



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ÓRBITAS DE LYAPUNOV NO PROBLEMA DE n
VÓRTICES NO PLANO E NA ESFERA

ADECARLOS COSTA CARVALHO

RECIFE-PE 2012



ÓRBITAS DE LYAPUNOV NO PROBLEMA DE n VÓRTICES NO PLANO E NA ESFERA

ADECARLOS COSTA CARVALHO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. **Hildeberto Eulalio Cabral**

RECIFE-PE 2012

Catálogo na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Carvalho, Adecarlos Costa

Órbitas de Lyapunov no problema de n vórtices no plano e na esfera / Adecarlos Costa Carvalho. - Recife: O Autor, 2012.

67 folhas

Orientador: Hildeberto Eulálio Cabral.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2012.

Inclui bibliografia.

1. Análise (Matemática). 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Sistemas dinâmicos. 4. Sistemas hamiltonianos. I. Cabral, Hildeberto Eulálio (orientador). II. Título.

515

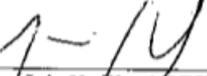
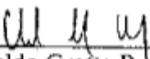
CDD (23. ed.)

MEI2012 - 047

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: 
Hildeberto Eulálio Cabral, UFPE
Orientador

César Augusto Rodrigues Castilho, UFPE

Eduardo Shirlippe Góes Leandro, UFPE

Jair Koiller, FGV

Clodoaldo Grotta Ragazzo, USP

**ÓRBITAS DE LYAPUNOV NO PROBLEMA DE N
VÓRTICES NO PLANO E NA ESFERA**

Por
Adecarlos Costa Carvalho

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415 – Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Fevereiro – 2012

À minha família

RESUMO

Neste trabalho tratamos da existência de órbitas periódicas numa vizinhança de equilíbrios relativos no problema de n vórtices no plano e na esfera. Mais especificamente, no plano, o equilíbrio relativo consiste de n vórtices unitários nos vértices de um polígono regular inscrito numa circunferência centrada na origem com e sem um vórtice de intensidade κ no centro. Na esfera consiste de n vórtices unitários nos vértices de um polígono regular inscrito numa circunferência em uma latitude fixa da esfera com e sem um vórtice de intensidade κ no pólo norte. A ferramenta básica utilizada é o Teorema do Centro de Lyapunov.

Palavras-chave: Teorema do Centro; Equilíbrios Relativos; Órbitas Periódicas.

ABSTRACT

In this work we treat of the existence of periodic orbits in a neighborhood of relative equilibria in the n -vortices problem in the plane and in the sphere. More specifically, in plan, the relative equilibria consists of n unit strength vortices at the vertices of a regular polygon inscribed in a circle centered at the origin with and without a vortex in the center with strength κ . In the sphere consists of the n vortex unit at the vertices of a regular polygon inscribed in a circle at a latitude of the sphere fixed with and without a vortex with strength κ at the north pole. The basic tool used is the Lyapunov center theorem.

Key-words: Center Theorem; Relative Equilibria; Periodic Orbits.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e à minha família por motivos óbvios.

Ao professor Hildeberto Eulalio Cabral que merece todo o meu respeito e admiração pelos conhecimentos científicos e pessoais que me foram passados durante os últimos seis anos, em particular durante a elaboração de minha dissertação de mestrado e agora minha tese de doutorado que em ambas foi meu orientador.

Aos demais professores do DMAT-UFPE, especialmente aos professores Francesco Russo, Francisco Brito, Henrique Araujo, Lucas Catão, Eduardo Leandro, Fernando Cardoso, Claudio Cuevas e Manuel Lemos que foram meus professores nas disciplinas do mestrado ou doutorado. Às funcionárias do DMAT-UFPE Tania, Fátima e Claudia por sempre ajudarem. Aos meus professores do DEMAT-UFMA, onde fiz minha graduação, pelos seus incentivos. Aos professores do DMAI-UFS pelo apoio durante o último ano.

A todos os amigos que consegui durante o mestrado ou doutorado pelos momentos compartilhados. Dentre eles vou citar Abiel Costa, Joilson Ribeiro, Jose Francisco, Marcelo Fernandes e Zaqueu Ramos que em algum momento tiveram a paciência de morar sob o mesmo teto que eu.

Gostaria de agradecer a Renata Limeira Carvalho por ser minha companhia durante (e depois do) o curso compartilhando todos os momentos, bons e ruins, principalmente os ruins sem hesitar em momento algum.

Ao CNPq pelo apoio financeiro durante os quatro anos do doutorado.

SUMÁRIO

Introdução	8
1 Órbitas de Lyapunov no Problema de n Vórtices no Plano	10
1.1 Formulação do problema	10
1.2 Anel de vórtices no plano	13
1.3 Anel com um vórtice adicional na origem	16
2 Órbitas de Lyapunov no Problema de n Vórtices na Esfera	22
2.1 Anel de vórtices em uma latitude fixa	22
2.1.1 Matrizes circulantes	23
2.1.2 Órbitas de Lyapunov próximas a um anel de vórtices em uma latitude fixa	24
2.2 Anel com um vórtice no pólo norte	29
2.2.1 Formulação do problema	29
2.2.2 Região em que $\mu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ tem valor absoluto maior que os dos demais autovalores conhecidos	41
2.2.3 Órbitas de Lyapunov próximas a um anel de vórtices em uma latitude fixa com um vórtice no pólo norte	44
2.3 Dois vórtices em uma latitude fixa e um no pólo norte	55
2.3.1 Órbitas de Lyapunov para $n = 2$	55
2.3.2 Região de Estabilidade	59
Referências	66

Introdução

Equilíbrios relativos no problema de n vórtices pontuais são soluções periódicas especiais: num certo sistema de coordenadas rotatórias elas são estacionárias. Para revisão e diversos resultados sobre tais equilíbrios ver [1, 14]. A existência e estabilidade de equilíbrios relativos tem sido estudada por diversos autores como [5, 6, 7, 10, 11]. A existência de equilíbrios relativos na esfera bem como a existência de simetrias desses equilíbrios foram estudadas em [11]. A estabilidade não-linear do anel poligonal no plano com e sem um vórtice na origem foi estudada em [6]. A estabilidade não-linear do equilíbrio poligonal com n vórtices em uma latitude fixa da esfera com e sem a presença de um vórtice no pólo norte foi estudado em [5] e [7]. Em [10], foi estudado a estabilidade linear e não-linear de dois anéis na esfera com e sem vórtices nos pólos. Outro tema que tem sido bastante pesquisado no problema de n vórtices é o da existência de órbitas periódicas como vemos em [3, 4, 9, 18].

Neste trabalho, estamos interessados na existência de órbitas periódicas na vizinhança de uma classe de equilíbrios relativos no plano e na esfera. Mais especificamente, no plano, o equilíbrio relativo consiste de n vórtices unitários nos vértices de um polígono regular inscrito numa circunferência unitária centrada na origem com e sem um vórtice de intensidade κ na origem. Na esfera temos n vórtices unitários nos vértices de um polígono regular inscrito numa circunferência em uma latitude fixa da esfera com e sem um vórtice de intensidade κ no pólo norte. Chamaremos tais configurações de *anel de vórtices com um vórtice na origem (ou no pólo)*.

A ferramenta básica utilizada aqui é o Teorema do Centro de Lyapunov (1.2) que garante, sob certas condições, a existência de uma família de órbitas periódicas emanando de um equilíbrio do problema (*órbitas de Lyapunov*). Várias são as demonstrações existentes para este teorema, em [17] usa-se o método das séries majorantes, em [12] e [13] o método da continuação de Poincaré e em [16], o teorema é demonstrado como corolário do Teorema da Bifurcação de Hopf.

No capítulo 1, tratamos da existência de órbitas de Lyapunov no caso planar. Para o cálculo da Hessiana do problema no equilíbrio relativo seguimos o que foi feito em [6]. Este capítulo foi dividido em seções. Na seção 1.1 tratamos da formulação do problema. Na seção 1.2 abordamos o caso de um anel de vórtices e obtemos como resultado o Teorema 1.5. Na seção 1.3 analisamos o caso de um anel de vórtices com um vórtice central de intensidade κ e obtemos como resultado o Teorema 1.6.

No capítulo 2, abordamos a existência de órbitas de Lyapunov no caso esférico. Para o cálculo da Hessiana no equilíbrio, seguimos o que foi feito no artigo [7]. O capítulo foi dividido em seções. Na seção 2.1 tratamos do caso de um anel de vórtices em uma latitude fixa. A seção foi dividida em subseções. Na subseção 2.1.1 apresentamos alguns resultados sobre matrizes circulares necessários para o cálculo do polinômio característico do problema. Na subseção 2.1.2 provamos o Teorema 2.3.

Ainda no capítulo 2 e passando à seção 2.2, tratamos o caso de um anel de vórtices com um vórtice no pólo norte. Diferentemente dos casos anteriores, neste não conseguimos determinar todos os autovalores do problema. De fato, seis autovalores não foram determinados devido à complexidade do polinômio característico do problema. Dividimos a seção em subseções. Na subseção 2.2.1 apresentamos a formulação do problema onde encontramos todos os autovalores, exceto os seis mencionados acima. Na subseção 2.2.2 encontramos um região do plano $z - \kappa$ (z é a coordenada do anel no eixo polar e κ é a intensidade do vórtice polar) em que um dos autovalores, $\mu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, tem valor absoluto maior do que os dos demais autovalores conhecidos. Na subseção 2.2.3 temos como objetivo provar o Teorema 2.9. Com este fim, nos restringimos às regiões de estabilidade dadas em [7] garantindo que todos os autovalores do problema sejam imaginários puros possibilitando que apliquemos o Teorema do Centro comparando o autovalor $\mu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ com os seis autovalores supracitados, mesmo não tendo suas expressões explícitas.

Na seção 2.3 tratamos o caso de um anel com dois vórtices em latitude fixa com um vórtice no pólo norte. Este caso foi considerado separadamente devido as fórmulas utilizadas no caso geral não valerem para $n = 2$. Na subseção 2.3.1 demonstramos o Teorema 2.23 sobre existência de órbitas periódicas. Na subseção 2.3.2 tratamos da estabilidade desta configuração ($n = 2$). Provamos o Teorema 2.27 que nos dá regiões no plano $z - \kappa$ em que o equilíbrio relativo em questão é estável.

Capítulo 1

Órbitas de Lyapunov no Problema de n Vórtices no Plano

Neste capítulo vamos estudar a existência de órbitas periódicas no problema de n vórtices no plano próximas a equilíbrios relativos. Mais especificamente na vizinhança do equilíbrio relativo formado por n vórtices idênticos localizados nos vértices de um polígono regular com e sem a presença de um outro vórtice localizado na origem.

1.1 Formulação do problema

Consideremos $n+1$ vórtices pontuais no plano com posição $q_j = (x_j, y_j)$ e intensidades κ_j , $0 \leq j \leq n$. As equações diferenciais que regem o movimento destes vórtices têm sua formulação Hamiltoniana devida a Kirchhoff [8], a saber

$$\begin{aligned}\kappa_j \dot{x}_j &= \frac{\partial U}{\partial y_j}, \\ \kappa_j \dot{y}_j &= -\frac{\partial U}{\partial x_j},\end{aligned}$$

sendo U a função

$$U = - \sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j \log \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \quad (1.1)$$

Podemos escrevê-las na forma mais compacta

$$M\dot{q} = J\nabla U(q), \quad (1.2)$$

onde $q = (x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n)^T$, $M = \text{diag}(\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_n, \kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_n)$ e J a matriz simplética canônica, isto é,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n+1} \\ -I_{n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Um *equilíbrio relativo* é uma configuração de vórtices que se torna uma solução estacionária em um sistema de coordenadas rotatórias. Para estudarmos equilíbrios relativos de (1.2) passemos, então, do sistema de coordenadas fixas para um sistema de coordenadas rotatórias com velocidade angular ν em torno da origem usando a mudança de variáveis

$$q = \exp(\nu Jt)Q.$$

Desta forma

$$\begin{aligned} M\dot{Q} &= M(-\nu J e^{-\nu Jt} q + e^{-\nu Jt} \dot{q}) \\ &= M[-\nu J e^{-\nu Jt} e^{\nu Jt} Q + e^{-\nu Jt} M^{-1} J \nabla U(e^{\nu Jt} Q)] \\ &= J[-\nu M Q + \nabla U(Q)] \end{aligned}$$

e portanto a equação se torna

$$M\dot{Q} = J \nabla H(Q), \quad (1.3)$$

com

$$H(Q) = U(Q) - \frac{\nu}{2} Q^T M Q. \quad (1.4)$$

A configuração Q_0 é um equilíbrio de (1.3), se e somente se

$$-\nu M Q_0 + \nabla U(Q_0) = 0 \quad (1.5)$$

e, por conseguinte, a velocidade angular ν deve ser da forma

$$\nu = \frac{Q_0^T \nabla U(Q_0)}{Q_0^T M Q_0}. \quad (1.6)$$

Proposição 1.1. *Para a função U em (1.1), temos*

$$Q^T \nabla U(Q) = - \sum_{i < j} \kappa_i \kappa_j.$$

Demonstração. De fato, sendo $U(Q) = -\sum_{i<j} \kappa_i \kappa_j \log |Q_i - Q_j|$, temos para $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} U(\lambda Q) &= -\sum_{i<j} \kappa_i \kappa_j \log \lambda - \sum_{i<j} \kappa_i \kappa_j \log |Q_i - Q_j| \\ &= -\log \lambda \sum_{i<j} \kappa_i \kappa_j + U(Q). \end{aligned}$$

Agora, derivando em relação a λ e fazendo $\lambda = 1$, temos o resultado. \square

Concluimos que a velocidade angular para uma solução de equilíbrio, Q_0 , do sistema (1.3) deve satisfazer

$$\nu = -\frac{\sum_{i<j} \kappa_i \kappa_j}{Q_0^T M Q_0}. \quad (1.7)$$

Notemos que o sistema linearizado de (1.3) no equilíbrio Q_0 é

$$M\dot{Q} = J(-\nu M + D^2U(Q_0))Q. \quad (1.8)$$

Nosso interesse é mais especificamente a configuração, Q_0 , que consiste de n vórtices idênticos com intensidade $\kappa_0 = \dots = \kappa_{n-1} = 1$ localizados nos vértices de um polígono regular inscrito numa circunferência unitária centrada na origem. Consideraremos dois casos: com e sem a presença de um vórtice de intensidade $\kappa_n = \kappa$ localizado na origem.

A função Hamiltoniana (1.1) pode então ser escrita na seguinte forma:

$$U = U_1 + \kappa U_2, \quad (1.9)$$

onde as funções acima são dadas por

$$U_1 = -\sum_{0 \leq i < j < n} \log |Q_i - Q_j|$$

e

$$U_2 = -\sum_{j=0}^{n-1} \log |Q_j - Q_n|.$$

Sendo

$$Q_0^T M Q_0 = \sum_{j=0}^{n-1} (x_{0j}^2 + y_{0j}^2) = n$$

e, tomando $\kappa_n = \kappa$, temos

$$\sum_{i<j} \kappa_i \kappa_j = \sum_{0 \leq i < j < n} \kappa_i \kappa_j + \sum_{j=0}^{n-1} \kappa_j \kappa_n = \frac{n(n-1)}{2} + n\kappa,$$

donde obtemos de (1.7) que

$$\nu = -\frac{n-1}{2} - \kappa. \quad (1.10)$$

1.2 Anel de vórtices no plano

Com o intuito de provar a existência de órbitas periódicas numa vizinhança do equilíbrio relativo, Q_0 , usaremos o Teorema do Centro devido a Lyapunov. Para uma demonstração deste Teorema ver [12, 13, 17, 16]. A versão em [12] é a que enunciaremos aqui.

Consideremos a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x),$$

onde $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função suave no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e seja x_0 um equilíbrio desta equação.

Teorema 1.2 (Teorema do Centro de Lyapunov). *Suponha que a equação $\dot{x} = f(x)$ admita uma integral, Ψ , não-degenerada e tenha um equilíbrio x_0 de forma que os autovalores de $A = Df(x_0)$ sejam $\pm\omega i, \lambda_3, \dots, \lambda_m$, onde $\omega i \neq 0$ é imaginário puro. Se $\lambda_j/i\omega \notin \mathbb{Z}$ para $j = 3, \dots, m$, então existe uma família a 1-parâmetro de órbitas periódicas emanando do equilíbrio. Além disso, quando nos aproximamos do equilíbrio ao longo da família, o período tende a $2\pi/|\omega|$.*

Observação 1.3. Uma integral Ψ é não-degenerada se $\nabla\Psi(x) \neq 0$ sobre órbitas periódicas. Notemos que no caso Hamiltoniano $\dot{x} = J\nabla H(x)$ a função Hamiltoniana H é sempre uma integral não-degenerada e $A = JG$, com $G = D^2H(x_0)$.

Voltemos ao nosso problema de n vórtices no plano. Consideremos primeiramente o caso de um anel de vórtices. Neste caso $\kappa = 0$, o potencial é $U = U_1$ e devemos encontrar os autovalores do sistema linearizado (1.8), ou seja, devemos encontrar as raízes de

$$|\lambda I + \nu J - JM^{-1}D^2U(Q_0)| = |\lambda J - \nu I + M^{-1}D^2U(Q_0)| = 0.$$

A matriz $\lambda J - \nu I + M^{-1}D^2U(Q_0)$ pode ser escrita na forma em blocos

$$\begin{pmatrix} -\nu I + K & \lambda I \\ -\lambda I & -\nu I - K \end{pmatrix},$$

com $K = M^{-1} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_r \partial x_s} \right)$. Usando a identidade

$$\begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

obtemos a fórmula

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |DA - DBD^{-1}C| \quad (1.11)$$

para o cálculo do determinante de uma matriz $2m \times 2m$ dada por blocos $m \times m$. Segue-se que

$$\begin{aligned} |\lambda J - \nu I + M^{-1}D^2U(Q_0)| &= \begin{vmatrix} -\nu I + K & \lambda I \\ -\lambda I & -\nu I - K \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda I & \nu I + K \\ -\nu I + K & \lambda I \end{vmatrix} \\ &= |(\lambda^2 + \nu^2)I - K^2|. \end{aligned}$$

No caso em tela, $U = U_1$ e $M = I$, assim

$$K = \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_r \partial x_s} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_4 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com

$$c_r = -\frac{1}{2}(r-2)(n-r), \quad (1.12)$$

logo

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_1^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_3^2 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$|\alpha I - K^2| = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - c_1^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - c_3^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - c_4^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha - c_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha - c_3^2 \end{vmatrix}$$

com $\alpha = \lambda^2 + \nu^2$. Segue de (1.10) e (1.12) que $\nu^2 = c_1^2$, logo $\lambda^2 + \nu^2 - c_1^2 = \lambda^2$ e, assim, o polinômio característico para n ímpar é

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \nu^2)^2 \prod_{j=3}^{\frac{n+1}{2}} (\lambda^2 + \nu^2 - c_j^2)^2 \quad (1.13)$$

e para n par é

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \nu^2)^2 \left(\lambda^2 + \nu^2 - c_{\frac{n+2}{2}}^2 \right) \prod_{j=3}^{\frac{n}{2}} (\lambda^2 + \nu^2 - c_j^2)^2. \quad (1.14)$$

A presença do autovalor zero é devida a invariância por rotação. Podemos eliminar este autovalor utilizando uma integral primeira do sistema mantendo os demais autovalores.

Observação 1.4. Para aplicarmos o Teorema do Centro precisamos de um autovalor imaginário puro e simples. Para n ímpar todas as raízes de (1.13) têm multiplicidade pelo menos dois, logo neste caso não podemos aplicar o Teorema. Por outro lado, para n par o polinômio (1.14) tem as raízes $\lambda = \pm \sqrt{c_{r_0}^2 - \nu^2}$ com $r_0 = \frac{n+2}{2}$ que são simples. Além disso, de (1.10) e (1.12) segue

que $c_1 = \frac{n-1}{2}$ e $\nu = -\frac{n-1}{2}$, logo

$$c_{r_0}^2 - \nu^2 = c_{r_0}^2 - c_1^2 = \frac{1}{64}n^2(n^2 - 8n + 8) = \frac{1}{64}n^2[(n-8)n + 8] > 0$$

para todo $n \geq 8$. Assim, o autovalor $\sqrt{c_{r_0}^2 - \nu^2}$ é real para $n \geq 8$ enquanto que para $n = 4, 6$ é imaginário puro.

Desta forma, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 1.5. *No caso do anel de vórtices sem um vórtice na origem podemos aplicar o Teorema do Centro (1.2), para $n = 4$ e $n = 6$ com os autovalores $\lambda = \sqrt{2}i$ e $\lambda = \frac{3}{2}i$, respectivamente. Isto é, podemos garantir a existência de uma família de órbitas periódicas emanando do equilíbrio.*

Demonstração. Segue de (1.14) que o polinômio característico para $n = 4$ é

$$p(\lambda) = \frac{1}{16}\lambda^2(\lambda^2 + 2)(4\lambda^2 + 9)^2$$

e para $n = 6$ é

$$p(\lambda) = \lambda^2 \left(\lambda^2 + \frac{25}{4} \right)^2 (\lambda^2 + 4)^2 \left(\lambda^2 + \frac{9}{4} \right).$$

Portanto, para $n = 4$, temos

$$\frac{(3i/2)}{\sqrt{2}i} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \notin \mathbb{Z}$$

e para $n = 6$, temos

$$\frac{(5i/2)}{(3i/2)} = \frac{5}{3}, \quad \frac{2i}{(3i/2)} = \frac{4}{3}$$

ambos não inteiros.

□

1.3 Anel com um vórtice adicional na origem

Neste caso temos n vórtices localizados nos vértices de um n -polígono regular com intensidade unitária e um vórtice com intensidade κ localizado na origem e devemos considerar o potencial $U = U_1 + \kappa U_2$ dado em (1.9). A função U_2 contribui para o cálculo de $\frac{\partial^2 U}{\partial x_r \partial x_s}$ com os fatores

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_s \partial x_r} = \begin{cases} 1, & r + s = 2 \pmod n, 0 \leq r, s \leq n-1 \\ -\sqrt{n}, & r = 2, s = n \text{ ou } r = n, s = 2 \\ 0, & \text{demais casos} \end{cases}$$

então, para $K = M^{-1} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_r \partial x_s} \right)$, com $M = \text{diag}(1, \dots, 1, \kappa, 1, \dots, 1, \kappa)$, temos

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + \kappa & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\kappa\sqrt{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_3 + \kappa & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c_3 + \kappa & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$K^2 = \begin{pmatrix} \kappa^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\kappa^2\sqrt{n} \\ 0 & (c_1 + \kappa)^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^2(n+1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (c_3 + \kappa)^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (c_3 + \kappa)^2 & 0 \\ -\kappa\sqrt{n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n\kappa \end{pmatrix}.$$

Portando, fazendo novamente $\alpha = \lambda^2 + \nu^2$, obtemos

$$|\alpha I - K^2| =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha - \kappa^2 & \kappa^2\sqrt{n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \kappa\sqrt{n} & \alpha - n\kappa & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - (c_1^2 + \kappa)^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \kappa(n + \kappa) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - (c_3^2 + \kappa)^2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha - (c_3^2 + \kappa)^2 \end{vmatrix}$$

e, conseqüentemente, o polinômio característico para n ímpar é

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \nu^2)(\lambda^2 - \kappa + c_1^2)^2 \prod_{j=3}^{\frac{n+1}{2}} (\lambda^2 - (c_j + \kappa)^2 + \nu^2)^2 \quad (1.15)$$

e para n par é

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \nu^2)(\lambda^2 - \kappa + c_1^2)^2 (\nu^2 - (c_{\frac{n+2}{2}} + \kappa)^2 + \lambda^2) \prod_{j=3}^{n/2} (\lambda^2 - (c_j + \kappa)^2 + \nu^2)^2. \quad (1.16)$$

Novamente temos a presença do autovalor zero devida a invariância por rotação. Podemos eliminar este autovalor utilizando uma integral primeira do sistema mantendo os demais autovalores.

Para aplicarmos o Teorema do Centro precisamos de um autovalor que seja imaginário puro e simples. Temos dois casos a considerar: o autovalor $\lambda = i|\nu|$ que é um autovalor comum para todo $n \geq 3$ e $\lambda_{r_0} = \sqrt{(c_{r_0} + \kappa)^2 - \nu^2} = \sqrt{(c_{r_0} - c_1)(2\kappa + c_{r_0} + c_1)}$ com $r_0 = \frac{n+2}{2}$ que é simples apenas quando n é par e é imaginário puro para $\kappa > -\frac{c_{r_0} + c_1}{2}$. Assim, podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 1.6. *No caso do anel de vórtices com um vórtice de intensidade κ na origem podemos aplicar o Teorema do Centro nos seguintes casos:*

1. Para todo $n \geq 3$ com autovalor $\lambda = i|\nu|$ quando:

$$\kappa \neq \frac{c_r - \alpha c_1}{\alpha - 1} \text{ e } \kappa \neq -\frac{c_r + \alpha c_1}{1 + \alpha},$$

com $\alpha = \sqrt{1 - m}$, $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq 1$.

2. Para n par com autovalor $\lambda = \sqrt{(c_{r_0} + \kappa)^2 - \nu^2}$, $r_0 = \frac{n+2}{2}$ se

- $\kappa > -\frac{c_{r_0}+c_1}{2}$;
- $\kappa \neq \frac{(c_1^2-c_{r_0}^2)m-(c_1^2-c_r^2)}{2(c_r-c_1)-2m(c_1-c_{r_0})}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $3 \leq r \leq \frac{n}{2}$;
- $\kappa \neq \frac{c_{r_0}-\alpha c_1}{\alpha-1}$ e $\kappa \neq -\frac{c_{r_0}+\alpha c_1}{1+\alpha}$, com $\alpha = \sqrt{\frac{m-1}{m}}$, $m \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$;
- $\kappa \neq \frac{m(c_{r_0}-c_1)+c_1^2}{(1-2m)(c_{r_0}-c_1)}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. No caso 1, devemos analisar o quociente $\frac{\lambda}{i|\nu|}$ quando

$$\lambda = \sqrt{(c_r + \kappa)^2 - \nu^2} \text{ e } \lambda = \sqrt{\kappa - c_1^2}.$$

Supondo que o quociente $\frac{\sqrt{(c_r+\kappa)^2-\nu^2}}{i|\nu|}$ é um número inteiro, então $\frac{(c_r+\kappa)^2-\nu^2}{-\nu^2}$ também será um número inteiro, digamos

$$\frac{(c_r + \kappa)^2 - \nu^2}{-\nu^2} = m,$$

com m um número inteiro. De (1.10) e de (1.12), sabemos que

$$\nu = -\frac{n-1}{2} - \kappa = -(c_1 + \kappa),$$

assim

$$\frac{(c_r + \kappa)^2}{\nu^2} - 1 = -m$$

$$\frac{(c_r + \kappa)^2}{(c_1 + \kappa)^2} - 1 = -m$$

$$\frac{(c_r + \kappa)^2}{(c_1 + \kappa)^2} = 1 - m$$

$$\frac{c_r + \kappa}{c_1 + \kappa} = \pm\sqrt{1 - m},$$

logo

$$\kappa = \frac{c_r - \alpha c_1}{\alpha - 1} \text{ ou } \kappa = -\frac{c_r + \alpha c_1}{1 + \alpha},$$

com $\alpha = \sqrt{1 - m}$. Vamos analisar agora o quociente $\frac{\sqrt{\kappa - c_1^2}}{i|\nu|}$. Sendo este um número inteiro, teremos que

$$\frac{\kappa - c_1^2}{-\nu^2} = m,$$

para algum $m \in \mathbb{Z}$. Novamente, usando a igualdade

$$\nu = -\frac{n-1}{2} - \kappa = -(c_1 + \kappa),$$

obtemos

$$\frac{\kappa - c_1^2}{-(c_1 + \kappa)^2} = m$$

ou

$$m\kappa^2 + (2c_1m - 1)\kappa + (m + 1)c_1^2 = 0.$$

Observemos que o discriminante da função quadrática em κ acima satisfaz

$$(2c_1m - 1)^2 - 4m(m + 1)c_1^2 = -mc_1^2 - mc_1 + 1 < 0$$

para todo $n \geq 3$ e $m \geq 1$ o que implica que o quociente $\frac{\sqrt{\kappa - c_1^2}}{i|\nu|}$ não pode ser um número inteiro .

Portanto, podemos aplicar o Teorema do Centro desde que

$$\kappa \neq \frac{c_r - \alpha c_1}{\alpha - 1} \text{ e } \kappa \neq -\frac{c_r + \alpha c_1}{1 + \alpha},$$

com $\alpha = \sqrt{1 - m}$.

Passemos a considerar o caso 2. Como $\nu = -(c_1 + \kappa)$, temos $(c_r + \kappa)^2 - \nu^2 = (c_r - c_1)(2\kappa + c_r + c_1)$. Analisemos primeiro o quociente $\frac{\lambda_r}{\lambda}$, onde $\lambda_r = \sqrt{(c_r - c_1)(2\kappa + c_r + c_1)}$ para $3 \leq r \leq \frac{n}{2}$ e $\lambda = \sqrt{(c_{r_0} - c_1)(2\kappa + c_{r_0} + c_1)}$ com $r_0 = \frac{n+2}{2}$. Supondo que

$$\frac{\sqrt{(c_r - c_1)(2\kappa + c_r + c_1)}}{\sqrt{(c_{r_0} - c_1)(2\kappa + c_{r_0} + c_1)}}$$

seja um número inteiro, então

$$\frac{(c_r - c_1)(2\kappa + c_r + c_1)}{(c_{r_0} - c_1)(2\kappa + c_{r_0} + c_1)} = m,$$

para algum $m \in \mathbb{Z}$. Assim teremos

$$\kappa = \frac{(c_1^2 - c_{r_0}^2)m - (c_1^2 - c_r^2)}{2(c_r - c_1) - 2m(c_1 - c_{r_0})}.$$

Consideremos agora o quociente $\frac{\lambda_\nu}{\lambda}$, onde $\lambda_\nu = i|\nu|$. Se este quociente é inteiro devemos ter que $\frac{-|\nu|^2}{\lambda^2}$ também é inteiro, digamos

$$\frac{-\nu^2}{(c_{r_0} + \kappa)^2 - \nu^2} = m,$$

com $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Então devemos ter

$$\frac{(c_{r_0} + \kappa)^2 - \nu^2}{-\nu^2} = \frac{1}{m}$$

$$\begin{aligned}\frac{(c_{r_0} + \kappa)^2}{-\nu^2} + 1 &= \frac{1}{m} \\ \frac{(c_{r_0} + \kappa)^2}{-(c_1 + \kappa)^2} &= \frac{1 - m}{m} \\ \frac{c_{r_0} + \kappa}{c_1 + \kappa} &= \pm \sqrt{\frac{m-1}{m}},\end{aligned}$$

logo

$$\kappa = \frac{c_{r_0} - \alpha c_1}{\alpha - 1} \text{ ou } \kappa = -\frac{c_{r_0} + \alpha c_1}{1 + \alpha},$$

com $\alpha = \sqrt{\frac{m-1}{m}}$.

Por último devemos analisar o quociente $\frac{\lambda_1}{\lambda}$, onde $\lambda_1 = \sqrt{\kappa - c_1^2}$. Este quociente sendo inteiro temos que $\frac{\lambda_1^2}{\lambda^2}$ também é inteiro, ou seja,

$$\frac{\kappa - c_1^2}{(c_{r_0} - c_1)(2\kappa + c_{r_0} + c_1)} = m,$$

com $m \in \mathbb{Z}$. Logo

$$\kappa = \frac{m(c_{r_0} - c_1) + c_1^2}{(1 - 2m)(c_{r_0} - c_1)}.$$

Portanto, o Teorema do Centro pode ser aplicado sempre que ocorrem as condições:

- $\kappa > -\frac{c_{r_0} + c_1}{2}$, $r_0 = \frac{n+2}{2}$;
- $\kappa \neq \frac{(c_1^2 - c_{r_0}^2)m - (c_1^2 - c_r^2)}{2(c_r - c_1) - 2m(c_1 - c_{r_0})}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $3 \leq r \leq \frac{n}{2}$;
- $\kappa \neq \frac{c_{r_0} - \alpha c_1}{\alpha - 1}$ e $\kappa \neq -\frac{c_{r_0} + \alpha c_1}{1 + \alpha}$, com $\alpha = \sqrt{\frac{m-1}{m}}$;
- $\kappa \neq \frac{m(c_{r_0} - c_1) + c_1^2}{(1 - 2m)(c_{r_0} - c_1)}$, $m \in \mathbb{Z}$.

□

Capítulo 2

Órbitas de Lyapunov no Problema de n Vórtices na Esfera

Neste capítulo, assim como no anterior, estamos interessados em mostrar a existência de órbitas periódicas próximas a certos tipos de equilíbrios relativos do problema de vórtices pontuais. No entanto, neste estudamos o problema de $n + 1$ vórtices na esfera unitária e o equilíbrio relativo consiste de n vórtices idênticos localizados nos vértices de um polígono regular em uma latitude fixa da esfera com e sem um outro vórtice localizado no pólo norte. Considerando o movimento de n vórtices na esfera unitária com κ_j a intensidade e $q_j(t)$ a posição do j -ésimo vórtice, a equação do movimento deste vórtice é dado por

$$\dot{q}_j = \sum_{i \neq j} \kappa_i \frac{q_i \times q_j}{|q_j - q_i|^2}. \quad (2.1)$$

2.1 Anel de vórtices em uma latitude fixa

Veremos que a matriz Hessiana no equilíbrio em questão é uma matriz diagonal em blocos formada por duas matrizes circulantes. Assim, vamos começar com algumas propriedades destas matrizes. Para mais detalhes sobre este tema podemos citar [2].

2.1.1 Matrizes circulantes

Uma *matriz circulante* é uma matriz da forma

$$A = \text{circ}(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

podendo ser escrita na forma:

$$\text{circ}(a_0, \dots, a_{n-1}) = (a_{jk}) = (a_{k-j})$$

onde o índice $k - j$ é tomado módulo n . Seja $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ raiz n -ésima da unidade. Então os autovetores da matriz circulante A são dados pelas colunas da matriz

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

e seus autovalores são dados por

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.2)$$

Agora, consideremos

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

uma outra matriz circulante com autovalores dados por

$$\sigma_j = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \omega^{jk}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.3)$$

Então os autovalores da matriz AB são dados por

$$\mu_j = \sigma_j \lambda_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.4)$$

De fato, se v_j é a j -ésima coluna de W , então

$$Av_j = \lambda_j v_j \quad \text{e} \quad Bv_j = \sigma_j v_j,$$

logo

$$ABv_j = A(Bv_j) = A(\sigma_j v_j) = \sigma_j Av_j = \sigma_j \lambda_j v_j.$$

Segue, então, que $\sigma_j \lambda_j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$ são os autovalores de AB .

Notemos também que

$$BAv_j = B(Av_j) = B(\lambda_j v_j) = \lambda_j Bv_j = \lambda_j \sigma_j v_j = \sigma_j \lambda_j v_j,$$

ou seja, as matrizes AB e BA coincidem numa base, logo, são iguais. Portanto, duas matrizes circulantes de ordem n quaisquer comutam.

2.1.2 Órbitas de Lyapunov próximas a um anel de vórtices em uma latitude fixa

O problema de n vórtices na esfera unitária pode ser descrito pelas coordenadas cilíndricas (φ, z) , sendo z a distância vertical do plano equatorial ao vórtice e φ a longitude. Nestas coordenadas a função Hamiltoniana para n vórtices unitários com posição (φ_j, z_j) é [7]

$$H = H_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} \log \left[1 - z_i z_j - \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right]. \quad (2.5)$$

Passamos para um sistema de coordenadas rotatórias com velocidade angular ν em torno do eixo polar utilizando a mudança de coordenadas

$$\tilde{\varphi}_j = \varphi_j + t\nu \quad \tilde{z}_j = z_j, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Por simplicidade, continuaremos utilizando a notação (φ, z) em vez de $(\tilde{\varphi}, \tilde{z})$. Nestas coordenadas rotatórias a função Hamiltoniana H se torna

$$H = H_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} \log \left[1 - z_i z_j - \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right] - \nu \sum_{i=0}^{n-1} z_i, \quad (2.6)$$

cujas derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial H_1}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-z_k + \frac{z_j}{\sqrt{1-z_j^2}} \sqrt{1-z_k^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k)}{1 - z_j z_k - \sqrt{1-z_j^2} \sqrt{1-z_k^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k)} - \nu \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial \varphi_j} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{1-z_j^2} \sqrt{1-z_k^2} \operatorname{sen}(\varphi_j - \varphi_k)}{1 - z_k z_j - \sqrt{1-z_k^2} \sqrt{1-z_j^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k)}. \quad (2.8)$$

Estamos interessados no equilíbrio relativo, Q_0 , que consiste de n vórtices unitários localizados nos vértices de um polígono regular em uma latitude fixa z , $-1 < z < 1$, isto é, $z_j = z$ e $\varphi_j = 2\pi j/n$ com $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Lema 2.1. *Para que a configuração Q_0 seja estacionária devemos ter*

$$\nu = -\frac{(n-1)z}{2(1-z^2)}.$$

Demonstração. Fazendo $\frac{\partial H_1}{\partial z_0}(Q_0) = 0$ em (2.7) com, obtemos

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{-z + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{1-z^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k)}{1 - z^2 - \sqrt{1-z^2} \sqrt{1-z^2} \cos(\varphi_j - \varphi_k)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{-z(1 - \cos(\varphi_j - \varphi_k))}{(1-z^2)(1 - \cos(\varphi_j - \varphi_k))} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{-z}{1-z^2} \\ &= -\frac{(n-1)z}{2(1-z^2)}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

As derivadas parciais de segunda ordem de H_1 são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial z_i^2} &= \frac{(n-1)(n-5-6z^2)}{12(1-z^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 H_1}{\partial z_i \partial z_j} &= -\frac{1}{4(1-z^2)^2 \operatorname{sen}^2(j-i)\pi/n}, \quad i \neq j \\ \frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi_i^2} &= -\frac{n^2-1}{12}, \\ \frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} &= \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2(j-i)\pi/n}, \quad i \neq j \\ \frac{\partial^2 H_1}{\partial z_i \partial \varphi_j} &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma, a matriz Hessiana G de H_1 é a matriz $2n \times 2n$ em blocos dada por

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi^2} \end{pmatrix},$$

sendo que $\partial^2 H_1/\partial z^2$ e $\partial^2 H_1/\partial \varphi^2$ são matrizes circulantes de ordem n . Vimos que os autovalores de uma matriz circulante são da forma dada em (2.2). Usando as identidades para $n \geq 2$ (ver [7])

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 j\pi/n} = \frac{n^2 - 1}{3}; \quad (2.9)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin^2 kj\pi/n}{\sin^2 j\pi/n} = k(n - k) \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad (2.10)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sin^2 \frac{2\pi j}{n} = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 2 \\ n/2 & \text{para } n > 2 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \cos^2 \frac{2\pi j}{n} = \begin{cases} 2 & \text{para } n = 2 \\ n/2 & \text{para } n > 2 \end{cases} \quad (2.12)$$

obtemos que os autovalores de $\partial^2 H_1/\partial z^2$ no equilíbrio são:

$$\lambda_j = \frac{-(n-1)(1+z^2) + j(n-j)}{2(1-z^2)^2} \quad \text{com } j = 0, 1, \dots, n-1,$$

enquanto que os autovalores de $\partial^2 H_1/\partial \varphi^2$ no equilíbrio são:

$$\sigma_j = -\frac{j(n-j)}{2} \quad \text{com } j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Estamos interessados nos autovalores da matriz

$$JG = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi^2} \\ -\frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue de (1.11) que o polinômio característico de JG é dado por

$$|\mu I_{2n} - JG| = \begin{vmatrix} \mu I_n & -\frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi^2} \\ \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} & \mu I_n \end{vmatrix} = \left| \mu^2 I + \frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} \right|.$$

Como $\frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2}$ e $\frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi^2}$ são circulantes, os autovalores de $\frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi^2}$ são $\sigma_j \lambda_j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Portanto, o polinômio característico de JG é

$$p(\mu) = \prod_{j=0}^{n-1} (\mu^2 + \sigma_j \lambda_j). \quad (2.13)$$

Assim como no caso planar, a invariância por rotação no problema na esfera dá origem ao autovalor zero. Podemos eliminar este autovalor utilizando uma integral primeira do sistema mantendo os demais autovalores.

Observação 2.2. Para aplicar o Teorema do Centro precisamos de um autovalor imaginário puro simples. Como, das expressões acima, vemos que

$$\sigma_0 = 0, \quad \lambda_j = \lambda_{n-j} \quad \text{e} \quad \sigma_j = \sigma_{n-j} \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

um autovalor simples vai ocorrer somente se n for par e $j = \frac{n}{2}$. Para que este autovalor, $\mu_{n/2}$, seja imaginário puro é necessário que $\lambda_{n/2} < 0$, o que implica:

$$z^2 > \frac{(n-2)^2}{4(n-1)}.$$

Esta última desigualdade para $z^2 < 1$ só pode ocorrer se $n < 7$. Portanto, para $n = 2$, $n = 4$ e $n = 6$ o autovalor

$$\mu_{n/2} = i\sqrt{\sigma_{n/2}\lambda_{n/2}}$$

é simples e imaginário puro quando $z^2 > (n-2)^2/(4(n-1))$.

Assim temos o seguinte teorema:

Teorema 2.3. *Para o anel de vórtices em uma latitude fixa podemos aplicar o Teorema do Centro nos seguintes casos:*

1. $n = 2$ com autovalor $\mu_1 = \sqrt{\frac{-z^2}{4(1-z^2)^2}}$ para $z^2 > 0$;
2. $n = 4$ com autovalor $\mu_2 = \sqrt{\frac{-1+3z^2}{(1-z^2)^2}}$ para $z^2 > 1/3$ e $z \neq \pm\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{3}{4m^2}}$ com $m \geq 2$, inteiro.
3. $n = 6$ com autovalor $\mu_3 = \sqrt{\frac{9(-4+5z^2)}{4(1-z^2)^2}}$ para $z^2 > 1/5$ satisfazendo
 - (a) $z \neq \pm\sqrt{\frac{36m^2}{40m^2-25}}$ onde $m \geq 3$, inteiro;
 - (b) $z \neq \pm\sqrt{\frac{36m^2-24}{45m^2-40}}$ onde $m \geq 2$, inteiro.

Demonstração. Segue da observação (2.2) que os autovalores $\mu_{n/2}$, $n = 2, 4, 6$ são simples e imaginários puros para $z^2 > 0$, $z^2 > 1/3$ e $z^2 > 1/5$, respectivamente. Segue de (2.13) que o polinômio característico para $n = 2$ é

$$p(\mu) = \mu^2 \left(\mu^2 + \frac{z^2}{4(1-z^2)^2} \right),$$

para $n = 4$ é

$$p(\mu) = \mu^2 \left(\mu^2 + \frac{9z^2}{4(1-z^2)^2} \right)^2 \left(\mu^2 + \frac{3z^2-1}{(1-z^2)^2} \right)$$

e para $n = 6$ é

$$p(\mu) = \mu^2 \left(\mu^2 + \frac{z^2}{4(1-z^2)^2} \right)^2 \left(\mu^2 + \frac{2(5z^2-3)}{(1-z^2)^2} \right)^2 \left(\mu^2 + \frac{9(5z^2-4)}{4(1-z^2)^2} \right).$$

Devemos provar que o quociente $\frac{\mu}{\mu_{n/2}}$ não é inteiro na região enunciada.

Para $n = 2$, o resultado segue do fato que não há outro autovalor para avaliar.

Para $n = 4$, devemos avaliar o quociente $\frac{\mu}{\mu_2}$ quando $\mu = \sqrt{\frac{-9z^2}{4(1-z^2)^2}}$, ou seja, o quociente

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \sqrt{\frac{9}{-4(1-3z^2)}}.$$

Se $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ é inteiro, digamos

$$\sqrt{\frac{9}{-4(1-3z^2)}} = m,$$

logo

$$z = \pm\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{3}{4m^2}}.$$

Como $z^2 < 1$ temos $m \geq 2$.

Para $n = 6$, devemos avaliar o quociente $\frac{\mu}{\mu_3}$ quando $\mu = \sqrt{-\frac{z^2}{4(1-z^2)^2}}$ e $\mu = \sqrt{-\frac{2(5z^2-3)}{(1-z^2)^2}}$.

Se o primeiro quociente $\frac{\mu}{\mu_3} = \sqrt{\frac{25z^2}{-9(4-5z^2)}}$ é inteiro, digamos

$$\sqrt{\frac{25z^2}{-9(4-5z^2)}} = m,$$

com $m \in \mathbb{Z}_+$, logo

$$z = \pm \sqrt{\frac{36m^2}{40m^2 - 25}}.$$

Como $z^2 < 1$ temos $m \geq 3$.

Se o segundo quociente $\frac{\mu}{\mu_3}$ é inteiro, digamos

$$\sqrt{\frac{8(5z^2-3)}{9(5z^2-4)}} = m,$$

com $m \in \mathbb{Z}_+$, temos

$$z = \pm \sqrt{\frac{36m^2 - 24}{45m^2 - 40}}.$$

Como $z^2 < 1$ temos $m \geq 2$. □

2.2 Anel com um vórtice no pólo norte

Nesta seção consideramos o caso de um anel com n vórtices, $n \geq 3$, em uma latitude fixa na esfera unitária e um vórtice adicional no pólo norte.

2.2.1 Formulação do problema

Para estudarmos o movimento próximo dessa configuração precisamos de um sistema de coordenadas adequado. Assim como em [7], utilizaremos coordenadas cartesianas (x_n, y_n, z_n) para o vórtice próximo ao pólo, uma vez as coordenadas cilíndricas não estão definidas nos pólos. O sistema de equações que descreve tal movimento é

$$\dot{\varphi}_j = -\frac{\partial H}{\partial z_j} \quad \dot{z}_j = \frac{\partial H}{\partial \varphi_j}, \quad 0 \leq j \leq n-1;$$

$$\kappa \dot{x}_n = -z_n \frac{\partial H}{\partial y_n} \quad \kappa \dot{y}_n = z_n \frac{\partial H}{\partial x_n}, \quad j = n,$$

onde H é a função $H = H_1 + H_2$ com

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} \log \left[1 - z_i z_j - \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right] \quad (2.14)$$

$$H_2 = \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \log[1 - z_j z_n - \sqrt{1 - z_j^2} (x_n \cos \varphi_j + y_n \sin \varphi_j)], \quad (2.15)$$

ou seja, a função H é a soma do Hamiltoniano, H_1 , do problema sem o vórtice no pólo e a função H_2 .

Observação 2.4. Notemos que o sistema acima não é um sistema Hamiltoniano, mas a função H continua sendo uma integral não-degenerada do sistema possibilitando que apliquemos o Teorema do Centro.

Passando a um sistema de coordenadas rotatórias com velocidade angular ν em torno do eixo polar, a função H se torna

$$H = H_1 + H_2 - \nu \left(\sum_{j=0}^{n-1} z_j + \kappa z_n \right). \quad (2.16)$$

Estamos interessados na configuração, Q_0 , que consiste de n vórtices unitários nos vértices de um n -polígono regular em uma latitude fixa z , $-1 < z < 1$, e um vórtice com intensidade κ localizado no pólo norte, ou seja, $x_n = 0$, $y_n = 0$ e $z_n = 1$.

Lema 2.5. *Para que a configuração, Q_0 , acima seja um equilíbrio relativo devemos ter*

$$\nu = -\frac{(n-1)z}{2(1-z^2)} - \frac{\kappa}{2(1-z)}. \quad (2.17)$$

Demonstração. Para Q_0 ser equilíbrio devemos ter $\frac{\partial H}{\partial z_0}(Q_0) = 0$. Isto é

$$\frac{\partial H_1}{\partial z_0} + \frac{\partial H_2}{\partial z_0} - \nu \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\sum_{j=0}^{n-1} z_j + \kappa z_n \right) = 0,$$

o que implica

$$\nu = \frac{\partial H_1}{\partial z_0} + \frac{\partial H_2}{\partial z_0}.$$

Do lema (2.1), segue que

$$\frac{\partial H_1}{\partial z_0} = -\frac{(n-1)z}{2(1-z^2)}.$$

De (2.15) temos

$$\frac{\partial H_2}{\partial z_0} = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{-z_n - \frac{z_0}{\sqrt{1-z_0^2}}(x_n \cos \varphi_0 + y_n \sin \varphi_0)}{1 - z_0 z_n - \sqrt{1-z_0^2}(x_n \cos \varphi_0 + y_n \sin \varphi_0)} \right)$$

e, assim, em Q_0 , temos

$$\frac{\partial H_2}{\partial z_0} = \frac{-\kappa}{2(1-z)},$$

logo

$$\nu = -\frac{(n-1)z}{2(1-z^2)} - \frac{\kappa}{2(1-z)},$$

como queríamos demonstrar. □

O problema pode ser escrito na forma

$$M\dot{Q} = JN\nabla H(Q)$$

onde

$$Q = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, x_n, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, y_n)$$

e

$$N = \text{diag}(1, \dots, 1, z_n, 1, \dots, 1, z_n).$$

Então o sistema linearizado no equilíbrio Q_0 é

$$M\dot{Q} = JDf(Q_0)Q, \quad f(Q) = N\nabla H(Q) \tag{2.18}$$

onde

$$\begin{aligned}
Df(Q) &= \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_0^2} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_{n-1} \partial \varphi_0} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial \varphi_0} & \frac{\partial^2 H}{\partial z_0 \partial \varphi_0} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial z_{n-1} \partial \varphi_0} & \frac{\partial^2 H}{\partial y_n \partial \varphi_0} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ z_n \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_0 \partial x_n} & \cdots & z_n \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_{n-1} \partial x_n} & z_n \frac{\partial^2 H}{\partial x_n^2} & z_n \frac{\partial^2 H}{\partial z_0 \partial x_n} & \cdots & z_n \frac{\partial^2 H}{\partial z_{n-1} \partial x_n} & z_n \frac{\partial^2 H}{\partial y_n \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_0 \partial z_0} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_{n-1} \partial z_0} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial z_0} & \frac{\partial^2 H}{\partial z_0^2} & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial z_{n-1} \partial z_0} & \frac{\partial^2 H}{\partial y_n \partial z_0} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ z_n \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_0 \partial y_n} & \cdots & z_n \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_{n-1} \partial y_n} & z_n \frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial y_n} & z_n \frac{\partial^2 H}{\partial z_0 \partial y_n} & \cdots & z_n \frac{\partial^2 H}{\partial z_{n-1} \partial y_n} & z_n \frac{\partial^2 H}{\partial y_n \partial y_n} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \frac{\partial H}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial z_n}{\partial y_n} \frac{\partial H}{\partial x_n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \frac{\partial H}{\partial y_n} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial z_n}{\partial y_n} \frac{\partial H}{\partial y_n} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Se Q_0 for o equilíbrio em questão, então $x_n = y_n = 0$, $z_n = 1$, $\frac{\partial z_n}{\partial x_n} = \frac{\partial z_n}{\partial y_n} = 0$, logo

$$Df(Q_0) = D^2H(Q_0),$$

ou seja, $Df(Q_0)$ será a matriz Hessiana de H . Desta forma, obtemos que o sistema linearizado (2.18) assume a forma

$$M\dot{Q} = JGQ,$$

com $G = D^2H(Q_0)$. Notemos que as matrizes M^{-1} e J comutam, logo podemos escrever o sistema linearizado na forma

$$\dot{Q} = JM^{-1}GQ. \quad (2.19)$$

A fim de aplicar o Teorema do Centro, tentaremos encontrar os autovalores da matriz $JM^{-1}G$ acima. Para o cálculo da matriz Hessiana de H , a função H_2 contribui com os seguintes termos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_i \partial z_j} &= 0, \quad i \neq j \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_i^2} &= -\frac{\kappa}{2(1-z)^2} \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} &= 0, \quad 0 \leq i, j \leq n-1 \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi_j \partial x_n} &= \frac{\kappa r \operatorname{sen} 2j\pi/n}{2(1-z)}, \quad 0 \leq j \leq n-1 \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi_j \partial y_n} &= -\frac{\kappa r \cos 2j\pi/n}{2(1-z)}, \quad 0 \leq j \leq n-1 \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_j \partial x_n} &= -\frac{\kappa \cos 2j\pi/n}{2r(1-z)}, \quad 0 \leq j \leq n-1 \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_j \partial y_n} &= -\frac{\kappa \operatorname{sen} 2j\pi/n}{2r(1-z)}, \quad 0 \leq j \leq n-1 \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial x_n^2} &= \frac{\partial^2 H_2}{\partial y_n^2} = \frac{\kappa n}{4} \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial x_n \partial y_n} &= 0,
\end{aligned}$$

onde $r = \sqrt{1-z^2}$.

A matriz Hessiana de H no equilíbrio Q_0 se torna

$$G = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha \\
0 & 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{n-1} & \alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \sigma_n & 0 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & \beta \\
0 & -\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \lambda_n
\end{pmatrix}$$

onde

$$\alpha = \frac{\kappa r \sqrt{n/2}}{2(1-z)} \quad (2.20)$$

$$\beta = -\frac{\kappa \sqrt{n/2}}{2r(1-z)} \quad (2.21)$$

$$\sigma_j = -\frac{j(n-j)}{2}, \quad j = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (2.22)$$

$$\lambda_j = \frac{-(n-1)(1+z^2) + j(n-j) - \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2}, \quad j = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (2.23)$$

$$\sigma_n = \lambda_n = -\frac{\kappa n}{4} + \kappa \nu. \quad (2.24)$$

logo, a matriz $M^{-1}G$ é

$$M^{-1}G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{n-1} & \alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\alpha}{\kappa} & \frac{\sigma_n}{\kappa} & 0 & \frac{\beta}{\kappa} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & \beta \\ 0 & -\frac{\alpha}{\kappa} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\beta}{\kappa} & \frac{\lambda_n}{\kappa} \end{pmatrix}$$

Podemos escrever a matriz $M^{-1}G$ na forma em blocos

$$M^{-1}G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

logo

$$JM^{-1}G = \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{n-1} & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\alpha}{\kappa} & \frac{\sigma_n}{\kappa} \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\kappa} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
C &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{\kappa} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & D &= \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\beta}{\kappa} & \frac{\lambda_n}{\kappa} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

O polinômio característico de $JM^{-1}G$ é dado por

$$\begin{aligned}
\det(JM^{-1}G - \mu I_{2n+2}) &= |JM^{-1}G - \mu I_{2n+2}| = \begin{vmatrix} C - \mu I_{n+1} & D \\ -A & -B - \mu I_{n+1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} A & B + \mu I \\ C - \mu I & D \end{vmatrix} \\
&= |DA - D(B + \mu I)D^{-1}(C - \mu I)|,
\end{aligned}$$

onde $\lambda_n \lambda_{n-1} - \beta^2 \neq 0$ e na última igualdade usamos a fórmula (1.11). Sendo

$$\begin{aligned}
DA &= \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\beta}{\kappa} & \frac{\lambda_n}{\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{n-1} & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\alpha}{\kappa} & \frac{\sigma_n}{\kappa} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{n-1} \lambda_{n-1} + \frac{\alpha \beta}{\kappa} & \alpha \lambda_{n-1} + \frac{\beta \sigma_n}{\kappa} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\beta \sigma_{n-1}}{\kappa} + \frac{\alpha \lambda_n}{\kappa^2} & \frac{\sigma_n \lambda_n}{\kappa^2} + \frac{\alpha \beta}{\kappa} \end{pmatrix}, \\
D(B + \mu I) &= \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\beta}{\kappa} & \frac{\lambda_n}{\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \cdots & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \mu & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\kappa} & 0 & \cdots & 0 & \mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mu \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha \lambda_1 \\ 0 & 0 & \mu \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\beta^2}{\kappa} & 0 & \cdots & \mu \lambda_{n-1} & \beta \mu \\ 0 & \frac{\beta \lambda_n}{\kappa^2} & 0 & \cdots & \frac{\beta \mu}{\kappa} & \frac{\mu \lambda_n}{\kappa} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$D^{-1}(C - \mu I) =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \lambda_0^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\lambda_n}{\kappa s} & -\frac{\beta}{s} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\beta}{\kappa s} & \frac{\lambda_{n-1}}{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\mu & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mu & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{\kappa} & 0 & \cdots & 0 & -\mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\mu\lambda_0^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\mu\lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & \beta\lambda_1^{-1} \\ 0 & 0 & -\mu\lambda_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\alpha\beta}{\kappa s} & 0 & \cdots & -\frac{\mu\lambda_n}{\kappa s} & \frac{\beta\mu}{s} \\ 0 & -\frac{\alpha\lambda_{n-1}}{\kappa s} & 0 & \cdots & \frac{\beta\mu}{\kappa s} & -\frac{\mu\lambda_{n-1}}{s} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

onde $\kappa s = \lambda_n \lambda_{n-1} - \beta^2$, obtemos

$$D(B + \mu I)D^{-1}(C - \mu I) =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -\mu^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\mu^2 + \frac{\alpha^2 \lambda_1 \lambda_{n-1}}{\kappa s} & 0 & \cdots & -\frac{\alpha \beta \mu \lambda_1}{\kappa s} & \beta \mu + \frac{\alpha \mu \lambda_1 \lambda_{n-1}}{s} \\ 0 & 0 & -\mu^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{\beta^2 \mu}{\kappa \lambda_1} & 0 & \cdots & \frac{-\mu^2 \lambda_n \lambda_{n-1} + \beta^2 \mu^2}{\kappa s} & \frac{\beta^3}{\kappa \lambda_1} \\ 0 & -\frac{\beta \mu \lambda_n}{\kappa^2 \lambda_1} + \frac{\alpha \beta^2 \mu}{\kappa^2 s} - \frac{\alpha \mu \lambda_n \lambda_{n-1}}{\kappa^2 s} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\beta^2 \lambda_n}{\kappa^2 \lambda_1} + \frac{\beta^2 \mu^2 - \mu^2 \lambda_n \lambda_{n-1}}{\kappa s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\mu^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\mu^2 + \frac{\alpha^2 \lambda_1 \lambda_{n-1}}{\kappa s} & 0 & \cdots & -\frac{\alpha \beta \lambda_1}{\kappa s} \mu & \left(\beta + \frac{\alpha \lambda_1 \lambda_{n-1}}{s} \right) \mu \\ 0 & 0 & -\mu^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{\beta^2 \mu}{\kappa \lambda_1} & 0 & \cdots & -\mu^2 & \frac{\beta^3}{\kappa \lambda_1} \\ 0 & -\left(\frac{\beta \lambda_n}{\kappa^2 \lambda_1} + \frac{\alpha}{\kappa} \right) \mu & 0 & \cdots & 0 & -\mu^2 + \frac{\beta^2 \lambda_n}{\kappa^2 \lambda_1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e, por conseguinte,

$$DA - D(B + \mu I)D^{-1}(C - \mu I) =$$

$$= \begin{pmatrix} \mu^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 + a & 0 & \cdots & 0 & b\mu & c\mu \\ 0 & 0 & \mu^2 + \sigma_2\lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & d\mu & 0 & \cdots & \mu^2 + \sigma_{n-2}\lambda_{n-2} & \mu^2 + e & f \\ 0 & g\mu & 0 & \cdots & 0 & h & \mu^2 + i \end{pmatrix}$$

onde

$$a = \sigma_1\lambda_1 - \frac{\alpha^2\lambda_1\lambda_{n-1}}{\kappa s}$$

$$b = \frac{\alpha\beta\lambda_1}{\kappa s}$$

$$c = -\beta - \frac{\alpha\lambda_1\lambda_{n-1}}{s}$$

$$d = \frac{\beta^2}{\kappa\lambda_1}$$

$$e = \sigma_{n-1}\lambda_{n-1} + \frac{\alpha\beta}{\kappa}$$

$$f = \alpha\lambda_{n-1} + \frac{\beta\sigma_n}{\kappa} - \frac{\beta^3}{\kappa\lambda_1}$$

$$g = \frac{\beta\lambda_n}{\kappa^2\lambda_1} + \frac{\alpha}{\kappa}$$

$$h = \frac{\beta\sigma_{n-1}}{\kappa} + \frac{\alpha\lambda_n}{\kappa^2}$$

$$i = \frac{\alpha\beta}{\kappa} + \frac{\sigma_n\lambda_n}{\kappa^2} - \frac{\beta^2\lambda_n}{\kappa^2\lambda_1}.$$

Agora, calculando o determinante de $JM^{-1}G - \mu I$, obtemos

$$\begin{aligned}
|JM^{-1}G - \mu I| &= \begin{vmatrix} \mu^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 + a & 0 & \cdots & 0 & b\mu & c\mu \\ 0 & 0 & \mu^2 + \sigma_2\lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu^2 + \sigma_{n-2}\lambda_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & d\mu & 0 & \cdots & 0 & \mu^2 + e & f \\ 0 & g\mu & 0 & \cdots & 0 & h & \mu^2 + i \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \mu^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 + \sigma_2\lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu^2 + \sigma_2\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu^2 + a & b\mu & c\mu \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d\mu & \mu^2 + e & f \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g\mu & h & \mu^2 + i \end{vmatrix} \\
&= |P|\mu^2 \prod_{j=2}^{n-2} (\mu^2 + \sigma_j\lambda_j),
\end{aligned}$$

onde

$$P = \begin{pmatrix} \mu^2 + a & b\mu & c\mu \\ d\mu & \mu^2 + e & f \\ g\mu & h & \mu^2 + i \end{pmatrix}.$$

Portanto, o polinômio característico de $JM^{-1}G$ é

$$|JM^{-1}G - \mu I| = |P|\mu^2 \prod_{j=2}^{n-2} (\mu^2 + \sigma_j\lambda_j). \quad (2.25)$$

Desta forma obtemos que $JM^{-1}G$ tem como autovalores $\mu = 0$ com multiplicidade dois (que pode ser utilizando uma integral do sistema), $\mu_j = \sqrt{-\sigma_j\lambda_j}$ com $j = 2, 3, \dots, (n-2)$ e seis

autovalores desconhecidos. De (2.22) e (2.23) segue que

$$\sigma_j = -\frac{j(n-j)}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_j = \frac{-(n-1)(1+z^2) + j(n-j) - \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2}.$$

Assim $\mu_j = \mu_{n-j}$ implicando que nenhum dos autovalores conhecidos é simples com exceção de $\mu_{\frac{n}{2}}$ quando n é um número par. Os seis autovalores não conhecidos são as raízes μ da equação $|P| = 0$. Calculando o determinante de P obtemos

$$\begin{aligned} |P| &= \mu^6 + (a - bd + e - cg + i)\mu^4 + (ae - ceg + bfg + cdh - fh + ai - bdi + ei)\mu^2 \\ &+ aei - afh. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Fazendo

$$x = \mu^2 \quad \text{e} \quad p(x) = |P|$$

obtemos

$$p(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C, \tag{2.27}$$

onde

$$A = a - bd + e - cg + i$$

$$B = ae - ceg + bfg + cdh - fh + ai - bdi + ei$$

$$C = aei - afh.$$

Em termos de n, z, κ , obtemos

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{16(1-z^2)^2} [12z^2 + 4\kappa^2(1+z)^2 + 4nz(-1-6z+z^2) \\
&+ n^2(1+4z+10z^2-4z^3+z^4) - 4\kappa(1+z)(2+4z+n(-1-2z+z^2))]; \quad (2.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{32(1-z^2)^4} [-2\kappa^3(2+n(-1+z))(1+z)^4 \\
&+ 2\kappa z(1+z)(-4z(1+2z) + n^3(-1-2z+z^2)^2 + n(1+13z+19z^2-5z^3) \\
&- n^2(2+13z+13z^2-9z^3+z^4)) + \kappa^2(1+z)^2(2(1+6z+7z^2) \\
&+ 2n(-1-8z-7z^2+4z^3) + n^2(1+6z+2z^2-6z^3+z^4)) \\
&+ (-1+n)^2 z^2(6z^2+4nz(-1-3z+z^2) + n^2(1+4z+4z^2-4z^3+z^4))]; \quad (2.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{256(1-z^2)^6} [\kappa^2(2+n(-1+z))(1+z)^3 + (-1+n)^2 z^2(2z+n(-1-2z+z^2)) \\
&+ 2\kappa(-1+n)z(1+z)(1+2z+n(-1-z+z^2))]^2. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Portanto, os seis autovalores procurados são da forma $\mu = \pm\sqrt{x_l}$ com $l = 1, 2, 3$ e x_l uma raiz de $p(x) = 0$. Para compará-los com os autovalores já conhecidos, encontraremos uma região na qual o autovalor $\mu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ tem valor absoluto maior que dos demais autovalores já conhecidos, depois faremos a comparação de $\mu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ com os autovalores relativos a Q . Isso será feito nas duas próximas subseções.

Observação 2.6. Segue de (2.30) que $C \geq 0$ e, como $C = -x_1 x_2 x_3$, obtemos que ao menos uma das raízes, digamos x_1 , é negativa, logo $\sqrt{x_1}$ é um autovalor imaginário puro do problema. Ver [15] para detalhes sobre a teoria de equações.

2.2.2 Região em que $\mu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ tem valor absoluto maior que os dos demais autovalores conhecidos

Aqui estamos interessados em encontrar uma região na qual o autovalor $\mu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ tem valor absoluto maior que os dos demais autovalores já conhecidos. Isto possibilitará compararmos os autovalores relativos a matriz P com os já conhecidos utilizando apenas $\mu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Obtivemos em (2.25) que o polinômio característico do nosso problema é

$$|JM^{-1}G - \mu I| = |P|\mu^2 \prod_{j=2}^{n-2} (\mu^2 + \sigma_j \lambda_j), \quad (2.31)$$

onde

$$\sigma_j \lambda_j = \frac{j(n-j)[(n-1)(1+z^2) - j(n-j) + \kappa(1+z)^2]}{4(1-z^2)^2}.$$

Para determinar a região onde $\mu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ tem valor absoluto maior que os dos demais autovalores conhecidos, consideremos

$$\mu(n, j, z, \kappa) = \sqrt{-\sigma_j \lambda_j} = \sqrt{-\frac{j(n-j)[(n-1)(1+z^2) - j(n-j) + \kappa(1+z)^2]}{4(1-z^2)^2}} \quad (2.32)$$

e vamos analisar

$$\begin{aligned} f(n, j, z, \kappa) &= 4(1-z^2)^2 \sigma_j \lambda_j \\ &= j(n-j)[(n-1)(1+z^2) - j(n-j) + \kappa(1+z)^2] \\ &= j(n-j)[j^2 - nj + \kappa(1+z)^2 + (n-1)(1+z^2)]. \end{aligned}$$

Vamos considerar, por um momento, j como uma variável contínua de μ e determinaremos uma região do plano $z - \kappa$ na qual $\frac{n}{2}$ é ponto de máximo global de $|\mu|$. Derivando f em relação a j , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial j}(n, j, z, \kappa) &= -(2j-n)[(n-1)(1+z^2) - 2j(n-j) + \kappa(1+z)^2] \\ &= -(2j-n)[2j^2 - 2jn + \kappa(1+z)^2 + (n-1)(1+z^2)] \end{aligned}$$

e, assim, os pontos críticos de f (na variável j) são

$$\frac{n}{2}, \quad \frac{n}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{n^2 - 2(n-1)(1+z^2) + 2\kappa(1+z)^2}.$$

Derivando mais uma vez em relação j temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial j^2}(n, j, z, \kappa) &= -2(n-1)(1+z^2) + 2(2j-n)^2 + 4j(j-n) + 2\kappa(1+z)^2 \\ &= -[12j^2 - 12nj + 2n^2 + 2(n-1)(1+z^2) + 2\kappa(1+z)^2] \end{aligned}$$

que é uma função quadrática na variável j com ponto de máximo em $j = \frac{n}{2}$. Ao encontrarmos uma região onde $\frac{\partial^2 f}{\partial j^2}(n, n/2, z, \kappa)$ seja negativa, teremos que $j = \frac{n}{2}$ é ponto de máximo local para f na variável j . Como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial j^2}(n, n/2, z, \kappa) = n^2 - 2\kappa(1+z)^2 - 2(n-1)(1+z^2), \quad (2.33)$$

obtemos que uma condição suficiente para que $j = \frac{n}{2}$ seja um ponto de máximo local é que

$$\kappa > \frac{n^2 - 2(n-1)(1+z^2)}{2(1+z)^2}. \quad (2.34)$$

Esta desigualdade será utilizada em diversas partes do texto, por isso denotaremos seu segundo membro por

$$g_4(n, z) = \frac{n^2 - 2(n-1)(1+z^2)}{2(1+z)^2} \quad (2.35)$$

para referências futuras. Notemos que na região dada pela condição (2.34) $\frac{\partial^2 f}{\partial j^2}(n, j, z, \kappa)$ é estritamente negativa resultando que $\frac{\partial f}{\partial j}(n, j, z, \kappa)$ é estritamente decrescente e se anula apenas para $j = \frac{n}{2}$ e, por conseguinte, $j = \frac{n}{2}$ é ponto de máximo global (na variável j) da função f .

Observação 2.7. Segue de (2.23) que uma condição suficiente para termos

$$\lambda_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} < 0$$

é que

$$\kappa > \frac{n^2 - 4(n-1)(1+z^2)}{4(1+z)^2}, \quad \text{para } n \text{ par} \quad (2.36)$$

$$\kappa > \frac{n^2 - 1 - 4(n-1)(1+z^2)}{4(1+z)^2}, \quad \text{para } n \text{ ímpar.} \quad (2.37)$$

Por outro lado, para todo $n \geq 2$ temos

$$\frac{n^2 - 4(n-1)(1+z^2)}{4(1+z)^2} < g_4(n, z),$$

e

$$\frac{n^2 - 1 - 4(n-1)(1+z^2)}{4(1+z)^2} < g_4(n, z),$$

logo a condição (2.34) implica que $f = 4(1-z^2)^2|\mu|^2$ e, conseqüentemente, $\mu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ tem valor absoluto maior que dos demais autovalores conhecidos. Além disso, na região dada pela condição (2.34), $-\sigma_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \lambda_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} < 0$, pois $\sigma_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} < 0$ o que implica $\mu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ser um autovalor imaginário puro do problema.

2.2.3 Órbitas de Lyapunov próximas a um anel de vórtices em uma latitude fixa com um vórtice no pólo norte

Notemos de (2.25) e (2.26) que o polinômio característico de $JM^{-1}G$ é uma função par e, portanto, da teoria geral sobre equações diferenciais ordinárias, os autovalores da matriz $JM^{-1}G$ em um equilíbrio estável no sentido de Lyapunov são todos imaginários puros. Assim sendo, se nos restringirmos a uma região de estabilidade do equilíbrio Q_0 todos os autovalores de $JM^{-1}G$ devem ser imaginários puros e conseqüentemente as raízes de

$$p(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

dado em (2.27) devem ser reais negativas.

Diversos autores têm estudado a estabilidade de equilíbrios relativos no problema de vórtices pontuais como por exemplo [5], [6] e [7]. Neste último foram encontradas as regiões de estabilidade não-linear para o equilíbrio Q_0 dadas pelo teorema.

Teorema 2.8. *Um anel de n vórtices unitários na latitude z e um vórtice de intensidade κ no pólo norte da esfera unitária é estável no sentido de Lyapunov nas seguintes regiões.*

caso $n = 3$:

para $-1 < z \leq \frac{2-\sqrt{13}}{3}$ quando $g_3(z) < \kappa < 0$ ou $g_2(z) < \kappa$,

para $\frac{2-\sqrt{13}}{3} \leq z < -\frac{1}{3}$ quando $0 < \kappa < g_3(z)$ ou $g_2(z) < \kappa$,

para $-\frac{1}{3} \leq z \leq 0$ quando $0 < \kappa < g_2(z)$ ou $g_3(z) < \kappa$,

para $0 \leq z \leq \frac{1}{3}$ quando $0 < \kappa$,

para $\frac{1}{3} < z < 1$ quando $0 < \kappa < g_3(z)$.

caso $n = 4, 5$ ou 6 :

para $-1 < z \leq -\alpha_n$ quando $g_0(z) < \kappa < 0$ ou $g_2(z) < \kappa$,

para $-\alpha_n \leq z \leq \beta_n$ quando $g_2(z) < \kappa$,

para $\beta_n \leq z \leq \gamma_n$ quando $g_0(z) < \kappa$,

para $\gamma_n < z \leq \alpha_n$ quando $g_0(z) < \kappa < g_3(z)$,

para $\alpha_n < z \leq 1$ quando $0 < \kappa < g_3(z)$.

caso $n \geq 7$:

para $-1 < z \leq \gamma_n$ quando $g_0(z) < \kappa$,

para $\gamma_n < z < 1$ quando $g_0(z) < \kappa < g_3(z)$.

onde

$$\begin{aligned}
g_0(z) &= \begin{cases} \frac{((n-2)/2)^2 - (n-1)z^2}{(1+z)^2} & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{(n-1)(n-3)/4 - (n-1)z^2}{(1+z)^2} & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases} \\
g_1(z) &= -\frac{(n-1)z^2}{(1+z)^2} \\
g_2(z) &= -\frac{(n-1)z}{1+z} \\
g_3(z) &= -\frac{(n-1)z(2z-n-2nz+nz^2)}{(2-n+nz)(1+z)^2}.
\end{aligned}$$

e

$$\alpha_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \alpha_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha_6 = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\beta_4 = -\frac{1}{3}, \quad \beta_5 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_6 = -\frac{4}{5}, \quad \gamma_n = \frac{n-2}{n} \text{ para todo } n \geq 3.$$

Voltando ao nosso problema, temos como objetivo nesta subseção provar o seguinte teorema.

Teorema 2.9. *No caso de um anel com um vórtice no pólo norte podemos aplicar o Teorema do Centro nos seguintes casos:*

- $n = 3$

para $-1 < z \leq \frac{2-\sqrt{13}}{3}$ quando $\kappa > g_4(3, z)$;

para $\frac{2-\sqrt{13}}{3} < z < -\frac{1}{3}$ quando $\kappa > \max\{g_4(3, z), g_5(3, z)\}$;

para $-\frac{1}{3} \leq z \leq \frac{1}{3}$ quando $\kappa > g_5(3, z)$;

para $\frac{1}{3} < z < 1$ quando κ estiver entre as curvas $g_3(4, z)$ e $g_5(4, z)$.

- $n = 4$

para $-1 < z \leq -\frac{1}{3}$ quando $\kappa > g_4(4, z)$;

para $-\frac{1}{3} < z \leq \frac{1}{2}$ quando $\kappa > \max\{g_4(4, z), g_5(4, z)\}$;

para $\frac{1}{2} < z \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ quando $g_5(4, z) < \kappa < g_3(4, z)$;

para $\frac{\sqrt{3}}{3} < z < 1$ quando κ estiver entre as curvas $g_3(4, z)$ e $g_5(4, z)$.

- $n = 5$

para $-1 < z \leq -\frac{1}{2}$ quando $\kappa > g_4(5, z)$;

para $-\frac{1}{2} < z \leq \frac{3}{5}$ quando $\kappa > \max\{g_4(5, z), g_5(5, z)\}$;

para $\frac{3}{5} < z \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ quando κ estiver entre as curvas $g_3(5, z)$ e $g_5(5, z)$.

- $n = 6$

para $-1 < z < -\frac{4}{5}$ quando $\kappa > g_4(6, z)$;

para $-\frac{4}{5} < z \leq \frac{1}{2}$ quando $\kappa > \max\{g_4(6, z), g_5(6, z)\}$;

para $\frac{1}{2} < z \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}$ quando κ estiver entre as curvas $g_3(6, z)$ e $g_5(6, z)$.

- $n = 7$

para $-1 < z \leq -\frac{1}{6}$ quando $\kappa > g_4(7, z)$;

para $0 < z \leq \frac{5}{7}$ quando $\kappa > g_5(7, z)$;

para $\frac{5}{7} < z < 1$ quando κ estiver entre as curvas $g_3(7, z)$ e $g_5(7, z)$.

- $n \geq 8$

para $-1 < z \leq 0$ quando $\kappa > g_4(n, k)$;

para $\frac{n-2}{n} < z < 1$ quando κ estiver entre as curvas $g_3(n, z)$ e $g_5(n, z)$.

onde a curva g_3 é a mesma do Teorema (2.8), g_4 foi dada em (2.35) e g_5 está definida em (2.45). A demonstração deste teorema segue das proposições a seguir e seus corolários.

Vamos nos restringir às regiões de estabilidade dadas pelo Teorema (2.8) e, portanto, $p(x)$ tem três raízes reais negativas e distintas, digamos, x_1, x_2 e x_3 , logo $|x_1| + |x_2| + |x_3| = A$. Supondo $|x_j| < |x_3|$, $j = 1, 2$, chegamos à desigualdade

$$\frac{A}{3} < |x_3|. \quad (2.38)$$

O polinômio $p(x)$ nos dá os seis autovalores desconhecidos no problema que são $\pm i\sqrt{|x_1|}$, $\pm i\sqrt{|x_2|}$, $\pm i\sqrt{|x_3|}$ ($i = \sqrt{-1}$). Com o intuito de aplicarmos o Teorema do Centro iremos compará-los com $\mu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ que tem valor absoluto maior do que os dos autovalores já conhecidos sempre que a condição (2.34) for satisfeita (no caso em que n é um número par $\mu_{n/2}$ é um autovalor simples). Mostraremos que sob certas condições

$$|\mu_{\frac{n}{2}}|^2 < \frac{A}{3} \quad (2.39)$$

que juntamente com (2.38) resulta $|\mu_{\frac{n}{2}}| < \sqrt{|x_3|}$ e, por conseguinte, $\frac{\mu_j}{\mu} \notin \mathbb{Z}$, $j = 2, \dots, n-2$, com $\mu = i\sqrt{|x_3|}$, ou seja, o quociente dos autovalores já conhecidos por $\mu = i\sqrt{|x_3|}$ não será um número inteiro possibilitando que apliquemos o Teorema do Centro (1.2).

As próximas proposições nos darão as regiões do plano $z - \kappa$ em que a condição (2.39) é satisfeita. Segue de (2.28) e (2.32) que

$$\begin{aligned} A - 3|\mu_{\frac{n}{2}}|^2 &= \frac{1}{64(1-z^2)^2} [16(1+z)^2\kappa^2 \\ &+ 4[-3(1+z)^2n^2 + 4n(1+z)(1+2z-z^2) - 8(1+z)(1+2z)]\kappa \\ &+ 3n^4 - 12(1+z^2)n^3 + 4(4+4z+13z^2-4z^3+z^4)n^2 \\ &- 16z(1+6z-z^2)n + 48z^2] \end{aligned}$$

e fazendo

$$q(n, z, \kappa) = 64(1-z^2)^2(A - 3|\mu|^2), \quad (2.40)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
q(n, z, \kappa) &= 16(1+z)^2\kappa^2 \\
&+ 4[-3(1+z)^2n^2 + 4n(1+z)(1+2z-z^2) - 8(1+z)(1+2z)]\kappa \\
&+ 3n^4 - 12(1+z^2)n^3 + 4(4+4z+13z^2-4z^3+z^4)n^2 \\
&- 16z(1+6z-z^2)n + 48z^2,
\end{aligned}$$

assim, na região em que $q(n, z, \kappa) > 0$, a condição (2.39) será satisfeita. Obsevemos que

$$q(n, z, \kappa) = a(n, z)\kappa^2 + b(n, z)\kappa + c(n, z), \quad (2.41)$$

onde

$$a(n, z) = 16(1+z)^2 \quad (2.42)$$

$$b(n, z) = 4[-3(1+z)^2n^2 + 4n(1+z)(1+2z-z^2) - 8(1+z)(1+2z)] \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned}
c(n, z) &= 3n^4 - 12(1+z^2)n^3 + 4(4+4z+13z^2-4z^3+z^4)n^2 \\
&- 16z(1+6z-z^2)n + 48z^2,
\end{aligned} \quad (2.44)$$

então, as raízes reais em κ , de $q(n, z, \kappa) = 0$ são dadas por

$$\frac{-b(n, z) \pm \sqrt{b^2(n, z) - 4a(n, z) \cdot c(n, z)}}{2a(n, z)}$$

quando $b^2(n, z) - 4a(n, z) \cdot c(n, z) \geq 0$. A maior destas raízes denotaremos por $g_5(n, z)$, ou seja,

$$g_5(n, z) = \frac{-b(n, z) + \sqrt{b^2(n, z) - 4a(n, z) \cdot c(n, z)}}{2a(n, z)} \quad (2.45)$$

a qual utilizaremos nas demonstrações das proposições a seguir. Segue de (2.42), (2.43) e (2.44) que

$$\begin{aligned}
b^2(n, z) - 4a(n, z) \cdot c(n, z) &= 16(1+z)^2[(-3+18z+9z^2)n^4 \\
&+ (24-72z+24z^2+24z^3)n^3 \\
&+ (144z-80z^2)n^2 + (-64-192z+192z^2+64z^3)n \\
&+ 64+256z+64z^2].
\end{aligned}$$

Como $16(1+z)^2 > 0$ para todo $z \neq -1$, o sinal de $b^2(n, z) - 4a(n, z) \cdot c(n, z)$ é o mesmo de

$$\Delta(n, z) = \frac{b^2(n, z) - 4a(n, z) \cdot c(n, z)}{16(1+z)^2},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta(n, z) = & (-3 + 18z + 9z^2)n^4 + (24 - 72z + 24z^2 + 24z^3)n^3 + (144z - 80z^2)n^2 \\ & + (-64 - 192z + 192z^2 + 64z^3)n + 64 + 256z + 64z^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Observação 2.10. Como a função $q(n, z, \kappa) = a(n, z)\kappa^2 + b(n, z)\kappa + c(n, z)$ é uma função quadrática na variável κ e $a(n, z)$ é sempre positivo, temos que:

1. na região onde $\Delta > 0$, a função $q(n, z, \kappa)$ é positiva para todo $\kappa > g_5(n, z)$;
2. na região onde $\Delta < 0$, a função $q(n, z, \kappa)$ é positiva para todo κ real.

Começamos com as proposições que tratam das latitudes negativas.

Proposição 2.11. Para $n \geq 8$, $\Delta(n, z) < 0$ sempre que $-1 < z \leq 0$.

Demonstração. Consideremos $\Delta_1(n, z) = -\Delta(n, -z)$. Assim é suficiente mostrar que $\Delta_1(n, z) > 0$ para $n \geq 8$ e $0 \leq z < 1$. De (2.46), temos

$$\begin{aligned} \Delta_1(n, z) = & -64 + 64n - 24n^3 + 3n^4 \\ & + 2[128 - 96n + 72n^2 - 36n^3 + 9n^4]z \\ & + [-64 - 192n + 80n^2 - 24n^3 - 9n^4]z^2 \\ & + 8n(8 + 3n^2)z^3. \end{aligned}$$

Para $z = 0$, temos

$$\Delta_1(n, 0) = -64 + 64n - 24n^3 + 3n^4$$

que é positivo para $n \geq 8$. Para $0 < z < 1$ faremos em dois caso. Primeiramente consideremos $0 < z < \frac{1}{2}$. Como o coeficiente, em z , de Δ_1 , $-64 + 64n - 24n^3 + 3n^4$ é positivo e $-64 - 192n +$

$80n^2 - 24n^3 - 9n^4$ é negativo para todo $n \geq 8$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_1(n, z) &> [-64 + 64n - 24n^3 + 3n^4](z) \\
&+ 2[128 - 96n + 72n^2 - 36n^3 + 9n^4]z \\
&+ [-64 - 192n + 80n^2 - 24n^3 - 9n^4]z(1/2) \\
&+ (64n + 24n^3)z^3 \\
&= (160 - 224n + 184n^2 - 108n^3 + \frac{33}{2}n^4)z + 8n(8 + 3n^2)z^3 \\
&> 0.
\end{aligned}$$

A última desigualdade segue do fato que, para $n \geq 8$, $160 - 224n + 184n^2 - 108n^3 + \frac{33}{2}n^4$ e $8n(8 + 3n^2)$ são positivos.

Agora façamos o caso em que $1/2 \leq z < 1$. Como $-64 + 64n - 24n^3 + 3n^4$, $128 - 96n + 72n^2 - 36n^3 + 9n^4$ e $8n(8 + 3n^2)$ são positivos para $n \geq 8$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_1(n, z) &> [-64 + 64n - 24n^3 + 3n^4](z) \\
&+ 2[128 - 96n + 72n^2 - 36n^3 + 9n^4]z \\
&+ [-64 - 192n + 80n^2 - 24n^3 - 9n^4]z^2 \\
&+ 8n(8 + 3n^2)z^2(1/4) \\
&= (192 - 128n + 144n^2 - 96n^3 + 21n^4)z \\
&+ (-64 - 160n + 80n^2 - 12n^3 - 9n^4)z^2 \\
&= [192 - 128n + 144n^2 - 96n^3 + 21n^4 \\
&+ (-64 - 160n + 80n^2 - 12n^3 - 9n^4)z]z \\
&> 0 .
\end{aligned}$$

A última desigualdade segue do fato que, para $n \geq 8$, $-64 - 160n + 80n^2 - 12n^3 - 9n^4 < 0$, o quociente de $192 - 128n + 144n^2 - 96n^3 + 21n^4$ por $-64 - 160n + 80n^2 - 12n^3 - 9n^4$ é maior que 1 e $0 < z < 1$. Isto conclui a prova da proposição. \square

Corolário 2.12. Para $n \geq 8$ e $-1 < z \leq 0$ temos que $q(n, z, \kappa) > 0$ para todo $\kappa \in \mathbb{R}$

Proposição 2.13. Para $n = 3, 4$ temos que $\Delta(n, z) > 0$ sempre que $-1 < z \leq 0$.

Demonstração. Para $n = 3$, (2.46) se torna

$$\Delta(3, z) = 277 + 490z + 1297z^2 + 840z^3.$$

Sendo $\Delta(3, z)$ um função contínua no intervalo compacto $[-1, 0]$, admite um valor mínimo global neste intervalo. Mostraremos que este valor mínimo é positivo. A derivada de $\Delta(3, z)$ em relação a z é a função quadrática

$$\frac{\partial \Delta}{\partial z}(3, z) = 490 + 2594z + 2520z^2,$$

cujas raízes são

$$\frac{-1297 \pm \sqrt{447409}}{2520}.$$

Estas raízes são os pontos críticos de $\Delta(3, z)$ no intervalo $(-1, 0)$. Os valores da função nestes pontos são, respectivamente,

$$\frac{2418112873 \mp 447409\sqrt{447409}}{9525600}.$$

Os demais valores possíveis para mínimo global são $\Delta(3, -1) = 244$ e $\Delta(3, 0) = 277$. Assim, o mínimo global é

$$\frac{2418112873 - 447409\sqrt{447409}}{9525600} \approx 222,4$$

e, portanto, $\Delta(3, z) > 0$ quando $-1 < z < 0$.

O caso $n = 4$ é análogo ao anterior, onde

$$\Delta(4, z) = 64(9 + 28z + 53z^2 + 28z^3),$$

cujos pontos críticos em $(-1, 0)$ são

$$\frac{1}{84}(-53 \pm \sqrt{457})$$

e os valores possíveis para mínimo global são:

$$\Delta(4, \frac{1}{84}(-53 \pm \sqrt{457})) = \frac{8(57149 \mp 457\sqrt{457})}{1323}, \quad \Delta(4, -1) = 384 \quad \Delta(4, 0) = 576.$$

Logo, o mínimo global é

$$\frac{8(57149 - 457\sqrt{457})}{1323} \approx 286,5$$

e, portanto, $\Delta(4, z) > 0$ para $-1 \leq z < 0$. □

Corolário 2.14. Para $n = 3, 4$, $q(n, z, \kappa) > 0$ quando $-1 < z \leq 0$ sempre que $\kappa > g_5(n, z)$.

Proposição 2.15. Para $n = 6, 7$ temos que $\Delta(n, z) < 0$ sempre que $-1 < z \leq -\frac{1}{6}$ e para $n = 5$, $\Delta(n, z) < 0$ sempre que $-\frac{7}{8} < z < -\frac{3}{11}$

Demonstração. Novamente vamos utilizar a função $\Delta_1(n, z)$ dada por $\Delta_1(n, z) = -\Delta(n, -z)$. Para $n = 6, 7$ vamos mostrar que $\Delta_1(n, z) > 0$ quando $\frac{1}{6} \leq z < 1$. De (2.46) temos

$$\Delta_1(6, z) = 16(-61 + 754z - 949z^2 + 348z^3)$$

que é uma função contínua no intervalo compacto $[\frac{1}{6}, 1]$, logo admite valor mínimo global. É suficiente mostrar que o mínimo é positivo.

De fato, derivando com respeito a z , obtemos

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial z}(6, z) = 16(754 - 1898z + 1044z^2),$$

cujas raízes são

$$\frac{949 \pm 5\sqrt{4537}}{1044}.$$

Notemos que apenas $\frac{949-5\sqrt{4537}}{1044}$ está no intervalo $(\frac{1}{6}, 1)$ e, por conseguinte, é o único ponto crítico neste intervalo. Assim, os valores possíveis para mínimo global são:

$$\Delta_1(6, \frac{949 - 5\sqrt{4537}}{1044}) \approx 1999,8, \quad \Delta_1(6, 1/6) = \frac{1916}{3} \quad \text{e} \quad \Delta_1(6, 1) = 1472.$$

Logo, o mínimo é $\frac{1916}{3} > 0$ e, portanto, $\Delta_1(6, z) > 0$ para $\frac{1}{6} < z < 1$.

O caso $n = 7$ é análogo, sendo

$$\Delta_1(7, z) = -645 + 24490z - 27329z^2 + 8680z^3,$$

cujos o único ponto crítico em $(\frac{1}{6}, 1)$ é

$$\frac{27329 - \sqrt{109154641}}{26040}$$

e o valor de mínimo global é o menor dentre os valores:

$$\Delta_1(7, \frac{27329 - \sqrt{109154641}}{26040}) \approx 6110,8, \quad \Delta_1(7, \frac{1}{6}) = 2717,7 \quad \text{e} \quad \Delta_1(7, 1) = 5196.$$

Logo, $\Delta_1(7, \frac{1}{6}) = 2717,7 > 0$ é o mínimo e, portanto, $\Delta_1(7, z) > 0$ para $\frac{1}{6} \leq z < 0$.

No caso $n = 5$ vamos mostrar que $\Delta_1(5, z) > 0$ para $\frac{3}{11} \leq z \leq \frac{7}{8}$. De (2.46), temos

$$\Delta_1(5, z) = -869 + 5146z - 7649z^2 + 3320z^3,$$

sendo seu único ponto crítico no intervalo $(\frac{3}{11}, \frac{7}{8})$ o número

$$\frac{7649 - \sqrt{7253041}}{9960}.$$

Assim, o mínimo global da função no intervalo dado é o menor dentre:

$$\Delta_1(5, \frac{7649 - \sqrt{7253041}}{9960}) \approx 206,7, \quad \Delta_1(5, \frac{3}{11}) = \frac{43748}{1331} \quad \text{e} \quad \Delta_1(5, \frac{7}{8}) = \frac{13}{8}.$$

Logo, $\Delta_1(5, \frac{7}{8}) = \frac{13}{8} > 0$ é o mínimo global e, portanto, $\Delta_1(5, z) > 0$ para $\frac{3}{11} \leq z \leq \frac{7}{8}$.

Concluimos, assim, a demonstração da proposição. \square

Corolário 2.16. *A função $q(n, z, \kappa) > 0$ para todo $\kappa \in \mathbb{R}$ nos seguintes casos:*

- para $n = 6, 7$ quando $-1 < z \leq -\frac{1}{6}$;
- para $n = 5$ quando $-\frac{7}{8} \leq z \leq -\frac{3}{11}$.

As próximas proposições tratam das latitudes positivas.

Proposição 2.17. *Para $n = 3, 4, 5, 6, 7$, $\Delta(n, z) > 0$ sempre que $0 \leq z < 1$ e para $n \geq 8$, $\Delta(n, z) > 0$ sempre que $\frac{1}{6} \leq z < 1$*

Demonstração. Podemos escrever $\Delta(n, z)$ na forma

$$\begin{aligned} \Delta(n, z) &= 64 - 64n + 24n^3 - 3n^4 \\ &+ 2(128 - 96n + 72n^2 - 36n^3 + 9n^4)z \\ &+ (64 + 192n - 80n^2 + 24n^3 + 9n^4)z^2 \\ &+ 8n(8 + 3n^2)z^3. \end{aligned}$$

Sendo os coeficientes, em z , $2(128 - 96n + 72n^2 - 36n^3 + 9n^4)$, $64 + 192n - 80n^2 + 24n^3 + 9n^4$ e $8n(8 + 3n^2)$ positivos para $n \geq 3$ temos para $\frac{1}{6} \leq z < 1$ que

$$\begin{aligned} \Delta(n, z) &\geq \Delta(n, 1/6) \\ &= \frac{1}{108}(11712 - 9760n + 2352n^2 + 1380n^3 + 27n^4) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Para $n = 3, 4, 5, 6$, e 7 o coeficiente $64 - 64n + 24n^3 - 3n^4$ também é positivo. De fato, obtemos, respectivamente

$$\Delta(3, z) = 277 + 490z + 1297z^2 + 840z^3$$

$$\Delta(4, z) = 64(9 + 28z + 53z^2 + 28z^3)$$

$$\Delta(5, z) = 869 + 5146z + 7649z^2 + 3320z^3$$

$$\Delta(6, z) = 16(61 + 754z + 949z^2 + 348z^3)$$

$$\Delta(7, z) = 645 + 24490z + 27329z^2 + 8680z^3$$

que são positivos sempre que $0 \leq z < 1$. Isto conclui a demonstração. \square

Corolário 2.18. *A função $q(n, z, \kappa)$ é positiva nos seguintes casos:*

- $n = 3, 4, 5, 6, 7$
para $0 \leq z < 1$ quando $\kappa > g_5(n, z)$;
- $n \geq 8$
para $\frac{1}{6} \leq z < 1$ quando $\kappa > g_5(n, z)$.

Observação 2.19. Das proposições acima e seus corolários concluímos que a função $q(n, z, \kappa)$ é positiva nos seguintes casos:

- $n = 3, 4$
para $-1 < z < 1$ quando $\kappa > g_5(n, z)$
- $n = 5$
para $-\frac{7}{8} \leq z \leq -\frac{3}{11}$ para todo $\kappa \in \mathbb{R}$
para $0 \leq z < 1$ quando $\kappa > g_5(n, z)$
- $n = 6, 7$
para $-1 < z \leq -\frac{1}{6}$ para todo $\kappa \in \mathbb{R}$
para $0 \leq z < 1$ quando $\kappa > g_5(n, z)$
- $n \geq 8$
para $-1 < z \leq 0$ para todo $\kappa \in \mathbb{R}$
para $\frac{1}{6} \leq z < 1$ quando $\kappa > g_5(n, z)$.

2.3 Dois vórtices em uma latitude fixa e um no pólo norte

Aqui tratamos do equilíbrio relativo Q_0 que consiste de um anel com dois vórtices unitários em uma latitude fixa e um com intensidade κ localizado no pólo norte. Novamente devemos encontrar os autovalores da matriz $JM^{-1}G$, onde J é matriz simplética canônica, $M = \text{diag}(1, 1, \kappa, 1, 1, \kappa)$ e G é a matriz de Hessiana de H no equilíbrio Q_0 .

2.3.1 Órbitas de Lyapunov para $n = 2$

Primeiramente, calculemos o polinômio característico de $JM^{-1}G$. A matriz Hessiana no equilíbrio é

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \sigma_2 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{1}{2} & \lambda_0 &= -\frac{1+z^2+\kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \\ \sigma_2 &= -\frac{\kappa(2+3z+\kappa(1+z))}{2(1-z^2)} & \lambda_1 &= -\frac{z^2+\kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \\ \alpha &= \frac{r\kappa}{\sqrt{2}(1-z)} & \lambda_2 &= \frac{\kappa(z+2z^2-\kappa(1+z))}{2(1-z^2)} \\ \beta &= \frac{-\kappa}{r(1-z)\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

sendo $r = \sqrt{1-z^2}$. Assim, a matriz $M^{-1}G$ é

$$M^{-1}G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_2}{\kappa} & 0 & \frac{\beta}{\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{\kappa} & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_2}{\kappa} \end{pmatrix}.$$

Como antes, a matriz $M^{-1}G$ pode ser escrita em blocos na forma

$$M^{-1}G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

e, usando novamente a fórmula (1.11), obtemos

$$|M^{-1}JG - \mu I| = |DA - D(B + \mu I)D^{-1}(C - \mu I)|.$$

Vamos, então, calcular a matriz $DA - D(B + \mu I)D^{-1}(C - \mu I)$.

$$\begin{aligned} DA &= \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_2}{\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_2}{\kappa} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_2 \lambda_2}{\kappa^2} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(B + \mu I) &= \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_2}{\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -\alpha \\ 0 & \frac{\beta}{\kappa} & \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu \lambda_1 & -\alpha \lambda_1 \\ 0 & \frac{\beta \lambda_2}{\kappa^2} & \frac{\mu \lambda_2}{\kappa} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{-1}(C - \mu I) &= \begin{pmatrix} \lambda_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \lambda_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & \beta \\ 0 & -\frac{\alpha}{\kappa} & -\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\mu \lambda_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu \lambda_1^{-1} & \beta \lambda_1^{-1} \\ 0 & -\alpha \lambda_2^{-1} & -\kappa \mu \lambda_2^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
D(B + \mu I)D^{-1}(C - \mu I) &= \begin{pmatrix} \mu\lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu\lambda_1 & -\alpha\lambda_1 \\ 0 & \frac{\beta\lambda_2}{\kappa^2} & \frac{\mu\lambda_2}{\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu\lambda_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu\lambda_1^{-1} & \beta\lambda_1^{-1} \\ 0 & -\alpha\lambda_2^{-1} & -\kappa\mu\lambda_2^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu^2 + \alpha^2\frac{\lambda_1}{\lambda_2} & \mu\beta + \kappa\alpha\mu\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \\ 0 & -\beta\mu\frac{\lambda_2}{\kappa^2\lambda_1} - \frac{\alpha\mu}{\kappa} & -\mu^2 + \beta^2\frac{\lambda_2}{\kappa^2\lambda_1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

logo

$$DA - D(B + \mu I)D^{-1}(C - \mu I) = \begin{pmatrix} \mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 + a & b\mu \\ 0 & c\mu & \mu^2 + d \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned}
a &= \sigma_1\lambda_1 - \alpha^2\frac{\lambda_1}{\lambda_2} & c &= \frac{\kappa\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2}{\kappa^2\lambda_1} \\
b &= -\frac{\kappa\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2}{\lambda_2} & d &= \frac{\sigma_2\lambda_2}{\kappa^2} - \beta^2\frac{\lambda_2}{\kappa^2\lambda_1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|JM^{-1}G - \mu I| = \begin{vmatrix} \mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 + a & b\mu \\ 0 & c\mu & \mu^2 + d \end{vmatrix} = \mu^2|P|,$$

onde

$$P = \begin{pmatrix} \mu^2 + a & b\mu \\ c\mu & \mu^2 + d \end{pmatrix}$$

e

$$|Q| = \mu^4 + (a - bc + d)\mu^2 + ad.$$

Observação 2.20. Segue do visto acima, que o polinômio característico $|JM^{-1}G - \mu I|$ é uma função par. Isto implica que na região de estabilidade, os autovalores de $JM^{-1}G$ são imaginários puros.

Fazendo $x = \mu^2$ em $|P|$ obtemos

$$p(x) = x^2 + Dx + E, \quad (2.47)$$

com

$$D = a - bc + d \quad \text{e} \quad E = ad$$

ou

$$D = \lambda_1 \sigma_1 + \frac{\lambda_2 \sigma_2}{\kappa^2} + \frac{2\alpha\beta}{\kappa} \quad \text{e} \quad E = \frac{(\alpha^2 - \lambda_2 \sigma_1)(\beta^2 - \lambda_1 \sigma_2)}{\kappa^2}.$$

As raízes de (2.47) são dadas por

$$x_1 = -\frac{(\kappa + z + \kappa z)^2}{4(1 - z^2)^2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{(1 + 2z)(\kappa(1 + z)^2 + z(2 + 3z))}{4(1 - z^2)^2}.$$

Observação 2.21. Notemos que $x_1 < 0$ sempre que $\kappa \neq h_1(z)$ e $x_2 < 0$ para

- $-1 < z < -\frac{1}{2}$ quando $\kappa > h_3(z)$;
- $-\frac{1}{2} < z < 1$ quando $\kappa < h_3(z)$,

onde $h_1(z) = -\frac{z}{1+z}$ e $h_3(z) = -\frac{(2+3z)z}{(1+z)^2}$.

Lema 2.22. O quociente $\frac{x_2}{x_1}$ não será um número inteiro desde que

$$\kappa \neq -\frac{(1+z)(1+(3+2m)z+2z^2) - \sqrt{(1+(2-4m)z+z^2)(1+3z+2z^2)^2}}{2m(1+z)^2} \quad (2.48)$$

e

$$\kappa \neq -\frac{(1+z)(1+(3+2m)z+2z^2) + \sqrt{(1+(2-4m)z+z^2)(1+3z+2z^2)^2}}{2m(1+z)^2}. \quad (2.49)$$

Da mesma forma, o quociente $\frac{x_1}{x_2}$ não será inteiro sempre que

$$\kappa \neq -\frac{2z + m(1+3z+2z^2) - \sqrt{m(1+2z)}\sqrt{-4z+m(1+z)^2}}{2(1+z)} \quad (2.50)$$

e

$$\kappa \neq -\frac{2z + m(1+3z+2z^2) + \sqrt{m(1+2z)}\sqrt{-4z+m(1+z)^2}}{2(1+z)}. \quad (2.51)$$

Em ambos os casos m é um número inteiro.

Demonstração. De fato, fazendo $\frac{x_2}{x_1} = m$, obtemos

$$m(1+z)^2\kappa^2 + (1+z)(1+(3+3m)z+2z^2)\kappa + z(2+(7+m)z+6z^2) = 0,$$

logo

$$\kappa = -\frac{(1+z)(1+(3+2m)z+2z^2) \pm \sqrt{(1+(2-4m)z+z^2)(1+3z+2z^2)^2}}{2m(1+z)^2}.$$

Agora, se $\frac{x_1}{x_2} = m$, temos

$$-(1+z)^2\kappa^2 - (1+z)(m+(2+3m)z+2mz^2)\kappa - z(z+m(2+7z+6z^2)),$$

logo

$$\kappa = -\frac{2z+m(1+3z+2z^2) \pm \sqrt{m(1+2z)}\sqrt{-4z+m(1+z)^2}}{2(1+z)}.$$

□

Teorema 2.23. *Para o anel com dois vórtices unitários em uma latitude fixa e um vórtice com intensidade κ no pólo norte podemos aplicar o Teorema do Centro nos seguintes casos:*

1. *Com o autovalor $\sqrt{x_1}$, desde que $\kappa \neq h_1(z)$ e as condições (2.48), (2.49) sendo satisfeitas;*

2. *Com o autovalor $\sqrt{x_2}$ para*

(a) $-1 < z < -\frac{1}{2}$ *quando $\kappa > h_3(z)$;*

(b) $-\frac{1}{2} < z < 1$ *quando $\kappa < h_3(z)$*

desde que sejam satisfeitas a condições (2.50) e (2.51).

2.3.2 Região de Estabilidade

Aqui vamos determinar regiões no plano $z - \kappa$ em que o equilíbrio Q_0 é estável. Como a função H é uma integral, na região em que sua Hessiana no equilíbrio é definida negativa ou positiva, segue do Teorema de Dirichlet (ver [17], página 208) que o equilíbrio é estável. Como

vimos acima, a matriz Hessiana no equilíbrio é

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \sigma_2 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{1}{2} & \lambda_0 &= -\frac{1+z^2+\kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \\ \sigma_2 &= -\frac{\kappa(2+3z+\kappa(1+z))}{2(1-z^2)} & \lambda_1 &= -\frac{z^2+\kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \\ \alpha &= \frac{r\kappa}{\sqrt{2}(1-z)} & \lambda_2 &= \frac{\kappa(z+2z^2-\kappa(1+z))}{2(1-z^2)} \\ \beta &= \frac{-\kappa}{r(1-z)\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

sendo $r = \sqrt{1-z^2}$.

Calculando o polinômio característico de G obtemos

$$\begin{aligned}
\det(\mu I - G) &= \det \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \mu - \sigma_2 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 & \mu - \lambda_1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \mu - \lambda_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \sigma_2 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \mu - \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - \sigma_1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \mu - \lambda_2 \end{pmatrix} \\
&= \mu(\mu - \lambda_0) \det \begin{pmatrix} \mu - \sigma_2 & -\beta \\ -\beta & \mu - \lambda_1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \mu - \sigma_1 & \alpha \\ \alpha & \mu - \lambda_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, os autovalores de G são: zero, λ_0 e os autovalores das matrizes

$$m_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & -\alpha \\ -\alpha & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad m_2 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & \beta \\ \beta & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Queremos determinar um região do plano $z - \kappa$ em que todos os autovalores de G , exceto o nulo, sejam negativos. Fazendo $\lambda_0 = 0$, obtemos a curva $\kappa = -\frac{1+z^2}{(1+z)^2}$. Assim, λ_0 será negativo sempre que

$$\kappa > h_0(z) \tag{2.52}$$

onde $h_0(z) = -\frac{1+z^2}{(1+z)^2}$. No caso dos autovalores de m_1 e m_2 vamos utilizar o seguinte lema

Lema 2.24. *Considere uma matriz 2×2 da forma*

$$m = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Uma condição necessária e suficiente para que seus autovalores sejam negativos é que

$$a < 0 \quad \text{e} \quad \det(m) > 0.$$

Demonstração. De fato, as raízes μ_1 e μ_2 de seu polinômio característico

$$p(x) = x^2 - (a + c)x + (ac - b^2)$$

são reais, pois m é simétrica e, além disso, satisfazem as igualdades

$$a + c = \mu_1 + \mu_2 \quad \text{e} \quad \mu_1\mu_2 = ac - b^2 = \det(m).$$

Se μ_1 e μ_2 são negativas, então $\det(m) > 0$ e, além disso, a e c têm o mesmo sinal, logo, $a < 0$, pois $\mu_1 + \mu_2 < 0$.

Reciprocamente, se $a < 0$ e $\det(m) > 0$, estão μ_1 e μ_2 têm o mesmo sinal, bem como a e c também. Como $a + c = \mu_1 + \mu_2$ e $a < 0$, segue-se que μ_1 e μ_2 são negativas.

□

Assim, podemos provar o seguinte resultado sobre os autovalores de m_1 .

Proposição 2.25. *Os autovalores de m_1 são negativos nos seguintes casos:*

- $-1 < z < -\frac{1}{2}$ para todo $\kappa < 0$ ou $\kappa > h_1(z)$;
- $-\frac{1}{2} < z < 0$ para $0 < \kappa < h_1(z)$;
- $0 < z < 1$ para $h_1(z) < \kappa < 0$,

onde $h_1(z) = -\frac{z}{1+z}$.

Demonstração. Sendo σ_1 negativo, segue do lema (2.24) que os autovalores de m_1 serão negativos sempre que o determinante de m_1 for positivo, isto é,

$$-\kappa(1+2z)(z+\kappa(1+z))/4(1-z^2) > 0$$

ou equivalentemente

$$F_1(z, \kappa) = \kappa(1+2z)(z+\kappa(1+z)) < 0.$$

Fazendo $F_1(z, \kappa) = 0$, obtemos as curvas

$$\kappa = 0, \quad z = -\frac{1}{2}, \quad \kappa = -\frac{z}{1+z}.$$

Assim, $\det(m_1) > 0$ exatamente nas regiões dadas, onde $h_1(z) = -\frac{z}{1+z}$. □

Em relação aos autovalores de m_2 temos o resultado

Proposição 2.26. *Os autovalores da matriz m_2 são negativos nas seguintes regiões.*

- $-1 < z < -\frac{2}{3}$ para $\kappa > h_1(z)$ ou $h_3(z) < \kappa < 0$
- $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{2}$ para $0 < \kappa < h_3(z)$ ou $\kappa > h_1(z)$
- $-\frac{1}{2} < z < 0$ para $0 < \kappa < h_1(z)$ ou $\kappa > h_3(z)$
- $0 < z < 1$ para $\kappa > 0$ ou $h_3(z) < \kappa < h_1(z)$,

onde $h_1(z) = -\frac{z}{1+z}$ e $h_3(z) = -\frac{(2+3z)z}{(1+z)^2}$.

Demonstração. Pelo lema (2.24), a região em que ambos autovalores de m_2 são negativos é região tal que $\lambda_1 < 0$ e $\det(m_2) > 0$ sejam satisfeitos. Fazendo $\lambda_1 = 0$ obtemos a curva $\kappa = \frac{-z^2}{(1+z)^2}$, a qual denotaremos por $h_2(z) = -\frac{z^2}{(1+z)^2}$. Assim, λ_1 será negativo sempre que $\kappa > h_2(z)$. O determinante de m_2 é

$$\frac{\kappa(\kappa^2(1+z)^3 + z^2(2+3z) + \kappa z(3+7z+4z^2))}{4(1-z^2)^3}$$

e tem o mesmo sinal de

$$F_2(z, \kappa) = -\kappa[\kappa^2(1+z)^3 + z^2(2+3z) + \kappa z(3+7z+4z^2)].$$

Fazendo $F_2(z, \kappa) = 0$, obtemos as curvas $\kappa = 0$, $\kappa = -\frac{z}{1+z}$ e $\kappa = -\frac{(2+3z)z}{(1+z)^2}$. Denotaremos esta última por $h_3(z) = -\frac{(2+3z)z}{(1+z)^2}$. Assim, segue o resultado. □

O próximo teorema segue das duas proposições acima e da condição (2.52). Ele nos dá regiões de estabilidade não linear do equilíbrio em questão. (ver figura abaixo)

Teorema 2.27. *O anel com dois vórtices unitários em uma latitude fixa e um vórtice com intensidade κ no pólo norte é estável no sentido de Lyapunov nos seguintes casos:*

- para $-1 < z < -\frac{2}{3}$ quando $h_3(z) < \kappa < 0$ ou $\kappa > h_1(z)$;
- para $-\frac{2}{3} < z < -\frac{1}{2}$ quando $\kappa > h_1(z)$;
- para $-\frac{1}{2} < z < 0$ quando $0 < \kappa < h_1(z)$,

onde as funções $h_1(z) = -\frac{z}{1+z}$ e $h_3(z) = -\frac{(2+3z)z}{(1+z)^2}$ foram definidas nas duas proposições acima.

A região de estabilidade encontrada aqui está contida propriamente na que foi encontrada em [7]. A diferença entre as regiões é (ver figura 2.2)

$$-1 < z < -\frac{2}{3} \text{ quando } \kappa < h_3(z);$$

$$-\frac{2}{3} < z < -\frac{1}{2} \text{ quando } h_4(z) < \kappa < h_1(z),$$

onde $h_4(z) = -\frac{2+3z}{1+z}$. No entanto, das observações (2.20) e (2.21), em tal região não pode haver estabilidade. Isto corrige o erro detectado na seção 5 do artigo [7]; comparar com figura 7 desta referência.

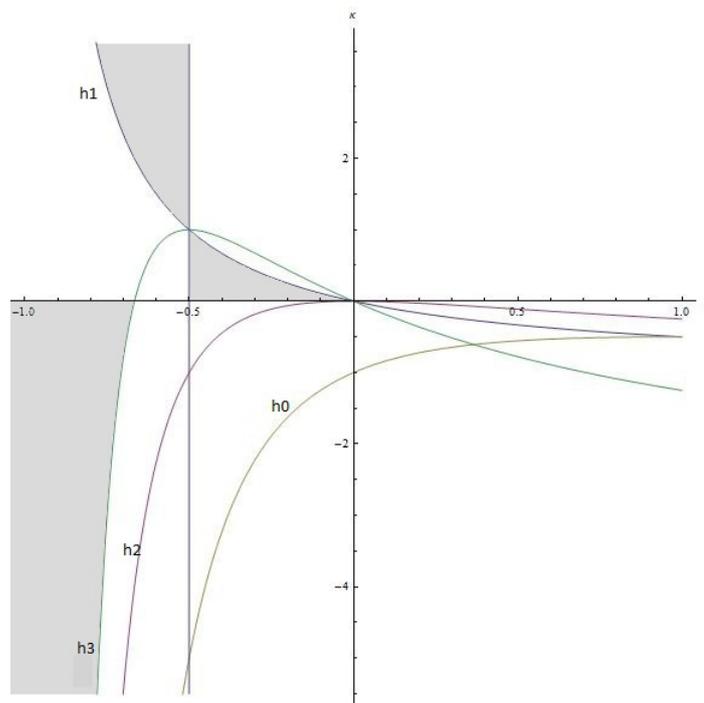


Figura 2.1: Região de Estabilidade para $n = 2$

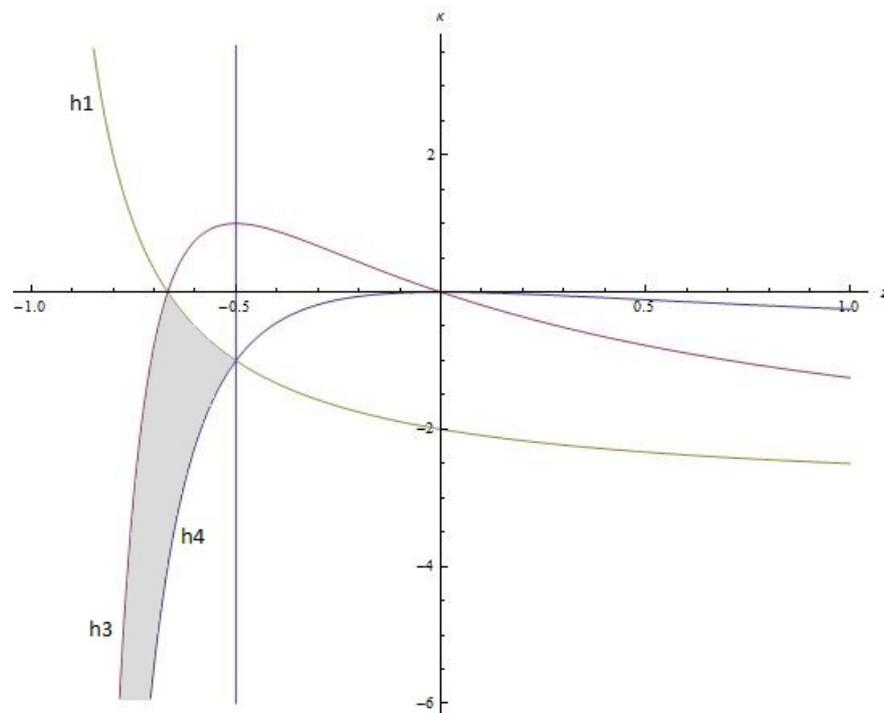


Figura 2.2: Diferença entre região estabilidade dada acima com a encontrada em [7]

Referências

- [1] AREF, H.; NEWTON, P. K.; STREMLER, M.A.; TOKIEDA, T.; VAINCHTEIN, D.L. **Vortex Crystals**. Advances in Applied Mathematics (2003).
- [2] BELLMAN, R. **Introduction to Matrix Analylis**. 2ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.
- [3] BORISOV, A. V.; MAMAEV, I. S.; KILIN, A. A. **Absolute and Relative Choreographies in the Problem of Point Vortices Moving on a Plane**. Reg. & Chaot. Dyn. vol. 8, No.3, 2003.
- [4] BORISOV, A. V.; MAMAEV, I. S.; KILIN, A. A. **New Periodic Solutions for Three or Four Identical Vortices on a Plane and a Sphere**. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Supplement Volume 2005.
- [5] CABRAL, H, E; BOATTO. S. **Nonlinear Estability of a latitudinal Ring of Point-Vortices on a Nonrotating Sphere**. SIAM J. Appl. Math. Vol. 64, N. 1, pp. 216-230, 2003.
- [6] CABRAL, H, E; SCHMIDT, D. S. **Stability of Relative Equilibria in the Problem of $N+1$ Vortices**. SIAM J. Math. Anal. vol.31, No. 2, pag. 231-250, 1999.
- [7] CABRAL, H, E; MEYER, K. R; SCHMIDT, D. S. **Stability and Bifurcations for the $N + 1$ Vortex Problem on the sphere**. Reg. & Chaot. Dyn. vol. 8, N.3 pag. 259-282, 2003.
- [8] KIRCHHOFF, G. **Mechanik**. Vorlesungen über Mathematische Physik, Teubner, Leipzig, 1883.

- [9] LAURENT-POLZ, F. **Relative periodic orbits in point vortex systems**. *Nonlinearity*, 2004, vol.17, N. 6.
- [10] LAURENT-POLZ, F.;MONTALDI, J.; ROBERTS, M. **Point Vortices on the Sphere: Stability of Relative Equilibria**. *Nuovo Cimento*, vol. 22, 2004.
- [11] LIM, C.; MONTALDI, J.; ROBERTS, M. **Relative Equilibria of Point Vortices on the Sphere**. *Physica D*, 2001, vol. 148, pp. 97-135.
- [12] MEYER, K. R; HALL, G. R.; OFFIN, D. **Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem**.2ed. New York: Springer, 2010 (Applied Mathematical Sciences volume 90).
- [13] MOSER, J; ZEHNDER, E. J. **Notes on Dynamical Systems**. New York: AMS, 2005. (Courant Lectures Notes, 12)
- [14] NEWTON, P. K. **The N-Vortex Problem: Analytical Techniques**. New York: Springer, 2001. (Applied Mathematical Sciences v. 145)
- [15] USPENSKY, J. V.. **Theory of equations**. New York: McGraw-Hill, c1948. 353p.
- [16] SCHMIDT, D. S. **Hopf's Bifurcation Theorem and the Center Theorem of Liapunov with Resonance Case**. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 63, N. 2, 1978.
- [17] SIEGEL, C. L.; MOSER, J. K. **Lectures on Celestial Mechanics**. New York: Springer-Verlag, 1971.
- [18] TOKIEDA, T; SOULIÈRE, A. **Periodic motions of vortices on surfaces with symmetry**. *J. Fluid Mech.* 2002. vol. 460, pp. 83-92.