

Dinâmica de uma Partícula no Potencial de um Fio Circular

ANGELO ALBERTI

Orientador:

CÉSAR AUGUSTO RODRIGUES CASTILHO

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

UFPE - Fevereiro de 2003

Conteúdo

Introdução	4
1 Integrais Elípticas	6
1.1 Pêndulo Simples	8
1.2 Transformação de Landen	10
1.3 A Avaliação Completa da Integral Elíptica de 1º Tipo	14
1.4 Integral Elítica de 2º tipo	15
1.5 A Derivada das Integrais Elítica de 1º e 2º tipo	18
2 Potencial em um anel uniforme	19
2.1 Avaliação do potencial segundo Gauss	21
2.1.1 Média Aritmética -geométrica de Gauss	22
3 Estudo da Dinâmica para casos particulares	29
3.1 Dinâmica no eixo z	31
3.2 Dinâmica no plano Horizontal	32

3.2.1	O Potencial Efetivo	32
3.2.2	Estudo das Órbitas	34
3.2.3	Estudo das Órbitas Circulares	37
4	Seção de Poincaré	45
4.1	Método numérico	48
4.1.1	Seção 1 : Método de análise	51
4.2	Dinâmica para o nível de Energia -0.3	55
4.3	Dinâmica para momento angular 0.2	58
4.4	Alguns resultados na Dinâmica da Partícula	61
5	Estudo das Órbitas Periódicas	63
5.0.1	Estudo da configuração $C - \tau$	63
5.1	Estudo da configuração $E - \tau$	68
	Bibliografia	71

Introdução

O objetivo desta dissertação é apresentar resultados da dinâmica de uma partícula no potencial de um fio circular homogêneo. Dada a expressão para o potencial do fio circular (ver [10]), queremos obter algum procedimento numérico para calcular o potencial do fio circular. Escrevemos este potencial como uma integral elítica de primeiro tipo. Desta maneira estudamos integrais elíticas e com esta teoria desenvolvemos um eficiente algoritmo, baseado na média aritmética-geométrica de Gauss, para calcular numericamente as integrais elíticas. Estas referenciais podem ser encontradas em [1] e [7].

O estudo desse problema, não está totalmente determinado na literatura geral. Os resultados mais expressivos foram provados por Carlinda Azevêdo em seus estudos da tese de doutorado (UFPE 2003). Os resultados que apresentaremos nos capítulos 2 e 3 são parte deste trabalho(para maiores detalhes veja [4]).

Nosso maior propósito é o estudo numérico das órbitas periódicas. Faremos um estudo em casos particulares, em subespaços que apresentam simetrias do problema, o plano horizontal (o plano que contém o anel), o eixo z o eixo x . No caso geral, queremos determinar famílias de órbitas periódicas estáveis. Para isso, estudamos as seções de Poincaré que consiste em reduzir o estudo do fluxo de um campo de vetores do $\mathbb{R}^n$ a uma aplicação em $\mathbb{R}^{n-1}$. Construiremos um método numérico para calcular numericamente as seções e as utilizaremos para calcular as órbitas periódicas.

Segue uma breve descrição do conteúdo desta dissertação .

No capítulo 1, apresentamos resultados sobre integrais elíticas e também métodos numéricos para o cálculo das mesmas.

No capítulo 2 apresentamos a construção do potencial do anel circular e resultados importantes sobre o potencial. No capítulo 1 já teremos mostrado numericamente como obter o potencial em função da média aritmética-geométrica de Gauss, neste capítulo apresentaremos a prova analítica deste fato(veja [4]).

No capítulo 3 apresentamos o estudo em casos particulares e verificares a existência de órbitas circulares.

No capítulo 4 apresentaremos as seções de Poincaré e alguns resultados provados pela análise das seções .

Finalmente, no capítulo 5, apresentaremos algumas famílias de órbitas periódicas Estáveis da configuração rz .

Recife, 25 fevereiro de 2003.

Capítulo 1

Integrais Elípticas

Nosso principal objetivo neste capítulo é definir e estudar as integrais elípticas de primeiro, segundo e terceiro tipo e também apresentar resultados e propriedades envolvendo estas integrais.

Queremos desenvolver algoritmos para calcular numericamente as integrais elípticas de primeiro e segundo tipo. Para isso, utilizaremos a média geométrica-aritmética de Gauss, um algoritmo de grande eficiência computacional. Esses algoritmos serão utilizados no estudo do potencial do anel circular.

Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em [1] e [7]. Uma Integral Elítica é uma integral da forma

$$\int R(\omega, x)dx \tag{1.1}$$

onde $R(\omega, x)$ é uma função racional de grau três ou quatro, $R(\omega, x)$, contém ao menos uma potência ímpar de ω e ω^2 sem fatores repetidos.

Existem três tipos de Integrais Elíticas : Integral Elítica de primeiro, segundo e terceiro tipo.

A forma normal das integrais F e E de primeiro e segundo tipo são respectivamente,

$$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad (1.2)$$

$$E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi, \quad (1.3)$$

onde ϕ é a amplitude da integral e k é o seu módulo. Os valores de ϕ e k são dados por $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq k \leq 1$. Fazendo-se

$$x = \sin \phi \quad (1.4)$$

$$dx = \cos \phi d\phi = \sqrt{1 - x^2} d\phi \quad (1.5)$$

segue que as integrais acima podem ser escritas na forma

$$F(k, \phi) = \int_0^{\sin \phi} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}, \quad (1.6)$$

$$E(k, \phi) = \int_0^{\sin \phi} \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx. \quad (1.7)$$

Quando a amplitude $\phi = \frac{\pi}{2}$ as integrais são chamadas Integrais Elíticas completas, denotadas por $K(k)$ e $E(k)$ respectivamente, definidas por

$$F(k, \frac{\pi}{2}) = K(k), \quad (1.8)$$

$$E(k, \frac{\pi}{2}) = E(k). \quad (1.9)$$

A integral elítica de terceira ordem é dada por

$$\begin{aligned} \Pi(n, k, \phi) &= \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1 - n \sin^2 \phi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \\ &= \int_0^{\sin \phi} \frac{dx}{(1 - nx^2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

onde n é a característica e pode variar de $-\infty$ a ∞ .

Veremos agora um exemplo de aplicação de integrais elíticas de primeiro tipo na mecânica

1.1 Pêndulo Simples

Como exemplo de aplicação das integrais elíticas em mecânica, estudaremos o pêndulo. O pêndulo simples consiste em uma esfera fixa a um fio de peso desprezível. A equação de movimento do pêndulo pode ser encontrada usando a formulação lagrangiana da mecânica

Agora definindo a frequência de ressonância como sendo

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}, \quad (1.11)$$

$$I = ml^2 \quad (1.12)$$

A energia potencial gravitacional e cinética são dadas por

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2, \quad (1.13)$$

$$V = -mgl \cos \theta. \quad (1.14)$$

O potencial é definido tal que

$$V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (1.15)$$

e o lagrangeano é então definido por

$$L = T - V = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \quad (1.16)$$

A equação de Euler-Lagrange é dada por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (1.17)$$

Considerando-se que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta} = p_\theta, \quad (1.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = I \ddot{\theta}, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta. \quad (1.20)$$

Como nosso sistema é conservativo queremos escrever o hamiltoniano do problema. Por definição $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$. Portanto $p_\theta = I\dot{\theta}$. A transformada de Legendre nos dá que

$$H = \dot{\theta}p_\theta - L = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \frac{p_\theta^2}{2I} - mgl \cos \theta. \quad (1.21)$$

As equações de movimento são

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{I}, \quad (1.22)$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta. \quad (1.23)$$

Sabemos que existe um ângulo máximo θ_{max} tal que $\frac{d\theta}{dt} = 0$, para o qual toda a energia do pêndulo é potencial. Como a energia é conservada segue que

$$T(\theta) + V(\theta) = T(\theta_{max}) + V(\theta_{max}), \quad (1.24)$$

para qualquer θ . Portanto

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mgl \cos \theta = -mgl \cos \theta_{max}. \quad (1.25)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2mgl}{I}(\cos \theta - \cos \theta_{max})}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.26)$$

$$\int_0^{\theta_{max}} (\cos \theta - \cos \theta_{max})^{-\frac{1}{2}} d\theta = \sqrt{\frac{2mgl}{I}} \int_0^t dt = \sqrt{2}\omega_0 t. \quad (1.27)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$

O período P é dado pelo tempo de um ciclo completo, ou quatro vezes o tempo da integral acima. Então

$$P = \frac{4}{\sqrt{2}\omega_0} \int_0^{\theta_{max}} (\cos \theta - \cos \theta_{max})^{-\frac{1}{2}} d\theta, \quad (1.28)$$

A integral da última equação é uma integral elítica de primeiro tipo. De fato

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \sqrt{2}K\left(\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right), \quad (1.29)$$

o que nos dá

$$P = \frac{4}{\omega_0} K\left(\sin\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right)\right). \quad (1.30)$$

Para um ângulo inicial θ_0 e uma velocidade angular ω , a conservação da energia nos fornece

$$-mgl \cos \theta_{max} = \frac{1}{2} I \omega^2 - mgl \cos \theta_0, \quad (1.31)$$

e resolvendo para $\cos \theta_{max}$ obtemos

$$\cos \theta_{max} = \cos \theta_0 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}. \quad (1.32)$$

Desta forma, a fórmula geral do período P é dada por:

$$P = \frac{4}{\omega_0} K\left(\sqrt{1 - \left(\cos \theta_0 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}\right)^2}\right). \quad (1.33)$$

Temos assim que o período do pêndulo é dado por uma integral elíptica de primeira ordem.

1.2 Transformação de Landen

Estamos interessados em calcular numericamente integrais elípticas. O procedimento a ser desenvolvido neste trabalho, utilizou o comportamento das funções elíticas, mudando o argumento de integração de forma conveniente. A transformação mais importante para o nosso caso é a transformação de Landen.

A transformação de Landen está baseada em identidades trigonométricas associadas ao triângulo de lado unitário oposto ao ângulo θ e outro lado β oposto ao ângulo $2\phi - \theta$, onde $0 \leq \theta \leq 1$. Usando as leis das tangentes e dos senos para este triângulo, obtemos que

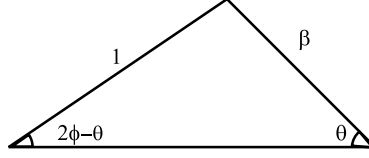


Figura 1.1: Triângulo de Landen

$$\tan(\theta - \phi) = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \tan \phi. \quad (1.34)$$

$$\frac{\beta}{\operatorname{sen}(2\phi - \theta)} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}. \quad (1.35)$$

A lei dos senos pode ser reescrita de tal forma a obtermos uma expressão para a tangente de θ .

$$\tan \theta = \frac{\operatorname{sen}(2\phi)}{\beta + \cos(2\phi)}. \quad (1.36)$$

Como

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\operatorname{sen}^2 2\phi}{1 + \beta^2 + 2\beta \cos 2\phi}, \quad (1.37)$$

obtemos uma relação para a derivada da $\tan \theta$ em função de ϕ

$$d(\tan \theta) = (\sec^2 \theta) d\theta = (1 + \tan^2 \theta) d\theta = \frac{2(1 + \beta \cos 2\phi)}{(\beta + \cos 2\phi)^2} d\phi. \quad (1.38)$$

Portanto,

$$d\theta = \frac{2(1 + \beta \cos 2\phi)}{(\beta + \cos 2\phi)^2} \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} d\phi, \quad (1.39)$$

$$d\theta = \frac{2(1 + \beta \cos 2\phi)}{1 + \beta^2 + 2\beta \cos 2\phi} d\phi. \quad (1.40)$$

Observe que se definimos

$$k^2 = \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2} \quad (1.41)$$

de tal forma que

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}}, \quad (1.42)$$

podemos escrever

$$1 + \beta^2 + 2\beta \cos 2\phi = (1 + \beta)^2(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi). \quad (1.43)$$

Observe também que

$$1 - \beta^2 \operatorname{sen} \theta = \frac{(1 + \beta \cos 2\phi)^2}{1 + \beta^2 + 2\beta \cos 2\phi}. \quad (1.44)$$

Desta última relação obtemos

$$(1 + \beta \cos 2\phi) = \sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \sqrt{(1 + \beta)^2(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi)}, \quad (1.45)$$

e portanto

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} = \frac{2d\phi}{(1 + \beta) \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}. \quad (1.46)$$

Obtemos assim a seguinte identidade para Integrais elíticas de 1º tipo

$$F(k, \phi) = \frac{1}{2}(1 + \beta)F(\beta, \theta). \quad (1.47)$$

O efeito da transformação de (k, ϕ) para (β, θ) é o decrescimento do módulo e crescimento em amplitude. Como veremos, serão estes fatos da transformação de Landen que se transformarão em um eficiente algoritmo numérico para o cálculo numérico de integrais elíticas .

A última identidade acima pode ser usada recursivamente. Para isso escrevemos

$$F(K_n, \phi_n) = \frac{1}{2}(1 + k_{n+1})F(k_{n+1}, \phi_{n+1}). \quad (1.48)$$

$$k_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - k_n^2}}{1 + \sqrt{1 - k_n^2}}. \quad (1.49)$$

$$\tan(\phi_{n+1} - \phi_n) = \frac{1 - k_{n+1}}{1 + k_{n+1}} \tan \phi_n. \quad (1.50)$$

com $k_0 = k$ e $\phi_0 = \phi$. Como o módulo de k_n é decrescente , seja N o valor de n para que k_N seja essencialmente zero. Então como $F(0, \phi_N) = \phi_N$, nós temos um método para a

evolução de $F(k, \phi)$ (heuristicamnete)

$$\begin{aligned} F(k, \phi) &= \frac{1}{2}(1 + k_1)F(K_1, \phi_1) = \frac{1}{2}(1 + k_1) \cdot \frac{1}{2}(1 + k_2)F(K_2, \phi_2) = \\ &= \frac{1}{2}(1 + k_1) \cdot \frac{1}{2}(1 + k_2) \dots \frac{1}{2}(1 + k_{N-1}) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \phi_N. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Gauss converteu este processo em um simples e eficiente algoritmo que está baseado em duas sequências $a_0, a_1, \dots$ e $b_0, b_1, \dots$ geradas como segue

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad (1.52)$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (1.53)$$

com $a_0 = 1$ e $b_0 = \sqrt{1 - k_0^2}$. Podemos facilmente ver que cada novo a e b são as médias aritméticas e geométricas dos a e b anteriores. Temos que são válidas as seguintes propriedades

$$k_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n}, \quad (1.54)$$

$$\frac{1 + k_{n+1}}{2} = \frac{a_n}{a_n + b_n} = \frac{a_n}{2a_{n+1}}, \quad (1.55)$$

$$\frac{1 - k_{n+1}}{1 + k_{n+1}} = \frac{b_n}{a_n}, \quad (1.56)$$

As duas últimas identidades são imediatas. Vamos verificar que vale a primeira identidade. Para isso usaremos indução em n . Temos que para $n = 0$

$$k_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - k_0^2}}{1 + \sqrt{1 - k_0^2}} = \frac{a_0 - b_0}{a_0 + b_0}. \quad (1.57)$$

Para efeitos de indução suponha que

$$k_n = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \quad (1.58)$$

então

$$\begin{aligned} k_{n+1} &= \frac{1 - \sqrt{1 - k_n^2}}{1 + \sqrt{1 - k_n^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}\right)^2}}, \\ &= \frac{1 - \frac{2\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}}{a_{n-1} + b_{n-1}}}{1 + \frac{2\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}}{a_{n-1} + b_{n-1}}} = \frac{1 - \frac{b_n}{a_n}}{1 + \frac{b_n}{a_n}} = \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

e o resultado segue.

Então quando N é o valor de n para o qual $a_N - b_N$ é essencialmente zero, nós temos que

$$F(k, \phi) = \frac{a_0}{2a_1} \cdot \frac{a_1}{2a_2} \cdot \frac{a_2}{2a_3} \dots \frac{a_{N-2}}{2a_{N-1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \phi_N. \quad (1.60)$$

Assim

$$F(k, \phi) \approx \frac{\phi_N}{2^N a_N}. \quad (1.61)$$

1.3 A Avaliação Completa da Integral Elíptica de 1º Tipo

Nesta seção determinaremos a uma formula recursiva, a qual representa a evolução completa da integral elíptica de primeiro tipo $K(k)$

Notemos que no triângulo definido por Landen , quando $\phi = \frac{\pi}{2}$ corresponde a $\theta = \pi$. Temos que $F(k, \phi) = 2K(k)$. Assim obtemos

$$K(k_n) = (1 + k_{n+1})K(k_{n+1}), \quad (1.62)$$

que em termos das sequências da média aritmética-geométrica de Gauss $a_0, a_1, \dots$ e $b_0, b_1, \dots$

$$K(k_n) = \frac{a_n}{a_{n+1}} K(k_{n+1}). \quad (1.63)$$

Aplicando recursivamente esta relação

$$K(k) = \frac{a_0}{a_1} \cdot K(k_1) = \frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} K(k_2) = \frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \dots \frac{a_{N-1}}{a_N} K(k_N) \quad (1.64)$$

que resulta

$$K(k) = \frac{1}{a_N} K(k_N) = \frac{1}{a_N} K(0) = \frac{\pi}{2a_N}, \quad (1.65)$$

pois

$$K(0) = F\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - 0 \cdot \sin^2 \phi}} = \frac{\pi}{2}, \quad (1.66)$$

obtemos então que

$$K(k) \approx \frac{\pi}{2a_N}. \quad (1.67)$$

Com isso provamos que a integral elíptica de primeiro tipo com argumento k pode ser aproximada pela média aritmética -geométrica de Gauss.

1.4 Integral Elítica de 2º tipo

Nesta seção iremos determinaremos uma fórmula de recorrência para a integral elítica de segundo tipo, bem como também uma relação para $E(k)$, a integral elítica de segundo tipo completa.

Como vimos elítica de segundo tipo, é uma integral do tipo

$$E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \, d\phi. \quad (1.68)$$

Portanto

$$E(k, \pi) = \int_0^\pi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \, d\phi = 2E(k). \quad (1.69)$$

Usando as relações trigonométricas, anteriormente obtidas do triângulo de Landen, temos que

$$\sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{2(1 + \beta \cos 2\phi)^2}{(1 + \beta)^3 (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.70)$$

operando com esta relação obtemos a seguinte sentença

$$E(\beta, \theta) = (1 - \beta)F(k, \phi) + \frac{1}{2}(1 + \beta)[E(k, \phi) + (1 - k^2)\Pi(k^2, k, \phi)]. \quad (1.71)$$

(para maiores detalhes veja [7]) Lembrando que

$$\Pi(k^2, k, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1 - n \operatorname{sen}^2 \phi) \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}, \quad (1.72)$$

é a integral elítica de 3º tipo. Agora observe que

$$\frac{d}{d\phi} \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi} = -\frac{k^2 \text{sen} 2\phi}{2\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi}}, \quad (1.73)$$

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi} = \frac{1 - k^2}{(1 - k^2 \text{sen}^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi}. \quad (1.74)$$

Agora integrando ambos os lados da equação acima de 0 até ϕ obtemos

$$\int_0^\phi \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d}{d\phi} \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi} \right) = 1 - k^2 \int_0^\phi \frac{1}{(1 - k^2 \text{sen}^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} - \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi} \quad (1.75)$$

disso resulta, usando as relações acima, que

$$-\frac{k^2 \text{sen} 2\phi}{2\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi}} = 1 - k^2 \Pi(k^2, k, \phi) - E(k, \phi), \quad (1.76)$$

e portanto

$$1 - k^2 \Pi(k^2, k, \phi) = E(k, \phi) - \frac{k^2 \text{sen} 2\phi}{2\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi}}. \quad (1.77)$$

Substituindo

$$\text{sen} \theta = \frac{\text{sen} 2\phi}{(1 + \beta)\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi}}, \quad (1.78)$$

na sentença acima e usando o fato que

$$k^2 = \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2} \quad (1.79)$$

obtemos

$$E(\beta, \theta) = (1 - \beta)F(k, \phi) + (1 + \beta)E(k, \phi) - \beta \text{sen} \theta. \quad (1.80)$$

Agora reagrupando os termos da equação acima, e usando a relação de recursão para integral elítica de primeiro tipo $F(k, \phi) = \frac{1}{2}(1 + \beta)F(\beta, \theta)$, obtemos uma relação pra integral elítica de segundo tipo

$$E(k, \phi) = \frac{1}{1 + \beta}E(\beta, \phi) - \frac{1 - \beta}{2}F(\beta, \theta) + \frac{\beta}{1 + \beta}\text{sen} \theta. \quad (1.81)$$

Da mesma maneira que fizemos com as equações elípticas de primeiro tipo obtemos a seguinte relação recursiva

$$E(k_n) = \frac{2}{1 + k_{n+1}} E(k_{n+1}) - (1 - k_{n+1}) K(k_{n+1}). \quad (1.82)$$

ou em termos dos coeficientes da média aritmética - geométrica de Gauss

$$E(k_n) = \frac{2a_{n+1}}{a_n} E(k_{n+1}) - \frac{b_n}{a_{n+1}} K(k_{n+1}). \quad (1.83)$$

Não iremos trabalhar diretamente com a expressão $E(k)$. Para isso definiremos a seguinte função

$$Q(k) = \frac{K(k) - E(k)}{K(k)}. \quad (1.84)$$

Calculando os valores de $Q(k_n)$ em termos da sequência de Gauss e usando as expressões para $E(k_n)$ e $K(k_n)$, obtemos:

$$Q(k_n) = \frac{K(k_n) - E(k_n)}{K(k_n)} = \frac{2a_{n+1}}{a_n^2} \left(a_{n+1} Q(k_{n+1}) + \frac{1}{2} (a_n - b_n) \right). \quad (1.85)$$

definindo $c_{n+1} = \frac{1}{2} (a_n - b_n)$ e obtemos uma terceira fórmula de recursão que independe das demais. Aplicando recursivamente a relação

$$\begin{aligned} Q(k) &= 2a_1(a_1 Q(k_1)) + 2a_1 c_1 \\ &= 2a_1 \left[a_1 \left(\frac{2a_2}{a_1^2} [a_2 Q(k_2) + c_2] \right) \right] + 2a_1 c_1 = 2a_1 \left[\frac{2a_2}{a_1} [a_2 Q(k_2) + c_2] \right] + 2a_1 c_1 \\ &= 2a_1 \left[2 \frac{a_2}{a_1} \left(a_2 \left[\frac{2a_3}{a_2^2} (a_3 Q(k_3) + c_3) \right] \right) \right] + 4a_2 c_2 + 2a_1 c_1 \\ &= 2a_1 \left[2 \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{2a_3}{a_2} (a_3 Q(k_3)) \right) \right] + 8a_3 c_3 + 4a_2 c_2 + 2a_1 c_1 \end{aligned} \quad (1.86)$$

Obtemos que $Q(k) \approx \sum_{i=1}^N 2^i a_i c_i$. Finalmente, da equação de $Q(k)$, nós obtemos

$$E(k) \approx \frac{\pi}{2a_N} \left(1 - \sum_{i=1}^N 2^i a_i c_i \right), \quad (1.87)$$

que é um algoritmo para calcular $E(k)$, a integral elítica completa de segundo tipo.

1.5 A Derivada das Integrais Elítica de 1º e 2º tipo

apresentaremos aqui as derivadas das integrais elípticas de primeiro e segundo tipo em função das integrais elípticas de primeiro e segundo tipo, podendo assim serem calculadas de maneira prática computacionalmente. Não apresentaremos a prova para estas relações, para maiores detalhes veja [12]

A derivada de $K(k)$ é

$$\frac{dK(k)}{dk} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\sqrt{1-k^2})}} = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k}. \quad (1.88)$$

A derivada de $E(k)$ é dada por

$$\frac{dE(k)}{dk} = \frac{E(k) - K(k)}{k}. \quad (1.89)$$

Capítulo 2

Potencial em um anel uniforme

Neste capítulo apresentaremos uma prova para a seguinte proposição

Proposição *O potencial do anel circular homogêneo em um ponto P qualquer é dado por*

$$V(P) = \frac{M}{mga(\rho_2, \rho_1)}$$

começamos mostrando que as médias aritmética e geométrica de Gauss convergem para um mesmo limite. Depois nos concentraremos na prova da proposição. As provas destes resultados podem ser encontradas com maiores detalhes em [4].

Seja H um fio circular homogêneo, com densidade linear σ constante, centrado na origem do sistema, com raio a , conforme figura 2.1

Para obtermos uma expressão para o potencial de um anel circular homogêneo, usaremos coordenadas cilíndricas

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad z = z \quad (2.1)$$

Seja P um ponto do espaço fora de H . Por P traçamos a perpendicular $PQ = z$ ao plano que contém o anel. Estendemos o diâmetro do anel BOA até Q . Seja m um ponto

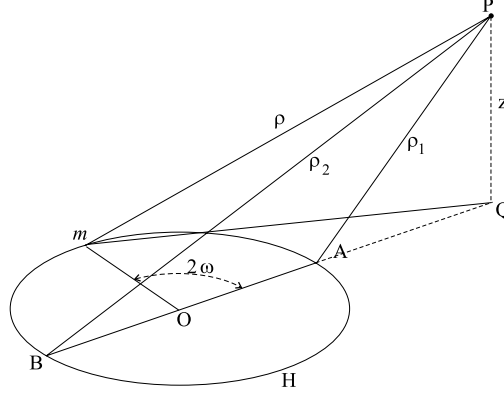


Figura 2.1: Fio Circular

do círculo e denotamos:

$$Pm = \rho \quad PA = \rho_1 \quad PB = \rho_2 \quad (2.2)$$

Temos que ρ_1 e ρ_2 são as distâncias mínima e máxima de P ao círculo. A massa do fio é dada por $M=2a\pi\sigma$. Se o ângulo é representado por 2ω , o elemento de arco é dado por $ds= 2ad\omega$, e a expressão para o potencial então é dada por

$$V = 2a\sigma \int_0^\pi \frac{d\omega}{\rho}. \quad (2.3)$$

Se o comprimento $\overline{OQ}$ é representado por r , então

$$\rho_1^2 = (r - a)^2 + z^2 \quad \overline{mQ}^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos 2\omega, \quad (2.4)$$

$$\rho_2^2 = (r + a)^2 + z^2 \quad \rho^2 = r^2 + a^2 + z^2 - 2ar \cos 2\omega, \quad (2.5)$$

A expressão para ρ^2 também pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (r^2 + a^2 + z^2)(\cos^2 \omega + \sin^2 \omega) - 2ar(\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) \\ &= [(r - a)^2 + z^2] \cos^2 \omega + [(r + a)^2 + z^2] \sin^2 \omega \\ &= \rho_1^2 \cos^2 \omega + \rho_2^2 \sin^2 \omega. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Portanto da equação 2.3 temos com $M = 2a\pi\sigma$

$$V = \frac{2M}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{\rho_1^2 \cos^2 \omega + \rho_2^2 \sin^2 \omega}}. \quad (2.7)$$

Observamos que se fizermos uma mudança de variáveis $\omega = \frac{\pi}{2} + \psi$ temos

$$V = \frac{2M}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{\rho_1^2 \sen^2 \psi + \rho_2^2 \cos^2 \psi}} \quad (2.8)$$

e assim podemos ver que V é uma expressão simétrica em ρ_1 e ρ_2 , ou seja

$$V(\rho_1, \rho_2) = V(\rho_2, \rho_1) \quad (2.9)$$

Observamos que

$$\begin{aligned} V &= \frac{2M}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{\sen^2 \psi + \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} \cos^2 \psi}} = \frac{2M}{\pi \rho_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - (1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}) \sen^2 \psi}} \\ &= \frac{2M}{\pi \rho_2} K(k) \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (2.11)$$

é a integral elítica completa de primeira ordem com

$$k^2 = 1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} \quad (2.12)$$

2.1 Avaliação do potencial segundo Gauss

Nosso objetivo aqui é mostrar como o potencial em um anel circular uniforme é dado em função da média aritmética-geométrica de Gauss. Já vimos no final de 1.3 que a integral elítica de primeiro tipo é aproximada numericamente pela média aritmética-geométrica de Gauss. Agora traremos a prova analítica de que o potencial do anel circular homogêneo em um ponto P é dado pela média aritmética-geométrica de Gauss. estes resultados são retratados por [10] e [4]. Mas os detalhes destes resultados foram feitos por Azevedo, C. em sua tese de doutorado.

2.1.1 Média Aritmética -geométrica de Gauss

Dados dois números m e n positivos, a média aritmética é maior ou igual a sua média geométrica . De fato, temos que:

$$\begin{aligned}
 (m - n)^2 &\geq 0 \\
 \implies m^2 - 2mn + n^2 + 4mn &\geq 4mn \\
 \implies (m + n)^2 &\geq 4mn \\
 \implies \frac{1}{2}(m + n) &\geq \sqrt{mn}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $m > n$, então

$$m > \frac{m + n}{2} \geq \sqrt{mn} > n \tag{2.14}$$

Chamamos $m_1 = \frac{m + n}{2}$ e $n_1 = \sqrt{nm}$, podemos construir as sequências m_i e n_i dadas por

$$m_{i+1} = \frac{m_i + n_i}{2} \quad n_{i+1} = \sqrt{m_i n_i} \tag{2.15}$$

Temos, considerando o resultado acima que as seguintes desigualdades são satisfeitas

$$m > m_1 > m_2 > m_3 > \dots > m_k > \dots \quad n < n_1 < n_2 < n_3 \dots < n_k \dots \tag{2.16}$$

$$m > n \quad m_1 > n_1 \quad m_2 > n_2 \quad m_3 > n_3 \quad \dots \quad m_k > n_k \dots \tag{2.17}$$

Agora mostraremos que as sequências das médias aritméticas e geométricas convergem para o mesmo limite.

Proposição 2.1.1 *As Sequências m_i e n_i são convergentes e convergem para o mesmo limite.*

Demonstração Pelas três últimas desigualdades acima, resulta que m_i é decrescente e limitada por n e portanto converge para um número $\overline{m}$. Da mesma forma a sequência n_i é crescente e limitada por m e assim converge para um número $\overline{n}$. Agora mostramos que $\overline{m} = \overline{n}$. Consideremos a diferença

$$m_{i+1} - n_{i+1}, \quad \text{como } n_{i+1} > n_i \quad (2.18)$$

temos que

$$\begin{aligned} m_{i+1} - n_{i+1} &< m_{i+1} - n_i \\ &< \frac{1}{2}(m_i + n_i) - n_i \\ &< \frac{1}{2}(m_i - n_i), \end{aligned} \quad (2.19)$$

e desta forma

$$0 < m_i - n_i < \frac{1}{2^i}(m - n). \quad (2.20)$$

Assim tomando o limite quando $i \rightarrow \infty$ vemos que as sequências convergem para o mesmo limite $\overline{m} = \overline{n}$. ■

Gauss foi quem fez esta análise e chamou este limite de média aritmética-geométrica de m e n . Denotaremos por $M(m, n)$ ou $mga(m, n)$.

A proposição seguinte ser usada como resultado pra provar que o potencial do anel circular homogêneo em um ponto P é dado por $V(p) = \frac{M}{mga(\rho_2, \rho_1)}$. Para maiores detalhes veja [4].

Proposição 2.1.2 *Consideremos o plano vertical que contém o ponto P e o eixo z . O conjunto dos pontos tais que $\frac{\rho_1}{\rho_2} = c$, constante, formam um círculo $\overline{C}$ que passa pelo interior do disco*

Demonstração

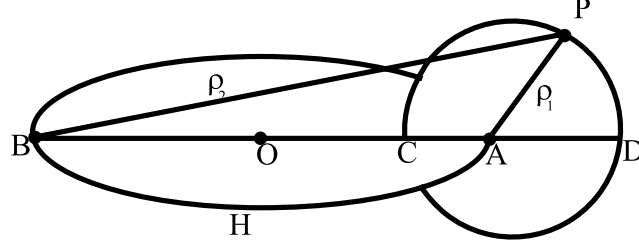


Figura 2.2: Plano vertical

Podemos considerar, sem perda de generalidade, que P pertence ao plano (r, z) , pois o fio é homogêneo e invariante por rotação em z . Lembrando que o anel tem raio a e que ρ_1 e ρ_2 são as distâncias mínima e máxima de P ao círculo, temos

$$c = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{((r-a)^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{((r+a)^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c^2(r^2 + a^2 + z^2 + 2ra) &= r^2 + a^2 + z^2 - 2ra \\ \Rightarrow (1 - c^2)x^2 + (1 - c^2)a^2 + (1 - c^2)z^2 - 2ra(1 + c^2) &= 0 \\ \Rightarrow r^2 + a^2 + z^2 - 2ra \frac{(1 + c^2)}{(1 - c^2)} &= 0 \end{aligned}$$

Escrevendo

$$\alpha = a \frac{(1 + c^2)}{(1 - c^2)} \quad (2.22)$$

obtemos $r^2 + a^2 + z^2 - 2r\alpha = 0$ e assim a equação do círculo é

$$(r - \alpha)^2 + z^2 = \alpha^2 - a^2 = \beta^2 \quad (2.23)$$

que é o círculo de centro $(\alpha, 0)$ e raio $\beta = \alpha^2 - a^2$.

Por sua vez β é obtido pela relação

$$\begin{aligned} \alpha^2 - a^2 &= \left(\frac{1 + c^2}{1 - c^2}\right)^2 a^2 - a^2 = \frac{4a^2 c^2}{(1 - c^2)^2} = \beta^2 \\ \beta &= \frac{2ac}{(1 - c^2)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Agora vamos verificar que o ponto $P_1 = \alpha - \beta$ está localizado no interior do fio circular entre a origem e $(a, 0, 0)$, isto é vamos mostrar que

$$0 < P_1 = \alpha - \beta = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - a^2} < a \quad (2.25)$$

De fato, levando em conta que $c < 1$, temos

$$\begin{aligned} P_1 &= a \frac{(1+c^2)}{(1-c^2)} - \frac{2ac}{(1-c^2)} = \frac{a}{(1-c^2)}(1+c^2-2c) \\ &= \frac{a}{(1-c^2)(1-c)^2} > 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$P_1 = \frac{a(1-c)^2}{(1-c^2)} = \frac{a(1-c)^2}{(1+c)(1-c)} = \frac{a(1-c)}{(1+c)} < a \quad (2.27)$$

Assim temos que $0 < P_1 < a$. ■

Proposição 2.1.3 *O potencial do anel circular homogêneo em um ponto P qualquer é dado por*

$$V(P) = \frac{M}{mga(\rho_2, \rho_1)}$$

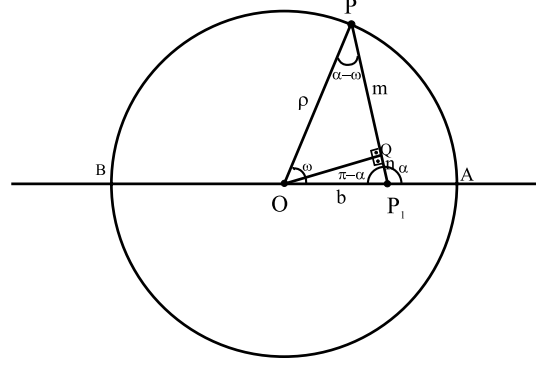
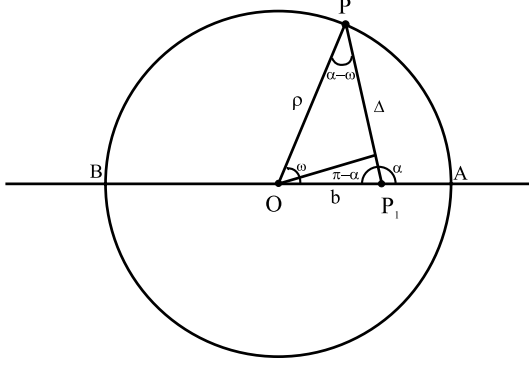
Demonstração No caso em que P pertence ao eixo z , temos que $\rho_2 = \rho_1$ e então

$$V(P) = -\frac{\rho\lambda}{\rho_2} \int_0^{2\pi} d\psi = -\frac{2\pi\rho\lambda}{\rho_2} = -\frac{M}{\rho_2} = -\frac{M}{mga(\rho_2, \rho_2)} \quad (2.28)$$

Consideremos o ponto P_1 em $\overline{C}$ da proposição 2.1.2 no interior do fio e no plano do mesmo. Se D é a distância máxima de P_1 ao fio, resulta da expressão 2.10 que

$$\rho_2 V(P) = DV(P_1) \quad \text{ou seja} \quad V(P) = \frac{D}{\rho_2} V(P_1) \quad \forall P \in \overline{C} \quad (2.29)$$

Ou seja, se conhecemos $V(P_1)$, conheceremos o valor do potencial em todo ponto do círculo que passa por P_1 . Assim o problema se reduz a encontrar o valor do potencial nos pontos do segmento OA do fio circular (devido a simetria do problema).



Consideremos o anel circular, e note que BOP_1A é o diâmetro. Seja P um ponto sobre o anel (veja figuras acima) e $\overline{OP_1} = b$, $\overline{OP} = \rho$ e $\overline{PP_1} = \Delta$. Consideremos os ângulos $\angle PP_1A = \alpha$, $\angle POP_1 = \omega$. Então o ângulo $\angle OPP_1 = \alpha - \omega$ e o ângulo $\angle OP_1P = \pi - \alpha$.

Pela lei dos senos temos que

$$\frac{\rho}{\text{sen}(\pi - \alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\alpha - \omega)} \quad (2.30)$$

como $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen} \alpha$

$$\text{sen}(\alpha - \omega) = \frac{b}{\rho} \text{sen} \alpha \quad (2.31)$$

Derivando a última relação em relação a α (lembrando que ω é função de α) temos

$$\rho \cos(\alpha - \omega(\alpha)) \left(1 - \frac{d\omega}{d\alpha}\right) = b \cos \alpha \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 - \frac{d\omega}{d\alpha} &= \frac{b \cos \alpha}{\rho \cos(\alpha - \omega(\alpha))} \\ \Rightarrow \frac{d\omega}{d\alpha} &= \frac{\rho \cos(\alpha - \omega(\alpha)) - b \cos \alpha}{\rho \cos(\alpha - \omega(\alpha))} \\ \Rightarrow \frac{d\omega}{d\alpha} &= \frac{\Delta \cos(\alpha)}{\rho \cos(\alpha - \omega(\alpha))}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde Δ é dado por

$$\begin{aligned} \Delta &= \rho \cos(\alpha - \omega(\alpha)) + b \cos(\pi - \alpha) \\ &= \rho \cos(\alpha - \omega(\alpha)) + b \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Na figura acima traçamos uma perpendicular a $\overline{P_1P}$ passando por O , determinando um ponto Q em $\overline{P_1P}$. Desta forma $\Delta = A + B$ onde $A = \overline{QP_1}$ e $B = \overline{QP}$. Obtemos então as seguintes relações dos triângulos retângulos $O\hat{Q}P_1$ e $O\hat{Q}P$.

$$\cos(\alpha - \omega(\alpha)) = \frac{B}{\rho} \quad (2.35)$$

$$\cos(\alpha - \omega(\alpha)) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(\alpha - \omega(\alpha))} \quad (2.36)$$

$$\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}(\alpha) = \frac{c}{b} \quad (2.37)$$

$$\text{sen}(\alpha - \omega(\alpha)) = \frac{c}{\rho} = \frac{b \text{sen} \alpha}{\rho}. \quad (2.38)$$

Usando as expressões obtidas acima, temos que o potencial no ponto P_1 é dado por:

$$\begin{aligned} V(P_1) &= -\rho\lambda \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{\Delta(\omega)} \\ &= -\rho\lambda \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\rho \cos(\alpha - \omega(\alpha))} = -\rho\lambda \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\rho \sqrt{1 - \frac{b^2}{\rho^2} \text{sen}^2 \alpha}} \\ &= -\rho\lambda \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{\rho^2 - b^2 \text{sen}^2 \alpha}} = -\rho\lambda \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \alpha + (\rho^2 - b^2) \text{sen}^2 \alpha}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Temos que as distâncias máxima e mínima de P_1 ao anel são $p_1 = a + b$ e $q_1 = a - b$. Notamos que

$$a = \frac{p_1 + q_1}{2} = p_2 \quad \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{p_1 q_1} = q_2 \quad (2.40)$$

onde p_2 é a média aritmética e q_2 é a média geométrica. Assim

$$V(P_1) = -\rho\lambda \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{p_2^2 \cos^2 \alpha + q_2^2 \text{sen}^2 \alpha}} \quad (2.41)$$

Vemos comparando com a expressão inicial para o potencial do anel, que a integral não muda pela substituição de suas médias geométricas e aritméticas. Definimos

$$\varphi(m, n) = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{m^2 \cos^2 \alpha + n^2 \text{sen}^2 \alpha}} \quad (2.42)$$

temos que:

$$\varphi(p_2, q_2) = \varphi(a, \sqrt{a^2 - b^2}) = \varphi(a + b, a - b) = \varphi(p_1, q_1) \quad (2.43)$$

ou seja, fazendo-se $m = a + b$ e $n = a - b$, obtemos que φ satisfaz:

$$\varphi(m, n) = \varphi\left(\frac{m+n}{2}, \sqrt{mn}\right) \quad (2.44)$$

Assim podemos definir as sequências $p_{n+1} = \frac{p_n + q_n}{2}$ e $q_{n+1} = \sqrt{p_n q_n}$. Portanto as sequências p_n e q_n convergem ao mesmo limite $mag(p_1, q_1)$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto

$$V(P_1) = -\rho\lambda \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{M^2 \cos^2 \alpha + M^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{-2\pi\rho\lambda}{mag(p_1, q_1)} = \frac{-M}{mag} (p_1, q_1) \quad (2.45)$$

o resultado vale pra qualquer ponto P no disco. Isso foi provado por [4].

Temos que:

$$\begin{aligned} V(P) &= \frac{D}{\rho_2} V(P_1) = -\frac{D}{\rho_2} \frac{M}{M(p_1, q_1)} \\ &= -\frac{M}{\frac{D}{\rho_2} M(p_1, q_1)} = -\frac{M}{M(D, \frac{q_1 D}{p_1})} \\ &= -\frac{M}{M(\rho_1, \rho_2)} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Provando o fato de que $V(P) = -\frac{M}{mag(\rho_1, \rho_2)}$ para qualquer ponto P .

Capítulo 3

Estudo da Dinâmica para casos particulares

Neste capítulo estudaremos a dinâmica da partícula no campo gravitacional de um fio circular homogêneo de raio unitário contido no plano (x, y) e com centro na origem.

Faremos o estudo em dois subespaços invariantes: o plano horizontal e o eixo z . A dinâmica no plano vertical está bem determinada, pois trata-se de um fato particular do problema de Sitnikov. Veremos que neste subespaço temos soluções periódicas limitadas e soluções ilimitadas que chegam ao infinito com velocidade nula e soluções que chegam ao infinito com velocidade positiva. Estes resultados estão bem retratado em [4].

No estudo da dinâmica do plano horizontal, mostraremos que estamos considerando a dinâmica de uma partícula de massa unitária em um campo de força central, ficando assim determinado o Potencial efetivo. Neste caso podemos determinar a existência de órbitas periódicas, vendo que as mesmas existem para os pontos de máximo e mínimo deste potencial. Faremos um estudo numérico deste potencial efetivo, determinando um diagrama de bifurcação dos máximos e mínimos do potencial efetivo, tendo assim a localização das órbitas periódicas circulares. Este estudo para o caso geral de uma partícula em um campo conservativo encontra-se em [3].

Apresentaremos a prova analítica da existência das órbitas circulares fora do anel e

também que não existem órbitas circulares no interior do anel (este resultado foi provado por Carlinda Azevedo em sua tese de Doutorado Dinâmica do Problema do fio circular Homogêneo). Com estes resultados, e os resultados numéricos provamos o seguinte resultado

Teorema: *Considere o fio circular homogêneo de massa unitária no plano xy . No plano horizontal não existem órbitas circulares no interior do fio. A existência de orbitas circulares estáveis se dá no exterior ($r > 1$) e para momento angular $c > 1.53$.*

Este resultado é muito importante, pois nos informa realmente a região do espaço em que ocorrem as órbitas circulares.

O Hamiltoniano em coordenadas cartesianas é dado por

$$H(x, y, z, P_x, P_y, P_z) = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2} - V(x, y, z) \quad (3.1)$$

onde $V(x, y, z)$ é o potencial do fio circular. Mas quando determinamos uma expressão para o potencial do fio circular, levemos em conta a geometria do problema e descrevemos o potencial somente em função das distâncias máximas e mínimas em relação ao disco e a altura z . Isso sugere que rescrevemos o hamiltoniano em coordenadas cilíndricas.

$$H(r, z, P_r, P_z, P_\theta) = \frac{P_r^2}{2} + \frac{P_z^2}{2} + \frac{P_\theta^2}{2r^2} - V(r, z) \quad (3.2)$$

observe que $\dot{P}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$, ou seja P_θ é uma constante de movimento que chamaremos de c . Desta forma, o hamiltoniano é escrito em função da posição (x, y) e do momento (P_r, P_z) e parametrizado por uma constante c

$$H(r, z, P_r, P_z, c) = \frac{P_r^2}{2} + \frac{P_z^2}{2} + \frac{c^2}{2r^2} - V(r, z) \quad (3.3)$$

Estudaremos agora a dinâmica no eixo z , visto que este é uma singularidade para o sistema de coordenadas cilíndricas.

3.1 Dinâmica no eixo z

No eixo z , a expressão para o Potencial é obtida fazendo $x = 0$ e $y = 0$ na fórmula

$$V(P) = - \int_0^{2\pi} \frac{\sigma \, a \, d\phi}{|P - u(\phi)|} = - \int_0^{2\pi} \frac{\sigma a \, d\phi}{\sqrt{(x - a \cos \phi)^2 + (y - a \sin \phi)^2}} \quad (3.4)$$

onde $u(\phi) = (a \cos \phi, a \sin \phi, 0)$ é um ponto do fio parametrizado por ϕ . Temos assim

$$V(P) = - \frac{M}{\sqrt{a^2 + z^2}} \quad (3.5)$$

onde $a = 1$ é o raio do fio e M sua massa, que também vamos considerar unitária. Temos assim o caso de um potencial unidimensional. (veja figura 3.1)

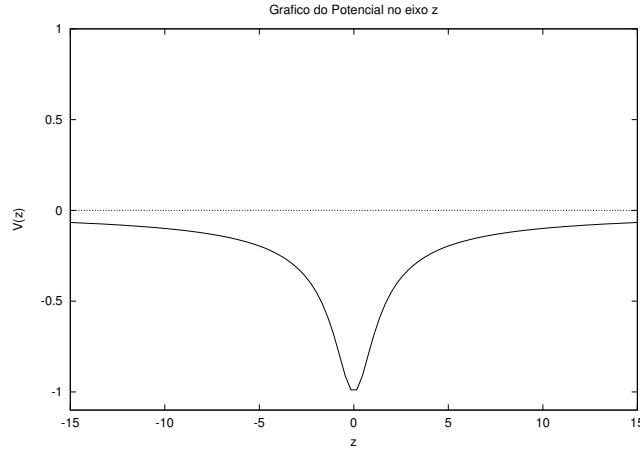


Figura 3.1: Potencial no eixo z

No eixo z temos que a dinâmica é dada por

$$\ddot{z} = -V'(z) \quad (3.6)$$

Definindo-se a variável $v = \dot{z}$ e a equação acima pode ser escrita como

$$\begin{cases} \dot{z} = v \\ \dot{v} = -V'(z) \end{cases}$$

Este sistema é hamiltoniano com função hamiltoniana dada por

$$H(z, \dot{z}) = \frac{1}{2}\dot{z}^2 - V(z) \quad (3.7)$$

Podemos facilmente ver que existe uma solução de equilíbrio dada por $z = 0$ e $\dot{z} = 0$. Este equilíbrio é um centro. De fato, os autovalores da parte linear são dados por

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ V''(z) & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - V''(z)$$

como $V''(z) = -\frac{3}{4}(1+z^2)^{\frac{5}{2}} < 0$, temos duas raízes complexas conjugadas.

Assim, dado a energia do sistema $E = H$, estamos com a seguinte dinâmica no eixo z :

Se $-1 < E < 0$ temos soluções periódicas e limitadas.

Se $E > 0$ as soluções são ilimitadas e chegam ao infinito com velocidade positiva.

Se $E = 0$ a solução é ilimitada e chega ao infinito com velocidade nula.

Para maiores detalhes consulte [4]

3.2 Dinâmica no plano Horizontal

Nesta seção descrevemos como é a dinâmica da partícula no plano horizontal. na primeira parte apresentaremos como é a dinâmica em um campo de forças centrais. para maiores detalhes veja [3]

3.2.1 O Potencial Efetivo

Seja $\mathbf{r}$ a posição da partícula no plano (x, y) sujeita a atração gravitacional do fio circular com massa unitária. Então temos que a partícula se movimenta segundo o sistema

mecânico:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(r) \quad (3.8)$$

onde $V(r)$ é o potencial do fio circular restrito ao plano horizontal. Temos então que a partícula está se movimentando em um campo de força central. Este fato decorre do potencial vetorial ser invariante em relação às rotações do plano em torno da origem

Teorema 3.2.1 *Em um campo central o momento angular C relativo a origem não muda com o tempo.*

Demonstração Por definição $C = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$, conseqüentemente $\dot{C} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$. Mas sabemos que $\ddot{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{r}$ são colineares e então $\dot{C} = 0$.

A lei da conservação do momento angular permite reduzir o problema do movimento em um campo de força central planar e independente do tempo a um problema com um grau de liberdade.

Teorema 3.2.2 *Durante o movimento de uma partícula de massa unitária em um campo central, a distância entre ela e o centro varia da mesma maneira que varia r no problema unidimensional com energia potencial*

$$U_{ff}(r) = V(r) + \frac{c^2}{2r^2} \quad (3.9)$$

Demonstração Usando coordenadas polares (r, θ) , temos que

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (3.10)$$

Diferenciando novamente obtemos

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta \quad (3.11)$$

Como o campo é central

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{e}_r \quad (3.12)$$

Desta forma, a equação de movimento em coordenadas polares são da forma

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= \frac{\partial V}{\partial r} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

mas pela lei de conservação do momento angular $\dot{\theta} = \frac{c}{r^2}$, então

$$\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + r\frac{C^2}{r^4} \quad (3.14)$$

ou

$$\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad \text{onde} \quad U = V + \frac{C^2}{2r^2} \quad (3.15)$$

A expressão $U(r)$ chamamos de **potencial efetivo**. Em nosso problema, vamos denotar o Potencial Efetivo por

$$U_{ff}(r) = \frac{c^2}{2r^2} - U(r) \quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned} U(r) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(r+1)^2 \cos^2 \theta + (r-1)^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{2}{\pi(r+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{2M}{(r+1)} K(k) \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde $k = \sqrt{1 - \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2}$; $(r-1)$ representa a distância mínima do ponto ao anel, e $(r+1)$ representa a distância máxima ao anel e $K(k)$ é a integral elítica de primeiro tipo.

3.2.2 Estudo das Órbitas

Estudaremos as órbitas das partículas sujeitas a ação deste potencial. Para isso fixamos um valor para c obtendo assim o gráfico do potencial como função da distância r . Desta forma, obtemos uma família de potenciais parametrizados pelo momento angular c .

Seja o valor E da energia total do sistema. Toda órbita correspondente aos parâmetros fixos E e c permanece no domínio $U_{ff}(r) \leq E$. A fronteira desta região é tal que $U_{ff} = E$. Ao mesmo tempo, a velocidade na direção e_θ da partícula não é zero, pois $\dot{\theta} \neq 0$ para $c \neq 0$.

A inequação $U_{ff}(r) \leq E$ determina uma ou mais regiões anulares no plano

$$0 \leq r_{mim} \leq r \leq r_{max} \leq \infty \quad (3.18)$$

Temos uma órbita fechada quando θ for comensurável com 2π , ou seja, $\theta = 2\pi \frac{n}{m}$. Quando o ângulo θ não for comensurável com 2π a órbita é densa no anel.

O ângulo θ varia monotonicamente enquanto r oscila entre r_{mim} e r_{max} . Os pontos onde $r = r_{mim}$ são chamados de pericentro e onde $r = r_{max}$ de apocentro. O ângulo entre um pericentro e um apocentro sucessivos é dado por

$$\theta = \int_{r_{mim}}^{r_{max}} \frac{C}{r^2 \sqrt{2(E - U_{ff}(r))}} dr \quad (3.19)$$

Quando $r_{mim} = r_{max}$ temos o valor de mínimo de U , e o anel se degenera em uma circunferência.

Quando os valores de E são um pouco maiores que o mínimo de U_{ff} o anel $r_{mim} \leq r \leq r_{max}$ torna-se bem estreito, enquanto que a órbita é ainda quase uma circunferência.

Apresentemos agora o comportameto do potencial efetivo graficamente, para diferentes momentos c .

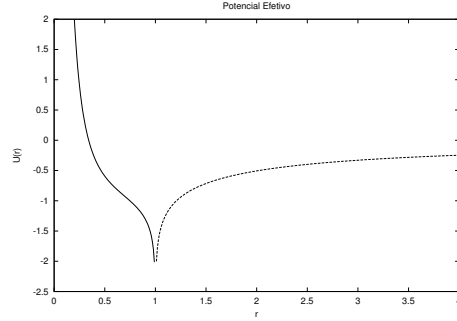


Figura 3.2: Potencial Efetivo no interior e exterior do anel para momento angular $c = 0.5$

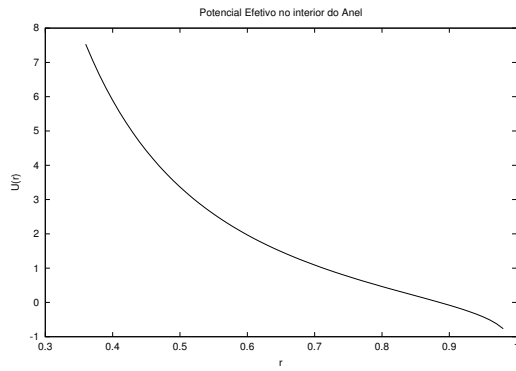


Figura 3.3: Potencial efetivo no interior do anel com momento angular $c = 1.5$

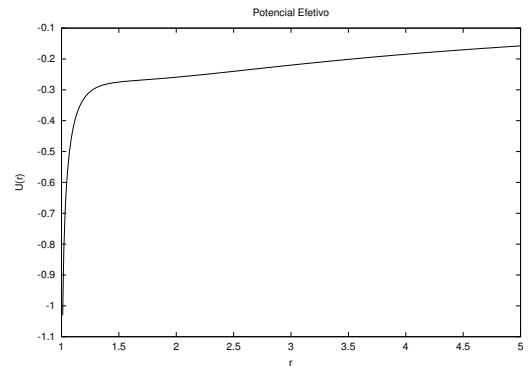


Figura 3.4: Potencial efetivo no exterior do anel com momento angular $c = 1.5$

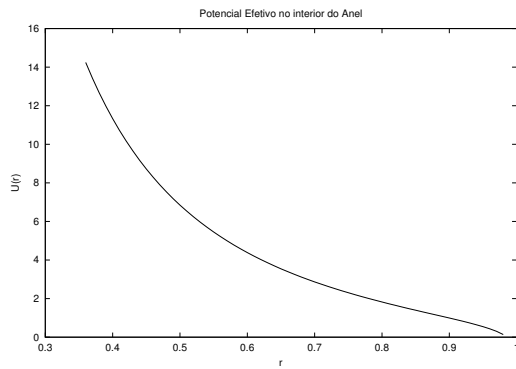


Figura 3.5: Potencial efetivo no interior do anel com momento angular $c = 1.7$

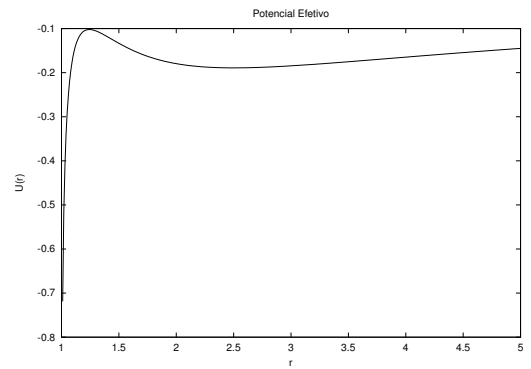


Figura 3.6: Potencial efetivo no exterior do anel com momento angular $c = 1.7$

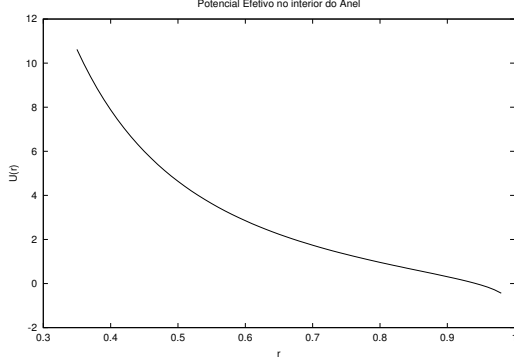


Figura 3.7: Potencial efetivo no interior do anel com momento angular $c = 2.0$

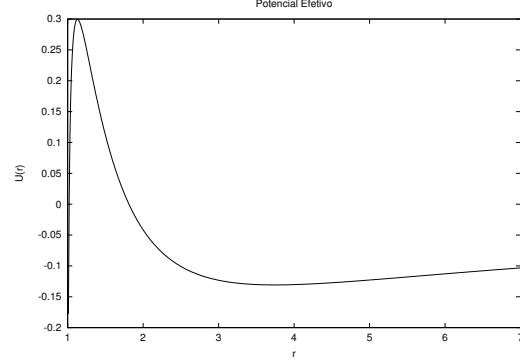


Figura 3.8: Potencial efetivo no exterior do anel com momento angular $c = 2.0$

Analisando estes gráficos podemos perceber diferentes comportamentos a medida que variamos c . No interior do anel, observamos que a curva da função potencial tem sempre a mesma forma. Já no exterior do anel, para momentos angulares pequenos, temos uma curva crescente que tende a $-\infty$ quando $r \rightarrow 1$. A medida que aumentamos c podemos perceber que a função potencial, a partir de um certo valor de c , apresenta um máximo e um mínimo local.

Na seção seguinte, apresentaremos para que valores de r e c a função potencial apresenta máximos e mínimos locais e iremos concluir a existência de órbitas circulares

3.2.3 Estudo das Órbitas Circulares

Seja $\mathbf{r}$ a posição da partícula no plano horizontal sujeita a atração gravitacional do fio. Então $\mathbf{r}$ satisfaz a seguinte equação de movimento

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(r) = -F(r)\mathbf{r} = \frac{U'(r)}{r} \quad (3.20)$$

onde V é o potencial do fio circular unitário restrito ao plano horizontal e

$$U(r) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(r+1)^2 \cos^2 \theta + (r-1)^2 \sin^2 \theta}} \quad (3.21)$$

Estamos interessados em verificar a existência de soluções circulares. Para tal consideremos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.3 *Considere o problema de força central no plano:*

$$\ddot{\mathbf{r}} = -F(r)\mathbf{r} \quad (3.22)$$

Com $r = |\mathbf{r}|$. Para todo $k > 0$, com $F(a) = \omega^2$, $\omega \neq 0$, temos que $\mathbf{r} = ke^{i\omega t}$ é uma solução circular do problema 3.22

Demonstração Seja $\mathbf{r} = ke^{i\omega t}$, com k constante positiva, $\omega \neq 0$. derivando duas vezes em relação ao tempo obtemos

$$\ddot{\mathbf{r}} = -k\omega^2 e^{i\omega t} = \omega^2 \mathbf{r} \quad (3.23)$$

Assim, $\mathbf{r}$ é solução de 3.2 se, e somente se, $-F(r)\mathbf{r} = -\omega^2 \mathbf{r}$; $|r| = k$ implica que $-F(ar)\mathbf{r} = -\omega^2 \mathbf{r}$, conseqüentemente $F(k) = \omega^2$ ■

Definindo $v = \dot{r}$, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{r} = v \\ \dot{v} = -U'_{ff}(r) \end{cases}$$

O hamiltoniano associado é $H(r, v) = \frac{1}{2}v^2 + U_{ff}(r)$. A solução de equilíbrio deste sistema é tal que $\dot{r} = 0$ e $\dot{v} = -U'_{ff}(r) = 0$.

Assim estamos interessados em encontrar os valores de r , para os quais $U'_{ff}(r) = 0$, ou seja pontos de máximo e mínimo do potencial efetivo.

Proposição 3.2.4 *A equação $\mathbf{r}(t) = r^*e^{i\omega t}$ é solução do sistema 3.8 se, e somente se, r^* é tal que $U'_{ff}(r) = 0$, ou seja pontos de máximo e mínimo do potencial efetivo.*

Demonstração: Observamos que se r^* é tal que $-U'_{ff}(r^*) = 0$, significa que $U'(r) = \frac{C^2}{(r^*)^3}$ e $\dot{\theta} = \frac{C}{(r^*)^2}$ e portanto obtemos $\theta(t) = \frac{C}{(r^*)^2}t$

Fazendo $\omega = \frac{C}{(r^*)^2}$ obtemos que $\mathbf{r}(t) = r^* e^{i\omega t}$ do sistema 3.8. Por outro lado se $\mathbf{r}^*(t) = r^* e^{i\omega t}$ é uma solução circular de do sistema 1 então pelo teorema 3.2.3 $U'(r^*) = \omega^2 = \frac{C^2}{(r^*)^3}$ ou seja $U'_{ff}(r^*) = 0$, logo r^* é ponto crítico de $U'_{ff} = 0$ ■

A justificativa da existência dos pontos críticos do potencial efetivo decorre do seguinte argumento; se $U'_{ff} = 0$ então $\frac{C^2}{r^3} = U'(r)$. Isto significa que $U'(r) \geq 0$. Mas observamos que

$$U'(r) = 0 \iff C = 0 \quad (3.24)$$

logo quando o momento angular é zero não temos pontos críticos. Precisamos analisar o sinal de $U'(r)$.

Consideremos o seguinte resultado, provado por [4]

Proposição 3.2.5 *A derivada da função $U(r)$ é negativa no interior do fio circular e positiva no exterior do fio. Ou seja, Se $U'(r) > 0$ então $r > 1$ e $U'(r) < 0$ então $0 < r < 1$*

Demonstração Temos que no exterior do fio

$$\begin{aligned} U(r) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(r+1)^2 \cos^2 \theta + (r-1)^2 \sin^2 \theta}} \\ &= -\frac{2}{\pi(r+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left(1 - \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2\right) \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{-2}{\pi(r+1)} K(k) \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde $k^2 = 1 - \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2$. derivando $U(r)$ usando a regra da cadeia obtemos que

$$U'(r) = \frac{-2}{\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r+1} \right) K(k) + \frac{-2}{\pi(r+1)} \frac{dK(k)}{dk} \frac{\partial k}{\partial r} \quad (3.26)$$

Como $\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{-2(r-1)}{k(r+1)^3}$ temos então

$$U'(r) = \frac{2}{\pi(r+1)^2} \left[K(k) + \frac{2}{k} \left(\frac{r-1}{r+1} \right) \frac{dK(k)}{dk} \right] \quad (3.27)$$

Como $\frac{2}{\pi(r+1)^2} > 0$, analisamos o sinal de

$$K(k) + \frac{2}{k} \left(\frac{r-1}{r+1} \right) \frac{dK(k)}{dk} \quad (3.28)$$

Assim se $r > 1$ então $U'(r) > 0$.

Agora supomos que $0 < r < 1$. Então

$$\begin{aligned} U(r) &= V(1-r, r+1) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(r+1)^2 \cos^2 \theta + (r-1)^2 \sin^2 \theta}} \\ U(r) &= -\frac{2}{\pi(r+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left(1 - \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^2\right) \sin^2 \theta}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Agora observe que, pelo que vimos no capítulo anterior, a integral acima não muda se atribuirmos os valores de suas médias geométricas e geométricas.

$$V(1-r, r+1) = V(\sqrt{(1-r)(r+1)}, \frac{(r+1) + (1-r)}{2}) = V(\sqrt{(1-r^2)}, 1) \quad (3.30)$$

portanto

$$\begin{aligned} U(r) &= V(1-r, r+1) = V(\sqrt{(1-r^2)}, 1) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + (1-r^2) \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-r^2 \sin^2 \theta}} = \frac{-2}{\pi} K(r) \end{aligned} \quad (3.31)$$

obtemos assim

$$U'(r) = \frac{-2}{\pi} K'(r) < 0 \quad (3.32)$$

pois $K'(r) > 0$ portanto se $0 < r < 1$ $U'(r) < 0$.

Logo temos $U'_{ff} = 0$ somente quando $r > 1$ e portanto para $r > 1$ temos órbitas circulares e para $0 < r < 1$ não ocorrem soluções circulares. ■

Apresentamos então o diagrama de bifurcação dos máximos e mínimos do potencial Efetivo.

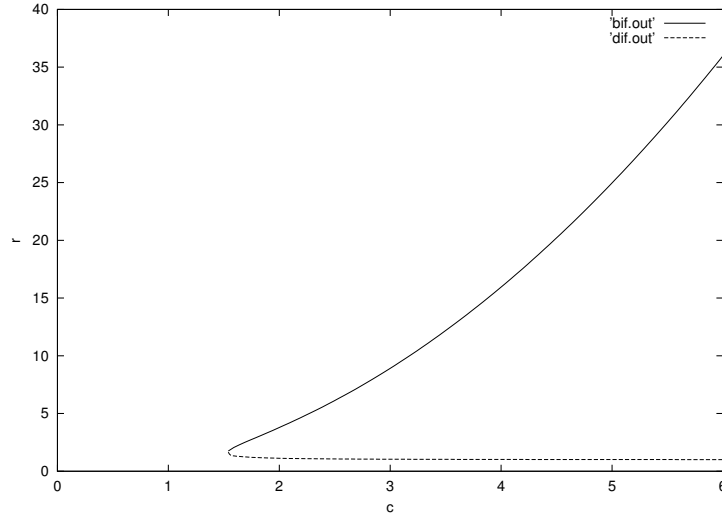


Figura 3.9: Diagrama de bifurcação com ponto de bifurcação em $C = 1.53$

Podemos perceber pelo diagrama de bifurcação que o ponto de máximo do potencial efetivo se aproxima do anel a medida que o momento angular aumenta, formando um pico brusco, ou seja, a derivada da função potencial, numa vizinhança do ponto de máximo tem grande variação (veja figura 3.10). O ponto de mínimo se afasta do anel com o aumento do momento angular. Mas a medida que o momento angular aumenta, próximo do ponto de mínimo, o potencial efetivo é bastante suave, ou seja, a derivada numa vizinhança deste ponto é quase zero (veja figura 3.11).

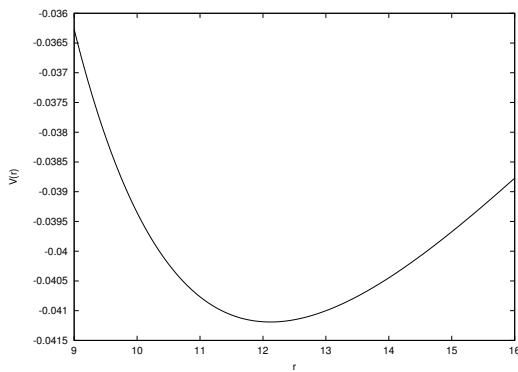


Figura 3.10: Potencial efetivo próximo a um ponto de mínimo local

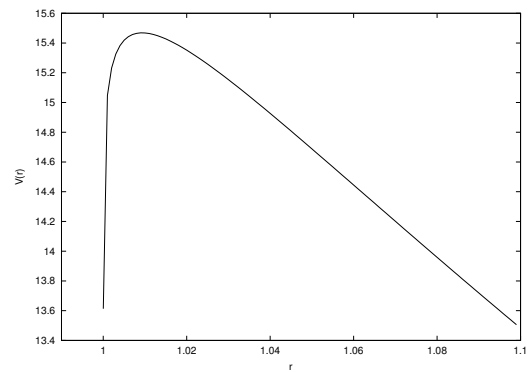


Figura 3.11: Potencial efetivo próximo a um ponto de máximo local

Queremos também estudar a estabilidade das órbitas circulas no plano horizontal. Para isso consideremos os seguintes resultados:

Proposição 3.2.6 *Seja o sistema mecânico $\ddot{r} = -\nabla V(r)$ e seja r_0 um ponto crítico de $V(r)$, e que seja um ponto de mínimo local isolado. Então a solução do sistema hamiltoniano associado é estável*

Demonstração Seja $U_0 = U(r_0)$ e $\epsilon > 0$ de tal forma que $V(r) < U_0$ para $\|r - r_0\| < \epsilon$.

Defina $U(r, v) = H(r, v) + U_0 = \frac{1}{2}\|v\|^2 - V(r) + U_0 > 0$ a qual é definida positiva na vizinhança de $\|r - r_0\| < \epsilon$ com v arbitrário.

Segue que $\dot{U} - H = 0$. Estamos então com $U(r, v)$ definida em $\|r - r_0\| < \epsilon$ e $\dot{U} = 0$. Logo pelo teorema de Lyapunov para estabilidade, $(r_0, 0)$ é uma solução de equilíbrio estável. ■

Proposição 3.2.7 *Seja o sistema mecânico $\ddot{r} = -\nabla V(r)$ e seja r_0 um ponto crítico de $V(r)$, e que seja um ponto de máximo local isolado. Então a solução do sistema hamiltoniano associado é instável.*

Demonstração Seja r_0 um ponto de máximo então $V''(z) > 0$ então o ponto de equilíbrio $r_0, 0$ é uma sela pois os autovalores da parte linear são $\pm \sqrt{V''(z)}$. ■

Então acabamos de verificar que os equilíbrios $(r_0, 0)$ onde r_0 é um ponto de mínimo do potencial efetivo, são soluções estáveis. E também que os equilíbrios $(r_0, 0)$ onde r_0 é um ponto de máximo do potencial efetivo, são soluções instáveis.

com estes resultados que provamos podemos enunciar o seguinte teorema, que já está provado

Teorema 3.2.8 : *Conidere o fio circular homogêneo de massa unitária no plano xy . No plano horizontal não existem órbitas circulares no interior do fio. A existência de orbitas circulares estáveis se dá no exterior ($r > 1$) e para momento angular $c > 1.53$.*

Sabemos que no interior do fio circular não existem órbitas circulares. Então vamos mostrar a dinâmica do problema no interior do fio.

Consideramos a dinâmica no eixo x . Consideremos o caso em que $C = 0$. Então $U_{ff}(r) = U(r)$ onde $r = |x|$. Então o potencial é dado por

$$V(x) = -\frac{2}{\pi(|x| + 1)} K\left(1 - \left(\frac{|x| - 1}{|x| + 1}\right)^2\right) \quad (3.33)$$

O gráfico de $V(x)$ é dado pela figura 3.12 abaixo ver grafico

Assim a dinâmica é dada por $\ddot{x} = -\nabla V(x)$. Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -V'(x) \end{cases}$$

e conseqüentemente, o seguinte hamiltoniano associado

$$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) \quad (3.34)$$

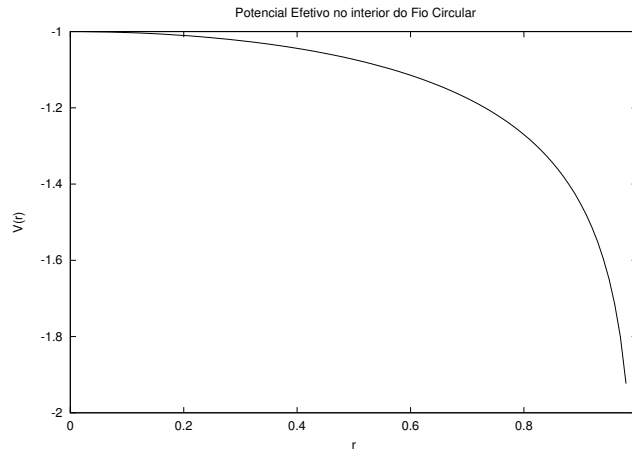


Figura 3.12: Potencial Efetivo no interior do anel para momento angular $c = 0.0$

Seja $H = V(0) = -1$. Então para $E > H$ ou para $E < H$ temos que a partícula converge para o fio e para $H = E$ a partícula ou converge para o fio ou para a origem.

Capítulo 4

Seção de Poincaré

A seção de Poincaré é um método para reduzir o estudo do fluxo de um campo de vetores em um espaço de fases de dimensão $\mathbb{R}^n$ a uma aplicação (difeomorfismo) em $\mathbb{R}^{n-1}$.

Para isso consideremos a intersecção das órbitas do campo de vetores com o hiperplano Σ transversal a elas. O primeiro retorno de cada órbita a Σ define a aplicação de Poincaré

$$\begin{aligned} P : \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ x_0 &\mapsto x(x_0, \tau) \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde τ é o tempo necessário para órbita voltar a Σ . Observe que rigorosamente só podemos definir o mapa de Poincaré em uma vizinhança de uma órbita periódica para a qual o campo de vetores seja transversal. Entretanto, numericamente observa-se que tal condição pode ser muito enfraquecida. Para uma órbita periódica γ o tempo τ será o período T da órbita. Órbitas vizinhas terão outros tempos τ , diferentes, mas próximo de T .

A conservação de energia num sistema hamiltoniano, permite a redução da dimensão do espaço de fases. A aplicação de Poincaré pode ser definida restringindo-se o campo de vetores hamiltoniano à hipersuperfície de energia

$$H(q, p) = E \tag{4.2}$$

Assim, por exemplo se considerarmos como superfície de seção o plano $q_n = 0$, po-

demos usar $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ e $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ como coordenadas da interseção de Σ com a superfície de energia, e assim determinar p_n por meio da equação acima.

Em nosso problema o Hamiltoniano é dado por

$$H(r, z, dr, dz) = \frac{P_r^2}{2} + \frac{P_z^2}{2} + \frac{c^2}{2r^2} - U(r, z) \quad (4.3)$$

onde $U(r, z) = \frac{2M}{\pi\rho_2}K(k)$. As equações de movimento são as equações de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = P_r \\ \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial P_z} = P_z \\ \dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{c^2}{r^3} + \frac{2M}{\pi\rho_2} \left(\frac{a}{\sqrt{ar}\rho_2} - \frac{2\sqrt{ar}(r+a)}{\rho_2^3} \right) \frac{dK(k)}{dk} - \frac{2M(r+a)}{\pi\rho_2^3} K(k) \\ \dot{P}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{2Mz}{\pi\rho_2^3} K(k) + \frac{2M}{\pi\rho_2} \frac{dK(k)}{dk} \frac{2\sqrt{ar}z}{\rho_2^3} \end{cases}$$

As duas primeiras equações do sistema acima são facilmente verificadas. Vejamos como obter a terceira e a quarta equações.

Temos que

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{c^2}{2r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2M}{\pi\rho_2} \right) K(k) \\ &= -\frac{c^2}{2} \frac{(-2)}{r^3} + \frac{2M}{\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho_2} \right) K(k) + \frac{2M}{\pi\rho_2} \frac{\partial}{\partial r} (K(k)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Como $\rho_2 = \sqrt{(r+a)^2 + z^2}$ e $k^2 = 1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}$, usamos a regra da cadeia para diferenciar os dois últimos termos da equação acima, já que ρ_2 e k são funções de r . Desta Forma

$$-\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{c^2}{r^3} + \frac{2M}{\pi} \left(-\frac{1}{\rho_2^2} \right) \frac{\partial \rho_2}{\partial r} K(k) + \frac{2M}{\pi\rho_2} \frac{dK(k)}{dk} \frac{\partial k}{\partial r} \quad (4.5)$$

Agora calculamos separadamente $\frac{\partial \rho_2}{\partial r}$ e $\frac{\partial k}{\partial r}$.

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left((r+a)^2 + z^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{r+a}{\rho_2} \quad (4.6)$$

Reescrevendo $k^2 = 1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}$ explicitamente em função de r obtemos

$$k = \frac{2\sqrt{ar}}{\rho_2}, \quad (4.7)$$

e desta forma

$$\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{a}{\sqrt{ar}\rho_2^2} - \frac{2\sqrt{ar}(r+a)}{\rho_2^3} \quad (4.8)$$

Assim substituindo as equações 4.6 e 4.8 na equação 4.5 obtemos a terceira equação do sistema acima.

$$-\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{c^2}{r^3} + \frac{2M}{\pi\rho_2} \left(\frac{a}{\sqrt{ar}\rho_2} - \frac{2\sqrt{ar}(r+a)}{\rho_2^3} \right) \frac{dK(k)}{dk} - \frac{2M(r+a)}{\pi\rho_2^3} K(k) \quad (4.9)$$

Agora determinamos a equação para $\frac{\partial H}{\partial z}$.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2M}{\pi\rho_2} K(k) \right) \\ &= -\frac{2M}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_2} \right) K(k) + \frac{2M}{\pi\rho_2} \frac{\partial K(k)}{\partial z} \frac{dK(k)}{dk} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Novamente Utilizando a regra da cadeia obtemos

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{2M}{\pi} \left(-\frac{1}{\rho_2^2} \right) \frac{\partial \rho_2}{\partial z} K(k) + \frac{2M}{\pi\rho_2} \frac{dK(k)}{dk} \frac{\partial k}{\partial z} \quad (4.11)$$

Calculando agora separadamente $\frac{\partial \rho_2}{\partial z}$ e $\frac{\partial k}{\partial z}$ obtemos que

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left((r+a)^2 + z^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\rho_2} \quad (4.12)$$

e

$$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2\sqrt{ar}}{\rho_2} \right) = -2\sqrt{ar} \frac{z}{\rho_2^3} \quad (4.13)$$

e substituindo as equações 4.12 e 4.13 em 4.11 obtemos a equação

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{2Mz}{\pi\rho_2^3}K(k) + \frac{2M}{\pi\rho_2} \frac{dK(k)}{dk} \frac{2\sqrt{ar}z}{\rho_2^3} \quad (4.14)$$

Utilizando a superfície de energia $E = H(r, z, P_r, P_z, c)$ podemos escrever

$$P_z = \sqrt{2E - P_r^2 - \frac{c^2}{r^2} + \frac{4M}{\pi\rho_2}K(k)}$$

e assim podemos rescrever as equações de movimento na forma

$$\begin{cases} \dot{r} = P_r \\ \dot{z} = \sqrt{2E - P_r^2 - \frac{c^2}{r^2} + \frac{4M}{\pi\rho_2}K(k)} \\ \dot{P}_r = \frac{c^2}{r^3} + \frac{2M}{\pi\rho_2} \left(\frac{a}{\sqrt{ar}\rho_2} - \frac{2\sqrt{ar}(r+a)}{\rho_2^3} \right) \frac{dK(k)}{dk} - \frac{2M(r+a)}{\pi\rho_2^3} k(k) \end{cases}$$

Obtemos assim um fluxo tridimensional. Fixando-se valores de energia E e do momento angular c , definimos, como superfície de seção $\Sigma_{E,C} = \{(r, z, P_r, P_z); z = 0 \text{ e } H(r, z, P_r, P_z, c) = E\}$. Usaremos (r, P_r) , como coordenadas da intersecção do fluxo com $\Sigma_{E,C}$.

4.1 Método numérico

O processo numérico para obtenção da seção de Poincaré, consiste na integração numérica das equações de movimento. Para isso fixamos um nível de energia, um momento angular c e uma condição inicial (r, P_r) , sobre a seção (ie, $z = 0$) e assim obtemos P_z como descrito acima.

Percorremos a órbita, e marcamos os pontos de intersecção desta com o plano $z = 0$, numa direção de P_z fixa (no nosso caso $P_z > 0$). A intersecção é detectada analisando-se

o sinal do produto da coordenada z da etapa atual com a coordenada z da etapa anterior. Se este produto for menor que zero, então marcamos o ponto z .

Ao analisar os resultados podemos perceber, que o algoritmo não garante a priori, que o ponto esteja exatamente sobre a seção . Uma técnica usual, consiste em integrar o sistema obtendo-se uma sequência de pontos da trajetória e avaliar cada ponto até que uma mudança de sinal em z seja detectada. Isto significa que a superfície de seção foi cruzada. O ponto de intersecção da trajetória com a seção pode ser então determinado por uma interpolação, bissecção ou Newton.

Pode-se usar fórmulas de interpolação de qualquer ordem, mas isso requer um programa muito complexo. A solução é encontrar um esquema de integração no qual o ponto de integração caia exatamente sobre a seção Σ . Para isso requeremos, que o esquema de integração deverá comportar etapas de tempo independentes, i.e, cada nova etapa de tempo pode ser calculada independente do procedimento das demais. Mas esta imposição é permitida por um integrador de passo simples, por exemplo um Runge-Kutta.

Em nosso caso, a superfície de seção é $z = 0$. Notemos que se a superfície de seção estivesse definida por uma condição na variável independente, seria trivialmente fácil obter uma integração até exatamente a Σ , meramente escolhendo um intervalo de tempo apropriado. Desta forma, nós não podemos obter sua evolução na variável de integração

Então fizemos uma reparametrização do sistema de equações diferenciais em que z seja uma variável independente (para maiores detalhes veja [9]). Isto é feito dividindo-se as três primeiras equações por P_z e invertendo a equação $\frac{dz}{dt}$.

Assim o sistema fica determinado por:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \frac{P_r}{P_z} \\ \frac{dz}{dt} = \frac{1}{P_z} \\ \frac{dP_r}{dt} = \frac{1}{P_z} \left(\frac{c^2}{r^3} + \frac{2M}{\pi\rho_2} \left(\frac{a}{\sqrt{ar}\rho_2} - \frac{2\sqrt{ar}(r+a)}{\rho_2^3} \right) \frac{dK(k)}{dk} - \frac{2M(r+a)}{\pi\rho_2^3} k(k) \right) \\ \frac{dP_z}{dt} = \frac{1}{P_z} \left(-\frac{2Mz}{\pi\rho_2^3} K(k) + \frac{2M}{\pi\rho_2} \frac{dK(k)}{dk} \frac{2\sqrt{ar}z}{\rho_2^3} \right) \end{cases}$$

O lado direito depende agora da variável independente z . O procedimento prático consiste em integrar o sistema normal até que uma mudança de sinal seja detectada, então mudamos para o sistema modificado, usando o último ponto calculado como condição inicial. Integramos assim o novo sistema para um passo, tomando como passo de integração

$$\Delta z = -S, \quad (4.15)$$

isto nos leva exatamente à superfície de seção . Após ter anotado as coordenadas do ponto, voltamos ao sistema inicial para continuar a integração .

O único erro neste procedimento está no erro de integração do sistema modificado, que é o mesmo erro de integração do sistema inicial.

Os dois sistemas, o inicial e o modificado, podem ser fundidos em uma forma simples. definimos τ como a nova variável independente e $k = \frac{dt}{d\tau}$. Então o sistema pode ser definido como

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = kP_r \\ \frac{dt}{d\tau} = k \\ \frac{dP_r}{d\tau} = k \left(\frac{c^2}{r^3} + \frac{2M}{\pi\rho_2} \left(\frac{a}{\sqrt{(ar)}\rho_2} - \frac{2\sqrt{(ar)}(r+a)}{\rho_2^3} \right) \frac{dK(k)}{dk} - \frac{2M(r+a)}{\pi\rho_2^3} k(k) \right) \\ \frac{dP_z}{d\tau} = k \left(-\frac{2Mz}{\pi\rho_2^3} K(k) + \frac{2M}{\pi\rho_2} \frac{dK(k)}{dk} \frac{2\sqrt{ar}z}{\rho_2^3} \right) \end{cases}$$

Assim para obter os sistemas inicial e modificado basta tomar , respectivamente $k = 1$ ou $k = \frac{1}{P_z}$

4.1.1 Seção 1 : Método de análise

Como vimos as seções são parametrizadas por um nível de energia e um momento angular.

Por exemplo, começamos fixando a energia $E = -0.8199$ e o momento angular $c = 0.5$, obtemos a Seção de Poincaré da figura 4.1.

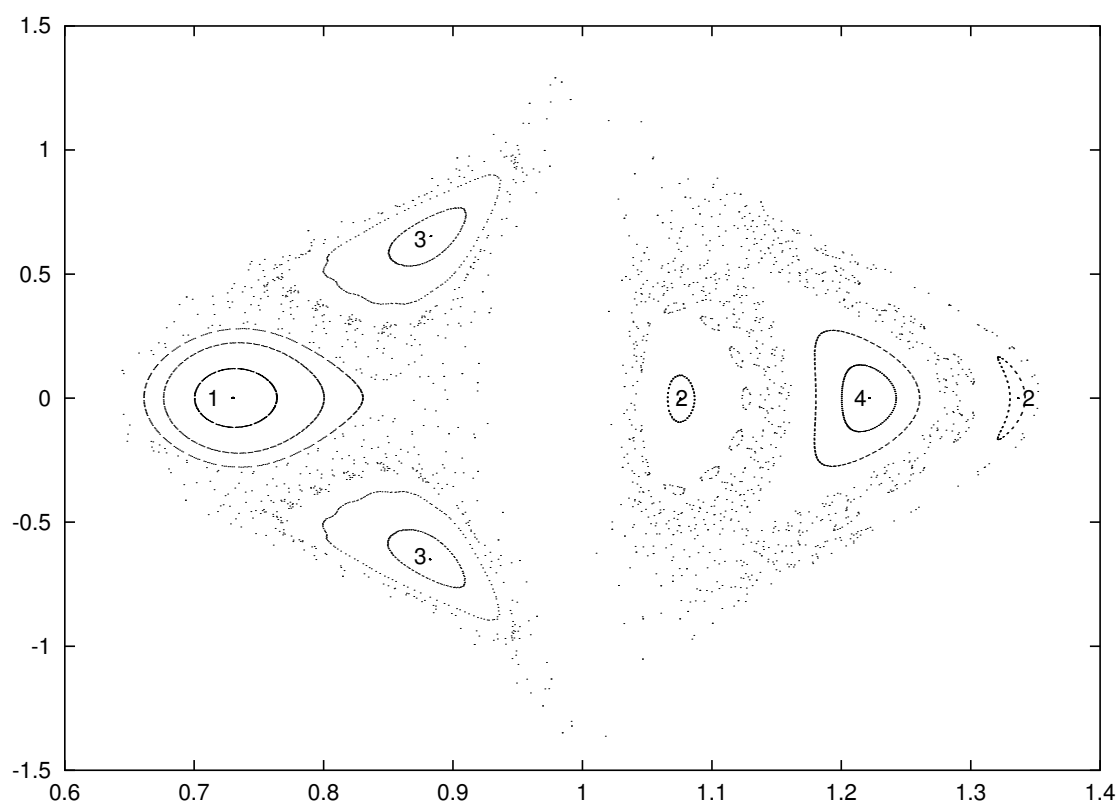


Figura 4.1: Seção de Poincaré com $E = -0.8199$ e momento angular $c = 0.5$. Os pontos periódicos 1, 2, 3, 4 correspondem a órbitas periódicas

Podemos ver várias órbitas na seção de Poincaré geradas por diferentes condições iniciais (r, P_r) . As figuras 4.2 a 4.12 mostram algumas destas órbitas.

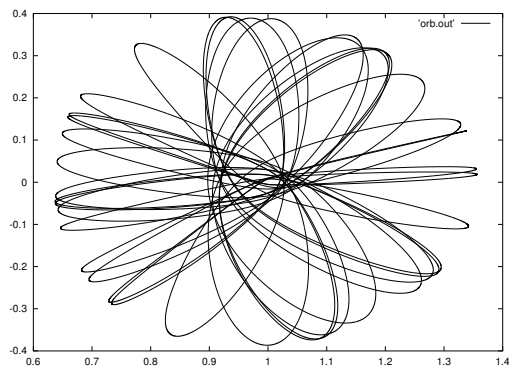


Figura 4.2: Órbita caótica na configuração rz com $(r, P_r) = (0.92, 0.0)$

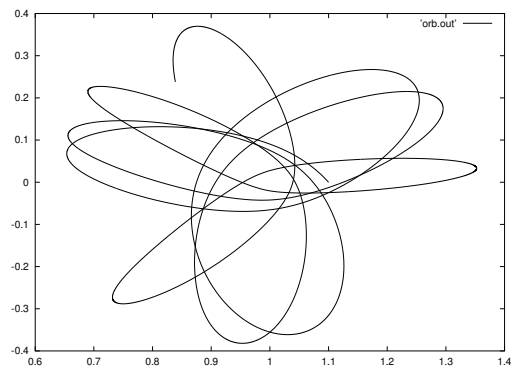


Figura 4.3: Órbita caótica na configuração (r, z) com $(r, P_r) = (1.1, -0.5)$

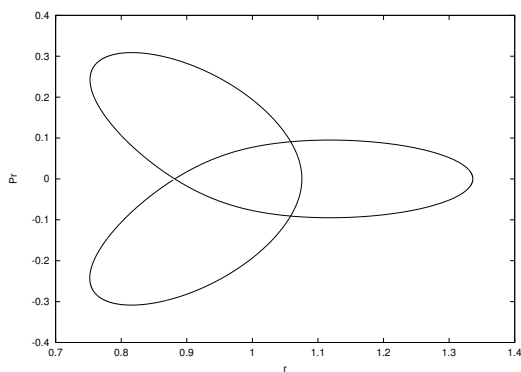


Figura 4.4: Órbita periódica (2) na configuração (r, z) com $(r, P_r) = (1.075221277, 0.0)$

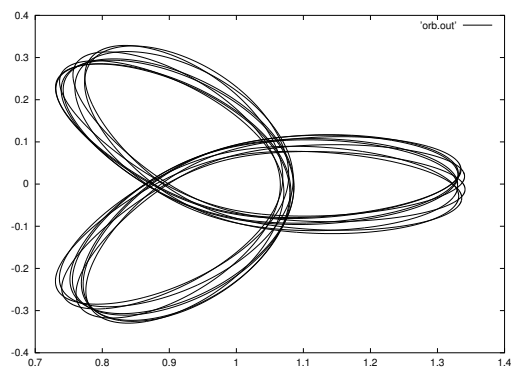


Figura 4.5: Órbita vizinha a órbita periódica na configuração rz $(r, P_r) = (1.33, 0.0)$

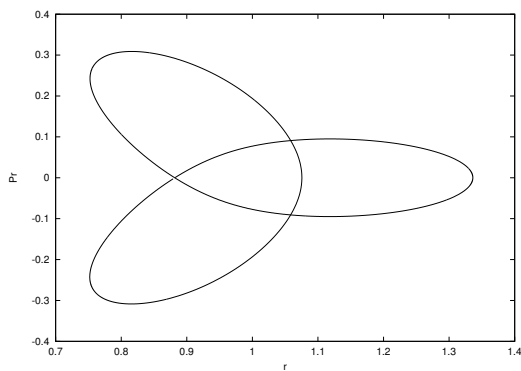


Figura 4.6: Órbita periódica (3) na configuração rz com $(r, P_r) = (0.8821, 0.65136)$, com período=5.04

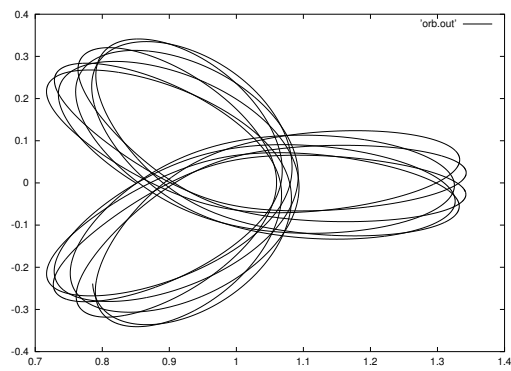


Figura 4.7: Órbita vizinha a órbita periódica na configuração rz com $(r, P_r) = (0.85, -0.6)$

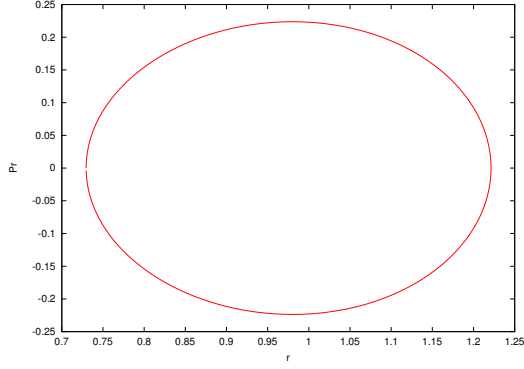


Figura 4.8: Órbita periódica (1) na configuração rz com $(r, P_r) = (0.729569722, 0.0)$, com período=2.51

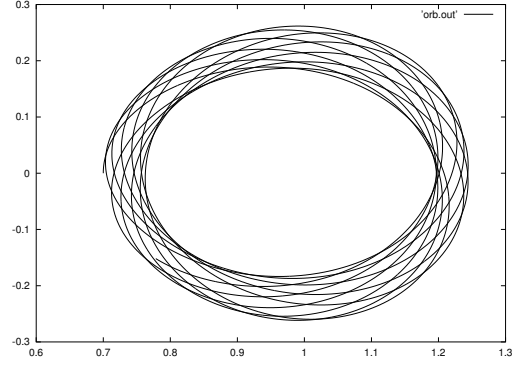


Figura 4.9: Órbita vizinha a órbita periódica na configuração com $(r, P_r) = (0.70, 0.0)$

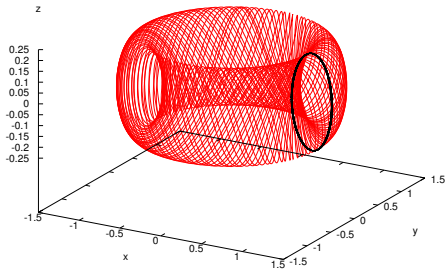


Figura 4.10: Trajetória da órbita (1) no espaço tridimensional relativa a órbita quase periódica com $(r, P_r) = (0.729569722, 0.0)$

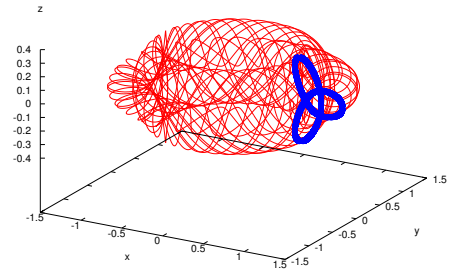


Figura 4.11: Trajetória da órbita (2) no espaço tridimensional relativa a órbita quase periódica com $(r, P_r) = (1.07, 0.0)$

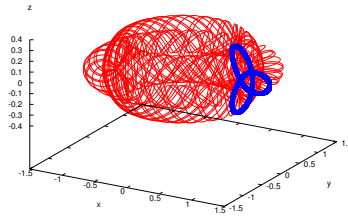


Figura 4.12: Trajetória da Órbita (3) no espaço tridimensional relativa a órbita quase periódica com $(r, P_r) = (0.88218, 0.65136)$

A análise das seções de Poincaré nos permite uma visão global da dinâmica. A figura 4.1 representa a seção de Poincaré(r, Pr) caracterizada pelos parâmetros energia e momento angular, com várias condições iniciais. Vemos nesta seção regiões regulares e regiões caóticas. Podemos visualizar cada uma destas configurações no plano de configurações (r, z) (veja figuras 4.2 a 4.9 acima).

Sabemos que todas as propriedades básicas do fluxo são refletidas na seção . Em particular, é fácil ver que trajetórias periódicas do fluxo, correspondem a pontos periódicos na seção .

A estabilidade também é preservada. Trajetórias estáveis (instáveis) do fluxo correspondem a pontos estáveis (instáveis) do mapa. Trajetórias instáveis, chamadas de caóticas aparecem na seção como uma sequência aleatória de pontos que convergem uniformemente em áreas do plano da seção .

Trajetórias regulares, representam curvas simples fechadas na seção .

Chamamos a atenção mais uma vez para o fato de que nossas Seção estão determinadas, por dois parâmetros: energia e momento angular. Portanto, para um estudo bem detalhado, temos de levar em conta estes dois parâmetros.

Desta maneira estaremos considerando duas formas para o estudo da dinâmica da partícula e também desta forma, as famílias de órbitas periódicas ficam sujeitas a análise de dois parâmetros, a energia e o momento angular. O nível de energia usado neste trabalho é $E = -0.3$

Da mesma forma, fixamos um dado momento angular e analisamos o comportamento da dinâmica com a variação do nível de energia. O valor do momento angular fixado foi $c = 0.2$.

A escolha destas constantes, foi baseada na configuração que as mesmas apresentam. Estas seções apresentam as principais estruturas que permanecem presentes para os demais níveis de energia.

4.2 Dinâmica para o nível de Energia -0.3

Veamos a dinâmica, para um nível fixo de energia $E = -0.3$ e com variação do momento angular. Apresentamos as seções para uma variação do momento angular de $c = 0.1$ até $c = 1.4$. Apresentaremos a seguir algumas seções de Poincaré com momento angular no intervalo $[0.1; 1.4]$. Vejam as figuras na sequência que nos mostram esta dinâmica.

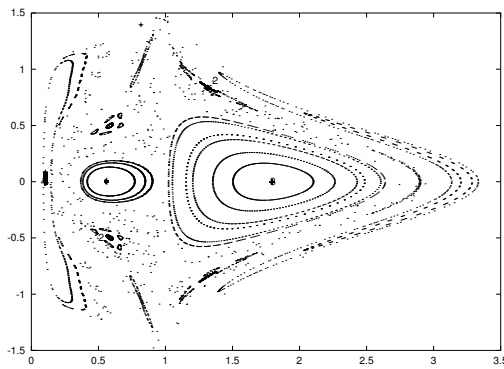


Figura 4.13: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 0.1$

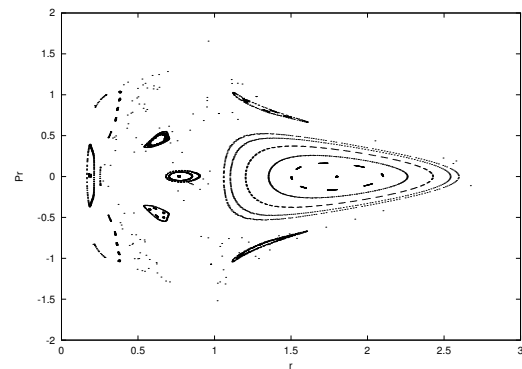


Figura 4.14: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 1.75$

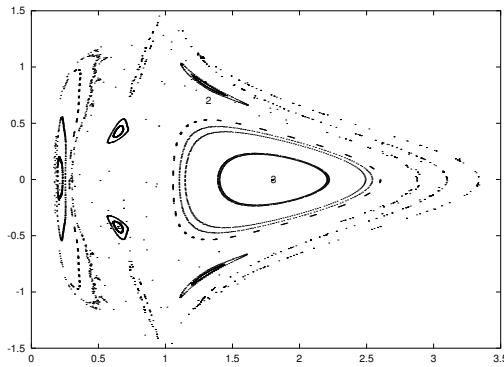


Figura 4.15: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 0.2$

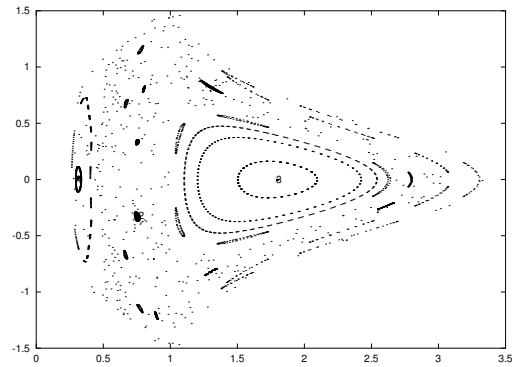


Figura 4.16: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 0.3$

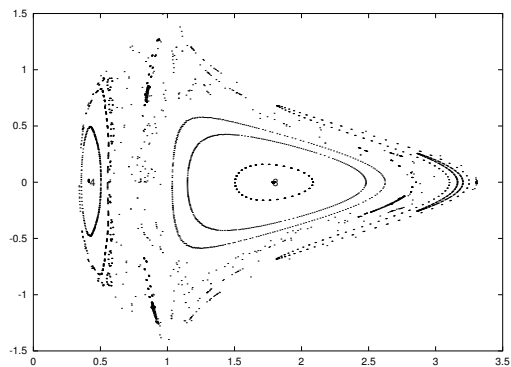


Figura 4.17: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 0.4$

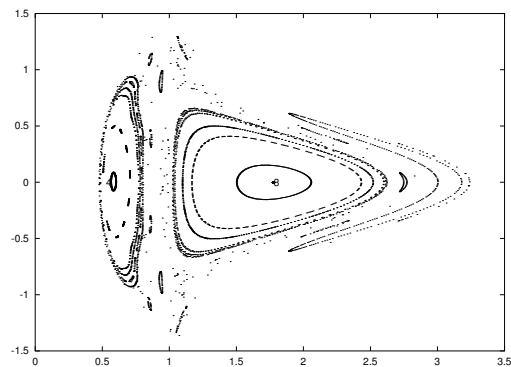


Figura 4.18: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 0.058$

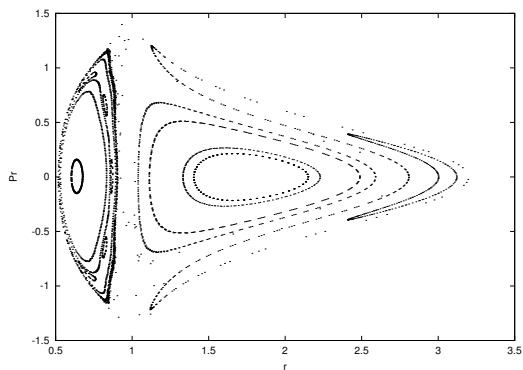


Figura 4.19: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 0.63$

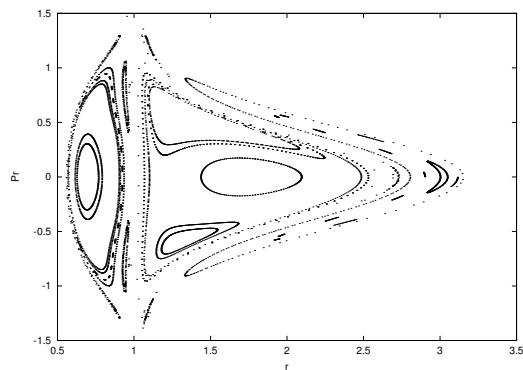


Figura 4.20: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 0.7$

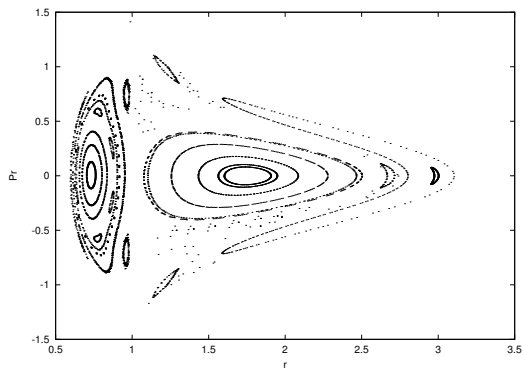


Figura 4.21: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 0.75$

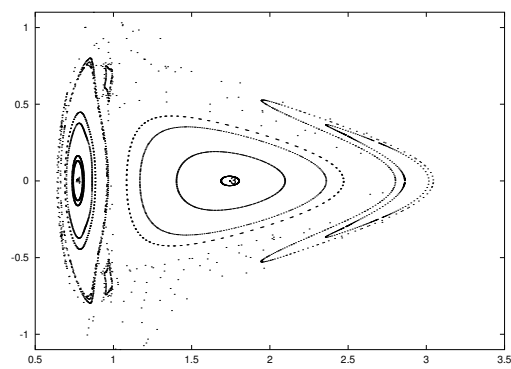


Figura 4.22: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 0.8$

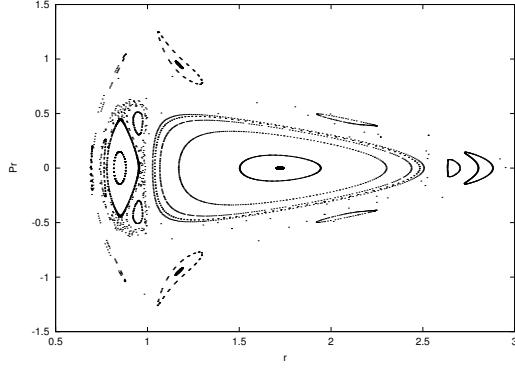


Figura 4.23: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 0.9$

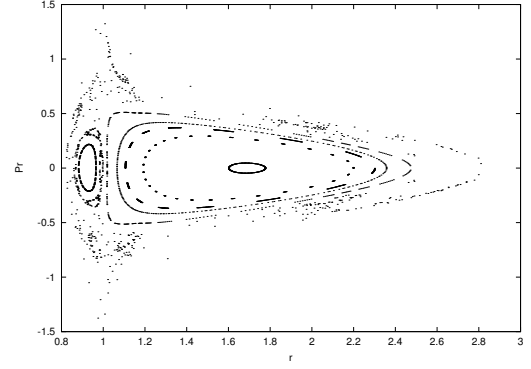


Figura 4.24: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 1.0$

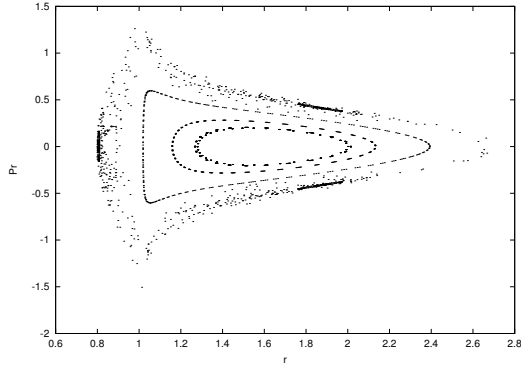


Figura 4.25: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 1.1$

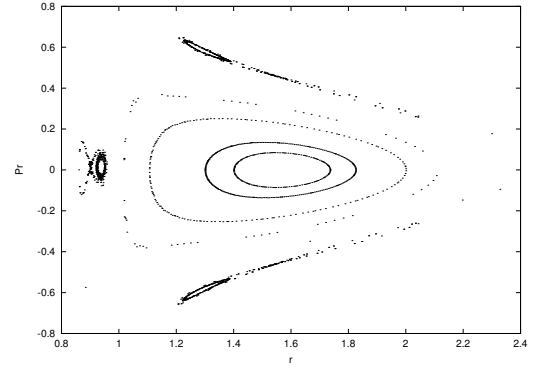


Figura 4.26: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 1.2$

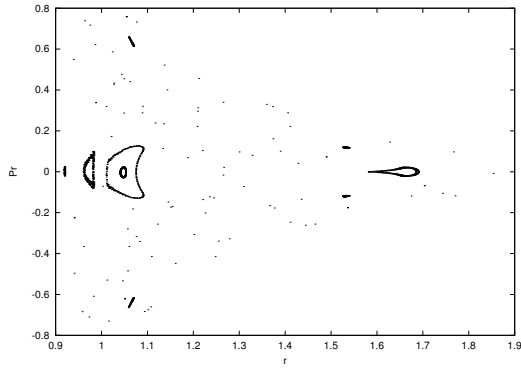


Figura 4.27: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 1.4$

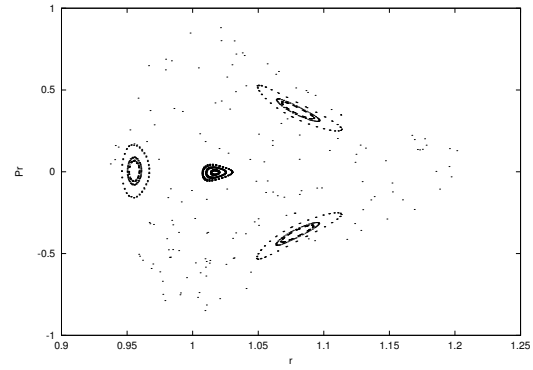


Figura 4.28: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 1.5$

4.3 Dinâmica para momento angular 0.2

Agora estudaremos a dinâmica em um momento angular. Escolhemos um momento de tal forma que com a variação do do nível de energia, pudéssemos ter presente as principais estruturas que se fazem presentes em todos os níveis estudados.

Fixamos o momento em 0.2 e estamos estudando o momento na o intervalo $E = 0.1$ até $E = 1.6$. Vejamos nas figuras 4.29 a 4.42 abaixo as seções que representam esta evolução. Dinâmica para o nível de Energia -0.3 .

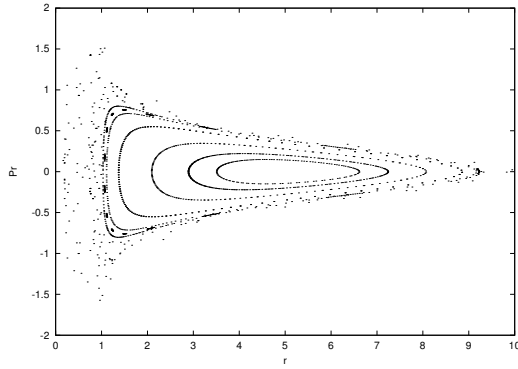


Figura 4.29: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.1$ e momento angular $c = 0.2$

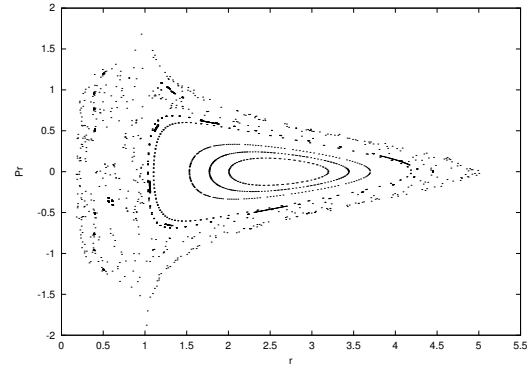


Figura 4.30: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.2$ e momento angular $c = 0.2$

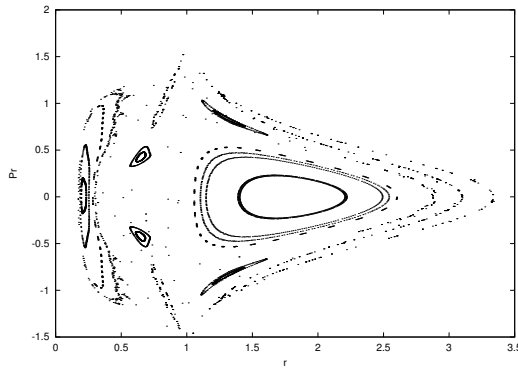


Figura 4.31: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.3$ e momento angular $c = 0.2$

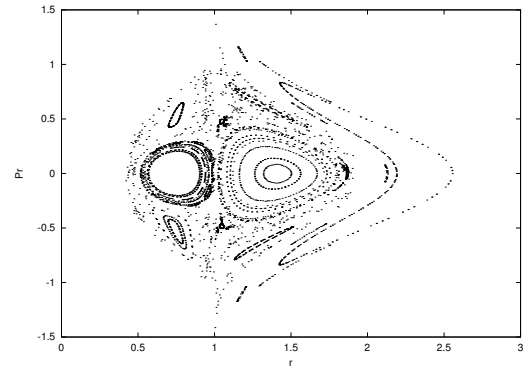


Figura 4.32: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.4$ e momento angular $c = 0.2$

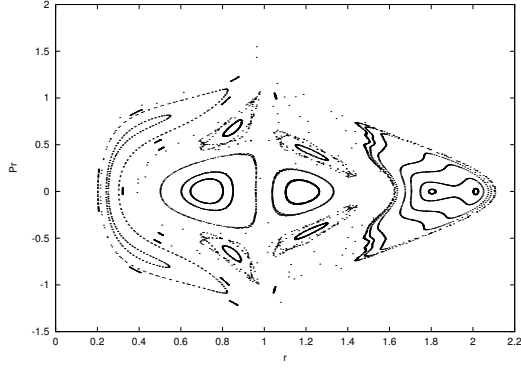


Figura 4.33: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.5$ e momento angular $c = 0.2$

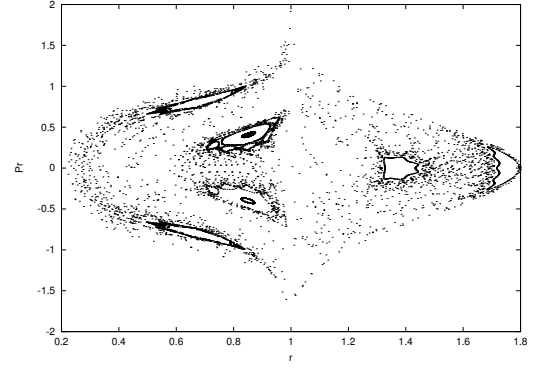


Figura 4.34: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.6$ e momento angular $c = 0.2$

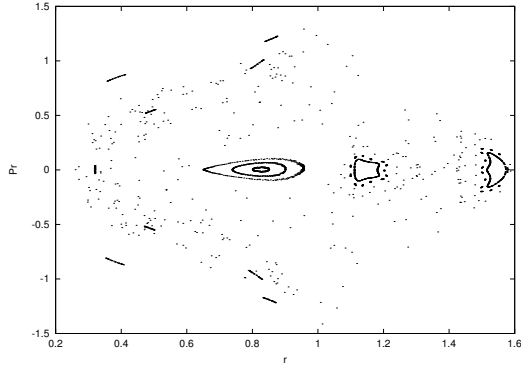


Figura 4.35: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.7$ e momento angular $c = 0.2$

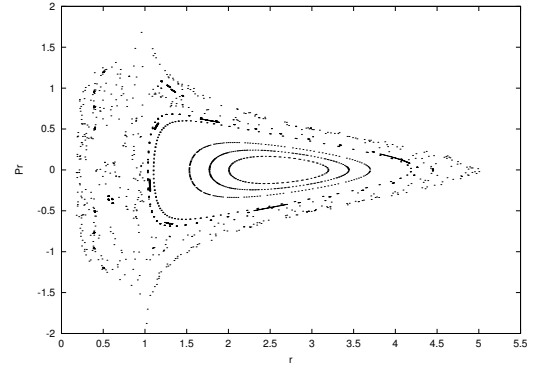


Figura 4.36: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.8$ e momento angular $c = 0.2$

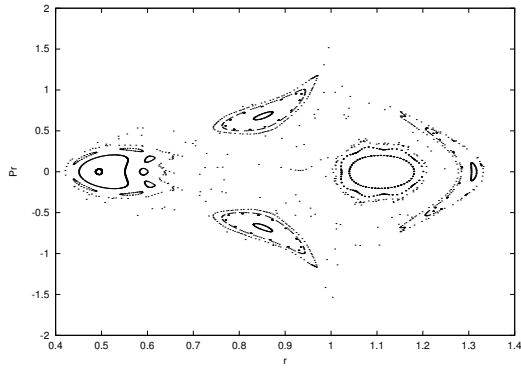


Figura 4.37: Seção de Poincaré com Energia $E = -0.9$ e momento angular $c = 0.2$

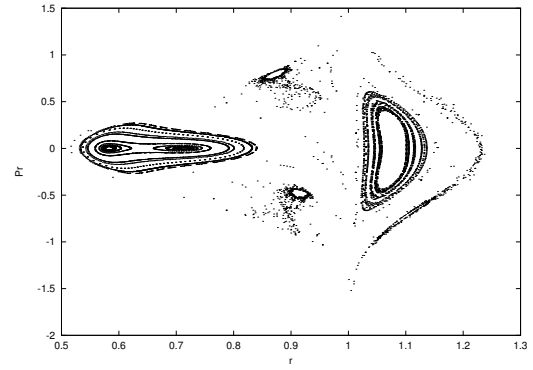


Figura 4.38: Seção de Poincaré com Energia $E = -1.0$ e momento angular $c = 0.2$

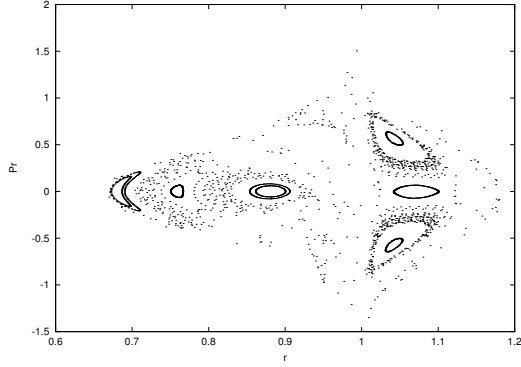


Figura 4.39: Seção de Poincaré com Energia $E = -1.1$ e momento angular $c = 0.2$

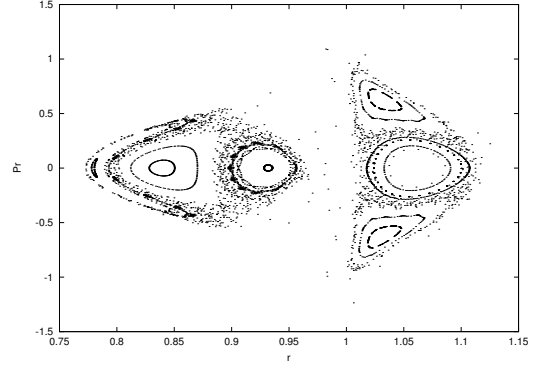


Figura 4.40: Seção de Poincaré com Energia $E = -1.2$ e momento angular $c = 0.2$

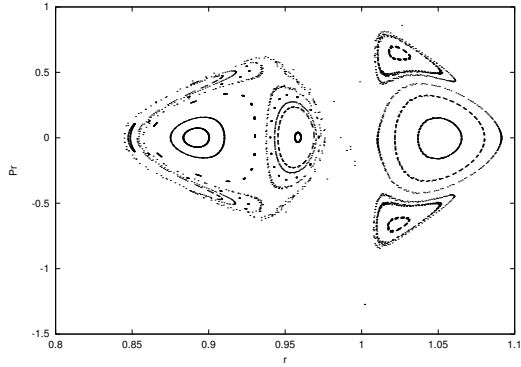


Figura 4.41: Seção de Poincaré com Energia $E = -1.3$ e momento angular $c = 0.2$

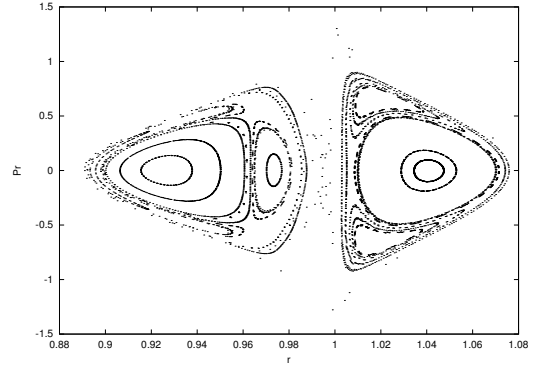


Figura 4.42: Seção de Poincaré com Energia $E = -1.4$ e momento angular $c = 0.2$

Através das seções de Poincaré podemos obter muitas informações sobre a dinâmica da partícula.

Analisando as seções com energia fixa em $E = -0.3$ podemos observar, com o crescimento do momento angular, que existem órbitas periódicas no interior e no exterior do anel. Também podemos perceber que existe uma família de órbitas periódicas que se mantém presente em todas estas seções. Corresponde a órbita periódica de número 3 na figura 4.13. Estudaremos algumas órbitas periódicas no próximo capítulo.

Na próxima seção provaremos certas propriedades que conjecturamos a respeito da dinâmica, observando as seções de Poincaré.

4.4 Alguns resultados na Dinâmica da Partícula

Ao estudar as seções de Poincaré do problema do fio circular, nos podemos perceber a ocorrência de algumas propriedades na dinâmica.

Vejamos algumas delas

Proposição 4.4.1 *Se o momento angular C é diferente de zero, então $r \neq 0$. Isto significa que a partícula não passa pelo eixo z .*

Demonstração A energia do problema é dada por

$$E = H(r, z, P_r, P_z, c) = \frac{P_r^2}{2} + \frac{P_z^2}{2} + \frac{C}{2r^2} - \frac{2}{\pi\rho_2}K(k), \quad (4.16)$$

então temos que

$$C^2 = 2r^2 \left(E - \frac{P_r^2 + P_z^2}{2} + \frac{2}{\pi\rho_2}K(k) \right). \quad (4.17)$$

Portanto se $C \neq 0$ então $r \neq 0$. Então como acabamos de ver se $C \neq 0$ então a partícula não passa pela origem. ■

Proposição 4.4.2 *Se $E \ll 0$ então r e z são limitados.*

Demonstração Seja $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. Iremos mostrar que se $R \rightarrow \infty$ então $E \geq 0$.

Se $R \rightarrow \infty$ então $\rho_1 \sim \rho_2$ (distância mínima e máxima em relação ao fio). Isso significa que $1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} \rightarrow 0$. Desta forma, $K(k) \simeq K(0) = \frac{\pi}{2}$.

Agora observe que

$$E = H(r, z, P_r, P_z, c) = \frac{P_r^2}{2} + \frac{P_z^2}{2} + \frac{c}{2r^2} - \frac{2}{\pi\rho_2}K(k), \quad (4.18)$$

onde

$$k = \sqrt{1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}}. \quad (4.19)$$

Como $R = \sqrt{r^2 + z^2} \longrightarrow \infty$ isto significa que $\rho_2 = \sqrt{(r+1)^2 + z^2} \longrightarrow \infty$ Então

$$\frac{2}{\pi\rho_2}K(k) \longrightarrow 0. \quad (4.20)$$

Portanto, pela equação 4.18 temos que $E \geq 0$. ■

Note que, $R \longrightarrow \infty$, significa que R pode tender ao infinito só direção r ou na direção z . Mas de qualquer forma todos os resultados acima são verdadeiros.

Proposição 4.4.3 *Se $E \ll 0$ então a partícula se aproxima do fio circular. Ou seja a distância mínima $\rho_1 \longrightarrow 0$ e a distância máxima $\rho_2 \longrightarrow 1$.*

Demonstração A energia é dada por

$$E = H(r, z, P_r, P_z, c) = \frac{P_r^2}{2} + \frac{P_z^2}{2} + \frac{c}{2r^2} - \frac{2}{\pi\rho_2}K(k) \quad (4.21)$$

Se $E \ll 0$ então teremos que

$$\frac{2}{\pi\rho_2}K(k) \gg 0$$

A expressão acima determina que $k \longrightarrow 1$. Mas $k = \sqrt{1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}}$. Decorre que

$$k \sim 1 \implies \sqrt{1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}} \sim 1 \implies \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_2^2} \sim 1 \longrightarrow \rho_2^2 - \rho_1^2 \sim \rho_2^2 \longrightarrow \rho_1^2 \sim 0$$

Como $\rho_1 = \sqrt{(r-1)^2 + z^2}$ segue que $(r-1) \longrightarrow 0$ e $z \longrightarrow 0$. ■

Capítulo 5

Estudo das Órbitas Periódicas

Nosso objetivo neste capítulo é estudar famílias de órbitas periódicas da dinâmica do fio circular.

Estudaremos órbitas periódicas estáveis na configuração rz . Usaremos as seções de Poincaré do capítulo 4 para identificar as principais órbitas periódicas. Sabemos que as seções de Poincaré preservam as propriedades da dinâmica. Assim, órbitas estáveis correspondem a pontos periódicos da seção de Poincaré. Já os pontos instáveis, aqueles correspondentes a órbitas periódicas instáveis, raramente são distinguíveis dos caóticos, exceto por acaso como podemos ver na figura 4.26 e 4.38. Nestas figuras pode-se distinguir grosseiramente os contornos da separatriz do tipo oito.

Estamos com dois parâmetros a estudar. Queremos determinar a configuração $C - \tau$ e $E - \tau$. Fixamos um nível de energia, analisamos o gráfico momento angular versus período das famílias de órbitas periódicas $(C - \tau)$. De forma semelhante, para um momento angular fixo, analisamos o gráfico Energia versus período de cada família de órbita periódica.

5.0.1 Estudo da configuração $C - \tau$

Estudaremos a dinâmica através das seções analisando a situação em que fixados um nível de energia acompanhamos a dinâmica com a variação no momento angular. Fixaremos

o nível de energia $E = -0.3$ e permitimos a variação do momento angular entre $C = 0$ e $C = 1.5$.

Observe o gráfico $C \times \tau$ de famílias de órbitas periódicas.

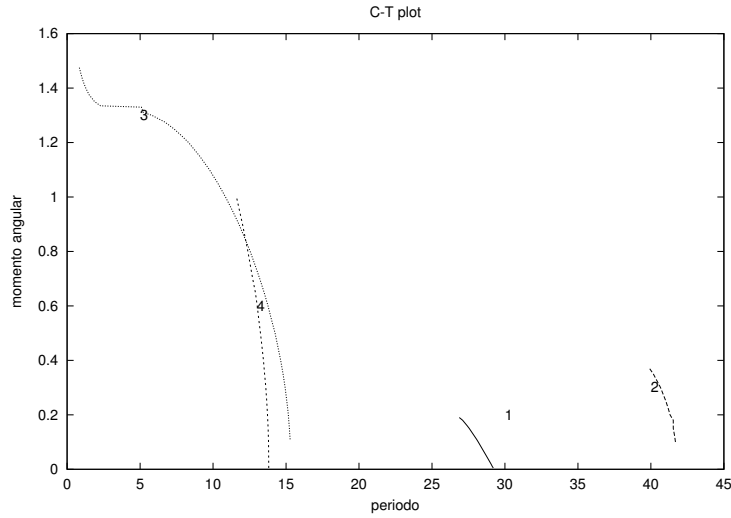


Figura 5.1: $C - \tau$ plot de famílias de órbitas periódicas

A família de órbitas periódicas correspondente ao número 1 no gráfico acima, ocorre para momento angular entre $c = 0.005$ e $c = 0.19$,

Estas órbitas ocorrem para uma pequena faixa de momento angular, e são órbitas com período grande, entre $\tau = 26.873$ até $\tau = 29.195$. Na figura 5.2 podemos observar que estas órbitas estão bifurcando a medida que se aproximam do anel e com o aumento do momento angular. Nas figuras 5.3 e 5.4 temos a representação de duas destas órbitas no espaço tridimensional.

Outra propriedade observada na família de órbitas periódicas 1, conforme a pela figura 5.2, que elas são simétricas em relação ao eixo z . Esta órbita aparece como ponto periódico na seção de poincaré da figura 4.13 indica pelo número 1.

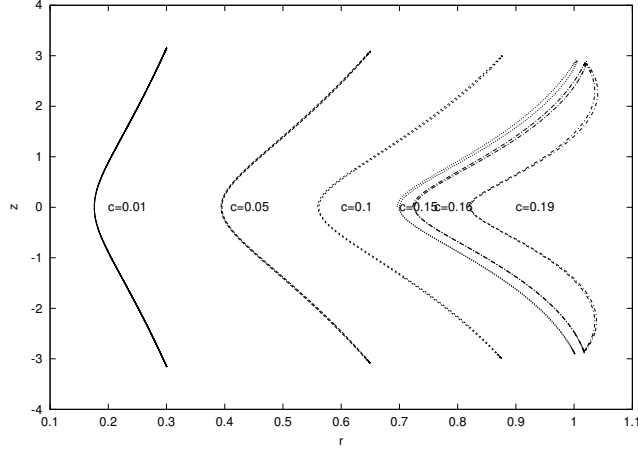


Figura 5.2: A família 1 de órbitas periódicas da configuração $C - \tau$

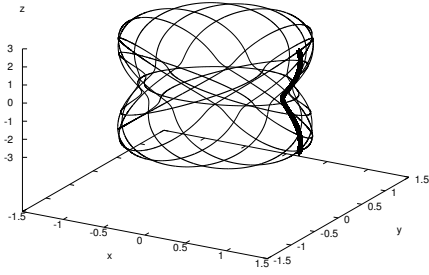


Figura 5.3: Órbita periódica no plano tridimensional em torno do anel centrado na origem com $E = -0.3$ e momento angular $c = 1.9$ com período $\tau = 26.873$

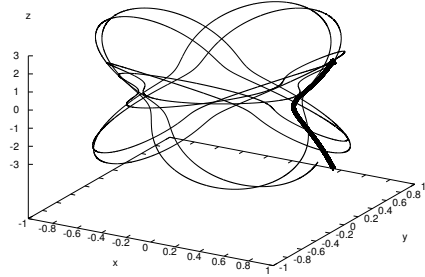


Figura 5.4: Órbita periódica no plano tridimensional em torno do anel centrado na origem com $E = -0.3$ e momento angular $c = 0.11$ com período $\tau = 28.06$

A segunda família de órbitas periódicas, correspondentes a família 2 do gráfico da configuração $C - \tau$, aparece para momentos angulares pequenos na estreita faixa de $c = 0.1$ a $c = 0.37$. Mas esta família é a que apresenta maiores períodos, entre $\tau = 39.912$ e $\tau = 41.683$. Esta família de órbitas têm a propriedade de passa ver pelo interior e exterior do anel chegando quase ao centro do mesmo (para observar este fato verifique as seções de Poincaré das figuras 4.13 e 4.15).

Outra característica desta órbitas é que elas não apresentam simetria. Na figuras 5.5 plotamos algumas órbitas desta família na configuração rz .

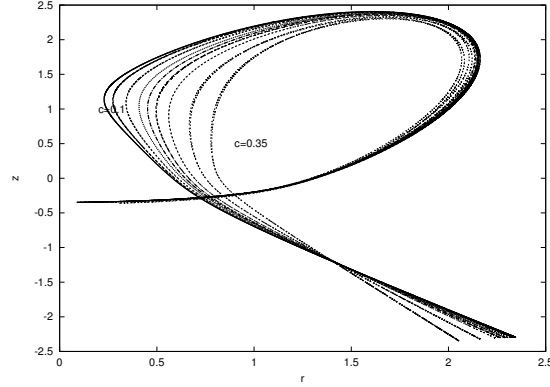


Figura 5.5: A família 2 de órbitas periódicas da configuração $C - \tau$

A terceira família de órbitas correspondente à família 3 da configuração $C - \tau$, apresenta variação de momento angular entre $c = 0.05$ até $C = 1.5$ e período variando de $\tau = 0.7$ a $\tau = 15.279$.

Estas órbitas também são simétricas em relação ao eixo z na configuração rz , como podemos ver na figura 5.6. Esta família, como podemos ver, está presente em toda faixa do momento angular estudado ($c = 0.05$ até $C = 1.5$). Na figura 5.7 apresentamos uma destas órbitas no plano tridimensional.

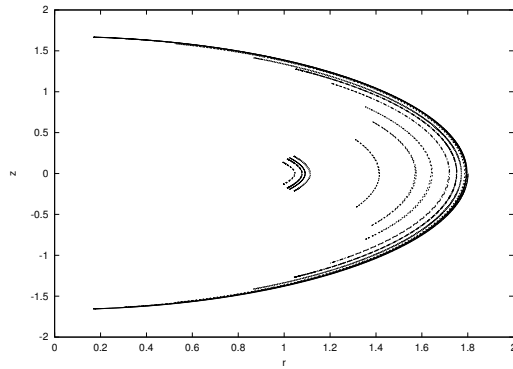


Figura 5.6: Família de órbitas periódicas, correspondente a família 3 da configuração $C - \tau$

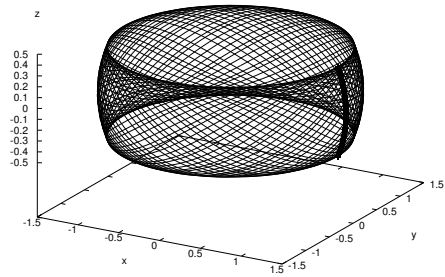


Figura 5.7: Órbita periódica no plano tridimensional em torno do anel centrado na origem com $E = -0.3$ e momento angular $c = 1.3$ com período $\tau = 5.8$

A Quarta família determinada é a família correspondente a família 4 da configuração

$C - \tau$. Temos aqui, uma família quase vertical. Considerando o plano rz da figura 5.8 observamos que as órbitas são simétricas em relação ao eixo z . O período está compreendido na faixa de $\tau = 11$ e $\tau = 13.817$. Apresentamos na figura 5.8 algumas órbitas desta família e na figura 5.9 uma destas órbitas no espaço tridimensional.

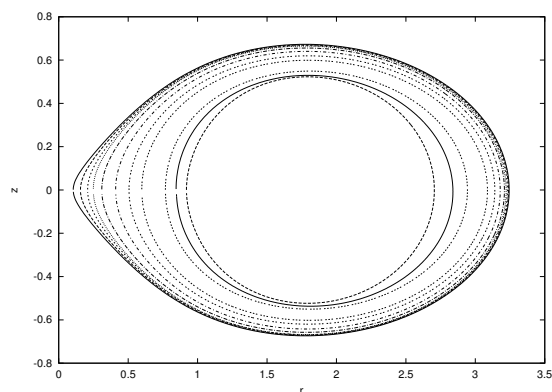


Figura 5.8: Família de órbitas periódicas, correspondente a família 4 da configuração $C - \tau$

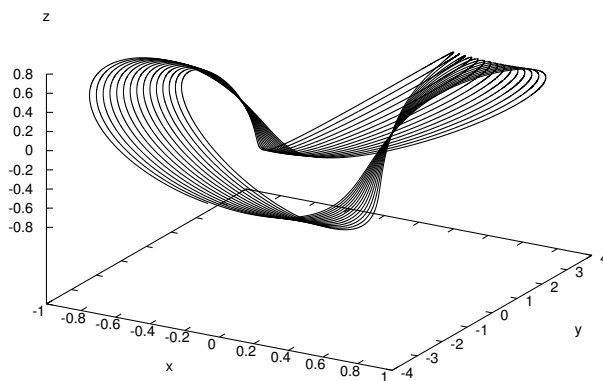


Figura 5.9: Òrbita periódica no espaço tridimensional para uma órbita da família 4

Agora se observarmos a figura 5.10, onde plotamos as famílias de órbitas periódicas no plano rc , ou seja, este gráfico nos informa o momento angular e a distância r da órbita.

Podemos observar que as famílias 1, 2, e 4 aparecem no interior do anel, e a família 3 está no exterior do anel (se $r = 1$ a órbita estaria em colisão com o anel). Podemos observar, pela figura 5.10, que a família 4 com o aumento do momento angular, se aproxima do anel ($r = 1$). Lembramos também que com o aumento do momento angular, o período diminui, conforme figura 5.1.

A família 4 também se aproxima do anel com o aumento do momento angular. Este fato já era observado, conforme figura 5.8. Também esta família a medida que se aproxima do anel (para valores de momentos angulares c grandes) diminui consideravelmente o seu período τ .

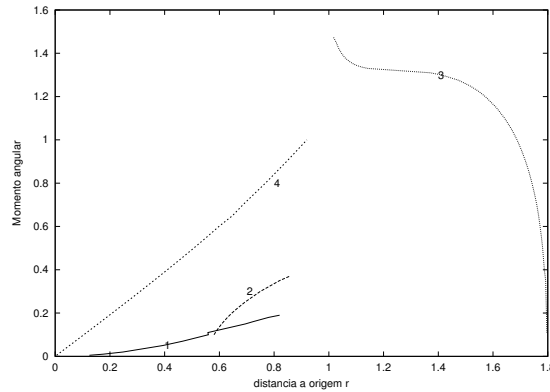


Figura 5.10: Representação das famílias de órbitas periódicas no plano rc (momento angular c versus distância a origem r)

5.1 Estudo da configuração $E - \tau$

Estudamos agora as famílias de órbitas periódicas na configuração $E - \tau$. Queremos estudar as órbitas periódicas para um momento angular c fixo (no nosso caso $c = 0.2$) com o nível de energia variando. Consideramos então o gráfico $E\tau$. Na figura 5.11 apresentamos algumas destas famílias de órbitas periódicas.

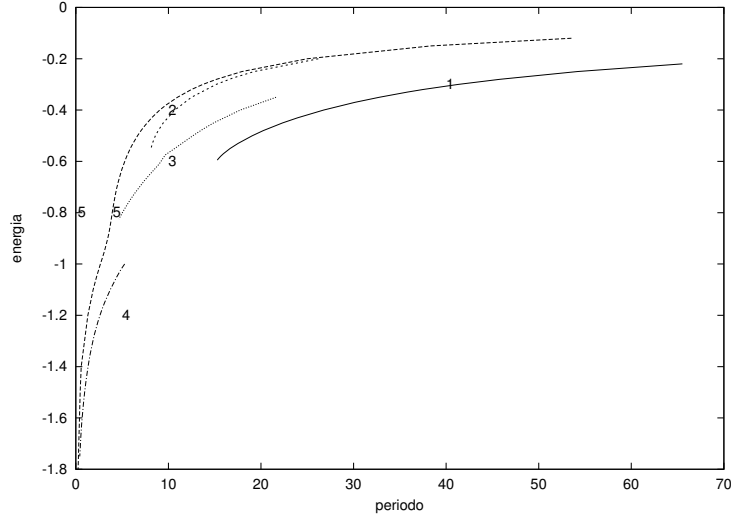


Figura 5.11: $E - \tau$ plot de famílias de órbitas periódicas

Consideremos a família 1 da figura acima. Esta família de órbitas ocorre para níveis de energia baixos, entre $E = -0.2$ a $E = -0.6$, mas apresenta grande variação no período (entre 17.52 a 65.52). Estas órbitas não apresentam simetria em relação ao eixo z como podemos ver pela figura 5.12. As figuras 5.12 e 5.13 abaixo mostram esta família no espaço de fases e uma órbita no espaço tridimensional, respectivamente.

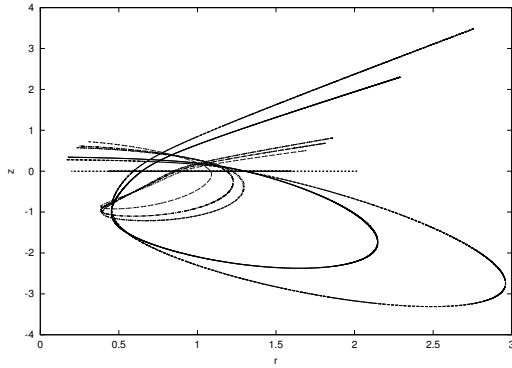


Figura 5.12: Família de órbitas periódicas, correspondente a família 1 da configuração $E - \tau$

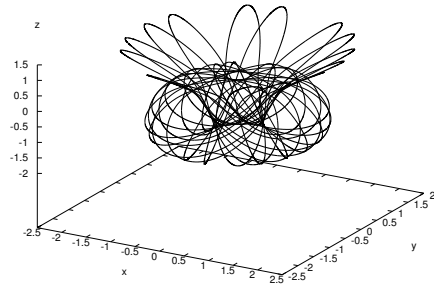


Figura 5.13: Órbita periódica no plano tridimensional em torno do anel centrado na origem com $E = -0.43$ e momento angular $c = 0.2$ com período $\tau = 26.776$

Vejamos a família 2 da figura 5.11. Esta família aparece para níveis de energia baixos,

compreendidos entre $E = 0.2$ e $E = 0.565$. Estas órbitas periódicas estão afastada do anel, mas a medida que aumenta o nível de energia, elas se aproximam do anel. Temos novamente o caso de uma família que apresenta simetria em relação ao eixo z , como podemos ver na figura 5.14. As figuras 5.14 e 5.15 nos mostram algumas órbitas desta família 2 e uma representação tridimensional, respectivamente.

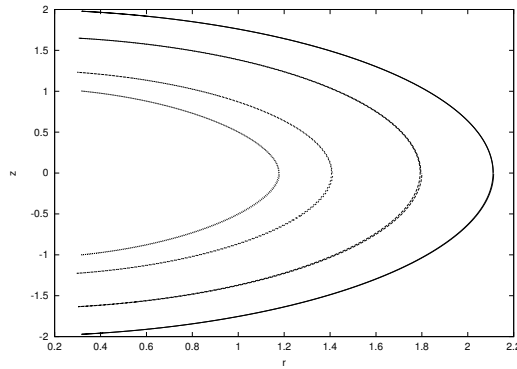


Figura 5.14: Família de órbitas periódicas, correspondente a família 2 da configuração $E - \tau$

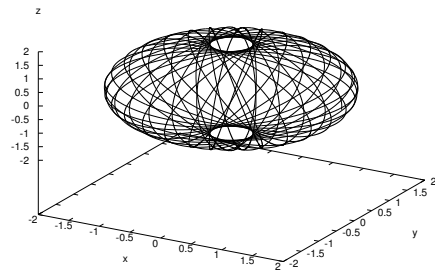


Figura 5.15: Órbita periódica no plano tridimensional em torno do anel centrado na origem com $E = -0.3$ e momento angular $c = 0.2$ com período $\tau = 15.156$

A família tres da figura 5.11 está presente para energia na faixa $E = -0.34$ e $E = -0.5$. Consiste em uma família que apresenta simetria em relação ao eixo z conforme figura 5.16. Veja as características da família 3 da figura 5.16, e uma representação em $\mathbb{R}^3$ conforme figura 5.17.

A Família 4 corresponde a órbitas que estão presente somente par níveis de energia muito negativos, entre $E = -1.0$ até $E = -1.7$. Apresentam períodos pequenos, na faixa de $\tau = 4.9$ e 0.426 (correspondente ao período do menor nível de energia estudado). Também são órbitas que apresentam simetria em relação ao eixo z . Vejamos estas órbitas no espaço de fases (figura 5.18) e um representante no espaço $\mathbb{R}^3$ (figura 5.19).

Podemos visualizar estas órbitas periódicas na configuração Er , ou seja, representar estas órbitas pela energia versus sua distância a origem r . podemos observar pela figura 5.20 que todas as famílias se aproximam do anel ($r = 1$).

Todas as famílias apresentadas acima, são famílias de órbitas periódicas estáveis. Mas

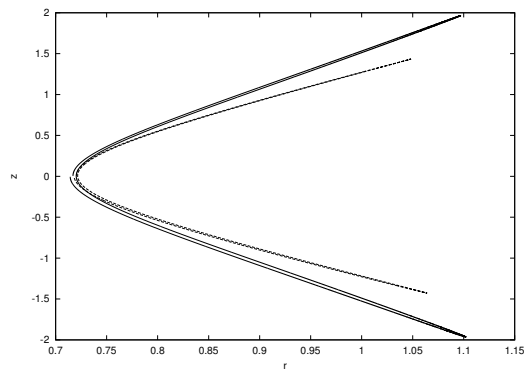


Figura 5.16: Família de órbitas periódicas, correspondente a família 3 da configuração $E - \tau$

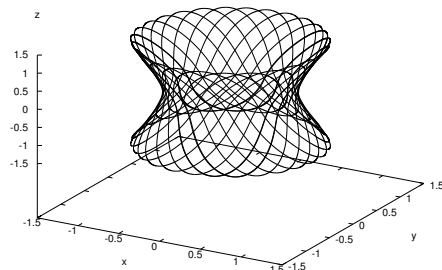


Figura 5.17: Órbita periódica no plano tridimensional com $E = -0.5$ e momento angular $c = 0.2$ com período $\tau = 12.638$

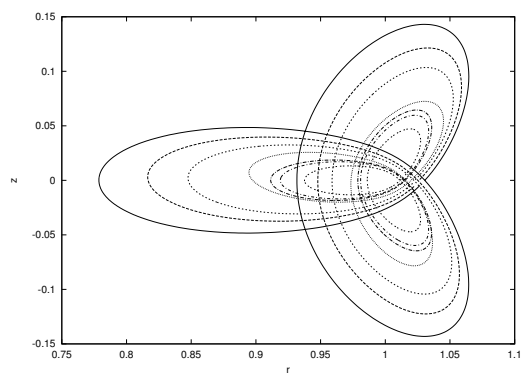


Figura 5.18: Família de órbitas periódicas, correspondente a família 4 da configuração $E - \tau$

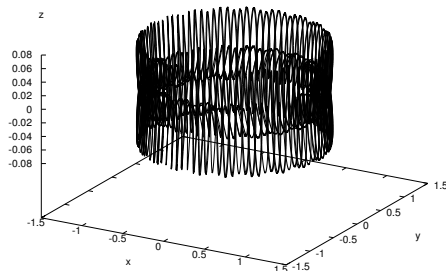


Figura 5.19: Órbita periódica no plano tridimensional em torno do anel centrado na origem com $E = -1.4$ e momento angular $c = 0.2$ com período $\tau = 1.317$

também determinamos uma família de órbitas instáveis. Esta família aparece para níveis de energia entre $E = -0.5$ e $E = -0.725$ e possuem períodos compreendidos entre $\tau = 4.469$ e $\tau = 6.665$. Vejamos na figura 5.21 esta família e nas figuras 5.22 e 5.23 o ponto periódico corresponde a esta órbita instável.

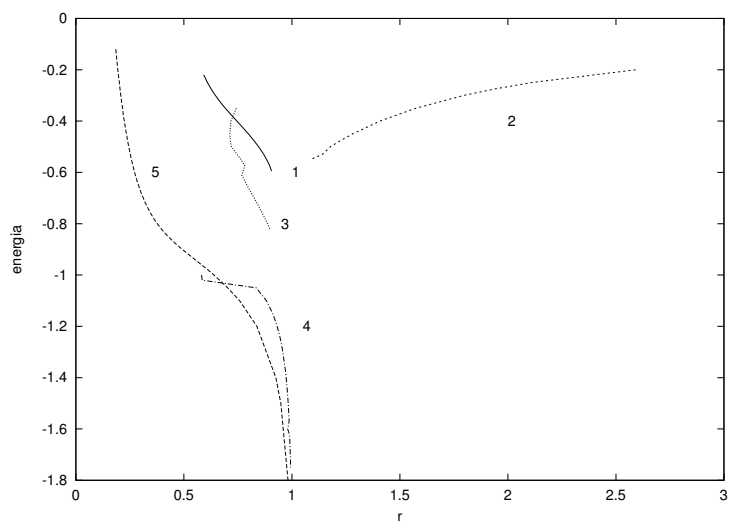


Figura 5.20: Representação das órbitas periódicas no plano Er

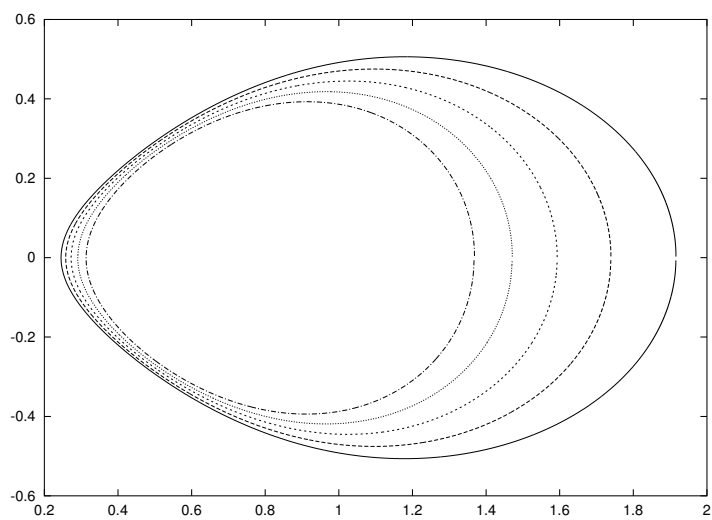


Figura 5.21: Família de órbitas periódicas instáveis

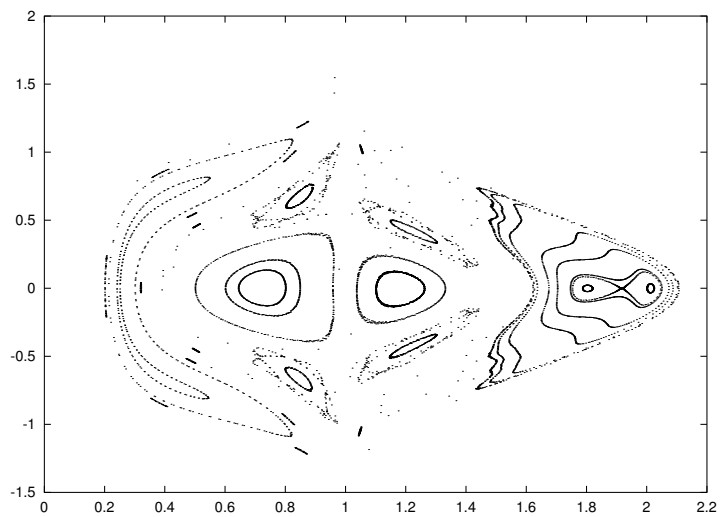


Figura 5.22: Seção de Poincaré correspondente ao nível de energia $E = -0.5$ e momento angular $c = 0.2$

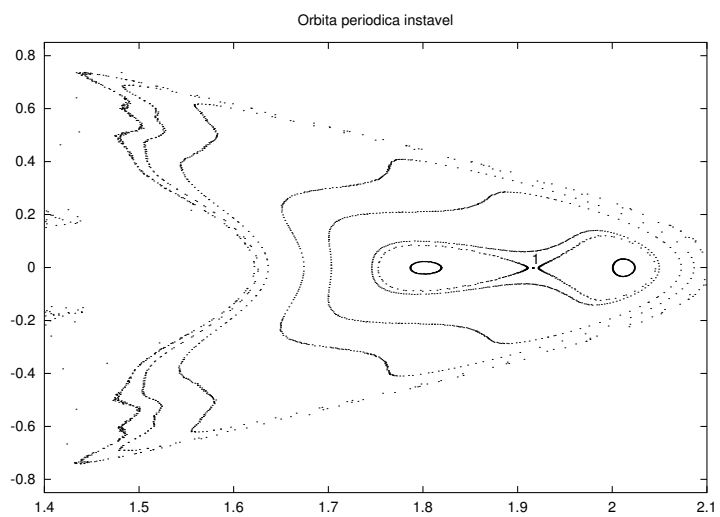


Figura 5.23: Ampliação da região da figura 5.22 onde está presente o ponto periódico 1 correspondente a órbita periódica instável

Bibliografia

- [1] Abramowitz, M. e Stegun I, A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications(1972).
- [2] Aguiar, M.A.M., Baranger M., e Davies, K.T.R., *Bifurcations of Periodic trajectories in Non-integrable hamiltonian Systems With Two Degrees of Freedom: Numerical and Analytical Results*, Ann Phys 180, pp 167-203(1987).
- [3] Arnold, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag(1978).
- [4] Azevêdo, C., *Dinâmica do Fio Circular Homogêneo*, Tese de doutorado, Departamento de Matemática ,UFPE(2003).
- [5] Boccaletti, D. e Pucacco, G., *Theory of Orbits*, Vol. 1, Springer-Verlag(1999).
- [6] Battin R.H., *An Introduction to the mathematics Methods of astrodynamics*, AIAA Education Series, New York (1987).
- [7] Kellog, O.D, *Foundations of Potential Theory*, Dover Publications(1954).
- [8] Hénon M., *On the numerical computation of Poincaré maps*, Physica 5D pp412-414(1982).
- [9] Mac Millan W. D., *Theoretical Mechanics: The Theory of the Potential*, Dover Publications(1958).
- [10] Whittaker, E.T and Watson, G.N *A course in Modern analysis*, Cambridge University Press(1990)