidade subordinada a subcobertura $\{U_1, \ldots, U_m\}$.

Para cada $p \in V$ vamos escolher uma vizinhança V_j tal que $\overline{V}_j \subset U_j$ tal que $\lambda_j(p) = 1$, $p \in V_j$ e $\lambda_j(p) = 0$, $p \notin V_j$. Vamos definir $\psi = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \psi_j$. Então $d_p\psi = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(p) d_p\psi_j + \psi_j(p) d_p\psi_j$. Como em V_j, $\lambda_j(p) = 1$ segue que $d_p\lambda_j = 0$. Logo em V_j, $d_p\psi = d_p\psi_j$, $p \in V_j$ o que implica que $L = d_p\psi$.

Na seção 1.1 vimos que g e $(d\varphi_i)^2$ podem ser interpretados como seções do fibrado $(Q(V), V, \pi)$. Esta proposição é um corolário do lema anterior pois mostramos que para qualquer ponto $p \in V$ e qualquer forma quadrática positiva Q_p definida sobre o espaço tangente T_pV existem funções $C^\infty(C^a)$ $\psi_1, \ldots, \psi_n$ sobre V tal que $(d_p\psi_1)^2 + \ldots + (d_p\psi_n)^2 = Q_p$.

cqd

Proposição 3.1.2 *Sejam V uma variedade $C^\infty(C^a)$ e g uma forma diferencial quadrática sobre V que pode ser expressa na forma $g = \alpha_1^2(d\varphi_1)^2 + \ldots + \alpha_m^2(d\varphi_m)^2$, onde cada $\varphi_i : V \to \mathbb{R}$ são funções $C^\infty(C^a)$ e as funções $\alpha_i : V \to \mathbb{R}$ são funções não negativas $C^\infty(C^a)$. Tomando $\lambda \neq 0$, então* *podemos definir uma função $C^{\infty}(C^a)$ $f^{\lambda}: V \to \mathbb{R}^{2m}$, tal que*

$$f^{\lambda}(p) = (\frac{\alpha_1(p)}{\lambda}\cos(\lambda\varphi_1(p)), \ldots, \frac{\alpha_m(p)}{\lambda}\cos(\lambda\varphi_m(p)),$$

$$\frac{\alpha_1(p)}{\lambda}\mathrm{sen}(\lambda\varphi_1(p)), \ldots, \frac{\alpha_m(p)}{\lambda}\mathrm{sen}(\lambda\varphi_m(p)))$$

com $g(f^{\lambda}) = \frac{h}{\lambda^2} + g$, onde $h = (d\alpha_1)^2 + \ldots + (d\alpha_m)^2$.

Demonstração. Como foi dito na seção 1.1, $g(f^{\lambda})$ é a métrica em V induzida por f^{λ} definida por:

$$g(f^{\lambda})(v) = g(d_p f^{\lambda}(v))$$

Logo, temos que,

$$g(f^{\lambda})(v) = g(d_p f^{\lambda}(v)) =$$

$$= g(\frac{d_p\alpha_i(v)}{\lambda}\cos(\lambda\varphi_i(v)) - \frac{\alpha_i(v)}{\lambda}\lambda d_p\varphi_i(v)\mathrm{sen}(\lambda\varphi_i(v)),$$

$$\frac{d_p\alpha_{m+i}(v)}{\lambda}\mathrm{sen}(\lambda\varphi_{m+i}(v)) + \frac{\alpha_i(v)}{\lambda}\lambda d_p\varphi_i(v)\cos(\lambda\varphi_i(v))) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(\frac{d_p\alpha_i(v)}{\lambda}\cos(\lambda\varphi_i(v)))^2 - 2\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i(v)d_p\alpha_i(v)d_p\varphi_i(v)}{\lambda}\cos(\lambda\varphi_i(v))\mathrm{sen}(\lambda\varphi_i(v)) +$$

$$\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i(v)d_p\varphi_i(v)\mathrm{sen}(\lambda\varphi_i(v)))^2 + \sum_{i=1}^{m}(\frac{d_p\alpha_i(v)}{\lambda}\mathrm{sen}(\lambda\varphi_i(v)))^2 +$$

$$2\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i(v)d_p\alpha_i(v)d_p\varphi_i(v)}{\lambda}\cos(\lambda\varphi_i(v))\mathrm{sen}(\lambda\varphi_i(v)) + \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i(v)d_p\varphi_i(v)\cos(\lambda\varphi_i(v)))^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(\frac{d_p\alpha_i(v)}{\lambda})^2 + \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i(v)d_p\varphi_i(v))^2 =$$

$$= \frac{h(v)}{\lambda^2} + g(v)$$

cqd

A proposição 3.1.2 garante a existência de uma família de funções, já que λ é arbitrário.

Definição 3.1.1 *Seja $f : V \to W$ uma imersão diferenciável. A aplicação f chama-se curta se a métrica riemanniana induzida $g(f)$ sobre V é tal que a forma $g - g(f)$ é não negativa. A aplicação f é estritamente curta se a forma $g - g(f)$ é positiva. Nesse caso, $g - g(f)$ é uma métrica riemanniana.*

Toda imersão $f : V \to \mathbb{R}^q$, V variedade compacta, que é multiplicada por um número suficientemente pequeno torna-se estritamente curta. De fato, dado $p \in V$, seja $T_1V(p) = \{v \in T_pV; g_p(v) = 1\}$, onde g é a métrica riemanniana sobre V. Como $T_1V(p)$ é compacto para todo $p \in V$, existem δ_0, δ_1 tais que $0 < \delta_0 \leq g(f)(v) \leq \delta_1$, $\forall v \in T_1V(p)$, $\forall p \in V$.

Seja ϵ tal que $1 - \epsilon^2\delta_1 > 0$. Seja $h_\epsilon = g - g(\epsilon f)$. Dado $v \in T_pV$, $v \neq 0$, para $p \in V$ arbitrário, temos que:

$$h_\epsilon(v) = h_\epsilon((g(v))^{\frac{1}{2}} \frac{v}{(g(v))^{\frac{1}{2}}}) = g(v)h_\epsilon(\frac{v}{(g(v))^{\frac{1}{2}}}) =$$

$$= g(v)[g - g(\epsilon f)](\frac{v}{(g(v))^{\frac{1}{2}}}) = g(v)[g(\frac{v}{(g(v))^{\frac{1}{2}}}) - g(\epsilon f)(\frac{v}{(g(v))^{\frac{1}{2}}})] =$$

$$= g(v)[g(\frac{v}{(g(v))^{\frac{1}{2}}}) - \epsilon^2 g(f)(\frac{v}{(g(v))^{\frac{1}{2}}})]$$

Notemos que $\frac{v}{(g(v))^{\frac{1}{2}}} \in T_1V(p)$. Como $g(f)(v) \leq \delta_1$, $\forall v \in T_1V(p)$, $\forall p \in V$, temos que

$$h_\epsilon(v) \geq g(v)[1 - \epsilon^2\delta_1] > 0$$

A última desigualdade deve-se ao fato de que g é uma métrica riemanniana.

Teorema 3.1.3 *Toda variedade riemanniana V compacta $C^\infty(C^a)$ n-dimensional pode ser mergulhada isometricamente $C^\infty(C^a)$ em um espaço euclideano de dimensão suficientemente alta.*

Demonstração. Seja V variedade compacta $C^\infty(C^a)$ n-dimensional com métrica g. Pelo teorema 1.3.1, existe um mergulho livre $C^\infty(C^a)$ $f_0 : V \to \mathbb{R}^k$, para k suficientemente grande. Como toda imersão de uma variedade compacta em um espaço euclideano torna-se estritamente curta após a multiplicação por um número suficientemente pequeno, então podemos assumir que f_0 é estritamente curta.

Logo, $g - g(f_0)$ é uma métrica riemanniana. Pela proposição 3.1.1, existem funções reais $C^\infty(C^a)$ $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ e funções positivas $C^\infty(C^a)$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, tais que $g - g(f_0) = \alpha_1(d\varphi_1)^2 + \ldots + \alpha_m(d\varphi_m)^2$. Pela proposição 3.1.2, para algum m existe uma família de aplicações $C^\infty(C^a)$ $f^\lambda : V \to \mathbb{R}^{2m}$, $\lambda \neq 0$, com $g(f^\lambda) = \frac{h}{\lambda^2} + g - g(f_0)$.

As versões C^∞ e C^a do Teorema da Função Implícita de Nash garantem a existência de uma vizinhança da métrica $g(f_0)$ tal que toda métrica nesta vizinhança é induzida por um mergulho livre isométrico C^∞ e C^a, respectivamente, $f_1^\lambda : V \to \mathbb{R}^q$, isto é, para λ suficientemente grande, temos $g(f_1^\lambda) = g(f_0) - \frac{h}{\lambda^2}$.

Escolhendo um λ suficientemente grande, vamos definir a aplicação

$$\begin{aligned} f_1^\lambda \oplus f^\lambda : V &\to \mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^{2m} \\ v &\mapsto (f_1^\lambda(v), f^\lambda(v)) \end{aligned}$$

A aplicação $f_1^\lambda \oplus f^\lambda$ induz g, já que

$$g(f_1^\lambda \oplus f^\lambda) = g(f_0) - \frac{h}{\lambda^2} + \frac{h}{\lambda^2} + g - g(f_0) = g$$

cqd

3.2 MERGULHOS LIVRES LOCAIS ISOMÉTRICOS EM $\mathbb{R}^{s_n+n}$

Definição 3.2.1 *Seja $f : V \to \mathbb{R}^q$ aplicação C^∞ onde V é uma variedade riemanniana C^∞ com métrica g. Dado um conjunto $A \subset V$, suponhamos que as expressões, g_{ij} e $g_{ij}(f)$, das métricas riemannianas g e $g(f)$ em coordenadas locais tem as mesmas derivadas parciais de todas as ordens em todos os pontos de A. Diremos, então, que f é uma aplicação infinitesimalmente isométrica sobre A.*

As seguintes observações precisam ser feitas:

Observação 1. Se uma aplicação $f : V \to \mathbb{R}^q$ é infinitesimalmente isométrica sobre um conjunto $A \subset V$ então $f_{|_N}$ também é infinitesimalmente isométrica sobre A, onde N é uma subvariedade de V.

Observação 2. Uma aplicação $f : V \to \mathbb{R}^q$ que é infinitesimalmente isométrica sobre um conjunto $A \subset V$ é uma imersão diferenciável em alguma vizinhança de A.

Observação 3. Se uma aplicação $f : V \to \mathbb{R}^q$ é infinitesimalmente isométrica sobre uma subvariedade $N \subset V$ então sua restrição $f_{|_N}$ é uma imersão isométrica.

Proposição 3.2.1 *Seja $f : V \to \mathbb{R}^q$ um mergulho livre C^∞ (imersão livre C^∞) que é infinitesimalmente isométrica sobre um conjunto compacto A. Então existe uma vizinhança de A que tem um mergulho livre isométrico C^∞ (imersão livre isométrica C^∞) em $\mathbb{R}^q$.*

Demonstração. Seja K subvariedade compacta de V contendo uma vizinhança de A. Pela observação 1, da seção 1.3, $f_{|_K}$ é livre. Pela versão C^∞ do Teorema da Função Implícita de Nash, a métrica $g(f\ |_K)$ tem uma vizinhança G na topologia forte C^∞, tal que qualquer métrica em G é induzida por um mergulho livre C^∞ (imersão livre C^∞) $\varphi : K \to \mathbb{R}^q$.

Como G é uma vizinhança na topologia forte C^∞, em particular, G é uma vizinhança na topologia forte C^r para algum r finito. Pela observação 1 acima, $f_{|_K}$ é infinitesimalmente isométrico sobre A. Logo, podemos escolher uma métrica g em G que coincida com a métrica de V em alguma vizinhança U de A. A restrição a U do mergulho livre isométrico $\varphi : V \to \mathbb{R}^q$ induzido pela métrica g é um mergulho livre isométrico C^∞ (imersão isométrica livre C^∞).

cqd

Definição 3.2.2 *Seja V variedade riemanniana n-dimensional e V_0 subvariedade de V, $(n-1)$-dimensional. Diremos que o par (V, V_0) é normal se V é uma vizinhança tubular aberta de V_0 de raio constante.*

Lembramos que uma subvariedade de uma variedade riemanniana sempre tem uma vizinhança tubular de raio constante se a subvariedade é compacta e está contida no interior da variedade. Logo, se uma subvariedade V_0 $(n-1)$-dimensional de uma variedade n-dimensional V é compacta e está contida no interior de V, então V contém uma subvariedade V_1 tal que (V_1, V_0) é um par normal.

Se (V, V_0) é um par normal, então a decomposição normal $V = V_0 \times (-a, a)$ nos permite introduzir um sistema de coordenadas em V, chamado de sistema de coordenadas normais. Neste sistema, as expressões da métrica riemanniana em V assume os seguintes valores: $g_{ij} = 0$, se $i \neq j$ e $g_{ij} = 1$ se $i = j$.

Sejam $V = V_0 \times (-a, a)$ variedade riemanniana n-dimensional com métrica g e (V, V_0) um par normal, onde estamos identificando V_0 com $V_0 \times \{0\}$. Seja $f_0 : V_0 \to \mathbb{R}^q$ aplicação C^∞. Para cada sistema de coordenadas locais em V_0 considere o sistema de equações algébricas lineares

$$\begin{cases} \langle D_k f_0, f_1 \rangle = 0 \\ \langle D_{kl} f_0, f_1 \rangle = -\frac{1}{2} D_n g_{kl} \end{cases} \tag{3}$$

com $k, l = 1, \ldots, n-1$, $k \leq l$. A função $f_1 : V_0 \to \mathbb{R}^q$ desempenha o papel de incógnita.

Para cada sistema de coordenadas normais em V considere o sistema especial de equações diferenciais

$$\begin{cases} \langle D_k f, D_{nn} f \rangle = -\langle D_n f, D_{kn} f \rangle \\ \langle D_n f, D_{nn} f \rangle = 0 \\ \langle D_{kl} f, D_{nn} f \rangle = \langle D_{kn} f, D_{ln} f \rangle - \frac{1}{2} D_{nn} g_{kl} \end{cases} \tag{4}$$

A função $f : V \to \mathbb{R}^q$ desempenha o papel de incógnita no sistema (4). Podemos estabelecer um elo entre os dois sistemas, se as condições iniciais $f_{|V_0} = f_0$, $D_n f_{|V_0} = f_1$ são verificadas. Sempre consideraremos f_0 uma aplicação livre, em especial, no próximo lema, provado por Janet.

Lema 3.2.1 *Seja (V, V_0) um par normal com $\dim V = n$. Sejam $f_0 : V_0 \to \mathbb{R}^q$ uma imersão isométrica C^∞ e $f_1 : V_0 \to \mathbb{R}^q$ uma aplicação C^∞, com $\langle f_1(v), f_1(v) \rangle = 1$, $\forall v \in V$. Suponha que f_0 e f_1 satisfaçam as equações do sistema (3) para todo sistema de coordenadas locais. Se existe uma aplicação*

C^∞ $f : V \to \mathbb{R}^q$ que satisfaz as condições iniciais $f_{|V_0} = f_0$, $D_n f_{|V_0} = f_1$ e para todo sistema de coordenadas normais satisfaz o sistema (4), então f é uma imersão isométrica.

Demonstração. Basta considerarmos o caso em que V é coberto por um sistema de coordenadas normais o qual fixaremos. Ponhamos

$$E_{ij}(v) = \langle D_i f(v), D_j f(v)\rangle - g_{ij}(v)$$

O lema estará provado se conseguirmos mostrar que $E_{ij}(v) = 0, \forall v \in V$.

Para simplificar a notação, escreveremos apenas

$$E_{ij} = \langle D_i f, D_j f\rangle - g_{ij}$$

sobre V. É claro que em particular,

$$E_{in} = \langle D_i f, D_n f\rangle - g_{in}$$

sobre V. Sendo assim,

$$D_n E_{in} = \langle D_{ni} f, D_n f\rangle + \langle D_i f, D_{nn} f\rangle - D_n g_{in}$$

Usando as duas primeiras equações do sistema (4) e usando o fato de que $g_{in} = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$ e $g_{nn} = 1$ pois o sistema de coordenadas é normal, obtemos,

$$D_n E_{in} = \langle D_{ni} f, D_n f\rangle - \langle D_{ni} f, D_n f\rangle - 0 = 0$$

sobre V, $i = 1, \ldots, n$. As condições iniciais $f_{|V_0} = f_0$, $D_n f_{|V_0} = f_1$ permitem-nos escrever a primeira equação do sistema (3) como $\langle D_k f, D_n f\rangle = 0$ sobre V_0. Isto implica que $E_{in} = \langle D_i f, D_n f\rangle - g_{in} = 0$ sobre V_0, lembrando que $g_{in} = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, pois o sistema de coordenadas é normal. Como $D_n E_{in} = 0$, concluímos que $E_{in} = 0$ sobre V. Agora mostraremos que $D_{nn}E_{kl} - D_{kn}E_{ln} + D_{kl}E_{nn} - D_{ln}E_{kn} = 0$, onde $k, l = 1, \ldots, n-1$, $k \leq l$.

$$D_{nn}E_{kl} = D_{nn}\{\langle D_k f, D_l f\rangle - g_{kl}\} =$$

$$= \langle D_{nnk}f, D_l f\rangle + 2\langle D_{nk}f, D_{nl}f\rangle + \langle D_k f, D_{nnl}f\rangle - D_{nn}g_{kl}$$

$$D_{kn}E_{ln} = \langle D_{knl}f, D_n f\rangle + \langle D_{nk}f, D_{nl}f\rangle + \langle D_{kl}f, D_{nn}f\rangle + \langle D_l f, D_{knn}f\rangle - D_{kn}g_{ln}$$

$$D_{kl}E_{nn} = 2\langle D_{kln}f, D_n f\rangle + 2\langle D_{ln}f, D_{kn}f\rangle - D_{kl}g_{nn}$$

$$D_{ln}E_{kn} = \langle D_{kln}f, D_n f\rangle + \langle D_{nk}f, D_{ln}f\rangle + \langle D_{lk}f, D_{nn}f\rangle + \langle D_k f, D_{lnn}f\rangle - D_{ln}g_{kn}$$

Novamente usando o fato de que $g_{in} = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$ e $g_{nn} = 1$ pois o sistema de coordenadas é normal, temos que

$$D_{nn}E_{kl} - D_{kn}E_{ln} + D_{kl}E_{nn} - D_{ln}E_{kn} = -2\langle D_{lk}f, D_{nn}f\rangle - \langle D_l f, D_{knn}f\rangle$$

Observando a última linha do sistema (4), concluímos que

$$D_{nn}E_{kl} - D_{kn}E_{ln} + D_{kl}E_{nn} - D_{ln}E_{kn} = 0$$

sobre V. Como $E_{in} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, obtemos,

$$0 = D_{nn}E_{kl} - D_{kn}E_{ln} + D_{kl}E_{nn} - D_{ln}E_{kn} = D_{nn}E_{kl}$$

sobre V. Mostraremos agora que $D_n E_{kl} - D_k E_{ln} - D_l E_{kn} = 0$ sobre V_0.

$$D_n E_{kl} = \langle D_{kn}f, D_l f\rangle + \langle D_k f, D_{ln}f\rangle - D_n g_{kl}$$

$$D_k E_{ln} = \langle D_{kl}f, D_n f\rangle + \langle D_l f, D_{kn}f\rangle - D_n g_{ln}$$

$$D_l E_{kn} = \langle D_{lk}f, D_n f\rangle + \langle D_k f, D_{ln}f\rangle - D_l g_{kn}$$

Logo,
$$D_nE_{kl} - D_kE_{ln} - D_lE_{kn} = -2\langle D_{kl}f, D_nf\rangle - D_ng_{kl}$$

Usando a segunda linha do sistema (3), temos que $D_nE_{kl} - D_kE_{ln} - D_lE_{kn} = 0$ sobre V_0. Como $E_{in} = 0$ sobre V, em particular sobre V_0, então $D_nE_{kl} = 0$ sobre V_0. Por hipótese, f_0 é uma isometria. Logo $E_{kl} = 0$ sobre V_0. Como $D_{nn}E_{kl} = 0$ sobre V e $D_nE_{kl} = 0$ sobre V_0 concluímos que $E_{kl} = 0$ sobre V. Adicionando o fato de que $E_{in} = 0$ sobre V, $i = 1, \ldots, n$, concluímos que $E_{ij} = 0$ sobre V.

Sendo assim, $g_{ij} = \langle D_if, D_jf\rangle$ sobre V e portanto f é imersão isométrica.

cqd

Apresentamos agora a seguinte modificação do lema 3.2.1:

Corolário 3.2.1 *Sejam V, V_0, f_0 e f_1 como no lema 3.2.1. Se uma aplicação C^∞ $f : V \to \mathbb{R}^q$ satisfaz as equações do sistema (4) para todo sistema de coordenadas normais, então f é infinitesimalmente isométrico sobre V_0.*

Demonstração. A prova é igual ao lema 3.2.1 com f e g_{ij} sendo substituídas por suas expansões de Taylor na última coordenada.

Lema 3.2.2 *Sejam (V, V_0) um par normal com $\dim V = n$ e $f : V \to \mathbb{R}^q$ uma aplicação C^∞. Seja $f_0 = f_{|V_0}$ uma aplicação livre e $f_1 = D_nf_{|V_0}$ uma solução regular unitária do conjunto diferencial (3). Se existe uma aplicação $\phi : V \to \mathbb{R}^q$ que satisfaz para todo sistema de coordenadas locais em V_0 as equações*

$$\begin{cases} \langle D_kf_0, \phi\rangle = 0 \\ \langle D_{kl}f_0, \phi\rangle = 0 \\ \langle f_1, \phi\rangle = 0 \\ \langle D_kf_1, \phi\rangle = 0 \end{cases} \tag{5}$$

e

$$\langle D_{nn}f, \phi\rangle = 1 \tag{6}$$

sobre V_0, então a aplicação f é livre em alguma vizinhança de V_0.

Demonstração. Novamente é suficiente considerar o caso em que V é coberta por um sistema de coordenadas normais. Para mostrarmos que f é uma aplicação livre sobre alguma vizinhança de V_0, basta que o conjunto de vetores $\{D_i f(v), D_{ij} f(v)\}$, $1 \leq i \leq j \leq n$ seja LI sobre V_0.

Notemos inicialmente que as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de f e f_0 coincidem em V_0, ou seja, $D_k f(v) = D_k f_0(v)$ e $D_{kl} f(v) = D_{kl} f_0(v)$, para $v \in V_0$, $k, l = 1, \ldots, n-1$, $k \leq l$. Como f_0 é uma aplicação livre, então $\{D_k f(v), D_{kl} f(v)\}$ constituem um conjunto LI para $v \in V_0$, $k, l = 1, \ldots, n-1$, $k \leq l$.

Por hipótese, f_1 é uma solução regular unitária do sistema (3). Como $D_n f(v) = f_1(v)$, $v \in V_0$, e conseqüentemente, $D_{nk} f(v) = D_k f_1(v)$, $v \in V_0$, $k = 1, \ldots, n-1$, então o conjunto $\{D_k f(v), D_{kl} f(v)\} - \{D_{nn} f(v)\}$, $k, l = 1, \ldots, n$, $k \leq l$. é LI para $v \in V_0$. Mesmo se acrescentarmos o vetor $D_{nn} f(v)$, o conjunto $\{D_k f(v), D_{kl} f(v)\}$, $k, l = 1, \ldots, n$, $k \leq l$, $v \in V_0$, ainda é LI. Basta observar as equações da hipótese deste lema.

cqd

Antes de prosseguirmos para a próxima seção, façamos as seguintes observações. Suponhamos que (V, V_0) é um par normal com $\dim V = n$. Sejam $f_0 : V_0 \to \mathbb{R}^q$ aplicação livre C^∞ e $f_1 : V_0 \to \mathbb{R}^q$ solução unitária regular C^∞ do conjunto (3). Então,

Observação 1. Cada sistema em (5) é regular e de posto $s_n + n - 1$. Todos os sistemas em (5) juntamente com (6) formam um conjunto diferencial de posto $s_n + n - 1$.

Observação 2. Se $\varphi : V \to \mathbb{R}^q$ é uma aplicação C^∞ tal que $\varphi_{|V_0}$ é uma solução unitária para o sistema (4), então o sistema formado por (4) e $\langle \varphi, D_{nn} f \rangle = 1$ é regular com relação as condições iniciais $f_{|V_0} = f_0$, $D_n f_{|V_0} = f_1$. O tal sistema expandido junto com as condições iniciais constituem um conjunto diferencial.

Definição 3.2.3 *Seja V variedade riemanniana. Uma subvariedade $N \subset V$ é geodésica no ponto $p \in N$ se as geodésicas em N partindo de p também são geodésicas em V.*

Proposição 3.2.2 *Sejam V uma variedade riemanniana analítica n-dimensional e V_0 uma subvariedade $(n-1)$-dimensional que é geodésica em um ponto interior $v_0 \in V_0$. Se $f_0 : V_0 \to \mathbb{R}^q$, $q \geq s_n$ é uma aplicação livre isométrica analítica, então existe uma aplicação isométrica analítica $f : U_0 \to \mathbb{R}^q$, onde U_0 é uma vizinhança de v_0 em V.*

Demonstração. Vamos assumir que (V, V_0) é um par normal coberto por um sistema de coordenadas normal. Já que V_0 é geodésica em v_0, segue que neste sistema de coordenadas, $D_n g_{kl}(v_0) = 0$. Logo, o sistema (3) é homogêneo em v_0. Sendo regular e de posto menor do que q, usando a proposição 2.1.1, o sistema (3) tem uma solução unitária analítica f_1 em alguma vizinhança U_0 de v_0 em V.

Agora, tomaremos o par (V, U_0). Pelo sistema (3), o vetor $f_1(v_0)$ é ortogonal aos vetores $D_k f_0(v_0)$ e $D_{kl} f_0(v_0)$, lembrando que o sistema (3) é homogêneo em v_0. Logo, podemos assumir que $f_1(v)$ é sempre linearmente independente dos vetores $D_k f_0(v_0)$ e $D_{kl} f_0(v_0)$. Esta independência implica que o sistema (4) é regular com respeito aos dados iniciais $f_{|V_0} = f_0$, $D_n f_{|V_0} = f_1$.

Lembrando que estamos considerando o par (V, U_0), o teorema 2.2.3, garante que existe uma solução analítica $f : V \to \mathbb{R}^q$ para este sistema. Pelo lema 3.2.1, a aplicação f é uma imersão isométrica.

cqd

Teorema 3.2.1 *Seja V variedade riemanniana analítica n-dimensional com um ponto interior. Então existem uma vizinhança U deste ponto e um mergulho livre isométrico analítico $f : U \to \mathbb{R}^{s_n}$.*

Demonstração. A prova será feita por indução sobre n. Seja V variedade n-dimensional e $v_0 \in V$ um ponto interior. Seja V_0 subvariedade de V, $(n-1)$-dimensional, tal que V_0 seja geodésica em v_0. Por hipótese de indução, existem uma vizinhança U de v_0 em V_0 e um mergulho livre isométrico analítico $f : U \to \mathbb{R}^{s_{n-1}+n-1} \subset \mathbb{R}^{s_n}$. Então aplicamos a proposição anterior.

cqd

Proposição 3.2.3 *Seja V variedade riemanniana $C^\infty(C^a)$ n-dimensional. Seja V_0 subvariedade $(n-1)$-dimensional que é geodésica em um ponto interior v_0. Se $f : V_0 \to \mathbb{R}^q$, $q \geq s_n + n$ é uma aplicação livre isométrica*

$C^\infty(C^\alpha)$, então existe uma aplicação isométrica livre $C^\infty(C^a)$, $\phi : U \to \mathbb{R}^q$ onde U é uma vizinhança de v_0 em V.

Demonstração. Vamos seguir a mesma idéia inicial da proposição 3.2.2. Vamos assumir que (V, V_0) é um par normal coberto por um sistema de coordenadas normal singular. Logo o sistema (3) é homogêneo em v_0 e regular. Como sua imagem $s_n - 1$ é menor que $q - (n-1)$, pela proposição 2.1.3, existe uma solução $C^\infty(C^a)$ regular unitária $f_1 : U_0 \to \mathbb{R}^q$, onde U_0 é uma vizinhança de v_0.

Novamente, tomaremos o par (V, U_0). Já que o sistema do lema 3.2.2 é homogêneo e de imagem $s_n + n - 1 < q$ então ele possui uma solução unitária regular $C^\infty(C^a)$ $\phi_0 : U_0 \to \mathbb{R}^q$. Vamos extender ϕ_0 de uma maneira qualquer a uma aplicação $\phi : V \to \mathbb{R}^q$. Notemos que o sistema formado pelo sistema (4) e $\langle \phi, D_{nn} f \rangle = 1$ é regular com relação aos dados iniciais $f\,|_{V_0} = f_0$, $D_n f\,|_{V_0} = f_1$.

Pelas proposições 2.1.2 e 2.1.3 existem, respectivamente, uma solução $\varphi : V \to \mathbb{R}^q$ satisfazendo os dados iniciais no caso analítico e uma solução formal $\varphi : V \to \mathbb{R}^q$ satisfazendo os dados iniciais no caso C^∞. Pelo lema 3.2.2, $\varphi : V \to \mathbb{R}^q$ é livre. Pelo 3.2.1 e pelo seu corolário, φ é, respectivamente, isométrico no caso analítico e infinitesimalmente isométrico no caso C^∞. Por fim, aplica-se a versão C^∞ do Teorema da Função Implícita de Nash para o caso C^∞.

cqd

Teorema 3.2.2 *Seja V variedade riemanniana n-dimensional $C^\infty(C^a)$ com um ponto interior. Então existem uma vizinhança U deste ponto e um mergulho livre isométrico $f : U \to \mathbb{R}^{s_n+n}$ $C^\infty(C^a)$.*

Demonstração. Seguiremos a mesma idéia utilizada no teorema 3.2.2. Seja V variedade n-dimensional e $v_0 \in V$ um ponto interior. Seja V_0 subvariedade de V, $(n-1)$-dimensional, tal que V_0 seja geodésica em v_0. Por hipótese de indução, existem uma vizinhança U de v_0 em V_0 e um mergulho livre isométrico $C^\infty(C^a)$ $f : U \to \mathbb{R}^{s_{n-1}+n-1} \subset \mathbb{R}^{s_n+n}$.Então aplicamos a proposição anterior.

cqd

3.3 MERGULHOS LIVRES ISOMÉTRICOS EM $\mathbb{R}^{s_n+4n+5}$

Proposição 3.3.1 *Seja V_0 uma variedade riemanniana compacta $(n-1)$-dimensional. Seja $f : V_0 \to \mathbb{R}^q$ um mergulho livre isométrico $C^\infty(C^a)$ com $q \geq s_n + 2n - 1$. Então existe um mergulho livre isométrico $C^\infty(C^a)$ $f : V_0 \times (-a, a) \to \mathbb{R}^q$ com $a > 0$ suficientemente pequeno.*

Demonstração. Seja $f_0 : V_0 \to \mathbb{R}^q$ um mergulho livre isométrico $C^\infty(C^a)$ com $q \geq s_n + 2n - 1$. Para qualquer $a > 0$, seja $V = V_0 \times (-a, a)$. O par $(V, V_0 \times 0)$ constitui um par normal, com $V_0 \times \{0\}$ sendo geodésica em cada ponto. O fato de ser geodésica implica que o conjunto diferencial (3) é homogêneo. Como seu posto $s_n - 1$ é menor que $q - 2(n-1)$ por hipótese, pela proposição 2.1.4, existe uma solução unitária $C^\infty(C^a)$ $f_1 : V_0 \to \mathbb{R}^q$.

Com isto, o sistema do lema 3.2.1 forma um conjunto diferencial de posto s_n+n-1. Como s_n+n-1 é menor que $q-(n-1)$, pela proposição 2.1.2, este conjunto tem uma solução unitária $C^\infty(C^a)$ $\phi_0 : V_0 \to \mathbb{R}^q$. Vamos extender ϕ_0 a uma aplicação $C^\infty(C^a)$ $\phi : V \to \mathbb{R}^q$.

Juntando ϕ, o sistema (4), os sistemas do lema 3.2.2 e as condições iniciais $f\,|_{V_0}= f_0$, $D_n f\,|_{V_0}= f_1$ obtemos um conjunto diferencial. Se tomarmos a suficientemente pequeno, então este conjunto tem uma solução analítica $f : V \to \mathbb{R}^q$ no caso analítico, e uma solução formal $f : V \to \mathbb{R}^q$ no caso C^∞. Pelo lema 3.2.2, f é uma aplicação livre.

Pelo lema 3.2.1 e seu corolário, f é isométrica no caso analítico e infinitesimalmente isométrico no caso C^∞. Sendo f injetiva sobre V_0 e já que uma imersão diferenciável que é injetiva sobre um compacto é injetiva sobre uma vizinhança do mesmo, a prova completa-se para o caso analítico. Para o caso C^∞ basta aplicar a proposição 3.2.1.

Corolário 3.3.1 *Se V_0 não tem componentes fechadas, a proposição 3.3.1 é válida se tomarmos $q \geq s_n + 2n - 2$.*

Demonstração. A prova é idêntica a proposição 3.3.1, pois a proposição 2.1.2 garante o resultado quando a variedade não tem componentes fechadas.
cqd

Proposição 3.3.2 *Seja V variedade riemanniana $C^\infty(C^a)$ compacta n-dimensional. Suponha que V tenha um mergulho livre isométrico $C^\infty(C^a)$ em $\mathbb{R}^q$ para $q \geq s_n + 4n + 5$. Então para a suficientemente pequeno, o produto $V \times IntD^2(a)$ também tem um mergulho livre isométrico $C^\infty(C^a)$ em $\mathbb{R}^q$, onde $IntD^2(a)$ indica a bola aberta em $\mathbb{R}^2$ de centro em $(0,0)$ e raio a.*

Demonstração. Para provarmos esta proposição, basta construirmos uma variedade V_1 riemanniana $C^\infty(C^a)$ $n+1$ - dimensional tal que:

i) V_1 é compacta e não tem componentes fechadas;

ii) Para algum $b > 0$, V_1 contém o produto $V \times (-b, b)$;

iii) Existe um mergulho livre isométrico $C^\infty(C^a)$ $f : V_1 \to \mathbb{R}^q$, $q \leq s_n + 4n + 5$.

Como $q \leq s_n + 4n + 5 = s_{n+2} + 2(n+2) - 2$, pelo corolário 3.3.1, existe um $C^\infty(C^a)$-mergulho livre isométrico $\phi : V_1 \times (-c, c) \to \mathbb{R}^q$, para $c > 0$ suficientemente pequeno. Se tomarmos $a = min\{b, c\}$, teremos que $V \times IntD^2(a) \subset V \times (-b, b) \times (-c, c) = V_1 \times (-c, c)$. Logo, podemos restringir ϕ a $V \times IntD^2(a)$ e obtemos então o mergulho livre isométrico $C^\infty(C^a)$ desejado.

Se V é fechada, então podemos tomar o produto $V_1 = V \times [-b, b]$, para $b > 0$ suficientemente pequeno. O resultado segue do corolário anterior, já que $q \geq s_n + 2(n+1) - 1 = s_n + 3n + 2$. Se V tem fronteira, então $V \times [-b, b]$ não é uma variedade riemanniana no sentido usual. No entanto, no caso C^∞ podemos obter V_1, removendo vizinhanças de $\partial V \times (-b)$ e $\partial V \times b$.

No caso analítico, podemos obter uma variedade riemanniana analítica n-dimensional compacta V'. Pelo teorema 1.3.1, podemos construir um mergulho livre isométrico analítico de $V' \times (-b, b)$ em $\mathbb{R}^q$, para q suficientemente grande, com $b > 0$ suficientemente pequeno. Para escolher V_1, tomamos qualquer subvariedade compacta de $V' \times (-b, b)$ que contenha $V \times 0$.

cqd

Proposição 3.3.3 *Seja V variedade compacta $C^\infty(C^a)$. Sejam $f_0 : V \to \mathbb{R}^q$ um mergulho livre $C^\infty(C^a)$, com $q \geq s_n + 4n + 5$ e $\varphi : V \to \mathbb{R}$ uma função arbitrária $C^\infty(C^a)$. Então existe um mergulho livre $C^\infty(C^a)$ $f : V \to \mathbb{R}^q$ tal que $g(f) = g(f_0) + (d\varphi)^2$.*

Demonstração. Seja V é uma variedade compacta $C^\infty(C^a)$, $q \geq s_n+4n+5$. Como f_0 é um mergulho, V pode ser vista como uma variedade riemanniana com a métrica induzida por f_0, isto é, com a métrica $g(f_0)$. Pela proposição 3.3.2, existe um mergulho livre isométrico $C^\infty(C^a)$ $f_1 : V \times IntD^2(a) \to \mathbb{R}^q$, para $a > 0$ suficientemente pequeno. Vamos definir a função

$$f_2 : V \to V \times IntD^2(a)$$

$$v \mapsto (v, \frac{a}{2}\cos(\frac{2}{a}\varphi(v)), \frac{a}{2}\mathrm{sen}(\frac{2}{a}\varphi(v)))$$

A função f_2 é uma imersão $C^\infty(C^a)$, pois

$$d_pf_2(v) = (v, -\mathrm{sen}(\frac{2}{a}\varphi(p))d_p\varphi(v), \cos(\frac{2}{a}\varphi(p))d_p\varphi(v))$$

é injetiva para todo ponto $p \in V$. Além disso, f_2 é um homeomorfismo sobre $f_2(V)$, isto é, f_2 é um mergulho $C^\infty(C^a)$. O seguinte cálculo mostra que,

$$g_p(f_2)(v) = g_p(d_pf_2(v)) =$$

$$g_p(f_0)(v) + (-\mathrm{sen}(\frac{2}{a}\varphi(p))d_p\varphi(v))^2 + (\cos(\frac{2}{a}\varphi(p))d_p\varphi(v))^2$$

$$= g_p(f_0)(v) + (d_p\varphi(v))^2$$

Vamos definir a função $f = f_1 \circ f_2$. A função $f : V \to \mathbb{R}^q$ é um mergulho $C^\infty(C^a)$ pois é composição de mergulhos $C^\infty(C^a)$. Como f_1 é uma aplicação livre, então, pela observação 1, da seção 1.3, sua restrição a subvariedade $f_2(V)$ também é uma aplicação livre. O conjunto imagem de f_2 é uma subvariedade pois f_2 é um mergulho. Portanto, f é um mergulho livre $C^\infty(C^a)$. Como $g(f_2)(v) = g(f_0)(v) + (d\varphi(v))^2$ e $f = f_1 \circ f_2$, então $g(f)(v) = g(f_0)(v) + (d\varphi(v))^2$.

Teorema 3.3.1 *Toda variedade riemanniana compacta $C^\infty(C^a)$ tem um mergulho livre isométrico $C^\infty(C^a)$ em $\mathbb{R}^{s_n+4n+5}$.*

Demonstração. Seja V uma variedade riemanniana com métrica g. Pelo teorema 1.3.1 existe um mergulho livre $C^\infty(C^a)$ $f_0 : V \to \mathbb{R}^{s_n+4n+5}$. Vamos assumir que f_0 é um mergulho estritamente pequeno. Logo $g - g(f_0)$ é uma métrica riemanniana $C^\infty(C^a)$. Pela proposição 3.1.2, existem funções $\varphi_1, \ldots, \varphi_k : V \to \mathbb{R}$ tal que

$$(d\varphi_1)^2 + \ldots + (d\varphi_k)^2 = g - g(f_0) \tag{7}$$

Como $f_0 : V \to \mathbb{R}^{s_n+4n+5}$ é um mergulho livre $C^\infty(C^a)$ e $\varphi_1 : V \to \mathbb{R}$ é uma função $C^\infty(C^a)$, pela proposição 3.3.3, existe um mergulho livre $C^\infty(C^a)$ $f_1 : V \to \mathbb{R}^q$ tal que

$$g(f_1) = g(f_0) + (d\varphi_1)^2$$

Como $\varphi_2 : V \to \mathbb{R}$ é uma função $C^\infty(C^a)$ e f_1 é um mergulho $C^\infty(C^a)$, novamente pela proposição 3.3.3, existe um mergulho livre $C^\infty(C^a)$ $f_2 : V \to \mathbb{R}^q$ tal que $g(f_2) = g(f_1) + (d\varphi_2)^2$. Como $g(f_1) = g(f_0) + (d\varphi_1)^2$, então

$$g(f_2) = g(f_1) + (d\varphi_2)^2 = g(f_0) + (d\varphi_1)^2 + (d\varphi_2)^2$$

Usando indução, isto é, suponha que $g(f_{k-1}) = g(f_0) + (d\varphi_1)^2 + \ldots + (d\varphi_{k-1})^2$, onde $f_{k-1} : V \to \mathbb{R}^q$ é um mergulho livre $C^\infty(C^a)$. Como $\varphi_p : V \to \mathbb{R}$ é uma função $C^\infty(C^a)$, pela proposição 3.3.3, existe um mergulho livre $C^\infty(C^a)$ $f_k : V \to \mathbb{R}^q$ tal que

$$g(f_k) = g(f_{k-1}) + (d\varphi_k)^2 = g(f_0) + (d\varphi_1)^2 + \ldots + (d\varphi_k)^2$$

Pela equação (7), concluímos que $g(f_k) = g$, ou seja, $f_k : V \to \mathbb{R}^q$ é um mergulho livre isométrico $C^\infty(C^a)$.

cqd

Referências

[1] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Columbia University, New York, 1970.

[2] T. Brocker and K. Janich, *La Topologia Diferencial*, trad. Juan Vasquez, Editotial AC, Madrid, 1997.

[3] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1988.

[4] M. L. Gromov and V. A. Rokhlin, *Embeddings and Dimensions in Riemannian Geometry*, Mathematical Surveys, Vol 25-2, The London Mathematical Society, London, 1970.

[5] W. Morris Hirsch, *Differential Topology*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[6] I. G. Petrovsky, *Lectures on Partial Differential Equations*, translated from the Russian by A. Shenitzer, New York, 1954.

[7] Norman Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, New Jersey, 1951.

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado: ______________________________

Francisco Fortes de Brito, DMAT-UFPE

Orientador

____

Marcus Vinicius de Medeiros Wanderley, DMAT-UFPE

____

Fernando Jorge Sampaio Moraes, DF-UFPE

MERGULHOS LIVRES ISOMÉTRICOS DE VARIEDADES COMPACTAS EM $R^{sn+4n+5}$

Por

Marcos Grilo Rosa

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cidade Universitária – Tels. (081) 3271- 8414 – Fax: (081) 3271-1833

RECIFE – BRASIL

Fevereiro - 2004