

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Doutorado em Matemática

**Transformações de Cremona
definidas por monômios**

BÁRBARA COSTA DA SILVA
Tese de Doutorado

Recife, 2011.

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

BÁRBARA COSTA DA SILVA

Transformações de Cremona definidas por monômios

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Orientador: Aron Simis

Recife

17 de março de 2011

Catálogo na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Silva, Bárbara Costa da
Transformações de Cremona definidas por monômios /
Bárbara Costa da Silva - Recife: O Autor, 2011.
viii, 51 folhas

Orientador: Aron Simis.
Tese (doutorado) Universidade Federal de Pernambuco.
CCEN. Matemática, 2011.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Álgebra. 2. Álgebra comutativa. I. Simis, Aron
(orientador). II. Título.

512

CDD (22. ed.)

MEI2011 – 034

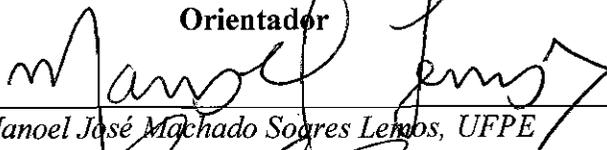
Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado:

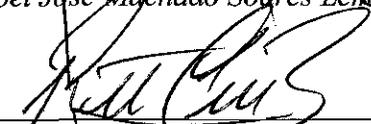


Aron Simis, UFPE

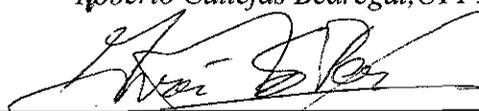
Orientador



Manoel José Machado Soares Lemos, UFPE



Roberto Callejas Bedregal, UFPB



Ivan Edgardo Pan Perez, Universidad de la Republica



Abramo Hejz, UFF

**TRANSFORMAÇÕES DE CREMONA DEFINIDAS
POR MONÔMIOS**

Por

Bárbara Costa da Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Março – 2011

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me dar forças nos momentos de fraqueza.

A minha mãe Sônia Maria Costa da Silva e minha irmã Claudia Ive Costa da Silva, por vários motivos que não vou explicitá-los aqui, pois gastaria muitas páginas.

A meu pai Ruy Goes da Silva pelo apoio para que continuasse meus estudos.

A meu namorado Marcelo Pedro dos Santos, pela amizade, companheirismo e compreensão.

Ao professor Aron Simis por sua orientação, dedicação e disponibilidade.

À CAPES e ao CNPq, pelo auxílio financeiro durante a preparação desta tese.

A todos meus colegas do dmat-UFPE que contribuíram, direta ou indiretamente, para realização deste trabalho.

A todos os meus amigos que torceram por mim, compartilharam comigo seu conhecimento e sua internet.

A todos os professores e funcionários do Dmat-UFPE que, direta ou indiretamente, tiveram um papel importante na minha formação.

RESUMO

Nesta tese abordamos as seguintes questões: (a) Classificação das aplicações de Cremona monomial de grau 2 em qualquer número de variáveis; (b) A estrutura da aplicação inversa de uma aplicação de Cremona monomial de grau 2; e (c) O papel das bases de Hilbert em aplicações de Cremona monomial de grau arbitrário. Introduzimos uma forma normal de uma aplicação de Cremona monomial de grau 2 baseada na estrutura de um grafo cujas arestas correspondem aos monômios que definem a aplicação. Obtemos o formato explícito da aplicação inversa, bem como os invariantes numéricos associados, em termos da natureza do grafo correspondente. Os resultados são fortemente baseados na versão combinatória de birracionalidade para aplicações racionais definidas por monômios introduzida por A. Simis e R. Villarreal. Como aplicação, respondemos afirmativamente a questões propostas por F. Russo e R. Villarreal.

PALAVRAS-CHAVE

Cremona Monômio Base de Hilbert Tipo linear Normalidade

ABSTRACT

Cremona maps defined by monomials of degree 2 are thoroughly analyzed and classified via integer arithmetic and graph combinatorics. In particular, the structure of the inverse map to such a monomial Cremona map is made very explicit as is the degree of its monomial defining coordinates. One unveils a close relationship binding together the normality of a monomial ideal, monomial Cremona maps and Hilbert bases of polyhedral cones. The latter suggests that facets of monomial Cremona theory may be **NP**-hard.

KEYWORDS

Cremona Monomial Hilbert bases Linear type Normality

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Noções incidentes de álgebra comutativa	5
1.1.1 Álgebras de Rees e normalidade	5
1.1.2 Ideais de tipo linear	7
1.2 Generalidades sobre aplicações racionais	7
1.3 Transformações de Cremona monomiais em termos de aritmética inteira . .	9
2 Transformações de Cremona monomiais de grau 2	14
2.1 Forma normal em grau 2	14
2.2 Quando é a aplicação inversa de tipo linear?	17
2.3 O grau da aplicação inversa	19
2.4 p -involuções de grau 2	28
3 Resultados em grau arbitrário	32
3.1 Complemento dual generalizado	32
3.2 Aplicações de Cremona apócrifas	35
3.3 Relação com bases de Hilbert	37

4 Apêndice	44
4.1 Grafos	44
4.2 Bases de Hilbert	46
Bibliografia	50

Introdução

A expressão “combinatória birracional” foi primeiramente usada em [14] para denotar a teoria das aplicações racionais $\mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$ definidas por monômios, em característica arbitrária. Conforme enfatizado naquele trabalho, o objetivo era refazer a teoria *ab initio*, pondo em relevo os dados oriundos da teoria combinatória dos monômios, passando ao largo do cacoete da teoria clássica em característica zero, embora inspirando-se nesta belíssima parte da geometria algébrica.

Um dos desafios desta abordagem era determinar a aplicação inversa de uma aplicação birracional monomial por um método puramente combinatório. Como a inversa é também determinada por monômios, como provado em *ibid.*, a questão fazia sentido. Esta questão foi recentemente resolvida em [15]. Uma das peculiaridades da teoria é que, em geral, se os monômios dados são livres de quadrados, a aplicação inversa não é definida por monômios livres de quadrados. Isto torna a classificação e a estrutura do próprio grupo de Cremona monomial, de grande importância.

Neste trabalho seguimos estas idéias, abordando as seguintes questões:

- Classificação das aplicações de Cremona monomial de grau 2 em qualquer número de variáveis
- A estrutura da aplicação inversa de uma aplicação de Cremona monomial de grau 2
- O papel das bases de Hilbert em aplicações de Cremona monomial de grau arbitrário.

As primeiras duas questões dependem de uma certa forma normal para a chamada *matriz-log* de um conjunto de monômios de grau 2. Esta última desempenha um papel fundamental no critério combinatório obtido nas referências anteriores. Nesta tese introduzimos uma forma normal de uma aplicação de Cremona monomial de grau 2 calcada na

estrutura de um grafo cujas arestas correspondem aos monômios que definem a aplicação. Uma motivação é obter o formato explícito da aplicação inversa, bem como os invariantes numéricos associados, em termos da natureza do grafo correspondente. Isto é efetivado em nosso principal resultado (Teorema 2.3.1)

Em adição, fomos motivados por uma questão enunciada por Francesco Russo, através de comunicação oral, relativa à descrição explícita de uma aplicação de Cremona de grau 2 cuja inversa é ainda de grau 2 (chamadas de aplicações de Cremona de tipo $(2, 2)$). Nesta parte, como resposta a esta questão, fomos capazes de caracterizar estas aplicações de Cremona monomial de tipo $(2, 2)$ em termos das chamadas involuções e da natureza do grafo correspondente.

Em que pese a grande simplicidade combinatória de que se revestem os critérios de birracionalidade monomial, permitindo um cálculo efetivo (ver [15, Seção 4]) – embora evitado de aspectos NP-*hard* – seu uso prático na classificação teórica está longe de ser óbvio, geralmente requerendo um grau de engenhosidade. Havendo intercambiado as ferramentas geométricas pela álgebra linear dos inteiros, paga-se um preço no sentido de requerer uma precisão adicional. Esse esforço será comum através dos argumentos dos principais resultados.

Agora descreveremos em maior detalhe o conteúdo de cada capítulo.

O primeiro capítulo revê, minimamente, a terminologia e alguns resultados básicos sobre a álgebra de Rees e sua normalidade, ideais de tipo linear, aplicações racionais e combinatória birracional. O objetivo desta parte é permitir uma micro-familiarização com a linguagem dos enunciados dos resultados subsequentes, evitando remeter o leitor frequentemente ao material dos apêndices.

O estilo deste capítulo é de rápidas pinceladas, embora nos detenhamos um pouco mais no material sobre aplicações racionais e a contrapartida combinatória no caso monomial. Desta maneira, o principal critério de birracionalidade monomial é cuidadosamente enunciado (Teorema 1.3.3). Este resultado explica, em particular, a natureza da aplicação inversa de uma aplicação de Cremona monomial em termos da matriz-log correspondente, aqui chamada, talvez apropriadamente, *matriz inversa de Cremona*. Tanto a matriz-log de uma aplicação de Cremona monomial quanto sua matriz inversa de Cremona são estocásticas e o teorema fornece uma equação interligando os números estocásticos correspondentes – estes números coincidem com os respectivos graus na terminologia tradicional das transformações

de Cremona. Como no caso clássico das aplicações de Cremona em característica zero, os graus estão relacionados através de propriedades do lugar base. Porém, no caso monomial, esta relação é realmente uma equação cujos termos são efetivamente computáveis em termos de métodos de otimização, embora frequentemente intratáveis do ponto de vista da complexidade computacional.

O segundo capítulo é sobre aplicações de Cremona definidas por monômios de grau 2 e constitui a parte central desta tese. Embora simples para compreender em termos dos grafos correspondentes, tais aplicações guardam algumas maravilhas ocultas, tais como o formato preciso e o grau de sua inversa de Cremona. Além do mais, ao longo do caminho são abordados alguns aspectos teóricos pertinentes, tais como nas situações em que o ideal de base da inversa de uma aplicação de Cremona é de tipo linear. Aplicações de Cremona cujos ideais de base são de tipo linear tem sido tratadas em recentes trabalhos. Em um dos resultados deste capítulo (Proposição 2.2.2) dá-se uma caracterização completa de quando o ideal de base da inversa de uma aplicação de Cremona monomial gerada em grau 2 é de tipo linear. De acordo com a terminologia empregada no texto, existem “poucas” destas.

O principal resultado do capítulo é Teorema 2.3.1 que determina o grau da inversa para uma transformação de Cremona monomial gerada em grau 2 em termos do grafo correspondente. A prova é elaborada e longa, embora tenha a vantagem de produzir ao longo de sua prova o formato preciso da matriz inversa de Cremona. Além disso, obtemos o formato preciso do chamado *fator de inversão* e um critério simples, em termos do grafo associado, de quando a aplicação inversa é definida por monômios livres de quadrados.

Existem algumas consequências deste teorema para classificação, entre as quais a Proposição 2.4.3, o Corolário 2.4.4 e o Corolário 3.2.5. A terminologia torna-se ligeiramente técnica para ser descrita nesta introdução, por tal remetemos à parte apropriada do capítulo. Aqui, classificação significa destacar famílias com comportamento específico entre todas as aplicações de Cremona definidas por monômios de grau 2. Em grau 2 esperamos ter tornado este aspecto suficientemente claro. Por outro lado, a título de franqueza, não é claro qual o impacto deste tipo de classificação na estrutura do grupo de Cremona monomial.

O terceiro capítulo está dividido em várias seções de natureza independente, envolvendo aplicações monomiais de Cremona de grau arbitrário. A primeira discorre sobre resultados em grau arbitrário, dentre os quais o *complemento dual* generalizado – que estende a noção de

complementaridade dual originalmente discutida em [14, Seção 5.1.2], ao caso de monômios não necessariamente livres de quadrados.

Uma segunda seção trata das transformações monomiais de Cremona cuja inversa não é livre de quadrados – informalmente designadas por *apócrifas* em [14]. Chamamos a atenção para um resultado de natureza iterativa para transformações de Cremona gerais (não necessariamente monomiais), em característica arbitrária: trata-se da Proposição 3.2.2. Seu uso parece bem diversificado e útil na construção de exemplos em qualquer dimensão e grau.

Outro tópico relevante neste capítulo encontra-se na última seção, fornecendo uma resposta afirmativa a um problema posto por Rafael Villarreal sobre a relação curiosa entre a noção de ideal monomial normal e a de uma *base de Hilbert* no sentido da geometria convexa. Os principais resultados desta seção são o Teorema 3.3.1 e Teorema 3.3.8. O segundo desses teoremas, mostra que, dada uma aplicação birracional monomial (sobre a imagem) cujo ideal de base é um ideal normal, existe uma projeção $\mathbb{P}^m \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ tal que a composta é uma aplicação de Cremona. A prova se baseia no uso de bases de Hilbert e alguns lemas aritméticos estabelecidos em trabalhos sobre combinatória birracional [13].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Noções incidentes de álgebra comutativa

1.1.1 Álgebras de Rees e normalidade

Dado um anel R e um ideal $I \subset R$, a *álgebra de Rees* de I é a R -álgebra graduada $\mathcal{R}(I) := \bigoplus_{n \geq 0} I^n$ com multiplicação induzida pela multiplicação natural de R pela qual $I^n \cdot I^m = I^{n+m}$. Se $I = (f_1, \dots, f_r)$, então tem-se $\mathcal{R}(I) \simeq R[It] = R[f_1t, \dots, f_rt] \subset R[t]$, em que t é uma indeterminada sobre R .

Lembremos que se A é um domínio e k o seu corpo de frações então o fecho inteiro de A , denotado por \bar{A} , é o conjunto de todos os elementos f 's em k que satisfazem a equação abaixo:

$$f^n + a_1 f^{n-1} + \dots + a_n = 0, \text{ com } a_i \in A \text{ e } n \geq 1.$$

Caso, $A = \bar{A}$ dizemos que A é integralmente fechado ou normal.

A noção, de fecho inteiro de anéis se estende a ideais de acordo com a seguinte definição.

1.1.1 DEFINIÇÃO. Sejam R um anel e I um ideal de R . Um elemento $z \in R$ é *inteiro sobre* I se existe $n \in \mathbb{N}^*$ e existem $a_i \in I^i$ para todo $i = 1, \dots, n$ tal que z satisfaz a seguinte equação:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0; \text{ sendo } a_i \in I^i.$$

O conjunto de todos os elementos $z \in R$ inteiro sobre I , denotado por \bar{I} , é chamado fecho

inteiro de I . Evidentemente, $I \subset \bar{I}$; quando $I = \bar{I}$ dizemos que I é integralmente fechado ou completo. Caso I^n seja completo para todo $n \in \mathbb{N}$ então o ideal I é dito normal.

Usando convenientemente a graduação da álgebra de Rees, não é difícil constatar que se I é um ideal de um domínio normal então a álgebra de Rees de I é normal se e somente se I é normal.

Malgrado a simplicidade das definições, tanto o cálculo como as propriedades algébricas do fecho normal de um ideal são de extrema dificuldade, vindo a se tornar um vórtice de teorias algebro-geométricas modernas de grande sutileza.

No caso de um ideal $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ gerado por monômios, um argumento simples, atribuído a Carathéodory, mostra que o fecho inteiro de I é gerado pelos monômios X^α para os quais existe $m \geq 1$ satisfazendo $(X^\alpha)^m \in I^m$. Nesta notação, $X^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ com $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Uma pergunta natural é se esta caracterização conduz a uma caracterização do fecho inteiro de toda a álgebra de Rees - não tão somente das potências individuais do ideal. Ora, como $\mathcal{R}(I) \simeq R[It] \subset R[t]$, então para o caso de $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$, resulta que $\mathcal{R}(I)$ é k -subálgebra de $k[x_1, \dots, x_n, t]$. Se, além disso, I é gerado por monômios então $\mathcal{R}(I)$ identifica-se com uma k -subálgebra de $k[x_1, \dots, x_n, t]$ gerada por monômios. Isto permite uma ponte à combinatória.

Nesta linha, o próximo resultado explica como o fecho inteiro de uma k -álgebra gerada por monômios.

1.1.2 TEOREMA. ([16, Teorema 7.2.28]) *Consideremos $A = \{v_1, \dots, v_q\} \subset Z^n$ um conjunto de vetores. Sejam R um anel de polinômios com n variáveis sobre o corpo k e $F_A = \{\mathbf{x}^{v_1}, \dots, \mathbf{x}^{v_n}\}$ o conjunto-log correspondente. Então $\overline{k[F_A]} = k[\{x^\alpha; \alpha \in \mathbb{R}_+ A \cap \mathbb{Z}A\}]$*

Como consequência, obtemos um critério combinatório para determinar se uma k -álgebra gerada por monômios é normal.

1.1.3 COROLÁRIO. ([16, Corolário 7.2.29]) *Consideremos $A = \{v_1, \dots, v_q\} \subset Z^n$ um conjunto de vetores. Sejam R um anel de polinômios com n variáveis sobre o corpo k e $F_A = \{\mathbf{x}^{v_1}, \dots, \mathbf{x}^{v_n}\}$. Então $k[F_A]$ é normal se e somente se*

$$\mathbb{Z}A \cap \mathbb{R}_+ A = \mathbb{N}A.$$

1.1.2 Ideais de tipo linear

Voltemos à álgebra de Rees $\mathcal{R}(I) = R[It]$ de um ideal $I \subset R$. Denotemos por $\mathcal{S}(I)$ a álgebra simétrica de I .

Existe um homomorfismo canônico sobrejetivo de R -álgebras

$$\mathcal{S}(I) \xrightarrow{\alpha} R[It]. \quad (1.1)$$

O ideal I é dito ser de *tipo linear* se o homomorfismo (1.1) é injetivo. O modelo básico de um ideal de tipo linear é dado por um ideal gerado por uma sequência regular.

1.1.4 PROPOSIÇÃO. Se I é um ideal de tipo linear então $\mu(I_P) \leq \text{ht } P$ para todo $P \in \text{Spec}(R/I)$, onde $\mu(J)$ denota o número mínimo de geradores do ideal J .

Demonstração. Como tanto a álgebra graduada quanto a álgebra simétrica comutam com a localização podemos supor que (R, \mathfrak{m}) é local e que $I \subset \mathfrak{m}$. Mas então

$$\mu_R(I) = \mu_{R/\mathfrak{m}}(I/\mathfrak{m}I) = \dim(\mathcal{S}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{S}(I)) \leq \dim(\mathcal{S}(I)/I\mathcal{S}(I)) = \dim \text{gr}_I(R),$$

onde a última igualdade é obtida supondo que I é de tipo linear. Mas, no caso local $\dim \text{gr}_I(R) = \dim R$. □

A condição necessária na proposição é conhecida como condição (F_1) ou (G_∞) . Infelizmente esta condição está longe de ser suficiente. Para verificar a propriedade tipo linear precisamos de condições adicionais na álgebra simétrica que forcem o núcleo de $\mathcal{S}(I) \rightarrow R[It]$ a ser pequeno.

O maior problema continua sendo em relação a como qualquer afirmação razoável afeta as equações que definem a álgebra de Rees $R[It]$. A natureza de tais equações estão no epicentro das questões de birracionalidade, em particular, de aplicações de Cremona (ver [10], [12], [3]).

1.2 Generalidades sobre aplicações racionais

Seja k um corpo algebricamente fechado e de característica arbitrária. Denotamos por $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}_k^n$ o espaço projetivo de dimensão n . Um elemento de \mathbb{P}^n tem coordenadas homogêneas $(a_0 : \cdots : a_n)$ com $a_i \in k$.

Queremos considerar as aplicações racionais com “domínio” \mathbb{P}^n e contradomínio \mathbb{P}^m , onde as aspas indicam que há algumas dificuldades com respeito ao que será exatamente o domínio dessas aplicações. As idéias originais sobre as aplicações racionais tiveram muitas imprecisões. O modo como pensamos no assunto hoje é largamente devido à transcrição algébrica originada pela escola de Zariski.

A terminologia empregada provém do fato dessas aplicações serem definidas em termos de funções racionais sobre o seu domínio, isto é, frações de funções polinomiais definidas no domínio. Existem dois corpos diferentes na teoria de variedades projetivas: o “grande” corpo das frações do anel de coordenadas homogêneas $k[\mathbf{x}] = k[x_0, \dots, x_n]$ de \mathbb{P}^n e o “pequeno” corpo das frações de um pedaço afim de \mathbb{A}^n . Enquanto o primeiro fornece funções regulares perfeitamente definidas sobre a estrutura de cone afim \mathbb{A}^{n+1} , o último é que recebe a designação de *corpo de funções* de \mathbb{P}^n uma vez que faz sentido dizer que os seus elementos induzem funções localmente bem definidas sobre \mathbb{P}^n - em contraste aos elementos de $k[\mathbf{x}]$.

Um *dado racional* de \mathbb{P}^n para \mathbb{P}^m é uma coleção de elementos $f_1/f_0, \dots, f_m/f_0$ no corpo de funções de \mathbb{P}^n , onde $f_0, f_1, \dots, f_m \in k[\mathbf{x}]$ são formas do mesmo grau, com $f_0 \neq 0$.

De um modo um pouco impreciso, o dado acima induz uma aplicação com contradomínio $\mathbb{A}^m \subset \mathbb{P}^m$ e tendo por domínio um certo subconjunto fechado de pontos de \mathbb{P}^n , a saber, dados $p = (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$, com $a_i \in k$, tais que $f_0(p) = f(a_0, \dots, a_n) \neq 0$, a imagem de p é o ponto com coordenadas afins $(f_1(p)/f_0(p), \dots, f_m(p)/f_0(p)) \in \mathbb{A}_k^m$. A rigor, a noção de uma *aplicação racional* é a de uma família de tais dados racionais, satisfazendo uma relação de equivalência óbvia que traduz a requerida compatibilidade geométrica (ver [8] ou [12] para uma abordagem mais algébrica).

É comum a notação $F: \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ para indicar uma tal aplicação, onde a seta pontilhada é remanescente do domínio parcial da aplicação. A k -subálgebra $k[f_1/f_0, \dots, f_m/f_0] \subset k(f_1/f_0, \dots, f_m/f_0)$ é o anel de coordenadas afins de uma subvariedade unicamente definida de $\mathbb{A}^m \subset \mathbb{P}^m$. O fecho do último $Y \subset \mathbb{P}^m$, é chamado a *imagem* de uma aplicação racional F . Por um abuso, podemos também dizer que a aplicação racional F é definida pelo dado homogêneo f_0, f_1, \dots, f_m e frequentemente usaremos a notação $F = (f_0 : f_1 : \dots : f_m)$, a qual, como iremos indicar abaixo, transmite a ideia da falta de unicidade da escolha dessas formas.

Uma aplicação F é dita *birrational sobre a imagem* se existe uma aplicação racional de \mathbb{P}^m em \mathbb{P}^n , cuja restrição $G: Y \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ é inversa de F . Algebricamente, F induz

um k -isomorfismo entre os corpos de funções de \mathbb{P}^n e de Y . Em termos dos corpos de funções dos cones respectivos, a birracionalidade se expressa de um modo simples. Para tal, seja \mathbf{x}_d o conjunto dos monômios de grau d em R . O anel $k[\mathbf{x}_d]$ é o d -ésimo subanel de Veronese $k[\mathbf{x}]^{(d)}$ de $k[\mathbf{x}]$. Nestes termos, F é birracional sobre a imagem se e só se a inclusão $k[f_0, f_1, \dots, f_m] \subset k[\mathbf{x}]^{(d)}$ em nível dos respectivos corpos de frações é sobrejetiva – remetemos ao Lema 1.3.2 para um enunciado preciso no caso de monômios.

Uma *aplicação de Cremona* de \mathbb{P}^n é uma aplicação birracional de \mathbb{P}^n sobre si mesmo (isto é $m = n$).

Também podemos expressar isto num nível de dados homogêneos, a saber, se $F = (f_0 : f_1 : \dots : f_m)$ e $G = (g_0 : g_1 : \dots : g_n)$ então F é uma aplicação de Cremona cuja aplicação inversa é G se e somente se as seguintes relações são satisfeitas:

$$(f_0(g_0, g_1, \dots, g_n) : \dots : f_m(g_0, g_1, \dots, g_n)) = (\bar{y}_0 : \dots : \bar{y}_m)$$

e

$$(g_0(f_0, f_1, \dots, f_m) : \dots : g_n(f_0, f_1, \dots, f_m)) \equiv (\bar{x}_0 : \dots : \bar{x}_n)$$

como n -enuplas de coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}_{k(\mathbf{y})}^m$ (respectivamente $\mathbb{P}_{k(\mathbf{x})}^n$). (para detalhes, remetemos às referências [3] e [12]).

1.3 Transformações de Cremona monomiais em termos de aritmética inteira

Nesta seção transcreveremos a noção de transformação de Cremona monomial em termos da aritmética inteira.

Seja k um corpo e seja $R = k[\mathbf{x}] = k[x_1, \dots, x_n]$ um anel de polinômios sobre k . Suporemos, doravante, que $n \geq 2$.

Dado $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, escrevemos $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ para o monômio associado. Iremos tratar de um conjunto finito $V = \{v_1, \dots, v_q\} \subset \mathbb{N}^n$ de vetores distintos com $v_j = (v_{1j}, \dots, v_{nj})$ e o correspondente conjunto-*log* de monômios $F^V = \{\mathbf{x}^{v_1}, \dots, \mathbf{x}^{v_q}\} \subset R$. As seguintes restrições básicas serão tacitamente supostas.

- Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ existe pelo menos um $j \in \{1, \dots, q\}$ tal que $v_{ij} = 0$

- Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ existe pelo menos um $j \in \{1, \dots, q\}$ tal que $v_{ij} \neq 0$

Por conveniência, chamaremos as condições acima de *restrições canônicas*.

A primeira exigência não é intuitiva, mas torna-se clara em termos do correspondente F^V . Significa que os monômios de F^V não tem fator comum não-trivial.

A segunda exigência pode sempre ser obtida contraindo a um subconjunto das coordenadas definindo um $\mathbb{N}^{n-1} \subset \mathbb{N}^n$.

1.3.1 DEFINIÇÃO. A *matriz-log* A_V de V é a matriz inteira cujas colunas são os vetores em V .

Por extensão, chamamos A_V a matriz-log do correspondente conjunto $F = F^V$ de monômios. Portanto, iremos sempre usar a notação A_F .

Existe uma certa instabilidade nesta terminologia, já que a matriz depende da ordem das variáveis e da ordem dos monômios em F – a mesma sorte de imprecisão que ocorre quando falamos sobre a matriz Jacobiana de um conjunto de polinômios. Esta instabilidade deve ser tratada com algum cuidado, especialmente nos enunciados dos resultados e nos argumentos que envolvem, simultaneamente, vários conjuntos de monômios.

Iremos trabalhar exclusivamente com conjuntos estocásticos de vetores. Precisamente, V é um conjunto *d-estocástico* se $|v_1| = \dots = |v_q| = d$, para algum inteiro fixado $d \geq 1$.

Para ver como a matriz-log de um conjunto de vetores *d-estocástico* ocorre naturalmente, lembremos que uma extensão $D' \subset D$ de domínios é dita ser birracional se ela origina uma igualdade em nível de seus respectivos corpos de frações. Seja $F = F^V \subset R = k[\mathbf{x}]$ o conjunto de monômios associado a um conjunto *d-estocástico* $V \subset \mathbb{N}^n$. Seja \mathbf{x}_d o conjunto dos monômios de grau d em R .

A transição fundamental de álgebra/geometria para aritmetica inteira é revelada através do seguinte resultado, alcunhado *principio determinantal* de birracionalidade em [14].

1.3.2 LEMA. ([13, Proposição 1.2]) *Seja $V \subset \mathbb{N}^n$ um conjunto d-estocástico satisfazendo as restrições canônicas, com $d \geq 1$. Então $k[F^V] \subset R^{(d)}$ é uma extensão birracional se, e somente se, o ideal de \mathbb{Z} gerado pelos menores $n \times n$ de A_F é gerado por d .*

De acordo com as observações anotadas na Seção 1.2, a birracionalidade da extensão de anéis acima traduz a birracionalidade geométrica correspondente de \mathbb{P}^n sobre a imagem.

Nossa meta aqui é mais restrita no que supomos o caso $q = n$. Nesse caso estamos tratando de uma *aplicação de Cremona* ou *transformação de Cremona*, um objeto venerável da geometria algébrica clássica. Estamos então trabalhando com aplicações monomiais cuja matriz-log correspondente é uma matriz $n \times n$ d -estocástica de determinante $\pm d$.

O sinal acima não é relevante já que podemos sempre permutar duas colunas para obter um determinante positivo, uma simples operação correspondendo a uma transposição no conjunto de monômios em F . Na verdade, com frequência o resultado pode depender de uma permutação do conjunto de variáveis e do conjunto de monômios em F . Isto significa que, no grupo de Cremona monomial em n variáveis, não iremos distinguir entre um elemento F deste grupo e a composta PFQ , onde P, Q são *permutações de Cremona* arbitrárias – isto é, aquelas cujas matrizes-log são matrizes de permutação. Em particular, é claro que através de tais composições não estamos modificando o grau dos monômios de definição.

Usaremos fortemente o principal resultado em [15], que fornece a contrapartida aritmética inteira de uma aplicação de Cremona monomial.

1.3.3 TEOREMA. ([15, Teorema 2.2]) *Consideremos $V = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{N}^n$ um conjunto d -estocástico, com $d \geq 1$, satisfazendo as restrições canônicas. Suponhamos que o determinante da matriz-log associada A_V seja $\pm d$. Então existe um conjunto $W = \{w_1, \dots, w_n\} \subset \mathbb{N}^n$ e um vetor $\gamma \in \mathbb{N}^n$ tal que:*

- (a) $A_V \cdot A_W = \Gamma + I_n$, onde $\Gamma = \underbrace{[\gamma | \dots | \gamma]}_n$ é a matriz que possui todas as colunas iguais a γ ;
- (b) W é δ -estocástica e $\det(A_W) = \pm \delta$, onde $\delta = \frac{|\gamma|+1}{d}$.

Além disso, W e γ são unicamente determinados quando W satisfaz as restrições canônicas.

Se F e G são os respectivos conjuntos-log de monômios do conjunto de vetores V e W , também escreveremos a equação fundamental do teorema na forma $A_F \cdot A_G = \Gamma + I_n$, referindo-nos à mesma como a *equação de inversão* de F , enquanto A_G será chamada de *matriz inversa de Cremona* de A_F .

O Teorema mostra em particular que a inversa de uma aplicação de Cremona monomial é também monomial, provando portanto o fato que o subconjunto do grupo de Cremona cujos elementos são as aplicações de Cremona monomiais é um subgrupo. Ainda mais

importante é que a demonstração deste resultado dá explicitamente a matriz inversa de Cremona. Além disso, o resultado amarra as matrizes associadas por um vetor inteiro não negativo que fornece o fator monomial de proporcionalidade responsável pela composição das aplicação ser a identidade. Teremos mais a dizer sobre este fator no próximo capítulo. Este vetor (respectivamente, fator) será dito *o vetor de inversão* (respectivamente, o *fator de inversão*) de F .

A seguinte noção foi introduzida em [14].

1.3.4 DEFINIÇÃO. Um conjunto $V \subset \mathbb{N}^n$ é *não coesivo* se, a menos de permutação nas linhas ou nas colunas, a matriz-log é diagonal por blocos, isto é, da forma

$$A_V = \left(\begin{array}{c|c} C & \\ \hline & D \end{array} \right),$$

onde C, D são matrizes-log de tamanho qualquer e os blocos vazios tem somente elementos nulos.

Dizemos que V é *coesivo* no caso oposto. Por extensão, se V é coesivo geralmente dizemos que o conjunto F^V de monômios é coesivo. Particularmente, se V é 2 estocástico, então a coesividade de V é equivalente a conexidade do grafo associado G_F .

Com esta noção disponível, o dicionário básico acima pode ser ampliado para acomodar uma caracterização em termos da teoria de grafos. Lembrando que dado um conjunto finito de monômios de grau 2 podemos associá-lo a um grafo [ver apêndice]

1.3.5 TEOREMA. ([14, Teorema 4.7]) *Seja $F \subset k[x_1, \dots, x_n]$ um conjunto finito de monômios de grau 2 sem fator comum próprio. Denotemos G_F o grafo correspondente a F e A a matriz de incidência de G_F . As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) F é coesivo e A tem posto máximo;
- (ii) F define uma transformação birracional sobre a imagem
- (iii) G_F é conexo e obedece a uma das seguintes alternativas:
 - (a) G_F não tem laços e é não bipartido,
 - ou
 - (b) G_F tem laços e após a remoção dos laços o grafo resultante é bipartido.

No caso particular de um conjunto de monômios de $k[x_1, \dots, x_n]$ com exatamente n monômios podemos adicionar à caracterização acima uma propriedade da teoria de ideais.

1.3.6 TEOREMA. ([14, Proposição 5.1]) *Seja $F \subset k[x_1, \dots, x_n]$ um conjunto finito coesivo de n monômios de grau 2 sem fator comum próprio. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $\det A_F \neq 0$
- (ii) F define uma transformação de Cremona de \mathbb{P}^{n-1}
- (iii) Uma das seguintes alternativas tem lugar:
 - (a) G_F não tem laços e contém um único circuito que é necessariamente de comprimento ímpar,
 - ou
 - (b) G_F é uma árvore com exatamente um laço.
- (iv) O ideal $(F) \subset k[x_1, \dots, x_n]$ é de tipo linear.

É conveniente chamar o conjunto F um *conjunto de Cremona em grau 2* no caso em que ele define uma aplicação de Cremona. Da mesma forma, a correspondente matriz-log pode ser chamada uma *matriz de Cremona em grau 2*. Além disso, é conveniente considerar o laço como um circuito de comprimento 1

Capítulo 2

Transformações de Cremona monomiais de grau 2

Em [14, Proposição 5.5] uma classificação das aplicações monomiais de Cremona de grau 3 em 5 variáveis foi estabelecida, baseada na classificação correspondente em grau 2. Neste capítulo pretendemos estender esta classificação em grau 2 em um número arbitrário de variáveis.

Nesta situação, existe um grafo G_F associado a F , cujo conjunto de vértices está em bijeção com $\{x_1, \dots, x_n\}$ e cujo conjunto de arestas corresponde ao conjunto F , onde o monômio $x_i x_j$ fornece a aresta de vértices correspondentes a x_i e x_j . Remetemos ao Apêndice para maiores detalhes desta associação.

Notemos que G_F pode admitir laços, correspondendo às potências puras de ordem 2 dentre os monômios em F . A matriz A_F é exatamente a matriz de incidência do grafo G_F .

2.1 Forma normal em grau 2

Nesta parte introduzimos a forma normal de uma matriz de Cremona em grau 2. Embora a inversa raramente seja de grau 2, a forma normal permitirá dar uma forma da matriz-log da inversa. Para introduzir a forma normal usaremos a caracterização dada no Teorema 1.3.6 para aplicações de Cremona.

Seja F um conjunto de Cremona em grau 2 satisfazendo as restrições canônicas e denotemos G_F o grafo correspondente. Dizemos que o vértice x_i pertence à j -ésima vizinhança do único circuito C_F de G_F se a menor distância de x_i para algum vértice do circuito é j , isto é, se $\min\{d_G(x_i, v), v \in C_F\} = j$

2.1.1 LEMA. *Seja F um conjunto de Cremona em grau 2. Então, a menos de permutação de variáveis e monômios de F , sua matriz-log pode ser escrita na forma*

$$\mathcal{N}_F = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \mathcal{N}_{F_r} & M_1 & & & & \\ \hline & I_{s_1} & M_2 & & & \\ \hline & & I_{s_2} & & & \\ \hline & & & \ddots & M_p & \\ \hline & & & & I_{s_p} & M_{n-(r+t)} \\ \hline & & & & & I_{n-(r+t)} \end{array} \right),$$

onde:

- (i) \mathcal{N}_{F_r} denota ou a matriz de incidência do único circuito ímpar de tamanho r , escrito na forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ou a matriz 1×1 cujo único elemento é o 2, correspondendo ao único laço

- (ii) I_{s_j} denota a matriz identidade de tamanho s_j , para algum s_j , onde j percorre uma lista ordenada de vizinhanças do único circuito e s_j denota o número de arestas na j -ésima vizinhança do circuito, com $j = 1, \dots, p$
- (iii) M_j é uma certa matriz com elementos 0,1 distribuída de tal maneira que tenha exatamente um 1 em cada coluna
- (iv) Os espaços vazios são preenchidos com zero.

Demonstração. A prova está essencialmente contida nos detalhes das afirmações acima. Usando o Teorema 1.3.6 consideramos G_F como uma árvore enraizada, cuja raiz é ou o único

circuito ou o único laço, de acordo com o caso, com as sucessivas vizinhanças do circuito ou laço sendo os conjuntos dos ramos ordenados a partir da raiz. Em seguida, ordenamos os vértices de cada vizinhança, incluindo a vizinhança de ordem 0 (a sua raiz), de maneira arbitrária, então organizamos esta ordenação parcial sucessivamente ao longo da ordem das vizinhanças.

Este argumento de vizinhanças está bem definido pois temos uma estrutura de uma floresta fora da “raiz”. \square

2.1.2 DEFINIÇÃO. A matriz acima será chamada uma *forma normal* da matriz de Cremona em grau 2.

2.1.3 EXEMPLO. Considere $F = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_5, x_4x_5, x_4x_7, x_5x_7, x_6x_7\} \subset k[\mathbf{x}]$ um conjunto de Cremona. A matriz-log de F na forma normal é dada pelo produto:

$$\mathcal{N}_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto,

$$\mathcal{N}_F = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Claramente, esta forma normal não é única pois depende de uma ordem arbitrária dos vértices em cada vizinhança do circuito. Na verdade, este grau de arbitrariedade poderá ser proveitoso em algum argumento.

Lembremos que, dada uma aplicação racional $\mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$, seu *grau* é o grau comum de suas formas coordenadas, contanto que estas formas não tenham nenhum fator comum

próprio. Este grau não deve ser confundido com o grau de uma aplicação no sentido geométrico ou da teoria de corpos. Como estamos trabalhando principalmente com aplicações de Cremona, o grau no último sentido é sempre 1, portanto não existe nenhum perigo de mal entendido.

2.2 Quando é a aplicação inversa de tipo linear?

Recorremos às noções introduzidas na seção anterior e, particularmente, a noção empregada nas afirmações do Lema 2.1.1.

Lembrando que o *grafo-aresta* de um grafo G é o grafo simples cujo conjunto de vértices é o conjunto de arestas de G e dois tais vértices são adjacentes se, e somente se, as arestas originais se encontram. Outra noção necessária é o *diâmetro* de um grafo simples, definido pela maior distância entre dois vértices quaisquer do grafo, onde a distância entre dois vértices é o número mínimo de arestas conectando-os.

Precisaremos do seguinte resultado simples.

2.2.1 LEMA. *Denotemos por F o conjunto de Cremona de grau 2 e escrevamos $G = G_F$ para o grafo correspondente. Então o diâmetro do grafo-aresta de G é limitado inferiormente por $\frac{r-1}{2} + p$, onde r é a ordem do único circuito de G e p é o número de vizinhanças ordenadas do circuito.*

Demonstração. Primeiro, é claro que um circuito é auto-dual relativamente ao grafo-aresta, isto é, seu grafo-aresta é de novo um circuito de mesmo comprimento. Então o diâmetro do grafo aresta de um circuito de comprimento r é $(r - 1)/2$.

Escrevamos $\mathcal{E}(G), \mathcal{E}(C)$ para o grafo aresta de G e C , respectivamente, onde C denota o único circuito de G (notemos que, no caso em que C degenera em um laço, $\mathcal{E}(C) = \emptyset$).

Seja $v(p)$ um vértice na p -ésima vizinhança – isto é, a última vizinhança não vazia – do circuito em G e seja $v(p-1), v(p-2), \dots, v(0)$ o único conjunto de vértice pertencendo, respectivamente, à vizinhança de C de ordem $p-1, p-2, \dots, 0$, e tal que $v(i)$ e $v(i+1)$ são adjacentes para $i = 0, \dots, p-1$.

Então, em $\mathcal{E}(G)$ a distância entre os vértices $v(p)v(p-1)$ e $v(1)v(0)$ é exatamente p já que não existe nenhum caminho dual menor para a estrutura ordenada de vizinhanças

de C em G . Além disso, para conectar a um vértice arbitrário de $\mathcal{E}(C)$ precisamos de pelo menos $(r-1)/2$ arestas adicionais. Portanto, o diâmetro de $\mathcal{E}(G)$ é pelo menos $\frac{r-1}{2} + p$. \square

O próximo resultado propociona uma caracterização em termos da teoria de grafos de um conjunto de Cremona de grau 2 cuja inversa é definida por um ideal de tipo linear.

2.2.2 PROPOSIÇÃO. *Denotemos $F \subset k[\mathbf{x}]$ um conjunto de Cremona em grau 2 satisfazendo as restrições canônicas e consideremos o seu grafo G_F correspondente, com o único circuito de tamanho r , possivelmente degenerando em um laço. Indiquemos por s o número de vértices de G_F fora do circuito cujo grau do vértice é ≥ 2 . Seja $F^{-1} \subset k[\mathbf{x}]$ o único conjunto inverso de Cremona de F satisfazendo as restrições canônicas. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) *O ideal $(F^{-1}) \subset k[\mathbf{x}]$ é de tipo linear*
- (b) *O ideal $(F) \subset k[\mathbf{x}]$ é linearmente apresentado*
- (c) *O grafo-aresta de G_F tem diâmetro ≤ 2*
- (d) *A estrutura de raiz-vizinhança de G_F é uma das seguintes:*

$$\begin{cases} r = 1, & s_j = 0 \text{ para } j \geq 3, \text{ e } s \leq 1 \\ r = 3 & \text{ e } s_j = 0 \text{ para } j \geq 2 \\ r = 5 & \text{ e } s_j = 0 \text{ para } j \geq 1. \end{cases}$$

Demonstração. (a) \Leftrightarrow (b) Esta equivalência é consequência do fato que as respectivas álgebras de Rees de (F) e (F^{-1}) têm o mesmo ideal de relações ([12]). Mais precisamente, considerando um clone \mathbf{y} das \mathbf{x} -variáveis, o ideal de definição da álgebra de Rees de $(F) \subset k[\mathbf{x}]$ em $k[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ é o mesmo ideal de definição da álgebra de Rees de $(F^{-1}) \subset k[\mathbf{y}]$ em $k[\mathbf{y}, \mathbf{x}]$. Em particular, se existe alguma sizigia homogênea de F que não é gerada pelas lineares ela produz uma relação em grau 2 ou maior que não é gerada por uma relação de grau 1 de (F^{-1}) , portanto a última não pode ser de tipo linear. A recíproca é analóga.

(b) \Leftrightarrow (c) Esta equivalência vale em situações mais gerais (ver, e.g., [2, Lema 5.16]).

(d) \Rightarrow (c) Isto é provado por uma inspeção direta. A saber, como observado anteriormente, o pentágono é aresta-dual, isto é, seu grafo-aresta é também um pentágono, portanto tem diâmetro 2.

Em seguida, um triângulo com segunda vizinhança vazia tem uma grafo-aresta que é “suficientemente” triangulado. De fato, o triângulo é também aresta-dual, e qualquer aresta fora do triângulo adiciona outro triângulo no grafo aresta compartilhando uma aresta comum com o triângulo base. Portanto, é evidente que o diâmetro do grafo aresta é no máximo 2.

Finalmente, para o caso do laço notemos que o subgrafo *estrelado* de G enraizado no laço induz um subgrafo completo em $\mathcal{E}(G)$ cujo diâmetro é 1. A hipótese $s \leq 1$ garante que existe no máximo um vértice v em G distinto do laço que tem grau de incidência ≥ 1 e enraizado neste vértice existe um outro subgrafo estrelado. Portanto, o diâmetro de $\mathcal{E}(G)$ é ≤ 2 .

(c) \Rightarrow (d) Pelo Lema 2.2.1, temos $r - 1 + 2p \leq 4$. É imediato constatar que isto força as três alternativas afirmadas – notemos que no caso do laço, G tem no máximo um vértice diferente do laço de grau ≥ 2 . De fato, caso contrário, dados vértices distintos $v(1), u(1)$ na primeira vizinhança do laço e dois vértices $v(2), u(2)$ (necessariamente distintos) adjacentes aos dois primeiros, respectivamente, então a distância em $\mathcal{E}(G)$ entre as “arestas” $v(1)v(2)$ e $u(1)u(2)$ é 3. \square

2.3 O grau da aplicação inversa

O próximo resultado determina, de modo geral para as aplicações de Cremona monomial de grau 2, a matriz inversa de Cremona de uma transformação de Cremona F , lançando mão da forma normal de F . Se F é um conjunto de monômios de uma aplicação de Cremona, escrevemos F^{-1} para o conjunto de monômios definindo a aplicação inversa. Supondo que F satisfaz as restrições canônicas, F^{-1} é unicamente definida desde que satisfaça as mesmas restrições. Lembremos também que existe uma única matriz inversa de Cremona $A_{F^{-1}}$ (Teorema 1.3.3) satisfazendo as restrições canônicas. Mais ainda, ambas são automaticamente coesivas (ver [14, Lema 4.1]).

Como explicamos na seção anterior, o grafo associado ao conjunto de Cremona em grau 2 tem um único circuito e este circuito tem comprimento ímpar. Também, quando falamos da matriz-log neste caso sempre significa a forma normal \mathcal{N}_F como estabelecido no Lema 2.1.1. É óbvio que, em termos da inversa, não perdemos em generalidade quando supomos que a matriz-log está na forma normal \mathcal{N}_F , pois conhecida a matriz inversa de Cremona de \mathcal{N}_F é possível determinar a matriz inversa de Cremona de qualquer permutação

de \mathcal{N}_F . De fato, esta será determinada por uma certa permutação da matriz inversa de Cremona de \mathcal{N}_F , isto é, se B_F é a matriz inversa de Cremona de \mathcal{N}_F então $E^{-1}B_F E'^{-1}$ é a matriz inversa de Cremona de $E'\mathcal{N}_F E$.

2.3.1 TEOREMA. *Denotemos por $F = \{\mathbf{x}^{v_1}, \dots, \mathbf{x}^{v_n}\} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ($n \geq 2$) um conjunto de Cremona em grau 2 satisfazendo as restrições canônicas e seja G_F o seu grafo correspondente. Denotemos por r o comprimento do único circuito de G_F . Seja s o número de vértices de G_F fora do circuito cujo grau do vértice é ≥ 2 . Então:*

- (a) *O grau da inversa de Cremona F^{-1} é $(r + 1)/2 + s$.*
- (b) *Os elementos da matriz inversa de Cremona $A_{F^{-1}}$ satisfazem as seguintes condições:*
 - (i) *Os elementos da diagonal principal são todos não nulos.*
 - (ii) *Todos os elementos pertencem a $\{0, 1, 2\}$; mais ainda, a i -ésima linha contém um elemento igual a 2 se e somente se o vértice correspondente x_i não pertence ao circuito de G_F e tem grau ≥ 2 ; em particular, a aplicação inversa é definida por monômios livres de quadrados se e somente se o circuito de G_F tem segunda vizinhança vazia;*
- (c) *Indiquemos por \widetilde{G}_F o subgrafo obtido de G_F pela omissão dos vértices de grau 1 e das respectivas arestas incidentes e denotemos $\{f_{i_1}, \dots, f_{i_m}\}$ os monômios correspondendo às arestas de \widetilde{G}_F que não estão no circuito de G_F . Então o fator monomial de inversão é $x_1 \dots x_r f_{i_1} \dots f_{i_m}$ onde a ordem dos vértices do circuito e das outras arestas obedece à forma normal \mathcal{N}_F*

Demonstração. Argumentaremos em termos do grafo simples G_F associado, de acordo com o Teorema 1.3.6. Primeiro focaremos o caso livre de quadrados (isto é, quando G_F é um grafo simples). Para o caso no qual o circuito degenera em um laço será suficiente um pequeno ajuste explanado no fim da demonstração.

Consideremos a família de todos os grafos conexos em n vértices, tendo um único circuito de comprimento ímpar fixado $3 \leq r \leq n$. Procederemos por indução em $n \geq r$.

Para $n = r$, o grafo se reduz a um circuito de comprimento r . O conjunto inverso de Cremona satisfazendo as restrições canônicas é bem conhecido:

$$F^{-1} = \{y_1 y_3 \cdots y_n, y_2 y_4 \cdots y_{n-1} y_1, \dots, y_{n-1} y_n y_1 \cdots y_{n-3}, y_n y_2 \cdots y_{n-2}\}. \quad (2.1)$$

Claramente, o grau é $(n+1)/2$ e as entradas na diagonal principal de $A_{F^{-1}}$ são todas iguais a 1. Mais ainda, as entradas da matriz inversa de Cremona são 0, 1 e o fator monomial de inversão é $x_1 \dots x_r$ como se vê diretamente. Assim, as afirmações de (a) a (c) são válidas nesta situação particular.

Suponhamos que $n \geq r + 1$. Então existe um vértice fora do circuito cujo grau em G_F é 1 - qualquer vértice pertencente a última vizinhança não vazia. Mais ainda, reordenando os índices correspondentes aos vértices nesta vizinhança, podemos supor que o vértice corresponde à x_n e a única aresta incidente corresponde ao monômio $\mathbf{x}^{v_n} = x_j x_n$, onde $j \in \{1, \dots, n-1\}$ é tal que x_j corresponde ao único vértice adjacente a x_n - notemos que este vértice pertence à penúltima vizinhança não-vazia do circuito.

Claramente, pelo Teorema 1.3.6, o conjunto $F' = F \setminus \mathbf{x}^{v_n} = \{\mathbf{x}^{v_1}, \dots, \mathbf{x}^{v_{n-1}}\} \subset k[\mathbf{x} \setminus x_n] = k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ é ainda um conjunto de Cremona em grau 2 satisfazendo as restrições canônicas. Pela hipótese indutiva, a inversa F'^{-1} satisfaz as propriedades (b) e (c) do teorema e tem grau $(r+1)/2 + s'$, onde s' é o número de vértices de $G_{F'}$ fora do circuito cujo grau em $G_{F'}$ é ≥ 2 .

Como não interferimos no arranjo normal das vizinhanças anteriores do circuito, a forma normal da matriz-log de F tem a forma

$$\mathcal{N}_F = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_{F'} & M \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right),$$

onde $\mathcal{N}_{F'}$ é a forma normal da matriz log de F' e M denota uma matriz $(n-1) \times 1$ cuja único elemento não nulo é o j -ésimo elemento.

Agora argumentaremos que a matriz inversa de Cremona de \mathcal{N}_F herda uma forma similar, com $\mathcal{N}_{F'}$ substituída pela matriz inversa de Cremona de $\mathcal{N}_{F'}$. Desta forma, iremos concluir sobre o grau de F^{-1} e sobre o restante das afirmações do teorema.

Para isto, temos que analisar o papel do vértice correspondente a x_j , onde $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Dividimos esta análise em três casos distintos, como segue:

Caso 1. O vértice correspondendo a x_j pertence ao único circuito comum de G_F e $G_{F'}$.

Neste caso, como x_j pertence ao circuito comum de G_F e $G_{F'}$, temos $s = s'$ e, claramente, $\widetilde{G}_F = \widetilde{G}_{F'}$ já que x_j tem grau ≥ 2 .

Como $r \geq 3$, podemos reescrever a forma normal de F' em que $j = 2$ e $\mathbf{x}^{v_1} = x_1 x_2$,

$\mathbf{x}^{v_2} = x_2x_3$ são as duas arestas adjacentes do circuito. Mostraremos que a seguinte matriz tem as propriedades exigidas no Teorema 1.3.3 com respeito a \mathcal{N}_F , isto é, é a matriz-log dos monômios definindo a inversa de Cremona de \mathcal{N}_F .

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A_{F'^{-1}} & N \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

onde $A_{F'^{-1}}$ é a matriz-log da única inversa de F' satisfazendo as restrições canônicas, e $N = [n_l]$ é a matriz $(n-1) \times 1$ definida por

$$n_l = \begin{cases} (A_{F'^{-1}})_{l1} - 1, & \text{se } l = 1 \\ (A_{F'^{-1}})_{l1}, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Notemos que faz sentido subtrair 1 na primeira alternativa acima pois, pela hipótese indutiva, nenhum elemento ao longo da diagonal principal de $A_{F'^{-1}}$ é nulo.

Seja $\mathcal{N}_{F'} \cdot A_{F'^{-1}} = \Gamma' + I_{n-1}$ a equação matricial fundamental de inversão como no Teorema 1.3.3 relativa a F' , com $\Gamma' = \underbrace{[\gamma'_1 \cdots \gamma'_{n-1}]}_{n-1}$. A multiplicação de blocos usual nos dá

$$\mathcal{N}_F \cdot B = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_{F'} \cdot A_{F'^{-1}} & \mathcal{N}_{F'} \cdot N + M \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \gamma' & \cdots & \gamma' & \mathcal{N}_{F'} \cdot N + M \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right) + I_n,$$

onde $\gamma' = [(\gamma')_1, \dots, (\gamma')_{n-1}]^t$. Um cálculo direto nos permite concluir que $(\mathcal{N}_{F'} \cdot N + M)_l = (\gamma')_l$, para $l = 1, \dots, n-1$:

- Se $l \neq 1, 2$ temos $m_l = 0$ e $(\mathcal{N}_{F'})_{l1} = 0$, portanto

$$(\mathcal{N}_{F'} \cdot N + M)_l = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathcal{N}_{F'})_{lk} n_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathcal{N}_{F'})_{lk} (A_{F'^{-1}})_{k1} = (\gamma')_l.$$

- Se $l = 2$, é o caso que $m_2 = 1$ e $(\mathcal{N}_{F'})_{21} = 1$, logo

$$(\mathcal{N}_{F'} \cdot N + M)_2 = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathcal{N}_{F'})_{2k} n_k + m_2 = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathcal{N}_{F'})_{2k} (A_{F'^{-1}})_{k1} - (\mathcal{N}_{F'})_{21} + m_2 = (\gamma')_2.$$

- Se $l = 1$ então $m_1 = 0$ e $(\mathcal{N}_{F'})_{11} = 1$ e portanto

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}_{F'} \cdot N + M)_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} (\mathcal{N}_{F'})_{1k} n_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathcal{N}_{F'})_{1k} (A_{F'^{-1}})_{k1} - (\mathcal{N}_{F'})_{11} \\ &= (\gamma')_1 + 1 - (\mathcal{N}_{F'})_{11} = (\gamma')_1. \end{aligned}$$

Portanto isto dá a equação de inversão $\mathcal{N}_F \cdot B = \Gamma + I_n$, com $\Gamma = [\gamma | \cdots | \gamma]$, onde $\gamma_l = (\gamma')_l$ para $l = 1, \dots, n-1$ e $\gamma_n = 0$. Mais ainda, como F'^{-1} satisfaz as restrições canônicas então B também satisfaz, por construção. Pelo Teorema 1.3.3, B é a única matriz dando a inversa de F , como afirmado. Além disso, pelo formato explícito de B com a natureza das entradas de N , a hipótese indutiva implica que as entradas de B são 0, 1, 2, enquanto 2 aparece na i -ésima linha se e somente se x_i é um vértice fora do circuito com grau ≥ 2 . Como $|\gamma| = |\gamma'|$ e, além disso, nenhum elemento na diagonal principal de B é nulo, concluímos este caso.

Caso 2. O vértice correspondendo a x_j não está no circuito e seu grau em $G_{F'}$ é ≥ 2

Neste caso, como $G_{F'}$ omite somente o vértice x_n e sua única aresta adjacente $x_j x_n$, e como s conta somente os vértices de grau ≥ 2 , segue que $s' = s$ neste caso também, e, além disso, $\widetilde{G}_F = \widetilde{G}_{F'}$ já que x_j tem grau ≥ 2 .

Por hipótese, existem pelo menos dois índices $1 \leq i' < j < i \leq n-1$ tais que $x_{i'} x_j$ e $x_j x_i$ pertencem ao conjunto F . Notemos que o vértice $x_{i'}$ pode estar no circuito. Mostraremos que a seguinte matriz tem as propriedades exigidas no Teorema 1.3.3 com respeito a \mathcal{N}_F , isto é, é sua matriz inversa de Cremona.

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A_{F'^{-1}} & N \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

onde $A_{F'^{-1}}$ é a única matriz inversa de Cremona de $\mathcal{N}_{F'}$ satisfazendo as restrições canônicas, e $N = [n_l]$ é a matriz $(n-1) \times 1$ definida por

$$n_l = \begin{cases} (A_{F'^{-1}})_{li} - 1, & \text{se } l = i \\ (A_{F'^{-1}})_{li}, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Seja $\mathcal{N}_{F'} \cdot A_{F'^{-1}} = \Gamma' + I_{n-1}$ a equação matricial fundamental de inversão como no Teorema 1.3.3 relativo a F' com $\Gamma' = \underbrace{[\gamma' | \cdots | \gamma']}_{n-1}$. A multiplicação de blocos usual nos dá

$$\mathcal{N}_F \cdot B = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_{F'} \cdot A_{F'^{-1}} & \mathcal{N}_{F'} \cdot N + M \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \gamma' & \cdots & \gamma' & \mathcal{N}_{F'} \cdot N + M \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right) + I_n,$$

onde $\gamma' = [(\gamma')_1, \dots, (\gamma')_{n-1}]^t$. Um cálculo direto nos dá $(\mathcal{N}_{F'} \cdot N + M)_l = (\gamma')_l$, para $l = 1, \dots, n-1$:

- Se $l \neq j, i$ temos $m_l = 0$ e $(\mathcal{N}_{F'})_{li} = 0$, portanto

$$(\mathcal{N}_{F'} \cdot N + M)_l = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathcal{N}_{F'})_{lk} n_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathcal{N}_{F'})_{lk} (A_{F'-1})_{ki} = (\gamma')_l.$$

- Se $l = j$, é o caso que $m_j = 1$ e $(\mathcal{N}_{F'})_{ji} = 1$, logo

$$(\mathcal{N}_{F'} \cdot N + M)_j = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathcal{N}_{F'})_{jk} n_k + m_j = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathcal{N}_{F'})_{jk} (A_{F'-1})_{ki} - (\mathcal{N}_{F'})_{ji} + m_j = (\gamma')_j.$$

- Se $l = i$ então $m_i = 0$ e $(\mathcal{N}_{F'})_{ii} = 1$ e portanto

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}_{F'} \cdot N + M)_i &= \sum_{k=1}^{n-1} (\mathcal{N}_{F'})_{ik} n_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathcal{N}_{F'})_{ik} (A_{F'-1})_{ki} - (\mathcal{N}_{F'})_{ii} \\ &= (\gamma')_i + 1 - (\mathcal{N}_{F'})_{ii} = (\gamma')_i. \end{aligned}$$

Isto nos dá uma equação de inversão $\mathcal{N}_F \cdot B = \Gamma + I_n$, com $\Gamma = [\gamma | \dots | \gamma]$, onde $\gamma_l = (\gamma')_l$ para $l = 1, \dots, n-1$ e $\gamma_n = 0$. A conclusão é a mesma do caso anterior, portanto provamos este caso.

Caso 3. O vértice correspondendo a x_j não pertence ao circuito e seu grau em $G_{F'}$ é 1

Neste caso, podemos facilmente ver que $s = s' + 1$ e, por um argumento similar, $\widetilde{G}_F = \widetilde{G}_{F'} \cup \{x_i x_j\}$, onde x_i é o único vértice de $G_{F'}$ adjacente a x_j . Notemos que nesta situação precisamos provar que o vetor γ que aparece na equação de inversão de F tem módulo $|\gamma'| + 2$, onde γ' é o vetor correspondente para a equação de inversão de F' ; mais precisamente, $\mathbf{x}^\gamma = \mathbf{x}^{\gamma'} x_i x_j$.

Por hipótese, existe um único vértice indexado por algum $i < j$ tal que $x_i x_j$ pertence a F' – aqui x_i pode ou não pertencer ao circuito. Neste caso achamos apropriado expressar a matriz inversa de Cremona de \mathcal{N}_F na forma

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A_{F'-1} & N \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) + E,$$

onde N é a i -ésima coluna de $A_{F'-1}$ e $E = (e_{kl})$ é a matriz $n \times n$ definida por

$$e_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = j, l \neq n \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Multiplicando, encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_F \cdot B &= \left(\begin{array}{c|ccc} \mathcal{N}_{F'} \cdot A_{F'-1} & & & \mathcal{N}_{F'} \cdot N + M \\ \hline 0 & & & 1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_j & \dots & \alpha_j & \mathbf{0} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \gamma' + \alpha_j & \dots & \gamma' + \alpha_j & \mathcal{N}_{F'} \cdot N + M \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) + I_n, \end{aligned}$$

onde α_j é a j -ésima coluna de $\mathcal{N}_{F'}$.

Afirmamos que:

1. $\mathcal{N}_{F'} \cdot N + M = \gamma' + \alpha_j$
2. Toda linha de B tem um elemento nulo.

Isto resolve este caso, pois os itens acima nos dão uma equação de inversão para F com único vetor $\gamma := \gamma' + \alpha_j$ e, como α_j é a coluna da matriz de uma aplicação de Cremona em grau 2, segue que $\mathbf{x}^\gamma = \mathbf{x}^{\gamma'} x_i x_j$ – em particular, $|\gamma| = |\gamma'| + 2$, como queríamos. Também é claro pela forma de B que não existem elementos nulos ao longo da diagonal principal. Por outro lado, como x_j tem grau 1 em $G_{F'}$, por hipótese de indução, as entradas da j -ésima linha de $A_{F'-1}$ são 0, 1 e nem todas são nula. Além disso, o formato explícito de B prova que suas entradas são 0, 1, 2 enquanto 2 aparece exatamente na i -ésima linha se e somente se x_i é um vértice fora do circuito com grau ≥ 2 .

Para provar a primeira afirmação, procedemos analisando alguns casos:

- Se $l \neq j, i$ temos $m_l = 0$ e $(\mathcal{N}_{F'})_{lj} = 0$, portanto

$$(\mathcal{N}_{F'} \cdot N + M)_l = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathcal{N}_{F'})_{lk} (A_{F'-1})_{ki} = (\gamma')_l + \alpha_{lj}.$$

- Se $l = j$, é o caso que $m_j = 1$ e $(\mathcal{N}_{F'})_{jj} = 1$, logo

$$(\mathcal{N}_{F'} \cdot N + M)_j = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathcal{N}_{F'})_{jk} (A_{F'-1})_{ki} + 1 = (\gamma')_j + 1 = (\gamma')_j + \alpha_{jj}.$$

- Se $l = i$ então $m_i = 0$ e $(\mathcal{N}_{F'})_{ij} = 1$, portanto

$$(\mathcal{N}_{F'} \cdot N + M)_i = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathcal{N}_{F'})_{ik} (A_{F'-1})_{ki} = (\gamma')_i + 1 = (\gamma')_i + \alpha_{ij}.$$

A segunda afirmação é óbvia para qualquer linha exceto possivelmente para a j -ésima linha. Para a última, é suficiente provar que $(A_{F^{-1}})_{jn} = (A_{F^{-1}})_{ji} = 0$. Primeiro observemos que $(\mathcal{N}_{F'})_{jj} = 1$ e $(\mathcal{N}_{F'})_{jk} = 0$ para todo $k \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{j\}$ já que estamos na forma normal e j é o índice de um vértice cujo grau é 1. Então a equação de inversão de F' implica que $(A_{F'^{-1}})_{jk} = \gamma'_j + \delta_{jk}$ para $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Como $A_{F'^{-1}}$ satisfaz as restrições canônicas, algum elemento ao longo de j -ésima coluna é nulo. Portanto $(A_{F'^{-1}})_{jk} = 0$ para todo $k \neq j$ e $(A_{F'^{-1}})_{jj} = 1$; em particular, $(A_{F'^{-1}})_{ji} = 0$.

Para concluir, explanamos a adaptação no caso onde o circuito degenera em um laço. Isto diz respeito somente ao passo inicial no processo indutivo. Como estamos supondo que $n \geq 2$ e F satisfaz as restrições canônicas, os monômios não admitem fator comum próprio. Portanto, $n \geq s_1 + 2$ onde, lembrando, $s_1 \geq 1$ denota o número de arestas de G_F na primeira vizinhança do laço. Logo, o passo inicial pode ser para $n = s_1 + 2$, enquanto que no próximo passo da indução podemos então supor que $n > s_1 + 2$. Assim o passo inicial é $F = \{x_1^2, x_1x_2, \dots, x_1x_{n-1}, x_{n-1}x_n\}$, com $n \geq 3$. Consideremos o segundo conjunto em grau 2:

$$\{x_1x_{n-1}, x_2x_{n-1}, \dots, x_{n-2}x_{n-1}, x_{n-1}^2, x_1x_n\}. \quad (2.2)$$

Um cálculo direto prova que este conjunto é o conjunto inverso de Cremona de F – podemos compor os dois conjuntos ou então tomar as respectivas matrizes-log e multiplicá-las, encontrando a equação de inversão, com vetor de inversão $\gamma = (2, 0, \dots, 0, 1, 0)^t$. É claro que, nesta situação particular, as afirmações de (a) à (c) são válidas.

O resto do argumento é análogo ao caso livre de quadrados. \square

2.3.2 EXEMPLO. Segue alguns exemplos para ilustrar o Teorema 2.3.1.

1. Considere $F_1 = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_1x_5, x_2x_6\}$ um conjunto de Cremona. Note que o grafo associado a este conjunto tem segunda vizinhança vazia e o comprimento de seu único circuito é $r = 5$. Daí o grau dos monômios de F_1^{-1} é $\frac{r+1}{2} + s = 3$ e o fator de inversão é $x_1x_2x_3x_4x_5$. Além disso, pela demonstração do Teorema 2.3.1, o

formato explícito da matriz-log de F_1^{-1} é

$$A_{F_1^{-1}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

ou ainda, $F_1^{-1} = \{y_1y_3y_5, y_1y_2y_4, y_2y_3y_5, y_1y_3y_4, y_2y_4y_5, y_3y_5y_6\}$.

2. Considere $F_2 = F_1 \cup \{x_6x_7\}$ um conjunto de Cremona. O grafo associado a este conjunto possui um único vértice fora do circuito de grau ≥ 2 e o comprimento de seu único circuito é $r = 5$. Daí o grau dos monômios de F_2^{-1} é $\frac{r+1}{2} + s = 4$ e o fator de inversão é $x_1x_2^2x_3x_4x_5x_6$. Além disso, pela demonstração do Teorema 2.3.1, o formato explícito da matriz-log de F_1^{-1} é

$$A_{F_2^{-1}} = \left(\begin{array}{c|c} A_{F_1^{-1}} & N \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) + E,$$

onde N é a i -ésima coluna de $A_{F_1^{-1}}$ e $E = (e_{kl})$ é a matriz $n \times n$ definida por

$$e_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = j, l \neq n \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Daí

$$A_{F_2^{-1}} = \left(\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

ou, $F_2^{-1} = \{y_1y_3y_5y_6, y_1y_2y_4y_6, y_2y_3y_5y_6, y_1y_3y_4y_6, y_2y_4y_5y_6, y_3y_5y_6^2, y_1y_2y_4y_7\}$.

3. Considere $F_3 = F_2 \cup \{x_6x_8\}$ um conjunto de Cremona. O grafo associado a este conjunto possui um único vértice fora do circuito de grau ≥ 2 e o comprimento de seu único circuito é $r = 5$. Daí o grau dos monômios de F_3^{-1} é $\frac{r+1}{2} + s = 4$ e o fator de

inversão é $x_1x_2^2x_3x_4x_5x_6$. Além disso, pela demonstração do Teorema 2.3.1, o formato explícito da matriz-log de F_1^{-1} é

$$A_{F_3^{-1}} = \left(\begin{array}{c|c} A_{F_2^{-1}} & N \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right),$$

onde $N = [n_l]$ é a matriz $(n-1) \times 1$ definida por

$$n_l = \begin{cases} (A_{F_2^{-1}})_{li} - 1, & \text{se } l = i \\ (A_{F_2^{-1}})_{li}, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Daí

$$A_{F_3^{-1}} = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

ou seja, $F_3^{-1} = F_2^{-1} \cup \{y_1y_2y_4y_8\}$.

2.4 p -involuções de grau 2

Um conjunto de Cremona satisfazendo as restrições canônicas é chamado uma p -involução se coincide com seu conjunto inverso a menos de permutação das variáveis e dos geradores.

A noção de uma p -involução foi motivada pela noção de involução na teoria clássica das transformações de Cremona, admitindo-se a intervenção de uma projetividade. No contexto monomial, p é uma abreviação para “permutação”. Notemos que a noção de p -involução é válida ainda que o conjunto contenha monômios que não são livres de quadrados.

2.4.1 EXEMPLO. Considere $F = \{x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3, x_2x_4, x_3x_5\}$ um conjunto de Cremona e note que o conjunto $F^{-1} = \{x_1x_3, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_1x_5\}$ é o conjunto inverso de F . Podemos ver que os grafos associados aos conjuntos F e F^{-1} são isomorfos. Logo F é uma p -involução.

Voltemos aos conjuntos de Cremona *livres de quadrados* de grau 2. Doravante, suporemos sem alerta adicional, que o conjunto de Cremona em grau 2 satisfaz as restrições canônicas (o que significa que a aplicação não é equivalente a aplicação identidade).

A seguinte terminologia será conveniente.

2.4.2 DEFINIÇÃO. Um conjunto de Cremona livre de quadrados em grau 2 é de *tipo curto* se o circuito (ímpar) do seu grafo correspondente tem segunda vizinhança vazia, caso contrário dizemos que o conjunto é de *tipo longo* ou de *tipo geral*.

Pelo Teorema 2.3.1, o conjunto de Cremona é de tipo curto se e somente se o grau da inversa é $(r + 1)/2$, onde r é o comprimento do único circuito (ímpar) no grafo simples associado.

O próximo resultado é sobre a natureza de uma p -involução em grau 2.

2.4.3 PROPOSIÇÃO. Denotemos por F um conjunto de Cremona de grau 2 e por G_F , o grafo correspondente. Indiquemos por r o comprimento do único circuito (podendo ser um laço) em G_F e por s , o número de vértices de G_F fora do circuito cujo grau é ≥ 2 . As seguintes condições são equivalentes:

- (a) F é uma p -involução
- (b) A inversa F^{-1} tem grau 2
- (c) F é livre de quadrados de tipo curto e $r = 3$, ou $r = 1$ (laço) e $s = 1$.

Demonstração. A implicação (a) \Rightarrow (b) é trivial.

Pelo Teorema 2.3.1, $(r + 1)/2 + s = 2$. Portanto, ou $r = 3$ e $s = 0$ – correspondendo ao caso em que o circuito é de comprimento 3 e existem, possivelmente, arestas adicionais todas adjacentes ao mesmo, – ou $r = 1$ e $s = 1$ – neste caso o grafo associado consiste de um laço e possivelmente arestas adicionais (pelo menos uma) adjacente ao laço e outras arestas todas adjacentes ao mesmo vértice. Isto prova a implicação (b) \Rightarrow (c).

Para ver (c) \Rightarrow (a), separamos dois casos.

Primeiramente, consideremos o caso em que G_F tem um circuito C_3 de comprimento 3. Por hipótese, a segunda vizinhança de C_3 é vazia. Portanto, a forma normal da matriz-log

de F tem no máximo 2 blocos:

$$\mathcal{N}_F = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_{C_3} & M \\ \hline 0 & I_t \end{array} \right),$$

onde t é a cardinalidade da primeira vizinhança de C_3 e M é uma matriz $3 \times t$ tendo exatamente um elemento não nulo em toda coluna, este elemento sendo igual a 1.

A aplicação de Cremona definida por C_3 é uma p -involução por inspeção direta (ou como um caso trivial de (2.1)) e a equação de inversão é

$$\mathcal{N}_{C_3} \cdot \mathcal{N}'_{C_3} = [\gamma_{C_3} | \gamma_{C_3} | \gamma_{C_3}] + I_3,$$

onde $\gamma_{C_3} = (1, 1, 1)^t$ e \mathcal{N}'_{C_3} é obtido de \mathcal{N}_{C_3} aplicando a permutação $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ em suas colunas.

Considere a matriz

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_{C_3}' & N \\ \hline 0 & I_t \end{array} \right),$$

onde N é determinada pela existência da igualdade $\mathcal{N}_F \cdot B = [\gamma | \dots | \gamma] + I_t$, com $\gamma = (1, 1, 1, 0, \dots, 0)^t$. Note que

$$\mathcal{N}_F \cdot B = \left(\begin{array}{c|c} [\gamma_{C_3} | \gamma_{C_3} | \gamma_{C_3}] + I_3 & \mathcal{N}_{C_3} \cdot N + M \\ \hline 0 & I_t \end{array} \right).$$

Isto é, vamos resolver a equação $\mathcal{N}_{C_3} \cdot N + M = [\mathbb{I} | \dots | \mathbb{I}]$ para N , onde $\mathbb{I} = (1, 1, 1)^t$.

Agora, seja $(\mathbf{n}_{1j}, \mathbf{n}_{2j}, \mathbf{n}_{3j})^t$ a j -ésima coluna de N . Então a j -ésima coluna de $\mathcal{N}_{C_3} \cdot N$ é $(\mathbf{n}_{1j} + \mathbf{n}_{3j}, \mathbf{n}_{1j} + \mathbf{n}_{2j}, \mathbf{n}_{2j} + \mathbf{n}_{3j})^t$. Como toda coluna de M tem exatamente uma entrada não-nula, e esta entrada é 1, somos tipicamente levados a resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{1j} + \mathbf{n}_{3j} + 1 = 1 \\ \mathbf{n}_{1j} + \mathbf{n}_{2j} = 1 \\ \mathbf{n}_{2j} + \mathbf{n}_{3j} = 1 \end{cases}$$

Podemos ver que a solução é $\mathbf{n}_{1j} = \mathbf{n}_{3j} = 0, \mathbf{n}_{2j} = 1$. Portanto, N é unicamente obtida e, como M , tem exatamente uma entrada não-nula e esta entrada é 1. Mais ainda, por uma simetria óbvia da solução, aplicando a permutação $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ desta vez em torno das linhas de N , vemos que as colunas de M e N são as mesmas. Isto mostra que F é uma p -involução e B é a correspondente matriz-log da inversa de Cremona.

O caso do laço já foi descrito na prova do Teorema 2.3.1 (ver (2.2)). \square

Um conjunto de monômios livres de quadrados satisfazendo as restrições canônicas é chamado *duplamente-estocástico* se sua matriz-log é duplamente-estocástica, isto é, a soma das entradas de cada coluna é um inteiro $d \geq 1$ (isto é, os monômios tem um grau fixado d) e da mesma forma para as entradas de cada linha (isto é, o grau de “incidência” de qualquer variável é também d).

2.4.4 PROPOSIÇÃO. *Seja F um conjunto de Cremona livre de quadrados em grau 2 de tipo curto. Então seu grafo correspondente G_F obedece a uma das seguintes alternativas:*

- (a) *Um circuito (necessariamente ímpar) – ocorrendo se e somente se F é duplamente-estocástico.*
- (b) *Um circuito de comprimento 3 com primeira vizinhança não vazia – neste caso F é uma p -involução*
- (c) *Um circuito de comprimento ≥ 5 com primeira vizinhança não vazia – este caso ocorre se e somente se F não é duplamente-estocástica, nem uma p -involução .*

Demonstração. É evidente que G_F se enquadra em um e somente um dos três casos acima. Portanto, basta provar as afirmações internas dos itens (a), (b) e (c). Como (b) é parte da equivalência (a) \leftrightarrow (c) na Proposição 2.4.3, basta mostrar os itens (a) e (c). O item (a) é completamente claro pois, em grau 2 livre de quadrados, duplamente estocástica significa que todo vértice de G_F tem grau exatamente 2. Para a estrutura de G_F este é o caso se, e somente se, a primeira vizinhança do circuito é vazia. E finalmente, o item (c) é consequência da equivalência (a) \leftrightarrow (c) na Proposição 2.4.3 e da equivalência interna do item (a). \square

Capítulo 3

Resultados em grau arbitrário

3.1 Complemento dual generalizado

Nesta parte estendemos a noção de complementaridade dual discutida em [14, Seção 5.1.2] ao caso de monômios não necessariamente livres de quadrados.

3.1.1 DEFINIÇÃO. Se F é um conjunto de monômios de mesmo grau com matriz-log $A = [a_{ij}]$, seu *complemento dual* é o conjunto \widehat{F} de monômios cuja matriz-log é $\widehat{A} = [\alpha_i - a_{ij}]$, onde $\alpha_i = \max\{a_{ij}, j = 1, \dots, n\}$.

3.1.2 PROPOSIÇÃO. *Seja F um conjunto de monômios em n variáveis, de um mesmo grau d satisfazendo as restrições canônicas. Então F é um conjunto de Cremona se e somente se \widehat{F} é um conjunto de Cremona.*

Demonstração. O argumento segue de perto a prova em [14, Proposição 5.4] com as devidas modificações. Mostraremos a igualdade

$$(|\alpha| - d) \det(A) = (-1)^{n-1} d \det(\widehat{A}),$$

onde $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Para tal, procedemos com em [loc.cit.], usando as propriedades de determinantes e o fato que A e \widehat{A} são matrizes estocásticas – esta última de grau estocástico $|\alpha| - d$, como se vê imediatamente. Substituindo a última linha de A pela soma de todas

as linhas da A concluímos que $\det(A) = d \det(A')$, onde:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

De maneira similar podemos provar que $\det(\widehat{A}) = (|\alpha| - d) \det(\widehat{A}')$, onde

$$\widehat{A}' = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n-11} & \cdots & b_{n-1n} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

e $\widehat{A} = [b_{ij}]$.

Observemos que se pode obter \widehat{A}' de A' subtraindo da i -ésima linha o vetor $(\alpha_i, \dots, \alpha_i)$ para cada uma das $n - 1$ primeiras linhas de A' e trocando o sinal em cada etapa. Então $\det(A') = (-1)^{n-1} \det(\widehat{A}')$ e, conseqüentemente,

$$\det(A) = d \det(A') = (-1)^{n-1} d \det(\widehat{A}') = (-1)^{n-1} \frac{d}{|\alpha| - d} \det(\widehat{A}).$$

Ora, se F é um conjunto de Cremona então $|\det(A)| = d$. Tomando valores absolutos na equação acima, concluímos que $|\det(\widehat{A})| = |\alpha| - d$. Portanto \widehat{F} é um conjunto de Cremona. A implicação inversa é obtida por um argumento análogo. \square

Chamaremos \widehat{F} de *conjunto de Cremona dual de F* e \widehat{A} de *matriz de Cremona dual de F* .

3.1.3 TEOREMA. *Seja $F \subset k[x_1, \dots, x_n]$ um conjunto de Cremona de grau d satisfazendo as restrições canônicas. Então a inversa do conjunto de Cremona dual de F é o conjunto dual da inversa, isto é, a matriz inversa de Cremona dual de F é*

$$A_{\widehat{F}^{-1}} = \widehat{A_{F^{-1}}} = [\beta_i - b_{ij}], \quad (3.1)$$

onde $A_{F^{-1}} = [b_{ij}]$ e $\beta_i = \max \{b_{ij}, j = 1, \dots, n\}$.

Demonstração. Sejam $A = [a_{ij}]$ a matriz log de F e $B = [b_{ij}]$ a matriz inversa de Cremona de A – isto é, B é a matriz-log da inversa F^{-1} de F satisfazendo as restrições canônicas. Consideremos $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$ o vetor de inversão de F .

Ponhamos

$$\widehat{b}_{ij} := \beta_i - b_{ij}, \text{ com } \beta_i = \max\{b_{i1}, \dots, b_{in}\}$$

$$\widehat{\gamma}_i := \alpha_i \left(\sum_{l=1}^n \beta_l - d' \right) - \sum_{l=1}^n a_{il} \beta_l + \gamma_i \text{ com } \alpha_i = \max\{a_{i1}, \dots, a_{in}\}$$

onde d' é o grau de F^{-1} . Notemos que $\widehat{\gamma}_i$ depende somente da i -ésima linha da matriz A e B . Escrevendo $\widehat{A}[\widehat{b}_{ij}] = [\widehat{c}_{ij}]$, temos:

$$\widehat{c}_{ij} = \sum_{l=1}^n \widehat{a}_{il} \widehat{b}_{lj} = \sum_{l=1}^n (\alpha_i - a_{il})(\beta_l - b_{lj}) = \sum_{l=1}^n \alpha_i \beta_l - \sum_{l=1}^n \alpha_i b_{lj} - \sum_{l=1}^n a_{il} \beta_l + \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj},$$

do qual resulta

$$\widehat{c}_{ij} = \alpha_i \left(\sum_{l=1}^n \beta_l - d' \right) - \sum_{l=1}^n a_{il} \beta_l + \gamma_i + \delta_{ij} = \widehat{\gamma}_i + \delta_{ij}.$$

Logo, $\widehat{A}\widehat{B} = \underbrace{[\widehat{\gamma}^t | \dots | \widehat{\gamma}^t]}_n + I_n$, onde $\widehat{B} = [\widehat{b}_{ij}]$ e $\widehat{\gamma} = (\widehat{\gamma}_1 | \dots | \widehat{\gamma}_n)$. Além disso, toda linha de \widehat{B} contém um elemento não nulo. Consequentemente, pelo Teorema 1.3.3, \widehat{B} é a matriz inversa de Cremona de \widehat{F} . \square

Notemos o impacto para aplicações de grau 2.

3.1.4 COROLÁRIO. *Se F é uma transformação de Cremona de grau 2, livre de quadrados, então o grau da inversa da Cremona dual de F é $n - \frac{r+1}{2}$, onde r denota o número de vértices do circuito ímpar do grafo associado a F .*

Demonstração. Pelo item (b)(ii) do Teorema 2.3.1, todas as entradas da matriz-log de F^{-1} pertencem a $\{0, 1, 2\}$ e além disso, a i -ésima linha contém um elemento igual a 2 se e somente se o vértice x_i correspondente não pertence ao circuito de G_F e tem grau ≥ 2 . Resulta que o vetor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ introduzido no argumento da Proposição 3.1.2 é tal que

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{se } d_{G_F}(x_i) = 1 \text{ ou se } x_i \text{ está no circuito} \\ 2, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Como a soma dos elementos de cada coluna da matriz-log da inversa é o grau da inversa, pela equação 3.1 vem que o grau da inversa da dual de F é $\sum_{l=1}^n (\alpha_l - [A_{F^{-1}}]_{lj})$ para qualquer $j = 1, \dots, n$.

Pelo que observamos acima, $\sum_{l=1}^n \alpha_l = n - s + 2s = n + s$, onde s é o número de vértices em G_F fora do circuito cujo grau de incidência é ≥ 2 , e além disso $\sum_{l=1}^n [A_{F^{-1}}]_{lj} = \text{grau}(F^{-1}) = \frac{r+1}{2} + s$. \square

3.2 Aplicações de Cremona apócrifas

Nesta parte desenvolveremos alguns resultados sobre uma transformação de Cremona monomial livre de quadrados cuja inversa não é livre de quadrados – uma tal transformação, bem como o conjunto de monômios correspondente, será designada *apócrifa*, seguindo a terminologia sugerida em [14]. Surpreendentemente, esta noção goza de certa estabilidade, como veremos a seguir.

3.2.1 PROPOSIÇÃO. *Seja F um conjunto de Cremona livre de quadrados em grau d . Então*

$$F \text{ apócrifo} \Leftrightarrow \widehat{F} \text{ apócrifo}.$$

Demonstração. Pela relação característica de $A_{\widehat{F}^{-1}}$ em (3.1), concluímos que se A_F admite algum elemento > 1 , o mesmo ocorre com $A_{\widehat{F}^{-1}}$. \square

Uma outra situação em que a hipótese apócrifa é preservada vem do seguinte fenômeno geral para transformações de Cremona não necessariamente monomiais.

3.2.2 PROPOSIÇÃO. *Seja $F = \{f_1, \dots, f_{n-1}\} \subset k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ um conjunto de formas de grau $d \geq 2$ definindo uma aplicação de Cremona de \mathbb{P}^{n-2} . Se $g \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ é um polinômio homogêneo de grau $d - 1$, então $F' = F \cup \{gx_n\} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ define uma transformação de Cremona de \mathbb{P}^{n-1} .*

Demonstração. Como F é um conjunto de Cremona então

$$k(f_1, \dots, f_{n-1}) = k(x_1^d, x_2/x_1, \dots, x_{n-1}/x_1) = k(\mathbf{x}_d),$$

onde \mathbf{x}_d é o conjunto de todos os monômios em $k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ de grau d . Basta então mostrar que $x_n/x_1 \in k(f_1, \dots, f_{n-1}, gx_n)$.

Primeiro suponhamos g um monômio, digamos $g = x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$. Temos

$$g = x_1^{\overbrace{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}}^{d-1}} \underbrace{(x_2/x_1)^{\alpha_2} \dots (x_{n-1}/x_1)^{\alpha_{n-1}}}_{h \in k(f_1, \dots, f_{n-1}, gx_n)} = x_1^{d-1} h.$$

Logo $x_n/x_1 = gx_n/hx_1^d \in k(f_1, \dots, f_{n-1}, gx_n)$. Se g é homogêneo, este argumento se aplica a cada parcela de g . \square

No caso monomial, a transformação da natureza acima preserva a propriedade apócrifa.

3.2.3 PROPOSIÇÃO. *Sejam $F = \{f_1, \dots, f_{n-1}\} \subset k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ um conjunto de Cremona monomial livre de quadrados em grau $d > 1$ e $F' = F \cup \{gx_n\} \subset k[x_1, \dots, x_n]$, onde $g \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ é um monômio de grau $d - 1$. Se F é apócrifo então F' também é.*

Demonstração. Consideremos $B_{F'}$ a única matriz inversa de Cremona de $A_{F'}$ satisfazendo as restrições canônicas e $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_n)$ o vetor de inversão de F' . Como toda linha de $B_{F'}$ tem pelo menos um elemento nulo e $A_{F'}B_{F'} = \Gamma' + I_n$, onde $\Gamma' = \underbrace{[\gamma'_1 \dots \gamma'_n]}_n$ temos que $b_{nj} = 0$ para todo $j = 1, \dots, n - 1$, $b_{nn} = 1$ e $\gamma'_n = 0$. Assim podemos escrever

$$A_{F'} = \left(\begin{array}{c|c} A_F & M \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \text{ e } B_{F'} = \left(\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right),$$

onde A_F é a matriz-log de F , M é o vetor log de g , C e D são matrizes $M_{n-1 \times n-1}$ e $M_{n-1 \times 1}$, respectivamente.

Pela multiplicação usual de blocos temos

$$A_{F'}B_{F'} = \left(\begin{array}{c|c} A_FC & AD + M \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \Gamma + I_{n-1} & \gamma \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right),$$

onde $\gamma := (\gamma'_1, \dots, \gamma'_{n-1})$ e $\Gamma = \underbrace{[\gamma | \dots | \gamma]}_{n-1}$.

Notemos que $A_FC = \Gamma + I_{n-1}$. Logo, a menos de proporcionalidade, a aplicação racional $G = (\mathbf{X}^{v_1} : \dots : \mathbf{X}^{v_{n-1}})$ é a inversa de F , onde $C = [v_1, \dots, v_{n-1}]$. Assim, se F' é um conjunto de Cremona não apócrifo então F também é. \square

3.2.4 EXEMPLO. *A recíproca da proposição acima não é verdadeira pois os conjuntos*

$$F = \{x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3, x_1x_4\} \text{ e } F' = F \cup \{x_4x_5\}$$

são tais que F é uma p -involução e F' é apócrifa (Ver próximo corolário).

Como um complemento da proposição anterior, temos o seguinte resultado.

3.2.5 COROLÁRIO. *Seja F um conjunto de Cremona livre de quadrados em grau 2. Então F é apócrifo se e somente se é de tipo geral, isto é, o grafo G_F correspondente é tal que a segunda vizinhança do único circuito é não-vazia.*

Demonstração. O resultado é consequência imediata do item (b) (ii) do Teorema 2.3.1. \square

3.3 Relação com bases de Hilbert

Nesta seção respondemos afirmativamente a uma questão de R. Villarreal, oralmente comunicada, sobre a relação entre as transformações de Cremona monomiais e bases de Hilbert.

Dado um subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, denotemos por $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ (respectivamente $\mathbb{N}\mathcal{A}$) o reticulado inteiro gerado por \mathcal{A} (respectivamente, o conjunto dos elementos do reticulado com coeficientes não negativos). Lembrando que um subconjunto finito $H \subset \mathbb{R}^n$ é uma *base de Hilbert* se $\mathbb{Z}^n \cap \mathbb{R}_+H = \mathbb{N}H$. Um cone poliédrico é dito admitir uma base de Hilbert se contém uma base de Hilbert e é gerado por ela. Além disso, um ideal I de um anel R é *normal* se todas as suas potências são integralmente fechadas em R .

Seja k um corpo arbitrário. Se $v = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ e $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ são indeterminadas sobre k então escrevamos $\mathbf{X}^v := X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \in k[\mathbf{X}]$ para o conjunto de monômios associados como introduzido no primeiro capítulo.

Nosso primeiro resultado principal desta seção é o seguinte.

3.3.1 TEOREMA. *Sejam $v_1, \dots, v_q \in \mathbb{N}^n$ ($q \geq n$) dados tais que os monômios associados $\mathbf{X}^{v_1}, \dots, \mathbf{X}^{v_q}$ têm o mesmo grau $d \geq 1$. Se o ideal $(\mathbf{X}^{v_1}, \dots, \mathbf{X}^{v_q}) \subset k[\mathbf{X}]$ é normal então $\{(v_1, 1), \dots, (v_q, 1)\}$ é base de Hilbert.*

Demonstração. Primeiro notemos que, como o anel $k[\mathbf{X}]$ é normal, o ideal $(\mathbf{X}^{v_1}, \dots, \mathbf{X}^{v_q}) \subset k[\mathbf{X}]$ é normal se, e somente se, a álgebra de Rees deste ideal é normal. Mas a álgebra de Rees é isomorfa ao subanel $k[\mathbf{X}, \mathbf{X}^{v_1}T, \dots, \mathbf{X}^{v_q}T] \subset k[\mathbf{X}, T]$. Aplicando o conhecido critério combinatório dado na Proposição 1.1.3 encontramos que esta álgebra é normal se, e somente se,

$$\mathbb{Z}H' \cap \mathbb{R}_+H' = \mathbb{N}H',$$

onde $H' = \{e_1, \dots, e_n\} \cup H$, $H = \{(v_1, 1), \dots, (v_q, 1)\} \subset \mathbb{N}^{n+1}$ e $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ é a base canônica de \mathbb{Z}^{n+1} .

Por outro lado, é bem conhecido que como consequência do Lema de Farkas [Corolário 4.2.2] e também do Teorema Fundamental das inequações [Teorema 4.2.1], para qualquer subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^m$ as inclusões naturais

$$\mathbb{Z}\mathcal{A} \cap \mathbb{Q}_+\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}\mathcal{A} \cap \mathbb{R}_+\mathcal{A} \quad \text{e} \quad \mathbb{Z}^m \cap \mathbb{Q}_+\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^m \cap \mathbb{R}_+\mathcal{A}$$

são igualdades.

Portanto basta provar que

$$\mathbb{Z}H' \cap \mathbb{Q}_+H' \subset \mathbb{N}H' \Rightarrow \mathbb{Z}^{n+1} \cap \mathbb{Q}_+H \subset \mathbb{N}H.$$

Notemos que $\mathbb{Z}H' = \mathbb{Z}^{n+1}$ pois $e_{n+1} = (v_1, 1) - v_{1,1}e_1 + \dots + v_{n,1}e_n$, onde $v_1 = (v_{1,1}, \dots, v_{n,1})$.

Então, seja $z \in \mathbb{Z}^{n+1} \cap \mathbb{Q}_+H$, digamos, $z = (z_1, \dots, z_{n+1}) = \lambda_1(v_1, 1) + \dots + \lambda_q(v_q, 1)$. Portanto

$$z_{n+1} = \sum_{i=1}^q \lambda_i \quad \text{e} \quad |z| = \left(\sum_{i=1}^q \lambda_i \right) (d+1) = z_{n+1}(d+1).$$

Como $H \subset H'$, também $z \in \mathbb{Z}^{n+1} \cap \mathbb{Q}_+H'$, e pela hipótese podemos escrever

$$z = \alpha_1(v_1, 1) + \dots + \alpha_q(v_q, 1) + \beta_1(e_1, 0) + \dots + \beta_n(e_n, 0),$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{N}$. Mas então $z_{n+1} = \sum_{i=1}^q \alpha_i$ e

$$|z| = \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \right) (d+1) + \sum_{j=1}^n \beta_j = z_{n+1}(d+1) + \sum_{j=1}^n \beta_j,$$

portanto $\sum_{j=1}^n \beta_j = 0$, que é, $\beta_j = 0$ para todo j . Consequentemente, $z \in \mathbb{N}H$ como queríamos provar. \square

A recíproca deste teorema não é válida, como se constata no exemplo a seguir.

3.3.2 EXEMPLO. Consideremos os monômios

$$\{X_1^4, X_1^2 X_2 X_4, X_1 X_2^2 X_3, X_2^3 X_3\} \subset R = k[X_1, X_2, X_3, X_4].$$

Verifiquemos que, de fato,

$$\{(4, 0, 0, 0, 1)^t, (2, 1, 0, 1, 1)^t, (1, 2, 1, 0, 1)^t, (0, 3, 1, 0, 1)^t\}$$

é base de Hilbert. Para isso é suficiente provar que $\mathbb{Q}_+H \cap \mathbb{Z}^5 \subset \mathbb{N}H$. Temos que $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbb{Q}_+H \cap \mathbb{Z}^5$ se e somente se $z_i \in \mathbb{Z}$ e existem $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{Q}_+$ tais que

$$\begin{cases} z_1 = 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ z_2 = \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 \\ z_3 = \lambda_3 + \lambda_4 \\ z_4 = \lambda_2 \\ z_5 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = z_5 - z_4 - z_3 \\ \lambda_2 = z_4 \\ \lambda_3 = z_1 - 4\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ \lambda_4 = z_3 - \lambda_3 \end{cases}$$

Das equações acima podemos concluir que $\lambda_i \in \mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$, e consequentemente $z \in \mathbb{N}H$, como queríamos.

Contudo o ideal $I \subset R$ gerado pelos monômios não é normal. Para verificar este fato, consideramos a álgebra de Rees \mathcal{R} de I . Usando *Macaulay*, pode-se calcular uma resolução livre de \mathcal{R} sobre o anel de polinômios $R[\mathbf{Y}] = R[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4]$. Localizando em um ideal primo $P \subset R[\mathbf{Y}]$ de codimensão 5 convenientemente escolhido (por inspeção direta do ideal de definição da álgebra), vemos que a profundidade de \mathcal{R} localmente em P é 1, enquanto $\dim \mathcal{R}_P = 2$. Este argumento prova que \mathcal{R} não satisfaz a condição (S_2) de Serre, uma das condições para a normalidade – embora, neste exemplo, \mathcal{R} seja localmente regular em codimensão 1.

3.3.3 LEMA. *Seja $H = \{v_1, \dots, v_q\} \subset \mathbb{Z}^n$ um subconjunto arbitrário. Então os vetores $\{(v_1, 1), \dots, (v_q, 1)\} \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ geram um cone pontudo. Se, além disso, os monômios associados aos vetores em H tem o mesmo grau então este cone tem a mesma dimensão do cone gerado por H .*

Demonstração. Para provar que o cone poliédrico gerado por $(H, 1) := \{(v_1, 1), \dots, (v_q, 1)\}$ é pontudo mostraremos que ele é fortemente convexo, a saber, seja

$$\sum_j a_j(v_j, 1) = \sum_j b_j(v_j, 1),$$

com $a_j \geq 0, \forall j$ e $b_j \leq 0, \forall j$. Olhando para a última coordenada, temos $\sum_j a_j = \sum_j b_j$, ou seja, $a_j = 0, \forall j$.

Assumindo, agora que a matriz cujas colunas são vetores em H é d -estocástica para algum $d \geq 1$, a matriz

$$\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \\ d & \cdots & d \end{pmatrix}$$

possui a última linha sendo a soma das linha de $[v_1 | \dots | v_q]$, e portanto ambas tem o mesmo posto. Mas este é também o posto sobre \mathbb{Q} (portanto, sobre \mathbb{Z}) da matriz cujas colunas são $(v_1, 1), \dots, (v_q, 1)$. \square

3.3.4 OBSERVAÇÃO. Notemos que a primeira parte do lema é ainda mais geral, um conjunto finito de vetores em \mathbb{Z}^n gera um cone pontudo se, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, suas i -ésimas coordenadas são números naturais positivos.

O resultado combinatório principal desta parte segue agora. Lembremos que pelo Teorema 4.2.5 se H uma base de Hilbert de um cone poliédrico pontudo e r o posto do reticulado inteiro gerado por H então este tem um subconjunto contendo r vetores linearmente independentes formando uma base de Hilbert.

3.3.5 TEOREMA. *Seja $H = \{v_1, \dots, v_q\} \subset \mathbb{N}^n$ tal que os monômios associados têm o mesmo grau $d \geq 1$ e $\mathbb{Z}H$ tem posto n . Se $(H, 1) = \{(v_1, 1), \dots, (v_q, 1)\} \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ é uma base de Hilbert então existe uma submatriz $n \times n$ de $[v_1 | \dots | v_q]$ cujo determinante é d .*

Demonstração. Pelo Lema 3.3.3, o cone gerado por $(H, 1)$ é pontudo. Portanto, pelo Teorema 4.2.5, $(H, 1)$ admite um subconjunto $(H', 1)$ de n vetores linearmente independentes que é base de Hilbert.

Afirmamos que a matriz cujas colunas são os vetores em H' satisfaz a tese. Para isto é suficiente provar um isomorfismo de \mathbb{Z} -módulos $\mathbb{Z}^n / \mathbb{Z}H' \simeq \mathbb{Z} / d\mathbb{Z}$. Primeiro notemos que $\mathbb{Z}^n / \mathbb{Z}H'$ é um \mathbb{Z} -módulo de torsão já que $\mathbb{Z}H'$ tem posto n . Por outro lado, não é difícil provar que existe uma sequência exata de \mathbb{Z} -módulos

$$0 \rightarrow T_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{n+1} / \mathbb{Z}H) \xrightarrow{\varphi} T_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n / \mathbb{Z}H') \xrightarrow{\varphi'} \mathbb{Z} / d\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

onde $T_{\mathbb{Z}}$ denota a \mathbb{Z} -torsão, $\varphi(\overline{(a, b)}) = \overline{a}$ e $\varphi'(\overline{a}) = \overline{|a|}$ sendo $a \in \mathbb{Z}^n$, $b \in \mathbb{Z}$ e $|\cdot|$ a norma da soma.

Agora, $T_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{n+1} / \mathbb{Z}H) = \mathbb{R}H \cap \mathbb{Z}^{n+1} / \mathbb{Z}H$, um fato que pode ser provado usando uma simples consequência do Teorema 4.2.1 e do Corolário 4.2.2, a saber, $\mathbb{R}H \cap \mathbb{Z}^{n+1} = \mathbb{Q}H \cap$

\mathbb{Z}^{n+1} . Sendo H uma base de Hilbert, $\mathbb{R}_+H \cap \mathbb{Z}^{n+1} = \mathbb{N}H$. Mas a última igualdade implica que $\mathbb{R}H \cap \mathbb{Z}^{n+1} \subset \mathbb{Z}H$, um fato que pode ser checado escrevendo todo coeficiente $a \in \mathbb{R}$ na forma $[a] + b$, com $b \in \mathbb{R}_+$. \square

3.3.6 LEMA. *Seja $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$ e seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz d -estocástica tal que $\det A = \pm d$. Então $\det [a_{ij} + \gamma_i] = \pm(d + |\gamma|)$.*

Demonstração. Faremos a prova por indução em $|\gamma|$.

Se $|\gamma| = 1$, digamos $\gamma = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ é um vetor cuja única coordenada não-nula é a r -ésima coordenada. Logo

$$\det [a_{ij} + \gamma_i] = \sum_{j=1}^n (-1)^{r+j} (a_{rj} + \gamma_r) \det A_{rj} = \sum_{j=1}^n (-1)^{r+j} a_{rj} \det A_{rj} + \sum_{j=1}^n (-1)^{r+j} \det A_{rj} =$$

$$= \det A + \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r-11} & \dots & a_{r-1n} \\ 1 & \dots & 1 \\ a_{r+11} & \dots & a_{r+1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A'},$$

onde A_{rj} é a matriz dos cofatores. Substituindo a r -ésima linha de A pela soma de todas as linhas de A e usando o fato que A é uma matriz d -estocástica podemos concluir que $d \det A' = \det A$. Logo $\det [a_{ij} + \gamma_i] = \pm(d + 1)$.

Suponha que para todo γ' tal que $|\gamma'| = l - 1 \geq 1$ o lema seja válido e seja γ tal que $|\gamma| = l$. Suponha que a r -ésima coordenada de γ seja não-nula e escreva $\gamma = \gamma' + \gamma_r$, onde $\gamma_r = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ é um vetor cuja única coordenada não-nula é a r -ésima coordenada e $\gamma' = \gamma - \gamma_r$. Logo

$$\det [a_{ij} + \gamma_i] = \det [(a_{ij} + \gamma'_i) + \gamma_{ri}] = \det [a_{ij} + \gamma'_i] + \det A' = \pm(d + |\gamma'| + 1).$$

Portanto o lema segue. \square

3.3.7 COROLÁRIO. *Seja $H := \{v_1, \dots, v_q\} \subset \mathbb{N}^n$ tal que os monômios associados tem o mesmo grau $d \geq 1$. Se $\mathbb{Z}H$ tem posto n e $\{(v_1, 1), \dots, (v_q, 1)\} \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ é uma base de Hilbert então existem n vetores em H tal que os monômios associados definem uma transformação de Cremona de \mathbb{P}^{n-1} .*

Demonstração. Pelo Teorema 3.3.5, existe uma submatriz $n \times n$ de $[v_1 | \dots | v_q]$ cujo determinante é d , digamos $[v_1 | \dots | v_n]$. Se os respectivos monômios associados a esta submatriz possuem fator comum próprio então existe um vetor $\gamma \in \mathbb{N}^n$ e existem $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{N}^n$ tais que $[v_1 | \dots | v_n] = [w_1 | \dots | w_n] + [\gamma | \dots | \gamma]$, sendo que os respectivos monômios associados a matriz $[w_1 | \dots | w_n]$ não possuem fator comum próprio. Pelo lema anterior, $\det [w_1 | \dots | w_n] = d - |\gamma|$, e como este também o grau dos monômios associados a matriz, logo o princípio determinantal fundamental dado no Lema 1.3.2 pode ser aplicado. \square

O seguinte resultado une os resultados anteriores, construindo uma ponte entre combinatoria e geometria algébrica.

3.3.8 TEOREMA. *Seja $\{\mathbf{X}^{v_1}, \dots, \mathbf{X}^{v_q}\} \subset k[\mathbf{X}] = k[X_1, \dots, X_n]$ ($q \geq n$) um conjunto de monômios de mesmo grau gerando um ideal normal. Então existem n monômios entre esses definindo uma transformação de Cremona de \mathbb{P}^{n-1} .*

Demonstração. Segue imediatamente do corolário anterior e do Teorema 3.3.1 \square

Na verdade, este problema pode ser ainda mais geral. Dado $\{f_1, \dots, f_q\} \subset k[\mathbf{X}] = k[X_1, \dots, X_n]$ ($q \geq n$) um conjunto de formas de mesmo grau definindo uma aplicação birracional sobre a imagem então existem m ($m < q$) formas entre essas definindo uma aplicação birracional sobre a imagem? Usando o dicionário algébrico/combinatório dado no Teorema 1.3.5 e Teorema 1.3.6, tanto no caso de uma aplicação birracional quanto no caso particular de uma aplicação de Cremona, podemos observar que quando as formas são monômios de grau 2 a resposta à questão acima é afirmativa. De fato, se F é um conjunto de monômios de grau 2 definindo uma aplicação birracional então pelo Teorema 1.3.6 ou G_F não contém laços e é um grafo não-bipartido ou G_F contém pelo menos um laço e nos dois casos é possível escolher n arestas em G_F de forma que o subgrafo definido por essas arestas é conexo e ou não contém laços e possui um único circuito de ordem ímpar ou contém um laço e portanto o conjunto de monômios correspondendo ao conjunto de arestas deste subgrafo define uma aplicação de Cremona. Com isso provamos o seguinte resultado abaixo.

3.3.9 PROPOSIÇÃO. *Seja $\{\mathbf{X}^{v_1}, \dots, \mathbf{X}^{v_q}\} \subset k[\mathbf{X}] = k[X_1, \dots, X_n]$ ($q \geq n$) um conjunto de monômios de grau 2 definindo uma aplicação birracional sobre a imagem. Então existem n monômios entre esses definindo uma transformação de Cremona de \mathbb{P}^{n-1} .*

Isso nem sempre é possível quando o grau é diferente de dois. Por exemplo, a aplicação birracional sobre a imagem $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ dada por $F = (x^3 : x^2y : yz^2 : z^3)$ é tal que não existem 3 monômios entre esses definindo uma transformação de Cremona de \mathbb{P}^2 .

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Grafos

A teoria de grafos não orientados admite uma transcrição algébrica em termos de ideais gerados por monômios de grau 2 em um anel de polinômios sobre um corpo k – conhecidos como *ideais de arestas*. O objetivo desta parte é familiarizar o leitor com alguns aspectos básicos desta transcrição.

Dado um conjunto $V \neq \emptyset$, um *grafo* de *vértices* em V e *arestas* A é um par $G = (V, A)$, em que $A \subseteq V \times V$. Quando não for claro escreveremos $A(G)$, em lugar de A , para evidenciar a dependência entre G e A . Um grafo G é *finito* se o conjunto de seus vértices é finito.

Dados vértices v_1, v_2 , dizemos que v_1 é adjacente a v_2 em G , se (v_1, v_2) ou (v_2, v_1) é uma aresta de G . Um grafo é dito ser *completo* se seus vértices são dois a dois adjacentes. Dois vértices $v_1, v_2 \in V$, são ditos *independentes* em G se, ambos, $(v_1, v_2), (v_2, v_1)$ não são aresta de G . Dizemos que o grafo G possui *loops* ou *laços* no vértice v se (v, v) é uma aresta de G . O grafo é *orientado* se existe $v_1, v_2 \in V$ tais que $(v_1, v_2) \in A$ e $(v_2, v_1) \notin A$. Quando um grafo G é não-orientado, desprovido de loops, sem vértices isolados e o conjunto dos vértices é finito diremos que G é *simples*.

Neste resumo e no corpo da tese, consideramos sempre grafos não orientados, sem vértices isolados e cujo conjunto de vértices é finito.

Dado um grafo G , como acima, com conjunto de vértices $V(G) = \{1, \dots, n\}$, podemos

introduzir um ideal $I(G) \subset R = k[x_1, \dots, x_n]$ gerado pelos monômios $x_i x_j$ de grau 2 tais que (i, j) é uma aresta de G (incluindo possivelmente laços (i, i)). O ideal $I(G)$ é chamado o *ideal das arestas* de G .

Sejam G, H dois tais grafos. Dizemos que H é *subgrafo* de G , e escrevemos $H \subseteq G$, se $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$. Além disto, se $A(H) = A(G) \cap (V(H) \times V(H))$ então H é um *subgrafo induzido* de G . Neste caso, denotamos por $G \sqsubseteq H$. Observemos que dado um grafo $G = (V, A)$ e um subconjunto $V' \subseteq V$, existe um único subgrafo induzido de G cujos vértices são os elementos de V' . O subgrafo induzido é denominado *subgrafo gerado* por V' .

Um *caminho de comprimento r* é um grafo cujos vértices e arestas são, respectivamente, a menos de notação,

$$V = \{0, 1, \dots, r\} \text{ e } A = \{(0, 1), (1, 2), \dots, (r-1, r)\}.$$

Dado $r \in \mathbb{N}$ ($r > 2$), um *ciclo ou circuito de comprimento r* , escrito C_r , é um grafo cujos vértices e arestas são, respectivamente, a menos de notação,

$$V = \{1, \dots, r\} \text{ e } A = \{(1, 2), \dots, (r-1, r), (r, 1)\}$$

Um *grafo estrelado* é um grafo cujos vértices e arestas são, respectivamente, a menos de notação,

$$V = \{0, 1, \dots, n\} \text{ e } A = \{(0, 1), (0, 2), \dots, (0, n)\}.$$

Um grafo G é *conexo* se para todo par de vértices existe um caminho em G ligando-os. Um grafo é *r -conexo* ($r \in \mathbb{N}_+$) se para todo subconjunto $V' \subset V(G)$, de cardinalidade menor ou igual a $r-1$, o subgrafo induzido $G(V(G) \setminus V')$ é conexo. Um grafo G é uma *árvore* se é conexo e não possui ciclos.

Sejam G um grafo e v um vértice de G . O *grau de incidência* de v em G (escrito $d_G(v)$) é a cardinalidade do conjunto de vértices que são adjacentes a v . Observemos que se G é r -conexo, então $d_G(v) \geq r$ para todo vértice de G .

Seja G um grafo de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Uma *cobertura* de G é um subconjunto $P \subset V$ tal que para toda aresta (v_i, v_j) tem-se $v_i \in P$ ou $v_j \in P$. Uma cobertura é *mínima* se nenhum de seus subconjuntos próprios é uma cobertura de G , e será *minimal* se não existe cobertura de cardinalidade menor. A cardinalidade de uma cobertura minimal de G , escrita $\alpha_o(G)$, é também designada como o *número de cobertura* de G , enquanto $\beta_o(G) := \#V(G) - \alpha_o(G)$ é dito ser a *dimensão* de G . Da definição segue que o complementar de

uma cobertura é um conjunto de vértices independentes em G , e vice-versa. Portanto, o complementar de cobertura mínima (resp. minimal) corresponde a um conjunto máximo (resp. maximal) de vértices independentes em G . Dizemos que um grafo G é *bipartido* se admite uma cobertura composta por vértices independentes. Observemos que um ciclo de ordem ímpar não é bipartido. Segue-se, portanto, que um grafo bipartido não contém ciclos de ordem ímpar. Esta necessidade óbvia também é uma condição suficiente, isto é, um grafo não trivial G é bipartido se, e somente se, não contém ciclos de ordem ímpar. Um exemplo simples de grafos bipartidos são as árvores, visto que árvores não possuem ciclos.

O *diâmetro* de um grafo é a maior distância entre dois vértices quaisquer do grafo, onde a *distância* entre dois vértices é o número mínimo de arestas conectando eles.

O *grafo-aresta* de um grafo G é o grafo simples cujo conjunto de vértices é o conjunto de arestas de G e dois tais vértices são adjacentes se, e somente se, as arestas originais se encontram. Notemos que o grafo-aresta de um grafo G é conexo se e somente se G é conexo.

4.2 Bases de Hilbert

Nesta seção resumiremos as propriedades básicas de uma base de Hilbert em geometria convexa, conceito originalmente introduzido para uma melhor compreensão da estrutura poliédrica das relações de min-max em otimização combinatória. Veremos também alguns resultados relacionados a cones e poliedros.

Usaremos a ordem parcial em \mathbb{R}^n definida por

$$a = (a_1, \dots, a_n) \leq c = (c_1, \dots, c_n) \Leftrightarrow a_i \leq c_i \text{ para todo } i$$

e o produto interno usual em \mathbb{R}^n . Dados os vetores $a, b \in \mathbb{R}^n$, seu produto interno será denotado por $\langle a, b \rangle$.

Um *espaço afim* ou *variedade afim* em \mathbb{R}^n é por definição a translação de um subespaço linear de \mathbb{R}^n . Se A é um espaço afim, existe um único subespaço linear $V \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$A = x_0 + V,$$

para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se B é um subconjunto de \mathbb{R}^n , definimos o *espaço afim gerado por B* , denotado por $\text{aff}(B)$, como sendo o conjunto de todas as combinações afins dos pontos em

B :

$$\text{aff}(B) = \{b_1v_1 + \dots + b_rv_r; v_i \in B, b_1 + \dots + b_r = 1, b_i \in \mathbb{R}\}.$$

A *dimensão* de um espaço afim A é definida como a dimensão do subespaço linear $V \in \mathbb{R}^n$, tal que $A = x_0 + V$. Um espaço afim de \mathbb{R}^n de dimensão $n - 1$ é chamado de *hiperplano afim*. Para qualquer hiperplano afim H de \mathbb{R}^n existem $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$H = H(a, c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle = c\},$$

Um hiperplano $H = H(a, c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle = c\} \subset \mathbb{R}^n$ determina dois semi-espacos fechados

$$H^+(a, c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle \geq c\} \text{ e } H^-(a, c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle \leq c\}.$$

Usaremos a notação $H_a^+ = H^+(a, 0)$ e $H_a^- = H^-(a, 0)$ quando o hiperplano passar pela origem.

Um *cone (convexo)* em \mathbb{R}^n é um conjunto não vazio $C \subset \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $x, y \in C$ e números reais $\lambda, \mu \geq 0$, temos $\lambda x + \mu y \in C$. Um cone C é *poliédrico* se existe um subconjunto finito $S = \{s_1, \dots, s_q\} \subset C$ tal que $C = \mathbb{R}_+ S := \{\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_q s_q, \lambda_j \in \mathbb{R}_+\}$. Neste caso, referimos-nos a S como um conjunto gerador de C .

Um resultado fundamental devido a Farkas, Minkowski e Weyl (ver [17, Teorema 1.1.31]) diz que um cone é poliédrico se, e somente se, é a interseção de um conjunto finito de semi-espacos fechados passando pela origem. Esta dicotomia na representação de um cone poliédrico, como interseção finita de semi-espacos fechados passando pela origem, conhecida como representação implícita, e como conjunto das combinações lineares não-negativas de um conjunto finito de vetores, conhecida como representação de Minkowski, é muito proveitosa. A representação implícita permite escrever um cone poliédrico na forma $\{v \in \mathbb{R}^n \mid Av \leq 0\}$, para alguma matriz real A .

Dizemos que um cone poliédrico C é *pontudo* se o sistema linear $Ax = 0$ tem somente a solução trivial $x = 0$, isto é, A tem posto máximo. Portanto, C é um cone poliédrico pontudo se, e somente se, este não contém nenhuma reta. Esta condição também significa que $C \cap (-C) = \{0\}$, onde C é um cone poliédrico. Por esta razão um cone pontudo também é chamado *fortemente convexo*.

O *dual* de um cone poliédrico $C \subset \mathbb{R}^n$ é definido como

$$C^* := \{u \in \mathbb{R}^{n*} = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid \langle v, u \rangle \leq 0, \forall v \in C\},$$

onde se $(v, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*}$ então $\langle v, u \rangle = u(v)$, ou seja, o emparelhamento usual em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*}$. É imediato ver que o dual de um cone poliédrico é um cone. Podemos identificar \mathbb{R}^n com seu espaço dual identificando um vetor da base com o seu correspondente na base dual. Neste sentido, o emparelhamento pode ser visto como o produto interno usual e o dual do cone pode ser visto como um subconjunto do \mathbb{R}^n . É suficiente tomar o produto interno sobre um conjunto finito de geradores do cone C . Como tal, temos a representação $C^* = \bigcap_{s \in S} H_s^-$, ou seja, o dual do cone visto como interseção de semi-espacos fechados passando pela origem. Além disso, pelo resultado fundamental devido a Farkas e Minkowski, acima citado, segue que o dual de um cone poliédrico é também um cone poliédrico e $(C^*)^* = C$ para todo cone poliédrico.

Um dos resultados principais desta parte é um teorema conhecido como Teorema Fundamental das inequações lineares devido a Farkas e Minkowski e aperfeiçoado por Carathéodory.

4.2.1 TEOREMA ([11], Teorema 7.1). *Seja $A = \{a_1, \dots, a_n, b\}$ um conjunto de vetores em um espaço n - dimensional sobre um corpo \mathbb{K} ordenado. Então ou $b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$, com $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, ou existe um hiperplano afim H_c contendo $t-1$ vetores linearmente independentes de A tal que $\langle c, b \rangle < 0$ e $\langle c, a_1 \rangle, \dots, \langle c, a_n \rangle \geq 0$, onde $t = \text{rank}\{a_1, \dots, a_n, b\}$.*

Uma consequência do Teorema 4.2.1 é o conhecido Lema de Farkas devido a Farkas e Minkowski.

4.2.2 COROLÁRIO ([11], Corolário 7.1d). *Seja A uma matriz $n \times q$ com entradas num corpo ordenado K e seja $\alpha \in K^n$. Então ou existe $x \in K_+^q$ tal que $Ax = \alpha$ ou existe $v \in K^n$ com $vA = \alpha$ e $\langle v, \alpha \rangle < 0$, mas não ambos.*

Dado um subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, denotemos por $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ (respectivamente $\mathbb{N}\mathcal{A}$) o reticulado inteiro gerado por \mathcal{A} (respectivamente, o conjunto dos elementos do reticulado com coeficientes não negativos).

4.2.3 DEFINIÇÃO. Um subconjunto finito $H \subset \mathbb{R}^n$ é uma *base de Hilbert* se $\mathbb{Z}^n \cap \mathbb{R}_+ H = \mathbb{N}H$. Um cone poliédrico é dito admitir uma base de Hilbert se contém uma base de Hilbert e é gerado por ela.

Os subconjuntos finitos $H \subset \mathbb{R}^n$ que satisfazem a condição $\mathbb{Z}^n \cap \mathbb{R}_+ H = \mathbb{N}H$ receberam o nome base de Hilbert por inspiração em Giles e Pulleyblank [6], que provaram a existência

de um conjunto finito de geradores para o subconjunto dos vetores inteiros de um cone, e devido à similaridade deste resultado com o teorema célebre de David Hilbert em 1888. O trabalho de Giles e Pulleyblank tinha como objetivo aprofundar o estudo da *integralidade dual total*, conceito que havia sido introduzido em um artigo de Edmonds e Giles [4]. Tal conceito unifica e estende muitas relações tipo *min-max* sob um ponto de vista poliédrico e essas relações são um dos mais importantes tópicos da otimização combinatória.

Os resultados fundamentais com relação às bases de Hilbert são os seguintes. O primeiro resultado afirma que bases de Hilbert sempre existem e são unicamente definidas em essência.

4.2.4 TEOREMA. ([11, Teorema 16.4]) *Um cone poliédrico racional C admite uma base de Hilbert. Se, além disso, C é pontudo então ele contém uma tal base mínima única no sentido que nenhum subconjunto próprio é uma base de Hilbert.*

O segundo resultado ainda dá um indício quanto à natureza de uma tal base mínima.

4.2.5 TEOREMA. ([5, Teorema 1]) *Sejam H uma base de Hilbert de um cone poliédrico pontudo e r , o posto do reticulado inteiro gerado por H . Então H tem um subconjunto contendo r vetores linearmente independentes formando uma base de Hilbert.*

Referências Bibliográficas

- [1] M. Alberich-Carramiñana, *Geometry of the Plane Cremona Maps*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1769, 2002, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg.
- [2] I. Bermejo, P. Gimenez and A. Simis, Polar syzygies in characteristic zero: the monomial case, *J. Pure Appl. Algebra* **213** (2009) 1–21.
- [3] A. V. Doria, S. H. Hassanzadeh and A. Simis, A characteristic free criterion of birationality, preprint 2011.
- [4] J. Edmonds and F. R. Giles, A min-max relation for submodular functions on graphs, *Annals of Discrete Mathematics*, (1977) vol.1, 185–204.
- [5] A. M. H. Gerards and A. Sebö, Total dual integrality implies local strong unimodularity, *Math. Programming*, **38** (1987) 69–73.
- [6] F. R. Giles and W. R. Pulleyblank, Total dual integrality and integer polyhedra, *Linear Algebra and its Applications*, **25** (1979) 191–196.
- [7] G. Gonzalez-Sprinberg and I. Pan, On the monomial birational maps of the projective space, *An. Acad. Brasil. Ciênc.* **75** (2003) 129–134.
- [8] J. Harris, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [9] A. B. Korchagin, On birational monomial transformations of plane, *Int. J. Math. Math. Sci.* **32** (2004), 1671–1677.
- [10] F. Russo and A. Simis, On birational maps and Jacobian matrices, *Compositio Math.* **126** (2001), 335–358.

- [11] A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [12] A. Simis, Cremona transformations and some related algebras, *J. Algebra* **280** (2004), 162–179.
- [13] A. Simis and R. H. Villarreal, Constraints for the normality of monomial subrings and birationality, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), 2043–2048.
- [14] A. Simis and R. H. Villarreal, Linear syzygies and birational combinatorics, *Results Math.* **48** (2005), 326–343.
- [15] A. Simis and R. H. Villarreal, Combinatorics of Cremona monomial maps, arXiv:0904.4065v1 [math.AG].
- [16] R. H. Villarreal, *Monomial Algebras*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics **238**, Marcel Dekker, New York, 2001.
- [17] R. H. Villarreal, *Combinatorial Optimization Methods in Commutative Algebra*, Preliminary Version.