

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de doutorado em matemática

Dinâmica de uma partícula infinitesimal ao redor de corpos na forma de anel ou disco

por

Angelo Alberti

sob orientação do

Prof. Dr. José Cláudio Vidal Diaz

Recife/2007

Recife - PE

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática Curso de
Doutorado em Matemática

Dinâmica de uma partícula infinitesimal ao redor de corpos na forma de anel ou disco

por

Angelo Alberti

sob orientação do

Prof. Dr. José Cláudio Vidal Diaz

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação em Matemática - CCEN -UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Maio/2007

Recife - PE

Alberti, Angelo

**Dinâmica de uma partícula infinitesimal ao redor
de corpos na forma de anel ou disco / Angelo Alberti.**

– Recife: O Autor, 2007.

viii, 144 folhas : il., fig.

**Tese (doutorado) – Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Matemática, 2007.**

Inclui bibliografia e apêndices.

1. Sistemas Dinâmicos. Título.

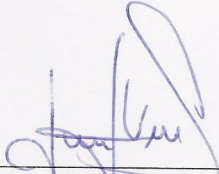
531

CDD (22.ed.)

MEI2008-043

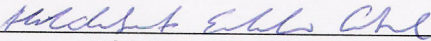
Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Ciências.

Aprovado:

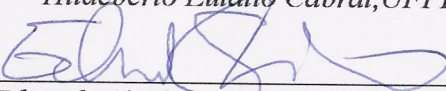


José Cláudio Vidal Diaz, UFPE

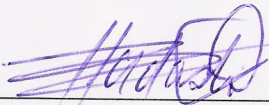
Orientador



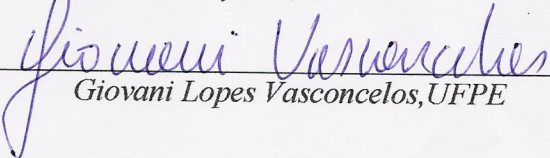
Hildeberto Eulálio Cabral, UFPE



Eduardo Shirlippe Góes Leandro, UFPE



Tadashi Yokoyama, UNESP



Giovani Lopes Vasconcelos, UFPE

DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA INFINITESIMAL AO REDOR DE CORPOS NA FORMA DE ANEL OU DISCO

por
Angelo Alberti

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL

Maio – 2007

Conteúdo

Resumo	vi
Abstract	vii
1 Introdução	1
2 O problema de uma partícula atraída por um corpo maciço	4
2.1 Formulação do Problema	4
2.1.1 O potencial em termos de polinômios de Legendre	5
2.2 O potencial de um anel ou disco circular homogêneo	6
2.2.1 Potencial em termos de integrais elíptica de primeira espécie	7
2.3 Formulação do problema do anel ou disco circular homogêneo	9
2.3.1 Simetrias	10
2.3.2 Propriedades do potencial	12
3 Dinâmica dos sub-problemas	15
3.1 Dinâmica no eixo z	15
3.2 Dinâmica no plano horizontal	17
3.2.1 Outros resultados da dinâmica no plano horizontal	25
3.2.2 Dinâmica no eixo- x	25
3.2.3 Caso do momento angular c não nulo	26
4 Singularidades	28
5 Soluções periódicas de perturbações do problema de Kepler	32
5.1 Introdução	32

5.2	Continuação de soluções periódicas de perturbações do problema de Kepler em coordenadas cartesianas	34
5.3	O problema nas variáveis de Delaunay e Poincaré-Delaunay	35
5.3.1	Simetrias	38
5.4	Continuação de soluções circulares do problema de Kepler em coordenadas cartesianas . .	41
5.4.1	Continuação de soluções circulares $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas	41
5.4.2	Continuação de soluções circulares periódicas $\mathcal{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas	46
5.4.3	Continuação de soluções circulares duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas) do problema de Kepler em coordenadas cartesianas	49
5.4.4	Continuação de soluções circulares duplamente simétrica ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$ - simétricas) do problema de Kepler em coordenadas cartesianas	50
5.5	Continuação de soluções elípticas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas . . .	52
5.5.1	Continuação de soluções elípticas $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas	53
5.5.2	Continuação de soluções elípticas $\mathcal{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas	55
5.6	Análise do sub-problema planar	57
5.6.1	Simetrias	59
5.6.2	Continuação de órbitas circulares $\mathcal{S}_1$ -Simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas no caso planar	59
5.6.3	Continuação de órbitas circulares $\mathcal{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas no caso planar	62
5.6.4	Continuação de órbitas circulares duplamente simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas no caso planar	63
5.6.5	Continuação de órbitas elípticas simétricas do problema de Kepler no caso planar .	64
5.6.6	Continuação de órbitas elípticas $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas no caso planar	64
5.6.7	Continuação de soluções elípticas $\mathcal{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas no caso planar	67
5.7	Soluções periódicas de perturbações do problema de Kepler em coordenadas giratórias . .	69
5.8	Continuação de órbitas circulares do problema de Kepler em coordenadas giratórias . . .	70
5.8.1	Continuação de órbitas circulares $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias	71
5.8.2	Continuação de órbitas circulares $\mathcal{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias	76

5.8.3	Continuação de órbitas circulares duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas) do problema de Kepler em coordenadas giratórias	79
5.8.4	Continuação de soluções circulares duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$ -simétricas) do problema de Kepler em coordenadas giratórias	82
5.8.5	Continuação de soluções elípticas do problema de Kepler em coordenadas giratórias	86
5.8.6	Continuação de órbitas elípticas $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias	86
5.8.7	Continuação de órbitas elípticas $\mathcal{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias	88
5.8.8	Continuação de órbitas elípticas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) do problema de Kepler em coordenadas giratórias	89
5.8.9	Continuação de órbitas elípticas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) do problema de Kepler em coordenadas giratórias	90
5.9	Continuação de soluções periódicas simétricas do Problema planar de Kepler em coordenadas giratórias	92
5.9.1	Continuação de soluções circulares $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias no caso planar	93
5.9.2	Continuação de soluções circulares $\mathcal{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias no caso planar	94
5.9.3	Continuação de soluções circulares duplamente simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias no caso planar	95
5.9.4	Continuação de soluções elípticas do problema de Kepler em coordenadas giratórias no caso planar	96
5.9.5	Continuação de soluções elípticas $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias	97
5.9.6	Continuação de soluções elípticas $\mathcal{S}_2$ -simétricas	98
5.9.7	Continuação de soluções elípticas duplamente-simétricas.	98
5.10	Equivalência entre os problemas (5.1) e (5.2)	99
6	Soluções periódicas simétricas no problema do anel, disco e fio circular homogêneo	101
6.0.1	Potencial do anel ou disco circular homogêneo em termos de Polinômio de Legendre	102
6.1	Soluções periódicas simétricas	103
6.1.1	Órbitas periódicas simétricas próximas de círculos	106
6.1.2	Soluções periódicas próximas a elipses	115
6.2	Soluções periódicas simétricas no plano vertical	116
6.2.1	Soluções periódicas simétricas no plano equatorial	119
6.3	Outras soluções Periódicas do problema do anel ou disco circular	125

6.3.1	Continuação de órbitas circulares	125
6.3.2	Órbitas Cometas	127
6.4	Novas soluções periódicas no problema do fio circular homogêneo	128
6.4.1	O problema do fio circular homogêneo fixo como perturbação do problema de Kepler	128
6.4.2	Órbitas periódicas simétricas próximas a círculos	130
6.4.3	Soluções periódicas próximas a elipses	131
6.4.4	Soluções periódicas no plano vertical	131
6.4.5	Soluções periódicas no plano horizontal	132
6.4.6	Órbitas Cometas no problema do fio	133
7	Órbitas de escape no problema geral de uma partícula atraída por um corpo maciço	134
7.0.7	Órbitas de escape no problema do anel e do disco circular homogêneo	137
8	Apêndice A	138
8.1	Apêndice B	139
8.1.1	A vizinhança de algumas soluções do problema de Kepler	139

Agradecimentos

Gostaria de externar meus agradecimentos a todos aqueles que contribuíram para a realização deste trabalho, sobretudo...

Ao professor Cláudio Vidal, pela presteza e perspicácia sempre presentes em sua orientação, e principalmente por ter tornado a realização deste trabalho, desde o início motivante e prazerosa;

A minha família, pelo apoio contínuo e incondicional;

A CAPES pelo apoio financeiro;

Aos professores do Dmat, em especial ao professores César Castilho, Hildeberto Cabral pelos ensinamentos matemáticos e pedagógicos;

Aos amigos e colegas do dmat pelo companheirismo e apoio durante todo decorrer do curso em especial: Lúcia, Ana Cristina e Adriano.

Resumo

Nosso Principal objetivo, neste trabalho, é descrever a dinâmica das órbitas de uma partícula infinitesimal movendo-se no espaço $\mathbb{R}^3$ afetadas pela atração gravitacional induzida por um corpo na forma de anel ou disco num plano fixo e com densidade de massa homogênea. Os aspectos da dinâmica nos quais estamos interessados são principalmente: Descrever de diferentes formas o potencial gravitacional associado a cada caso; Caracterizar propriedades de homogeneidade do potencial; Descrever o espaço de configuração destes problemas; Determinar as simetrias do campo vetorial associado; Identificar os sub-problemas associados de acordo a dimensão do espaço ambiente; Em cada sub-caso particular, descrever a dinâmica e compará-las entre si; Relacionar as singularidades do potencial com as singularidades das soluções do campo vetorial de cada problema em questão; Introduzir um parâmetro perturbador conveniente; Determinar uma grande diversidade de famílias de órbitas periódicas nos diferentes sub-problemas; Estudar as órbitas de escape nos diferentes casos; Comparar os resultados obtidos com aqueles do problema dos n -corpos da Mecânica Celeste.

Palavras-chave:

Atração gravitacional de uma partícula induzida por um anel homogêneo; Dinâmica; Singularidades; Soluções periódicas simétricas; Continuação analítica; Órbitas de escape.

Abstract

Our main concern, in this work, is describe the dynamics of the orbits of an infinitesimal particle moving in the space $\mathbb{R}^3$ under the influence of the gravitational force induced by a homogeneous annulus disk fixed on a plane. The aspects of the dynamics that we have interest are namely: Describe the different ways the gravitational potential associated to the problem in each case; Characterize homogeneity properties of the potential; Describe the configuration space of these problems; Determine the symmetries of the vectorial field associate; Identify sub-problems associates according the dimension of the ambient space; In each sub-case, describe the dynamics and compares them to each other; Relate the potential singularities with the singularities of the vectorial field of each problem at issue; Introduce a convenient parameter; Determine a great diversity of families of periodic orbits in the different sub-problems. Study the escape orbits in the different cases; Compare the results obtained with the n -body problem in Celestial Mechanics.

Keywords:

Gravitational attraction of a particle by a homogeneous annulus disk; Dynamics; Singularities; Symmetric periodic solutions; Analytic continuation; Escape orbits.

Capítulo 1

Introdução

Este projeto de tese de doutorado surgiu de forma natural como a prolongação ou desdobramento de minha tese de Mestrado [1] e da tese de Doutorado de Carlinda Azevêdo [5], nas quais se abordou o problema de descrever a dinâmica de uma partícula infinitesimal quando ela é atraída unicamente pelo campo gravitacional criado pelo fio circular homogêneo sobre um plano fixo e raio positivo. Em [1] se aborda o problema essencialmente desde um ponto de vista numérico enquanto que em [5] se aborda o problema desde uma visão analítica.

O objetivo deste trabalho é descrever a dinâmica das órbitas de uma partícula infinitesimal no espaço $\mathbb{R}^3$ afetadas pela atração gravitacional induzida por um corpo na forma de anel ou disco num plano fixo com densidade de massa homogênea. Os aspectos da dinâmica nos quais estamos interessados são principalmente:

- Descrever de diferentes formas o potencial gravitacional associado a cada caso.
- Caracterizar propriedades de homogeneidade do potencial.
- Descrever o espaço de configuração destes problemas.
- Determinar as simetrias do campo vetorial associado.
- Identificar os sub-problemas associados de acordo a dimensão do espaço ambiente.
- Em cada sub-caso particular descrever a dinâmica e compará-las entre si.
- Relacionar as singularidades do potencial com as singularidades das soluções do campo vetorial de cada problema em questão.
- Introduzir um parâmetro perturbador conveniente.
- Determinar uma grande diversidade de famílias de órbitas periódicas nos diferentes sub-problemas.
- Estudar as órbitas de escape nos diferentes casos.
- Comparar os resultados obtidos com aqueles do problema dos n -corpos da Mecânica Celeste.

O estudo deste tipo de problemas possui diversas motivações. Uma delas está associada as seguintes informações extraídas da literatura. Por exemplo, nos últimos anos, o interesse pelo estudo de órbitas ao redor de pequenos corpos celestes como asteróides, satélites naturais menores e núcleos de cometas

tem crescido de forma considerável. As principais agências espaciais tem incluído entre seus objetivos de exploração mais importantes missões a estes objetos celestes, como o projeto Rosetta [20], [34] da Agência Espacial Europeia (ESA), ou a missão NEAr [37], todas estas viagens tem sido programadas para que uma nave sobrevoe um corpo de similares características. Assim para abordar estes problemas se requer conhecer a dinâmica de uma partícula em torno de um corpo celeste (pequeno) de forma irregular. A principal força nestes problemas é a atração gravitacional devida a massa do corpo celeste. Ao tratar-se de uma força conservativa, a determinação do potencial gravitacional é suficiente para conhecer o valor da força. Por outro lado, é interessante notar que a dedução do potencial gravitacional associado a um corpo maciço tem sido considerado como objeto de pesquisa por vários autores, entre eles, citamos Brouwer [11], Kellog [22], Poincaré [31] mas nestes trabalhos só se preocupam do problema de dedução do potencial usando coordenadas apropriadas, e aspectos da dinâmica propriamente não são considerados. Os problema que tem sido estudados na literatura dentro de uma linha semelhante a nosso objetivo, são: o caso do problema do segmento homogêneo e do fio circular homogêneo. Para o primeiro caso os autores (A. Riaguas e A. Elipe) consideram dois casos, um no qual o segmento está fixo e outro no qual o segmento esta girando com velocidade angular constante em relação a um eixo. Como consequência deste trabalho encontramos vários artigos de pesquisa publicados sobre esse modelo, [17], [18], [19],[33], nos quais abordam o problema de existência de soluções periódicas mas desde um ponto de vista somente numérico. Notamos que aqui a expressão do potencial é bastante simplificada o que permite realizar cálculos numéricos sem maiores complicações. Também abordam no caso giratório, o problema de estabilidade das soluções de equilíbrio relativo usando o Teorema de Arnold Moser. Ressaltamos aqui que a existência de órbitas periódicas é só de forma numérica, não se estudam as soluções de colisão e não se estudam as órbitas de escape. Já para o problema do fio circular homogêneo tratado por A. Alberti em [1] consegue usando uma aproximação numérica obter várias famílias de órbitas periódicas tanto no caso planar como no caso espacial, as quais posteriormente foram também encontradas por Broucke e Elipe em [10]. Por outro lado, na sua tese de doutorado C. Azevêdo faz um estudo do problema do fio desde um ponto de vista analítico, obtém algumas famílias de órbitas periódicas nos casos planares usando as simetrias do potencial como prolongação de soluções circulares do problema de Kepler e do problema logarítmico. Estuda-se as órbitas de colisão e também se analisam os sub-problemas. Publicações desta tese citamos [6] e [15]. É importante ressaltar que nestes trabalhos devido a técnica analítica utilizada só se prolongam órbitas circulares do problema de Kepler e além disso somente no caso planar (isto é, com dois graus de liberdade). E também o estudo das órbitas de escape não foi considerado. No estudo do problema do fio, surgiu um trabalho de pesquisa orientado ao estudo de soluções periódicas de perturbações keplerianas contínuas, o qual permitiu aplicar tais resultados ao problema e uma publicação em [6]. Por último, para o caso do problema do anel encontramos na literatura o trabalho de Lass e Blitzer [23] no qual estuda-se o potencial associado ao problema de um anel como consequência do problema de um disco, usando coordenadas apropriadas e somente é feito isto.

Como foi dito por Broucke e Elipe em [10] uma das motivações em considerar problemas de atração deste tipo deve-se a questões astronômicas relacionadas com os anéis de Saturno, onde Maxwell in 1859 mostrou que o anel sólido deveria ser instável. Por outro lado, o cinturão de asteróides deveria ser aproximado por um anel contínuo e seus efeitos globais sobre a órbita de Marte, é certamente não desprezível e digno de investigações. Assim num modelo mais depurado deveriam-se levar em conta o corpo central maciço, mas notemos que quando estamos interessados no comportamento das órbitas próximas do anel, o corpo central não é tão importante.

Nós estamos conscientes que este tipo de modelos é só uma primeira aproximação de problemas concretos, assim como no famoso problema dos n -corpos da Mecânica Celeste que tem sido e está sendo estudado por muitos e grandes pesquisadores, consideramos que é muito importante realizar um estudo analítico e futuramente numérico destes problemas de atração, já que isto é o ponta pé inicial para tratar casos mais complexos e nos dará idéias de como usar novas técnicas para um estudo mais efetivo. Também no futuro pretendemos abordar o problema de atração onde o corpo maciço é mais complicado e levar em conta outras forças que são relevantes e não desprezíveis.

Para conseguir nossos objetivos organizamos este trabalho da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos os problemas de pesquisa e fazemos um estudo detalhado do potencial gravitacional associado. Mostramos como o problema do anel e disco circular estão relacionados, o que nós permitirá estender os resultados do anel ao problema do disco e também posteriormente, muitos deles ao problema do fio circular homogêneo. No capítulo 3 realizamos um estudo preliminar da dinâmica nos sub-problemas, os quais são definidos pelos subconjuntos invariantes pelo fluxo. Também neste capítulo introduzimos um parâmetro perturbador, o qual está associado a espessura do anel. No Capítulo 4, estudamos as singularidades das soluções e verificamos que no caso planar (plano equatorial) todas as singularidades do problema do fio circular são devidas a colisão. O capítulo 5 é motivado pelo objetivo de obter uma grande quantidade de famílias de órbitas periódicas em cada um de nossos problemas. Após consultar a literatura encontramos alguns trabalhos nos quais conseguem-se órbitas periódicas simétricas como continuação de órbitas circulares do problema de Kepler. No caso espacial, citamos [14], mas neste caso as órbitas periódicas obtidas nem sempre são periódicas no espaço físico o qual é relevante para nós; em [36] obtém-se órbitas periódicas no caso planar; no trabalho [6] como já foi dito obtém-se órbitas periódicas próximas de órbitas circulares mas só no caso planar e em geral o conjunto das condições iniciais não é um conjunto abundante e além disso só pode-se garantir que o período é próximo ao da órbita circular. Motivados principalmente por diversos resultados do problema restrito circular da Mecânica Celeste (veja por exemplo, [25] [41]) decidimos nós aprofundar no estudo de órbitas periódicas simétricas como continuação de órbitas circulares keplerianas e também como continuação de órbitas elípticas keplerianas, levando em conta um detalhado estudo de como a perturbação influencia na obtenção de órbitas periódicas via o Método da Continuação de Poincaré [32]. Obtemos uma grande diversidade de soluções simétricas com período fixo; período variável; tipo de órbitas circulares ou elípticas que podem ser continuadas; caso espacial e caso planar. Salientamos que um trabalho cuidadoso como o realizado neste capítulo não se encontra na literatura especializada. No Capítulo 6 aplicamos os resultados obtidos no capítulo anterior e assim mostramos uma grande variedade de órbitas periódicas simétricas e chamamos a atenção que nossos resultados permite-nos mostrar a existência de novas famílias de órbitas periódicas no problema do fio circular homogêneo as quais não foram discutidas ou encontradas em todos os trabalhos que tratam deste problema. No Capítulo 7 estudamos as órbitas de escape associadas a nossos modelos. Para isto, nos concentramos nas direções de escape associadas aos eixos coordenadas, e introduzimos coordenadas convenientes (blow-up) o que permite trazer o infinito ao origem do sistema de coordenadas e o fluxo no infinito fica sobre uma variedade invariante (chamada variedade no infinito). Mostramos que a diferença dos problemas dos n -corpos (veja [42]), no infinito o campo associado não possui singularidades e pela forma do potencial associado a este tipo de atrações ele não joga um papel relevante no estudo do infinito.

Capítulo 2

O problema de uma partícula atraída por um corpo maciço

Neste capítulo vamos formular o problema de uma partícula infinitesimal atraída unicamente pela força gravitacional induzida por um corpo maciço com dimensões finitas. Como afirma Brouwer [11], a lei de atração gravitacional é válida para duas partículas materiais, mas não para corpos de dimensão finita e com distribuição de massa arbitrária. Porém é possível mostrar que se a distância entre os corpos é grande, comparada com suas dimensões, a atração entre estes corpos pode ser vista como se suas massas estivessem concentradas em seus centros de massa. Estes resultados possibilitam, em muitos casos, desprezar a dimensão e a distribuição de massa e considerar a atração gravitacional entre os corpos como se eles fossem partículas materiais. Existem casos no sistema solar e em sistema de estrelas binários em que desvios da esfericidade tem importante efeitos. Por isso é necessário estudar o caso da atração gravitacional entre dois corpos de dimensão finitas cada qual tendo distribuição de massa arbitrária. Porém este problema apresenta consideráveis complicações. As dificuldades são menores ao tratar a atração de um corpo de dimensão finita e uma partícula material.

2.1 Formulação do Problema

Em uma primeira aproximação, consideraremos a atração de uma partícula material P e um corpo $\mathcal{M}$ com distribuição de massa uniforme e com centro de massa O no sistema euclidiano tridimensional $Oxyz$, como ilustrado na Figura 2.1.

Denotamos por (ξ, η, ζ) um ponto sobre $\mathcal{M}$ e ρ a distância do centro de massa do corpo $\mathcal{M}$ ao ponto (ξ, η, ζ) com elemento de massa dM e desta forma $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. Então o potencial de uma partícula $P = (x, y, z)$ atraída pela força gravitacional associada ao corpo $\mathcal{M}$ é dado por

$$V(P) = - \int_{\mathcal{M}} \frac{dM}{\Delta}, \quad (2.1)$$

onde Δ é a distância da partícula P ao elemento de massa dM . Supondo a distribuição de massa λ constante então $dM = \lambda d\xi d\eta d\zeta$. Observe que explicitando Δ obtemos que a função potencial (2.1) é dada por

$$V(x, y, z) = - \int_{\mathcal{M}} \frac{dM}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)}}, \quad (2.2)$$

onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

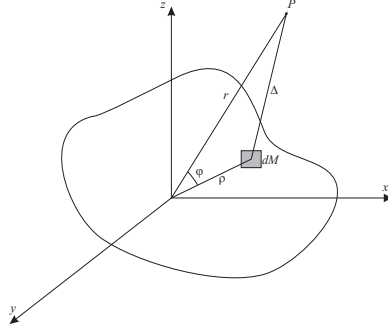


Figura 2.1: Partícula infinitesimal atraída por um corpo maciço $\mathcal{M}$.

De acordo com a lei Newtoniana, o movimento da partícula P , submetida unicamente a atração gravitacional induzida pelo corpo $\mathcal{M}$, é dado pelo sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= - \int_{\mathcal{M}} \frac{(x - \xi)dM}{[x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)]^{\frac{3}{2}}}, \\ \ddot{y} &= - \int_{\mathcal{M}} \frac{(y - \eta)dM}{[x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)]^{\frac{3}{2}}}, \\ \ddot{z} &= - \int_{\mathcal{M}} \frac{(z - \zeta)dM}{[x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)]^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

As equações de movimento (2.3) podem ser escritas como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, com três graus de liberdade, dado pelo sistema Hamiltoniano

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= -H_{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} &= H_{\mathbf{p}},\end{aligned}\tag{2.4}$$

onde a função Hamiltoniana associada é dada por

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \int_{\mathcal{M}} \frac{dM}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)}}.\tag{2.5}$$

O espaço de fase do sistema (2.1) é dado por

$$\Omega = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3); \mathbf{q} \notin \mathcal{M}\},\tag{2.6}$$

e o espaço de configurações é $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{M}$.

2.1.1 O potencial em termos de polinômios de Legendre

Queremos encontrar uma expressão para o potencial de um corpo maciço onde V é dado explicitamente como função de x , y e z . Isto geralmente é complicado, mas pode ser aplicável quando a distância entre P e o centro de massa de $\mathcal{M}$ é grande comparando com as dimensões do corpo $\mathcal{M}$. Desenvolveremos o potencial em séries que envolvem polinômios de Legendre.

Seja $P \in \mathbb{R}^3$ um ponto que não está em $\mathcal{M}$ e r a distância de P ao centro de massa (que coincide com a origem do sistema de coordenadas), então para todo ponto P tal que $\frac{\rho}{r} < 1$ temos que

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= r^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\tau) \\ &= r^2 \left[1 - 2\left(\frac{\rho}{r}\right) \frac{(x\xi + y\eta + z\tau)}{r\rho} + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \right].\end{aligned}\tag{2.7}$$

Denotamos por φ o ângulo entre os vetores ρ e r e usando a lei dos cossenos obtemos que

$$\Delta^2 = \rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \varphi. \quad (2.8)$$

Substituindo Eq.(2.7) em Eq.(2.8), obtemos

$$\Delta^2 = r^2(1 - 2t \cos \varphi + t^2), \quad (2.9)$$

onde $t = \frac{\rho}{r} < 1$. O desenvolvimento binomial de $(1 + t^2 - 2t \cos \varphi)^{-1/2}$ é dado por

$$[1 - (2t \cos \varphi - t^2)]^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}(t^2 - 2tq) + \frac{1}{2} \frac{3}{4}(t^2 - 2tq)^2 - \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6}(t^2 - 2tq)^3 - \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{7}{8}(t^2 - 2tq)^4 - \dots \quad (2.10)$$

Se a série (2.10) for agrupada, como uma série de potências na variável t , o coeficiente de t^n é um polinômio $P_n(\cos \varphi)$ de grau n , tendo $\cos \varphi$ como argumento. Este polinômio é chamado de *n-ésimo polinômio de Legendre*. Assim a série (2.10) é então transformada na forma

$$(1 - (2t \cos \varphi - t^2))^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \varphi) t^n, \quad (2.11)$$

onde os seis primeiros termos $P_n(\cos \varphi)$ são

$$\begin{aligned} P_0(\cos \varphi) &= 1, \\ P_1(\cos \varphi) &= \cos \varphi, \\ P_2(\cos \varphi) &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi, \\ P_3(\cos \varphi) &= -\frac{3}{2} \cos \varphi + \frac{5}{2} \cos^3 \varphi, \\ P_4(\cos \varphi) &= \frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2 \varphi + \frac{35}{8} \cos^4 \varphi, \\ P_5(\cos \varphi) &= \frac{63}{8} \cos^5 \varphi - \frac{70}{8} \cos^3 \varphi + \frac{15}{8} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Em geral o n -ésimo termo é dado por $P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n)!} \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} + \dots \right\}$. A série (2.11) converge desde que $|t| < 1$. Seja $\rho_e = \max_{P \in \mathcal{M}} d(0, P)$ e S_{ρ_e} esfera com centro na origem e raio ρ_e . Então $M \subset S_{\rho_e}$ e para todo ponto P no exterior de S_{ρ_e} é tal que $|t| < 1$. Podemos então expressar o potencial V em séries mas somente na região exterior a esfera S_{ρ_e} cuja expressão é dada por

$$V = -\frac{1}{r} \int_{\mathcal{M}} \left[1 + P_1(\cos \varphi) \frac{\rho}{r} + P_2(\cos \varphi) \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 + P_3(\cos \varphi) \left(\frac{\rho}{r} \right)^3 + \dots \right] dM. \quad (2.13)$$

Se o corpo $\mathcal{M}$ possui uma região interior então teremos o caso $t = \frac{r}{\rho} < 1$. Procedendo analogamente ao caso anterior, obtemos que na região interior o potencial U é expresso por

$$V = - \int_{\mathcal{M}} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \varphi) \frac{r^n}{\rho^{n+1}} dM. \quad (2.14)$$

Observamos que neste caso a série converge se o ponto P está no interior da esfera S_{ρ_i} com centro em O e raio $\rho_i = \min_{P \in \mathcal{M}} d(0, P)$. O primeiro termo da série (2.13) é $-\frac{1}{r} \int_{\mathcal{M}} dM = -M/r$ que consiste exatamente no potencial do Problema de Kepler.

2.2 O potencial de um anel ou disco circular homogêneo

Em nosso trabalho, nosso objetivo principal é estudar a dinâmica da partícula atraída pela força gravitacional induzida por um corpo maciço com densidade de massa constante, quando este for um anel

ou disco circular. Nesta seção vamos determinar explicitamente expressões equivalentes para o potencial do anel e também do disco circular homogêneo, em termos de coordenadas cartesianas, em coordenadas cilíndricas e desta forma expressando na forma de uma integral elíptica de primeira espécie. Começamos definindo de maneira precisa o problema do anel circular homogêneo fixo e o problema do disco circular fixo.

Consideramos o anel homogêneo fixo $\mathcal{A} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x^2 + y^2 \leq b, z = 0\}$ com raio interno a e raio externo b , ($0 < a < b$), com distribuição de massa uniforme e contido no plano xy . Consideramos uma partícula $\mathbf{P}$ com massa infinitesimal movendo-se em $\mathbb{R}^3$, e assumindo que a única força que age sobre $\mathbf{P}$ é a força gravitacional induzida pelo anel $\mathcal{A}$. Por (2.1) a função potencial V induzida por $\mathcal{A}$ assume a forma

$$V(\mathbf{q}) = - \int_{\mathcal{A}} \frac{\lambda du}{\|\mathbf{q} - \mathbf{u}\|}, \quad (2.15)$$

onde λ é a densidade de massa constante e $\mathbf{q}$ é a posição da partícula $\mathbf{P}$ e estamos considerando a constante de gravitação universal sendo igual a um.

No caso do disco circular homogêneo $\mathcal{D} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x^2 + y^2 \leq b\}$ de raio b , o potencial pode ser obtido do anel circular estendendo-o a $a = 0$, e assim a função potencial induzida por $\mathcal{D}$ é

$$V(\mathbf{q}) = - \int_{\mathcal{D}} \frac{\lambda du}{\|\mathbf{q} - \mathbf{u}\|}. \quad (2.16)$$

No decorrer do texto vamos desenvolver os resultados para o caso do anel $\mathcal{A}$ e mostremos que eles também serão válidos para o disco, fazendo $a = 0$ e sempre que não fizemos ressalvas ficará subentendido esta definição. Consideremos o elemento diferencial de massa $dM = \lambda \rho d\theta d\rho$, $\mathbf{u} = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0)$ ($a \leq \rho \leq b$) um ponto sobre o anel $\mathcal{A}$ e $\mathbf{P} = (x, y, z)$ um ponto no espaço onde queremos determinar potencial.

A distância $\Delta = d(P, u) = \|\vec{P} - \vec{u}\|$ é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (x - \rho \cos \theta)^2 + (y - \rho \sin \theta)^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2\rho x \cos \theta - 2\rho y \sin \theta + \rho^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Então de acordo com a equação (2.15), e como a massa M do anel é dada por $M = \pi \lambda (b^2 - a^2)$, segue que a função potencial é dada por

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= -\lambda \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2\rho x \cos \theta - 2\rho y \sin \theta}} \rho d\theta d\rho \\ &= -\frac{M}{(b^2 - a^2)\pi} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2\rho x \cos \theta - 2\rho y \sin \theta}} \rho d\theta d\rho. \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.2.1 Potencial em termos de integrais elíptica de primeira espécie

Consideremos o círculo C de raio ρ , $a < \rho < b$. Sejam A o ponto sobre o círculo C que está mais próximo de P , Q qualquer outro ponto no círculo C e seja Δ a distância de P a B , como na Figura 2.2. Se o ângulo BOA é representado por ψ a expressão para o potencial V é

$$V(P) = -\frac{M}{(b^2 - a^2)\pi} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\psi d\rho}{\Delta}. \quad (2.19)$$

onde, $\overline{QB}^2 = \rho^2 + (x^2 + y^2) - 2\rho\sqrt{x^2 + y^2} \cos(\psi)$ e segue que $\Delta^2 = \overline{QB}^2 + \overline{PQ}^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2\rho\sqrt{x^2 + y^2} \cos(\psi)$. Consequentemente,

$$V(P) = -\frac{M}{(b^2 - a^2)\pi} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta d\rho}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2\rho(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta)}},$$

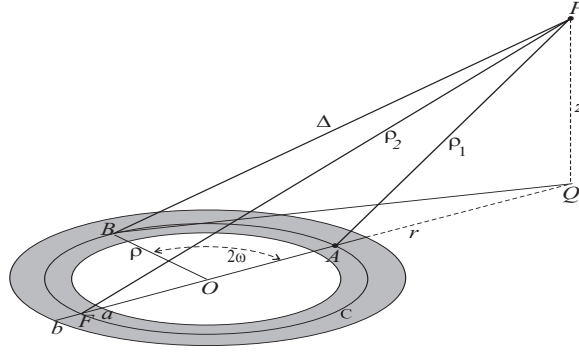


Figura 2.2: Anel e distâncias máximas e mínimas.

e tomando $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ da expressão acima obtemos

$$V(P) = -\frac{M}{(b^2 - a^2)\pi} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta d\rho}{\sqrt{r^2 + z^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos(\theta)}}. \quad (2.20)$$

Seja $P = (r, \theta, z)$ um ponto em coordenadas cilíndricas que não está sobre $\mathcal{A}$. A partir de P traçamos a perpendicular $PQ = z$ ao plano do anel (veja figura 2.2). Determinamos o diâmetro do anel o qual estendemos passando até B . Tomando $B = (\rho, \theta_0, 0)$ um ponto do anel, sobre C e denotamos $QB = \Delta$, $PA = \rho_1$ e $PF = \rho_2$, onde A e F são os pontos sobre C mais próximo e mais distante de P respectivamente.

Evidentemente ρ_1 e ρ_2 são as distâncias máximas e mínimas de Δ quando o ponto B percorre o círculo ρ . Se o ângulo QOB é representado por 2ω , então o elemento de arco é $ds = 2\rho d\omega$ e a expressão para o potencial será dada por

$$V = -\frac{M}{(b^2 - a^2)\pi} \int_a^b 2\rho \int_0^\pi \frac{d\omega}{\Delta} d\rho. \quad (2.21)$$

Se o comprimento $\overline{OQ}$ é representado por r , então

$$\rho_1^2 = (r - \rho)^2 + z^2, \quad \rho_2^2 = (r + \rho)^2 + z^2, \quad \overline{QB}^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(2\omega).$$

Logo a equação para Δ^2 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (r^2 + \rho^2 + z^2)(\cos^2 \omega + \sin^2 \omega) - 2r\rho(\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) \\ &= [(r - \rho)^2 + z^2] \cos^2 \omega + [(r + \rho)^2 + z^2] \sin^2 \omega \\ &= \rho_1^2 \cos^2 \omega + \rho_2^2 \sin^2 \omega. \end{aligned}$$

A expressão para o potencial (2.21) é então dado por

$$V = -\frac{M}{(b^2 - a^2)\pi} \int_a^b 2\rho \int_0^\pi \frac{d\omega}{\sqrt{\rho_1^2 \cos^2 \omega + \rho_2^2 \sin^2 \omega}} d\rho. \quad (2.22)$$

Para introduzir a integral elíptica definimos o módulo

$$k^2 = 1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} < 1,$$

e introduzimos um novo ângulo $\theta = \frac{\pi}{2} + \psi$ para a integração. Finalmente obtemos a expressão

$$V(r, z) = -\frac{4M}{(b^2 - a^2)\pi} \int_a^b \frac{\rho}{\rho_2} K(k) d\rho, \quad (2.23)$$

onde $K(k)$ é a integral elíptica de primeira espécie. Para maiores detalhes sobre integrais elípticas, veja [12]. Expressões para o potencial do fio circular dado em função de uma integral elíptica aparecem em alguns trabalhos da literatura, como por exemplo em [5], [22], [24] e outros. Porém para o caso do anel, uma expressão igual a obtida em (2.23) não é encontrada.

2.3 Formulação do problema do anel ou disco circular homogêneo

Queremos descrever a dinâmica de uma partícula infinitesimal $\mathbf{P}$ movendo-se no espaço euclidiano tridimensional sobre a influência da força gravitacional induzida pelo anel ou disco homogêneo fixo, contido no plano xy e com centro de massa no centro do anel $\mathcal{A}$ ou do disco $\mathcal{D}$. Pela lei de Newton o movimento de $\mathbf{P}$ é dado pelo seguinte sistema mecânico

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q}), \quad (2.24)$$

onde $\mathbf{q}$ é a posição da partícula $\mathbf{P}$ e $V(\mathbf{q})$ é o potencial dado por (2.15) no caso do anel ou (2.16) no caso do disco circular homogêneo. As equações de movimento (2.24) podem ser escritas como um sistema Hamiltoniano autônomo na forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= H_{\mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -H_{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

com três graus de liberdade cuja função Hamiltoniana é

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 + V(\mathbf{q}), \quad (2.26)$$

onde $\mathbf{q} = (x, y, z)$ e $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ é o momento.

Nas coordenadas cartesianas as equações de movimento são dadas por

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\lambda \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{(x - \rho \cos(\theta)) \rho d\theta d\rho}{[x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2x\rho \cos(\theta) - 2y\rho \sin(\theta)]^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{y} &= -\lambda \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{(y - \rho \sin(\theta)) \rho d\theta d\rho}{[x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2x\rho \cos(\theta) - 2y\rho \sin(\theta)]^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{z} &= -\lambda z \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta d\rho}{[x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2x\rho \cos(\theta) - 2y\rho \sin(\theta)]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

O espaço de fase de (2.25) é dado por

$$\Omega = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3; \mathbf{q} \notin \mathcal{A}\} = (\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{A}) \times \mathbb{R}^3. \quad (2.28)$$

Chamamos $(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{A})$ de espaço das configurações.

Observe que a aplicação $\mathbf{q} \mapsto \frac{1}{\|\mathbf{q} - \mathbf{u}\|}$ é uma função analítica, para $\mathbf{q} \neq \mathbf{u}$ e desta forma também é analítico o potencial $V(\mathbf{q}) = \int_{\mathcal{A}} \frac{\lambda du}{\|\mathbf{q} - \mathbf{u}\|}$, para todo $\mathbf{q} \notin \mathcal{A}$. Assim segue que o campo vetorial $(H_{\mathbf{p}}, -H_{\mathbf{q}})$ é um campo vetorial analítico sobre Ω .

Assim, da teoria clássica de Equações Diferenciais Ordinárias, segue que dados $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{A}) \times \mathbb{R}^3$, existe uma única solução $\mathbf{q}(\mathbf{t})$ de (2.24) definida em um intervalo maximal (ω_-, ω_+) contendo $t = 0$, com

condições iniciais $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ e $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$. Além disso, como V é analítica, todas as componentes de (t) são funções analíticas de t e das coordenadas de $\mathbf{q}_0$ e $\dot{\mathbf{q}}_0$.

Como a função Hamiltoniana (2.26) é uma integral primeira, para cada $h \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$\Sigma_h = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{A}) \times \mathbb{R}^3; H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = h\} \subset \Omega$$

é uma subvariedade diferenciável de Ω , de dimensão cinco desde que $h \in \mathbb{R}$ é valor regular de H .

Observe que sobre Σ_h temos que $V(\mathbf{q}) \leq h$ e ao conjunto $\{\mathbf{q} \in (\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{A}); V(\mathbf{q}) \leq h\}$ chamamos de *região de Hill* correspondente a energia h . Este conjunto coincide com a projeção de Σ_h sobre o espaço de configurações $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{A}$ e segue que se $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ é uma solução de (2.24) então $\mathbf{q}(t)$ deve estar na região de Hill correspondente, para todo tempo t que estiver definida. Temos dois resultados preliminares:

Proposição 2.3.1. *No problema do anel, ou seja $a \neq 0$, a origem é uma solução de equilíbrio do sistema (2.27) e é instável no sentido de Liapunov.*

Demonstração: Note primeiramente que $\ddot{z} = 0$ se, e somente se, $z = 0$. Por outro lado, cálculos simples mostram que se $x = 0$ e $y = 0$, então $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$. Desde que os autovalores da parte linear dos termos de primeira ordem do sistema (2.27) são

$$\lambda_1 = \lambda_3 = -\lambda_2 = -\lambda_4 = \omega \in \mathbb{R}^+, \lambda_5 = \sqrt{2}i\omega = -\lambda_6,$$

onde $\omega = \sqrt{\frac{M}{ab(a+b)}}$, e assim segue a instabilidade no sentido de Liapunov. ■

Mais adiante provaremos a unicidade para o caso do anel.

Observação 2.3.1. *Note que no caso do disco circular homogêneo, a origem não pertence ao espaço de configurações.*

Proposição 2.3.2. *Seja $\mathbf{q}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma solução de (2.27) definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Então existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $z(t_0) = 0$.*

Demonstração: Provamos usando um argumento de contradição. Assuma que $z(t) > 0$ para todo t , portanto $\ddot{z}(t) < 0$, i.e., $z(t)$ é côncava para todo real t e positiva o que é impossível desde que solução é ao menos C^2 . ■

2.3.1 Simetrias

Nesta seção vamos determinar as simetrias do potencial V do anel ou disco circular homogêneo. Usaremos a seguinte notação: A linha perpendicular ao plano contendo ao anel ou disco e passando pelo centro chamaremos de *eixo z* , o plano que contém o anel ou disco de *plano horizontal* e qualquer plano que contém o eixo z de *plano vertical*. Porém as simetrias do potencial V são evidentes da geometria do problema e são as transformações de $\mathbb{R}^3$ que deixam fixo o anel ou disco homogêneo.

Seja $\mathcal{G} = SO(2)$ o subgrupo de rotações em torno do eixo z . Então é fácil ver da expressão (2.15) ou (2.16) que:

Proposição 2.3.3. *O potencial V é invariante sobre o grupo $\mathcal{G}$.*

E como consequência deste resultado temos

Proposição 2.3.4. (Existência de uma integral primeira) *A componente polar do momento angular $\mathbf{G} = \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}$, i.e., $h = x\dot{y} - y\dot{x}$ é constante ao longo das soluções do sistema (2.27).*

Demonstração: Derivando h ao longo das soluções de (2.27) temos que

$$\frac{dh}{dt} = y\ddot{x} - x\ddot{y},$$

e substituindo nas expressões $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$ dadas por (2.27) obtemos que $\frac{dh}{dt} = 0$. ■

Definindo $\dot{x} = p_x$, $\dot{y} = p_y$ e $\dot{z} = p_z$ obtemos o seguinte resultado

Proposição 2.3.5. *O potencial V , dado por (2.15) ou (2.16), é invariante pelas seguintes reflexões:*

$$\begin{aligned} a) \quad & (x, y, z) \longrightarrow (x, -y, -z), \\ b) \quad & (x, y, z) \longrightarrow (-x, y, z), \\ d) \quad & (x, y, z) \longrightarrow (x, -y, z), \\ e) \quad & (x, y, z) \longrightarrow (-x, y, -z), \\ f) \quad & (x, y, z) \longrightarrow (x, y, -z), \\ g) \quad & (x, y, z) \longrightarrow (x, -y, -z). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Demonstração: É claro pela definição de V . ■

Considerando o sistema (2.27), como consequência da Proposição 2.3.5 obtemos

Proposição 2.3.6. *As equações de movimento (2.27) são invariantes pelas simetrias*

$$\begin{aligned} I : \quad & (x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) \longrightarrow (x, y, z, p_x, p_y, p_z, -t). \\ S_1 : \quad & (x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) \longrightarrow (x, -y, -z, -p_x, p_y, p_z, -t). \\ S_2 : \quad & (x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) \longrightarrow (-x, y, z, p_x, -p_y, -p_z, -t). \\ S_3 : \quad & (x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) \longrightarrow (x, -y, z, -p_x, p_y, -p_z, -t). \\ S_4 : \quad & (x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) \longrightarrow (-x, -y, -z, p_x, p_y, p_z, -t). \\ S_5 : \quad & (x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) \longrightarrow (x, -y, -z, p_x, -p_y, -p_z, -t). \\ S_6 : \quad & (x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) \longrightarrow (-x, -y, z, p_x, p_y, -p_z, -t). \\ S_7 : \quad & (x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) \longrightarrow (-x, y, -z, p_x, -p_y, p_z, -t). \\ S_8 : \quad & (x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) \longrightarrow (x, y, z, -p_x, -p_y, -p_z, -t). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Demonstração: É claro pela definição de V . ■

Proposição 2.3.7. *Os seguintes subconjuntos são invariantes pelo fluxo associado a (2.27)*

- a) $z = \dot{z} = 0$ (plano equatorial),
- b) $y = \dot{y} = 0$ (plano vertical),
- c) $x = \dot{x} = 0$ (plano vertical),
- d) $x = y = \dot{x} = \dot{y} = 0$ (eixo z),
- e) $x = z = \dot{x} = \dot{z} = 0$ (eixo y),
- f) $y = z = \dot{y} = \dot{z} = 0$ (eixo x).

Demonstração: O item *a*) é claro desde que (2.27) implica que $\dot{z} = 0$. Para provar *b*) e *f*) precisamos observar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)d\theta}{[x^2 + z^2 + \rho^2 - 2x\rho \cos(\theta)]^{3/2}} = 0.$$

A prova dos itens *c*) e *e*) é análogo aos itens anteriores e o item *d*) é trivial. ■

2.3.2 Propriedades do potencial

Em alguns problemas da Mecânica Celeste o potencial tem uma propriedade importante: homogeneidade, a qual permite conseguir informações importante sobre a dinâmica. Porém em nosso problema não temos esta propriedade, ou seja o potencial não tem nenhum grau de homogeneidade. Porém o potencial apresenta uma propriedade importante que permite obtermos soluções para qualquer espessura do anel conhecendo uma solução de um anel particular. Valem propriedades semelhante para o problema do disco.

Escrevemos o potencial V da forma

$$V(\mathbf{q}, a, \mu, M) = -\lambda \int_a^{a+\mu} \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\|\mathbf{q} - \rho e^{i\theta}\|} d\theta d\rho,$$

onde $\rho e^{i\theta} = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), 0)$, para explicitar a dependência da posição $\mathbf{q}$, do raio interno a , espessura $\mu = b - a$, e da massa M . Pelo mesmo caminho, o gradiente de V será denotado por $\nabla V(\mathbf{q}, a, \mu, M)$. A massa do anel fica descrita em termos da espessura como $M = \pi\lambda\mu(\mu + 2a)$, então o potencial tem a forma

$$V(\mathbf{q}, a, \mu, M) = -\frac{M}{\pi\mu(\mu + 2a)} \int_a^{a+\mu} \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta}{\|\mathbf{q} - \rho e^{i\theta}\|} d\rho. \quad (2.31)$$

Obtemos então a seguinte propriedade:

Lema 2.3.1. *Seja $c \in \mathbb{R}^+$. O potencial $V(\mathbf{q}, a, \mu, M)$ do anel fixo homogêneo satisfaz as seguintes propriedades:*

- (1) $V(\mathbf{q}, a, \mu, cM) = c V(\mathbf{q}, a, \mu, M)$.
 - (2) $\nabla V(\mathbf{q}, a, \mu, cM) = c \nabla V(\mathbf{q}, a, \mu, M)$.
 - (3) $V(c\mathbf{q}, ca, c\mu, M) = c^{-1} V(\mathbf{q}, a, \mu, M)$.
 - (4) $\nabla V(c\mathbf{q}, ca, c\mu, M) = c^{-2} \nabla V(\mathbf{q}, a, \mu, M)$.
- (2.32)

Demonstração: Provamos o item 4, os demais itens seguem diretamente da definição de V . Temos que

$$\nabla V(\mathbf{q}, a, \mu; M) = \frac{M}{\pi\mu(2a+\mu)} \int_a^{a+\mu} \int_0^{2\pi} \frac{\rho(x-\rho \cos \theta, y-\rho \sin \theta, z)d\theta d\rho}{[(x-\rho \cos \theta)^2 + (y-\rho \sin \theta)^2 + z^2]^{3/2}},$$

então

$$\nabla V(c\mathbf{q}, ca, c\mu; M) = \frac{M}{\pi c\mu(2ca+c\mu)} \int_{ca}^{c(a+\mu)} \int_0^{2\pi} \frac{\rho(cx-\rho \cos \theta, cy-\rho \sin \theta, cz)d\theta d\rho}{[(cx-\rho \cos \theta)^2 + (cy-\rho \sin \theta)^2 + c^2 z^2]^{3/2}}.$$

Com a transformação de coordenadas $\rho \rightarrow c\rho$, concluímos a prova. ■

Corolário 2.3.1. *Seja $\mathbf{q}(t)$ solução do problema*

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\nabla V(\mathbf{q}, a, \mu, M)$$

e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha^3 \beta^2 = \frac{\tilde{M}}{M}$. Então, $\mathbf{s}(t) = \alpha \mathbf{q}(\beta t)$ é uma solução do problema

$$\ddot{\mathbf{s}}(t) = -\nabla V(\mathbf{s}, \alpha a, \alpha \mu, \tilde{M}). \quad (2.33)$$

Demonstração: Diferenciando duas vezes $\mathbf{s}(t)$ e usando os itens (1)-(3) do Lema 2.3.1 temos que $\ddot{\mathbf{s}}(t) = -\alpha \beta^2 \nabla V(\mathbf{q}(\beta t), a, \mu; M) = -\alpha \beta^2 \nabla V(\alpha \mathbf{q}(\beta t)/\alpha, \alpha a/\alpha, \alpha \mu/\alpha; M) = -\alpha^3 \beta^2 \nabla V(\alpha \mathbf{q}(\beta t), \alpha a, \alpha \mu; M) = -\nabla V(\alpha \mathbf{q}(\beta t), \alpha a, \alpha \mu; \alpha^3 \beta^2 M)$. ■

Observação 2.3.2. Notamos que usando a notação acima, para o problema estar bem posto é necessário que $M = \pi \lambda \mu(\mu + 2a)$ e $\bar{M} = \alpha^2 [\pi \bar{\lambda} \mu(\mu + 2a)]$. Então se assumirmos que $M = \bar{M}$ a constante de densidade de cada problema estará relacionada pela relação $\lambda = \alpha^2 \bar{\lambda}$. Se nós assumirmos que $\lambda = \bar{\lambda}$ então $\bar{M} = \alpha^2 M$.

No caso do disco $\mathcal{D}$, tomamos $a = 0$ na equação (2.31) e assim $\mu = b$ e os resultados da Proposição 2.3.1 e Corolário 2.3.1 também são válidos.

Outro fato importante a ressaltar é que se fizermos $\mu = 0$ na equação Eq.(2.31) então o potencial será indefinido. Mas nós podemos estender o potencial para $\mu = 0$ usando o processo do limite. De fato, da regra de L'Hospital segue $V(\mathbf{q}, a, \mu = 0, M) = -\frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(r+a)^2 \cos^2 \theta + (r-a)^2 \sin^2 \theta + z^2}}$, que corresponde ao potencial do fio fixo homogêneo que tem sido estudado em [1], [5], [10] e [15]. No problema do fio circular, em [5] provaram-se as mesmas propriedades do Lema 2.3.1 com $\mu = 0$.

Proposição 2.3.8. Com a condição $b = a + \mu$ ($\mu > 0$) o potencial V em (2.31) quando $\mu = 0$ corresponde ao potencial associado ao fio circular homogêneo $\mathcal{C}$.

Demonstração: Seja $\mathcal{A}$ o anel circular homogêneo de raio interno a e raio externo b , massa $M = \lambda \pi (b^2 - a^2)$. Então o potencial em um ponto $P = (x, y, z)$ induzido por $\mathcal{A}$, dado pela equação 2.18, pode ser escrita como

$$V(P) = -\frac{M}{(b^2 - a^2)\pi} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(x - \rho \cos \theta)^2 + (y - \rho \sin \theta)^2 + z^2}} \rho d\theta d\rho. \quad (2.34)$$

Denotando por μ a espessura do anel, obtemos que $\mu = b - a$ e assim $M = \pi \lambda \mu(\mu + 2a)$. Da expressão (2.34) obtemos que

$$V(x, y, z, a, \mu; M) = \frac{g(\mu)}{f(\mu)}, \quad (2.35)$$

onde

$$f(\mu) = \frac{\pi}{M} \mu(\mu + 2a)$$

e

$$g(\mu) = \int_a^{a+\mu} \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{(x - \rho \cos \theta)^2 + (y - \rho \sin \theta)^2 + z^2}} d\theta d\rho.$$

Note que $V(x, y, z, a, \mu = 0, M)$ não está definido, mas nós podemos definir $V(x, y, z, a, \mu, M)$ continuamente (de fato, diferenciável) usando o processo de limite. Pela regra L'Hospital nós temos que

$$\begin{aligned} V(x, y, z, a, \mu = 0, M) &= -\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{g(\mu)}{f(\mu)} \\ &= -\frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-a \cos \theta)^2 + (y-a \sin \theta)^2 + z^2}} d\theta, \end{aligned}$$

que corresponde ao potencial do fio circular homogêneo com raio a e com densidade de massa constante $M/2\pi a$.

■

Capítulo 3

Dinâmica dos sub-problemas

Neste capítulo vamos determinar a dinâmica do problema do anel circular homogêneo fixo para uma partícula restrita aos subconjuntos invariantes descritos no capítulo anterior. Segue da Proposição 2.3.7 que os conjuntos invariantes são: eixos coordenados, planos verticais xz e yz e o plano horizontal. Mas pela Proposição 2.3.3, é suficiente considerarmos os seguintes subproblemas:

- Eixo z ,
- Plano horizontal (equatorial),
- Plano vertical.

Veremos que no eixo z a dinâmica é relativamente simples e no plano horizontal, poderemos obter expressões fechadas para o potencial que permite mostrar sua limitação no plano e a partir daí obter importantes resultados para dinâmica.

3.1 Dinâmica no eixo z

Como já mencionamos anteriormente, muitos dos resultados obtidos para o problema do anel circular homogêneo podem ser estendidos ao problema do disco circular. Mas no caso da dinâmica do eixo z é necessário tratar os problemas separadamente, pois possuem diferenças importantes.

Começamos considerando o caso do anel. Seja P uma partícula com massa infinitesimal movendo-se no eixo z , sobre a influência do campo gravitacional induzido pelo anel $\mathcal{A}$. Segue da equação (2.20) que o potencial no eixo z é

$$\begin{aligned} V(z) &= -\lambda \int_a^b 2\rho \int_0^\pi \frac{d\omega}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} d\rho \\ &= -2\lambda\pi \left[\sqrt{b^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2} \right] \\ &= -\frac{2M}{b^2 - a^2} \left[\left(\sqrt{b^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2} \right) \frac{\sqrt{b^2 + z^2} + \sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{b^2 + z^2} + \sqrt{a^2 + z^2}} \right] \\ &= -\frac{2M}{b^2 - a^2} \left[\frac{b^2 - a^2}{\sqrt{b^2 + z^2} + \sqrt{a^2 + z^2}} \right] \\ &= -\frac{2M}{\sqrt{b^2 + z^2} + \sqrt{a^2 + z^2}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Portanto, neste caso o sistema (2.24) é simplesmente

$$\ddot{z} = -\frac{2M}{(b^2 - a^2)} z \left[\frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right], \quad (3.2)$$

cujas função Hamiltoniana é

$$H(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} \dot{z}^2 - \frac{2M}{\sqrt{b^2 + z^2} + \sqrt{a^2 + z^2}}.$$

O sistema (3.2) está associado ao seguinte sistema Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{z} &= u, \\ \dot{u} &= -\frac{2M}{(b^2 - a^2)} z \left[\frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]. \end{aligned}$$

Na Figura 3.1, nós podemos ver que a origem $z = \dot{z} = 0$ é a única posição de equilíbrio do sistema com energia $h^* = V(0) = -\frac{2M}{b+a}$ e é um equilíbrio estável no sentido de Liapunov. Para a energia h , $-\frac{2M}{b+a} < h < 0$, as soluções são periódicas e para $h > 0$, temos órbitas hiperbólicas que chegam (partem) do infinito com velocidade positiva e órbitas parabólicas se $h = 0$ (i.e., chegam e partem do infinito com velocidade nula). Desta forma temos que

Proposição 3.1.1. *As soluções do problema do anel homogêneo fixo no eixo z são:*

- i) *Periódicas se, e somente se, $-\frac{2M}{b+a} < h < 0$.*
- ii) *Parabólicas se, e somente se, $h = 0$.*
- iii) *Hiperbólicas se, e somente se, $h > 0$.*

Observação 3.1.1. *Observe que se $h < h^*$ então $v = \dot{z} = \pm\sqrt{h - V(z)}$ não está definido e não existe fluxo para estes valores de h .*

Corolário 3.1.1. *O fluxo associado ao problema do anel homogêneo no eixo z é completo.*

Observação 3.1.2. *Podemos observar pela Figura 3.1 que a dinâmica no eixo z é muito similar ao problema de Sitnikov, cujas soluções descrevem a dinâmica de uma partícula no eixo z , sujeita a ação devida aos primários de massa $m_1 = m_2$, movendo-se no plano- (x, y) , numa órbita circular em torno da*

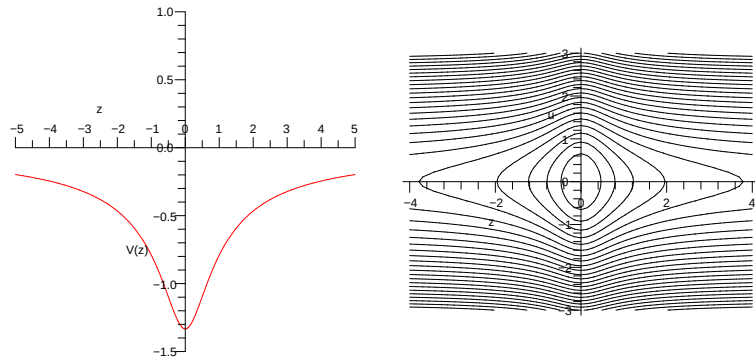


Figura 3.1: *Esquerda:* Função Potencial (3.1) do anel no eixo z para os valores dos parâmetros $a = 0.5$, $\mu = 0.5$, $M = 1$. *Direita:* Retrato de fase do sistema (3.2) para os valores dos parâmetros $a = 0.5$, $\mu = 0.5$, $M = 1$.

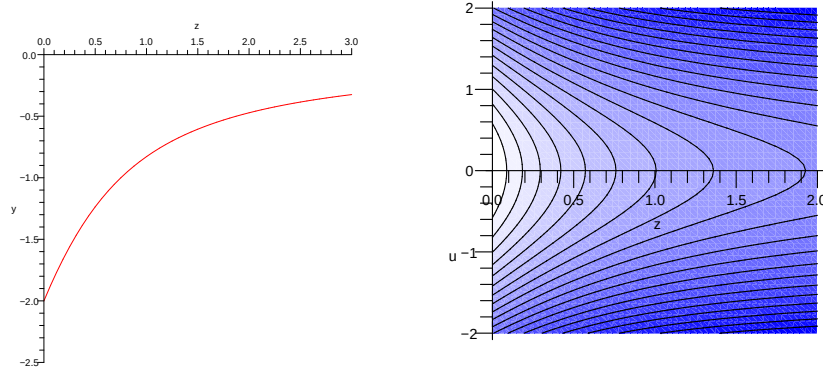


Figura 3.2: *Esquerda:* Função potencial (3.4) do disco no eixo na região $z > 0$ para valores dos parâmetros $b = 1$, $M = 1$. *Direita:* Retrato de fase do sistema (3.3), para $z > 0$ e para valores dos parâmetros $b = 1$, $M = 1$.

origem (para maiores detalhes veja [7]). Porém as equações (3.3), cujas soluções descrevem o movimento da partícula P ao longo do eixo z , sob a atração gravitacional do anel circular homogêneo $\mathcal{A}$ não são como no problema de Sitnikov.

Dado que $z = 0$ não é um ponto no problema do disco ($a = 0$), pois ele é um ponto sobre o disco, então como já vimos no capítulo anterior, o espaço de configurações é dado por $z > 0$ ou $z < 0$ (de forma separada). A equação de movimento neste caso assume a forma

$$\ddot{z} = -\frac{2M}{b^2} z \left[\frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} + \frac{1}{|z|} \right]. \quad (3.3)$$

com potencial dado por

$$\begin{aligned} V(z) &= -\frac{2M}{\sqrt{b^2 + z^2} + \sqrt{z^2}} \\ &= -\frac{2M}{\sqrt{b^2 + z^2} + |z|}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Proposição 3.1.2. *As soluções do problema do disco homogêneo fixo no eixo z são:*

- i) Para $-\frac{2M}{b} < h < 0$ as soluções começam em colisão e terminam em colisão.*
- ii) Parabólicas, se e somente se, $h = 0$.*
- iii) Hiperbólicas, se e somente se, $h > 0$.*

3.2 Dinâmica no plano horizontal

Estudaremos agora a dinâmica de uma partícula no plano horizontal, ou seja no plano que contém o anel ou disco circular. Quando o problema está restrito ao plano horizontal obtemos um problema de força central. Usando a teoria clássica de problemas de forças centrais (para maiores detalhes veja [4]) é possível provar a existências de soluções circulares na região exterior ao anel e também no problema do

disco. Mostraremos também que a função potencial é limitada tanto no interior quanto no exterior do anel e na região exterior ao disco. Sem perda de generalidade podemos fixar $b = 1$ e assim a espessura será dada por $\mu = 1 - a$, desde que pelo Corolário 2.3.1, conhecendo uma solução para um anel com raios interno a e externo $b = 1$, podemos obter a solução para qualquer outro anel com raios a e b arbitrários. Também podemos supor que a massa M é unitária.

Nesta subseção denotaremos $\mathbf{q} = (x, y, 0) \equiv (x, y)$, e $r = \|\mathbf{q}\|$, então temos que $\rho_1^2 = (r + \rho)^2$ e $\rho_2^2 = (r - \rho)^2$, e a expressão para o potencial (2.22) fica determinada por

$$\begin{aligned} V(r) &= -4\lambda \int_a^b \rho \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(r - \rho)^2 \sin^2 \theta + (\rho + r)^2 \cos^2 \theta}} d\rho \\ &= -4\lambda \int_a^b \frac{\rho}{\rho + r} K(k) d\rho. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Desde que o potencial V , é radial o problema (2.24) é um problema de força central. Portanto (2.24) é um sistema integrável tendo como integrais primeiras a energia $h = 1/2 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + V(\mathbf{q})$ e o momento angular c .

As equações (2.24) em coordenadas polares (r, φ) são dadas pelo sistema

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{c^2}{r^3} - F(r) r, \\ \dot{\varphi} &= \frac{c}{r^2}. \end{aligned}$$

Com $U(r) = V(\mathbf{q})$ e $F(r) = \frac{U'(r)}{r}$ obtemos $\nabla V(\mathbf{q}) = F(r)\mathbf{q}$. Note que $\ddot{r} = \frac{c^2}{r^3} - U'(r) = \frac{d}{dr} \left[-\frac{c^2}{2r^2} - U(r) \right]$, o qual é equivalente a

$$\ddot{r} = -U'_{eff}(r) \quad (3.6)$$

com $U_{eff}(r) = \frac{c^2}{2r^2} + U(r)$, o qual é chamado de *potencial efetivo*. O sistema (3.6) acima corresponde ao seguinte sistema Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v, \\ \dot{v} &= -U'_{eff}(r), \end{aligned}$$

com função Hamiltoniana dada por $H(r, v) = 1/2 v^2 + U_{eff}(r)$, com um grau de liberdade.

Segue um resultado clássico da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias, o qual é fácil de ser verificado (veja [4]),

Lema 3.2.1. $r(t) = r_0 e^{i\omega t} = (r_0 \cos(\omega t), r_0 \sin(\omega t))$, $\omega = \frac{c}{r_0^2}$, $r_0 > 0$, é uma solução circular de (2.24) se, e somente se, r_0 é um ponto crítico de $U_{eff}(r)$ com $c \neq 0$.

Desde que a função $U_{eff}(r)$ está relacionada com as soluções circulares do sistema (2.24), nós estudamos a existência de pontos críticos de $U_{eff}(r)$.

Observação 3.2.1. Note que $U'_{eff}(r) = 0$ se, e somente se, $F(r) = \frac{c^2}{r^4}$ com $r \neq 0$. Sobre esta restrição F necessita ser não negativo. Em particular no caso $c = 0$, os pontos críticos de $U_{eff}(r)$ são os zeros da função $F(r)$.

Para estudar os pontos críticos de $U_{eff}(r)$ precisamos conhecer o sinal de $F(r)$. Porém antes necessitamos de alguns resultados técnicos sobre a integral elíptica completa de primeira ordem. Estes resultados podem ser encontrados em [12].

Lema 3.2.2. *Seja $K(k)$ integral elíptica completa de primeira ordem. Então*

- a) $K(k) > 0$ para $0 < k < 1$,
- b) $\frac{dK(k)}{dk} > 0$ para $0 < k < 1$.

Outro resultado sobre integrais elípticas de primeira espécie (veja [22] para maiores detalhes) é dado por

Lema 3.2.3. *A função*

$$f(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{p^2 \cos^2 \theta + q^2 \sin^2 \theta}}$$

tem a seguinte propriedade

$$f(p, q) = f\left(\frac{p+q}{2}, \sqrt{pq}\right).$$

Com estas propriedades de integrais elípticas obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.2.1. *Na região conexa interna ao anel homogêneo $0 < r < a$, $U'(r) < 0$, e na região externa, $r > b$, $U'(r) > 0$. Para o caso do disco vale a mesma propriedade, ou seja $U'(r) > 0$ para $r > b$.*

Demonstração: Pelo Lema 3.2.3, o potencial na região exterior ao anel $r > b$, pode ser escrito como

$$U(r) = -4\lambda \int_a^b \int_0^{\pi/2} \frac{\rho d\theta d\rho}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + (r^2 - \rho^2) \sin^2 \theta}}, \quad (3.7)$$

e podemos escrever Eq.(3.7) da seguinte maneira

$$U(r) = -4\lambda \int_a^b \frac{\rho}{r} K\left(\frac{\rho}{r}\right) d\rho. \quad (3.8)$$

Diferenciando Eq.(3.8) verificamos que

$$U'(r) = 4\lambda \int_a^b \frac{\rho}{r^2} \left[K\left(\frac{\rho}{r}\right) + \frac{\rho}{r} \frac{dK\left(\frac{\rho}{r}\right)}{dk} \right] d\rho. \quad (3.9)$$

Então se $r > b$, segue do Lema 3.2.2 e equação (3.9) que $U'(r) > 0$. Observe que o mesmo resultado vale para o caso do disco, fazendo $a = 0$ nas equações acima.

Se $0 < r < a$, usando o Lema 3.2.3, obtemos que

$$U(r) = -4\lambda \int_a^b \int_0^{\pi/2} \frac{\rho d\theta}{\sqrt{(\rho^2 - r^2) \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta}} d\rho \quad (3.10)$$

e podemos escrever Eq. (3.10) como

$$U(r) = -4\lambda \int_a^b K\left(\frac{r}{\rho}\right) d\rho. \quad (3.11)$$

Diferenciando Eq.(3.11) verificamos que

$$U'(r) = -4\lambda \int_a^b \frac{1}{\rho} \frac{dK\left(\frac{r}{\rho}\right)}{dk} d\rho. \quad (3.12)$$

Novamente aplicando o Lema 3.2.2, segue que $\frac{1}{\rho} \frac{dK\left(\frac{r}{R}\right)}{dk} > 0$, e desta forma, $U'(r) < 0$ se $0 < r < a$. ■

O seguinte resultado caracteriza as soluções de equilíbrio do sistema (2.27) e complementa a Proposição 2.3.1.

Corolário 3.2.1. *A origem é a única solução de equilíbrio do sistema (2.27) no problema do anel $\mathcal{A}$. No problema do disco $\mathcal{D}$ não existem equilíbrios.*

Demonstração: De fato, pela prova da Proposição 2.3.1 todo equilíbrio de (2.27) está sobre o plano- (x, y) . Po outro lado observe que

$$\nabla V(\mathbf{q}) = F(r)\mathbf{q} = \frac{U'(r)}{r}\mathbf{q}.$$

Provamos na Proposição 3.2.1 que $U'(r) \neq 0$, na região interna como também na região externa do anel. Portanto $\nabla V(\mathbf{q}) = 0$ apenas na origem. ■

Nosso objetivo agora é obter expressões fechadas para o potencial (3.5), e também para o potencial efetivo. Na região interior ao anel homogêneo ($0 < a < 1$) o potencial é dado por (3.11). Façamos a seguinte mudança de coordenadas $k = r/\rho$. Então de (3.11) obtemos que

$$U(r) = 4\lambda r \int_{\frac{r}{a}}^r \frac{K(k)}{k^2} dk, \quad (3.13)$$

e esta integral pode ser calculada analiticamente (veja [12]). Resulta que o potencial do anel circular homogêneo, na região interior é dado por

$$U(r) = 4\lambda \left[E\left(\frac{r}{a}\right)a - E(r) \right], \quad (3.14)$$

onde $E(k)$ é a integral elíptica completa de segunda ordem.

Lema 3.2.4. *O potencial do anel fixo homogêneo na região interna ao anel, no plano horizontal, satisfaz a seguinte desigualdade*

$$4\lambda[a - E(a)] < U(r) \leq 4\lambda[a - 1], \quad \text{para todo } 0 < r < a.$$

Demonstração: Sabemos que $U(r) < 0$ por (2.15), e pela proposição 3.2.1, temos que $U'(r) < 0$. Também é claro que

$$\lim_{r \rightarrow a^-} U(r) = 4\lambda[a - E(a)] < 0. \quad (3.15)$$

Desde que $E(a)$ é limitada, $0 < a \leq 1$, e $U(r)$ é uma função decrescente, obtemos $4\lambda[a - E(a)] \leq U(r) < U(0) = 4\lambda[a - 1]$. ■

Da Equação (3.14) segue que o potencial efetivo do anel circular no interior é dado por

$$U_{eff}(r) = \frac{c^2}{2r^2} + 4\lambda \left[E\left(\frac{r}{a}\right)a - E(r) \right].$$

Na região do plano, exterior ao anel circular ($r > 1$), consideremos (3.8) com a seguinte mudança de coordenadas $k = R/r$ e calculando esta integral analiticamente (veja [12]) obtemos

$$U(r) = -4\lambda r \int_{a/r}^{1/r} kK(k)dk = -4\lambda r \left\{ E\left(\frac{1}{r}\right) - \left[1 - \frac{1}{r^2}\right] K\left(\frac{1}{r}\right) - E\left(\frac{a}{r}\right) + \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] K\left(\frac{a}{r}\right) \right\}. \quad (3.16)$$

Lema 3.2.5. *O potencial na região do plano exterior ao anel circular homogêneo $\mathcal{A}$ satisfaz*

$$-4\lambda \left[1 - E(a) + (1 - a^2)K(a) \right] \leq U(r) < 0, \text{ para todo } r > 1. \quad (3.17)$$

e no problema do disco $\mathcal{D}$ satisfaz a seguinte propriedade

$$-4\lambda \leq U(r) < 0, \text{ para todo } r > 1. \quad (3.18)$$

Demonstração: Sabemos que $U(r) < 0$ por Eq.(2.15) e da proposição 3.2.1 segue que $U'(r) > 0$. Também temos que

$$\lim_{r \rightarrow 1^+} U(r) = -4\lambda \left[E(1) - E(a) + (1 - a^2)K(a) \right] + 4\lambda \lim_{r \rightarrow 1^+} r \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) K\left(\frac{1}{r}\right).$$

Por outro lado, o limite $\lim_{r \rightarrow 1^+} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) K\left(\frac{1}{r}\right)$ é zero. De fato, fazendo a substituição $u = 1/r$, então este limite é equivalente a

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} (1 - u^2) K(u).$$

Agora usando a série para integrais elípticas $K(k)$ (veja [24], pg. 203)

$$K(u) = \left[1 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{9}{64}u^4 + \dots \right] \ln \frac{4}{u_1} - \left[\frac{1}{4}u^2 + \frac{21}{128}u^4 + \dots \right],$$

com $u_1^2 = 1 - u^2$. Segue que

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} (1 - u^2) K(u) = \lim_{u_1 \rightarrow 0^+} u_1^2 \left(\left[1 + \frac{1}{4}u_1^2 + \frac{9}{64}u_1^4 + \dots \right] \ln \frac{4}{u_1} - \left[\frac{1}{4}u_1^2 + \frac{21}{128}u_1^4 + \dots \right] \right) = 0. \quad (3.19)$$

E a última igualdade segue do fato que $\lim_{u_1 \rightarrow 0} u_1^2 \ln \frac{4}{u_1} = 0$. Usando (3.19), obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 1^+} U(r) = -4\lambda \left[E(1) - E(a) + (1 - a^2)K(a) \right].$$

Desde que pela Proposição 3.2.1, $U(r)$ é uma função crescente para todo $r > 1$, provamos (3.17). Para provar (3.18), basta tomar $a = 0$ em 3.2.1 e observar que $K(0) = E(0) = \pi/2$. ■

Veja na Figura 3.3 dada abaixo o potencial para o problema planar nas regiões interior e exterior ao anel circular homogêneo e o potencial do disco circular homogêneo.

Observação 3.2.2. *Se considerarmos o anel circular com espessura muito pequena (equivalentemente, fazer o raio a se aproximar de um), substituindo a expressão da massa do anel em Eq.(3.14) e calculando o limite quando a se aproxima de um, obtemos*

$$\lim_{a \rightarrow 1^-} U(r) = -\frac{2M}{\pi} K(r), \quad (3.20)$$

que é exatamente o potencial do fio circular homogêneo, na região interior ao mesmo. Por outro lado, substituindo a expressão da massa em (3.16) e calculando o limite

$$\lim_{a \rightarrow 1^-} U(r) = -\frac{2M}{\pi} K\left(\frac{1}{r}\right), \quad (3.21)$$

obtemos a expressão do potencial no exterior do fio circular homogêneo.

Observamos que no caso do fio, o potencial tanto na região interior como na região exterior não é limitado, como foi provado em [5], e além disso o potencial tende a menos infinito quando a partícula se aproxima do fio. Esta é uma grande diferença dos problemas do anel e fio circular.

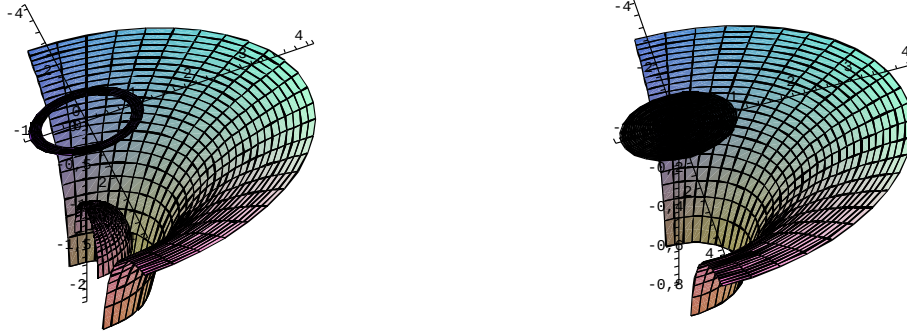


Figura 3.3: *Esquerda:* Gráfico do Potencial U no plano equatorial, nas regiões externa e interna do anel de raio interno $a = 0.8$, raio externo $b = 1$ e com massa $M = 1$. *Direita:* Gráfico do Potencial U no plano equatorial, na região externa ao disco de raio $b = 1$ e com massa $M = 1$.

Da equação (3.16) segue que o potencial efetivo na região exterior ao anel é

$$U_{eff}(r) = \frac{c^2}{2r^2} - 4\lambda r \left[E\left(\frac{1}{r}\right) - \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)K\left(\frac{1}{r}\right) - E\left(\frac{a}{r}\right) + \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)K\left(\frac{a}{r}\right) \right]. \quad (3.22)$$

e no caso do disco, fazendo $a = 0$, do fato de que $E(0) = \pi/2$ e $K(0) = \pi/2$, segue que

$$U_{eff}(r) = \frac{c^2}{2r^2} - 4\lambda r \left[E\left(\frac{1}{r}\right) - \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)K\left(\frac{1}{r}\right) \right]. \quad (3.23)$$

Do Lema 3.2.1 segue que cada ponto crítico de U_{eff} está associada uma solução circular de (2.24). U_{eff} somente pode possuir pontos críticos quando $r > 1$. Queremos determinar os valores para os quais existem soluções circulares de (2.24), com momento angular c .

Segue da equação (3.5) e Lema 3.2.3, que o potencial é dado por

$$U(r) = \frac{-4}{\pi(1-a^2)} \int_a^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho d\theta d\rho}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + (r^2 - \rho^2) \sin^2 \theta}}, \quad (3.24)$$

onde estamos assumindo agora que $r > 1$. Desde que é válido a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{r^2 - \rho^2} \geq \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta + (r^2 - \rho^2) \sin^2 \theta} \geq \frac{1}{r^2}, \quad (3.25)$$

então obtemos

Lema 3.2.6. *Para $r > 1$ temos as seguintes desigualdades no problema do anel homogêneo*

$$\frac{c^2}{2r^2} + \frac{2}{1-a^2} \left(\sqrt{r^2-1} - \sqrt{r^2-a^2} \right) \leq U_{eff}(r) \leq \frac{c^2}{2r^2} - \frac{1}{r}, \quad (3.26)$$

$$-\frac{c^2}{r^3} + \frac{2r}{1-a^2} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}} \right) \geq U'_{eff}(r) \geq -\frac{c^2}{r^3} + \frac{1}{r^2}. \quad (3.27)$$

Demonstração: Temos que o potencial efetivo é

$$U_{eff}(r) = \frac{c^2}{2r^2} + U(r), \quad (3.28)$$

onde $U(r)$ é dado por (3.24). Usando a desigualdade (3.25) e integrando com respeito a ρ e θ obtemos (3.26). Por outro lado diferenciando (3.28) temos que

$$U'_{eff}(r) = -\frac{c^2}{r^3} + \frac{4r}{\pi(1-a^2)} \int_a^1 \int_0^{\pi/2} \frac{\rho d\theta}{[r^2 \cos^2 \theta + (r^2 - \rho^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} d\rho. \quad (3.29)$$

Novamente usando (3.25) e integrando duas vezes segue a desigualdade (3.27). Para o caso do disco basta mais uma vez tomar $a = 0$. ■

Obtemos então o principal teorema desta seção, o qual garante a existência de soluções circulares no plano horizontal.

Teorema 3.2.1. *Consideremos o anel homogêneo circular fixo, contido no plano horizontal e centrado na origem, com raio interno a , e raio externo um e massa total $M = 1$. Obtemos que*

a) Para $|c| > \tilde{c} > 0$, onde

$$\tilde{c}^2 = \frac{8}{9} \left(\frac{(1+a^2) + \sqrt{a^4 - a^2 + 1}}{1-a^2} \right) \left(\sqrt{(6-3a^2) + 6\sqrt{a^4 - a^2 + 1}} - \sqrt{(6a^2-3) + 6\sqrt{a^4 - a^2 + 1}} \right),$$

o potencial efetivo $U_{eff}(r)$ tem pelo menos um máximo e ao menos um mínimo local. Em particular existem soluções circulares.

b) Para $|c| \leq 1$, $U'_{eff}(r) > 0$, $U_{eff}(r)$ não possui pontos críticos e não existem soluções circulares.

c) Para cada valor do momento angular c com $|c| > 1$ e para todo r tal que $r > c^2$, $U'_{eff}(r) > 0$ e desta forma $U_{eff}(r)$ não possui nenhum ponto crítico. Em particular não existem soluções circulares.

Observação 3.2.3. Observe que neste teorema o domínio para o potencial efetivo é $r > 1$. Para r suficientemente grande, temos que $U_{eff}(r) < 0$, com $U_{eff}(r)$ tendendo a zero quando r tende ao infinito. Também do Lema 3.2.5 o potencial efetivo é limitado e quando r se aproxima de um , $U_{eff}(r)$ tende a $4\lambda \left[1 - E(a) + (1-a^2)K(a) \right]$.

Por outro lado, para r suficientemente próximo de 1 temos que $U'_{eff}(r) > 0$, i.e., $U_{eff}(r)$ é uma função crescente para cada c . De fato, diferenciando (3.22) obtemos

$$U'_{eff}(r) = -\frac{c^2}{r^3} - 4\lambda \left[E\left(\frac{1}{r}\right) - K\left(\frac{1}{r}\right) - E\left(\frac{a}{r}\right) + K\left(\frac{a}{r}\right) \right].$$

Calculando o limite de $U'_{eff}(r)$, quando r tende a 1, obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 1} U'_{eff}(r) = -c^2 - 4\lambda \left[1 - E(a) + K(a) \right] + 4\lambda \lim_{r \rightarrow 1} K\left(\frac{1}{r}\right).$$

Desta forma, para r suficientemente próximo de um , $U'_{eff}(r)$ tende a ser muito grande.

Provamos agora o Teorema 3.2.1.

Demonstração: (Teorema 3.2.1) Pela observação acima, se encontrarmos valores de $c \neq 0$, tal que

$U_{eff}(r) > 0$, para algum $r > 1$, vamos obter, ao menos um máximo e um mínimo local de $U_{eff}(r)$.
Portando pelo Lema 3.2.1, poderemos encontrar soluções circulares de (2.24), com momento angular c .

Pelo Lema 3.2.6, devemos analisar a desigualdade

$$\frac{c^2}{2r^2} + \frac{2}{1-a^2} \left(\sqrt{r^2-1} - \sqrt{r^2-a^2} \right) > 0$$

a qual é equivalente a

$$U_{eff}(r) \geq c^2 > \frac{4r^2}{1-a^2} \left(\sqrt{r^2-a^2} - \sqrt{r^2-1} \right).$$

Para $r > 1$, definimos a função auxiliar

$$l(r) = \frac{4r^2}{1-a^2} \left(\sqrt{r^2-a^2} - \sqrt{r^2-1} \right). \quad (3.30)$$

Diferenciando e igualando a zero a equação (3.30), obtemos depois de algumas manipulações algébricas a relação

$$3r^4 - 4r^2(1+a^2) + 4a^2 = 0. \quad (3.31)$$

Resolvendo a equação (3.31) obtemos as seguintes soluções

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{\sqrt{6+6a^2+6\sqrt{a^4-a^2+1}}}{3}, \\ r_{12} &= -\frac{\sqrt{6+6a^2+6\sqrt{a^4-a^2+1}}}{3}, \\ r_{21} &= \frac{\sqrt{6+6a^2-6\sqrt{a^4-a^2+1}}}{3}, \\ r_{22} &= -\frac{\sqrt{6+6a^2-6\sqrt{a^4-a^2+1}}}{3}. \end{aligned}$$

Observe que queremos $r > 1$, então r_{12} e r_{22} podem ser descartados. Também se $0 \leq a < 1$ teremos que $(1+a^2-\sqrt{a^4-a^2+1}) < 1$, e desta forma segue que $r_{21} < 1$. Portanto o único ponto crítico de $l(r)$ é r_{11} , o qual é claramente maior que um. Obtemos então que para $r > r_{11}$, $l(r)$ é uma função crescente.

Definimos agora $\tilde{c}^2 = l(r_{11})$ ($\tilde{c} > 0$). Então

$$\tilde{c}^2 = \frac{8}{9} \left(\frac{(1+a^2) + \sqrt{a^4-a^2+1}}{1-a^2} \right) \left(\sqrt{(6-3a^2) + 6\sqrt{a^4-a^2+1}} - \sqrt{(6a^2-3) + 6\sqrt{a^4-a^2+1}} \right)$$

e desde que $6-3a^2 > 6a^2-3$ para todo $0 \leq a < 1$, segue que $\tilde{c} > 0$. Portanto para $c^2 > l(r_{11}) = \tilde{c}$, $U_{eff}(r)$ tem pelo menos um mínimo e pelo menos um máximo local e assim concluímos o item a).

Para provar o item b), pelo Lema 3.2.6 necessitamos analisar a desigualdade

$$-\frac{c^2}{r^3} + \frac{1}{r^2} > 0,$$

a qual é o qual é equivalente a

$$c^2 < r.$$

Portanto se nós considerarmos $|c| \leq 1$ então $U'_{eff}(r) > 0$ para todo $r > 1$. Isto prova b). O item c) é consequência da análise anterior. ■

3.2.1 Outros resultados da dinâmica no plano horizontal

Vejamos outros resultados da dinâmica. Começamos com o seguinte resultado, cuja demonstração é imediata pela relação de energia

Proposição 3.2.2. *Se o momento angular c é diferente de zero, então a partícula não passa pela origem, ou equivalentemente se o momento angular c for zero então a solução está sobre uma reta ou seja, os vetores posição e velocidade são paralelos*

Observação 3.2.4. *Os eixos coordenados x e y são invariantes pelo fluxo como vimos anteriormente. Como o problema é invariante por rotações em torno do eixo z qualquer reta que passa pela origem também é um subconjunto invariante e correspondem ao caso em que o momento angular é nulo. Porém para estudar este caso, basta considerar a partícula sobre o eixo x com velocidade na direção deste eixo.*

Logo para estudar a dinâmica no plano temos dois casos a considerar: com momento angular $c = 0$ e $c \neq 0$. O primeiro caso corresponde ao estudo da dinâmica sobre uma reta que passa pela origem, que pode ser tomada, sem perda de generalidade, como sendo o eixo- x .

3.2.2 Dinâmica no eixo- x

A função potencial que determina o movimento da partícula sobre o eixo- x é dada por

$$\begin{aligned} V(x) = V(x, 0, 0) &= -\frac{4M}{\pi(b^2 - a^2)} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{(|x| - \rho)^2 \sin^2 \theta + (|x| + \rho)^2 \cos^2 \theta}} d\theta d\rho \\ &= \frac{4M}{\pi(b^2 - a^2)} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{(x - R)^2 \sin^2 \theta + (x + \rho)^2 \cos^2 \theta}} d\theta d\rho. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Observe que para $x > 0$, então $V(x) = U(r)$, onde $U(r)$ é dado por (3.7) e neste caso o potencial efetivo $U_{eff}(r)$ se reduz a $U(r)$, pois o momento angular $c = 0$. Observe que a dinâmica da partícula sobre o eixo- x é dada pelo sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= V'(x), \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde $H = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ é constante ao longo das soluções de (3.33)

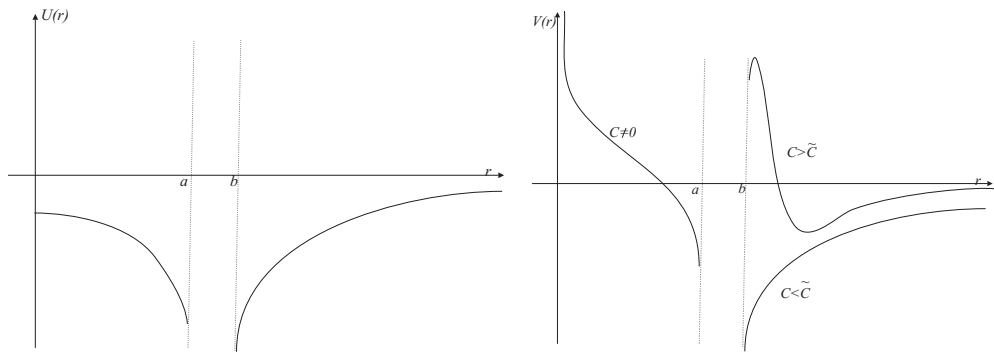


Figura 3.4: O potencial efetivo para diferentes valores do momento angular c , em ambos os casos: região interna e externa ao anel circular. *Esquerda:* O potencial efetivo para momento angular $c = 0$ e neste caso coincide com o potencial $U(x)$. *Direita:* O potencial efetivo para momento angular $c \neq 0$ e na região exterior ao anel representamos o potencial para diferentes valores do momento angular c

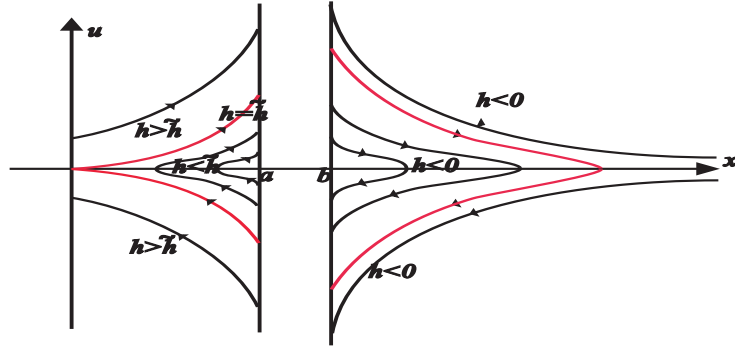


Figura 3.5: Retrato de fase do anel homogêneo, com momento angular $c = 0$. Aqui $\tilde{h} = V(0)$

Proposição 3.2.3. *Assuma que $c = 0$. A Figura 3.5 mostra o retrato de fase nesta caso. Além disso, se $x(t)$ tende a a (ou b) quando $t \rightarrow t^*$, então t^* é um número real.*

Demonstração: Da relação de energia $\dot{x} = \pm\sqrt{2(h - V(x))}$ e pelos Lemas 3.2.4 e 3.2.5, $V(x)$ é limitado na região exterior e interior do anel circular. ■

Observação 3.2.5. *Da Figura 3.5 podemos observar os diferentes movimentos da partícula quando $c = 0$. Por exemplo no interior do anel temos órbitas que tendem ao equilíbrio quando $t \rightarrow -\infty$ e tendem a a quando $t \rightarrow \omega_+ < \infty$. Também existem soluções que começam e terminam na anel circular. Na região exterior existem soluções que começam no anel e escapam ao infinito com velocidade nula (órbitas parabólicas).*

Observação 3.2.6. *No caso do problema do disco circular, a dinâmica no eixo- x é como no anel na região exterior ao anel*

3.2.3 Caso do momento angular c não nulo

Consideremos o caso em que as soluções tem agora momento angular não nulo. Neste caso as soluções satisfazem (3.6). A dinâmica no interior do anel homogêneo com $c \neq 0$, para energia fixa h , é dada pela Figura 3.6. Temos o seguinte resultado:

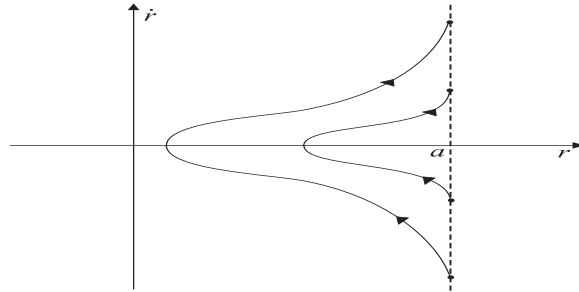


Figura 3.6: Retrato de fase do anel homogêneo com momento angular $c \neq 0$ na região interior ao anel circular.

Proposição 3.2.4. *Assuma que $c \neq 0$. A Figura 3.6 mostra o retrato de fase. Além disso, a partícula tende ao anel em ambas as direções (passado e futuro) em tempo finito.*

Demonstração: A prova é similar a Proposição 3.2.3. ■

Agora, vamos assumir que a partícula no exterior do anel circular com momento angular $0 < c < 1$ (veja Teorema 3.2.1). Fixando a energia h , nós obtemos o retrato de fase no exterior do anel, exatamente como na Figura 3.5. Neste caso a dinâmica coincide com a dinâmica no interior quando $c = 0$. Para $c > \tilde{c}$ (veja Teorema 3.2.1) temos uma solução circular estável e uma solução circular instável correspondentes ao pontos de mínimo e máximo do potencial efetivo.

Nas Figura 3.7 abaixo representamos o potencial efetivo na região exterior ao anel, para o caso em que existem um ponto de máximo e de mínimo e em uma vizinhança de cada um destes pontos e na Figura 3.8 o retrato de fase na vizinhanças de tais pontos.

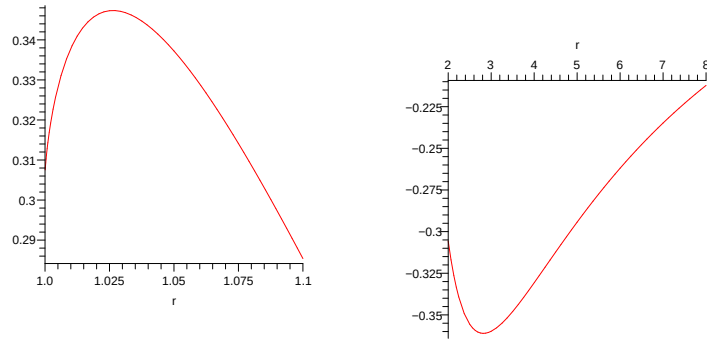


Figura 3.7: O potencial efetivo para valor do momento angular $c = 2,5$ para ao anel circular de raio interno $a = 0,8$, raio externo $b = 1$ e massa unitária. *Esquerda:* O potencial efetivo em uma vizinhança do ponto de máximo. *Direita:* O potencial efetivo em uma vizinhança do ponto de mínimo.

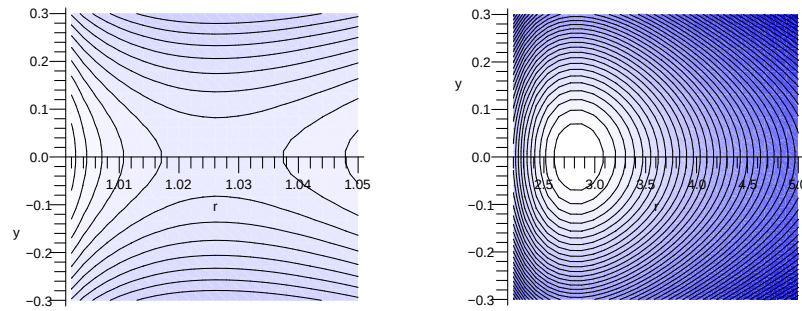


Figura 3.8: Retrato de fase do problema planar do anel com momento angular $c = 2,5$, de raio interno $a = 0,8$, raio externo $b = 1$ e massa unitária. *Esquerda:* Fluxo em uma vizinhança do ponto de máximo do potencial efetivo. *Direita:* Fluxo em uma vizinhança do ponto de mínimo do potencial efetivo

Capítulo 4

Singularidades

Neste capítulo vamos discutir sobre as singularidades do problema do anel ou disco circular homogêneo. Este é uma questão muito importante em problemas de n -corpos. Nele relacionam-se as singularidades do fluxo com as singularidades do potencial. Começamos com algumas definições. Se $(q_0, p_0) \in \mathbb{R}^3/\mathcal{A} \times \mathbb{R}^3$ é uma condição inicial em $t = 0$ então pelo Teorema de Existência e Unicidade de Equações diferenciais Ordinárias nós temos uma única solução de (2.25), definida no intervalo maximal (ω_-, ω_+) . Se $\omega_+ < \infty$ (ou equivalentemente $\omega_- > -\infty$) então dizemos que a solução é singular e tem uma singularidade em ω_+ (respectivamente ω_-).

Definição 4.0.1. *Suponhamos que $\mathbf{q}(t)$ solução de (2.24) tem uma singularidade em ω^+ (ou ω^-). Então a singularidade é chamada de singularidade de colisão ou singularidade devida a uma colisão se existe $\mathbf{q}^* \in \mathcal{A}$ (ou $\mathbf{q}^* \in \mathcal{D}$) tal que $\mathbf{q}(t) \rightarrow \mathbf{q}^*$ quando $t \rightarrow \omega_+$ (ou $t \rightarrow \omega_-$). Caso contrário, a singularidade é chamada uma singularidade sem colisão.*

Para provar os resultados desejados, vamos usar a seguinte proposição, a qual foi provada em [5].

Proposição 4.0.5. *Seja $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Seja $\mathbf{q}(t)$, $t \in (\omega_-, \omega_+)$, uma solução de $\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q})$ tal que existe:*

- 1) $v_0, v_1 \in \mathbb{R}$, $v_0 < v_1$, com $\text{dist}(V^{-1}(v_0), V^{-1}(v_1)) > 0$,
- 2) $t_1 < s_1 < t_2 < s_2 \dots$, $t_i, s_i \in (\omega_-, \omega_+)$, $i \in \mathbb{N}$, satisfazendo

$$V(\mathbf{q}(t_i)) = v_0$$

$$V(\mathbf{q}(s_i)) = v_1$$

Então $\omega_+ = +\infty$.

Como antes vamos assumir que o anel circular homogêneo $\mathcal{A}$ está centrado na origem, e contido no plano equatorial, e tem raio externo $b = 1$ e raio interno a , $0 < a < 1$. Também vamos nos restringir ao estudo das singularidades no caso planar, ou seja a partícula está restrita ao plano- (x, y) .

Teorema 4.0.2. *Seja $\mathcal{A}$ o anel circular homogêneo de massa M , centrado na origem e contido no plano equatorial de $\mathbb{R}^3$ e V o potencial induzido por $\mathcal{A}$. Seja $\mathbf{q}(t)$ uma solução de $\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q})$, definida no intervalo maximal (ω_-, ω_+) . Se $\omega_+ < +\infty$, então $\lim_{t \rightarrow \omega_+} \text{dist}(\mathbf{q}(t), \mathcal{A}) = 0$. Também, se $\omega_- > -\infty$, então*

$$\lim_{t \rightarrow \omega_-} \text{dist}(\mathbf{q}(t), \mathcal{A}) = 0.$$

Antes de provar o teorema provamos alguns resultados auxiliares. como estamos no plano- (x, y) podemos introduzir coordenadas polares (r, φ) como na seção 3.2 do capítulo anterior e como foi verificado ali, o problema é conservativo, assim $V(\mathbf{q})$ só depende de $r = \|\mathbf{q}\|$, por este motivo usaremos a notação $U(r) = V(\mathbf{q})$.

Para provar o teorema acima usaremos os seguintes lemas

Lema 4.0.7. *Seja $\{\mathbf{q}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{A}$. Então $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mathbf{q}_n) = 0$ se, e somente se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{q}_n\| = +\infty$.*

Demonstração: Suponha que $\|\mathbf{q}_n\| \rightarrow \infty$. Para todo $u \in \mathcal{A}$, temos que $a \leq u \leq 1$. Assim para $\|\mathbf{q}_n\| > b$ e $u \in \mathcal{A}$,

$$\|\mathbf{q}_n - u\| \geq |\|\mathbf{q}_n\| - \|u\|| \geq \|\mathbf{q}_n\| - \|u\| \geq \|\mathbf{q}_n\| - 1.$$

Logo

$$0 \leq -V(\mathbf{q}_n) = \int_{\mathcal{A}} \frac{\lambda}{\|\mathbf{q}_n - u\|} du \leq \int_a \frac{\lambda}{\|\mathbf{q}_n\| - 1} du = \frac{M}{\|\mathbf{q}_n\| - 1}.$$

Segue que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mathbf{q}_n) = 0$.

Reciprocamente suponha que $V(\mathbf{q}_n) \rightarrow 0$, temos que $\frac{1}{\|\mathbf{q}_n - u\|} \geq \frac{1}{\|\mathbf{q}_n\| + 1}$, donde,

$$0 \leq \frac{1}{\|\mathbf{q}_n\| + 1} = \int_{\mathcal{A}} \frac{\lambda}{\|\mathbf{q}_n\| + 1} \leq \int_a \frac{\lambda}{\|\mathbf{q}_n - u\|} du = -V(\mathbf{q}_n).$$

Portanto $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{q}_n\| = +\infty$. ■

Definimos a constante real $C_\mu^* = \min \left\{ \frac{4M}{\pi(2-\mu)\mu} [a - E(a)], \frac{4M}{\pi(2-\mu)\mu} [1 - E(a) + (1 - a^2)K(a)] \right\}$ depende das espessura $\mu = 1 - a$ do anel. Segue dos Lemas 3.2.4 e 3.2.5 que a imagem da função $U(r)$ está no intervalo $(0, C_\mu^*)$. Assim dado $k \in \mathbb{R}$, $C_\mu^* < k < 0$. Seja $\{\mathbf{q}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{A}$ e procedendo como nas demonstrações dos lemas 3.2.4 e 3.2.5 podemos mostrar que se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(\mathbf{q}_n, \mathcal{A}) = 0$ então $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mathbf{q}_n)$ existe e seu valor é $C_\mu^i = \frac{4M}{\pi(2-\mu)\mu} [a - E(a)]$ no interior do anel e $C_\mu^e = \frac{4M}{\pi(2-\mu)\mu} [1 - E(a) + (1 - a^2)K(a)]$ no exterior do anel. Desta forma obtemos que $U(\{k\})$ é fechado para todo $k \in (0, C_\mu^*)$.

Agora podemos provar o Teorema 4.0.2:

Demonstração: (**Teorema 4.0.2**) Seja $k \in \mathbb{R}$, $C_\mu^* < c < 0$ então segue do Lema 4.0.7 que $U^{-1}(k)$ é limitado e com o parágrafo anterior, podemos concluir que $U^{-1}(k)$ é fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{A}$, logo em um conjunto compacto para todo $k \in (C_\mu^*, 0)$.

Agora, seja $\mathbf{q}(t)$, $t \in (\omega_-, \omega_+)$, $\omega_+ < +\infty$, uma solução maximal de $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{q})$. Então $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} V(\mathbf{q}(t))$ existe, caso contrário, pela continuidade de V existiriam seqüências $(t_n), (s_n)$ tal que $t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < \dots, t_i, s_i \in (\omega_-, \omega_+)$, com $V(\mathbf{q}(t_i)) \rightarrow v_0$, $V(\mathbf{q}(s_i)) \rightarrow v_1$, $v_0 < v_1$. Como $V^{-1}(v_0)$ e $V^{-1}(v_1)$ são não vazios, disjuntos e compactos, temos que $\text{dist}(V^{-1}(v_0), V^{-1}(v_1)) > 0$. Segue da Proposição 4.0.5, que deveríamos ter $\omega_+ = +\infty$, o que é uma contradição.

Mostramos o resultado para o caso em que a partícula está no exterior do anel e o caso em que a partícula está no interior segue de maneira análoga. Desde que $\text{Im}(V) \subset (C_\mu^e, 0)$, segue que $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} V(\mathbf{q}(t))$

ou é 0, ou é um número v^* , $C_\mu^e < v^* \neq 0$, ou é igual a C_μ^e . Provaremos que as duas primeiras possibilidades não podem ocorrer, de modo que $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} V(\mathbf{q}(t)) = C_\mu^e$, e desta forma pelo Lema 4.0.7, teríamos

$\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \text{dist}(\mathbf{q}(t), \mathcal{A}) = 0$, que prova o teorema.

Se $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} V(\mathbf{q}(t)) = 0$, então existe t_0 tal que para todo $t > t_0$, $v_0 < V(\mathbf{q}(t)) < 0$, com $v_0 = V(\mathbf{q}(t_0))$.

Segue do Lema 4.0.7, que $\|\mathbf{q}(t)\| \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow \omega_+^-$. Desde que

$$h = V(\mathbf{q}(t)) + \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2, \quad t \in (t_0, \omega_+), \quad h \text{ constante de energia},$$

então $\|\dot{\mathbf{q}}(t)\| < \sqrt{2(h - v_0)}$, para todo $t \in (t_0, \omega_+)$, ou seja, a velocidade é limitada neste intervalo.

Temos também que

$$\int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{q}}(t)\| dt \geq \|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}(t_0)\| \geq \text{dist}(\mathbf{q}(t), V^{-1}(v_0)) =: d_t$$

Assim, $d_t \leq (t - t_0)\sqrt{2(h - v_0)}$, e então,

$$t_0 + \frac{d_t}{\sqrt{2(h - v_0)}} \leq t, \quad \text{para todo } t \in (t_0, \omega_+).$$

Desde que $V^{-1}(v_0)$ é compacto, existe $r > 0$ tal que $V^{-1}(v_0) \subset B(0, r)$ e como $\|\dot{\mathbf{q}}(t)\| \rightarrow +\infty$, dado $n > 0$, existe t_n tal que para todo, $t, \omega_+ > t > t_n$, $\mathbf{q}(t) \notin B(0, n)$. Isto implica que, $d_t = \text{dist}(\mathbf{q}(t), V^{-1}(v_0)) > n - r$, para todo $\omega_+ > t > t_n$. Em particular, $d_{t_n} \geq n - r$, e para $\omega_+ > t_n > t_0$, nós temos $\omega_+ \geq t_n \geq t_0 + \frac{n-r}{\sqrt{2(h-v_0)}}$.

Assim, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(t_0 + \frac{n-r}{\sqrt{2(h-v_0)}} \right) = +\infty$, e concluímos que $\omega_+ = +\infty$, o que é uma contradição.

Suponhamos finalmente que $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} V(\mathbf{q}(t)) = v^*$, com $v^* \in (C_\mu^e, 0)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe t_ε tal que para todo $t > t_\varepsilon$, $V(\mathbf{q}(t)) \in (v^* - \varepsilon, v^* + \varepsilon)$. Seja $v_0 = v^* - \varepsilon$, $v_1 = v^* + \varepsilon$; nós podemos supor que $0 < \varepsilon < |v^*|$, assim $v_1 < 0$. Claramente o conjunto $V^{-1}([v_0, v_1])$ é não vazio e desde que V é contínua, ele é fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}$. Além disso, pelo Lema ??, Este conjunto é fechado em $\mathbb{R}^2$ e pelo Lema 4.0.7 é limitado, já que $v_1 < 0$. Portanto $V^{-1}([v_0, v_1])$ é compacto e $\mathbf{q}(t) \in V^{-1}([v_0, v_1])$, para todo $t > t_\varepsilon$.

Por outro lado, da equação de energia, nós temos $\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2 = 2(h - V(\mathbf{q}(t)))$, e portanto para todo $t > t_\varepsilon$, temos $\|\dot{\mathbf{q}}(t)\| \leq \sqrt{2(h - v_0)} = c_2$.

Segue-se que a solução maximal $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$, $t \in (\omega_-, \omega_+)$, do sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\nabla V(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

está contido no compacto $V^{-1}([v_0, v_1]) \times \overline{B(0, c_2)}$, para todo t , $t_\varepsilon < t < \omega_+$. Segue da teoria clássica de Equações Diferenciais Ordinárias que $\omega_+ = +\infty$, o que é uma contradição. Então provamos o teorema. ■

Corolário 4.0.2. *Seja $\mathcal{D}$ o disco circular homogêneo de massa M , centrado na origem e contido no plano equatorial de $\mathbb{R}^3$ e V o potencial induzido por $\mathcal{D}$. Seja $\mathbf{q}(t)$ uma solução de $\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q})$ (problema planar), definida no intervalo maximal (ω_-, ω_+) . Se $\omega_+ < +\infty$, então $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \text{dist}(\mathbf{q}(t), \mathcal{A}) = 0$. Também, se $\omega_- > -\infty$, então $\lim_{t \rightarrow \omega_-^+} \text{dist}(\mathbf{q}(t), \mathcal{A}) = 0$.*

Demonstração: Segue do Teorema 4.0.2 acima, considerando apenas a região exterior ao disco e fazendo $a = 0$. ■

A princípio, $\mathbf{q}(t)$ poderia se aproximar do anel ou disco de várias formas, sem necessariamente tender a um ponto específico do anel. Se $\mathbf{q}(t)$ aproxima-se de um ponto $\mathbf{q}_\omega$ do anel ou disco quando $t \rightarrow \omega_+$ (ou $t \rightarrow \omega_-$) isto significa que a partícula deve colidir com o anel circular $\mathcal{A}$. Provaremos o seguinte resultado .

Teorema 4.0.3. *No problema do anel circular homogêneo ou disco circular homogêneo no plano equatorial, todas as singularidades são devidas a colisões.*

Demonstração: Provamos para o caso do anel e para o caso do disco segue analogamente. Seja $\mathbf{q}(t)$, $t \in (\omega_-, \omega_+)$, $\omega_+ < +\infty$, uma solução maximal do sistema de equações $\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q})$. Pelo Teorema 4.0.2, temos que $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \text{dist}(\mathbf{q}(t), \mathcal{A}) = 0$. Para provar que $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^* \in \mathcal{A}$, escrevemos este sistema em coordenadas polares (r, φ) . Obtemos

$$\ddot{r} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{\partial U}{\partial r}$$

com $\dot{\varphi} = \frac{c}{r(t)^2}$, onde c é constante e $U(r) = V(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Desde que o anel em coordenadas polares é dado por $\mathcal{A} = \{(r, \varphi), \varphi \in \mathbb{R}, a < r < 1\}$, temos que mostrar, que $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^* \in \mathcal{A}$ que é equivalente a mostrar que $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} r(t) = a$ no caso da região interior ao anel ou $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} r(t) = 1$ no caso da região exterior ao anel e $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \varphi(t) = \varphi_0$, para algum φ_0 . Os dois primeiros limites seguem do fato que $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \text{dist}(\mathbf{q}(t), \mathcal{A}) = 0$. Vamos provar agora que $\lim_{t \rightarrow \omega_+^-} \varphi(t) = \varphi_0$.

Se $c = 0$, então $\varphi(t)$ é constante, e não temos nada a provar.

Suponha que $c > 0$, logo $\varphi(t)$ é uma função crescente. Então para provar que o limite $\varphi(t)$ existe é suficiente provar que $\varphi(t)$ é limitado superiormente, para t em uma vizinhança de ω_+ .

Desde que $r(t) \rightarrow 1$ (o caso em que $r(t) \rightarrow a$, segue analogamente), existe t_0 tal que, $t > t_0$, $r(t) > \frac{1}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{t_0}^t \frac{c}{r(s)^2} ds + \varphi(t_0) \leq 4 \int_{t_0}^t \frac{c}{1} ds + \varphi(t_0) \\ &\leq 4c(\omega_+ - t_0) + \varphi(t_0) < +\infty \end{aligned}$$

para todo $t \in (t_0, \omega_+)$. Portanto, o limite de $\varphi(t)$, quando $t \rightarrow \omega_+$, existe, e a demonstração do teorema está concluída. ■

Observação 4.0.7. *Não podemos aplicar os mesmos argumentos descritas acima, para concluir o mesmo resultado no caso espacial, já que neste caso não conseguimos provar a limitação do potencial e também não podemos obter uma expressão fechada para função potencial.*

Capítulo 5

Soluções periódicas de perturbações do problema de Kepler

5.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo mostrar analiticamente a existência de uma grande variedade de famílias de soluções periódicas simétricas próximas a soluções circulares ou de soluções elípticas de sistemas analíticos que são perturbações simétricas do problema de Kepler. Tal estudo surgiu motivado pelo problema de atração de um partícula infinitesimal por um corpo maciço, podendo ser, um anel, ou um disco e também um fio circular, todos sobre um plano e com distribuição de massa homogênea. Nosso estudo é o suficientemente geral que nos permite obter órbitas periódicas tanto no caso espacial como no planar.

Mais precisamente, nossa análise objetiva estudar separadamente o sistema Hamiltoniano (na verdade, sistema mecânico) associado à função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2 - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|} - \epsilon^\alpha W_1(\mathbf{q}, \epsilon), \quad (5.1)$$

com $\mathbf{q} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{K}$ onde $\mathcal{K}$ é um compacto em $\mathbb{R}^3$ que contém a origem, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha > 0$ e W_1 função analítica, e em segundo caso o sistema Hamiltoniano com função Hamiltoniana

$$K = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - (xp_y - yp_x) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \epsilon^\alpha W_2(x, y, z, \epsilon). \quad (5.2)$$

com $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{K}$ onde $\mathcal{K}$ é como acima, $(p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^3$ e W_2 função analítica. Note que neste caso o problema já não é mais mecânico.

As questões que nós colocamos na obtenção de soluções periódicas simétricas continuadas são:

- Quais são as restrições que devem ser impostas sobre as funções perturbadoras W_1 e/ou W_2 para poder continuar analiticamente uma órbita circular ou elíptica do problema de Kepler ?
- É possível obter órbitas periódicas do sistema perturbado com o mesmo período das órbitas periódicas do sistema não perturbado ?

- Existe alguma restrição naquelas órbitas circulares e/ou elípticas keplerianas que podem ser continuadas ? Por exemplo, existe alguma restrição no período de tais órbitas ? Existe alguma restrição na inclinação do plano orbital das órbitas keplerianas que podem ser continuadas ?
- Quais são as principais diferenças nos problemas definidos por (5.1) e (5.2) ?
- Assumindo que o problema planar (i.e., o fluxo é invariante em algum plano coordenado) em cada caso tem sentido (i.e., em (5.1) e (5.2)), quanto dos resultados do caso espacial são válidos no caso planar ou eles podem ser melhorados ?

É claro que se o potencial W_1 definido em (5.1) é invariante pelo grupo das rotações em torno do eixo z , então via uma transformação simplética no tempo a função Hamiltoniana associada a (5.1) dá origem a um problema com função Hamiltoniana como em (5.2).

Considerando os elementos orbitais como: a semi-eixo maior; e excentricidade; i inclinação da órbita; Ω longitude do nodo ascende; ω argumento do pericentro; θ que dá a posição da partícula na órbita o fluxo kepleriano é dado por $\varphi(t, a, e, i, \omega, \Omega, \theta) = (a, e, i, \omega, \Omega, \theta(t) + \theta^*)$. Logo,

$$D_{a,e,i,\omega,\Omega,\theta}\varphi(t, a, e, i, \omega, \Omega, \theta) - I = \text{diag}(0, 0, 0, 0, 0, \theta^*), \text{ para algum } \theta^* \in \mathbb{R}$$

Disto resulta que a matriz jacobiana acima é altamente degenerada o que inviabiliza a utilização imediata do Método da Continuação de Poincaré [32]. Por este motivo uma alternativa para poder prolongar órbitas periódicas keplerianas é a utilização de “boas coordenadas” e impor condições de simetrias no sistema, com o objetivo de evitar a degenerescência anterior. Existe um velho ditado em Mecânica Celeste que diz “não existe um bom sistema de coordenadas”. De fato, a literatura clássica e moderna apresentam vários tipos de coordenadas (veja por exemplo: [9], [25], [27], [40], [41]). Existem dois conjuntos de coordenadas os quais tornam o problema de Kepler particularmente simples, e assim elas simplificam os argumentos de perturbação. Estas coordenadas são os elementos de Delaunay, os quais são válidos para órbitas elípticas, e os elementos de Poincaré-Delaunay, os quais são válidos para órbitas circulares (principalmente) (veja por exemplo, [9], [41]). Além disso, também existem algumas modificações de tais elementos obtidas via funções geradoras convenientes.

O método desenvolvido aqui usa simples fatos e construções geométricas, mas os detalhes técnicos algumas vezes são um pouco tediosos, porém fazemos questão de levar até o leitor a maioria dos detalhes nas diversas situações analisadas, com o objetivo de deixar claro as diferenças substanciais que surgem na prova dos diferentes resultados. Para obter nossos principais resultados vamos assumindo no decorrer do texto certas condições de simetria nas funções perturbadoras W_1 e W_2 , logo usamos a caracterização geométrica das órbitas periódicas com simetrias (em coordenadas de Delaunay e Poincaré-Delaunay), em seguida baseado no método geral da Continuação Analítica de Poincaré (descrito em [32]) obtemos nossos resultados. Após feita uma cuidadosa revisão bibliográfica, podemos inferir que um detalhado estudo como o realizado neste capítulo não tem sido feito.

Existem na literatura alguns trabalhos que provam a existência de órbitas periódicas simétricas de perturbações do problema de Kepler, citamos na continuação alguns deles e fazemos uma breve descrição e mostramos a limitação dos resultados. Para o sistema mecânico associado a função Hamiltoniana (5.1) inicialmente, começamos citando o trabalho de Cabral e Vidal [14], nele considera-se o sistema mecânico definido pelo potencial (no espaço) $U(\mathbf{q}, \epsilon) = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|} + \epsilon^2 \mathbf{f}(\mathbf{q}, \epsilon)$, com $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ aqui $\mathbf{f}$ é uma função real analítica, invariante por rotações em torno do eixo z ($\mathcal{G}$ denotará tal grupo) e por reflexões com respeito ao plano xy (logo também será simétrico com respeito ao origem). Aqui continuam-se órbitas circulares do problema de Kepler com o mesmo período da órbita circular do problema de Kepler, mas a órbita prolongada será periódica no espaço reduzido, definido por M/G com $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{R}^3$. Logo, tal órbita nem sempre será periódica no espaço físico. Nos argumentos usados na prova deste resultado são essências duas integrais primeiras (energia e terceira componente do momento angular) além de definir convenientemente a equação de periodicidade. Vidal em [36] trata do caso planar (não

considerado no caso anterior) e sob as mesmas condições sobre a perturbação $\mathbf{f}$ consegue continuar qualquer órbita circular de Kepler, novamente com período igual ao da órbita circular. Em [38] consegue estender os dois resultados anteriores agora para qualquer perturbação de um potencial gravitacional (isto é, o potencial do problema não perturbado possui a forma $1/\|\mathbf{q}\|^a$). Azevêdo na sua tese de doutorado [5] ou em [6] também considerou o problema de existência de soluções periódicas simétricas de perturbações simétricas de problemas gravitacionais, mas só foi possível obter resultados no caso planar e para o caso somente de continuação de órbitas circulares. No caso kepleriano, admite-se que a perturbação é invariante com respeito a reflexões em torno do eixo x e em torno do eixo y . Há outros fatores restritivo neste resultado, sendo que um deles está relacionado ao fato de que as condições iniciais que dão origem a órbitas periódicas do sistema perturbado, próxima da órbita circular, fixam posição inicial como sendo a mesma da órbita circular kepleriana e só mexe na velocidade inicial, sendo ela paralela a velocidade inicial da órbita circular. O outro ponto, é que só pode-se garantir que o período da órbita prolongada é próximo ao da órbita circular. Outro método usado na obtenção de órbitas periódicas é via o método variacional, os seguintes trabalhos estudam a existência de soluções periódicas para potenciais gravitacionais, [3], [8]. Estes trabalhos concernem com a multiplicidade e a existência de órbitas periódicas sem colisão com energia h fixa de sistemas conservativos da forma $\ddot{\mathbf{q}} + \nabla V_\epsilon(\mathbf{q}) = 0$, $\frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + V_\epsilon(\mathbf{q}) = h$, onde $V_\epsilon : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 da forma $V_\epsilon(\mathbf{x}) = -\|\mathbf{x}\|^{-\gamma} + \epsilon U(\mathbf{x})$ sendo $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e par. As demonstrações destes resultados estão baseados em argumentos envolvendo teoria da categoria. Tais resultados são consequência da existência de minimizantes da função ação associada ao Lagrangiano, e portanto não nos dão informações relevantes sobre a geometria das órbitas obtidas.

Por outro lado, para sistemas Hamiltonianos definidos pela Hamiltoniano em (5.2) não encontramos na literatura trabalhos que apresentassem perturbações arbitrárias. Mas existem trabalhos a este respeito quando o problema considerado é o problema restrito circular de três corpos. Para obter um Hamiltoniano desta forma, basta considerar coordenadas giratórias convenientes no problema restrito circular, de modo que os primários estejam fixados nestas coordenadas. Por tanto, nossos resultados generalizam aqueles obtidos para este caso concreto. Algumas referências onde tratam este problema são [25], [26], [27], [41].

5.2 Continuação de soluções periódicas de perturbações do problema de kepler em coordenadas cartesianas

Consideremos a seguinte função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \epsilon^\alpha W_1(x, y, z, \epsilon), \quad (5.3)$$

com a notação com $\mathbf{q} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{K}$ onde $\mathcal{K}$ é um compacto em $\mathbb{R}^3$ que contém a origem, e $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ o momento conjugado. Iremos assumir a seguinte hipótese sobre a função W_1 .

Hipótese 5.2.1. *A função W_1 é uma função analítica em $\mathbf{q}$ e ϵ .*

Desde que W_1 é analítica em ϵ , escrevemos W_1 em série de Taylor em torno de $\epsilon = 0$.

$$W_1(\mathbf{q}, \epsilon) = W_1(\mathbf{q}, 0) + \epsilon \frac{\partial W_1(\mathbf{q}, 0)}{\partial \epsilon} + \epsilon^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_1(\mathbf{q}, 0)}{\partial \epsilon^2} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (5.4)$$

e a função Hamiltoniana (5.3) pode ser reescrita como

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \epsilon^{\alpha+i} H_1(\mathbf{q}) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}), \quad (5.5)$$

onde

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$H_1 = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i W_1(\mathbf{q}, 0)}{\partial \epsilon^i} \neq 0,$$

sendo que i é o primeiro natural com esta propriedade. O sistema Hamiltoniano associado a função Hamiltoniana (5.3) é da forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} + \epsilon^\alpha \nabla W_1(\mathbf{q}, \epsilon),\end{aligned}\tag{5.6}$$

o qual corresponde a um sistema mecânico, i.e.,

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} + \epsilon^\alpha \nabla W_1(\mathbf{q}, \epsilon).\tag{5.7}$$

O problema (5.6) ou equivalente (5.7) consiste em uma perturbação analítica do problema de Kepler. O problema de Kepler é completamente integrável e são conhecidas as soluções periódicas circulares e elípticas planares. Neste capítulo queremos usar o método de continuação analítica, para continuar soluções circulares e elípticas do problema de Kepler. Queremos precisamente determinar sobre que condições a função perturbadora W_1 admite a continuação de soluções.

5.3 O problema nas variáveis de Delaunay e Poincaré-Delaunay

Faremos aqui uma escolha conveniente de coordenadas. Primeiramente, consideremos as coordenadas de Delaunay, definidas por

$$\begin{aligned}Q_1 &= l, & P_1 &= L, \\ Q_2 &= g, & P_2 &= G, \\ Q_3 &= h, & P_3 &= H.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Os elementos de Delaunay (l, g, h, L, G, H) são coordenadas em um domínio elíptico do problema de Kepler. O domínio elíptico é um aberto em $\mathbb{R}^6$ no qual estão as soluções do problema de Kepler. Os elementos são: l anomalia média, g o argumento do pericentro medido a partir do nodo ascendente, h a longitude do nodo ascendente medida a partir do eixo x , $L = a^{1/2}$ semi-eixo maior da elipse, $G = [a(1 - e^2)]^{1/2}$ é o momento angular, $H = [a(1 - e^2)]^{1/2} \cos i$ é a componente do momento angular na direção do eixo z e i é a inclinação do plano orbital. As variáveis l, g e h são variáveis angulares módulo 2π , e L, G e H são variáveis radiais.

Lema 5.3.1. *A função Hamiltoniana do problema de Kepler $H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|}$ nos elementos de Delaunay, é dada por*

$$H_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = -\frac{1}{2L^2}.\tag{5.9}$$

Demonstração: Sabemos que

$$H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|} = h$$

é a função hamiltoniana do problema de Kepler espacial. Utilizando a mudança de coordenadas esféricas polares r, ϑ, φ

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

com seus momentos conjugados

$$p_r = \dot{r} \quad p_\vartheta = r^2 \dot{\vartheta} \quad p_\varphi = r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi},\tag{5.10}$$

da função Hamiltoniana H_0 obtemos

$$H_0 = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\vartheta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} p_\varphi^2 \right) - \frac{1}{r} = h. \quad (5.11)$$

O vetor momento angular $\mathbf{G}$ nestas coordenadas é dado por

$$\mathbf{G} = (-r^2 \dot{\vartheta} \sin \varphi - r^2 \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi, r^2 \dot{\vartheta} \cos \phi - r^2 \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \phi, r^2 \dot{\phi} \sin^2 \vartheta),$$

e usando (5.10) segue que

$$\|\mathbf{G}\| = G = \sqrt{(r^2 \dot{\vartheta})^2 + (r^2 \sin \vartheta \dot{\varphi})^2} = \sqrt{p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}}.$$

Desta forma, temos que (5.11) pode ser escrito da seguinte maneira

$$\frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r} = h.$$

Portanto, $p_r^2 = 2h + \frac{2}{r} - \frac{G^2}{r^2}$ e desde que $\mathbf{a} = -\frac{1}{2h}$ e $L = \sqrt{\mathbf{a}}$ tem-se que

$$H_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{L^2} + \frac{2}{r} \right) - \frac{1}{r} = -\frac{1}{2L^2}.$$

■

Usando o Lema 5.3.1, obtemos que a função Hamiltoniana (5.5) nas variáveis de Delaunay (5.8), assume a forma

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon) = -\frac{1}{2P_1^2} - \epsilon^{\alpha+i} H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}), \quad (5.12)$$

onde

$$H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \frac{1}{i} \frac{\partial^i W_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, 0)}{\partial \epsilon^i}, \quad (5.13)$$

sendo que i é o primeiro natural tal que $\frac{\partial^i W_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, 0)}{\partial \epsilon^i} \neq 0$. As equações de movimento correspondentes a função Hamiltoniana (5.12) nas coordenadas de Delaunay (5.8) são

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) \\ \dot{Q}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) \\ \dot{Q}_3 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_3 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Nas equações (5.14) deixamos de forma implícita os termos de ordem $\epsilon^{\alpha+i}$ mas eles serão explicitados quando for necessário usar suas expressões.

Desde que as coordenadas de Delaunay não são válidas em uma vizinhança de uma órbita circular do problema de Kepler, não podemos fazer uso destas para continuar soluções circulares. Porém é possível obter coordenadas apropriadas, a partir dos elementos orbitais. Tais coordenadas são denominadas coordenadas de Poincaré-Delaunay ou as vezes descritas como elementos de Poincaré como por exemplo no trabalho de [16]. Usaremos algumas escolhas das coordenadas de Poincaré-Delaunay que aparecem

frequentemente na literatura como em [9] ou em [41]. Uma escolha destas coordenadas que denotaremos por $(PD - 1)$ é

$$\begin{aligned} Q_1 &= l + g, & P_1 &= L, \\ Q_2 &= -\sqrt{2(L - G)} \sin(g), & P_2 &= \sqrt{2(L - G)} \cos(g), \\ Q_3 &= h, & P_3 &= H. \end{aligned} \quad (PD - 1) \quad (5.15)$$

com $l, g, h, L, G,$ e H são os elementos orbitais já definidos acima.

Estas variáveis são válidas em uma vizinhança de uma solução circular do problema de Kepler.

Novamente usando o Lema 5.3.1 obtemos que a função Hamiltoniana (5.5) (variáveis originais) nas variáveis de Poincaré-Delaunay $(PD - 1)$ é dada por

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon) = -\frac{1}{2P_1^2} + \epsilon^{\alpha+i} H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}), \quad (5.16)$$

onde H_1 é como em (6.21) e as equações de movimento correspondentes nas coordenadas de Poincaré-Delaunay $(PD - 1)$ são

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) \\ \dot{Q}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) \\ \dot{Q}_3 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_3 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Observação 5.3.1. *A princípio os sistemas de equações (5.14) e (5.17) parecem ser idênticos. Porém escrevemos explicitamente somente os termos de ordem zero em ϵ (que corresponde ao problema de Kepler) e deixamos implícitos os termos de ordem $\mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ que é onde está a diferença substancial dos sistemas nas duas diferentes coordenadas.*

Uma segunda escolha das coordenadas de Poincaré-Delaunay que também aparece na literatura por exemplo pode ser encontrada em [9] e [41], a qual denotaremos por $(PD - 2)$ é definida pelas seguintes equações

$$\begin{aligned} Q_1 &= l + g + h, & P_1 &= L, \\ Q_2 &= -\sqrt{2(L - G)} \sin(g + h), & P_2 &= \sqrt{2(L - G)} \cos(g + h), \\ Q_3 &= -\sqrt{2(G - H)} \sin(h), & P_3 &= \sqrt{2(G - H)} \cos(h). \end{aligned} \quad (PD - 2) \quad (5.18)$$

onde os elementos l, g, h, L, G, H são definidos como antes e estas coordenadas também estão definidas em uma vizinhança de uma solução circular do problema de Kepler. A função Hamiltoniana (5.5) nas coordenadas $(PD - 2)$ é dada por

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon) = -\frac{1}{2P_1^2} + \epsilon^{\alpha+i} H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}), \quad (5.19)$$

e o sistema Hamiltoniano associado é dado por

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{1}{(P_1)^3} - 1 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) \\ \dot{Q}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) \\ \dot{Q}_3 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_3 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}). \end{aligned} \quad (5.20)$$

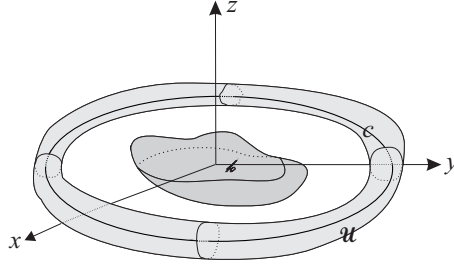


Figura 5.1: Órbita de Kepler e vizinhança $\mathcal{U}$ da órbita kepleriana suficientemente afastada do compacto $\mathcal{K}$.

Observação 5.3.2. As coordenadas de Poincaré-Delaunay $(PD-1)$ e $(PD-2)$ estão definidas em uma vizinhança de uma solução circular e também em uma vizinhança de uma solução elíptica do problema de Kepler. Uma solução circular ($e = 0$) ocorre quando $L = G$. Nas coordenadas de Poincaré-Delaunay $(PD-1)$ e $(PD-2)$ esta condição é expressa por $Q_2 = P_2 = 0$.

Observação 5.3.3. As coordenadas de Delaunay ou de Poincaré-Delaunay, como já dissemos estão definidas em vizinhanças de soluções elípticas e circulares do problema de Kepler. Para que de que não tenhamos problemas com singularidades nos sistemas (5.14), (5.17) e (5.20) vamos tomar a solução circular ou elíptica, bem como a vizinhança $\mathcal{U}$ das mesmas, de tal maneira que $\mathcal{U}$ não intersecte o compacto $\mathcal{K}$. Veja Figura 5.1.

No decorrer do texto, nesta seção, vamos usar a notação e a expressão para a solução da solução perturbada dada pelo lema abaixo.

Lema 5.3.2. Seja $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0) = (Q_1(t, \mathbf{Y}; 0), Q_2^{(0)}(t, \mathbf{Y}; 0), Q_3^{(0)}(t, \mathbf{Y}; 0), P_1^{(0)}(t, \mathbf{Y}; 0), P_2^{(0)}(t, \mathbf{Y}; 0), P_3^{(0)}(t, \mathbf{Y}; 0))$ solução do Problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}$. Então pela diferenciabilidade do fluxo a solução do problema perturbado $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = (Q_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon), Q_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon), Q_3(t, \mathbf{Y}; \epsilon), P_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon), P_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon), P_3(t, \mathbf{Y}; \epsilon))$ do sistema (5.14), (5.17) ou (5.20) com condição inicial $\mathbf{Y}$ será da forma

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= Q_1^{(0)}(t) + \epsilon^{\alpha+i} Q_1^{(1)}(t) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}), & P_1(t) &= P_1^{(0)}(t) + \epsilon^{\alpha+i} P_1^{(1)}(t) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}), \\ Q_2(t) &= Q_2^{(0)}(t) + \epsilon^{\alpha+i} Q_2^{(1)}(t) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}), & P_2(t) &= P_2^{(0)}(t) + \epsilon^{\alpha+i} P_2^{(1)}(t) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}), \\ Q_3(t) &= Q_3^{(0)}(t) + \epsilon^{\alpha+i} Q_3^{(1)}(t) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}), & P_3(t) &= P_3^{(0)}(t) + \epsilon^{\alpha+i} P_3^{(1)}(t) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}), \end{aligned} \quad (5.21)$$

com as expressões para $Q_j^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0)$ e $P_j^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0)$, $j = 1, 2, 3$ o dadas por

$$\begin{aligned} Q_j^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) &= \int_0^t \frac{\partial H_1}{\partial P_j}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) d\tau \\ P_j^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) &= \int_0^t \frac{\partial H_1}{\partial Q_j}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) d\tau. \end{aligned}$$

Demonstração: Segue diretamente do Apêndice A. ■

5.3.1 Simetrias

No estudo de obtenção de soluções periódicas do problema (5.6) ou equivalentemente (5.7) vamos admitir que a função Hamiltoniana (5.5) assim como as equações de movimento do problema sejam invariantes

por algumas simetrias afim de determinar soluções simétricas. Precisamente vamos considerar as reflexões anti-simplética em relação aos planos (x, z) e (y, z) e em relação ao eixo x . Denotaremos estas simetrias por

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 : (x, y, z, p_x, p_y, p_z) &\longrightarrow (x, -y, -z, -p_x, p_y, p_z) \\ \mathcal{S}_2 : (x, y, z, p_x, p_y, p_z) &\longrightarrow (-x, y, z, p_x, -p_y, -p_z) \\ \mathcal{S}_3 : (x, y, z, p_x, p_y, p_z) &\longrightarrow (x, -y, z, -p_x, p_y, -p_z).\end{aligned}\tag{5.22}$$

Estas simetrias serão consideradas reversíveis no tempo, de modo que se $(x(t), y(t), z(t), p_x(t), p_y(t), p_z(t))$ é uma solução, então também são soluções $(x(-t), -y(-t), -z(-t), -p_x(-t), p_y(-t), p_z(-t))$ (no caso em que ocorre a simetria $\mathcal{S}_1$), $(-x(-t), y(-t), z(-t), p_x(-t), -p_y(-t), -p_z(-t))$ (caso em que ocorre a simetria $\mathcal{S}_2$) e $(x(-t), -y(-t), z(-t), -p_x(-t), p_y(-t), -p_z(-t))$ (no caso em que ocorre a simetria $\mathcal{S}_3$). Os conjuntos fixos por estas simetrias são os sub-planos Langrangianos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= \{(x, 0, 0, 0, p_y, p_z); x, p_y, p_z \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{L}_2 &= \{(0, y, z, p_x, 0, 0); y, z, p_x \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{L}_3 &= \{(x, 0, z, 0, p_y, 0); x, z, p_y \in \mathbb{R}\},\end{aligned}\tag{5.23}$$

fixados pelas simetrias $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ e $\mathcal{S}_3$ respectivamente. Em nosso trabalho, vamos determinar soluções periódicas simétricas em relação a cada uma das simetrias $\mathcal{S}_i$ citadas acima, e denominaremos tal solução de *solução periódica $\mathcal{S}_i$ -simétrica* onde $i = 1, 2, 3$. Também, estamos interessados em obter soluções que são simultaneamente $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ simétricas ou simultaneamente $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$ simétricas. Tais soluções serão denominadas *soluções periódicas duplamente simétricas*.

Da teoria clássica de equações diferenciais, temos o seguinte resultado:

Proposição 5.3.1. *Assuma que a função W_1 é invariante pela simetria $\mathcal{S}_i$ e seja $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t), p_x(t), p_y(t), p_z(t))$ uma solução do problema (5.6) ou equivalente de (5.7). Se $\varphi(t)$ intercepta ortogonalmente o sub-plano $\mathcal{L}_i$ em $t = t_0$ e volta a interceptá-lo ortogonalmente em $t = t_0 + T/2$ então $\varphi(t)$ é uma solução T -periódica $\mathcal{S}_i$ -simétrica.*

Demonstração: A prova é bastante simples e consiste em construir adequadamente a solução conhecendo somente um pedaço dela. Dada $\varphi(t)$ definida em $[0, T/2]$ e $\mathcal{S}_i$ -simétrica, construímos a solução da seguinte forma

$$\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{if } t \in [0, T/2], \\ \hat{\varphi}(t) = \mathcal{S}_i \circ \varphi(t - T) & \text{if } t \in [T/2, T]. \end{cases}\tag{5.24}$$

Observe que a solução está bem definida pois $\varphi(0) = \hat{\varphi}(T)$ e $\varphi(T/2) = \hat{\varphi}(-T/2)$. ■

Proposição 5.3.2. *Assuma que a função W_1 é invariante pela simetria $\mathcal{S}_1$ e pela simetria $\mathcal{S}_2$ (ou $\mathcal{S}_3$) e seja $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t), p_x(t), p_y(t), p_z(t))$ uma solução do problema (5.6) ou equivalente de (5.7). Se $\varphi(t)$ intercepta ortogonalmente o sub-plano $\mathcal{L}_1$ em $t = t_0$ e volta a interceptar o sub-plano $\mathcal{L}_2$ (ou $\mathcal{L}_3$) ortogonalmente em $t = t_0 + T/4$ respectivamente então $\varphi(t)$ é uma solução T -periódica duplamente simétrica.*

Demonstração: A demonstração é análoga a Proposição 5.3.1. A construção da solução no intervalo

$[0, T]$ é da forma.

$$\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{se } t \in [0, T/4]; \\ (S_1 \circ \varphi)(t - T/4), & \text{se } t \in [T/4, T/2]; \\ (S_2 \circ S_1 \circ \varphi)(t - 3T/4), & \text{se } t \in [T/2, 3T/4]; \\ (S_2 \circ \varphi)(t - T), & \text{se } t \in [3T/4, T]. \end{cases} \quad (5.25)$$

Assim como na Proposição 5.3.1 é fácil verificar que a solução está bem definida, ou seja a "colagem" dos pedaços da solução foi feita de maneira adequada. ■

Precisamos caracterizar um intercepto ortogonal com os sub-planos Lagrangianos $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ e $\mathcal{L}_3$ descritos acima, em termos das variáveis de Delaunay ou das escolhas das variáveis de Poincaré-Delaunay.

Lema 5.3.3. *Nas variáveis de Delaunay (5.8), uma intersecção ortogonal com o sub-plano $\mathcal{L}_1$ em $t = t_0$ é dado por*

$$Q_1(t_0) = 0 \pmod{\pi}, \quad Q_2(t_0) = 0 \pmod{\pi}, \quad Q_3(t_0) = 0 \pmod{\pi}, \quad (5.26)$$

e com o sub-plano $\mathcal{L}_2$ é dada por

$$Q_1(t_0) = 0 \pmod{\pi}, \quad Q_2(t_0) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \quad Q_3(t_0) = 0 \pmod{\pi}. \quad (5.27)$$

Demonstração: Dizemos que uma órbita está em $\mathcal{L}_1$ em $t = t_0$ se ela é perpendicular ao eixo- x . Desta forma o plano orbital necessita conter o eixo- x , ou seja $h = 0 \pmod{\pi}$, também além disso seu pericentro necessita estar sobre o eixo- x , ou seja $g = 0 \pmod{\pi}$ e também a solução deve estar sobre o pericentro ou apocentro, ou seja $l = 0 \pmod{\pi}$. Então nas variáveis de Delaunay uma solução está sobre $\mathcal{L}_1$ se $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0 \pmod{\pi}$.

Dizemos que uma órbita está em $\mathcal{L}_2$ em $t = 0$ se ela é perpendicular ao plano- (y, z) . Desta forma o plano orbital necessita conter o eixo- x , ou seja $h = 0 \pmod{\pi}$, também além disso seu pericentro necessita estar sobre o plano- (y, z) , ou seja $g = \pi/2 \pmod{\pi}$ e também a solução deve estar sobre o pericentro ou apocentro, ou seja $l = 0 \pmod{\pi}$. Então nas variáveis de Delaunay uma solução está sobre $\mathcal{L}_1$ se $Q_1 = Q_3 = 0 \pmod{\pi}$ e $Q_2 = \pi/2 \pmod{\pi}$. ■

Lema 5.3.4. *Nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD - 1$), uma intersecção ortogonal com o sub-plano $\mathcal{L}_1$ em $t = t_0$ é dado por*

$$Q_1(t_0) = 0 \pmod{\pi}, \quad Q_2(t_0) = 0, \quad Q_3(t_0) = 0 \pmod{\pi}, \quad (5.28)$$

com o sub-plano $\mathcal{L}_2$ é dada por

$$Q_1(t_0) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \quad Q_3(t_0) = 0 \pmod{\pi}, \quad P_2(t_0) = 0, \quad (5.29)$$

e com o sub-plano $\mathcal{L}_3$ é dada por

$$Q_1(t_0) = \pi/2 \pmod{\pi}, \quad Q_3(t_0) = \pi/2 \pmod{\pi}, \quad P_2(t_0) = 0. \quad (5.30)$$

Demonstração: Observe que em termos dos elementos de Delaunay para uma solução estar em $\mathcal{L}_1$ em $t = 0$ basta $l = g = h = 0 \pmod{\pi}$. Logo nas coordenadas de Poincaré-Delaunay ($PD - 1$) uma solução esta em $\mathcal{L}_1$ desde que $Q_1 = Q_3 = 0 \pmod{\pi}$ e $Q_2 = 0$. Já em $\mathcal{L}_2$ basta que $Q_1 = Q_3 = 0 \pmod{\pi}$ e $P_2 = \pi/2 \pmod{\pi}$.

Dizemos que uma órbita está em $\mathcal{L}_3$ em $t = t_0$ se ela é perpendicular ao plano- (x, z) . Desta forma o plano orbital necessita conter o eixo- y , ou seja $h = \pi/2 \pmod{\pi}$, também além disso seu pericentro necessita estar sobre o plano- (x, z) , ou seja $g = \pi/2 \pmod{\pi}$ e também a solução deve estar sobre o pericentro ou apocentro, ou seja $l = 0 \pmod{\pi}$. Então nas variáveis dos elementos de Delaunay uma solução está sobre $\mathcal{L}_3$ se $g = h = \pi/2 \pmod{\pi}$ e $l = 0 \pmod{\pi}$. Desta forma nas coordenadas de Poincaré-Delaunay ($PD - 1$) uma solução está em $\mathcal{L}_3$ desde que tenhamos $Q_1 = \pi/2 \pmod{\pi}$, $Q_3 = \pi/2 \pmod{\pi}$ $P_2 = 0$. ■

Lema 5.3.5. *Nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD - 2$), uma intersecção ortogonal com o sub-plano $\mathcal{L}_1$ em $t = t_0$ é dado por*

$$Q_1(t_0) = 0 \pmod{\pi}, \quad Q_2(t_0) = 0, \quad Q_3(t_0) = 0, \quad (5.31)$$

com o sub-plano $\mathcal{L}_2$ é dada por

$$Q_1(t_0) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \quad Q_3(t_0) = 0, \quad P_2(t_0) = 0, \quad (5.32)$$

e com o sub-plano $\mathcal{L}_3$ é dada por

$$Q_1(t_0) = 0 \pmod{\pi}, \quad Q_2(t_0) = 0, \quad P_3(t_0) = 0. \quad (5.33)$$

Demonstração: Segue de maneira similar a demonstração do Lema 5.3.4. ■

5.4 Continuação de soluções circulares do problema de Kepler em coordenadas cartesianas

Nesta seção vamos continuar soluções circulares do problema de Kepler (sob certas condições sobre a função perturbadora) obtendo soluções periódicas simétricas próximas a soluções circulares $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ e duplamente simétricas (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ ou com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$). Na literatura, em problemas restritos de n -corpos, usando a definição de Poincaré, as soluções continuadas de órbitas circulares ($e = 0$) no plano dos primários $i = 0$ são denominadas soluções periódicas de primeira espécie. As soluções obtidas da continuação de soluções elípticas do problema de Kepler ($e \neq 0$) no plano dos primários são definidas como soluções periódicas de segunda espécie e aquelas que são continuação de órbitas circulares ou elípticas não contidas no plano dos primários ($i \neq 0$) são definidas como soluções de terceira espécie.

Como estamos considerando problema de uma partícula infinitesimal atraída por um corpo maciço, não necessariamente planar, e desta forma usaremos simplesmente a nomenclatura continuação de soluções circulares ou continuação de soluções elípticas e sempre fazendo menção em relação a inclinação da órbita a ser continuada.

5.4.1 Continuação de soluções circulares $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas

Hipótese 5.4.1. *Suponhamos que a função W_1 é invariante pela reflexão $\mathcal{S}_1$.*

Lema 5.4.1. *Seja $\psi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução circular do problema (5.17) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD - 1$), T -periódica e $\mathcal{S}_1$ -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0)$ satisfazendo*

$$\begin{aligned} Q_1(0) &:= Q_1^0 = n_1\pi, & Q_2(0) &:= Q_2^0 = 0, & Q_3(0) &:= Q_3^0 = n_2\pi, \\ P_1(0) &:= P_1^0 = s^{-1/3}, & P_2(0) &:= P_2^0 = 0, & P_3(0) &:= P_3^0 = p_3, \end{aligned}$$

onde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$, $p_3 \in \mathbb{R}$ e $T/2 = \pi m/s$ com $m \in \mathbb{N}$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= st + Q_1^0, & P_1(t) &= P_1^0, \\ Q_2(t) &= Q_2^0, & P_2(t) &= P_2^0, \\ Q_3(t) &= Q_3^0, & P_3(t) &= P_3^0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Desde que p_3 é arbitrário, segue que a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com inclinação arbitrário.

Demonstração: Consideramos $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_0; 0)$ a solução circular do problema de Kepler em coordenadas de Poincaré-Delaunay ($PD - 1$) com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3}, 0, p_3) \in \mathcal{L}_1$. Observe que tomamos $P_2^0 = 0$, para que a solução seja circular. Para satisfazer a condição que em $T/2$ a solução esteja em $\mathcal{L}_1$ é suficiente que se verifiquem as seguintes equações de periodicidade

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= sT/2 + n_1\pi = (m + n_1)\pi, \\ Q_2(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= 0 = 0, \\ Q_3(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= n_2\pi = (n_2 + n)\pi. \end{aligned}$$

As equações de periodicidade são satisfeitas tomando-se $n = 0$ e $T/2 = \pi m/s$, com $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$. Esta solução também possui plano orbital com qualquer inclinação já que p_3 é arbitrário. ■

Teorema 5.4.1. *Assuma a Hipótese 5.4.1 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução circular do problema (5.17) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.4.1. Suponhamos que se verifiquem as seguintes hipóteses*

$$(a) \quad \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt = 0, \quad \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial P_3}(\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt = 0 \quad (5.35)$$

e

i)– Se além da hipótese (a) considerarmos

$$(b) \quad \begin{aligned} &\int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \\ &\int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_2(\epsilon), \Delta P_3(\epsilon))$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $T = 2\pi m/s$.

ii)– Ainda considerando as hipóteses (a) e (b) temos a existência de condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1, \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon), \Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon))$, com ϵ e ΔP_1 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a T .

iii)– Suponha que além da hipótese (a) também se verifique a seguinte condição

$$(c) \quad s \left[\int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_1} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_2} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \right. \\ \left. \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_2} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_1} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau \right] + \\ 3s^{4/3} T/2 \left[\frac{\partial H_1}{\partial P_2} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_2} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \right. \\ \left. \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_2} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \frac{\partial H_1}{\partial P_3} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} d\tau \right] \neq 0.$$

Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon)$ sendo que $\mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon), \Delta P_2(\Delta P_3, \epsilon), \Delta P_3)$, com ϵ e ΔP_3 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_3, \epsilon)$ próximo a T .

iv)– Considerando a hipótese (a) e adicionando a condição

$$(d) \quad s \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_1} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_3} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \\ \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_3} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_1} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau + \\ (-3s^{4/3} T/2) \frac{\partial H_1}{\partial P_2} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_3} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \\ \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_3} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \frac{\partial H_1}{\partial P_3} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0$$

então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta Q_2, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta Q_2, \epsilon) = (0, \Delta Q_2, 0, \Delta P_1(\Delta Q_2, \epsilon), 0, \Delta P_3(\Delta Q_2, \epsilon))$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^\alpha)$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau(\Delta Q_2, \epsilon)$ próximo a T .

Observação 5.4.1. Nas condições (a), (b), (c) e (d) do Teorema (5.4.1) estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, p_3 + \Delta P_3) := (\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3)$, onde $s \in R^+$ é escolhido convenientemente de maneira a evitar problemas de singularidades.

Demonstração: Consideremos o sistema perturbado (5.17) com $\epsilon \neq 0$ e suficientemente pequeno. Seja $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, p_3 + \Delta P_3) \in \mathcal{L}_1$ uma condição inicial em uma vizinhança de $\mathbf{Y}_0$, onde $\mathbf{Y}_0$ é como no Lema 5.4.1, e $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)$ a solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}$. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ , obtemos a solução $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ que satisfaz

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + n_1\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0 \\ Q_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \epsilon^{\alpha+i} Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}) = 0 \\ Q_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \epsilon^{\alpha+i} Q_3^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}) = 0. \end{aligned}$$

Para que a solução seja $\mathcal{S}_1$ -simétrica é suficiente que em $t = T/2$ ela intersecte ortogonalmente o sub-plano $\mathcal{L}_1$ e desta forma, segue do Lema 5.3.4 equação (5.28), as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0 \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon) = 0 \\ f_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= Q_3^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon) = 0. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Observe que se $Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$ e $Q_3^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$ (equivalente a condição (a) do enunciado) e desta forma segue que $f_1(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_2(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_3(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$. Também das equações de periodicidade (5.37) obtemos

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3)} \right|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s & -3(s^{4/3})T/2 & 0 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \\ \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_2} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0}.$$

Segue do Teorema da Função Implícita que se o jacobiano acima possui posto 3, então existem soluções $\mathcal{S}_1$ -simétricas próxima a órbita de Kepler, para o parâmetro ϵ suficientemente pequeno. Para que de que o jacobiano acima tenha posto três, é suficiente que se verifiquem as seguintes possibilidades:

(A) Suponhamos que $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3)}\right)_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, ou seja,

$$\det \begin{pmatrix} -3s^{4/3}T/4 & 0 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \\ \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_2} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = -3s^{4/3}T/2 \left(\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} - \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \right) \neq 0. \quad (5.38)$$

Esta última condição é equivalente a hipótese (b) do enunciado. Pelo Teorema da Função Implícita existem funções analíticas $\Delta P_1 = \Delta P_1(\epsilon)$, $\Delta P_2 = \Delta P_2(\epsilon)$ e $\Delta P_3 = \Delta P_3(\epsilon)$ definidas para $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ com ϵ_0 suficientemente pequeno, tal que, $\Delta P_1(0) = 0$, $\Delta P_2(0) = 0$ e $\Delta P_3(0) = 0$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_2(\epsilon), p_3 + \Delta P_3(\epsilon))$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período $T = 2\pi m/s$ e está próxima a uma solução circular do problema de Kepler com mesmo período, raio $s^{-2/3}$ e tem plano com qualquer inclinação (desde que p_3 seja tal que se verifiquem as hipóteses (a) e (b) do teorema). Assim provamos o item i)

(A) A segunda possibilidade é $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta P_2, \Delta P_3)}\right)_{t=T/4, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, isto é,

$$\det \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \\ \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_2} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = -s \left(\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} - \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \right) \neq 0. \quad (5.39)$$

A última desigualdade acima é equivalente a condição (b) do enunciado. Então segue do Teorema da Função Implícita a existência de funções analíticas $\Delta P_2 = \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon)$, $\Delta P_3 = \Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_1, \epsilon)$ definidas para $\Delta P_1 \in [0, \delta]$, $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta P_2(0, 0) = 0$, $\Delta P_3(0, 0) = 0$ e $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon), p_3 + \Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon))$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período τ próximo a $T = 2\pi m/s$ e está próxima a uma solução circular do problema de Kepler com período T , raio $s^{-2/3}$ e tem plano com qualquer inclinação (desde que p_3 seja tal que se verifiquem as hipóteses (a) e (b) do teorema). Isto prova ii).

(C) Outra possibilidade é $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_2)}\right)_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, isto é,

$$\begin{aligned}
& \det \begin{pmatrix} s & -3s^{4/3}T/2 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \\ \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \end{pmatrix} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = s \left(\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} - \right. \\
& \left. \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_1} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \right) - 3s^{4/3}T/2 \left(\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} - \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \right. \\
& \left. \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial t} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \right) \neq 0.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

A desigualdade acima é equivalente a condição (c) e temos pelo Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_1 = \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon)$, $\Delta P_2 = \Delta P_2(\Delta P_3, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_3, \epsilon)$ definidas para $\Delta P_3 \in [0, \delta)$, $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$ onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta P_1(0, 0) = 0$, $\Delta P_2(0, 0) = 0$ e $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon} = (n_1\pi, 0, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon), \Delta P_2(\Delta P_3, \epsilon), p_3 + \Delta P_3)$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período τ próximo a $T = 4\pi m/s$ e está próxima a uma solução circular do problema de Kepler com período T , raio $s^{-2/3}$ e tem plano com qualquer inclinação (desde que p_3 seja tal que se verifiquem as hipóteses (a), e (c) do teorema), provando assim o item *iii*).

(D) A última possibilidade é $\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_3)} \right)_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, equivalentemente

$$\begin{aligned}
& \det \begin{pmatrix} s & -3s^{4/3}T/2 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \\ \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \end{pmatrix} \Big|_{t=T/4, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \\
& = s \left(\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} - \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_1} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \right) \\
& + 3s^{4/3}T/2 \left(\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} - \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial t} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \right) \neq 0.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

A desigualdade acima é equivalente a condição (d) e temos pelo Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_1 = \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon)$, $\Delta P_3 = \Delta P_3(\Delta P_2, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_2, \epsilon)$ definidas para $\Delta P_2 \in [0, \delta)$, $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$ onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta P_1(0, 0) = 0$, $\Delta P_3(0, 0) = 0$ e $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon} = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2, p_3 + \Delta P_3(\Delta P_2, \epsilon))$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período τ próximo a $T = 2\pi m/s$ e está próxima a uma solução circular do problema de Kepler com período T , raio $s^{-2/3}$ e tem plano com qualquer inclinação (desde que p_3 seja tal que se verifique as hipóteses (a), e (d) do Teorema). Desta forma concluímos a prova. ■

Observação 5.4.2. Observe que com as hipóteses (a) e (b) acima cada solução circular $\mathcal{S}_1$ -simétrica do problema de Kepler, com inclinação $i = \arccos(p_3/s^{-1/3})$ (desde que p_3 e s sejam tais que se verifiquem as hipóteses (a) e (b)) pode ser continuada a uma família a um parâmetro, dependendo de ϵ , de soluções $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema (5.6) ou equivalentemente (5.7), para ϵ suficientemente pequeno. Além disso a solução continuada, tem período fixo $T = 2\pi m/s$. Se considerarmos as condições (a) mais (b), ou (c), ou (d) então cada solução circular $\mathcal{S}_1$ -simétrica do problema de Kepler, com inclinação $i = \arccos(p_3/s^{-1/3})$ (desde que p_3 e s sejam tais que se verifiquem as hipóteses (a) e (b), ou (c) ou (d), respectivamente), pode ser continuada a uma família a dois parâmetros, dependendo de ϵ e de ΔP_1 ou ΔP_2 ou ΔP_3 (respectivamente se satisfizer as hipóteses (a) e (b), (a) e (c) ou (a) e (d)) de soluções $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema (5.6) ou equivalentemente (5.7), para ϵ e ΔP_1 , ou ΔP_2 ou ΔP_3 , suficientemente pequenos. Porém o período destas soluções não é fixo, somente sabemos que é próximo a $T = 2\pi m/s$.

Observação 5.4.3. Analisamos agora a relação entre posições e velocidades iniciais da órbita de Kepler e da solução continuada. Lembramos que a condição inicial da órbita de Kepler é dada por

$$\mathbf{Y}_0 = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3}, 0, p_3),$$

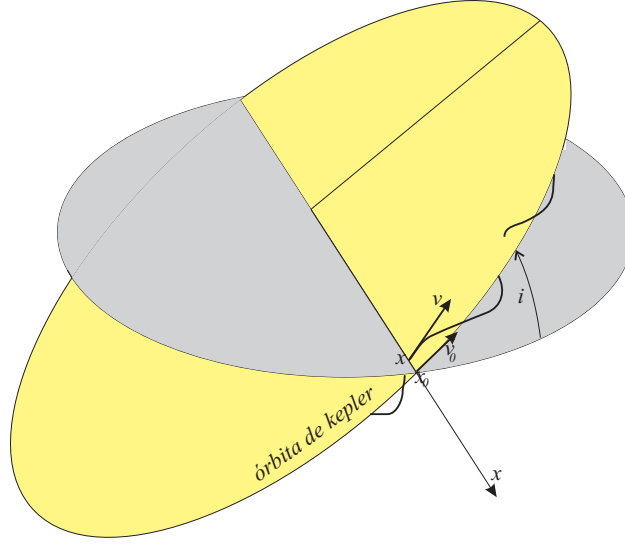


Figura 5.2: Órbita kepleriana com posição inicial x_0 e velocidade inicial v_0 e órbita continuada $\mathcal{S}_1$ -simétrica com condição inicial x em uma vizinhança de x_0 e com velocidade v que neste caso está sendo considerada diferente de v_0 .

e da solução continuada é dada por

$$\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, p_3 + \Delta P_3),$$

ambas sobre o eixo x e em termos das coordenadas de Poincaré-Delaunay ($PD - 1$).

Observamos que o acréscimo ΔP_1 induz um acréscimo no semi-eixo maior da órbita (desde que $P_1 = L$ e $L = \sqrt{a}$ e a é o semi-eixo maior da órbita). Desta forma fica claro que a condição inicial da solução continuada tem posição diferente da órbita de Kepler.

Já o acréscimo ΔP_2 pode ser resultado do acréscimo em P_1 ou além de P_1 , de um acréscimo do momento angular G (lembre que $P_2 = \sqrt{2(L - G)} \cos g$). Se estamos no primeiro caso, ou seja, o acréscimo ΔP_2 se deve somente ao acréscimo de P_1 , então do acréscimo ΔP_3 , que é um acréscimo na terceira componente $H = G \cos i$ do momento angular, segue que há um acréscimo em i (inclinação do plano orbital) e assim a velocidade não tem a mesma direção da velocidade inicial da órbita do problema de Kepler. Se o acréscimo ΔP_2 se deve também a um acréscimo de G e sendo $G = \|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\| = \|\mathbf{r}\| \|\dot{\mathbf{r}}\| \sin \theta$, onde θ é o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\dot{\mathbf{r}}$ segue que o acréscimo em G pode ser resultado de um acréscimo em $\dot{\mathbf{r}}$ ou em θ . Desta forma a solução continuada pode ter velocidade inicial diferente daquela da órbita de Kepler.

Resumindo, a posição inicial da solução continuada é uma perturbação da posição da órbita de Kepler e a velocidade possivelmente poderá também ser uma perturbação da velocidade da órbita kepleriana Veja Figura 5.2.

5.4.2 Continuação de soluções circulares periódicas $\mathcal{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas

Hipótese 5.4.2. Suponhamos que a função W_1 é invariante sobre a reflexão $\mathcal{S}_2$.

Lema 5.4.2. Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução circular do problema (5.17) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD - 1$), T -periódica e $\mathcal{S}_2$ -simétrica com

condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0) = ((n_1 + 1/2)\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3}, 0, p_3)$, onde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$ e $T/2 = \pi m/s$ com $m \in \mathbb{N}$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é como na equação (5.34). Desde que p_3 é arbitrário, segue que a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com inclinação arbitrário.

Demonstração: Consideramos $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_0; 0)$ a solução circular do problema de Kepler em coordenadas de Poincaré-Delaunay $(PD-1)$ com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = ((n_1 + 1/2)\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3}, 0, p_3) \in \mathcal{L}_2$. Observe que agora tomamos Q_2^0 para que a solução seja circular. Para satisfazer a condição que em $T/2$ a solução está em $\mathcal{L}_2$ é suficiente que se verifiquem as seguintes equações de periodicidade

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= sT/2 + (n_1 + 1/2)\pi &= (m + n_1 + 1/2)\pi, \\ Q_3(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= n_2\pi &= (n_2 + n)\pi, \\ P_2(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= 0 &= 0. \end{aligned}$$

As equações de periodicidade são satisfeitas tomando-se $n = 0$ e $T/2 = \pi m/s$, com $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$. Esta solução também possui plano orbital com qualquer inclinação já que p_3 é arbitrário. ■

Teorema 5.4.2. *Assuma a Hipótese 5.4.2 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução circular do problema (5.17) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.4.2. Suponhamos que se verifiquem as seguintes hipóteses*

$$(a) \quad \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial P_3}(\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt = 0, \quad \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial Q_2}(\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt = 0 \quad (5.42)$$

e

i)– Se além da hipótese (a) considerarmos

$$(b) \quad \begin{aligned} &\int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial Q_2 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \\ &\int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial Q_2 \partial \Delta Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, \Delta Q_2(\epsilon), 0, \Delta P_1(\epsilon), 0, \Delta P_3(\epsilon))$, ϵ pequeno, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $T = 2\pi m/s$.

ii)– Ainda considerando a hipótese (a) e hipótese (b) temos que existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon) = (0, \Delta Q_2(\Delta P_1, \epsilon), 0, \Delta P_1, 0, \Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon))$, ϵ e ΔP_1 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^\alpha)$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a T .

iii)– Suponha que além da hipótese (a) considerarmos

$$(c) \quad \begin{aligned} &\int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial Q_2 \partial \Delta P_1}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \\ &\int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_1}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial Q_2 \partial \Delta Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau + \\ &\frac{\partial H_1}{\partial P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial Q_2 \partial \Delta Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \\ &\int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \frac{\partial H_1}{\partial Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0. \end{aligned}$$

Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon) = (0, \Delta Q_2(\Delta P_3, \epsilon), 0, \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon), \Delta P_3)$, com ϵ e ΔP_3 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^\alpha)$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_3, \epsilon)$ próximo a T .

iv)– Com a hipótese (a) e se considerarmos a condição

$$(d) \quad \begin{aligned} & s \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_1}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial Q_2 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \\ & \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial Q_2 \partial \Delta P_1}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau + \\ & (-3s^{4/3}T/2) \frac{\partial H_1}{\partial P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial Q_2 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \\ & \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \frac{\partial H_1}{\partial Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0. \end{aligned}$$

Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta Q_2, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, \Delta Q_2, 0, \Delta P_1(\Delta Q_2, \epsilon), 0, \Delta P_3(\Delta Q_2, \epsilon))$, com ϵ e ΔQ_2 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^\alpha)$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $\tau(\Delta Q_2, \epsilon)$ próximo a T .

Observação 5.4.4. Nas condições (a), (b), (c) e (d) do Teorema (5.4.2) estamos usando a notação $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, p_3 + \Delta P_3) := (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)$, onde $s \in \mathbb{R}^+$ é escolhido convenientemente de maneira a evitar problemas de singularidades.

Demonstração: Segue de maneira muito similar a demonstração do Teorema (5.4.1). ■

Observação 5.4.5. Aqui também valem comentários similares aos da Observação 5.4.2. Ou seja com o teorema acima podemos obter famílias de soluções $\mathcal{S}_2$ -simétricas do problema (5.6) ou equivalente 5.7 a um e a dois parâmetros, próximas a soluções circulares do problema de Kepler.

Observação 5.4.6. Neste caso também vale um comentário análogo a Observação 5.4.3 para a relação entre posições e velocidades iniciais da órbita de Kepler e da solução continuada. Lembramos que a condição inicial da órbita de Kepler é dada por

$$\mathbf{Y}_0 = ((n_1 + 1/2)\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3}, 0, p_3),$$

e da solução continuada é dada por

$$\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, p_3 + \Delta P_3),$$

ambas sobre o plano- (y, z) e em termos das coordenadas de Poincaré-Delaunay $(PD - 1)$.

Observamos que o acréscimo ΔP_1 induz um acréscimo no semi-eixo maior da órbita. Desta forma fica claro que a condição inicial da solução continuada tem posição diferente da órbita de Kepler.

Já o o acréscimo ΔQ_2 pode ser resultado do acréscimo em P_1 ou além de P_1 , de um acréscimo do momento angular G (lembre que $Q_2 = -\sqrt{2(L - G)} \cos g$). Se estamos no primeiro caso, ou seja, o acréscimo ΔQ_2 se deve somente ao acréscimo de P_1 , então do acréscimo ΔP_3 que é um acréscimo na terceira componente $H = G \cos i$ do momento angular, desta forma deve haver um acréscimo em i (inclinação do plano orbital) e assim a velocidade não tem a mesma direção da velocidade inicial da órbita do problema de Kepler. Se o acréscimo ΔQ_2 se deve também a um acréscimo de G e sendo $G = \|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\| = \|\mathbf{r}\| \|\dot{\mathbf{r}}\| \sin \theta$, onde θ é o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\dot{\mathbf{r}}$ segue que o acréscimo em G pode ser resultado de um acréscimo em $\dot{\mathbf{r}}$ ou em θ . Desta forma a solução continuada pode ter velocidade inicial diferente daquela da órbita de Kepler.

Resumindo, a posição inicial da solução continuada é uma perturbação da posição da órbita de Kepler e a velocidade possivelmente poderá também ser uma perturbação da velocidade da órbita kepleriana.

5.4.3 Continuação de soluções circulares duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas) do problema de Kepler em coordenadas cartesianas

Hipótese 5.4.3. *Suponhamos que a função W_1 é invariante pelas reflexões $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.*

Se considerarmos que o problema (5.6) ou equivalente (5.7) possua as duas simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ então algumas das soluções $\mathcal{S}_1$ -simétricas, obtidas no Teorema 5.4.1 poderão possivelmente ser também $\mathcal{S}_2$ -simétricas e vice-versa. Porém podemos obter soluções que sempre respeitam as duas simetrias as quais denominamos de duplamente simétricas. Para obter estas soluções basta tomar uma condição inicial sobre um sub-espaço invariante e impor que no instante $t = T/4$ a solução intersecte o outro sub-espaço.

Lema 5.4.3. *Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução circular do problema (5.17) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay $(PD-1)$, T -periódica e duplamente simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0) = ((n_1 + 1/2)\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3}, 0, p_3) \in \mathcal{L}_2$, onde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$ e $T = 2(2m - 1)\pi/s$ com $m \in \mathbb{N}$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é como na equação (5.34). Desde que p_3 é arbitrário, segue que a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com inclinação arbitrário.*

Demonstração: Consideramos $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_0; 0)$ a solução circular do problema de Kepler em coordenadas de Poincaré-Delaunay $(PD-1)$ com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = ((n_1 + 1/2)\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3}, 0, p_3) \in \mathcal{L}_2$. Para satisfazer a condição que em $T/4$ a solução está em $\mathcal{L}_1$ é suficiente que se verifiquem as seguintes equações de periodicidade

$$\begin{aligned} Q_1(T/4, \mathbf{Y}_0; 0) &= sT/4 + (n_1 + 1/2)\pi = (m + n_1)\pi, \\ Q_2(T/4, \mathbf{Y}_0; 0) &= 0 = 0, \\ Q_3(T/4, \mathbf{Y}_0; 0) &= n_2\pi = (n_2 + n)\pi. \end{aligned}$$

As equações de periodicidade são satisfeitas tomando-se $n = 0$ e $T/4 = \pi(2m - 1)/2s$, com $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$. Esta solução também possui plano orbital com qualquer inclinação já que p_3 é arbitrário. ■

Teorema 5.4.3. *Assuma a Hipótese 5.4.3 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução circular, com condição inicial $\mathbf{Y}_0$ do problema (5.17) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.4.3. Suponhamos que se verifiquem as seguintes hipóteses*

$$(a) \quad \int_0^{T/4} \frac{\partial H_1}{\partial P_3}(\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt = 0, \quad (5.44)$$

e

i)– Se além da hipótese (a) considerarmos

$$(b) \quad \int_0^{T/4} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0. \quad (5.45)$$

Então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, \Delta Q_2(\epsilon), 0, \Delta P_1(\epsilon), 0, \Delta P_3(\epsilon))$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica com período $T = 4\pi(2m + 1)/2s$.

ii)– Ainda considerando a hipótese (a) e hipótese (b) obtemos condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon) = (0, \Delta Q_2(\Delta P_1, \epsilon), 0, \Delta P_1, 0, \Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon))$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica com período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a T .

iii)– Suponha que além da hipótese (a) tenhamos

$$(c) \quad s \int_0^{T/4} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_1}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau + (3s^{4/3}T/4) \frac{\partial H_1}{\partial P_3}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0.$$

Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon) = (0, \Delta Q_2(\Delta P_3, \epsilon), 0, \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon), 0, \Delta P_3)$, com ϵ e ΔP_3 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica com período $\tau(\Delta P_3, \epsilon)$ próximo a T .

Observação 5.4.7. Nas condições (a), (b), (c) e (d) do Teorema (5.4.3) estamos usando a notação $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, p_3 + \Delta P_3) := (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)$, onde $s \in R^+$ é escolhido convenientemente de maneira a evitar problemas de singularidades.

Demonstração: Consideremos o sistema perturbado (5.17) com $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno. Seja $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, p_3 + \Delta P_3) \in \mathcal{L}_2$ uma condição inicial em uma vizinhança de $\mathbf{Y}_0$, onde $\mathbf{Y}_0$ é como no Lema 5.4.3, e $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)$ a solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}$. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ , obtemos a solução $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ que satisfaz:

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + (n_1 + 1/2)\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0 \\ Q_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \Delta Q_2 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0 \\ Q_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \epsilon^{\alpha+i}Q_3^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}) = 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Para que esta solução seja duplamente simétrica é suficiente que em $t = T/4$ a solução intersecte o sub-plano $\mathcal{L}_1$ ortogonalmente, e desta forma segue do Lema 5.3.4 equação (5.28), as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t - (m + 1/2)\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0 \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \Delta Q_2 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0 \\ f_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= Q_3^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon) = 0. \end{aligned}$$

com a notação $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, p_3 + \Delta P_3) := (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)$. Observe que se $Q_3^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$ (equivalente a condição (a) do enunciado) então segue que $f_1(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_2(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_3(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$. Das equações de periodicidade (5.47) segue que

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)} \right|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s & 0 & -3(s^{4/3})T/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta Q_2} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \end{pmatrix}_{t=T/4, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0}.$$

E procedendo de maneira semelhante ao Teorema (5.4.1) basta considerar os sub-determinantes de ordem três, e utilizar o Teorema da Função Implícita para concluir cada um dos casos *i*), *ii*) e *iii*) acima. ■

Observação 5.4.8. Assim como nos Teoremas 5.4.1 e 5.4.2 podemos obter famílias de soluções duplamente simétrica do problema (5.6) ou equivalente 5.7 dependendo de um ou de dois parâmetros, próximas a soluções circulares do problema de Kepler e vale o comentário da Observação 5.4.6.

5.4.4 Continuação de soluções circulares duplamente simétrica ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$ -simétricas) do problema de Kepler em coordenadas cartesianas

Hipótese 5.4.4. Suponhamos que a função W_1 é invariante pelas reflexões $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$.

Lema 5.4.4. *Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução circular do problema (5.17) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD-2$), T -periódica e duplamente simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0) = (n_1\pi, 0, q_3, s^{-1/3}, 0, 0)$, onde $n_1 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$, $q_3 \in \mathbb{R}$ e $T/2 = \pi m/s$ com $m \in \mathbb{N}$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é como na equação (5.34). Desde que q_3 é zero, segue que a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com inclinação nula.*

Demonstração: Consideramos $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_0; 0)$ a solução circular do problema de Kepler em coordenadas de Poincaré-Delaunay ($PD-2$) com condição inicial $Y_0 \in \mathcal{L}_3$. Para satisfazer a condição que em $T/4$ a solução está em $\mathcal{L}_1$ é suficiente que se verifiquem as seguintes equações de periodicidade

$$\begin{aligned} Q_1(T/4, \mathbf{Y}_0; 0) &= sT/4 + n_1\pi = (m + n_1)\pi \\ Q_2(T/4, \mathbf{Y}_0; 0) &= 0 \\ Q_3(T/4, \mathbf{Y}_0; 0) &= q_3 \end{aligned}$$

As equações de Periodicidade são satisfeitas tomando-se $q_3 = 0$ e $T/4 = \pi m/s$, com $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}_+$. Esta solução também possui plano orbital com inclinação nula, já que $p_3 = 0$. Observe que novamente para que tenhamos uma solução circular teremos que impor que $Q_2^0 = P_2^0 = 0$. ■

Teorema 5.4.4. *Assuma a Hipótese 5.4.4 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução circular com condição inicial $\mathbf{Y}_0$ do problema (5.17) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.4.4. Suponhamos que se verifiquem as seguintes hipóteses*

$$(a) \quad \int_0^{T/4} \frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt = 0, \quad (5.47)$$

e

i)– Se além da hipótese (a) considerarmos

$$(b) \quad \int_0^{T/4} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0. \quad (5.48)$$

Então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, 0, \Delta Q_3(\epsilon), \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_2(\epsilon), 0)$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica com período $T = 4\pi m/s$.

ii)– Ainda considerando a hipótese (a) e hipótese (b) obtemos condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon) = (0, 0, \Delta Q_3(\Delta P_1, \epsilon), \Delta P_1, \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon), 0)$, para ϵ e ΔP_1 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica com período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a T .

iii)– Suponha que além da hipótese (a) tenhamos

$$(c) \quad s \int_0^{T/4} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_1}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau + (3s^{4/3}T/4) \frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0.$$

Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon)$ sendo que $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, 0, \Delta Q_3(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2, 0)$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica com período $\tau(\Delta P_2, \epsilon)$ próximo a T .

Observação 5.4.9. Nas condições (a), (b), (c) e (d) do Teorema (5.4.4) estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, \Delta Q_3, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, 0) := (\Delta Q_3, \Delta P_1, \Delta P_2)$, onde $s \in \mathbb{R}^+$ é escolhido convenientemente de maneira a evitar problemas de singularidades.

Demonstração: Consideremos o sistema perturbado (5.17) com $\epsilon \neq 0$ e suficientemente pequeno. Seja $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, \Delta Q_3, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, 0) \in \mathcal{L}_3$ uma condição inicial em uma vizinhança de $\mathbf{Y}_0$ e $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)$ a solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}$. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ , obtemos a solução $\varphi(t, \mathbf{Y}, \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$, a qual satisfaz

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + n_1\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0 \\ Q_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \epsilon^{\alpha+i}Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}) = 0 \\ Q_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \Delta Q_3 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Para que esta solução seja duplamente simétrica é suficiente que em $t = T/4$ a solução intersecte ortogonalmente o sub-plano $\mathcal{L}_1$ ortogonalmente e desta forma, segue do Lema 5.3.5 equação (5.31), as seguintes equações de periodicidade

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0 \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon) = 0 \\ f_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \Delta Q_3 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Observe que se tivermos $Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$ (equivalente a condição (a) do enunciado) então segue que $f_1(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_2(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_3(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$. Das equações de periodicidade (5.50) segue que

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta Q_3, \Delta P_1, \Delta P_2)} \right|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s & 0 & -3(s^{4/3})T/4 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_3} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{t=T/4, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0}.$$

E procedendo de maneira semelhante ao Teorema (5.4.3) basta considerar os sub-determinantes de ordem três, e utilizar o Teorema da função Implícita para concluir cada um dos casos *i*), *ii*) e *iii*) acima. ■

5.5 Continuação de soluções elípticas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas

Na continuação de soluções elípticas do problema de Kepler, veremos que mesmo em coordenadas apropriadas, a continuação de soluções elípticas no problema perturbado (5.6) ou equivalentemente (5.7), apresenta um maior grau de complexidade pois existem mais casos degenerados, no sentido que ocorre incompatibilidade das equações de periodicidade.

Para continuar soluções elípticas usaremos as coordenadas de Delaunay, que como já falamos anteriormente, estão definidas em uma vizinhança de uma órbita elíptica do problema de Kepler.

5.5.1 Continuação de soluções elípticas $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas

Assumindo a hipótese 5.4.1, obtemos a seguinte caracterização das órbitas elípticas $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema de Kepler

Lema 5.5.1. *Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução elíptica do problema (5.14) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Delaunay (5.8), T -periódica e $\mathcal{S}_1$ -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0) = (n_1\pi, (n_2 + 1/2)\pi, n_3\pi, s^{-1/3}, p_2, p_3)$, onde $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$, $p_2, p_3 \in \mathbb{R}$, com $p_2 \neq s^{-1/3}$ e $T/2 = \pi m/s$ com $m \in \mathbb{N}$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é dada por*

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= st + Q_1^0, & P_1(t) &= P_1^0, \\ Q_2(t) &= Q_2^0, & P_2(t) &= P_2^0, \\ Q_3(t) &= Q_3^0, & P_3(t) &= P_3^0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Desde que p_3 é arbitrário, segue que a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com inclinação arbitrário.

Demonstração: Consideramos $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_0; 0)$ a solução elíptica do problema de Kepler em coordenadas de Delaunay (5.8) com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (n_1\pi, n_2\pi, n_3\pi, s^{-1/3}p_2, p_3) \in \mathcal{L}_1$. Para satisfazer a condição que em $T/2$ a solução está em $\mathcal{L}_1$ é suficiente que se verifiquem as seguintes equações de periodicidade

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= sT/2 + n_1\pi &= (m + n_1)\pi, \\ Q_2(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= n_2\pi &= (n_2 + n)\pi, \\ Q_3(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= n_3\pi &= (n_3 + k)\pi. \end{aligned}$$

As equações de periodicidade são satisfeitas tomando-se $n = k = 0$ e $T/2 = \pi m/s$, com $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$. Esta solução também possui plano orbital com qualquer inclinação já que p_3 é arbitrário. Observe que $p_2 \neq s^{-1/3}$ pois caso contrário $G = L$ e desta forma as coordenadas não estão definidas. ■

Teorema 5.5.1. *Assuma a hipótese 5.4.1 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução elíptica do problema (5.14) com $\epsilon = 0$ como no Lema 5.5.1. Suponhamos que se verifiquem as seguintes hipóteses*

$$(a) \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt = 0, \quad \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial P_3}(\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt = 0 \quad (5.52)$$

e

i)– Se além da hipótese (a) considerarmos

$$(b) \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0. \quad (5.53)$$

Então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_2(\epsilon), \Delta P_3(\epsilon))$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $T = 2\pi m/s$.

ii)– Ainda considerando a hipótese (a) e hipótese (b) temos que existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1, \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon), \Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon))$, com ϵ e ΔP_1 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a T .

iii)– Suponha que além da hipótese (a) tenhamos

$$(c) \quad \begin{aligned} & \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_1} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_2} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \\ & \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_2} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_1} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau + \\ & (-3s^{4/3}T/2) \frac{\partial H_1}{\partial P_2} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_2} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \\ & \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_2} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \frac{\partial H_1}{\partial P_3} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0. \end{aligned}$$

Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon)$, $\mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon), \Delta P_2(\Delta P_3, \epsilon), \Delta P_3)$, com ϵ e ΔP_3 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_3, \epsilon)$ próximo a T .

iv)– Com a hipótese (a) e adicionamos a condição

$$(d) \quad \begin{aligned} & s \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_1} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_3} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \\ & \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_3} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_1} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau + \\ & (-3s^{4/3}T/2) \frac{\partial H_1}{\partial P_2} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_3} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \\ & \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_3} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \frac{\partial H_1}{\partial P_3} (\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0. \end{aligned}$$

Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2, \Delta P_3(\Delta P_2, \epsilon))$, com ϵ e ΔP_2 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_2, \epsilon)$ próximo a T .

Observação 5.5.1. Nas condições (a), (b), (c) e (d) do Teorema (5.5.1) estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, n_2\pi, n_3\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, p_2 + \Delta P_2, p_3 + \Delta P_3) := (\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3)$, onde $s \in \mathbb{R}^+$ é escolhido convenientemente de maneira a evitar problemas de singularidades.

Demonstração: Consideremos o sistema perturbado (5.14) com $\epsilon \neq 0$ e suficientemente pequeno. Seja $\mathbf{Y} = (n_1, n_2\pi, n_3\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, p_2 + \Delta P_2, p_3 + \Delta P_3) \in \mathcal{L}_1$ uma condição inicial em uma vizinhança de $\mathbf{Y}_0$, onde $\mathbf{Y}_0$ é como no Lema 5.5.1, e $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)$ a solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}$. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ , obtemos a solução $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ a qual satisfaz

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + n_1\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0 \\ Q_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \epsilon^{\alpha+i}Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}) = 0 \\ Q_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \epsilon^{\alpha+i}Q_3^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}) = 0. \end{aligned}$$

Para que esta solução seja $\mathcal{S}_1$ -simétrica é suficiente que em $t = T/2$ a solução intersecte ortogonalmente o sub plano $\mathcal{L}_1$ e desta forma, segue do Lema 5.3.3 equação (5.26), as seguintes equações de periodicidade

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0 \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon) = 0 \\ f_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= Q_3^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon) = 0. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Observe que se $Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$ e $Q_3^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$ (equivalente a condição (a) do enunciado) então segue que $f_1(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_2(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_3(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$. Das equações de periodicidade (5.54) segue que

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3)} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \begin{pmatrix} s & -3(s^{4/3})T/4 & 0 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \\ \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_2} & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \end{pmatrix} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0}.$$

Basta considerar agora os sub-determinantes de ordem 3 e usar o Teorema da Função Implícita, procedendo de maneira análoga a demonstração do Teorema 5.4.1

■

Observação 5.5.2. Observe que vale um comentário análogo a Observação 5.4.3 Lembramos que a condição inicial da órbita de Kepler é dada por

$$\mathbf{Y}_0 = (n_1\pi, n_2\pi, n_3\pi, s^{-1/3}, p_2, p_3)$$

e da solução continuada é dada por

$$\mathbf{Y} = (n_1\pi, n_2, n_3\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, p_2 + \Delta P_2, p_3 + \Delta P_3),$$

ambas sobre o eixo x e em termos das coordenadas de Delaunay 5.8.

Observamos que o acréscimo ΔP_1 induz um acréscimo no semi-eixo maior da órbita (desde que $P_1 = L$ e $L = \sqrt{a}$ e a é o semi-eixo maior da órbita). Desta forma fica claro que a condição inicial da solução continuada tem posição diferente da órbita de Kepler.

Já o o acréscimo ΔP_2 é resultado do acréscimo de G e sendo $G = \|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\| = \|\mathbf{r}\| \|\dot{\mathbf{r}}\| \sin \theta$, onde θ é o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\dot{\mathbf{r}}$ segue que o acréscimo em G pode ser resultado de um acréscimo em $\dot{\mathbf{r}}$ ou em θ . Desta forma a solução continuada pode ter velocidade inicial diferente daquela da órbita de Kepler.

Resumindo, a posição inicial da solução continuada é uma perturbação da posição da órbita de Kepler e a velocidade possivelmente poderá também ser uma perturbação da velocidade da órbita kepleriana.

5.5.2 Continuação de soluções elípticas $\mathcal{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas

Assumindo a Hipótese 5.4.2 obtemos a seguinte caracterização das órbitas elípticas $\mathcal{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler.

Lema 5.5.2. Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução elíptica do problema (5.14) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Delaunay (5.8), T -periódica e $\mathcal{S}_2$ -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0) = (n_1\pi, (n_2 + 1/2)\pi, n_3\pi, s^{-1/3}p_2, p_3)$, onde $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$, $p_2, p_3 \in \mathbb{R}$, com $p_2 \neq s^{-1/3}$ e $T/2 = \pi m/s$ com $m \in \mathbb{N}$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= st + Q_1^0, & P_1(t) &= P_1^0, \\ Q_2(t) &= Q_2^0, & P_2(t) &= P_2^0, \\ Q_3(t) &= Q_3^0, & P_3(t) &= P_3^0. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Desde que p_3 é arbitrário, segue que a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com inclinação arbitrário.

Demonstração: Consideramos $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_0; 0)$ a solução elíptica do problema de Kepler em coordenadas de Delaunay (5.8) com condição inicial $Y_0 = (n_1\pi, (n_2 + 1/2)\pi, n_3\pi, s^{-1/3}p_2, p_3) \in \mathcal{L}_2$. Para satisfazer a condição que em $T/2$ a solução está em $\mathcal{L}_2$ é suficiente que se verifiquem as seguintes equações de periodicidade

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= sT/2 + n_1\pi = (m + n_1)\pi, \\ Q_2(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= (n_2 + 1/2)\pi = (n_2 + n + 1/2)\pi, \\ Q_3(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= n_3\pi = (n_3 + k)\pi. \end{aligned}$$

As equações de periodicidade são satisfeitas tomando-se $n = k = 0$ e $T/2 = \pi m/s$, com $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}_+$. Esta solução também possui plano orbital com qualquer inclinação já que p_3 é arbitrário. Observe que $p_2 \neq s^{-1/3}$ pois caso contrário $G = L$ e desta forma as coordenadas não estão definidas. ■

Teorema 5.5.2. *Assuma a hipótese 5.4.2 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução elíptica do problema (5.14) com $\epsilon = 0$ como no Lema 5.5.2. Suponhamos que se verifiquem as seguintes hipóteses*

$$(a) \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt = 0, \quad \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial P_3}(\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt = 0 \quad (5.56)$$

e

i)– Se além da hipótese (a) considerarmos

$$(b) \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0. \quad (5.57)$$

Então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_2(\epsilon), \Delta P_3(\epsilon))$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $T = 2\pi m/s$.

ii)– Ainda considerando a hipótese (a) e hipótese (b), obtemos condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1, \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon), \Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon))$, com ϵ e ΔP_1 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a T .

iii)– Suponha que além da hipótese (a) tenhamos

$$(c) \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_1}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_1}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau + (-3s^{4/3}T/2) \frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \frac{\partial H_1}{\partial P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0.$$

Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon)$, $\mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon), \Delta P_2(\Delta P_3, \epsilon), \Delta P_3)$, com ϵ e ΔP_3 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_3, \epsilon)$ próximo a T .

iv)– Com a hipótese (a) e adicionamos a condição

$$(d) \quad \begin{aligned} & s \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_1}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \\ & \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_1}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau + \\ & (-3s^{4/3}T/2) \frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} d\tau - \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \\ & \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau - \frac{\partial H_1}{\partial P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0. \end{aligned}$$

Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2, \Delta P_3(\Delta P_2, \epsilon))$, com ϵ e ΔP_2 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução S_2 -simétrica com período $\tau(\Delta P_2, \epsilon)$ próximo a T .

Observação 5.5.3. Nas condições (a), (b), (c) e (d) do Teorema (5.4.2) estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, (n_2 + 1/2)\pi, n_3\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, p_2 + \Delta P_2, p_3 + \Delta P_3) := (\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3)$, onde $s \in R^+$ é escolhido convenientemente de maneira a evitar problemas de singularidades.

Demonstração: Segue de maneira similar a demonstração do Teorema 5.5.1. ■

Observação 5.5.4. Não é possível continuar soluções elípticas duplamente simétricas do problema de Kepler utilizando as coordenadas de Delaunay, pois há incompatibilidade das equações de periodicidade da solução do problema de Kepler.

Observação 5.5.5. Nos Teoremas 5.5.1 e 5.5.2 acima, desde que as condições sobre o termo perturbador W_1 sejam satisfeitas podemos continuar soluções elípticas do problema de Kepler a famílias de soluções a um parâmetro e com período fixo e soluções a dois parâmetros, sem período fixo somente próximo do da órbita de Kepler.

5.6 Análise do sub-problema planar

Nesta seção vamos considerar um sub-problema planar equatorial de (5.6) ou equivalente (5.7), ou seja, vamos supor que o conjunto $\{z = p_z = 0\}$ é invariante pelo fluxo (5.7) ou equivalente (5.6).

Se o problema (5.6) ou equivalente (5.7) descreve o problema de uma partícula infinitesimal atraída por um corpo maciço simétrico em relação ao plano equatorial, com centro de massa na origem e densidade constante então o plano equatorial é invariante pelo fluxo. Desta forma, faz sentido considerar o estudos das órbitas periódicas com a partícula infinitesimal contida neste plano. Observamos que neste caso reduzimos a um problema com dois graus de liberdade e desta forma o estudo da dinâmica pode ser melhor determinado.

A função Hamiltoniana do sub-problema planar é dada por

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon^{\alpha+i} H_1(\mathbf{q}) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}), \quad (5.58)$$

onde $\mathbf{q} = (x, y)$ e $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ e

$$\begin{aligned} H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|}, \\ H_1(\mathbf{q}) &= \frac{1}{i} \frac{\partial^i W_1}{\partial \epsilon^i}(\mathbf{q}, 0). \end{aligned}$$

As equações de movimento são dadas pelo sistema mecânico bidimensional

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \epsilon^\alpha (W_1)_x(x, y, \epsilon) \\ \ddot{y} &= -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \epsilon^\alpha (W_1)_y(x, y, \epsilon). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Observação 5.6.1. Desde que $W_1(x, y, z; \epsilon)$ é analítica em (x, y, z, ϵ) onde estiver definida, também é sua restrição ao plano equatorial.

Assim como no caso espacial, no sub-problema planar vamos usar coordenadas de Delaunay e Poincaré-Delaunay para descrever a função Hamiltoniana (5.58). Porém observe que o elemento orbital h não está definido no plano equatorial e também não faz sentido a variável H . Os elementos orbitais no caso planar tem a seguinte interpretação geométrica: l anomalia média; e g o argumento do pericentro medido a partir do eixo x ; L e G são definidos como no caso espacial. Logo as variáveis de Delaunay ficam reduzidas simplesmente as equações

$$\begin{aligned} Q_1 &= l, & P_1 &= L, \\ Q_2 &= g, & P_2 &= G. \end{aligned} \quad (5.60)$$

A função Hamiltoniana (5.58) nas variáveis de Delaunay (5.60) tem a forma

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon) = -\frac{1}{2P_1^2} + \epsilon^{\alpha+i} H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}), \quad (5.61)$$

onde

$$H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = -\frac{1}{i} \frac{\partial^i W_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, 0)}{\partial \epsilon^i},$$

com i sendo o primeiro natural tal que $\frac{\partial^i W_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, 0)}{\partial \epsilon^i} \neq 0$. As equações de movimento do problema (5.59) descrito nas coordenadas de Delaunay (5.60) são

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), \\ \dot{Q}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Assim como no caso espacial, as coordenadas de Delaunay, não estão definidas em uma vizinhança de uma órbita circular do problema de Kepler no plano- (x, y) . De maneira similar, define-se as coordenadas de Poincaré-Delaunay na forma planar e obtemos que

$$\begin{aligned} Q_1 &= l + g, & P_1 &= L, \\ Q_2 &= -\sqrt{2(L-G)} \sin(g), & P_2 &= \sqrt{2(L-G)} \cos(g). \end{aligned} \quad (5.63)$$

Estas variáveis são válidas em uma vizinhança de uma solução circular do problema de Kepler e uma solução circular ocorre quando $L = G$, que é equivalente $Q_2 = P_2 = 0$. A função Hamiltoniana (5.58) nas variáveis de Poincaré-Delaunay (5.63) é dada por

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon) = -\frac{1}{2P_1^2} + \epsilon^{\alpha+i} H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}), \quad (5.64)$$

e o sistema Hamiltoniano associado nas coordenadas de Poincaré-Delaunay (5.63) é

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), \\ \dot{Q}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}). \end{aligned} \quad (5.65)$$

5.6.1 Simetrias

As simetrias que serão consideradas neste sub-problema são reflexões em relação ao eixo x e em relação ao eixo y que denotaremos por $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 : (x, y, p_x, p_y) &\longrightarrow (x, -y, -p_x, p_y), \\ \mathcal{S}_2 : (x, y, p_x, p_y) &\longrightarrow (-x, y, p_x, -p_y).\end{aligned}\tag{5.66}$$

Claramente os conjuntos fixos por estas simetrias são o eixo x e o eixo y . Também valem resultados análogos ao caso espacial para soluções simétricas. Se uma solução intersecta um destes eixos ortogonalmente em $t = t_0$ e volta a intersectá-lo no instante $T/2$ então a solução é T -periódica e simétrica em relação a tal eixo e se intersecta um dos eixos em $t = t_0$ e volta a intersectar o outro eixo no instante $t = T/4$ então a solução é T -periódica e dupla simétrica, ou seja, simétrica em relação aos dois eixos.

Então mais uma vez precisamos caracterizar uma intersecção ortogonal com o eixo x e eixo y , em termos das variáveis de Delaunay ou das variáveis de Poincaré-Delaunay.

Lema 5.6.1. *Nas variáveis de Delaunay (5.60), uma intersecção ortogonal com o eixo x em $t = t_0$ é dado por*

$$Q_1(t_0) = 0 \pmod{\pi}, \quad Q_2(t_0) = 0 \pmod{\pi},\tag{5.67}$$

e com o eixo y é dada por

$$Q_1(t_0) = 0 \pmod{\pi}, \quad Q_2(t_0) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.\tag{5.68}$$

Lema 5.6.2. *Nas variáveis de Poincaré-Delaunay (5.63), uma intersecção ortogonal com o eixo x em $t = t_0$ é dado por*

$$Q_1(t_0) = 0 \pmod{\pi}, \quad Q_2(t_0) = 0,\tag{5.69}$$

e com o eixo y é dada por

$$Q_1(t_0) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \quad P_2(t_0) = 0.\tag{5.70}$$

5.6.2 Continuação de órbitas circulares $\mathcal{S}_1$ -Simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas no caso planar

Hipótese 5.6.1. *A função W_1 é invariante pela reflexão em torno do eixo x .*

Lema 5.6.3. *Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$ solução circular do problema (5.65) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay (5.63), T -periódica e $\mathcal{S}_1$ -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, P_1^0, P_2^0) = (n_1\pi, 0, s^{-1/3}, 0)$ sobre o eixo x , onde $n_1 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$ e $T/2 = \pi m/s$ com $m \in \mathbb{N}$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é dada por*

$$\begin{aligned}Q_1(t) &= st + Q_1^0, & P_1(t) &= P_1^0, \\ Q_2(t) &= Q_2^0, & P_2(t) &= P_2^0.\end{aligned}\tag{5.71}$$

Demonstração: Consideramos $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_0; 0)$ a solução circular do problema de Kepler em coordenadas de Poincaré-Delaunay (5.63) com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (n_1\pi, 0, s^{-1/3}, 0)$ sobre o eixo x . Para que a solução no instante $T/2$, intersecte o eixo- x ortogonalmente. Logo pelo Lema 5.6.2, equação (5.69) é suficiente que se verifiquem as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned}Q_1(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= sT/2 + n_1\pi = (m + n_1)\pi, \\ Q_2(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= 0 = 0.\end{aligned}$$

Obtemos das equações de periodicidade a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica circular com período $T/2 = \pi m/s$, com $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$. ■

Teorema 5.6.1. *Assuma a Hipótese 5.6.1 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$ solução circular do problema (5.65) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.6.3. Suponhamos que se verifiquem as seguintes hipóteses.*

$$(a) \quad \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau = 0$$

e

i)– Se além da hipótese (a) admitimos que

$$(b) \quad \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial P_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0,$$

então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, 0, \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_2(\epsilon))$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ simétrica com período $T = 2\pi m/s$.

ii)– Ainda supondo as hipóteses (a) e (b) temos que existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon) = (0, 0, \Delta P_1, \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon))$, com ϵ e ΔP_1 pequenos, de maneira que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a T .

iii)– Assumindo a hipótese (a) e a condição

$$(c) \quad s \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \partial P_1}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau + (3s^{4/3}T/2) \frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} \neq 0,$$

então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon) = (0, 0, \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2)$ e ϵ , com ΔP_2 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_2, \epsilon)$ próximo a T .

Observação 5.6.2. *No teorema acima estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2) := (\Delta P_1, \Delta P_2)$, onde $s \in \mathbb{R}^+$ é escolhido convenientemente de maneira a evitar problemas de singularidades.*

Demonstração: Seja $\varphi(t, \mathbf{Y}; 0)$ a solução circular do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2)$ sobre o eixo x em uma vizinhança de $\mathbf{Y}_0 = (n_1\pi, 0, s^{-1/3}, 0)$. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ , obtemos que a solução $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = (Q_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon), Q_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon), P_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon), P_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon))$ do problema perturbado (5.65) é tal que

$$Q_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + n_1\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}),$$

$$Q_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = \epsilon^{\alpha+i}Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}).$$

A fim de que a solução seja $\mathcal{S}_1$ -simétrica é suficiente que em $t = T/2$ ela intersecte ortogonalmente o eixo x e do Lema 5.6.2 equação (5.69), seguem as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} \frac{T}{2} - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0 \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon) = 0. \end{aligned} \tag{5.72}$$

Observe que se $Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = 0$ (equivalente a hipótese (a) do enunciado) e desta forma, temos que $f_1(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = 0$ e $f_2(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = 0$. Segue das equações de periodicidades (5.72) que

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_2)} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s & -3(s^{4/3}T/4) & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \end{pmatrix} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0}.$$

Pelo Teorema da Função Implícita temos que se o jacobiano acima possui posto 2, então existem soluções $\mathcal{S}_1$ -simétricas próxima a órbita de Kepler, para o parâmetro ϵ suficientemente pequeno. O jacobiano terá posto 2 nas seguintes condições:

(A) Se $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\Delta P_1, \Delta P_2)}\right)\Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, ou equivalentemente

$$\det\left(\begin{array}{cc} -3(s^{4/3})T/2 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \end{array}\right)\Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = -3(s^{4/3})T/2 \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \neq 0. \quad (5.73)$$

desde que $\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \neq 0$ pela condição (b), segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_1 = \Delta P_1(\epsilon)$ e $\Delta P_2 = \Delta P_2(\epsilon)$ definidas para $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ onde ϵ_0 é suficientemente pequeno, tal que $\Delta P_1(0) = 0$, $\Delta P_2(0) = 0$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = (n_1\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_2(\epsilon))$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período $T = 2\pi m/s$ e está próxima a uma solução circular (com raio $s^{-2/3}$) do problema de Kepler com mesmo período T .

(B) Se $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_2)}\right)\Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, ou equivalentemente

$$\det\left(\begin{array}{cc} s & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \end{array}\right)\Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = s \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \neq 0. \quad (5.74)$$

desde que $\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \neq 0$ pela condição (b), segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_2 = \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_1, \epsilon)$ definidas para $\Delta P_1 \in [0, \delta]$ e $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta P_2(0, 0) = 0$, $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = (n_1\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon))$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a $T = 2\pi m/s$ e está próxima a uma solução circular (com raio $s^{-2/3}$) do problema de Kepler com período T .

(C) Se $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_1)}\right)\Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, ou equivalentemente

$$\det\left(\begin{array}{cc} s & -3s^{4/3}T/2 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} \end{array}\right)\Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = s \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} + (3s^{4/3}T/2) \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} \neq 0. \quad (5.75)$$

a última desigualdade acima é equivalente a condição (c) do enunciado e assim segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_1 = \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_2, \epsilon)$ definidas para $\Delta P_1 \in [0, \delta]$ e $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta P_1(0, 0) = 0$, $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon} = (n_1\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2)$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período $\tau(\Delta P_2, \epsilon)$ próximo a $T = 2\pi m/s$ e está próxima a uma solução circular (com raio $s^{-2/3}$) do problema de Kepler com período T . ■

Observação 5.6.3. Assim como no caso espacial (veja Observação 5.4.2) podemos obter famílias de soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ -simétrica a um parâmetro e com período fixo, o mesmo da solução do problema de Kepler. Também existem soluções periódicas a dois parâmetros, mas o período não é fixo, apenas está próximo ao da solução circular do problema de Kepler.

Observação 5.6.4. Também como no caso espacial, temos em resultado semelhante ao da Observação 5.4.3. Lembramos que a condição inicial da órbita de Kepler é dada por

$$\mathbf{Y}_0 = (n_1\pi, 0, s^{-1/3}, 0)$$

e da solução continuada é dada por

$$\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2),$$

ambas sobre o eixo x e em termos das coordenadas de Poincaré-Delaunay 5.63.

Observamos que o acréscimo ΔP_1 induz um acréscimo no semi-eixo maior da órbita. Desta forma fica claro que a condição inicial da solução continuada tem posição diferente da órbita de Kepler.

Já o o acréscimo ΔP_2 pode ser resultado do acréscimo em P_1 ou além de P_1 , de um acréscimo do momento angular G . Se estamos no primeiro caso, ou seja, o acréscimo ΔP_2 se deve somente ao acréscimo de P_1 , a velocidade é a mesma da órbita do problema de Kepler. Se o acréscimo ΔP_2 se deve também a um acréscimo de G e sendo $G = \|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\| = \|\mathbf{r}\| \|\dot{\mathbf{r}}\| \sin \theta$, onde θ é o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\dot{\mathbf{r}}$, segue que o acréscimo em G pode ser resultado de um acréscimo em $\dot{\mathbf{r}}$ ou em θ . Desta forma a solução continuada pode ter velocidade inicial diferente daquela da órbita de Kepler.

Resumindo, a posição inicial da solução continuada é uma perturbação da posição da órbita de Kepler e a velocidade possivelmente poderá também ser uma perturbação da velocidade da órbita kepleriana.

5.6.3 Continuação de órbitas circulares $\mathcal{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas no caso planar

Hipótese 5.6.2. A função W_1 é invariante sobre a reflexão em torno do eixo y .

Lema 5.6.4. Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$ solução circular do problema (5.65) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay 5.63, T -periódica e $\mathcal{S}_2$ -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, P_1^0, P_2^0) = ((n_1 + 1/2)\pi, 0, s^{-1/3}, 0)$, onde $n_1 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$ e $T/2 = \pi m/s$ com $m \in \mathbb{N}$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é dada por (5.71)

Demonstração: A demonstração é similar a do Lema 5.6.3 . ■

Teorema 5.6.2. Assuma a Hipótese 5.6.2 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$, solução circular do problema (5.65) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.6.4. Suponhamos que se verifiquem as seguintes hipóteses.

$$(a) \quad \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau = 0,$$

e

i) Se além da hipótese (a) admitimos que

$$(b) \quad \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial Q_2 \partial Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0.$$

Então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, \Delta Q_2(\epsilon), \Delta P_1(\epsilon), 0)$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ simétrica com período $T = 2\pi m/s$.

ii) Ainda supondo as hipóteses (a) e (b) temos que existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon) = (0, \Delta Q_2(\Delta P_1, \epsilon), \Delta P_1, 0)$, com ϵ e ΔP_1 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a T .

iii) Assumindo a hipótese (a) e também a condição

$$(c) \quad s \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial Q_2 \partial P_1}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau + (3s^{4/3}T/2) \frac{\partial H_1}{\partial Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} \neq 0.$$

Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta Q_2, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta Q_2, \epsilon) = (0, \Delta Q_2, \Delta P_1(\Delta Q_2, \epsilon), 0)$, com ϵ e ΔQ_2 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $\tau(\Delta Q_2, \epsilon)$ próximo a T .

Observação 5.6.5. No teorema acima estamos usando a notação $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0) := (\Delta Q_2, \Delta P_1)$.

Demonstração: A demonstração é análoga ao Teorema 5.6.1. ■

Observação 5.6.6. Observe que vale um comentário análogo a Observação 5.4.2, ou seja podemos obter condições para existência de famílias de soluções $\mathcal{S}_2$ -simétricas, cujas condições iniciais dependem de um ou de dois parâmetros e ainda vale um comentário similar ao da Observação 5.6.4.

5.6.4 Continuação de órbitas circulares duplamente simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas no caso planar

Assumindo as Hipóteses 5.6.1 e 5.6.2 acima, verificamos a existência de soluções duplamente simétricas do sub-problema planar.

Lema 5.6.5. Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$ solução circular do problema (5.65) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay (5.63), T -periódica e duplamente simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, P_1^0, P_2^0) = ((n_1 + 1/2)\pi, 0, s^{-1/3}, 0)$ sobre o eixo y , onde $n_1 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$ e $T/2 = \pi m/s$ com $m \in \mathbb{N}$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é dada pela equação (5.71).

Demonstração: A demonstração é análoga a do Lema (5.6.4). ■

Teorema 5.6.3. Assuma as Hipóteses 5.6.1 e 5.6.2 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$, solução circular do problema (5.65) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.6.5. Então:

i) Para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, \Delta Q_2(\epsilon), \Delta P_1(\epsilon), 0)$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica com período $T = 4\pi m/s$.

ii) Ainda existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta Q_2, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta Q_2, \epsilon) = (0, \Delta Q_2, \Delta P_1(\Delta Q_2, \epsilon), 0)$, com ϵ e ΔQ_2 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica com período $\tau(\Delta Q_2, \epsilon)$ próximo a T .

Observação 5.6.7. No teorema acima estamos usando a notação $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0) := (\Delta Q_2, \Delta P_1)$.

Demonstração: Seja $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)$ a solução circular do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y} = (n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0)$ sobre o eixo y em uma vizinhança de $\mathbf{Y}_0 = (n_1 + 1/2)\pi, 0, s^{-1/3}, 0)$. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ , obtemos a solução $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ do problema perturbado (5.65), a qual satisfaz

$$Q_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) = (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} t + (n_1 + 1/2)\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0,$$

$$Q_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) = \Delta Q_2 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0.$$

Para que a solução seja duplamente simétrica é suficiente que em $t = T/4$ a solução intersecte ortogonalmente o eixo x e do Lema 5.6.2 equação (5.69), seguem as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} t - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \Delta Q_2 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Observe que claramente $f_1(T/4, \mathbf{Y}, 0)|_{\mathbf{Y}=0} = f_2(T/4, \mathbf{Y}, 0)|_{\mathbf{Y}=0} = 0$. Por outro lado, segue das equações de periodicidades (5.76) que

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta Q_2, \Delta P_1)} \right|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s & 0 & -3(s^{4/3})T/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então temos que:

$$(A) \det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\Delta Q_2, \Delta P_1)}\right) \neq 0.$$

$$(B) \det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta Q_2)}\right) \neq 0.$$

Aplicando o Teorema da Função Implícita nos itens (A) e (B) concluímos o resultado. ■

Observação 5.6.8. Observe que poderíamos obter outras famílias de soluções circulares duplas simétricas, considerando a condição inicial sobre o eixo x e intersectando o eixo y no instante $T/4$. Para isso basta proceder de maneira similar ao do teorema anterior. Observamos ainda que as soluções duplamente simétricas obtidas acima, são tais que não fazem exigências aos termos perturbadores, além das condições que fizemos inicialmente sobre W_1 . Podemos observar que nos Teorema 5.6.1 e 5.6.2 isso não acontece.

Observação 5.6.9. Assim como no caso de soluções $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, obtemos famílias de soluções duplamente simétricas, cujas condições iniciais dependem de um ou de dois parâmetros, no primeiro caso com período fixo e no segundo caso, com período próximo ao da solução do problema de Kepler. Observe que ainda vale um comentário similar ao da Observação 5.6.4.

5.6.5 Continuação de órbitas elípticas simétricas do problema de Kepler no caso planar

A continuação de órbitas elípticas do problema de Kepler, mesmo no caso planar apresenta um grau de complexidade maior. Um exemplo disto está nas soluções duplamente simétricas, pois quando usamos as coordenadas de Delaunay para construirmos as equações de periodicidade da órbita Kepleriana obtemos uma incompatibilidade com as mesmas. Porém para os casos de soluções com apenas uma das simetrias, em relação ao eixo x ou em relação ao eixo y , podemos conseguir condições para a continuação de soluções periódicas simétricas.

5.6.6 Continuação de órbitas elípticas $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas no caso planar

Consideremos a hipótese 5.6.1 então obtemos a caracterização da órbita elíptica do problema de Kepler $\mathcal{S}_1$ -Simétrica nas coordenadas de Delaunay.

Lema 5.6.6. Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$ solução elíptica do problema (5.62) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Delaunay (5.60), T -periódica e $\mathcal{S}_1$ -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, P_1^0,$

$P_2^0) = (n_1\pi, n_2\pi, s^{-1/3}, p_2)$ sobre o eixo x , onde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$, $p_2 \in \mathbb{R}$ com $p_2 \neq s^{-1/3}$ e $T/2 = \pi m/s$ com $m \in \mathbb{N}$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é da forma

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= st + Q_1^0, & P_1(t) &= P_1^0, \\ Q_2(t) &= Q_2^0, & P_2(t) &= P_2^0. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Demonstração: A demonstração é análoga ao caso espacial, basta eliminar as variáveis Q_3 e P_3 . ■

Teorema 5.6.4. *Assuma a Hipótese 5.6.1 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$, solução elíptica do problema (5.62) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.6.6. Suponhamos que se verifiquem as seguintes hipóteses.*

$$(a) \quad \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau = 0,$$

e

i) Se além da hipótese (a) admitimos que

$$(b) \quad \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \Delta P_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0,$$

então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, 0, \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_2(\epsilon))$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ simétrica com período $T = 2\pi m/s$.

ii) Ainda supondo as hipóteses (a) e (b) temos que existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon) = (0, 0, \Delta P_1, \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon))$, com $\epsilon \in \Delta P_1$ pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a T .

iii) Assumindo a hipótese (a) e a condição

$$(c) \quad s \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_2 \Delta P_1}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau + (3s^{4/3}T/2) \frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} \neq 0,$$

então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon) = (0, 0, \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2)$, com $\epsilon \in \Delta P_2$ pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_2, \epsilon)$ próximo a T .

Observação 5.6.10. No teorema acima estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2) := (\Delta P_1, \Delta P_2)$, onde $s \in \mathbb{R}^+$ é escolhido convenientemente de maneira a evitar problemas de singularidades.

Demonstração: Seja $\varphi(t, \mathbf{Y}; 0)$ a solução elíptica do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2)$ sobre o eixo x em uma vizinhança de $\mathbf{Y}_0 = (n_1\pi, 0, s^{-1/3}, 0)$. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ , obtemos que a solução $\varphi(t, \mathbf{Y}, ; \epsilon) = (Q_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon), Q_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon), P_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon), P_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon))$ do problema perturbado (5.62) é tal que

$$Q_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + n_1\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}),$$

$$Q_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = \epsilon^{\alpha+i}Q_2^1(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}).$$

A fim de que a solução seja $\mathcal{S}_1$ -simétrica é suficiente que em $t = T/2$ a solução intersecte ortogonalmente o eixo x e pelo Lema 5.6.2 equação (5.69), seguem as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} \frac{T}{2} - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0 \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon) = 0 \end{aligned} \quad (5.78)$$

Com a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2,) := (\Delta P_1, \Delta P_2)$. Observe que se $Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$ (equivalente a hipótese (a)) e desta forma, temos que $f_1(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$ e $f_2(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$. Segue das equações de periodicidades (5.78)

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_2)} \right|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s & -3(s^{4/3})T/4 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0}.$$

Segue do Teorema da Função Implícita que se o jacobiano acima possui posto 2, então existem soluções $\mathcal{S}_1$ -simétricas próxima a órbita de Kepler, para o parâmetro ϵ suficientemente pequeno. O jacobiano terá posto 2 nas seguintes condições:

(A) Se $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\Delta P_1, \Delta P_2)}\right)\Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, ou equivalentemente

$$\det \begin{pmatrix} -3(s^{4/3})T/2 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = -3(s^{4/3})T/2 \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2}. \quad (5.79)$$

desde que $\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \neq 0$ pela condição (b), segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_1 = \Delta P_1(\epsilon)$ e $\Delta P_2 = \Delta P_2(\epsilon)$ definidas para $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$ onde ϵ_0 é suficientemente pequeno, tal que $\Delta P_1(0) = 0$, $\Delta P_2(0) = 0$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = (n_1\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_2(\epsilon))$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período $T = 2\pi m/s$ e está próxima a uma solução elíptica do problema de Kepler com mesmo período T .

(B) Se $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_2)}\right)\Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, ou equivalentemente

$$\det \begin{pmatrix} s & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = s \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2}. \quad (5.80)$$

desde que $\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \neq 0$ pela condição (b), segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_2 = \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_1, \epsilon)$ definidas para $\Delta P_1 \in [0, \delta)$ e $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$ onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta P_2(0, 0) = 0$, $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = (n_1\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon))$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a $T = 2\pi m/s$ e está próxima a uma solução elíptica do problema de Kepler com período T .

(C) Se $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_1)}\right)\Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, ou equivalentemente

$$\det \begin{pmatrix} s & -3s^{4/3}T/2 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = s \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} + (3s^{4/3}T/2) \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t}. \quad (5.81)$$

a última desigualdade acima é equivalente a condição (c) do enunciado e assim segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_1 = \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_2, \epsilon)$ definidas para $\Delta P_1 \in [0, \delta)$ e $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$ onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta P_1(0, 0) = 0$, $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon} = (n_1\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2)$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período $\tau(\Delta P_2, \epsilon)$ próximo a $T = 2\pi m/s$ e está próxima a uma solução elíptica do problema de Kepler com período T . ■

Observação 5.6.11. Como no caso espacial vale um comentário análogo ao da Observação 5.5.2 ou seja a posição inicial da solução continuada é uma perturbação da posição da órbita de Kepler e a velocidade possivelmente poderá também ser uma perturbação da velocidade da órbita kepleriana.

5.6.7 Continuação de soluções elípticas $\mathcal{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas cartesianas no caso planar

Assumiremos a hipótese 5.6.2 obtemos a caracterização de uma solução elíptica e $\mathcal{S}_2$ -simétrica do problema de Kepler nas coordenadas de Delaunay e cuja demonstração é análoga ao caso espacial

Lema 5.6.7. *Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$ solução elíptica do problema (5.62) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Delaunay (5.60), T -periódica e $\mathcal{S}_2$ -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, P_1^0, P_2^0) = (n_1\pi, (n_2 + 1/2), s^{-1/3}, p_2)$ sobre o eixo- y , onde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$, $p_2 \in \mathbb{R}$ com $p_2 \neq s^{-1/3}$ e $T/2 = \pi m/s$ com $m \in \mathbb{N}$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é dada pela equação (5.77).*

Teorema 5.6.5. *Assuma a Hipótese 5.6.2 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$, solução elíptica do problema (5.62) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.6.7. Suponhamos que se verifiquem as seguintes hipóteses.*

$$(a) \quad \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau = 0$$

e

i) Se além da hipótese (a) admitimos que

$$(b) \quad \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial Q_2 \partial Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0,$$

então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, \Delta Q_2(\epsilon), \Delta P_1(\epsilon), 0)$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon, \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $T = 2\pi m/s$.

ii) Ainda supondo as hipóteses (a) e (b) temos que existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon) = (0, \Delta Q_2(\Delta P_1, \epsilon), \Delta P_1, 0)$, onde ϵ e ΔP_1 são suficientemente pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a T .

iii) Assumindo a hipótese (a) e também a condição

$$(c) \quad s \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial Q_2 \partial P_1}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau + (3s^{4/3}T/2) \frac{\partial H_1}{\partial Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} \neq 0,$$

então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta Q_2, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta Q_2, \epsilon) = (0, \Delta Q_2, \Delta P_1(\Delta Q_2, \epsilon), 0)$, com ϵ e ΔP_2 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $\tau(\Delta Q_2, \epsilon)$ próximo a T .

Observação 5.6.12. No teorema acima estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, (n_2 + 1/2), s^{-1/3} + \Delta P_1, p_2 + \Delta P_2) := (\Delta Q_2, \Delta P_1)$.

Demonstração: A prova é similar a prova do Teorema 5.6.4. ■

Observação 5.6.13. Nos teoremas acima 5.6.4 e 5.6.5, desde que verificadas as condições (a) e (b) e/ou (c) podemos continuar soluções elípticas do problema de Kepler a famílias de soluções a um parâmetro, dependendo de ϵ de soluções $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período fixo $T = 2\pi m/s$. Também podemos obter famílias de soluções a dois parâmetros mas neste caso não temos período fixo.

Observação 5.6.14. Como no caso espacial vale um comentário análogo ao da Observação 5.5.2 ou seja a posição inicial da solução continuada é uma perturbação da posição da órbita de Kepler e a velocidade possivelmente poderá também ser uma perturbação da velocidade da órbita kepleriana.

Não podemos obter um resultado que permite continuar soluções elípticas do problema de Kepler, duplamente simétricas no problema (5.59) usando coordenadas de Delaunay. Porém assumindo que o problema (5.59) possui ambas simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ então possivelmente alguma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica poderá ser também $\mathcal{S}_2$ -simétrica e vice-versa.

5.7 Soluções periódicas de perturbações do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Consideremos o problema cujo sistema Hamiltoniano é dado pela função Hamiltoniana

$$K = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - (xp_y - yp_x) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \epsilon^\alpha W_2(x, y, z, \epsilon). \quad (5.82)$$

com $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{K}$, onde $\mathcal{K}$ é um compacto contendo a origem, (p_x, p_y, p_z) é o momento e W_2 uma função analítica em (x, y, z, ϵ) . Usando a notação $\mathbf{q} = (x, y, z)$ e escrevendo W_2 em série de Taylor em ϵ em torno de $\epsilon = 0$.

$$W_2(\mathbf{q}, \epsilon) = W_2(\mathbf{q}, 0) + \epsilon \frac{\partial W_2(\mathbf{q}, 0)}{\partial \epsilon} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 W_2(\mathbf{q}, 0)}{\partial \epsilon^2} + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

A função Hamiltoniana (5.82) pode ser escrita como

$$K = K_0 - \epsilon^{\alpha+i} K_1 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}),$$

onde $K_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - (xp_y - yp_x) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ e $K_1 = \frac{1}{i} \frac{\partial^i W_2(\mathbf{q}, 0)}{\partial \epsilon^i} \neq 0$, sendo i o primeiro natural com esta propriedade.

Observação 5.7.1. Observe que K_0 é a função Hamiltoniana do Problema de Kepler em coordenadas giratórias. Desta forma a função Hamiltoniana (5.82) é uma perturbação em ϵ do problema de Kepler em coordenadas giratórias.

Lema 5.7.1. A expressão $xp_y - yp_x$ é a terceira componente do momento angular $\mathbf{G}$.

Demonstração: Segue diretamente do cálculo de $\mathbf{q} \times \mathbf{p}$. ■

As equações de movimento associadas a função Hamiltoniana (5.82) são

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x + y, & \dot{p}_x &= p_y - \frac{x}{\|\mathbf{q}\|^3} - \epsilon^\alpha \frac{\partial K_1}{\partial x} - \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), \\ \dot{y} &= p_y - x, & \dot{p}_y &= -p_x - \frac{y}{\|\mathbf{q}\|^3} - \epsilon^\alpha \frac{\partial K_1}{\partial y} + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), \\ \dot{z} &= p_z, & \dot{p}_z &= -\frac{z}{\|\mathbf{q}\|^3} - \epsilon^\alpha \frac{\partial K_1}{\partial z} + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}). \end{aligned} \quad (5.83)$$

Observamos que o sistema acima não é um sistema mecânico.

No que segue, vamos proceder de maneira semelhante a Seção 5.2 para obter soluções simétricas periódicas, de maneira que vamos descrever o sistema (5.83) nas coordenadas de Delaunay e Poincaré-Delaunay.

A função hamiltoniana (5.82) nas coordenadas de Delaunay tem a forma

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon) = -\frac{1}{2P_1^2} - P_3 + \epsilon^{\alpha+i} K_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}), \quad (5.84)$$

onde $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ e $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$. As equações de movimento do problema perturbado nas

coordenadas de Delaunay são dadas por

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), \\ \dot{Q}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), \\ \dot{Q}_3 &= -1 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_3 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}).\end{aligned}\tag{5.85}$$

Já nas coordenadas de Poincaré-Delaunay ($PD - 1$) a função Hamiltoniana (5.82) é dada por

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon) = -\frac{1}{2P_1^2} - P_3 + \epsilon^{\alpha+i} K_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}),\tag{5.86}$$

com sistema hamiltoniano associado da forma

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), \\ \dot{Q}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), \\ \dot{Q}_3 &= -1 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_3 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}).\end{aligned}\tag{5.87}$$

e finalmente, a função Hamiltoniana (5.82) nas coordenadas ($PD - 2$) é dada por

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon) = -\frac{1}{2P_1^2} - P_1 + \frac{Q_2^2 + P_2^2 + Q_3^2 + P_3^2}{2} + \epsilon^{\alpha+i} H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}),\tag{5.88}$$

sendo que o sistema Hamiltoniano associado é da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= \frac{1}{(P_1)^3} - 1 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), \\ \dot{Q}_2 &= P_2 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_2 &= -Q_2 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), \\ \dot{Q}_3 &= P_3 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_3 &= -Q_3 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}).\end{aligned}\tag{5.89}$$

Observação 5.7.2. Novamente vamos considerar a solução circular ou elíptica do problema de Kepler bem como a sua vizinhança $\mathcal{U}$ de maneira que não intersecte o compacto $\mathcal{U}$ e desta forma os sistemas (5.85), (5.87) e (5.89) não apresentam problemas de singularidades (veja Figura 5.1).

Nas próximas seções, usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ , a solução do problema perturbado, nos problemas (5.85), (5.87) ou (5.89) é como no Lema ??.

5.8 Continuação de órbitas circulares do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Nesta seção vamos obter soluções periódicas simétricas próximas a soluções circulares do problema de Kepler em coordenadas giratórias. Consideraremos separadamente as simetrias $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ e também soluções duplamente simétricas em dois sentidos: $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas e $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$ -simétricas. Utilizaremos também as coordenadas de Poincaré-Delaunay ($PD - 1$) e ($PD - 2$) e veremos as diferentes famílias de soluções que se pode obter para o problema (5.83).

5.8.1 Continuação de órbitas circulares $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Hipótese 5.8.1. Suponhamos que a função W_2 é invariante sobre a reflexão $\mathcal{S}_1$.

Lema 5.8.1. Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução circular do problema (5.83) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD - 1$), T -periódica e $\mathcal{S}_1$ -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0) = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3}, 0, p_3)$ onde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $p_3 \in \mathbb{R}$ e $T/2 = \pi m/s$, desde que $s = m/n$ com $m, n \in \mathbb{N}$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= st + Q_1^0, & P_1(t) &= P_1^0, \\ Q_2(t) &= Q_2^0, & P_2(t) &= P_2^0, \\ Q_3(t) &= -t + Q_3^0, & P_3(t) &= P_3^0. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Observação 5.8.1. Lembrando que a inclinação do plano orbital é dada por $i = \arccos(H/G)$ e desta maneira em termos das coordenadas de Poincaré-Delaunay ($PD - 1$), segue que se p_3 é arbitrário, então a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com qualquer inclinação.

Demonstração: Consideramos $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_0; 0)$ a solução circular do problema de Kepler (equação (5.83) com $\epsilon = 0$) dada nas coordenadas de Poincaré-Delaunay ($PD - 1$) com condição inicial $Y_0 = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3}, 0, p_3) \in \mathcal{L}_1$. Para satisfazer a condição que em $T/2$ a solução esteja em $\mathcal{L}_1$ é suficiente que se verifiquem as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= sT/2 + n_1\pi &= (m + n_1)\pi, \\ Q_2(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= 0 &= 0, \\ Q_3(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= -T/2 + n_2\pi &= (n_2 - n)\pi, \end{aligned}$$

com $m, n \in \mathbb{N}$, $n > n_2$. As equações de periodicidade são satisfeitas tomando-se $T/2 = \pi m/s$ e $s = m/n$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Esta solução também possui plano orbital com qualquer inclinação já que p_3 é arbitrário. ■

Teorema 5.8.1. Assuma a Hipótese 5.8.1 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução circular T -periódica do problema (5.87) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.8.1. Suponhamos que se verifiquem as seguintes hipóteses

$$(a) \int_0^{T/2} \frac{\partial K_1}{\partial Q_2}(\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt = 0 \quad (5.91)$$

e

i)– Se além da hipótese (a) considerarmos

$$(b) \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial Q_2 \partial \Delta Q_2}(\varphi_{kep}(t, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt \neq 0. \quad (5.92)$$

Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon) = (0, \Delta Q_2(\Delta P_3, \epsilon), 0, \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon), 0, \Delta P_3)$, com ϵ e ΔP_3 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_3, \epsilon)$ próximo a T e está próxima ao círculo em um plano com qualquer inclinação, dependendo da constante p_3 , e cujo raio é $s^{-2/3}$.

ii)– Suponha que além da hipótese (a) considerarmos

$$(c) \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial Q_2 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(t, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt \neq 0,$$

então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, \Delta Q_2, 0, \Delta P_1(\Delta Q_2, \epsilon), 0, \Delta P_3(\Delta Q_2, \epsilon))$, com ϵ e ΔQ_2 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica com período $\tau(\Delta Q_2, \epsilon)$ próximo a T e está próxima ao círculo em um plano com qualquer inclinação, dependendo da constante p_3 , e cujo raio é $s^{-2/3}$.

Observação 5.8.2. Nas condições (a), (b) e (c) do Teorema 5.8.1 estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, p_3 + \Delta P_3) := (\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3)$, onde $s \in R^+$ é escolhido convenientemente para evitar problemas de singularidades.

Demonstração: Consideremos o sistema perturbado (5.87) com $\epsilon \neq 0$ e suficientemente pequeno e $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, p_3 + \Delta P_3) \in \mathcal{L}_1$ uma condição inicial em uma vizinhança de $\mathbf{Y}_0$, onde $\mathbf{Y}_0$ é como no Lema 5.8.1. Seja $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)$ a solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}$, então usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ , obtemos a solução $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ do sistema perturbado, a qual satisfaz

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + n_1\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ Q_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \epsilon^{\alpha+i}Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}) = 0, \\ Q_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= -t + n_2\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0. \end{aligned}$$

Para que a solução seja $\mathcal{S}_1$ -simétrica é suficiente que em $t = T/2$ a solução intersecte ortogonalmente o sub-plano $\mathcal{L}_1$ e desta forma, seguem do Lema 5.3.4 equação (5.28), as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \\ f_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= -t + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0. \end{aligned} \tag{5.93}$$

Observe que se $Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$ (equivalente a condição (a) do enunciado) então segue que $f_1(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_2(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_3(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$. Das equações de periodicidade (5.93) segue que

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3)} \right|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s & -3(s^{4/3})T/4 & 0 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} & \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0}.$$

Do Teorema da Função Implícita segue que se o jacobiano acima possui posto 3, então existem soluções $\mathcal{S}_1$ -simétricas próximas a órbita de Kepler, para o parâmetro ϵ suficientemente pequeno. A fim de que o Jacobiano acima tenha posto três, é suficiente que se verificam as seguintes possibilidades:

(A) Suponhamos que $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_2)}\right)_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, ou seja,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -3s^{4/3}T/4 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = -3s^{4/3}T/2 \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}} \neq 0. \tag{5.94}$$

Esta última condição é equivalente a hipótese (b) do enunciado e assim segue do Teorema da Função Implícita existem funções analíticas $\Delta P_1 = \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon)$, $\Delta P_2 = \Delta P_2(\Delta P_3, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_3, \epsilon)$ definidas

para $|\epsilon| < \epsilon_0$ $|\Delta P_3| < \delta$ onde ϵ_0 e δ são suficientemente pequenos, tal que $\Delta P_1(0,0) = 0$, $\Delta P_2(0,0) = 0$ e $\tau(0,0) = T$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon} = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon), \Delta P_2(\Delta P_3, \epsilon), p_3 + \Delta P_3)$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período τ próximo a $T = 2\pi m/s$, desde que $s = m/n$ onde $m, n \in \mathbb{N}$; e está próxima a uma solução circular do problema de Kepler de raio $s^{-2/3}$ e tem plano com qualquer inclinação (desde que p_3 seja tal que se verifique as hipóteses (a) e (b) do Teorema).

(B) A segunda possibilidade é $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_3)}\right)_{t=T/2, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} \neq 0$, equivalentemente

$$\det \begin{pmatrix} s & -3s^{4/3}T/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} = -3s^{4/3}T/2 \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0} \neq 0. \quad (5.95)$$

A desigualdade acima é equivalente a condição (c) e temos pelo Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_1 = \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon)$, $\Delta P_3 = \Delta P_3(\Delta P_2, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_2, \epsilon)$ definidas para $|\epsilon| < \epsilon_0$ $|\Delta P_2| < \delta$ onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta P_1(0,0) = 0$, $\Delta P_3(0,0) = 0$ e $\tau(0,0) = T$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon} = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2, p_3 + \Delta P_3(\Delta P_2, \epsilon))$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período τ próximo a $T = 2\pi m/s$, desde que $s = m/n$ onde $m, n \in \mathbb{N}$; e está próxima a uma solução circular do problema de Kepler com período T , raio $s^{-2/3}$ e tem plano com qualquer inclinação (desde que p_3 seja tal que se verifique as hipóteses (a), e (c) do Teorema). ■

Observação 5.8.3. *Aqui também vale um comentário análogo ao da Observação 5.4.3 ou seja a posição inicial da solução continuada é uma perturbação da posição da órbita de Kepler e a velocidade possivelmente poderá também ser uma perturbação da velocidade da órbita kepleriana.*

Podemos obter outro resultado que permite continuar soluções $\mathcal{S}_1$ -simétricas utilizando as coordenadas de Poincaré-Delaunay ($PD - 2$). A diferença está que no próximo teorema poderemos garantir a continuação de soluções circulares para qualquer perturbação do problema de Kepler em coordenadas giratórias, ou seja, não vamos exigir nenhuma condição sobre a função W_2 , a menos daquelas feitas inicialmente. Porém em relação ao Teorema 5.8.1, poderemos continuar um número mais restrito de soluções visto que no próximo teorema somente soluções no plano- (x, y) podem ser continuadas.

Lema 5.8.2. *Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução circular do problema em coordenadas giratórias (5.83) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD - 2$), T -periódica e $\mathcal{S}_1$ -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0) = (n_1\pi, 0, 0, s^{-1/3}, 0, 0)$, onde $n_1 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$ e $T/2 = \pi m/(s-1)$ com $m \in \mathbb{N}$ satisfazendo $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é dada por*

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= (s-1)t + Q_1^0, & P_1(t) &= P_1^0, \\ Q_2(t) &= Q_2^0 \cos t + P_2^0 \sin t, & P_2(t) &= -Q_2^0 \sin t + P_2^0 \cos t, \\ Q_3(t) &= Q_3^0 \cos t + P_3^0 \sin t, & P_3(t) &= -Q_3^0 \sin t + P_3^0 \cos t, \end{aligned} \quad (5.96)$$

A solução está contida no plano- (x, y) .

Observação 5.8.4. *A inclinação do plano orbital é dada por $i = \arccos(H/G)$ e desta forma se $G = H$ então segue que $i = 0$, ou seja o plano orbital coincide com o plano- (x, y) .*

Demonstração: Consideremos a solução circular $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_0; 0)$ do problema de Kepler em coordenadas giratórias, descrito nas coordenadas de Poincaré-Delaunay ($PD - 2$) com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (n_1\pi, 0, 0, s^{-1/3}, 0, p_3) \in \mathcal{L}_1$. Para que esta solução seja $\mathcal{S}_1$ -simétrica é suficiente que no instante $t = T/2$ ela intersecte o sub-plano $\mathcal{L}_1$ ortogonalmente e pelo Lema 5.3.5 equação (5.31) é suficiente que se verifiquem

as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{Y}_0) &= (s-1)T/2 + (n_1)\pi = (m+n_1)\pi, \\ Q_2(T/2, \mathbf{Y}_0) &= 0 = 0, \\ Q_3(T/2, \mathbf{Y}_0) &= p_3 \sin t = 0 \end{aligned}$$

onde $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$. As equações de periodicidade são satisfeitas tomando $p_3 = 0$ e $T/2 = \pi m/(s-1)$. Observe que poderíamos tomar $T/2 = k\pi$, $s-1 = (2m+1)/2k$ e p_3 arbitrário e também teríamos verificado as equações de periodicidade, mas por motivos que ficarão mais claro posteriormente não faremos esta escolha. Desde que $p_3 = q_3 = 0$ segue que $G = H$ e portanto a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com inclinação nula. ■

Teorema 5.8.2. *Assuma a Hipótese 5.8.1 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução circular do problema (5.89) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.8.2. Então:*

i)– Existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_2(\epsilon), \Delta P_3(\epsilon))$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $T = 2\pi m/(s-1)$, desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$. Além disso esta solução está próxima de um círculo do plano- (x, y) com raio $s^{-2/3}$.

ii)– Existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1, \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon), \Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon))$, com ϵ e ΔP_1 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a $T = 2\pi m/(s-1)$ desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$. Além disso esta solução está próxima de um círculo do plano- (x, y) com raio $s^{-2/3}$.

Observação 5.8.5. *No Teorema (5.8.4) estamos usando a seguinte notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3) := (\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3)$, onde $s \in \mathbb{R}^+$ é escolhido convenientemente para evitar problemas de singularidades.*

Demonstração: Consideremos $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon)$ solução do problema perturbado (5.89) para ϵ suficientemente pequeno com condição inicial $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3) \in \mathcal{L}_1$ numa vizinhança de $\mathbf{Y}_0 = (n_1\pi, 0, 0, s^{-1/3}, 0, 0)$. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ e sendo $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)$ solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}$, obtemos que $\varphi(t, \mathbf{Y}, \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}, 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$, a qual satisfaz

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} - 1)t + n_1\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ P_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= \Delta P_2 \sin t + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ P_3(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= \Delta P_3 \sin t + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0. \end{aligned}$$

Para que a solução seja $\mathcal{S}_1$ -simétrica, é suficiente que no instante $t = T/2$ a solução intersecte ortogonalmente o sub-plano $\mathcal{L}_1$. Seguem do Lema 5.3.5 equação (5.31), as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} - 1)t - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= \Delta P_2 \sin t + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_3(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= \Delta P_3 \sin t + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \end{aligned} \tag{5.97}$$

onde $m \in \mathbb{N}$. Observe que $f_1(T/2, \mathbf{Y}, 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_2(T/2, \mathbf{Y}, 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_3(T/2, \mathbf{Y}, 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$. Por outro lado, das equações de periodicidade (5.97) temos que

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3)} \right|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s-1 & -3(s^{4/3})T/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin T/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin T/2 \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0}.$$

Segue do Teorema da Função Implícita que se o jacobiano acima possui posto 3, então existem soluções $\mathcal{S}_2$ -simétricas próximas a órbita de Kepler, para o parâmetro ϵ suficientemente pequeno. Aqui fica claro por que não tomamos, nas equações de periodicidade da solução do problema de Kepler $T/2 = k\pi$, pois

teríamos o jacobiano acima totalmente degenerado. A fim de que o Jacobiano acima tenha posto três, é suficiente que se verificam as seguintes possibilidades:

(A) Suponhamos que $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3)}\right)_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, ou seja,

$$\det \begin{pmatrix} -3s^{4/3}T/2 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen } T/2 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen } T/2 \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = -3s^{4/3}T/2 \text{sen}^2(T/2) \neq 0. \quad (5.98)$$

Supondo que $T/2 \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_1 = \Delta P_1(\epsilon)$, $\Delta P_2 = \Delta P_2(\epsilon)$ e $\Delta P_3 = \Delta P_3(\epsilon)$ definidas para $|\epsilon| < \epsilon_0$ com ϵ_0 suficientemente pequeno, tal que $\Delta P_1(0) = 0$, $\Delta P_2(0) = 0$ e $\Delta P_3(0) = 0$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = (n_1\pi, 0, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_2(\epsilon), \Delta P_3(\epsilon))$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período τ próximo a $T = 2\pi m/(s-1)$, desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$ e está próxima a uma solução circular do problema de Kepler de raio $s^{-2/3}$ e tem plano com inclinação nula.

(B) A segunda possibilidade é $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta P_2, \Delta P_3)}\right)_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, equivalentemente

$$\det \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen } T/2 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen } T/2 \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = (s-1) \text{sen}^2(T/2) \neq 0. \quad (5.99)$$

Novamente supondo que $T/2 \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_2 = \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon)$, $\Delta P_3 = \Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_1, \epsilon)$ definidas para $|\epsilon| < \epsilon_0$ e $|\Delta P_1| < \delta$, onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta P_2(0, 0) = 0$, $\Delta P_3(0, 0) = 0$ e $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = (n_1\pi, 0, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon), \Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon))$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período τ próximo $T = 2\pi m/(s-1)$ e está próxima a uma solução circular do problema de Kepler a qual tem período T , raio $s^{-2/3}$ e plano com inclinação nula. ■

Observação 5.8.6. *Analizamos agora a relação entre posições e velocidades iniciais da órbita de Kepler e da solução continuada. Lembramos que a condição inicial da órbita de Kepler é dada por*

$$\mathbf{Y}_0 = (n_1\pi, 0, 0, s^{-1/3}, 0, p_3),$$

e da solução continuada é dada por

$$\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3),$$

ambas sobre o eixo x e em termos das coordenadas de Poincaré-Delaunay ($PD-1$).

Observamos que o acréscimo ΔP_1 faz com que a condição inicial da solução continuada tem posição diferente da órbita de Kepler.

Já o o acréscimo ΔP_2 pode ser resultado do acréscimo em P_1 ou além de P_1 , de um acréscimo do momento angular G (lembre que $P_2 = \sqrt{2(L-G)} \cos g$). Se estamos no primeiro caso, ou seja, o acréscimo ΔP_2 se deve somente ao acréscimo de P_1 , então o acréscimo ΔP_3 (o qual pode ser resultado de uma acréscimo em G ou em H) determinará um acréscimo na terceira componente $H = G \cos i$ do momento angular, desta forma deve haver um acréscimo em i (inclinação do plano orbital) e assim a velocidade não tem a mesma direção da velocidade inicial da órbita do problema de Kepler. Se o acréscimo ΔP_2 se deve também a um acréscimo de G e sendo $G = \|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\| = \|\mathbf{r}\| \|\dot{\mathbf{r}}\| \sin \theta$, onde θ é o

ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\dot{\mathbf{r}}$ segue que o acréscimo em G pode ser resultado de um acréscimo em $\dot{\mathbf{r}}$ ou em θ . Desta forma a solução continuada pode ter velocidade inicial diferente daquela da órbita de Kepler.

Resumindo, a posição inicial da solução continuada é uma perturbação da posição da órbita de Kepler e a velocidade possivelmente poderá também ser uma perturbação da velocidade da órbita kepleriana.

Observação 5.8.7. Comparando as soluções $\mathcal{S}_1$ -simétricas obtidas dos Teoremas 5.8.1 e 5.8.2 acima, percebemos que no primeiro caso, podemos continuar soluções circulares do problema de Kepler com qualquer inclinação e obter famílias de soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ -simétricas a dois parâmetros, desde que a função W_2 satisfaça as condições (a), (b) e (c) ali descritas. No Teorema 5.8.2 podemos continuar soluções circulares do problema de Kepler que estão contidas no plano- (x, y) e obter famílias de soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ -simétricas a um parâmetro, dependendo de ϵ , e a dois parâmetros. Neste caso não há restrições sobre a função perturbadora W_2 mas há restrições sobre o valor de s , que determina o valor do raio da órbita a ser continuada.

5.8.2 Continuação de órbitas circulares $\mathcal{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Hipótese 5.8.2. Suponhamos que a função W_2 é invariante pela reflexão $\mathcal{S}_2$.

Lema 5.8.3. Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução circular do problema (5.83) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD-1$), T -periódica e $\mathcal{S}_2$ -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0) = ((n_1 + 1/2)\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3}, 0, p_3)$ onde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $p_3 \in \mathbb{R}$ e $T/2 = \pi m/s$, desde que $s = m/n$ onde $m, n \in \mathbb{N}$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é dada pela equação 5.90. Desde que p_3 é arbitrário, segue que a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com inclinação arbitrário.

Demonstração: Consideramos $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_0; 0)$ a solução circular do problema de Kepler (equação (5.83) com $\epsilon = 0$) em coordenadas de Poincaré-Delaunay ($PD-1$) com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = ((n_1 + 1/2)\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3}, 0, p_3) \in \mathcal{L}_2$. Para satisfazer a condição que em $T/4$ a solução está em $\mathcal{L}_2$ é suficiente que se verifiquem as seguintes equações de periodicidade

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= sT/2 + (n_1 + 1/2)\pi &= (m + n_1 + 1/2)\pi, \\ Q_3(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= -T/2 + n_2\pi &= (n_2 - n)\pi, \\ P_2(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) &= 0 &= 0, \end{aligned}$$

com $m, n \in \mathbb{N}$, $n > n_2$. As equações de periodicidade são satisfeitas tomando-se $n = 0$ e $T/2 = \pi m/s$, desde que $s = m/n$ onde $m, n \in \mathbb{N}$. Esta solução também possui plano orbital com qualquer inclinação já que p_3 é arbitrário. ■

Teorema 5.8.3. Assuma a Hipótese 5.8.2 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução circular T -periódica do problema (5.87) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.8.3. Suponhamos que se verifiquem as seguintes hipóteses

$$(a) \int_0^{T/2} \frac{\partial K_1}{\partial Q_2}(\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt = 0 \quad (5.100)$$

e

i)– Se além da hipótese (a) considerarmos

$$(b) \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial Q_2 \partial \Delta Q_2}(\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt \neq 0. \quad (5.101)$$

Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon) = (0, \Delta Q_2(\Delta P_3, \epsilon), 0, \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon), 0, \Delta P_3)$, com ϵ e ΔP_3 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_3, \epsilon)$ próximo a T e está próxima ao círculo de raio $s^{-2/3}$ em um plano com qualquer inclinação, dependendo da constante p_3 .

ii)– Suponha que além da hipótese (a) considerarmos

$$(c) \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial Q_2 \partial \Delta P_3} (\varphi_{kep}(t, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt \neq 0,$$

então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta Q_2, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta Q_2, \epsilon) = (0, \Delta Q_2, 0, \Delta P_1(\Delta Q_2, \epsilon), 0, \Delta P_3(\Delta Q_2, \epsilon))$, com ϵ e ΔQ_2 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $\tau(\Delta Q_2, \epsilon)$ próximo a T e está próxima ao círculo em um plano com qualquer inclinação, dependendo da constante p_3 , e cujo raio é $s^{-2/3}$.

Observação 5.8.8. Nas condições (a), (b) e (c) do Teorema 5.8.3 estamos usando a notação $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, p_3 + \Delta P_3) := (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)$, onde $s \in \mathbb{R}^+$ é escolhido convenientemente de maneira a evitar problemas de singularidades.

Demonstração: A prova segue de maneira similar a demonstração do Teorema 5.8.1. ■

Observação 5.8.9. Aqui também vale um comentário análogo ao da Observação 5.4.6 ou seja a posição inicial da solução continuada é uma perturbação do posição da órbita de Kepler e a velocidade possivelmente poderá também ser uma perturbação da velocidade da órbita kepleriana.

Da mesma maneira que no caso de soluções $\mathcal{S}_1$ -simétricas podemos obter outro resultado que permite obter famílias de soluções periódicas $\mathcal{S}_2$ -simétricas utilizando as coordenadas de Poincaré-Delaunay ($PD - 2$). Novamente neste caso, não vamos exigir nenhuma condição sobre a função W_2 a menos daquelas feitas inicialmente.

Lema 5.8.4. Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução circular do problema em coordenadas giratórias (5.83) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD - 2$), T -periódica e $\mathcal{S}_2$ -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0) = ((n_1 + 1/2)\pi, 0, 0, s^{-1/3}, 0, 0)$ sobre $\mathcal{L}_2$, onde $n_1 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$ e $T/2 = \pi m/(s - 1)$ com $m \in \mathbb{N}$ satisfazendo $m/(s - 1) \notin \mathbb{N}$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é dada pela equação 5.96. Desde que $p_3 = q_3$ segue que a inclinação do plano orbital desta solução é zero, ou seja, está contida no plano- (x, y) .

Demonstração: Consideremos a solução circular $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_0; 0)$ do problema de Kepler em coordenadas giratórias, descrito nas coordenadas de Poincaré-Delaunay ($PD - 2$) com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = ((n_1 + 1/2)\pi, 0, 0, s^{-1/3}, 0, p_3) \in \mathcal{L}_2$. Para que a solução seja $\mathcal{S}_2$ -simétrica é suficiente que no instante $t = T/2$ a solução intersecte ortogonalmente o sub-plano $\mathcal{L}_2$ e pelo Lema 5.3.5 equação (5.32) é suficiente que se verifiquem as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{Y}_0) &= (s - 1)T/2 + (n_1 + 1/2)\pi &= (m + n_1 + 1/2)\pi, \\ Q_3(T/2, \mathbf{Y}_0) &= p_3 \sin t &= 0, \\ P_2(T/2, \mathbf{Y}_0) &= 0 &= 0. \end{aligned}$$

Onde $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$. As equações de periodicidade são satisfeitas tomando $p_3 = 0$ e $T/2 = \pi m/(s - 1)$. Observe que poderíamos tomar $T/2 = k\pi$, $s - 1 = (2m + 1)/2k$ e p_3 arbitrário e também teríamos verificado as equações de periodicidade, mas por motivos que ficarão mais claro posteriormente não faremos esta escolha. Desde que $p_3 = q_3 = 0$ segue que $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com inclinação nula. ■

Teorema 5.8.4. *Assuma a Hipótese 5.8.2 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução circular do problema (5.89) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.8.4. Então:*

i)– Para ϵ suficientemente pequeno, existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, \Delta Q_2(\epsilon), 0, \Delta P_1(\epsilon), 0, \Delta P_3(\epsilon))$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $T = 2\pi m/(s-1)$ desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$. Além disso esta solução está próxima de um círculo do plano- (x, y) com raio $s^{-2/3}$.

ii)– Existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon) = (0, \Delta Q_2(\Delta P_3, \epsilon), 0, \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon), 0, \Delta P_3)$, com $\epsilon \in \Delta P_3$ pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_3, \epsilon)$ próximo a $T = 2\pi m/(s-1)$ desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$. Além disso esta solução está próxima de um círculo do plano- (x, y) com raio $s^{-2/3}$.

Observação 5.8.10. *No Teorema (5.8.4) estamos usando a notação $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, p_3 + \Delta P_3) := (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)$, onde $s \in \mathbb{R}^+$ é escolhido convenientemente de maneira a evitar problemas de singularidades.*

Demonstração: Consideremos $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon)$ solução do problema perturbado (5.89) para ϵ suficientemente pequeno com condição inicial $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, \Delta P_3) \in \mathcal{L}_2$ numa vizinhança de $\mathbf{Y}_0$, $\mathbf{Y}_0$ como no Lema 5.8.4. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ e sendo $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)$ solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}$, então temos que $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Para que a solução seja $\mathcal{S}_2$ -simétrica, é suficiente que no instante $t = T/2$ ela intersecte ortogonalmente o sub-plano $\mathcal{L}_2$. Seguem do Lema 5.3.5 equação (5.32), as seguintes equações de periodicidade

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} - 1)t - m\pi & + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) &= 0, \\ f_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= \Delta P_3 \sin t & + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) &= 0, \\ f_3(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= -\Delta Q_2 \sin t & + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Onde $m \in \mathbb{N}$. Observe que $f_1(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_2(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_3(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$. Por outro lado, das equações de periodicidade (5.102) temos que

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)} \right|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & -3(s^{4/3})T/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin T/2 \\ 0 & -\sin T/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0}.$$

Segue do Teorema da Função Implícita que se o jacobiano acima possui posto 3, então existem soluções $\mathcal{S}_2$ -simétricas próximas a órbita de Kepler, para o parâmetro ϵ suficientemente pequeno. Novamente, observe que se tivéssemos tomado $T/2 = k\pi$ teríamos o jacobiano acima totalmente degenerado. A fim de que o Jacobiano acima tenha posto três, é suficiente que se verificam as seguintes possibilidades:

(A) Suponhamos que $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)}\right)_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, ou seja,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -3s^{4/3}T/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sin T/2 \\ -\sin T/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = -3s^{4/3}T/2 \sin^2(T/2) \neq 0. \quad (5.103)$$

Supondo que $T/2 \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas, $\Delta Q_2 = \Delta Q_2(\epsilon)$, $\Delta P_1 = \Delta P_1(\epsilon)$ e $\Delta P_3 = \Delta P_3(\epsilon)$ definidas para $|\epsilon| < \epsilon_0$ com ϵ_0 suficientemente pequeno, tal que, $\Delta Q_2(0) = 0$, $\Delta P_1(0) = 0$ e $\Delta P_3(0) = 0$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2(\epsilon), 0, s^{-1/3} + \Delta P_1(\epsilon), 0, p_3 + \Delta P_3(\epsilon))$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período τ próximo a $T = 2\pi m/(s-1)$, desde

que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$ e está próxima a uma solução circular do problema de Kepler de raio $s^{-2/3}$ e tem plano com inclinação nula.

(B) A segunda possibilidade é $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta Q_2, \Delta P_1)}\right)_{t=T/2, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} \neq 0$, equivalentemente

$$\det \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin T/2 \\ 0 & -\sin T/2 & 0 \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} = (s-1) \sin^2(T/2) \neq 0. \quad (5.104)$$

Novamente desde que $T/2 \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta Q_2 = \Delta Q_2(\Delta P_3, \epsilon)$, $\Delta P_1 = \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_3, \epsilon)$ definidas para $|\Delta P_3| \delta$, $|\epsilon| < \epsilon_0$ onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta Q_2(0, 0) = 0$, $\Delta P_1(0, 0) = 0$ e $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2(\Delta P_3, \epsilon), 0, s^{-1/3} + \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon), 0, p_3 + \Delta P_3)$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período τ próximo $T = 2\pi m/(s-1)$ e está próxima a uma solução circular do problema de Kepler a qual tem período T , raio $s^{-2/3}$ e plano com inclinação nula. ■

Observação 5.8.11. *Aqui também vale um comentário análogo ao da Observação 5.8.6 ou seja a posição inicial da solução continuada é uma perturbação da posição da órbita de Kepler e a velocidade possivelmente poderá também ser uma perturbação da velocidade da órbita kepleriana.*

Observação 5.8.12. *Para as soluções $\mathcal{S}_2$ -simétricas obtidas dos Teoremas 5.8.3 e 5.8.4 vale um comentário similar a Observação 5.8.7*

5.8.3 Continuação de órbitas circulares duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas) do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Hipótese 5.8.3. *Suponhamos que a função W_2 é invariante pelas reflexões $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.*

Lema 5.8.5. *Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução circular do problema (5.83) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD - 1$), T -periódica e duplamente simétrica (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0) = ((n_1 + 1/2)\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3}, p_3) \in \mathcal{L}_2$ onde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $T/4 = n\pi$ e $s = (2m+1)/2n$ onde $m, n \in \mathbb{N}$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é dada pela equação (5.90). Desde que p_3 é arbitrário, segue que a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com inclinação arbitrária.*

Demonstração: A demonstração é análoga a Lema 5.8.3 e com a mesma notação deste lema, segue que as equações de periodicidade são:

$$\begin{aligned} Q_1(T/4, \mathbf{Y}_0) &= (s-1)T/4 + (n_1 + 1/2)\pi &= (m + n_1 + 1)\pi, \\ Q_2(T/4, \mathbf{Y}_0) &= 0 &= 0, \\ Q_3(T/4, \mathbf{Y}_0) &= -T/4 + n_2\pi &= (n_2 - n)\pi. \end{aligned}$$

Onde $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$. As equações de periodicidade são satisfeitas tomando-se $T/4 = n\pi$ e $s = (2m+1)/2n$. Desde que p_3 é arbitrário segue que o plano orbital tem qualquer inclinação. ■

Teorema 5.8.5. *Assuma a Hipótese 5.8.3 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução circular do problema (5.89) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.8.5. Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon) = (0, \Delta Q_2(\Delta P_3, \epsilon), 0, \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon), 0, \Delta P_3)$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}, \epsilon)$*

$= \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) com período $\tau(\Delta P_3, \epsilon)$ próximo a $T = 4n\pi$ onde $s = (2m+1)/2n$. Esta solução está próxima a um círculo em um plano com qualquer inclinação, dependendo de p_3 e com raio $s^{-2/3}$.

Observação 5.8.13. No teorema acima estamos usando a notação $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, p_3 + \Delta P_3) := (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)$, onde $s \in \mathbb{R}^+$ é escolhido convenientemente de maneira a evitar problemas de singularidades.

Demonstração: Consideremos o sistema perturbado (5.87) com $\epsilon \neq 0$ e suficientemente pequeno e $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, p_3 + \Delta P_3) \in \mathcal{L}_2$ uma condição inicial em uma vizinhança de $\mathbf{Y}_0$, onde $\mathbf{Y}_0$ é como no Lema 5.8.5. Seja $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)$ a solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}$, então usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ , obtemos a solução $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ do sistema perturbado. Para que a solução seja duplamente simétrica (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) é suficiente que em $t = T/4$ a solução intersecte ortogonalmente o sub-plano $\mathcal{L}_1$ e desta forma, segue do Lema 5.3.4 equação (5.28), as seguintes equações de periodicidade

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t - (m + 1/2)\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \Delta Q_2 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= -t + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0 \end{aligned} \quad (5.105)$$

Observe que $f_1(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_2(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_3(T/2, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$. Das equações de periodicidade (5.105) segue que

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)} \right|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s & 0 & -3(s^{4/3})T/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0}$$

Segue do Teorema da Função Implícita que se o jacobiano acima possui posto 3, então existem soluções $\mathcal{S}_2$ -simétricas próximas a órbita de Kepler, para o parâmetro ϵ suficientemente pequeno. E isso acontece já que $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta Q_2, \Delta P_1)}\right)_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$. Logo o resultado segue do Teorema da Função Implícita. ■

Com as coordenadas $(PD-2)$ podemos obter outras famílias de soluções duplamente simétricas (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$).

Lema 5.8.6. Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução circular do problema (5.83) em coordenadas giratórias com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay $(PD-2)$, T -periódica e duplamente simétrica (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0)$, sendo que $n_1 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$ e $T/4 = \pi(2m+1)/2(s-1)$ com $m \in \mathbb{N}$ satisfazendo $(2m+1)/2(s-1) \notin \mathbb{N}$. A solução $\varphi_{kep}(t)$ neste caso é como na equação (5.96). Desde que $p_3 = q_3$ segue que a inclinação do plano orbital desta solução é zero, ou seja, está contida no plano- (x, y) .

Demonstração: A demonstração segue analogamente a do Lema 5.8.4 e com a mesma notação do Lema 5.8.4 obtemos neste caso as seguintes equações de periodicidade para a órbita de Kepler.

$$\begin{aligned} Q_1(T/4, \mathbf{Y}_0) &= (s-1)T/4 + (n_1 + 1/2)\pi = (m + n_1 + 1)\pi, \\ Q_2(T/4, \mathbf{Y}_0) &= p_3 \sin T/4 = 0, \\ Q_3(T/4, \mathbf{Y}_0) &= 0 = 0. \end{aligned}$$

Onde $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}_+$. As equações de periodicidade são satisfeitas tomando $p_3 = 0$ e $T/4 = \pi(2m+1)/2(s-1)$. Observe que poderíamos tomar $T/4 = k\pi$, $s-1 = (2m+1)/2k$ e p_3 arbitrário e também teríamos verificado as equações de periodicidade, mas por motivos que ficarão mais claro posteriormente

não faremos esta escolha. Desde que $p_3 = q_3$ segue que a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com inclinação nula. $\blacksquare$

Teorema 5.8.6. *Assuma a Hipótese 5.8.3 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução circular do problema (5.89) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.8.6. Então:*

i)– Para ϵ suficientemente pequeno, existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, \Delta Q_2(\epsilon), 0, \Delta P_1(\epsilon), 0, \Delta P_3(\epsilon))$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) com período fixo $T = 4\pi(2m+1)/2(s-1)$ desde que $(2m+1)/(s-1) \notin \mathbb{N}$. Além disso esta solução está próxima de um círculo do plano- (x, y) com raio $s^{-2/3}$.

ii)– Existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon) = (0, \Delta Q_2(\Delta P_1, \epsilon), 0, \Delta P_1, 0, \Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon))$, ϵ e ΔP_1 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) com período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a $T = 4\pi(2m+1)/2(s-1)$ desde que $(2m+1)/(s-1) \notin \mathbb{N}$. Além disso esta solução está próxima de um círculo do plano- (x, y) com raio $s^{-2/3}$.

Observação 5.8.14. *No Teorema 5.8.6 estamos usando a notação $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, p_3 + \Delta P_3) := (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)$, onde $s > s^*$, $s, s^* \in \mathbb{R}^+$, s^* suficientemente grande, para evitar problemas de singularidades.*

Demonstração: Consideremos $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon)$ solução do problema perturbado (5.89) para ϵ suficientemente pequeno com condição inicial $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, \Delta P_3) \in \mathcal{L}_2$ numa vizinhança de $\mathbf{Y}_0$, onde $\mathbf{Y}_0$ é como no Lema 5.8.6. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ e sendo $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)$ solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}$ temos que $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}, 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Para que a solução seja duplamente simétrica (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$), é suficiente que no instante $t = T/4$ a solução intersecte ortogonalmente o sub-plano $\mathcal{L}_1$. Seguem do Lema 5.3.5 equação (5.31), as seguintes equações de periodicidade

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} - 1)t - (m + 1/2)\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \Delta Q_2 \cos t + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \Delta P_3 \sin t + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0. \end{aligned} \quad (5.106)$$

Onde $m \in \mathbb{N}$. Observe que $f_1(T/4, \mathbf{Y}, 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_2(T/4, \mathbf{Y}, 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_3(T/4, \mathbf{Y}, 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$. Por outro lado, das equações de periodicidade (5.106) temos que

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)} \right|_{t=T/4, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & -3(s^{4/3})T/4 & 0 \\ 0 & \cos T/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin T/2 \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0}.$$

Segue do Teorema da Função Implícita que se o jacobiano acima possui posto 3, então existem soluções duplamente simétricas (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) próximas a órbita de Kepler, para o parâmetro ϵ suficientemente pequeno. A fim de que o jacobiano acima tenha posto três, temos as possibilidades:

(A) Suponhamos que $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)}\right)_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, ou seja,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -3s^{4/3}T/2 & 0 \\ \cos T/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin T/4 \end{pmatrix} = -3s^{4/3}T/4 \sin(T/4) \cos(T/4) \neq 0. \quad (5.107)$$

Desde que por hipótese $T/4 \neq k\pi$ e $T/4 \neq (k/2)\pi$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas, $\Delta Q_2 = \Delta Q_2(\epsilon)$, $\Delta P_1 = \Delta P_1(\epsilon)$ e $\Delta P_3 = \Delta P_3(\epsilon)$ definidas para $|\epsilon| < \epsilon_0$

com ϵ_0 suficientemente pequeno, tal que $\Delta Q_2(0) = 0$, $\Delta P_1(0) = 0$ e $\Delta P_3(0) = 0$. Desta forma a solução duplamente simétrica (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2(\epsilon), 0, s^{-1/3} + \Delta P_1(\epsilon), 0, p_3 + \Delta P_3(\epsilon))$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período τ próximo a $T = 4\pi(2m+1)/2(s-1)$ com $(2m+1)/(s-1) \notin \mathbb{N}$ e está próxima a uma solução circular do problema de Kepler de raio $s^{-2/3}$ e tem plano com inclinação nula.

(B) A segunda possibilidade é $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta Q_2, \Delta P_3)}\right)_{t=T/4, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, equivalentemente

$$\det \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos T/4 & 0 \\ 0 & 0 & \sin T/2 \end{pmatrix} = (s-1) \sin(T/4) \cos(T/4) \neq 0. \quad (5.108)$$

Desde que por hipótese $T/4 \neq k\pi$ e $T/4 \neq (k/2)\pi$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta Q_2 = \Delta Q_2(\Delta P_1, \epsilon)$, $\Delta P_3 = \Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_1, \epsilon)$ definidas para $|\Delta P_1| < \delta$, $|\epsilon| < \epsilon_0$ onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta Q_2(0, 0) = 0$, $\Delta P_3(0, 0) = 0$ e $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução duplamente simétrica (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2(\Delta P_1, \epsilon), 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, p_3 + \Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon))$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período τ próximo $T = 4\pi(2m+1)/2(s-1)$ com $(2m+1)/(s-1) \notin \mathbb{N}$ e está próxima a uma solução circular do problema de Kepler a qual tem período T , raio $s^{-2/3}$ e plano com inclinação nula. ■

Observação 5.8.15. *Gostaríamos de destacar algumas características das soluções duplamente simétricas (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) obtidas nos Teoremas 5.8.5 e 5.8.6 acima. No primeiro teorema podemos continuar soluções circulares periódicas e duplamente simétricas do problema de Kepler com qualquer inclinação com período $T = 4n\pi$ e com raio $s^{-2/3}$ desde que $s = (2m+1)/2n$, $m, n \in \mathbb{N}$, ou seja s racional da forma $\tilde{m}/\tilde{n}$ com $\tilde{m}$ inteiro positivo ímpar e $\tilde{n}$ inteiro positivo par. Desta forma obtemos família a dois parâmetros de soluções duplamente simétricas sem impor restrições a função perturbadora W_2 . Já no Teorema 5.8.6 podemos obter famílias de soluções duplamente simétricas a um parâmetro, dependendo de ϵ com período fixo; e soluções a dois parâmetros sem período fixo. Neste caso as soluções estão próximas do plano- (x, y) . Desta forma existem soluções periódicas duplamente simétricas, obtidas no Teorema 5.8.6 que não podem ser obtidas pelo Teorema 5.8.5.*

5.8.4 Continuação de soluções circulares duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$ -simétricas) do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Outras soluções duplamente simétricas podem ser obtidas se considerarmos simultaneamente as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$, as quais são as reflexões anti-simplética em relação ao eixo x e ao plano xz . Observe que as soluções duplamente simétricas (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) tem a propriedade de ser simétricas em relação aos planos xy e xz pois se $(x(t), y(t), z(t))$ é uma solução também o é $(x(-t), -y(-t), z(-t))$ e $(x(-t), y(-t), -z(-t))$, e desta forma a solução intersecta o plano xz quatro vezes, sendo que duas vezes sobre o eixo x . Consideremos a seguinte hipótese.

Hipótese 5.8.4. *Suponhamos que a função W_2 é invariante pelas a reflexões $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$.*

Lema 5.8.7. *Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução circular do problema (5.83) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay $(PD - 1)$, T -periódica e duplamente simétrica (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0) = ((n_1 + 1/2)\pi, 0, (n_2 + 1/2)\pi, s^{-1/3}, 0, p_3) \in \mathcal{L}_3$ onde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $T/4 = \pi(2n+1)/2$ com $m \in \mathbb{N}$ e $s = (2m+1)/(2n+1)$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é dada pela equação (5.90). Desde que p_3 é arbitrário, segue que a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com inclinação arbitrário.*

Demonstração: A demonstração é análoga a Lema 5.8.3. Com a mesma notação, do Lema 5.8.3 as equações de periodicidade são dadas por

$$\begin{aligned} Q_1(T/4, \mathbf{Y}_0) &= sT/4 + (n_1 + 1/2)\pi = (m + n_1 + 1)\pi, \\ Q_2(T/4, \mathbf{Y}_0) &= 0 = 0, \\ Q_3(T/4, \mathbf{Y}_0) &= -T/4 + (n_2 + 1/2)\pi = (n_2 - n - 1)\pi, \end{aligned}$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$. As equações de periodicidade podem ser verificadas tomando-se $T/4 = \pi(2n + 1)/2$ com $s = (2m + 1)/(2n + 1)$. Desde que p_3 é arbitrário segue que o plano orbital tem qualquer inclinação. ■

Teorema 5.8.7. *Assuma a Hipótese 5.8.4 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução circular do problema (5.87) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.8.7. Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon) = (0, \Delta Q_2(\Delta P_3, \epsilon), 0, \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon), 0, \Delta P_3)$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) com período $\tau(\Delta P_3, \epsilon)$ próximo a $T = 2(2n + 1)\pi$ onde $s = (2m + 1)/(2n + 1)$.*

Demonstração: Consideremos o sistema perturbado (5.87) com $\epsilon \neq 0$ e suficientemente pequeno e $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, (n_2 + 1/2)\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, p_3 + \Delta P_3) \in \mathcal{L}_3$ uma condição inicial em uma vizinhança de $\mathbf{Y}_0 = ((n_1 + 1/2)\pi, 0, (n_2 + 1/2)\pi, s^{-1/3}, 0, p_3)$. Seja $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)$ a solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}$. Então usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ , obtemos a solução $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ do sistema perturbado. Para que a solução seja duplamente simétrica (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) é suficiente que em $t = T/4$ a solução intersecte ortogonalmente o sub-plano $\mathcal{L}_1$ e desta forma, seguem do Lema 5.3.4 equação (5.28), as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t - (m + 1/2)\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \Delta Q_2 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= -t + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0. \end{aligned} \quad (5.109)$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$ e $s > s^*$, $s, s^* \in \mathbb{R}^+$, s^* suficientemente grande. Com a notação $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, (n_2 + 1/2)\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, p_3 + \Delta P_3) := (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)$. Observe que $f_1(T/4, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=0} = f_2(T/4, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=0} = f_3(T/4, \mathbf{Y}, \epsilon)|_{\mathbf{Y}=0} = 0$. Das equações de periodicidade (5.109) segue que

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)} \right|_{t=T/4, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s & 0 & -3(s^{4/3})T/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue do Teorema da Função Implícita que se o jacobiano acima possui posto 3, então existem soluções duplamente simétricas (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) periódicas próximas a órbita de Kepler, para o parâmetro ϵ suficientemente pequeno. E observe que $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta Q_2, \Delta P_1)}\right)_{t=T/2, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} = -3(s^{4/3})T/4 \neq 0$. Logo provamos o resultado. ■

Da mesma forma que procedemos no caso de obtenção de soluções duplamente simétricas (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) vamos também usar as variáveis Poincaré-Delaunay ($PD - 2$) para obter outras soluções.

Lema 5.8.8. *Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução circular do problema (5.83) em coordenadas giratórias com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD - 2$), T -periódica e duplamente simétrica (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0,$*

$P_2^0, P_3^0) = (n_1\pi, 0, q_3, s^{-1/3}, p_2, 0) \in \mathcal{L}_3$ Onde $n_1 \in \mathbb{N}$ e $T/4 = \pi(n + 1/2)$ com $m \in \mathbb{N}$ e $s = (2m + 1)/(2n + 1) \notin \mathbb{N}$. A solução $\varphi_{kep}(t)$ neste caso e como na equação (5.96). Desde que $p_3 = q_3$ segue que $G = H$ e portanto a inclinação do plano orbital desta solução e zero, ou seja, está contida no plano- (x, y) .

Demonstração: A demonstração segue analogamente ao Lema 5.8.4. Com a mesma notação do Lema 5.8.4 obtemos neste caso as seguintes equações de periodicidade para a órbita de Kepler:

$$\begin{aligned} Q_1(T/4, \mathbf{Y}_0) &= (s-1)T/4 + n_1\pi = (m+n_1)\pi, \\ Q_2(T/4, \mathbf{Y}_0) &= 0 = 0, \\ Q_3(T/4, \mathbf{Y}_0) &= q_3 \cos T/4 = 0, \end{aligned}$$

onde $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$ e $q_3 \in \mathbb{R}$. As equações de periodicidade são satisfeitas tomando $q_3 = 0$ e $T/4 = \pi m/(s-1)$. Observe que poderíamos tomar $T/4 = k\pi$, ou seja $s-1 = 2m/k$ e p_3 arbitrário e também teríamos verificado as equações de periodicidade, mas por motivos que ficarão mais claro posteriormente não faremos esta escolha. Desde que $p_3 = q_3$ segue que a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com inclinação nula. ■

Teorema 5.8.8. *Assuma a Hipótese 5.8.4 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução circular do problema (5.89) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.8.8. Então*

i)– Existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, 0, \Delta Q_3(\epsilon), \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_2(\epsilon), 0)$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) com período fixo $T = 4\pi m/(s-1)$ desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$. Além disso esta solução está próxima de círculos do plano- (x, y) e de raio $s^{-2/3}$.

ii)– Existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon) = (0, 0, \Delta Q_3(\Delta P_1, \epsilon), \Delta P_1, \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon), 0)$, com ϵ e ΔP_1 pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) com período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a $T = 4\pi m/(s-1)$ desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$. Além disso esta solução está próxima de círculos do plano- (x, y) e de raio $s^{-2/3}$.

Observação 5.8.16. *No teorema 5.8.8 acima estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, \Delta Q_3, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, 0) := (\Delta Q_3, \Delta P_1, \Delta P_2)$, onde $s \in \mathbb{R}^+$ é escolhido convenientemente para evitar problemas de singularidades.*

Demonstração: Consideremos $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon)$ solução do problema perturbado (5.89) para ϵ suficientemente pequeno com condição inicial $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, \Delta Q_3, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, 0) \in \mathcal{L}_3$ numa vizinhança de $\mathbf{Y}_0 = (n_1\pi, 0, q_3, s^{-1/3}, p_2, 0)$. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ e sendo $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)$ solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}$ temos que $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}, 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Para que a solução seja duplamente simétrica (com respeito a simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$), é suficiente que no instante $t = T/4$ a solução intersecte ortogonalmente o sub-plano $\mathcal{L}_1$. Seguem do Lema 5.3.5 equação (5.31), as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} - 1)t - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \Delta P_2 \sin t + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \Delta Q_3 \cos t + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \end{aligned} \tag{5.110}$$

onde $m \in \mathbb{N}$. Observe que $f_1(T/4, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = f_2(T/4, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = f_3(T/4, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = 0$. Por outro lado, das equações de periodicidade (5.110) temos que

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta Q_3, \Delta P_1, \Delta P_2)} \right|_{t=T/4, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & -3(s^{4/3})T/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin T/2 \\ 0 & \cos T/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{t=T/4, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0}.$$

Segue do Teorema da Função Implícita que se o jacobiano acima possui posto 3, então existem soluções periódicas duplamente simétricas próximas a órbita de Kepler, para o parâmetro ϵ suficientemente pequeno. Observamos que se tivéssemos escolhido $T/4 = k\pi$ para verificar as equações de periodicidade da solução do problema de Kepler, então teríamos o jacobiano acima degenerado. Para que o Jacobiano acima tenha posto três, é suficiente que se verificam as seguintes possibilidades:

(A) Suponhamos que $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(\Delta Q_3, \Delta P_1, \Delta P_2)}\right)_{t=T/4, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, ou seja,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -3s^{4/3}T/4 & 0 \\ 0 & 0 & \sin T/4 \\ \cos T/4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -3s^{4/3}T/4 \sin(T/4) \cos(T/4) \neq 0. \quad (5.111)$$

Desde que por hipótese $T/4 \neq k\pi$ e $T/4 \neq (k/2)\pi$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta Q_3 = \Delta Q_3(\epsilon)$, $\Delta P_1 = \Delta P_1(\epsilon)$ e $\Delta P_2 = \Delta P_2(\epsilon)$ definidas para $|\epsilon| < \epsilon_0$ com ϵ_0 suficientemente pequeno, tal que $\Delta Q_3(0) = 0$, $\Delta P_1(0) = 0$ e $\Delta P_2(0) = 0$. Desta forma a solução duplamente simétrica (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = (n_1\pi, 0, \Delta Q_3(\epsilon), s^{-1/3} + \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_2(\epsilon), 0)$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período $T = 4\pi m/(s-1)$ com $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$ e está próxima a uma solução circular do problema de Kepler de raio $s^{-2/3}$ e tem plano com inclinação nula.

(B) A segunda possibilidade é $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta Q_3, \Delta P_2)}\right)_{t=T/4, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$, equivalentemente

$$\det \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin T/2 \\ 0 & \cos T/4 & 0 \end{pmatrix} = (s-1) \sin(T/4) \cos(T/4) \neq 0. \quad (5.112)$$

Desde que por hipótese $T/4 \neq k\pi$ e $T/4 \neq (k/2)\pi$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta Q_3 = \Delta Q_3(\Delta P_1, \epsilon)$, $\Delta P_2 = \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_1, \epsilon)$ definidas para $|\Delta P_1| < \delta$, $|\epsilon| < \epsilon_0$ onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta Q_3(0, 0) = 0$, $\Delta P_2(0, 0) = 0$ e $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução duplamente simétrica (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = (n_1\pi, 0, \Delta Q_3(\Delta P_1, \epsilon), s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon), 0)$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período τ próximo $T = 4\pi m/(s-1)$ com $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$ e está próxima a uma solução circular do problema de Kepler a qual tem período T , raio $s^{-2/3}$ e plano com inclinação nula. ■

Observação 5.8.17. Para todos os teoremas acima, valem comentários similares aos das observações 5.4.6, 5.8.6, ou seja a posição inicial da solução continuada é uma perturbação da posição da órbita de Kepler e a velocidade possivelmente poderá também ser uma perturbação da velocidade da órbita kepleriana.

Observação 5.8.18. Novamente fazemos menção as diferenças dos Teoremas 5.8.7 e 5.8.8. No primeiro teorema obtemos soluções a dois parâmetros duplamente simétricas (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) com plano com qualquer inclinação e próximas de círculos de raio $s^{-2/3}$, onde $s = (2m+1)/(2n+1)$, $m, n \in \mathbb{N}$ e $s > s^*$, $s, s^* \in \mathbb{R}^+$, s^* suficientemente grande. Além disso o período da solução continuada é próximo a $T = 2(2n+1)\pi$. Já no Teorema 5.8.8 podemos obter soluções a um parâmetro com período fixo $T = 4m\pi/(s-1)$ e soluções a dois parâmetros com período próximo a T . Estas soluções estão próximas a círculos no plano (x, y) e com raio $s^{-2/3}$ desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e $s > s^*$, $s, s^* \in \mathbb{R}^+$, s^* suficientemente grande.

5.8.5 Continuação de soluções elípticas do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Nesta seção vamos obter resultados que permitem continuar soluções elípticas do problema de Kepler em coordenadas giratórias. Podemos perceber, ao tentar continuar soluções elípticas do problema de Kepler que ocorrem muitos casos degenerados e/ou incompatibilidade das equações de periodicidade ainda na solução do problema de Kepler.

5.8.6 Continuação de órbitas elípticas $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Assumindo a Hipótese 5.8.1 e usando as variáveis de Delaunay obtemos a seguinte caracterização do solução elíptica $\mathcal{S}_1$ -simétrica do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Lema 5.8.9. *Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução elíptica do problema em coordenadas giratórias (5.83) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Delaunay (5.8), T -periódica e $\mathcal{S}_2$ -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0) = (n_1\pi, n_2\pi, n_3\pi, s^{-1/3}, p_2, p_3)$, onde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$; $s = m/n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $p_2, p_3 \in \mathbb{R}$, e $T/2 = n\pi$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é dada por*

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= st + Q_1^0, & P_1(t) &= P_1^0, \\ Q_2(t) &= Q_2^0 = 0, & P_2(t) &= P_2^0, \\ Q_3(t) &= -t + Q_3^0, & P_3(t) &= P_3^0. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Desde que p_3 é arbitrário, segue que a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com inclinação arbitrária.

Demonstração: Seja $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_0; 0)$ a solução elíptica do problema de Kepler em coordenadas giratórias, descrito nas coordenadas de Delaunay (5.8) com condição inicial $\mathbf{Y}_0 \in \mathcal{L}_2$ como no Lema 5.8.9. Como a solução desejada é uma solução elíptica precisamos impor que $p_2 \neq (n_2 + 1/2)\pi$ (Pois caso contrário $L = G$ e as variáveis de Delaunay não estão definidas). As equações de periodicidade que garantem que a solução seja $\mathcal{S}_1$ -simétrica são da forma

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{Y}_0) &= sT/2 + n_1\pi &= (m + n_1)\pi, \\ Q_3(T/2, \mathbf{Y}_0) &= n_2\pi &= (n_2 + j)\pi, \\ P_2(T/2, \mathbf{Y}_0) &= -T/2 + n_3\pi &= (n_3 - n)\pi, \end{aligned}$$

onde $m, n, j \in \mathbb{N}$, $n > n_3$. As equações de periodicidade são satisfeitas tomando $j = n_2$ e $T/2 = n\pi$, com $s = m/n$. Desde que $\cos i = H/G$ onde i é a inclinação do plano orbital, segue que a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com qualquer inclinação. ■

Teorema 5.8.9. *Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução elíptica do problema (5.85) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.8.9. Suponha que se verifiquem as seguintes hipóteses*

$$(a) \int_0^{T/2} \frac{\partial K_1}{\partial P_2}(\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt = 0 \quad (5.114)$$

e

i)– Se além da hipótese (a) considerarmos

$$(b) \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt \neq 0. \quad (5.115)$$

Então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $Y_{\Delta P_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2, \Delta P_3(\Delta P_2, \epsilon))$, de maneira que ϵ e ΔP_2 sejam suficientemente pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^\alpha)$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau = \tau(\Delta P_2, \epsilon)$ próximo a $T = 2n\pi$.

ii)– Se Além da hipótese (a) considerarmos

$$(c) \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_2} (\varphi_{kep}(t, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt \neq 0. \quad (5.116)$$

Então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $Y_{\Delta P_3, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_3, \epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon), \Delta P_2(\Delta P_3, \epsilon), \Delta P_3)$, de maneira que ϵ e ΔP_3 sejam suficientemente pequenos, tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_3, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^\alpha)$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau = \tau(\Delta P_3, \epsilon)$ próximo a $T = 2n\pi$.

Observação 5.8.19. No teorema acima estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, n_2\pi, n_3\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, p_2 + \Delta P_2, p_3 + \Delta P_3) := (\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3)$, onde $s \in R^+$ é escolhido convenientemente para evitar problemas de singularidades.

Demonstração: Consideremos $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon)$ solução nas coordenadas de Delaunay do problema perturbado (5.85) para ϵ suficientemente pequeno com condição inicial $\mathbf{Y} = ((n_1\pi, n_2\pi, n_3\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, p_2 + \Delta P_2, p_3 + \Delta P_3) \in \mathcal{L}_1$ em uma vizinhança de $\mathbf{Y}_0$. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ e sendo $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)$ solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}$ obtemos que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^\alpha)$, a qual satisfaz

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + n_1\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ Q_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \epsilon^{\alpha+i}Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}) = 0, \\ Q_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= -t + n_3\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0. \end{aligned} \quad (5.117)$$

Para que a solução seja $\mathcal{S}_1$ -simétrica, é suficiente que no instante $t = T/2$ a solução interseccione ortogonalmente o sub-plano $\mathcal{L}_1$. Seguem do Lema 5.3.3 equação (5.26), as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon) = 0, \\ f_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= -t + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \end{aligned} \quad (5.118)$$

onde $m \in \mathbb{N}$ e estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, n_2\pi, n_3\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, p_2 + \Delta P_2, p_3 + \Delta P_3) := (\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3)$. Observe que $f_1(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = f_2(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = 0$ e para terceira equação ser satisfeita é necessário que $P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = 0$ o que é equivalente a condição (a) do enunciado. Por outro lado, das equações de periodicidade (5.118) temos que

$$\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3)} \right)_{t=T/2, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s & -3(s^{4/3})T/2 & 0 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0}.$$

Segue do Teorema da Função Implícita que se o jacobiano acima possui posto 3, então existem soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ -simétricas próximas a órbita de Kepler, para o parâmetro ϵ suficientemente pequeno. Para que o jacobiano acima tenha posto três, é suficiente que se verificam as seguintes possibilidades:

(A) Suponhamos que $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_3)}\right)_{t=T/2, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} \neq 0$, ou seja,

$$\det \begin{pmatrix} s & -3(s^{4/3})T/2 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3s^{4/3}T/2 \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3}. \quad (5.119)$$

Desde que por hipótese $\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \neq 0$ segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_1 = \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon)$, $\Delta P_3 = \Delta P_3(\Delta P_2, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_2, \epsilon)$ definidas para $|\Delta P_2| < \delta$ e $|\epsilon| < \epsilon_0$ com δ e ϵ_0 suficientemente pequenos, tal que $\Delta P_1(0, 0) = 0$, $\Delta P_3(0, 0) = 0$ e $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = (n_1\pi, (n_2 + 1/2)\pi, n_3\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2, \Delta P_3(\Delta P_2, \epsilon))$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período $T = 2n\pi$ e está próxima a uma solução elíptica do problema de Kepler e tem plano com inclinação dependendo de p_3 .

(B) O item ii) prova-se de maneira análoga ao caso (A). ■

5.8.7 Continuação de órbitas elípticas $\mathcal{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Assumindo a Hipótese 5.8.2 e usando as variáveis de Delaunay obtemos a seguinte caracterização do solução elíptica $\mathcal{S}_2$ -simétrica do problema de Kepler em coordenadas giratórias. O Resultado é obtido de maneira muito similar ao caso anterior.

Lema 5.8.10. *Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução elíptica do problema em coordenadas giratórias (5.83) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Delaunay (5.8), T -periódica e $\mathcal{S}_2$ -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0) = (n_1\pi, (n_2 + 1/2)\pi, n_3\pi, s^{-1/3}, p_2, p_3)$, onde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$; $s = m/n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $p_2, p_3 \in \mathbb{R}$, e $T/2 = n\pi$. Então a solução $\varphi_{kep}(t)$ é dada por 5.113. Desde que p_3 é arbitrário, segue que a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com inclinação arbitrária.*

Demonstração: Segue de maneira similar a demonstração do Lema 5.8.9. As equações de periodicidade da solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica neste caso são dadas por

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{Y}_0) &= sT/2 + n_1\pi &= (m + n_1)\pi, \\ Q_3(T/2, \mathbf{Y}_0) &= (n_2 + 1/2)\pi &= (n_2 + j + 1/2)\pi, \\ P_2(T/2, \mathbf{Y}_0) &= -T/2 + n_3\pi &= (n_3 - n)\pi, \end{aligned}$$

onde $m, n, j \in \mathbb{N}$, $n > n_3$. As equações de periodicidade são satisfeitas tomando $j = n_2$ e $T/2 = n\pi$, com $s = m/n$. Desde que $\cos i = H/G$ onde i é a inclinação do plano orbital, segue que a solução $\varphi_{kep}(t)$ possui plano orbital com qualquer inclinação. ■

Teorema 5.8.10. *Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução elíptica do problema (5.85) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.8.10. Suponha que se verifiquem as seguintes hipóteses*

$$(a) \int_0^{T/2} \frac{\partial K_1}{\partial P_2}(\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt = 0 \quad (5.120)$$

e

i)– Se além da hipótese (a) considerarmos

$$(b) \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(t, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} dt \neq 0. \quad (5.121)$$

Então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $Y_{\Delta P_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2, \Delta P_3(\Delta P_2, \epsilon))$, sendo que ϵ e ΔP_2 são suficientemente pequenos, de modo que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^\alpha)$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $\tau = \tau(\Delta P_2, \epsilon)$ próximo a $T = 2n\pi$.

ii)– Se Além da hipótese (a) considerarmos

$$(c) \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 K_1}{\partial P_2 \partial \Delta P_2} (\varphi_{kep}(t, Y; 0)) \Big|_{Y=0} dt \neq 0. \quad (5.122)$$

Então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $Y_{\Delta P_3, \epsilon} = Y_0 + Y(\Delta P_3, \epsilon)$ com $Y(\Delta P_3, \epsilon) = (0, 0, 0, \Delta P_1(\Delta P_3, \epsilon), \Delta P_2(\Delta P_3, \epsilon), \Delta P_3)$, sendo que ϵ e ΔP_3 são suficientemente pequenos, de maneira que $\varphi(t, Y_{\Delta P_3, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, Y_{\Delta P_3, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^\alpha)$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $\tau = \tau(\Delta P_3, \epsilon)$ próximo a $T = 2n\pi$.

Demonstração: Segue de maneira análoga a demonstração do Teorema 5.8.10. ■

5.8.8 Continuação de órbitas elípticas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Nesta seção vamos obter soluções periódicas duplamente simétricas do problema 5.83, com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$. Estas soluções serão obtidas como continuação de órbitas elípticas do problema de Kepler. Utilizaremos as coordenadas de Poincaré-Delaunay visto que não é possível obter soluções duplamente simétricas usando coordenadas de Delaunay, pois há incompatibilidade com as equações de periodicidade.

Lema 5.8.11. *Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução elíptica do problema em coordenadas giratórias (5.83) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD - 2$), T -periódica e duplamente simétrica (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas) com condição inicial $Y_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0) = ((n_1 + 1/2)\pi, q_2, 0, s^{-1/3}, 0, 0)$, com $q_2 \neq 0$, $n_1 \in \mathbb{N}$, $s \neq 1$, $s \in \mathbb{R}^+$ e $T/4 = (2m + 1)/2(s - 1)\pi$ com $s - 1 = 2(m + 1)/k$ onde $m, k \in \mathbb{N}$. A solução $\varphi_{kep}(t)$ é como na equação (5.96) do Lema 5.8.4. Desde que $q_3 = p_3$ segue que a inclinação do plano orbital desta solução é zero, ou seja, está contida no plano- (x, y) .*

Demonstração: A demonstração segue de maneira muito semelhante ao Lema 5.8.4. Neste caso as equações de periodicidade da solução elíptica e duplamente simétrica (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas) do problema de Kepler são

$$\begin{aligned} Q_1(T/4, Y_0) &= (s - 1)T/4 + (n_1 + 1/2)\pi &= (m + n_1 + 1)\pi, \\ Q_2(T/4, Y_0) &= q_2 \cos T/4 &= 0, \\ Q_3(T/4, Y_0) &= p_3 \sin T/4 &= 0, \end{aligned}$$

onde $m \in \mathbb{N}$. Desde que $q_2 \neq 0$ tomamos $T/4 = \pi/2 \pmod{\pi}$. A primeira equação tem solução $T/4 = (2m + 1)/(2(s - 1))\pi$ e portanto teremos que ter s da forma $s - 1 = 2(m + 1)/k$ onde $k \in \mathbb{N}$. Finalmente tomando $p_3 = 0$ segue que as equações de periodicidade são satisfeitas. O fato de $p_3 = 0$ implica que o plano orbital da órbita de Kepler tem inclinação nula. ■

Teorema 5.8.11. *Assuma a Hipótese 5.8.3 e seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução do problema (5.89) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.8.11. Então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $Y_{\Delta Q_2, \epsilon} = Y_0 + Y(\Delta Q_2, \epsilon)$ com $Y(\Delta Q_2, \epsilon) = (0, \Delta Q_2, 0, \Delta P_1(\Delta Q_2, \epsilon), 0, \Delta P_3(\Delta Q_2, \epsilon))$ tal que $\varphi(t, Y_{\Delta Q_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, Y_{\Delta Q_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) com período $T = 2\pi(2m + 1)/((s - 1))$, desde que $(s - 1) = (2m + 1)/k$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.*

Observação 5.8.20. *No teorema acima estamos usando a notação $Y = ((n_1 + 1/2)\pi, q_2 + \Delta Q_2, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, \Delta P_3) := (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)$, onde $s \in \mathbb{R}^+$ é escolhido convenientemente a fim de evitar problemas de singularidades.*

Demonstração: Consideremos $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon)$ solução do problema perturbado (5.89) para ϵ suficientemente pequeno com condição inicial $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, q_2 + \Delta Q_2, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, \Delta P_3) \in \mathcal{L}_2$ uma condição inicial numa vizinhança de $\mathbf{Y}_0$. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ e sendo $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)$ solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}$ temos que $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}, 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ a qual satisfaz

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} - 1)t + (n_1 + 1/2)\pi & + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) &= 0, \\ Q_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (q_2 + \Delta Q_2) \cos t & + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) &= 0, \\ Q_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \Delta P_3 \sin t & + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) &= 0. \end{aligned}$$

Para que a solução seja duplamente simétrica (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas), é suficiente que no instante $t = T/4$ a solução intersecte ortogonalmente o sub-plano $\mathcal{L}_1$. Seguem do Lema 5.3.5 equação (5.31), as seguintes equações de periodicidade

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} - 1)t - (m + 1/2)\pi & + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) &= 0, \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (q_2 + \Delta Q_2) \cos t & + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) &= 0, \\ f_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \Delta P_3 \sin t & + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) &= 0, \end{aligned} \tag{5.123}$$

onde $m \in \mathbb{N}$. Observe que $f_1(T/4, \mathbf{Y}, 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_2(T/4, \mathbf{Y}, 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_3(T/4, \mathbf{Y}, 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$. Por outro lado, das equações de periodicidade (5.123) temos que

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)} \Big|_{t=T/4, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & -3(s^{4/3})T/4 & 0 \\ -q_2 \sin T/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin T/4 \end{pmatrix}.$$

Segue do Teorema da Função Implícita que se o jacobiano acima possui posto 3 então existem soluções periódicas duplamente simétricas. Observe que $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_3)}\right) \Big|_{t=T/4, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = -3q_2(s^{4/3})T/4 \neq 0$ e portanto segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_1 = \Delta P_1(\Delta Q_2, \epsilon)$, $\Delta P_3 = \Delta P_3(\Delta Q_2, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta Q_2, \epsilon)$ definidas para $|\Delta Q_2| < \delta$, $|\epsilon| < \epsilon_0$ onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta P_1(0, 0) = 0$, $\Delta P_3(0, 0) = 0$ e $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução duplamente simétrica (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas) do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon} = ((n_1 + 1/2)\pi, q_2 + \Delta Q_2, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1(\Delta Q_2, \epsilon), 0, \Delta P_3(\Delta Q_2, \epsilon))$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta Q_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período τ próximo $T = 4\pi(2m+1)/2(s-1)$ com $(2m+1)/(s-1) \notin \mathbb{N}$ e está próxima a uma solução elíptica do problema de Kepler a qual tem período T e plano com inclinação nula. ■

5.8.9 Continuação de órbitas elípticas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Agora considerando as soluções duplamente simétricas (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) temos os seguintes resultados:

Lema 5.8.12. *Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$ solução elíptica do problema em coordenadas giratórias (5.83) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD - 2$), T -periódica e duplamente simétrica (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0) = (n_1\pi, 0, q_3, s^{-1/3}, p_2, 0)$, com $p_2 \neq 0$, $n_1 \in \mathbb{N}$, $s = (m+k)/k$, $s \neq 1$, $m, k \in \mathbb{N}$ e $T/4 = k\pi$. A solução $\varphi_{kep}(t)$ é como na equação (5.96) do Lema 5.8.4.*

Demonstração: A demonstração segue de maneira muito semelhante ao Lema 5.8.10. Neste caso as equações de periodicidade da solução elíptica do problema de Kepler são

$$\begin{aligned} Q_1(T/4, \mathbf{Y}_0) &= (s-1)T/4 + n_1\pi = (m+n_1)\pi, \\ Q_2(T/4, \mathbf{Y}_0) &= p_2 \sin T/4 = 0, \\ Q_3(T/4, \mathbf{Y}_0) &= q_3 \cos T/4 = 0, \end{aligned}$$

onde $m \in \mathbb{N}$. Desde que $p_2 \neq 0$, tomamos $T/4 = 0 \pmod{\pi}$. A primeira equação tem solução $T/4 = (2m+1)/(2(s-1))\pi$ e portanto teremos que ter s da forma $s = (m+k)/k$ onde $k \in \mathbb{N}$. Finalmente tomando $q_3 = 0$ segue que as equações de periodicidade são satisfeitas. O fato de $q_3 = 0$ implica que $G = H$ e desta maneira o plano orbital da órbita de Kepler tem inclinação nula. ■

Teorema 5.8.12. *Assuma a hipótese 5.8.4 e seja $\varphi_{\text{kep}}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t); 0)$, solução elíptica do problema (5.83) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.8.12. Então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $Y_{\Delta P_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon) = (0, \Delta Q_3(\Delta P_2, \epsilon), 0, \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2, 0)$ tal que $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}, \epsilon) = \varphi_{\text{kep}}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) com período $T = 4\pi m/(s-1)$, desde que $s-1 = m/k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Observação 5.8.21. *No teorema acima estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, \Delta Q_3, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, p_2 + \Delta P_2, 0) := (\Delta Q_3, \Delta P_1, \Delta P_2)$, onde $s \in \mathbb{R}^+$ é escolhido convenientemente para evitar problemas de singularidades.*

Demonstração: Consideremos $\varphi(t, \mathbf{Y}, \epsilon)$ solução do problema perturbado (5.89) para ϵ suficientemente pequeno com condição inicial $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, \Delta Q_3, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, p_2 + \Delta P_2, 0) \in \mathcal{L}_3$ numa vizinhança de $\mathbf{Y}_0$. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ e sendo $\varphi_{\text{kep}}(t, \mathbf{Y}, 0)$ solução do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y}$ então temos que $\varphi(t, \mathbf{Y}, \epsilon) = \varphi_{\text{kep}}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$, a qual satisfaz

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} - 1)t + n_1\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ Q_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= (p_2 + \Delta P_2) \sin t + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ Q_3(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= \Delta Q_3 \cos t + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0. \end{aligned}$$

Para que a solução seja duplamente simétrica (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) é suficiente que no instante $t = T/4$ a solução intersecte ortogonalmente o sub-plano $\mathcal{L}_1$. Seguem do Lema 5.3.5 equação (5.31), as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} - 1)t - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_2(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= (p_2 + \Delta P_2) \sin t + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_3(t, \mathbf{Y}; \epsilon) &= \Delta Q_3 \cos t + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \end{aligned} \tag{5.124}$$

onde $m \in \mathbb{N}$ e estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, \Delta Q_3, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, p_2 + \Delta P_2, 0) := (\Delta Q_3, \Delta P_1, \Delta P_2)$. Observe que $f_1(T/4, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_2(T/4, \mathbf{Y}_0; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = f_3(T/4, \mathbf{Y}_0; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$. Por outro lado, das equações de periodicidade (5.124) temos que

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta Q_3, \Delta P_1, \Delta P_2)} \Big|_{t=T/4, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & -3(s^{4/3})T/4 & 0 \\ -p_2 \cos T/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos T/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue do Teorema da Função Implícita que se o jacobiano acima possui posto 3, então existem soluções periódicas duplamente simétricas. Observe que $\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(t, \Delta Q_3, \Delta P_1, \Delta P_2)} \right) \Big|_{t=T/4, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = -3p_2(s^{4/3})T/4 \cos^2(T/4) \neq 0$ e portanto segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta Q_3 = \Delta Q_3(\Delta P_2, \epsilon)$, $\Delta P_1 = \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_2, \epsilon)$ definidas para $|\Delta P_2| < \delta$, $|\epsilon| < \epsilon_0$ onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta Q_3(0, 0) = 0$, $\Delta P_1(0, 0) = 0$ e $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução duplamente simétrica

do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon} = (n_1 \pi, 0, \Delta Q_3(\Delta P_2, \epsilon), s^{-1/3} + \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2, 0)$ é $\varphi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período τ próximo $T = 4\pi m/(s-1)$ com $(m/(s-1)) = k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e está próxima a uma solução elíptica do problema de Kepler a qual tem período T e plano com inclinação nula.

■

5.9 Continuação de soluções periódicas simétricas do Problema planar de Kepler em coordenadas giratórias

Assim como na seção 5.6 vamos determinar sob que condições podemos garantir a existência de soluções periódicas simétricas no sub-problema $z = p_z = 0$ do sistema (5.83). Desta forma estamos considerando que o plano- (x, y) é um espaço invariante pelo fluxo de (5.83). Com esta simplificação estamos com um sistema com dois graus de liberdade cujas as equações ficam determinadas por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p_x + y, & \dot{p}_x &= p_y - \frac{x}{\|\mathbf{q}\|^3} - \epsilon^{\alpha+i} \frac{\partial K_1}{\partial x} - \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), \\ \dot{y} &= p_y - x, & \dot{p}_y &= -p_x - \frac{y}{\|\mathbf{q}\|^3} - \epsilon^{\alpha+i} \frac{\partial K_1}{\partial y} + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}),\end{aligned}\tag{5.125}$$

cuja função Hamiltoniana é dada por

$$H(q, p, \epsilon) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - (xp_y - yp_x) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + W_2(x, y, \epsilon).\tag{5.126}$$

onde $\mathbf{q} = (x, y) \in \mathbb{R}^2/\tilde{\mathcal{K}}$, onde $\tilde{\mathcal{K}}$ é a restrição do compacto $\mathcal{K}$ do caso espacial, sobre o plano- (x, y) e $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ é o momento conjugado. Da mesma maneira, a função $W_2(x, y, 0, \epsilon) = W_2(x, y, \epsilon)$ é a restrição de $W_2(x, y, z, \epsilon)$ sobre o plano- (x, y) , e é claro que esta restrição possui as mesmas propriedades analíticas da função no caso espacial. Assim como no caso espacial, para continuar órbitas simétricas, seja para a continuação de soluções circulares ou elípticas do problema de Kepler planar, usaremos a forma bi-dimensional das coordenadas de Poincaré-Delaunay $(PD - 1)$ e das Coordenadas de Delaunay (5.8) e considerar as simetrias em relação ao eixo x e em relação ao eixo y , que também denotaremos por $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ respectivamente.

Nas coordenadas de Delaunay (5.60) a função Hamiltoniana (5.126) é dada por

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon) = -\frac{1}{2P_1^2} - P_2 + \epsilon^{\alpha+i} K_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}),\tag{5.127}$$

onde

$$K_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = -\frac{1}{i} \frac{\partial^i W_2(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, 0)}{\partial \epsilon^i}.$$

As equações de movimento do problema (5.125) descrito nas coordenadas de Delaunay (5.60) são

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), \\ \dot{Q}_2 &= -1 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}).\end{aligned}\tag{5.128}$$

A função Hamiltoniana (5.126) nas variáveis de Poincaré-Delaunay (5.63) é dada por

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon) = -\frac{1}{2P_1^2} - P_1 + \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2} + \epsilon^{\alpha+i} H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i+1}),\tag{5.129}$$

e o sistema hamiltoniano associado nas coordenadas de Poincaré-Delaunay (5.63) é

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), \\ \dot{Q}_2 &= P_2 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}), & \dot{P}_2 &= -Q_2 + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}).\end{aligned}\tag{5.130}$$

Observação 5.9.1. *Como no caso espacial para quenão tenhamos problemas com singularidades nos sistemas (5.128) e (5.130) vamos tomar a solução circular ou elíptica, bem como a vizinhança $\mathcal{U}$ onde estão definidas estas coordenadas, de tal maneira que $\mathcal{U}$ não intersekte o compacto $\tilde{K}$.*

5.9.1 Continuação de soluções circulares $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias no caso planar

Lema 5.9.1. *Seja $\varphi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$ solução circular do problema (5.125) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay (5.63), T -periódica e $\mathcal{S}_1$ -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, P_1^0, P_2^0) = (n_1\pi, 0, s^{-1/3}, 0)$ sobre o eixo x , onde $n_1 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$ e $T/2 = \pi m/(s-1)$ com $m \in \mathbb{N}$. Então $\psi_{kep}(t)$ é dada por*

$$\begin{aligned}Q_1(t) &= (s-1)t + Q_1^0, & P_1(t) &= P_1^0, \\ Q_2(t) &= Q_2^0 \cos t + P_2^0 \sin t, & P_2(t) &= -Q_2^0 \sin t + P_2^0 \cos t.\end{aligned}\tag{5.131}$$

Demonstração: Consideremos o sistema (5.130) com $\epsilon = 0$, que corresponde ao problema de Kepler planar em coordenadas giratórias dado nas coordenadas de Poincaré-Delaunay (5.63). A solução circular do problema de Kepler será $\varphi(t, \mathbf{Y}_0; 0) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t)) = ((s-1)t + n_1\pi, 0, s^{-1/3}, 0)$ com condição inicial $\mathbf{Y}_0$. Para de que esta solução seja $\mathcal{S}_1$ -simétrica é suficiente que em $t = T/2$, ela intersekte novamente o eixo x ortogonalmente, então do Lema 5.6.2, equação (5.69) seguem as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned}Q_1(T/2, Y_0; 0) &= (s-1)\frac{T}{2} + n_1\pi = (n_1 + m)\pi, \\ Q_2(T/2, Y_0; 0) &= 0 = 0.\end{aligned}\tag{5.132}$$

Resolvendo as equações de periodicidade acima obtemos solução do problema de Kepler $\mathcal{S}_1$ -simétrica circular com período $T = 2\pi m/(s-1)$. ■

Teorema 5.9.1. *Assuma que a função W_2 é invariante por reflexões sobre o eixo x e seja $\psi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$, solução circular do problema (5.130) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.9.1.*

i)– Então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, 0, \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_2(\epsilon))$ tal que $\psi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \psi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $T = 2\pi m/(s-1)$ e está próxima a um círculo de raio $s^{-2/3}$.

ii) Também existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon) = (0, 0, \Delta P_1, \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon))$, ϵ e ΔP_1 pequenos, tal que $\psi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \psi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a T e está próxima a um círculo de raio $s^{-2/3}$.

Observação 5.9.2. *No teorema acima estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2) := (\Delta P_1, \Delta P_2)$, onde $s \in \mathbb{R}^+$ é escolhido convenientemente para evitar problemas de singularidades.*

Demonstração: Seja $\psi(t, \mathbf{Y}; 0)$ a solução circular do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2)$ sobre o eixo x em uma vizinhança de $\mathbf{Y}_0$. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ , obtemos que a solução do sistema perturbado (5.130) é $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) =$

$\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Para que a solução seja $\mathcal{S}_1$ -simétrica é suficiente que em $t = T/2$ a solução intersecte ortogonalmente o eixo x e do Lema 5.6.2 equação (5.69), seguem as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} - 1)T/2 - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \Delta Q_2 \sin t + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \end{aligned} \quad (5.133)$$

onde $m \in \mathbb{N}$. Observe que $f_1(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$ e $f_2(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$. Segue das equações de periodicidades (5.133)

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_2)} \right|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s-1 & -3(s^{4/3})T/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sin T/2 \end{pmatrix}.$$

Para que o jacobiano acima seja tenha posto 2 e as soluções de periodicidade tenham solução, temos as seguintes possibilidades:

(A) Observe que $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_2)}\right)\Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = -3(s^{4/3})T/2 \sin T/2$. Desde que $T/2 \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou equivalentemente $(s-1) \neq m/k$ então segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_1 = \Delta P_1(\epsilon)$ e $\Delta P_2 = \Delta P_2(\epsilon)$ definidas para $|\epsilon| < \epsilon_0$ onde ϵ_0 é suficientemente pequeno, tal que $\Delta P_1(0) = 0$, $\Delta P_2(0) = 0$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = (n_1\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_2(\epsilon))$ é $\psi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \psi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período $T = 2\pi m/(s-1)$ e está próxima a uma solução circular do problema de Kepler com mesmo período T , raio $s^{-2/3}$.

(B) Observe que $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_2)}\right)\Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = (s-1) \sin T/2$. Desde que $T/2 \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou equivalentemente $(s-1) \neq m/k$ segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_2 = \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_1, \epsilon)$ definidas para $|\Delta P_1| < \delta$ e $|\epsilon| < \epsilon_0$ onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta P_2(0, 0) = 0$, $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = (n_1\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon))$ é $\psi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \psi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a $T = 2\pi m/(s-1)$ e está próxima a uma solução circular do problema de Kepler com período T , raio $s^{-2/3}$. ■

5.9.2 Continuação de soluções circulares $\mathcal{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias no caso planar

De maneira similar de que procedemos na seção 5.9.1, podemos obter soluções $\mathcal{S}_2$ -simétricas do sub-problema planar (5.125). O procedimento para obtenção deste resultado é muito semelhante ao da seção anterior e desta forma vamos somente enunciar os resultados omitindo as provas.

Lema 5.9.2. *Seja $\psi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$ solução circular do problema (5.125) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay (5.63), T -periódica e $\mathcal{S}_2$ -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, P_1^0, P_2^0) = (n_1 + 1/2)\pi, 0, s^{-1/3}, 0$ sobre o eixo y , onde $n_1 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$ e $T/2 = \pi m/(s-1)$ com $m \in \mathbb{N}$. Então $\psi_{kep}(t)$ é dada por (5.131)*

Demonstração: Basta proceder de maneira similar adaptando alguns detalhes a demonstração do Lema 5.9.1. ■

Teorema 5.9.2. *Assuma que a função W_2 é invariante por reflexões sobre o eixo- y e seja $\psi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$, solução circular do problema (5.130) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.9.2.*

i)– Então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, \Delta Q_2(\epsilon), \Delta P_1(\epsilon), 0)$ tal que $\psi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \psi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $T = 2\pi m/(s-1)$ e esta solução está próxima do círculo de raio $s^{-2/3}$.

ii) Também existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon) = (0, \Delta Q_2(\Delta P_1, \epsilon), \Delta P_1, 0)$, ϵ e ΔP_1 pequenos, tal que $\psi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \psi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a T e esta solução está próxima do círculo de raio $s^{-2/3}$.

Observação 5.9.3. *No teorema acima estamos usando a notação $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta q_2, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0) := (\Delta Q_2, \Delta P_1)$ onde $s \in \mathbb{R}^+$ é escolhido convenientemente para evitar problemas de singularidade.*

Demonstração: Basta Proceder de maneira similar a prova do Teorema 5.9.1. ■

5.9.3 Continuação de soluções circulares duplamente simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias no caso planar

Iremos supor que a função W_2 restrita ao plano horizontal é invariante por reflexões em torno do eixo x e eixo y . Temos então a seguinte caracterização da solução circular do problema de Kepler em coordenadas giratórias e duplamente simétrica.

Lema 5.9.3. *Seja $\psi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$ solução circular do problema (5.125) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Poincaré-Delaunay (5.63), T -periódica e duplamente simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, P_1^0, P_2^0) = ((n_1 + 1/2)\pi, 0, s^{-1/3}, 0)$ sobre o eixo y , onde $n_1 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}^+$ e $T/4 = \pi(2m+1)/2(s-1)$ com $m \in \mathbb{N}$. Então $\psi_{kep}(t)$ é dada por (5.131).*

Demonstração: Consideremos o sistema (5.130) com $\epsilon = 0$, que corresponde ao problema de Kepler planar em coordenadas giratórias dado nas coordenadas de Poincaré-Delaunay (5.63). A solução circular do problema de Kepler será $\varphi(t, \mathbf{Y}_0; 0) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t)) = ((s-1)t + (n_1 + 1/2)\pi, 0, s^{-1/3}, 0)$ com condição inicial $\mathbf{Y}_0$. Para que esta solução seja duplamente simétrica é suficiente que em $t = T/4$, ela intersecte o eixo x ortogonalmente, segue do Lema Lema 5.6.2 equação (5.69) as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} Q_1(T/4, Y_0; 0) &= (s-1)\frac{T}{4} + n_1\pi = (n_1 + m)\pi \\ Q_2(T/4, Y_0; 0) &= 0 \end{aligned} \tag{5.134}$$

Resolvendo as equações de periodicidade acima obtemos solução do problema de Kepler duplamente simétrica circular com período $T/4 = \pi(2m+1)/2(s-1)$. ■

Teorema 5.9.3. *Assuma que a função W_2 é invariante por reflexões sobre o eixo x e sobre o eixo y e seja $\psi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$, solução circular do problema (5.130) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.9.3.*

i)– Então para ϵ suficientemente pequeno existe condição inicial $\mathbf{Y}_\epsilon = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\epsilon) = (0, 0, \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_2(\epsilon))$ tal que $\psi(t, \mathbf{Y}_\epsilon; \epsilon) = \psi_{kep}(t, \mathbf{Y}_\epsilon; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica com período $T = 2\pi(2m+1)/(s-1)$ desde que $(s-1) \neq (2m+1)/k$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e também esta solução está próxima de círculos com raio $s^{-2/3}$.

ii) Também existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_1, \epsilon) = (0, 0, \Delta P_1, \Delta P_2(\Delta P_1, \epsilon))$, ϵ e ΔP_1 pequenos, tal que $\psi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; \epsilon) = \psi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica com período $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ próximo a $T = 2\pi(2m+1)/(s-1)$ desde que $(s-1) \neq (2m+1)/k$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e também esta solução está próxima de círculos com raio $s^{-2/3}$.

Observação 5.9.4. No teorema acima estamos usando a notação $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0) := (\Delta Q_2, \Delta P_1)$ onde $s \in \mathbb{R}^+$ é escolhido convenientemente para evitar problemas de singularidades.

Demonstração: Seja $\psi(t, \mathbf{Y}; 0)$ a solução circular do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0)$ sobre o eixo y em uma vizinhança de $\mathbf{Y}_0$. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ , obtemos que a solução do sistema perturbado (5.130) é $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Para que a solução seja duplamente simétrica é suficiente que em $t = T/2$ a solução intersecte ortogonalmente o eixo x e do Lema 5.6.2 equação (5.69), seguem as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} - 1)t - (m + 1/2)\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0 \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= \Delta Q_2 \cos t + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0. \end{aligned} \quad (5.135)$$

onde $m \in \mathbb{N}$. Observe que $f_1(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = 0$ e $f_2(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = 0$. Segue das equações de periodicidades (5.135)

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_2)} \right|_{t=T/4, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s-1 & -3(s^{4/3})T/4 & 0 \\ 0 & 0 & \cos T/2 \end{pmatrix}.$$

Para que o jacobiano acima seja tenha posto 2 e as soluções de periodicidade tenham solução, temos as seguintes possibilidades

(A) Observe que $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\Delta P_1, \Delta P_2)}\right)\Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} = -3(s^{4/3})T/4 \cos T/4 \neq 0$, pois $T/4 \neq k/2\pi$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então o resultado segue do Teorema da Função Implícita.

(B) Observe que $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_2)}\right)\Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} = (s-1) \cos T/4 \neq 0$, pois novamente que $T/4 \neq k/2\pi$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e o resultado segue do Teorema da Função Implícita. ■

Observação 5.9.5. Observamos que mostramos que é possível continuar soluções circulares do problema de Kepler planar em coordenadas giratórias $\mathcal{S}_1$ -simétricas, $\mathcal{S}_2$ -simétricas e também duplamente simétricas usando as coordenadas de Poincaré-Delaunay (5.63). Mas o fato importante aqui, é que não exigimos nenhuma restrição sobre os termos perturbadores, ou seja não exigimos nenhuma condição sobre a função W_2 , além daquelas feitas inicialmente. Nos Teoremas 5.9.1, 5.9.2 e 5.9.3 acima, foi possível obter famílias de soluções periódicas simétricas, próximas a círculos, a um parâmetro, dependendo de ϵ e neste caso as soluções possuem período fixo e também famílias periódicas simétricas a dois parâmetros.

5.9.4 Continuação de soluções elípticas do problema de Kepler em coordenadas giratórias no caso planar

Nas próximas seções vamos determinar a existência de soluções simétricas periódicas do problema (5.125) obtidas a partir de órbitas elípticas do problema de Kepler planar em coordenadas giratórias. Usaremos para isso, as variáveis de Delaunay, já que estas estão definidas em uma vizinhança $\mathcal{U}$ de uma órbita elíptica do problema de Kepler.

5.9.5 Continuação de soluções elípticas $\mathcal{S}_1$ -simétricas do problema de Kepler em coordenadas giratórias

Lema 5.9.4. *Seja $\psi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$ solução elíptica do problema (5.128) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Delaunay (5.60), T -periódica e $\mathcal{S}_1$ -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, P_1^0, P_2^0) = (n_1\pi, n_2\pi, s^{-1/3}, p_2)$ onde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $s = (m/n)$ e $T = 2n\pi$ com $n \in \mathbb{N}$. Então a solução $\psi_{kep}(t)$ é dada por*

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= st + Q_1^0, & P_1(t) &= P_1^0, \\ Q_2(t) &= -t + Q_2^0, & P_2(t) &= P_2^0. \end{aligned} \quad (5.136)$$

Demonstração: Consideremos o sistema (5.128) com $\epsilon = 0$, que corresponde ao problema de Kepler planar em coordenadas giratórias dado nas coordenadas de Delaunay (5.60). A solução elíptica do problema de Kepler será $\varphi(t, \mathbf{Y}_0; 0) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t)) = (st + n_1\pi, -t + n_2\pi, s^{-1/3}, p_2)$ com condição inicial $\mathbf{Y}_0$. Para que esta solução seja $\mathcal{S}_1$ -simétrica é suficiente que em $t = T/2$, ela intersecte novamente o eixo x ortogonalmente. Do Lema 5.6.1 equação (5.67) seguem as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, Y_0; 0) &= sT/2 + n_1\pi = (n_1 + m)\pi, \\ Q_2(T/2, Y_0; 0) &= -T/2 + n_2\pi = (n_2 - n)\pi. \end{aligned} \quad (5.137)$$

onde $n, m \in \mathbb{N}$ com $n > n_2$. Resolvendo as equações de periodicidade acima obtemos solução do problema de Kepler $\mathcal{S}_1$ -simétrica elíptica com período $T = 2n\pi$, desde que $s = m/n$. ■

Teorema 5.9.4. *Assuma que a função W_2 é invariante por reflexões sobre o eixo x e seja $\psi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$, solução elíptica do problema (5.128) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.9.4. Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon) = (0, 0, \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2)$, com $\epsilon \in \Delta P_2$ pequenos, tal que $\psi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \psi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica com período $\tau(\Delta P_2, \epsilon)$ próximo a T e próxima de uma elipse de semi-eixo maior $s^{-2/3}$.*

Observação 5.9.6. *No teorema acima estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, p_2 + \Delta P_2) := (\Delta P_1, \Delta P_2)$, onde $s \in R^+$ é escolhido convenientemente para evitar problemas de singularidades.*

Demonstração: Seja $\psi(t, \mathbf{Y}; 0)$ a solução elíptica do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y} = ((n_1\pi, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, p_2 + \Delta P_2)$ sobre o eixo x em uma vizinhança de $\mathbf{Y}_0$. Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ , obtemos que a solução do sistema perturbado (5.128) é $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Para que a solução seja $\mathcal{S}_1$ -simétrica é suficiente que em $t = T/2$ a solução intersecte ortogonalmente o eixo x e do Lema 5.6.1 equação (5.28), seguem as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= -t + n\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \end{aligned} \quad (5.138)$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$. Observe que $f_1(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$ e $f_2(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$. Segue das equações de periodicidades (5.138) que

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_2)} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s & -3(s^{4/3})T/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_1)}\right) \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} = 3(s^{4/3})T/2$. Então segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_1 = \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_2, \epsilon)$ definidas para $|\Delta P_2| < \delta$ e $|\epsilon| < \epsilon_0$ onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta P_1(0, 0) = 0$, $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon} = (n_1\pi, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), p_2 + \Delta P_2)$

é $\psi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \psi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período $\tau(\Delta P_2, \epsilon)$ próximo a $T = 2n\pi$ e está próxima a uma elipse com semi-eixo maior $s^{-2/3}$. ■

5.9.6 Continuação de soluções elípticas S_2 -simétricas

De maneira muito similar a seção 5.9.5, podemos obter soluções S_2 -simétricas próximas a órbitas elípticas do problema de Kepler.

Lema 5.9.5. *Seja $\psi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$ solução elíptica do problema (5.128) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Delaunay (5.60), T -periódica e S_2 -simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, P_1^0, P_2^0) = (n_1\pi, (n_2 + 1/2)\pi, s^{-1/3}, p_2)$ sobre o eixo- y , onde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $s = (m/n)$ e $T = 2n\pi$ com $n \in \mathbb{N}$. Então a solução $\psi_{kep}(t)$ é dada por (5.136).*

Demonstração: Basta proceder de maneira similar a prova do Lema 5.9.4 fazendo algumas adaptações convenientes. ■

Teorema 5.9.5. *Assuma que a função W_2 é invariante por reflexões sobre o eixo y e seja $\psi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$, solução elíptica do problema (5.128) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.9.5. Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon) = (0, 0, \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2)$, ϵ e ΔP_2 pequenos, tal que $\psi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \psi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução S_1 -simétrica com período $\tau(\Delta P_2, \epsilon)$ próximo a T .*

Demonstração: Basta proceder de maneira similar a demonstração do Teorema 5.9.4. ■

5.9.7 Continuação de soluções elípticas duplamente-simétricas.

Vamos obter soluções periódicas próxima a soluções elípticas do problema de Kepler simétricas com respeito a reflexões em torno do eixos x e y . Desta forma a solução elíptica do problema de Kepler em coordenadas giratórias e duplamente simétrica tem a seguinte caracterização nas coordenadas de Delaunay.

Lema 5.9.6. *Seja $\psi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$ solução elíptica do problema (5.128) com $\epsilon = 0$, dada nas variáveis de Delaunay (5.60), T -periódica e duplamente simétrica com condição inicial $\mathbf{Y}_0 = (Q_1^0, Q_2^0, P_1^0, P_2^0) = (n_1\pi, (n_2 + 1/2)\pi, s^{-1/3}, p_2) \in \mathcal{L}_2$ onde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $T = 2(2n + 1)\pi$, desde que $s = 2m/(2n + 1)$ com $m, n \in \mathbb{N}$. Então a solução $\psi_{kep}(t)$ é dada por (5.136).*

Demonstração: Consideremos o sistema (5.128) com $\epsilon = 0$, que corresponde ao problema de Kepler planar em coordenadas giratórias dado nas coordenadas de Delaunay (5.60). A solução elíptica do problema de Kepler será $\varphi(t, \mathbf{Y}_0; 0) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t)) = (st + n_1\pi, -t + (n_2 + 1/2)\pi, s^{-1/3}, p_2)$ com condição inicial $\mathbf{Y}_0$. Para que esta solução seja duplamente simétrica é suficiente que em $t = T/4$, ela intersecte o eixo x ortogonalmente, ou seja

$$\begin{aligned} Q_1(T/4, Y_0; 0) &= sT/4 + n_1\pi &= (n_1 + m)\pi \\ Q_2(T/4, Y_0; 0) &= -T/4 + (n_2 + 1/2)\pi &= (n_2 - n)\pi. \end{aligned} \tag{5.139}$$

onde $n, m \in \mathbb{N}$ com $n > n_2$. Resolvendo as equações de periodicidade acima obtemos solução do problema de Kepler duplamente simétrica elíptica com período $T = 2(2n + 1)\pi$, desde que $s = 2m/(2n + 1)$. ■

Teorema 5.9.6. *Assuma que a função W_2 é invariante por reflexões sobre o eixo x e sobre o eixo y e seja $\psi_{kep}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), P_1(t), P_2(t); 0)$, solução elíptica do problema (5.128) com $\epsilon = 0$, como no Lema 5.9.6. Então existe condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon} = \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon)$ com $\mathbf{Y}(\Delta P_2, \epsilon) = (0, 0, \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), \Delta P_2)$, com ϵ e ΔP_2 pequenos, tal que $\psi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \psi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$ é uma solução duplamente simétrica com período $\tau(\Delta P_2, \epsilon)$ próximo a $T = 2(2n + 1)\pi$, desde que $s = 2m/(2n + 1)$.*

Observação 5.9.7. *No teorema acima estamos usando a notação $\mathbf{Y} = ((n_1\pi, (n_2 + 1/2)\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, p_2 + \Delta P_2) := (\Delta P_1, \Delta P_2)$, onde $s > s^*$, $s, s^* \in \mathbb{R}^+$, s^* suficientemente grande, para evitar problemas de singularidades.*

Demonstração: Seja $\psi(t, \mathbf{Y}, 0)$ a solução elíptica do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{Y} = ((n_1\pi, (n_2 + 1/2)\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, p_2 + \Delta P_2)$ sobre o eixo y em uma vizinhança de $\mathbf{Y}_0$ de maneira que $\varphi(t, \mathbf{Y}, \epsilon)$ para $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, seja uma solução do problema perturbado (5.128). Usando a diferenciabilidade do fluxo em relação ao parâmetro ϵ , obtemos que a solução do sistema perturbado (5.128) é $\varphi(t, \mathbf{Y}, \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Para que a solução seja duplamente simétrica é suficiente que em $t = T/4$ a solução intersecte ortogonalmente o eixo x e do Lema 5.6.1 equação (5.28), seguem as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \\ f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) &= -t + (n + 1/2)\pi + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i}) = 0, \end{aligned} \quad (5.140)$$

onde $m, n \in \mathbb{R}$. Observe que $f_1(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = 0$ e $f_2(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = 0$. Segue das equações de periodicidade (5.140)

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_2)} \Big|_{t=T/4, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s & -3(s^{4/3})T/4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que $\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_1)}\right) \Big|_{t=T/4, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} = 3(s^{4/3})T/4$. Então segue do Teorema da Função Implícita que existem funções analíticas $\Delta P_1 = \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon)$ e $\tau = \tau(\Delta P_2, \epsilon)$ definidas para $\Delta P_2 \in [0, \delta)$ e $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$ onde δ e ϵ_0 são suficientemente pequenos, tal que $\Delta P_1(0, 0) = 0$, $\tau(0, 0) = T$. Desta forma a solução duplamente simétrica do sistema perturbado com condição inicial $\mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon} = (n_1\pi, (n_2 + 1/2)\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1(\Delta P_2, \epsilon), p_2 + \Delta P_2)$ é $\psi(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_2, \epsilon}; \epsilon) = \psi_{kep}(t, \mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha+i})$. Esta solução possui período $\tau(\Delta P_2, \epsilon)$ próximo a $T = 2(2n + 1)\pi$, desde que $s = 2m/(2n + 1)$ e está próxima a uma solução elíptica do problema de Kepler com período T . ■

Observação 5.9.8. *Note que aqui nos Teoremas 5.9.4, 5.9.5 e 5.9.6 podemos continuar soluções elípticas do problema de Kepler em coordenadas giratórias e assim obter famílias de soluções periódicas com simetria a dois parâmetros, porém sem período fixo. Ainda estes resultados foram obtidos sem impor condições sobre a função perturbadora W_2 .*

5.10 Equivalência entre os problemas (5.1) e (5.2)

Nesta seção vamos mostrar que se assumirmos a hipótese de que se problema (5.1) é invariante por rotações em torno do eixo- z , então ele pode ser transformado, via uma transformação simplética no tempo, no problema e (5.2). Assuma seguinte hipótese:

Hipótese 5.10.1. *Suponha que a função W_1 é invariante por rotações em torno do eixo- z .*

Considere a mudança de coordenadas simplética

$$\begin{aligned}x &= \xi \cos(t) - \eta \sin t, & p_x &= p_\xi \cos t - p_\eta \sin t, \\y &= \xi \sin t + \eta \cos t, & p_y &= p_\xi \sin t + p_\eta \cos t, \\z &= \zeta, & p_z &= p_\zeta.\end{aligned}$$

Então a função Hamiltoniana (5.3) assume a forma

$$K = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) - (\xi p_\eta - \eta p_\xi) - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} + \epsilon^\alpha W_1(\xi, \eta, \zeta, \epsilon). \quad (5.141)$$

Logo obtemos um problema do tipo (5.2), onde $W_2 := W_1$. Portanto as soluções T -periódicas do sistema (5.2) serão periódicas do sistema (5.1), desde que o período satisfaça a condição de comensurabilidade: $T/2\pi = p/q$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$.

Capítulo 6

Soluções periódicas simétricas no problema do anel, disco e fio circular homogêneo

Neste capítulo, vamos determinar a existência de soluções periódicas simétricas no problema de uma partícula atraída por um corpo maciço planar, particularmente no caso em que o corpo é um anel, disco ou fio circular homogêneo. Mostraremos que estes problemas podem ser escritos como perturbações analíticas do problema de Kepler, e então vamos utilizar os resultados do capítulo (5) para prolongar soluções circulares e elípticas do problema de Kepler, seja no caso espacial ou no caso planar.

O estudo de soluções periódicas simétricas no problema do fio circular homogêneo, sob o ponto de vista analítico, foi estudado por Azevêdo em [5] ou em [15]. Outros trabalhos tratam do problema, mas sob o ponto de vista numérico como Alberti [1] e Broucke [10]. Porém para o problema do anel circular ou disco circular homogêneos não encontramos resultados na literatura.

Na primeira seção deste capítulo estudaremos o problema do anel circular $\mathcal{A}$ e do disco circular $\mathcal{D}$ homogêneos já definidos anteriormente. Utilizaremos a formulação do problema, em diferentes tipos de coordenadas, no sistema euclidiano fixo e também nas coordenadas giratórias (desde que estes problemas são invariantes por rotações em torno do eixo- z), e a partir destas expressões, descreveremos convenientemente o problema usando coordenadas de Delaunay ou Poincaré-Delaunay. Provaremos assim, a existência de soluções periódicas simétricas espaciais e nos sub-problemas: plano horizontal e plano vertical. No caso espacial vamos obter soluções simétricas em relação ao eixo x , em relação aos planos verticais: plano- (y, z) e plano- (x, z) e soluções duplamente simétricas: simétricas em relação ao eixo- x e em relação ao plano- (y, z) e simétricas em relação ao eixo- x e em relação ao plano- (x, z) . Ainda do fato que o problema do anel ou disco ou fio circular homogêneo fixo são invariantes por rotações em torno do eixo- z , poderemos obter soluções simétricas com outras simetrias das descritas acima.

Para o problema do fio circular homogêneo, os autores em [5] ou [15] provaram a existência de soluções simétricas contidas em algum plano, próximas a soluções circulares do problema de Kepler. Nestes trabalhos, os autores conseguiram continuar soluções circulares do problema de Kepler com condição inicial que tem a posição fixa (a mesma da órbita de Kepler) e perturbando a velocidade. Na última seção deste capítulo, vamos determinar soluções simétricas para o problema do fio circular, diferentes das obtidas por [5], já que podemos continuar soluções do problema de Kepler circulares ou elípticas, obtendo soluções espaciais e ainda, algumas delas podemos dizer exatamente qual é o período.

6.0.1 Potencial do anel ou disco circular homogêneo em termos de Polinômio de Legendre

Como no caso geral de um corpo maciço, estudado na seção 2.1.1 podemos escrever a função potencial do anel ou disco circular homogêneo em série de potência, a qual é dada em termos de polinômios de Legendre.

Seja $\mathcal{A} = \{(r, \vartheta, 0), a < r < b\}$ anel circular homogêneo centrado na origem de raio interno a e raio externo b , densidade de superfície λ constante e centrado na origem O do sistema cartesiano.

Seja P um ponto cuja distância a origem O é r e tem latitude ϑ . Pela simetria do anel podemos tomar, sem perda de generalidade, $P = (r \sin \vartheta, 0, r \cos \vartheta)$ no plano xz . Seja $Q \in \mathcal{A}$ a uma distância R da origem O e com latitude ψ com o eixo x . Denotamos por $d = d(P, Q)$ a distância do ponto P ao ponto $Q = (R \cos \psi, R \sin \psi, 0)$. Então o potencial do anel em P

$$\begin{aligned} V &= - \int \int \frac{\lambda R}{d(P, Q)} \frac{dR d\psi}{d(P, Q)}, \\ &= - \lambda \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{(r \sin \vartheta - R \cos \psi)^2 + R^2 \sin^2 \psi + r^2 \cos^2 \vartheta}} dR d\psi. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Uma vez que a massa M e a densidade λ estão relacionadas por $M = \pi \lambda (b^2 - a^2)$ da equação (6.1) obtemos que

$$V = \frac{M}{\pi(b^2 - a^2)} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{R}{r \sqrt{1 + (R/r)^2 - 2(R/r) \sin \vartheta \cos \psi}} dR d\psi \quad (6.2)$$

Se considerarmos $R/r < 1$ então o radical da equação (6.2) acima pode ser escrito em série de potenciais em termos de R/r da seguinte maneira.

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2R/r \sin \vartheta \cos \psi + (R/r)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\sin \vartheta \cos \psi) \left(\frac{R}{r}\right)^n,$$

onde $P_n(x)$ é um polinômio de grau n em x denominado n -ésimo polinômio de Legendre. Podemos observar que como $R/r < 1$, segue que o ponto P está no exterior da esfera com centro na origem e raio b . Desta forma, da equação (6.2) obtemos que

$$\begin{aligned} V &= - \frac{M}{\pi(b^2 - a^2)} \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} dR \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\sin \vartheta \cos \psi) d\psi, \\ &= - \frac{M}{r} + \frac{(b^2 + a^2)M}{8r^3} P_2(\cos \vartheta) - \frac{M}{8r^5} (b^4 + a^2 b^2 + b^4) P_4(\cos \vartheta) + \dots \\ &= - \frac{M}{r} + \frac{(b^2 + a^2)M}{8r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1) - \frac{M}{8r^5} (b^4 + a^2 b^2 + b^4) \left(\frac{35}{8} \cos^4 \vartheta - \frac{15}{4} \cos^2 \vartheta + \frac{3}{8}\right) + \dots \end{aligned} \quad (6.3)$$

A partir da expressão do potencial do anel podemos obter o potencial do disco circular fazendo simplesmente $a = 0$. Temos o seguinte lema, cuja demonstração é evidente.

Lema 6.0.1. *O potencial do disco circular homogêneo $\mathcal{D}$ de massa M e raio b , em um ponto P a uma distância $r > b$ da origem O pode ser expresso em séries e é obtido a partir da equação (6.3) fazendo $a = 0$, ou seja,*

$$V = - \frac{M}{r} + \frac{b^2 M}{8r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1) - \frac{M}{4r^5} b^4 \left(\frac{35}{8} \cos^4 \vartheta - \frac{15}{4} \cos^2 \vartheta + \frac{3}{8}\right) + \dots \quad (6.4)$$

Segue do Lema 6.0.1, que o potencial de um anel ou disco circular homogêneo podem ser expressos de uma única maneira, a menos de constantes, como segue

$$V = - \frac{M}{r} + c_{a,b}^1 \frac{M}{r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1) - c_{a,b}^2 \frac{M}{r^5} \left(\frac{35}{8} \cos^4 \vartheta - \frac{15}{4} \cos^2 \vartheta + \frac{3}{8}\right) + \dots \quad (6.5)$$

onde $c_{a,b}^i, i \in \mathbb{N}$ são dados por

$$\begin{aligned} c_{a,b}^1 &= (b^2 + a^2)/8, & c_{a,b}^2 &= (b^4 + a^2 b^2 + b^4)/8 & \text{no anel } (a < b) \\ c_{0,b}^1 &= b^2/8, & c_{0,b}^2 &= b^4/4 & \text{no disco } (a = 0) \end{aligned} \quad (6.6)$$

6.1 Soluções periódicas simétricas

Nesta seção vamos obter soluções periódicas simétricas do problema do anel circular homogêneo com centro na origem do sistema euclidiano tridimensional, de raio interno ϵ , espessura $\mu = b - \epsilon$ e com massa constante $M = 1$. Desta forma a densidade é dada por $\lambda = 1/\pi(\mu(2\epsilon + \mu))$. Também vamos determinar a existência de soluções periódicas simétricas para o problema do disco circular homogêneo com raio ϵ e com massa constante $M = 1$ e portanto a densidade é $\lambda = 1/\pi\epsilon^2$.

Primeiramente, analisamos o caso do anel com espessura μ , como função do raio interno ϵ , ou seja $\mu = \mu(\epsilon)$ e então $b = \epsilon + \mu(\epsilon)$. Seja $\mathbf{q} = (x, y, z)$ as coordenadas cartesianas de P . Então segue que $r = \|\mathbf{q}\|$. Pela equação (6.3), o potencial em polinômios de Legendre é dado por

$$V = -\frac{M}{\|\mathbf{q}\|} + \frac{M[2a(a + \mu(a)) + \mu^2(a)]}{8\|\mathbf{q}\|^3}(3\cos^2\vartheta - 1) + \mathcal{O}(a^4), \quad (6.7)$$

e fazendo $\mu = \mu(\epsilon) = k\epsilon$ onde $k \in \mathbb{R}^+$ e assim $b = \epsilon(1 + k)$, segue da equação (6.7) a seguinte expressão

$$V = -\frac{M}{\|\mathbf{q}\|} + \epsilon^2 \frac{M[(1+k)^2 + 1]}{8\|\mathbf{q}\|^3}(3\cos^2\vartheta - 1) + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (6.8)$$

e então o potencial é uma perturbação do potencial do problema de Kepler em ϵ . Desta forma segue que V é analítica em $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ com $x^2 + y^2 + z^2 > (1+k)^2\epsilon^2$, pois nesta região V é expresso como uma série convergente. Na verdade V é analítica na região $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq (1+k)^2\epsilon^2 \text{ e } z = 0\}$. Afim de não sobrecarregar a notação, definiremos $C := c_{a,b}^1 = [(1+k)^2 + 1]/8$. Então a função Hamiltoniana associada ao problema do anel é dada por

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon^2 H_1(\mathbf{q}) + \epsilon^4 H_R(\mathbf{q}, \epsilon), \quad (6.9)$$

onde $H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2 + \frac{1}{\|\mathbf{q}\|}$ e

$$H_1(\mathbf{q}) = \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3}(3\cos^2\vartheta - 1), \quad (6.10)$$

onde $\cos(\vartheta) = \frac{z}{\|\mathbf{q}\|}$ e M é a massa da anel circular A . As equações de $H_1(\mathbf{q})$ e $H_R(\mathbf{q}, \epsilon)$ são limitadas desde que $b < r$. Observe também que H_1 e H_R são contínuas quando $\epsilon = 0$.

Observação 6.1.1. Observe que com a notação do Capítulo 5 temos que

$$W_1(q, \epsilon) = \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3}(3\cos^2\vartheta - 1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (6.11)$$

que claramente é analítica em $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{K}$ onde $\mathcal{K}$ neste caso é a esfera de raio $\epsilon(1+k)$, veja Figura 6.1 abaixo.

Observação 6.1.2. Observe que o parâmetro perturbador ϵ está associado a espessura $\mu = k\epsilon$ do anel e ao raio interno ϵ . De forma que mesmo quando ϵ é suficientemente pequeno, podemos ainda obter um anel com diferentes espessuras, basta variar o k .

De fato, Seja $q(t)$ solução T -periódica do problema do anel com raio interno ϵ , espessura $k\epsilon$ (desta forma o raio interno $b = \epsilon(1+k)$), massa $M = 1$ e densidade $\lambda = 1/(\pi k\epsilon^2(2+k))$. Então para o anel de raio interno $a = 1$, raio externo $b = 1+k$ (e portanto com espessura $\mu = k$), de massa unitária e densidade $\bar{\lambda} = 1/(\pi k(1+k))$ obtemos que $s(t) = \frac{1}{\epsilon}q(\epsilon^{3/2}t)$ é solução para o problema do anel e $T/\epsilon^{3/2}$ -periódica. Para verificar este fato basta aplicar o Corolário 2.3.1. Para o problema do disco vale uma propriedade similar.

No caso do disco circular homogêneo $\mathcal{D}$ a função hamiltoniana também é da forma de (6.9) assim como o termo perturbador H_1 de ordem ϵ^2 dado por (6.10), observando somente que neste caso $C = 1/8$. O termo perturbador ϵ neste caso, está simplesmente associado ao raio do disco $\mathcal{D}$.

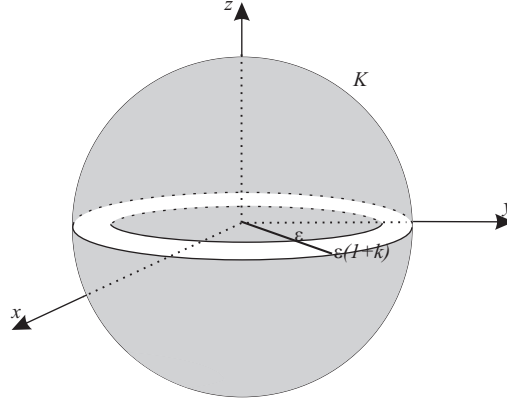


Figura 6.1: Anel A e a vizinhança compacta K.

Então o problema do anel circular homogêneo de raio interno ϵ , espessura $k\epsilon$, de massa unitária e densidade $\lambda = 1/(\pi k\epsilon^2(2+k))$ ou o problema do disco circular homogêneo com $a = 0$ e $b = k\epsilon$, massa $M = 1$ e densidade $\lambda = 1/(\pi\epsilon^2)$; é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^3} + \epsilon^2 \nabla W_1(\mathbf{q}).\end{aligned}\quad (6.12)$$

Para fazer uso dos resultados do capítulo 5 necessitamos descrever o problema (6.12) usando as coordenadas de Poincaré-Delaunay e Delaunay.

Sabemos que em termos das coordenadas esféricas $\cos v = \frac{z}{\|\mathbf{q}\|}$ e por outro lado em termos dos elementos orbitais $z = \|\mathbf{q}\| \sin \psi \sin i$, onde ψ é o ângulo da posição da partícula infinitesimal medido a partir do eixo nodal, sendo i o ângulo de inclinação do plano orbital. desta forma,

$$\cos v = \sin \psi \sin i,$$

e assim obtemos que

$$\cos^2 v = \sin^2 \psi \sin^2 i = \sin^2 \psi \left(1 - \left(\frac{P_3}{G}\right)^2\right),$$

desde que $\cos i = \frac{H}{G}$ e $H = P_3$. A função Hamiltoniana (6.9) nas variáveis de Delaunay-Poincaré ($PD-1$) é então dada por

$$H(Q, P) = -\frac{1}{2P_1^2} + \epsilon^2 \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3} \left[3 \sin^2 \psi \left(1 - \frac{P_3^2}{G^2}\right) - 1\right] + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (6.13)$$

onde $G = P_1 - \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2}$ é o momento angular total. As equações de movimento do sistema hamiltoniano associado a função (6.13) são

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{Q}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{Q}_3 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_3 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}\quad (6.14)$$

Desde que o potencial induzido pelo anel ou disco é invariante por rotações em torno do eixo- z (linha que passa pelo centro do anel ou disco e é perpendicular ao plano que os contém), podemos descrever o

problema em coordenadas giratórias e a função Hamiltoniana é então dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) - (\xi p_\eta - \eta p_\xi) - \frac{M}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} + \epsilon V(\xi, \eta, \zeta, \epsilon). \quad (6.15)$$

onde a função potencial em série em termos de polinômios de Legendre tem a forma

$$V(\xi, \eta, \zeta, \epsilon) = -\frac{M}{\|\mathbf{q}\|} + \epsilon^2 \frac{MC}{8\|\mathbf{q}\|^3} (3\cos^2\vartheta - 1) + \mathcal{O}(\epsilon^4),$$

onde $\mathbf{q} = (\xi, \eta, \zeta)$. Usando a notação da Seção 5.7, segue que $K_1 = \frac{MC}{8\|\mathbf{q}\|^3} (3\cos^2\vartheta - 1)$ e $W_2(\mathbf{q}, \epsilon) = \frac{MC}{8\|\mathbf{q}\|^3} (3\cos^2\vartheta - 1) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

Nas coordenadas giratórias o problema do anel circular homogêneo de raio interno ϵ , espessura $k\epsilon$, de massa unitária e densidade $\lambda = 1/(\pi k\epsilon^2(2+k))$ ou o problema do disco circular homogêneo com $a = 0$ e $b = k\epsilon$, massa $M = 1$ e densidade $\lambda = 1/(\pi\epsilon^2)$; é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= p_\xi + \eta, & \dot{p}_\xi &= p_\eta - \frac{\xi}{\|\mathbf{q}\|^3} - \epsilon^2 \frac{\partial K_1}{\partial \xi} - \mathcal{O}(\epsilon^4), \\ \dot{\eta} &= p_\eta - \xi, & \dot{p}_\eta &= -p_\xi - \frac{\eta}{\|\mathbf{q}\|^3} - \epsilon^2 \frac{\partial K_1}{\partial \eta} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \\ \dot{\zeta} &= p_\zeta, & \dot{p}_\zeta &= -\frac{\zeta}{\|\mathbf{q}\|^3} - \epsilon^2 \frac{\partial K_1}{\partial \zeta} + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Desde que $z = \zeta$ segue da mesma maneira do sistema inercial, que

$$\cos^2 v = \sin^2 \psi \sin^2 i = \sin^2 \psi \left[1 - \left(\frac{H}{G} \right)^2 \right],$$

desde que $\cos i = H/G$ e $H = (\xi p_\eta - \eta p_\xi)$.

Portanto, nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD - 1$) a função Hamiltoniana (6.15) é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2P_1^2} - P_3 + \epsilon^2 \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3} \left(3\sin^2 \psi \left(1 - \frac{P_3^2}{G^2} \right) - 1 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (6.17)$$

e o sistema Hamiltoniano associado a função (6.17) é dado por

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{Q}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{Q}_3 &= -1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_3 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD - 2$) a função Hamiltoniana (6.15) é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2P_1^2} - P_1 + \frac{Q_2^2 + P_2^2 + Q_3^2 + P_3^2}{2} + \epsilon^2 \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3} \left[3\sin^2 \psi \left(1 - \left(\frac{H}{G} \right)^2 \right) - 1 \right] + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (6.19)$$

onde $H = P_1 - \frac{Q_2^2 + P_2^2 + Q_3^2 + P_3^2}{2}$ e $G = P_1 + \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2}$. O sistema Hamiltoniano associado a função (6.17) é dado por

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{Q}_2 &= P_2 + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_2 &= -Q_2 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{Q}_3 &= P_3 + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_3 &= -Q_3 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (6.20)$$

6.1.1 Órbitas periódicas simétricas próximas de círculos

Nesta seção provaremos a existência de soluções $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ e duplamente simétricas (nos dois sentidos, ou seja, simétricas em relação as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ e simétricas em relação as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) do problema do anel ou disco circular homogêneo. Mostraremos que existe um grande diversidade de soluções periódicas simétricas próximas a órbitas circulares do problema de Kepler, sendo que a solução do problema de Kepler pode em alguns casos, possui qualquer inclinação e as soluções continuadas podem possuir período fixo ou período próximo a solução a ser continuada.

Teorema 6.1.1. (Soluções a um parâmetro) *Dados $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do anel ou disco circular homogêneo, dado por 6.12, temos:*

i)– Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ -simétricas com período fixo $T = 2\pi m/s$ próximas do plano xz e de círculos sobre este plano com raio $s^{-2/3}$ e período T .

ii)– Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período fixo $T = 2\pi m/s$ próximas do plano xz e de círculos sobre este plano com raio $s^{-2/3}$ e período T .

iii)– Existem condições iniciais parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_1$ simétricas) com período fixo $T = 2\pi(2m - 1)/s$ próximas do plano xz e de círculos sobre este plano com raio $s^{-2/3}$ e período T .

A demonstração do Teorema acima consiste em verificar as hipóteses sobre os termos perturbadores dadas nos Teoremas 5.4.1, 5.4.2 e 5.4.3. O termo perturbado H_1 dado por (6.10), nas coordenadas de Poincaré-Delaunay $(PD - 1)$ tem a forma

$$H_1(Q, P) = \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3} \left(3 \sin^2 \psi \left(1 - \frac{P_3^2}{G^2} \right) - 1 \right), \quad (6.21)$$

onde $G = P_1 - \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2}$ é o momento angular total. As expressões para $\|\mathbf{q}\|$ e o ângulo ψ devem ser expressas em termos das coordenadas $(PD - 1)$. Estas expressões são dadas por

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}\| &= \mathbf{a}(1 - e \cos E), \\ \psi &= f + g, \end{aligned} \quad (6.22)$$

sendo $\mathbf{a}$ o semi-eixo maior da órbita, f é a anomalia média e E a anomalia excêntrica. Nem os elementos orbitais clássicos e nem os elementos de Delaunay estão definidos em uma vizinhança de uma órbita circular e o mesmo ocorre com qualquer uma de suas anomalias. Porém suas magnitudes $e \sin f$ e $e \cos f$ estão definidas e dependem diferencialmente nas condições iniciais. O mesmo é válido para $e \sin l$, $e \cos l$, $e \sin E$ e $e \cos E$. Cada um dos pares $(e \sin l, e \cos l)$, $(e \sin f, e \cos f)$ e $(e \sin E, e \cos E)$, ambas as variáveis, podem ser expressas em séries nas variáveis de qualquer outro par. As diferenças $f - E$, $E - l$ e $f - l$ assim podem ser expandidas no mesmo caminho. Uma boa referência para estes fatos pode ser encontrada em [11] e [16]. Como estamos interessados na equação destas expressões em uma vizinhança de uma solução circular do problema de Kepler, que nas coordenadas $(PD - 1)$, correspondem a $Q_2 = P_2 = 0$, escrevemos $\|\mathbf{q}\|$ e o ângulo ψ em séries de Taylor em torno da solução circular, ou seja, expressamos $\|\mathbf{q}\|$ e ψ em séries de potências em torno de $Q_2 = 0$, $P_2 = 0$ e $P_1 = s^{-1/3}$.

Lema 6.1.1. *Nas coordenadas $(PD - 1)$, as expressões para $\|\mathbf{q}\|$ e ψ são dadas em séries de potências em torno de $Q_2 = 0$, $P_2 = 0$ e $P_1 = s^{-1/3}$ da seguinte maneira*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{q}\| &= s^{-2/3} + s^{-1/2}Q_2 \sin Q_1 - s^{-1/2}P_2 \cos Q_1 + 2s^{-1/3}(P_1 - s^{-1/3}) + s^{-1/3}Q_2^2 \cos^2 Q_1 + \\
&\quad \frac{3}{2}s^{-1/6}Q_2(P_1 - s^{-1/3}) \sin Q_1 + 2s^{-1/3}Q_2P_2 \sin Q_1 \cos Q_1 + (P_1 - s^{-1/3})^2 - \\
&\quad \frac{3}{2}s^{-1/6}(P_1 - s^{-1/3})P_2 \cos Q_1 + s^{-1/3}P_2^2 \sin^2 Q_1 + \mathcal{O}(\|X\|^3),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\psi &= Q_1 + 2P_2s^{1/6} \sin Q_1 + 2Q_2s^{1/6} \cos Q_1 - \\
&\quad \frac{5}{2}s^{1/3}Q_2^2 \cos Q_1 \sin Q_1 + \frac{5}{2}s^{1/3}P_2Q_2 \cos 2Q_1 - Q_2s^{1/2}(P_1 - s^{-1/3}) \cos Q_1 - \\
&\quad P_2s^{1/2}(P_1 - s^{-1/3}) \sin Q_1 + \frac{5}{2}P_2^2s^{1/3} \sin Q_1 \cos Q_1 + \mathcal{O}(\|X\|^3),
\end{aligned}$$

onde estamos usando $X = (Q_2, P_1 - s^{1/3}, P_2)$ e $Q_1(t) = (s^{-1/3} + P_1)t + (n_1 + \frac{1}{2})\pi$.

Demonstração: Veja apêndice B. ■

Usando o Lema 6.1.1 podemos obter as seguintes estimativas sobre H_1 .

Lema 6.1.2. *O termo perturbado H_1 (6.21) satisfaz as seguintes estimativas:*

$$\begin{aligned}
(a) \quad Q_3^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} &= \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial P_3}(\varphi_{kep}(\tau, X; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau = 0. \\
(b) \quad P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} &= \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau = 0. \\
(c) \quad \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_1} \Big|_{\mathbf{Y}=0} &= 0. \\
(d) \quad \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta Q_2} \Big|_{\mathbf{Y}=0} &= 0. \\
(e) \quad \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_3} \Big|_{\mathbf{Y}=0} &= \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial P_3 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau \neq 0. \\
(f) \quad \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2} \Big|_{\mathbf{Y}=0} &= \int_0^{T/2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial Q_2 \partial \Delta Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, Y; 0)) \Big|_{\mathbf{Y}=0} d\tau = -\frac{41}{32}MCs^{4/3}m\pi.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

onde estamos usando a notação $\mathbf{Y} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, p_3 + \Delta P_3) := (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)$.

Observação 6.1.3. *Observe que $\mathbf{Y}$ no lema acima é uma condição inicial sobre $\mathcal{L}_2$ e desta forma os resultados deste lema são válidos para as soluções $\mathcal{S}_2$ -simétricas e duplamente simétricas, pois nestes casos estamos tomando uma condição inicial sobre $\mathcal{L}_2$, de acordo com as escolhas do Capítulo 5. No caso das soluções $\mathcal{S}_1$ -simétricas tomando $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, p_3 + \Delta P_3) \in \mathcal{L}_1$ e usando o Lema 6.1.1 mostra-se um resultado análogo.*

Demonstração: (Lema 6.1.2) Da equação (6.21) e do Lema 6.1.1 segue que

$$\frac{\partial H_1}{\partial P_3}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = -\frac{6MC}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{P_3 \sin^2 \psi}{G^2},$$

onde $G = P_1 - \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2}$ é o momento angular.

A derivada parcial de H_1 em relação a P_3 deve ser avaliada na solução $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)$ e desta forma

também o devem as expressões $\|\mathbf{q}\|$, ψ e G . Obtemos assim

$$\begin{aligned}
G &:= G|_{\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)} = (s^{-1/3} + \Delta P_1) - \frac{(\Delta Q_2)^2}{2}, \\
\|\mathbf{q}\| &:= \|\mathbf{q}\||_{\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)} = s^{-2/3} + s^{-1/2} \Delta Q_2 \sin Q_1(t) + 2s^{-1/3} \Delta P_1 + s^{-1/3} \Delta Q_2^2 \cos^2 Q_1(t) + \\
&\quad \frac{3}{2} s^{-1/6} \Delta Q_2 \Delta P_1 \sin Q_1(t) + (\Delta P_1)^2 + \mathcal{O}(\|Y\|^3), \\
\psi &:= \psi|_{\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)} = Q_1(t) - 2 \cos Q_1(t) \left(-\frac{\Delta Q_2}{s^{-1/6}} + \Delta Q_2 \frac{\Delta P_1}{2s^{-1/2}} \right) + 2 \left[-\cos Q_1(t) \left(-\frac{\Delta Q_2}{s^{-1/6}} + \Delta Q_2 \frac{\Delta P_1}{2s^{-1/2}} \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{\Delta P_1}{s^{-1/2}} \right] \left[\sin Q_1(t) \left(-\frac{\Delta Q_2}{s^{-1/6}} + \Delta Q_2 \frac{\Delta P_1}{2s^{-1/2}} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[-\cos Q_1(t) \left(-\frac{\Delta Q_2}{s^{-1/6}} + \Delta Q_2 \frac{\Delta P_1}{2s^{-1/2}} \right) + \right. \\
&\quad \left. (-\cos Q_1(t) \left(-\frac{\Delta Q_2}{s^{-1/6}} + \Delta Q_2 \frac{\Delta P_1}{2s^{-1/2}} \right)) (\sin Q_1(t) \left(-\frac{\Delta Q_2}{s^{-1/6}} + \Delta Q_2 \frac{\Delta P_1}{2s^{-1/2}} \right)) \right]^2 \\
&\quad \left[\sin Q_1(t) \left(\frac{\Delta Q_2}{s^{-1/6}} + \Delta Q_2 \frac{\Delta P_1}{2s^{-1/2}} \right) - (-\cos Q_1(t) \left(-\frac{\Delta Q_2}{s^{-1/6}} + \Delta Q_2 \frac{\Delta P_1}{2s^{-1/2}} \right)) \right]^2 + \\
&\quad \mathcal{O}(\|Y\|^3).
\end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned}
Q_3^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0) &= \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial P_3}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) d\tau \\
&= -6MC(p_3 + \Delta P_3) \int_0^{T/2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3 G^2} d\tau.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Desde que a função integrando é positiva, teremos que escolher apropriadamente $p_3 = 0$, ou seja a órbita kepleriana contida no plano xz , e desta forma teremos que $Q_3^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = 0$ e assim provamos o item (a). Da expressão (6.24) segue imediatamente que $\frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta Q_2} = 0$ e $\frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_1} = 0$ quando $\Delta P_3 = 0$ e assim provamos os itens (c) e (d). Por outro lado derivando $Q_3^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)$ em relação ao incremento ΔP_3 tem-se

$$\frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_3} = \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1^2}{\partial P_3 \partial \Delta P_3}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0)) d\tau = -6MC \int_0^{T/2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3 G^2} d\tau \neq 0, \tag{6.25}$$

e o item (e) está provado.

Calculamos agora o termo $P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)$. Da expressão de H_1 dada por (6.21), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_1}{\partial Q_2}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) &= -\frac{3MC}{\|\mathbf{q}\|^4} \frac{\partial}{\partial Q_2} \|\mathbf{q}\| \left[-1 + 3 \left(\frac{G^2 - P_3^2}{G^2} \right) \sin^2 \psi \right] + \\
&\quad \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3} \left[6 \left(\frac{G^2 - P_3^2}{G^2} \right) \sin \psi \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial Q_2} + 3 \sin^2 \psi \left(-2 \frac{P_3^2 Q_2}{G^3} \right) \right],
\end{aligned} \tag{6.26}$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial Q_2} \left(\frac{G^2 - P_3^2}{G^2} \right) = -2 \frac{P_3^2 Q_2}{G^3}.$$

Para determinar completamente a equação (6.26) acima, precisamos calcular as derivadas parciais

$\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial Q_2}$. Do Lema 6.1.1 obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial Q_2}(\|\mathbf{q}\|) &= s^{-1/2} \sin Q_1 + 2s^{-1/3} Q_2 \cos^2 Q_1 + \frac{3}{2} s^{-1/6} \Delta P_1 \sin Q_1 + 2s^{-1/3} P_2 \sin Q_1 \cos Q_1 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial Q_2} \mathcal{O}(\|X\|^3) \\ \frac{\partial \psi}{\partial Q_2} &= 2s^{1/6} \cos Q_1 - 5s^{1/3} Q_2 \cos Q_1 \sin Q_1 + \frac{5}{2} s^{1/3} P_2 \cos 2Q_1 - s^{1/2} (P_1 - s^{-1/3}) \cos Q_1 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial Q_2} \mathcal{O}(\|X\|^3).\end{aligned}$$

Desta forma podemos então obter a expressão para $P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)$

$$\begin{aligned}P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0) &= - \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial Q_2}(\varphi(\tau, \mathbf{x}_\epsilon)) d\tau \\ &= -3MC \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} d\tau + \frac{9MC(G^2 - \Delta P_3^2)}{G^2} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^4} d\tau \\ &\quad - 6MC \left[\frac{(G^2 - \Delta P_3^2)}{G^2} \int_0^{T/2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{\partial \psi}{\partial Q_2} d\tau - \frac{\Delta P_3^2 \Delta Q_2}{G^3} \int_0^{T/2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau \right],\end{aligned}\tag{6.27}$$

Avaliando as expressões de $\|\mathbf{q}\|$, ψ , $\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2}$, G e $\frac{\partial \psi}{\partial Q_2}$ em $\varphi(t, \mathbf{Y}; 0)$ obtemos

$$\begin{aligned}\|\mathbf{q}\| &:= \|\mathbf{q}\|_{|\varphi(t, \mathbf{Y}; 0)} = s^{-2/3} + s^{-1/2} \Delta Q_2 \sin Q_1(t) + 2s^{-1/3} \Delta P_1 + s^{-1/3} \Delta Q_2^2 \cos^2 Q_1(t) + \\ &\quad \frac{3}{2} s^{-1/6} \Delta Q_2 \Delta P_1 \sin Q_1(t) + (\Delta P_1)^2 + \mathcal{O}(\|Y\|^3), \\ \psi &:= \psi_{|\varphi(t, \mathbf{Y}; 0)} = Q_1(t) + 2\Delta Q_2 s^{1/6} \cos Q_1^{(0)}(t) - \frac{5}{2} s^{1/3} \Delta Q_2^2 \cos Q_1^{(0)}(t) \sin Q_1^{(0)}(t) - \\ &\quad \Delta Q_2 s^{1/2} \Delta P_1 \cos Q_1^{(0)}(t) + \mathcal{O}(\|Y\|^3), \\ \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} &:= \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \Big|_{\varphi(t, \mathbf{x}_\epsilon)} = s^{-1/2} \sin Q_1(t) + \frac{3}{2} s^{-1/6} \Delta P_1 \sin Q_1(t) + 2s^{-1/3} \Delta Q_2 \cos^2 Q_1(t), \\ G &:= G_{|\varphi(t, \mathbf{Y}; 0)} = (s^{-1/3} + \Delta P_1) - \frac{(\Delta Q_2)^2}{2}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial Q_2} &:= \frac{\partial \psi}{\partial Q_2} \Big|_{\varphi(t, \mathbf{Y}; 0)} = 2s^{1/6} \cos Q_1^{(0)}(t) - 5s^{1/3} \Delta Q_2 \cos Q_1^{(0)}(t) \sin Q_1^{(0)}(t) - \\ &\quad s^{1/2} (\Delta P_1) \cos Q_1^{(0)}(t) + \frac{\partial}{\partial Q_2} \mathcal{O}(\|Y\|^3) \Big|_{\varphi(t, \mathbf{Y}; 0)}.\end{aligned}\tag{6.28}$$

Substituindo as expressões da equação (6.28) na equação (6.27) e avaliando esta equação em $\mathbf{Y} = (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3) = \mathbf{0}$, obtemos

$$\begin{aligned}P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0) \Big|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} &= -3MC \int_0^{T/2} \left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} \right) \Big|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} d\tau + 9MC \int_0^{T/2} \left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^4} \right) \Big|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} d\tau \\ &\quad - 6MC \int_0^{T/2} \left(\frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{\partial \psi}{\partial Q_2} \right) \Big|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} d\tau \\ &= -3MC s^{13/6} \int_0^{m\pi/s} \sin(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau + \\ &\quad 9MC s^{13/6} \int_0^{m\pi/s} \sin^3(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau \\ &\quad - 6MC s^{13/6} \int_0^{m\pi/s} \sin(s\tau + (m+1/2)\pi) \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau \\ &= 0.\end{aligned}$$

e assim o item (b) está provado. Calculamos agora $\frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}$ em $\mathbf{Y} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} &= -3MC \int_0^{T/2} \left(\frac{\partial^2 \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta Q_2^2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} \right) - \left[4 \left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta Q_2} \right)^2 \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^5} \right] |_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} d\tau + \\ &9MC \left[\int_0^{T/2} \left[\left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta Q_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^5} \right) (2\|\mathbf{q}\| \frac{\partial \psi}{\partial \Delta Q_2} \sin \psi \cos \psi - 4 \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta Q_2} \sin^2 \psi) + \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^4} \frac{\partial^2 \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta Q_2^2} \right) \right] |_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} d\tau - \\ &6MC \left[\int_0^{2\pi\tilde{s}} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \Delta Q_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^6} [(\cos^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial \Delta Q_2} - \sin^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial \Delta Q_2}) \|\mathbf{q}\|^3 - 3 \sin \psi \cos \psi \|\mathbf{q}\|^2 \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta Q_2} \right] + \frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Delta Q_2^2} \right] |_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} d\tau \end{aligned}$$

segue então que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} &= -3MC \left(\int_0^{T/2} (2s^{7/3} \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) - 4s^{7/3} \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi)) d\tau \right) + \\ &9MC \left(\int_0^{T/2} (s^{17/6} \sin(s\tau + (m+1/2)\pi) [4s^{-1/2} \sin(s\tau + (m+1/2)\pi) \right. \\ &\cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) - 4s^{-1/2} \sin^3(s\tau + (m+1/2)\pi)] + \\ &2s^{7/3} \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi) \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi)) d\tau \right) + \\ &60MC s^{7/3} \int_0^{T/2} \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau - \\ &24MC s^{7/3} \int_0^{T/2} \cos^4(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau \\ &= -\frac{41}{32} MC s^{4/3} m\pi \neq 0. \end{aligned} \tag{6.29}$$

■

Provamos agora o Teorema 6.1.1.

Demonstração: (Teorema 6.1.1) Segue do Lema 6.1.2 que as hipóteses (a) e (b) do Teorema 5.4.2 e desta forma também do Teorema 5.4.3 são verificadas e assim concluímos os itens *ii*) e *iii*) acima. Para concluir o item *i*) é necessário proceder de maneira análoga ao Lema 6.1.2 (veja Observação 6.1.3). ■

Desde que pelo Lema 6.1.2 garantimos que se verificam as hipóteses (a) e (b) dos Teoremas 5.4.2 e 5.4.3 e de maneira semelhante verificamos as mesmas hipótese do Teorema 5.4.1 e então segue o seguinte resultado.

Teorema 6.1.2. (soluções a dois parâmetros) Dados $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do anel ou disco circular homogêneo, dado por 6.12, segue os seguintes resultados:

i)— Existem condições iniciais, parametrizadas dois parâmetros, que dão origem a soluções periódicas S_1 -simétricas com período τ próximo a $T = 2\pi m/s$ próximas do plano xz e de círculos sobre este plano com raio $s^{-2/3}$ e período T .

ii)— Existem condições iniciais, parametrizadas dois parâmetros, que dão origem a soluções periódicas S_2 -simétricas com período τ próximo a $T = 2\pi m/s$ próximas do plano xz e de círculos sobre este plano com raio $s^{-2/3}$ e período T .

iii)– *Existem condições iniciais, parametrizadas dois parâmetros, que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_1$ simétricas) com período τ próximo a $T = 2\pi(2m - 1)/s$ próximas do plano xz e de círculos sobre este plano com raio $s^{-2/3}$ e período T .*

Demonstração: Segue diretamente do Lema 6.1.2 aplicado aos Teoremas 5.4.2 e 5.4.3 que garantem a existência do conjunto de condições iniciais $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = ((n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2(\Delta P_1, \epsilon), 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, \Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon))$ e da função $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$. Isto prova os itens ii) e iii). Aplicando o Teorema 5.4.1 obtemos o conjunto de condições iniciais $\mathbf{Y}_{\Delta P_1, \epsilon} = ((n_1 + 1/2)\pi, 0, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, P_2(\Delta P_1, \epsilon), \Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon))$ e a função $\tau(\Delta P_1, \epsilon)$ e assim provamos o item i).

■

Observação 6.1.4. *Observamos, que na demonstração dos teoremas, impomos que a coordenada p_3 da condição inicial $\mathbf{Y}$ seja igual a zero (a princípio poderia ser arbitrária). Como $p_3 = 0$, e $P_3 = H$, $H = G \cos i$ então o plano orbital da órbita de Kepler deve coincidir com o plano xz . A Órbita continuada está próxima ao plano xz . No Teorema 6.1.2 observamos este fato da seguinte maneira: pelo Teorema da função Implícita existe $\Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon)$ para ΔP_1 e ϵ suficientemente pequenos tal que a solução com respeito a P_3 é dada por*

$$P_3(t, \mathbf{Y}, \epsilon) = \Delta P_3(\Delta P_1, \epsilon) + \epsilon^2 P_3^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^4),$$

o qual é pequeno quando ϵ , ΔP_1 e ΔP_3 são pequenos.

Podemos ainda ter famílias de órbitas periódicas duplamente simétricas (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$), ou seja soluções que são simétricas em relação aos planos (x, y) e (x, z) simultaneamente.

Teorema 6.1.3. *Dados $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do anel ou disco circular homogêneo, dado dado por 6.12, temos:*

i)– *Existem condições iniciais parametrizadas por ϵ que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) com período fixo $T = 4\pi m/s$ próximas do plano xy e de círculos sobre este plano com raio $s^{-2/3}$ e período T .*

ii)– *Existem condições iniciais, a dois parâmetros, que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$) com período próximo a $T = 4\pi m/s$ próximas do plano xz e de círculos sobre este plano com raio $s^{-2/3}$ e período T .*

Para demonstrar este teorema, vamos proceder de maneira similar ao Teorema 6.1.1 para aplicar o Teorema 5.4.4. O termo perturbado H_1 (6.10) nas coordenadas de Poincaré-Delaunay $(PD - 2)$ é dado por

$$H_1(Q, P) = \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3} \left[3 \sin^2 \psi \left(1 - \frac{H^2}{G^2} \right) - 1 \right] \quad (6.30)$$

onde o momento angular total G e a componente do na direção z são dadas por

$$G = P_1 - \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2}, \quad H = P_1 - \frac{Q_2^2 + P_2^2 + Q_3^2 + P_3^2}{2}.$$

As expressões para $\|\mathbf{q}\|$ e o ângulo ψ devem ser expressas em funções das coordenadas $(PD - 2)$. Como estamos interessados em obter estas expressões em uma vizinhança de uma solução circular do problema de Kepler, que nas coordenadas $(PD - 2)$, correspondem a $Q_2 = P_2 = 0$, escrevemos $\|\mathbf{q}\|$ e o ângulo ψ estimando-so em termos dos elementos orbitais. Veja Apêndice B para maiores detalhes.

Lema 6.1.3. Nas coordenadas $(PD-2)$, as expressões para $\|q\|$ e ψ são aproximadas da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\|q\| &= s^{-2/3} + s^{-1/2}Q_2 \sin Q_1 - s^{-1/2}P_2 \cos Q_1 + 2s^{-1/3}(P_1 - s^{-1/3}) + s^{-1/3}Q_2^2 \cos^2 Q_1 \\ &+ \frac{3}{2}s^{-1/6}Q_2(P_1 - s^{-1/3}) \sin Q_1 + 2s^{-1/3}Q_2P_2 \sin Q_1 \cos Q_1 + (P_1 - s^{-1/3})^2 \\ &- \frac{3}{2}s^{-1/6}(P_1 - s^{-1/3})P_2 \cos Q_1 + s^{-1/3}P_2^2 \sin^2 Q_1 + \mathcal{O}(\|X\|^3),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\psi &= Q_1 - \arccos\left(\frac{P_3}{\sqrt{Q_3^2 + P_3^2}}\right) + \frac{\sin(Q_1)P_2\sqrt{2}\sqrt{8P_1-2Q_2^2-2P_2^2}}{2P_1} - \frac{\cos(Q_1)Q_2\sqrt{2}\sqrt{8P_1-2Q_2^2-2P_2^2}}{2P_1} + \\ &2\left(\frac{\sin(Q_1)P_2\sqrt{2}\sqrt{8P_1-2Q_2^2-2P_2^2}}{4P_1} - \frac{\cos(Q_1)Q_2\sqrt{2}\sqrt{8P_1-2Q_2^2-2P_2^2}}{4P_1}\right)\left(\frac{\cos(Q_1)P_2\sqrt{2}\sqrt{8P_1-2Q_2^2-2P_2^2}}{4P_1} - \right. \\ &\left. - \frac{\sin(Q_1)Q_2\sqrt{2}\sqrt{8P_1-2Q_2^2-2P_2^2}}{4P_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(Q_1)P_2\sqrt{2}\sqrt{8P_1-2Q_2^2-2P_2^2}}{4P_1} - \frac{\cos(Q_1)Q_2\sqrt{2}\sqrt{8P_1-2Q_2^2-2P_2^2}}{4P_1}\right) + \\ &\left(\frac{\sin(Q_1)P_2\sqrt{2}\sqrt{8P_1-2Q_2^2-2P_2^2}}{4P_1} - \frac{\cos(Q_1)Q_2\sqrt{2}\sqrt{8P_1-2Q_2^2-2P_2^2}}{4P_1}\right)\left(\frac{\cos(Q_1)P_2\sqrt{2}\sqrt{8P_1-2Q_2^2-2P_2^2}}{4P_1} - \right. \\ &\left. \frac{\sin(Q_1)Q_2\sqrt{2}\sqrt{8P_1-2Q_2^2-2P_2^2}}{4P_1}\right)\left(\frac{\cos(Q_1)P_2\sqrt{2}\sqrt{8P_1-2Q_2^2-2P_2^2}}{4P_1} - \frac{\sin(Q_1)Q_2\sqrt{2}\sqrt{8P_1-2Q_2^2-2P_2^2}}{4P_1}\right) \\ &\left(\frac{\sin(Q_1)P_2\sqrt{2}\sqrt{8P_1-2Q_2^2-2P_2^2}}{4P_1} - \frac{\cos(Q_1)Q_2\sqrt{2}\sqrt{8P_1-2Q_2^2-2P_2^2}}{4P_1}\right)^2 + \mathcal{O}(\|X\|^3),\end{aligned}$$

onde estamos usando $X = (Q_2, P_1 - s^{1/3}, P_2)$ e $Q_1(t) = (s^{-1/3} + P_1)t + n_1\pi$.

Demonstração: Veja apêndice B. ■

Demonstração: (Teorema 6.1.3) Temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) &= MC \left\{ \frac{-3}{\|q\|^4} \frac{\partial \|q\|}{\partial P_2} \left[3 \sin^2 \psi \left(1 - \frac{H^2}{G^2} \right) - 1 \right] + \frac{1}{\|q\|^3} \left[6 \sin \psi \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial P_2} \left(1 - \frac{H^2}{G^2} \right) - \right. \right. \\ &\left. \left. 6HP_2 \sin^2 \psi \left(\frac{G-H}{G^3} \right) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (6.31)$$

Queremos determinar $Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}}$ e desta forma a derivada parcial de H_1 em relação a P_2 deve ser avaliada na solução $\varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0)$ e depois devemos fazer $\mathbf{Y} = 0$. Procedendo desta forma obtemos que

$$\begin{aligned}Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} &= \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0))|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} d\tau \\ &= 3MCs^{13/6} \int_0^{T/4} \cos(s\tau - m\pi) d\tau \\ &= 3MCs^{7/6} \left[\sin(s\tau - m\pi) \right]_0^{\pi m/s} \\ &= 0.\end{aligned}\quad (6.32)$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}(T/4, \mathbf{Y}; 0) &= -3MC \int_0^{T/4} \left(\frac{\partial^2 \|q\|}{\partial \Delta P_2^2} \frac{1}{\|q\|^4} - 4 \left(\frac{\partial \|q\|}{\partial \Delta P_2} \right)^2 \frac{1}{\|q\|^5} \right) \left[3 \sin^2 \psi \left(1 - \frac{H^2}{G^2} \right) - 1 \right] d\tau - \\ &3MC \int_0^{T/4} \left[\frac{\partial \|q\|}{\partial \Delta P_2} \frac{1}{\|q\|^4} \left[6 \sin \psi \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial P_2} \left(1 - \frac{H^2}{G^2} \right) + 2 \sin^2 \psi HP_2 \left(\frac{G-H}{G^3} \right) \right] d\tau - \right. \\ &3MC \int_0^{T/4} \frac{1}{\|q\|^4} \left[6 \sin \psi \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial P_2} \left(1 - \frac{H^2}{G^2} \right) + 6HP_2 \sin^2 \psi \left(\frac{G-H}{G^3} \right) \right] d\tau + \\ &MC \int_0^{T/4} \frac{1}{\|q\|^3} \left[\frac{\partial}{\partial P_2} \left(6 \sin \psi \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial P_2} \right) \left(1 - \frac{H^2}{G^2} \right) \right] d\tau - \\ &MC \int_0^{T/4} \frac{1}{\|q\|^3} \left[12 \sin \psi \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial P_2} P_2 H \left(\frac{G-H}{G^3} \right) \right] d\tau - \\ &MC \int_0^{T/4} \frac{1}{\|q\|^3} \left[\frac{\partial}{\partial P_2} \left(6 \sin^2 \psi HP_2 \right) \left(\frac{G-H}{G^3} \right) + 6 \sin^2 \psi HP_2 \frac{P_2}{G^3} \left(-3 + \frac{H}{G} \right) \right] d\tau\end{aligned}$$

Avaliando as expressões para $\|\mathbf{q}\|$, ψ , G , H , bem como suas derivadas parciais em $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}(T/4, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} &= -3MC \int_0^{T/4} \left(\frac{\partial^2 \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta P_2^2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} - 4 \left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta P_2} \right)^2 \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^5} \right) |_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} d\tau \\ &= -3MC s^{4/3} \int_0^{\pi m/s} [\sin^2(s\tau - m\pi) - 2 \cos^2(s\tau - m\pi)] d\tau \\ &= 6MC s^{4/3} \pi \neq 0.\end{aligned}$$

Desta forma obtemos que $Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} = 0$ e $\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}(T/4, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} \neq 0$ e desta maneira verificamos as hipóteses (a) e (b) do Teorema 5.4.4 e assim provamos o resultado. ■

Usando a formulação do problema em coordenadas giratórias, podemos encontrar outras famílias de soluções periódicas simétricas. Porém precisamos garantir a comensurabilidade do período para garantir que a solução nas coordenadas originais seja periódica, caso contrário a solução será quase-periódica.

Teorema 6.1.4. (Soluções a dois parâmetro) *Dados $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do anel ou disco circular homogêneo, dado por 6.16, temos:*

i)– Existem condições iniciais a um parâmetro, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ -simétricas com período $T = 2n\pi$ próximas de círculos em um plano com certa inclinação i , com período T e raio $s^{-2/3}$, onde s tem a forma racional $s = m/n$.

ii)– Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período $T = 2n\pi$ próximas de círculos em um plano com certa inclinação i , com período T e raio $s^{-2/3}$, onde s tem a forma racional $s = m/n$.

iii)– Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ simétricas) próximo a $T = 4n\pi$ próximas de círculos de círculos em um plano com qualquer inclinação, com período T e raio $s^{-2/3}$, onde s tem a forma racional $s = (2m + 1)/2n$.

iv)– Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$ simétricas) com período próximo a $T = (2n + 1)\pi$ próximas de círculos em um plano com qualquer inclinação, com período T e raio $s^{-2/3}$, onde s tem a forma racional $s = ((2m + 1)/(2n + 1))$.

Demonstração: Provamos o item *ii)* e o item *i)* segue de maneira análoga. Aplicando o Teorema 5.8.3 precisamos verificar as hipóteses (a) e (b) deste teorema. Segue do fato de que o problema é invariante por rotações em torno do eixo- z que as expressões para $\|\mathbf{q}\|$ e ψ são as mesmas que nas coordenadas cartesianas.

Com a notação do Teorema 5.8.3, precisamos determinar a expressão para $P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}}$.

$$\begin{aligned}P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} &= -3MC \int_0^{T/2} \left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} \right) |_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} d\tau + 9MC \frac{G^2 - (p_3 + \Delta P_3)^2}{G^2} \int_0^{T/2} \left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^4} \right) |_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} d\tau \\ &\quad - 6MC \frac{G^2 - (p_3 + \Delta P_3)^2}{G^2} \int_0^{T/2} \left(\frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{\partial \psi}{\partial Q_2} \right) |_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} d\tau + 6MC \frac{(p_3 + \Delta P_3)^2}{G^3} \int_0^{T/2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau \\ &= -3MC s^{13/6} \int_0^{m\pi/s} \sin(s\tau + (m + 1/2)\pi) d\tau + \\ &\quad 9MC s^{13/6} \frac{(s^{-2/3} - p_3^2)}{s^{-2/3} - p_3^2} \int_0^{m\pi/s} \sin^3(s\tau + (m + 1/2)\pi) d\tau \\ &\quad - 6MC s^{13/6} \frac{(s^{-2/3} - p_3^2)}{s^{-2/3} - p_3^2} \int_0^{m\pi/s} \sin(s\tau + (m + 1/2)\pi) \cos^2(s\tau + (m + 1/2)\pi) d\tau \\ &= 0.\end{aligned}$$

Lembre que $G := G|_{\varphi_{\text{kep}}(t, \mathbf{Y})} = (s^{-1/3} + \triangle P_1) - \frac{(\triangle Q_2)^2}{2}$. Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \triangle Q_2}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} &= -3MC \int_0^{T/2} \left(\frac{\partial^2 \|\mathbf{q}\|}{\partial \triangle Q_2^2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} \right) - \left[4 \left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \triangle Q_2^2} \right)^2 \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^5} \right] |_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} d\tau + \\ &9MC \frac{(s^{-2/3} - p_3^2)}{s^{-2/3}} \left[\int_0^{T/2} \left[\left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \triangle Q_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^5} (2\|\mathbf{q}\| \frac{\partial \psi}{\partial \triangle Q_2} \sin \psi \cos \psi - 4 \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \triangle Q_2} \sin^2 \psi) + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^4} \frac{\partial^2 \|\mathbf{q}\|}{\partial \triangle Q_2^2} \right) \right] |_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} d\tau \right] - \\ &6MC \frac{(s^{-2/3} - p_3^2)}{s^{-2/3}} \left[\int_0^{2\pi \bar{s}} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \triangle Q_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^6} [(\cos^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial \triangle Q_2} - \sin^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial \triangle Q_2}) \|\mathbf{q}\|^3 - \right. \right. \\ &\left. \left. 3 \sin \psi \cos \psi \|\mathbf{q}\|^2 \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \triangle Q_2} \right] + \frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \triangle Q_2^2} \right] |_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} d\tau \right] \end{aligned}$$

segue então que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \triangle Q_2}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}} &= -3MC \left(\int_0^{T/2} (2s^{7/3} \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) - 4s^{7/3} \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi)) d\tau \right) \\ &+ 9MC \frac{(s^{-2/3} - p_3^2)}{s^{-2/3}} \left[\int_0^{T/2} (s^{17/6} \sin(s\tau + (m+1/2)\pi) [4s^{-1/2} \sin(s\tau + (m+1/2)\pi) \right. \\ &\cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) - 4s^{-1/2} \sin^3(s\tau + (m+1/2)\pi)] + \\ &\left. 2s^{7/3} \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi) \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) \right) d\tau \right] + \\ &60MC s^{7/3} \frac{(s^{-2/3} - p_3^2)}{s^{-2/3}} \int_0^{T/2} \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau - \\ &24MC s^{7/3} \frac{(s^{-2/3} - p_3^2)}{s^{-2/3}} \int_0^{T/2} \cos^4(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau \\ &= -\frac{41}{32} MC s^{4/3} m\pi \left(7 \frac{(s^{-2/3} - p_3^2)}{s^{-2/3}} - 3 \right). \end{aligned} \tag{6.33}$$

Assim desde que $\frac{(s^{-2/3} - p_3^2)}{s^{-2/3}} \neq 7/3$, então segue que $\frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \triangle Q_2}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=\mathbf{0}}$ e usando o Teorema 5.8.3, conclui-se o resultado.

iii) Segue diretamente do Teorema 5.8.5.

iv) Basta aplicar o Teorema 5.8.6. ■

Observação 6.1.5. Observe que no enunciado do Teorema 6.1.4, a inclinação da órbita pode ser qualquer a menos da inclinação $i_0 = \arccos(p_3/G)$, onde p_3 é tal que $\frac{(s^{-2/3} - p_3^2)}{s^{-2/3}} = 7/3$.

Teorema 6.1.5. Dados $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do anel ou disco circular homogêneo, dado por 6.16, temos:

i)– Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ -simétricas com período $T = 2\pi m/(s-1)$, desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$, próximas de círculos contidos no plano xy e com período T .

ii)– Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período $T = 2\pi m/(s-1)$, desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$, próximas de círculos contidos no plano xy e com período T .

iii)– Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ simétricas) com período $T = 4n\pi$, desde que $(2m+1)/2(s-1) \notin \mathbb{N}$, próximas de círculos contidos no plano xy e com período T .

iv)– Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$ simétricas) com período $T = 4\pi m/(s-1)$, desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$, próximas de círculos contidos no plano xy e com período T .

Demonstração: i) Basta aplicar o Teorema 5.8.2 e concluir que existem condições iniciais parametrizadas em ϵ , de tal forma que estas condições dão origem a soluções periódicas com período $T = 2m/(s-1)\pi$, $\mathcal{S}_1$ simétricas próximas de soluções circulares com período T .

ii) Segue diretamente do Teorema 5.8.4.

iii) Segue diretamente do Teorema 5.8.5.

iv) Segue diretamente do Teorema 5.8.6. ■

Observação 6.1.6. Observe que as soluções periódicas simétricas obtidas no Teorema 6.1.5, podem não ser periódicas no problema original (6.12). Para que isso aconteça, é necessário satisfazer a relação de comensurabilidade dos períodos, isto é, o período τ da solução deve ser tal que $\tau/2\pi = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}$.

Observação 6.1.7. Todas as soluções simétricas obtidas nos teoremas 6.1.1, 6.1.2, 6.1.3, e 6.1.4 as soluções existem para valores de ϵ suficientemente pequenos. Desta forma estas soluções existem para um anel com espessura e raio interno pequenos e para um disco com raio suficientemente pequeno. Porém podemos estender estes resultados para anéis com outras espessuras e raios. Para veja Observação 6.1.2.

As soluções obtidas nos teoremas acima, apresentaram as seguintes simetrias: simétricas em relação ao eixo- x , em relação ao plano- (x, y) e duplamente simétricas; simétricas em relação ao eixo x e plano- (x, y) e em relação ao eixo- x e plano- (x, z) . Porém do fato de o problema do anel ou disco ser invariante por rotações em torno do eixo- z e da proposição 2.3.7 obtemos

- Existem soluções simétricas em relação ao eixo- y , já que o eixo- y é um sub-espço invariante pelo fluxo do problema. Para obter estas soluções basta tomar as soluções $\mathcal{S}_1$ -simétricas e fazer uma rotação de $\pi/2$.
- Toda solução $\mathcal{S}_2$ -simétrica origina uma solução $\mathcal{S}_3$ -simétrica, basta fazer uma rotação de $\pi/2$ e vice versa.
- Existem soluções duplamente simétricas, (simétricas em relação ao eixo- y e em relação ao plano- (x, z)) e são obtidas das soluções duplamente simétricas (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$) por uma rotação de $\pi/2$.
- Existem soluções duplamente simétricas (simétricas com respeito ao eixo- y e plano- (y, z) e são obtidas das soluções duplamente simétricas (com respeito as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$ através de uma rotação de $\pi/2$.

6.1.2 Soluções periódicas próximas a elipses

Vamos obter algumas soluções periódicas simétricas do anel ou disco circular como continuação de órbitas elípticas do problema de Kepler. De maneira prática é muito difícil verificar as hipóteses da Seção 5.4 do capítulo 5 sobre os termos perturbadores, o que dificulta a continuação de órbitas elípticas. Porém usando

a formulação do problema em coordenadas giratórias e coordenadas de Poincaré-Delaunay apropriadas e aplicando os resultados da Seção 5.7 do capítulo 5, podemos continuar soluções elípticas duplamente simétricas do problema de Kepler.

Teorema 6.1.6. (Soluções a um parâmetro) *Dados $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do anel ou disco circular homogêneo, dado por 6.12, temos:*

i)– Existem condições iniciais parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ simétricas) com período $\tau = 4\pi p/q$ próximo a $T = 2\pi(2m+1)/(s-1)$, desde que $(2m+1)/2(s-1) \notin \mathbb{N}$, próximas de círculos contidos no plano xy e com período T .

ii)– Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$ simétricas) com período $\tau = 4\pi p/q$ próximo a $T = 4\pi m/(s-1)$, desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$, próximas de círculos contidos no plano xy e com período T .

Demonstração: *i)* Aplicando o Teorema 5.8.11 segue que existem condições iniciais que dão origem a órbitas $\tau(\Delta Q_2, \epsilon)$ -periódicas, com τ próximo de $T = (2m+1)/(s-1)\pi$, e duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ simétricas) próximo a soluções circulares do problema de Kepler em coordenadas giratórias contidas no plano xy . Para que estas soluções sejam periódicas no sistema inercial, é necessário uma condição de comensurabilidade do período. Desta forma, para todo ϵ suficientemente pequeno, podemos escolher convenientemente $(\Delta Q_2)_0$ suficientemente pequeno tal que $\tau((\Delta Q_2)_0, \epsilon)/2\pi = p/q$ para p, q inteiros positivos.

ii) Aplicando o Teorema 5.8.12 e usando um argumento similar ao do item *i)*, conclui-se a prova. ■

Observação 6.1.8. *Da mesma forma que para continuação de soluções circulares, valem os mesmos comentários da observação 6.1.7.*

6.2 Soluções periódicas simétricas no plano vertical

Nesta seção queremos analisar a existência de I soluções periódicas simétricas no plano polar, ou seja no plano- (x, z) . Nas coordenadas Poincaré-Delaunay ($PD - 1$), para que uma solução esteja contida no plano vertical devemos ter que $Q_3(t) = n\pi$ e $P_3(t) = 0$, onde $n \in \mathbb{N}$. Como já vimos na seção anterior, nos Teoremas 6.1.1 e 6.1.2 a solução circular do problema de Kepler a ser continuada estava no plano vertical. Vamos mostrar que podemos continuar estas soluções circulares contidas no plano vertical e obter soluções simétricas próxima a círculos contidas neste mesmo plano.

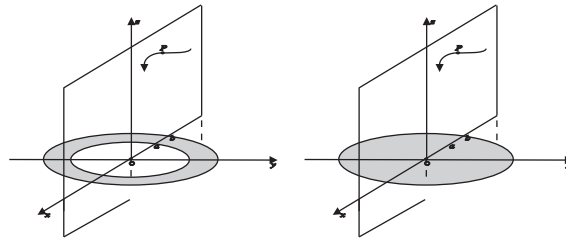


Figura 6.2: *Esquerda:* Representação do movimento da partícula infinitesimal no plano vertical no problema do anel. *Direita:* Representação do movimento da partícula infinitesimal no plano vertical no problema do disco.

A função Hamiltoniana do sub-problema planar, correspondente ao plano polar é dada por

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{M}{\|\mathbf{q}\|} + \epsilon^2 H_1(\mathbf{q}) + \epsilon^4 H_r(\mathbf{q}, \epsilon), \quad (6.34)$$

onde $\mathbf{q} = (x, z)$ e $\mathbf{p} = (p_x, p_z)$ e

$$H_1(\mathbf{q}) = c_{a,b}^1 \frac{M}{\|\mathbf{q}\|^3} (3 \cos^2 v - 1)$$

$$H_R(\mathbf{q}, \epsilon) = -c_{a,b}^2 \frac{M}{\|\mathbf{q}\|^5} \left(\frac{35}{8} \cos^4 v - \frac{15}{4} \cos^2 v + \frac{3}{8} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^8).$$

onde $\cos v = z/\|\mathbf{q}\|$. Novamente, como no caso espacial para simplificar a notação, definiremos a constante $c_{a,b}^1$ como sendo C , e desta forma podemos tratar o problema do anel ou disco circular homogêneo fixo de maneira que a função potencial é da forma

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{M}{\|\mathbf{q}\|} + \epsilon^2 \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3} (3 \cos^2 v - 1) + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (6.35)$$

Lema 6.2.1. *As equações de movimento do problema, nas coordenadas de Poincaré-Delaunay $(PD - 1)$ com respeito a Q_3 e P_3 são*

$$\dot{Q}_3 = P_3 \left[-\epsilon^2 \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3} (6 \sin^2 \psi \left(\frac{P_3}{G^2} \right)) + \epsilon^4 \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^5} \left(\frac{35}{2} \sin^4 \psi \left(1 - \frac{P_3^2}{G^2} \right) \frac{1}{G^2} + \frac{45}{2} \left(\frac{\sin^2 \psi}{G^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \right]$$

$$\dot{P}_3 = 0.$$

Demonstração: Temos que a função Hamiltoniana nas coordenadas de Poincaré-Delaunay $(PD - 1)$ é dada por

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon) = -\frac{1}{2P_1^2} + \epsilon^2 \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3} (3 \sin^2 \psi \left(1 - \frac{P_3^2}{G^2} \right) - 1) - \epsilon^4 \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^5} \left(\frac{35}{8} \sin^4 \psi \left(1 - \frac{P_3^2}{G^2} \right)^2 - \frac{15}{4} (3 \sin^2 \psi \left(1 - \frac{P_3^2}{G^2} \right)) + \frac{3}{8} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^8). \quad (6.36)$$

Observamos que na equação (6.36), os termos $\|\mathbf{q}\|$ e ψ são dado em séries, como no Lema 6.1.1 e não dependem de P_3 assim como G também não depende. Obtemos então

$$\dot{Q}_3 = \frac{\partial H}{\partial P_3} = P_3 \left[-\epsilon^2 \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3} (6 \sin^2 \psi \left(\frac{P_3}{G^2} \right)) + \epsilon^4 \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^5} \left(\frac{35}{2} \sin^4 \psi \left(1 - \frac{P_3^2}{G^2} \right) \frac{1}{G^2} + \frac{45}{2} \left(\frac{\sin^2 \psi}{G^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \right].$$

Também as expressões em séries para $\|\mathbf{q}\|$ e ψ não dependem de Q_3 e desta forma $\|\mathbf{q}\|$, $\sin \psi$, bem como também G , não dependem da variável Q_3 e obtemos que $\dot{P}_3 = \frac{\partial H}{\partial Q_3} = 0$ e o lema está provado. ■

Desde que para uma solução com condição inicial $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ esteja no plano vertical é necessário que $p_3 = 0$, segue do Lema 6.2.1, que $\dot{P}_3 = 0$ e desta forma o sistema de equações (6.20) é invariante em relação as variáveis Q_3 e P_3 , ou seja $Q_3(t) = n_2 \pi$ e $P_3 = 0$.

Teorema 6.2.1. (Soluções a um parâmetro) *Dados $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do anel ou disco circular homogêneo no plano vertical temos:*

i)– *Existem condições iniciais a um parâmetro, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ -simétricas com período $T = 2\pi m/s$ próximas de círculos e com período T .*

ii)– *Existem condições iniciais a um parâmetro, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período $T = 2\pi m/s$ próximas de círculos e com período T .*

iii)– *Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas com período $\tau = 4\pi p/q$ próximo a $T = 2\pi(2m-1)/s$ próximas de círculos e com período T .*

Observação 6.2.1. Observe que estamos usando a mesma notação do caso espacial para as simetrias $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$. Porém neste caso, a simetria $\mathcal{S}_2$ é exatamente a reflexão anti-simplética em relação ao eixo z no plano xz e o termo duplamente simétrica se refere a uma solução que é simétrica em relação aos eixos x e z .

Demonstração: *i)* Consideremos uma condição inicial da forma $\mathbf{Y}_0 = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3}, 0, 0)$ sobre o eixo x . Como as equações de movimento são invariantes em relação as variáveis Q_3 e P_3 , segue que as equações de periodicidade para a solução do problema de Kepler são dadas por

$$Q_1(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) = s\frac{T}{2} + n_1\pi = (n_1 + m)\pi,$$

$$Q_2(T/2, \mathbf{Y}_0; 0) = 0 = 0.$$

Temos então uma solução $\mathcal{S}_1$ -simétrica circular do problema de Kepler com período $T = 2\pi m/s$ contida no plano vertical. Seja $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, 0)$ sobre o eixo x em uma vizinhança de $\mathbf{Y}_0$. Da diferenciabilidade do fluxo com respeito ao parâmetro ϵ , segue que $\varphi(t, \mathbf{Y}; \epsilon) = \varphi_{kep}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ é solução do sistema perturbado. para que a solução seja $\mathcal{S}_1$ -simétrica é suficiente que ela intersecte o eixo y em $t = T/2$ e desta forma as seguintes equações de periodicidade devem ser satisfeitas

$$f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) = (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t - m\pi + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0,$$

$$f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) = Q_2^{(1)}(t, \mathbf{Y}; 0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0,$$

onde estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1\pi, 0, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, 0) := (\Delta P_1, \Delta P_2)$, onde $s > s^*$, $s, s^* \in R^+$, s^* suficientemente grande, para evitar problemas de singularidades. Segue do Teorema 6.1.1, que $Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0}$ e então $f_1(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = f_2(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = 0$. Também consideramos o seguinte jacobiano

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_1, \Delta P_2)} \right|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s & -3(s^{4/3})T/4 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial t} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0}.$$

Se considerarmos o sub-determinante

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\Delta P_1, \Delta P_2)} \right|_{t=T/2, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} &= \det \begin{pmatrix} -3(s^{4/3})\frac{T}{2} & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \end{pmatrix}_{t=T/2, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} \\ &= 3s^{4/3}\frac{T}{2}\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} \neq 0 \end{aligned} \quad (6.37)$$

o resultado segue do Teorema da função Implícita usando novamente o teorema 6.1.1, item *i*).

ii) Segue de maneira análoga ao item anterior e usando o Teorema 6.1.1, item *ii*).

iii) Procedendo como no caso espacial, dado pelo Teorema 6.1.1, item *iii*) obtemos as seguintes equações de periodicidade

$$f_1(t, \mathbf{Y}, \epsilon) = (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t - (m + 1/2)\pi + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0,$$

$$f_2(t, \mathbf{Y}, \epsilon) = \Delta Q_2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0,$$

onde estamos usando a notação $\mathbf{Y} = (n_1 + 1/2)\pi, \Delta Q_2, n_2\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, 0) := (\Delta Q_2, \Delta P_1)$. Segue do Teorema 6.1.1, que $Q_2^{(1)}(T/4, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0}$ e então $f_1(T/4, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = f_2(T/4, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0} = 0$. Também consideramos o seguinte jacobiano

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta Q_2, \Delta P_1)} \right|_{t=T/4, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0} = \begin{pmatrix} s & 0 & -3(s^{4/3})T/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{t=T/4, \mathbf{Y}=0, \epsilon=0}.$$

Se considerarmos o sub-determinante

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\Delta P_1, \Delta P_2)} \Big|_{t=T/4, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} &= \det \begin{pmatrix} 0 & -3(s^{4/3})T/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \\ &= 3s^{4/3}T/4 \neq 0, \end{aligned} \quad (6.38)$$

e o resultado novamente segue pelo Teorema da Função Implícita. ■

Teorema 6.2.2. (Soluções a dois parâmetros) *Dados $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do anel ou disco circular homogêneo, dado por 6.12, temos:*

i)– Existem condições iniciais, parametrizadas a dois parâmetros, que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ -simétricas com período τ próximo a $T = 2\pi m/s$ próximas de círculos com período T .

ii)– Existem condições iniciais, parametrizadas a dois parâmetros, que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período τ próximo a $T = 2\pi m/s$ próximas de círculos com período T .

iii)– Existem condições iniciais, parametrizadas a dois parâmetros, que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas com período τ próximo a $T = 2\pi(2m - 1)/s$ próximas de círculos com período T .

Demonstração: *i)* Segue do Teorema 6.2.1 item *i)*, que $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta P_2)} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$ e o resultado segue aplicando o Teorema da Função Implícita

ii) Segue do Teorema 6.2.1 item *ii)*, que $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta Q_2)} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$ e novamente aplicando o Teorema da Função Implícita, segue o resultado.

iii) Segue do Teorema 6.2.1 que, $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(t, \Delta Q_2)} \Big|_{t=T/2, \mathbf{Y}=\mathbf{0}, \epsilon=0} \neq 0$ e o resultado segue do Teorema da Função Implícita. ■

Observação 6.2.2. *As soluções obtidas nos três últimos teoremas acima estão no plano vertical xz . Porém o problema do anel ou disco homogêneo é invariante por rotações em torno do eixo- z de tal maneira que podemos continuar as órbitas circulares do problema de Kepler em qualquer plano vertical.*

6.2.1 Soluções periódicas simétricas no plano equatorial

Como no caso espacial estaremos considerando o anel circular homogêneo com centro na origem e raio interno $a = \epsilon$ e espessura $\mu = k\epsilon$, e assim sendo o raio externo é $b = \epsilon(1 + k)$ e para o disco circular homogêneo $a = 0$, $b = k\epsilon$. Ainda estamos supondo que, tanto no caso do anel como no caso do disco, a massa M é unitária. O problema do anel ou disco circular homogêneo é invariante por reflexões em torno do plano xy , que estamos denominando por *plano equatorial*. Ou seja, o conjunto $\{(x, y, z, p_x, p_y, p_z)/z = p_z = 0\}$ é invariante pelas equações de movimento.

A função Hamiltoniana do sub-problema do plano equatorial é dada por

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{M}{\|\mathbf{q}\|} + \epsilon^2 H_1(\mathbf{q}) + \epsilon^4 H_r(\mathbf{q}, \epsilon), \quad (6.39)$$

onde onde $\mathbf{q} = (x, z)$ e $\mathbf{p} = (p_x, p_z)$ e .

$$H_1(\mathbf{q}) = \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3},$$

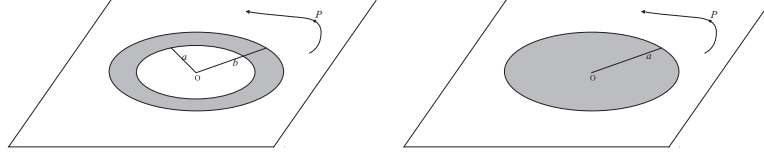


Figura 6.3: *Esquerda:* Representação do movimento da partícula infinitesimal no plano horizontal no problema do anel. *Direita:* Representação do movimento da partícula infinitesimal no plano horizontal no problema do disco.

$$H_R(\mathbf{q}, \epsilon) = \frac{3M}{8\|\mathbf{q}\|^5} + \mathcal{O}(\epsilon^8).$$

Em em coordenadas fixas o problema do plano equatorial fica descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \epsilon^2(W_1)_x(x, y, \epsilon), \\ \ddot{y} &= -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \epsilon^2(W_1)_y(x, y, \epsilon),\end{aligned}\tag{6.40}$$

sendo que $W_1(\mathbf{q}) = \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3} + \mathcal{O}(\epsilon^4)$. Lembrando que $\cos \vartheta = z/\|\mathbf{q}\|$ e como $z = 0$, obtemos as expressões de H_1 e H_R acima. Desta forma a função Hamiltoniana do sub-problema planar equatorial é da forma

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{M}{\|\mathbf{q}\|} + \epsilon^2 \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3} + \mathcal{O}(\epsilon^4).\tag{6.41}$$

Para obter soluções periódicas simétricas próximas a soluções circulares do problema de Kepler do anel ou disco circular homogêneo no plano equatorial, vamos escrever a função Hamiltoniana (6.39) na forma planar das coordenadas de Poincaré-Delaunay (5.63). Assim, nestas coordenadas a função Hamiltoniana (6.41) é dada por

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon) = -\frac{1}{2P_1^2} + \epsilon^2 \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3} + \mathcal{O}(\epsilon^4),\tag{6.42}$$

e o sistema Hamiltoniano associado é

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \dot{Q}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}$$

Teorema 6.2.3. (Soluções a um parâmetro) *Dados $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do anel ou disco circular homogêneo no plano equatorial, dado por 6.40 temos:*

i)– Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ -simétricas com período fixo $T = 2\pi m/s$ próximas de círculos com raio $s^{-2/3}$ e período T .

ii)– Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período fixo $T = 2\pi m/s$ próximas de círculos com raio $s^{-2/3}$ e período T .

iii)– Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas com período fixo $T = 2\pi(2m-1)/s$ próximas de círculos sobre este plano com raio $s^{-2/3}$ e período T .

Estamos usando a mesma notação da Seção 5.6 onde a simetria $\mathcal{S}_1$ consiste em uma reflexão em torno do eixo x e $\mathcal{S}_2$ a reflexão em relação ao eixo y .

Observação 6.2.3. *Também como antes estamos tomando a solução do problema de Kepler e a vizinhança $\mathcal{U}$ em que as coordenadas de Poincaré-Delaunay estão definidas de tal maneira que a solução permanece limitada e assim o sistema de equações (6.43) não possui singularidades.*

Demonstração:

i) Iremos utilizar o Teorema 5.6.1. Com a notação deste teorema temos que

$$\begin{aligned} Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0) &= - \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0))|_{\mathbf{Y}=0} d\tau \\ &= -CM \int_0^{T/2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0))|_{\mathbf{Y}=0} d\tau. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Precisamos avaliar $\|\mathbf{q}\|$ e $\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2}$ ao longo da solução $\varphi_{kep}(T/2, \mathbf{Y}; 0)$ e depois fazer $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$. Procedendo como no Teorema 6.1.5 e usando o Lema 6.1.1 obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}\| &:= \|\mathbf{q}\| |_{\varphi_{kep}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0}} = s^{-2/3}, \\ \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} &|_{\varphi_{kep}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0}} = -s^{-1/2} \cos(st + n_1\pi). \end{aligned}$$

Substituindo estas expressões na equação (6.43), obtemos

$$\begin{aligned} Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0) &= CM \int_0^{m\pi/s} s^{7/3} \cos(s\tau + n_1\pi) d\tau \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} &= -CM \int_0^{T/2} \left(\frac{\partial^2 \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta P_2^2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} - 4 \left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta P_2} \right)^2 \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^5} \right) |_{\mathbf{Y}=0} d\tau \\ &= CM s^{7/3} \int_0^{m\pi/s} [2 \sin^2(s\tau + n_1\pi) - 4 \cos^2(s\tau + n_1\pi)] d\tau \\ &= -CM s^{7/3} m\pi \neq 0, \end{aligned} \quad (6.45)$$

e o resultado segue do Teorema 5.6.1 item i).

ii) Com a mesma notação do Teorema 5.6.2 obtemos que

$$\begin{aligned} P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{Y}; 0) &= \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0))|_{\mathbf{Y}=0} d\tau \\ &= CM \int_0^{T/2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2}(\varphi_{kep}(\tau, \mathbf{Y}; 0))|_{\mathbf{Y}=0} d\tau. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Precisamos avaliar $\|\mathbf{q}\|$ e $\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2}$ ao longo da solução $\varphi(T/2, \mathbf{Y}; 0)$ e depois fazer $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$. Procedendo como no item i) e usando o Lema 6.1.1 obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}\| &:= \|\mathbf{q}\| |_{\varphi_{kep}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0}} = s^{-2/3}, \\ \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} &|_{\varphi_{kep}(T/2, \mathbf{Y}; 0)|_{\mathbf{Y}=0}} = s^{-1/2} \sin(st + (n_1 + 1/2)\pi). \end{aligned}$$

Substituindo estas expressões na equação (6.46), obtemos

$$\begin{aligned} P_2^{(1)}(T/2, s, \Delta Q_2, \Delta P_1) &= c_{a,b}^1 M \int_0^{m\pi/s} s^{7/3} \sin(s\tau + (n_1 + 1/2)\pi) d\tau \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2} &= CM \int_0^{T/2} \left(\frac{\partial^2 \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta Q_2^2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} - 4 \left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta Q_2} \right)^2 \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^5} \right) |_{\mathbf{Y}=0} d\tau \\ &= CM s^{7/3} \int_0^{m\pi/s} [2 \cos^2(s\tau + (n_1 + 1/2)\pi) - 4 \sin^2(s\tau + (n_1 + 1/2)\pi)] d\tau \\ &= -CM s^{7/3} m\pi \neq 0. \end{aligned} \quad (6.48)$$

e o resultado segue do Teorema 5.6.2, item *i*).

iii) Segue diretamente do Teorema 5.6.3, item *i*). ■

Teorema 6.2.4. (Soluções a dois parâmetros) Dados $m \in \mathbb{N}$ e $s \in R^+$, escolhido convenientemente; então para o problema do anel ou disco circular homogêneo no plano equatorial, dado por (6.40), temos

i)— Existem condições iniciais, parametrizadas a dois parâmetros, que dão origem a soluções periódicas S_1 -simétricas com período τ próximo a $T = 2\pi m/s$ próximas de círculos com raio $s^{-2/3}$ e período T .

ii)— Existem condições iniciais, parametrizadas a dois parâmetros, que dão origem a soluções periódicas S_2 -simétricas com período próximo $T = 2\pi m/s$ próximas de círculos com raio $s^{-2/3}$ e período T .

iii)— Existem condições iniciais parametrizadas a dois parâmetros, que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas com período próximo a $T = 2\pi(2m+1)/s$ próximas de círculos com raio $s^{-2/3}$ e período T .

Demonstração: Com as estimativas provadas no Teorema 6.4.7 basta aplicar o item *ii*) nos Teoremas 5.6.1 , 5.6.2 e 5.6.3 para provar os itens *i*), *ii*) e *iii*) respectivamente. ■

Podemos considerar a formulação do problema do anel ou disco circular, no plano em coordenadas giratórias, e assim obter outras soluções periódicas no plano equatorial. Para isso introduzimos o sistema de coordenadas giratórias que consiste em uma rotação dos eixos coordenadas em torno do eixo perpendicular z . Desta forma a função Hamiltoniana (6.39) fica descrita por

$$K(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|} - (\xi p_\eta - \eta p_\xi) + \epsilon^2 K_1(\mathbf{q}) + \epsilon^4 K_r(\mathbf{q}, \epsilon), \quad (6.49)$$

onde onde $\mathbf{q} = (\xi, \eta)$ e $\mathbf{p} = (p_\xi, p_\eta)$ e

$$\begin{aligned} K_1(\mathbf{q}) &= \frac{CM}{\|\mathbf{q}\|^3}, \\ K_R(\mathbf{q}, \epsilon) &= \frac{3MC}{8\|\mathbf{q}\|^5} + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (6.50)$$

O problema do anel ou disco circular homogêneo, no plano equatorial e em coordenadas giratórias é dado pelo seguintes sistema de equações

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_\xi + y, & \dot{p}_\xi &= p_\eta - \frac{\xi}{\|\mathbf{q}\|^3} - \epsilon^2 \frac{\partial K_1}{\partial \xi} - \mathcal{O}(\epsilon^4), \\ \dot{\eta} &= p_\eta - \xi, & \dot{p}_\eta &= -p_\xi - \frac{\eta}{\|\mathbf{q}\|^3} - \epsilon^2 \frac{\partial K_1}{\partial \eta} + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (6.51)$$

Escrevendo a função Hamiltoniana (6.49) nas variáveis de Poincaré-Delaunay (5.63) obtemos

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon) = -\frac{1}{2P_1^2} - P_1 + \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2} + \epsilon^2 \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (6.52)$$

e o sistema hamiltoniano associado é

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} - 1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{Q}_2 &= P_2 + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_2 &= -Q_2 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Teorema 6.2.5. *Dados $m, p, q \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do anel ou disco circular homogêneo, no plano equatorial, dado por (6.51), temos:*

i)– Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ -simétricas com período $T = 2\pi m/(s-1)$, desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$, próximas de círculos com período T .

ii)– Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período $T = 2\pi m/(s-1)$, desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$, próximas de círculos com período T .

iii)– Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas com período $T = 2\pi(2m+1)/(s-1)$, desde que $(2m+1)/(s-1) \notin \mathbb{N}$, próximas de círculos com período T .

Demonstração: *i)* Basta aplicar o Teorema 5.9.1, item *i)* e concluir que existem condições iniciais parametrizadas em ϵ , de tal forma que estas condições dão origem a soluções $T = 2\pi m/(s-1)$ -periódicas e $\mathcal{S}_1$ -simétricas contidas no plano equatorial próximas de soluções circulares com período T e raio $s^{-2/3}$.

ii) Basta aplicar o Teorema 5.9.2, item *i)*.

iii) Basta aplicar o Teorema 5.9.3, item *i)*. ■

Observação 6.2.4. *Observe que estas soluções poderão não ser periódicas no sistema original, ou seja, podem não ser soluções periódicas do sistema (6.40). Para que isso seja possível é necessário que tenhamos a comensurabilidade dos períodos, ou seja o período da solução continuada dever ser tal que $T/2\pi = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$.*

Nas mesmas condições do Teorema 6.2.5 podemos também obter soluções a um parâmetro, dependendo de ϵ .

Teorema 6.2.6. (Soluções a um parâmetro) *Dados $m, p, q \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do anel ou disco circular homogêneo, no plano equatorial, dado por (6.40) temos:*

i)– Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ -simétricas com período $\tau = 2\pi p/q$ próximo a $T = 2\pi m/(s-1)$, desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$, próximas de círculos com período T e raio $s^{-2/3}$.

ii)– Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período $\tau = 2\pi p/q$ próximo a $T = 2\pi m/(s-1)$, desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$, próximas de círculos com período T e raio $s^{-2/3}$.

iii)– Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas com período $\tau = 4\pi p/q$ próximo a $T = 2\pi(2m+1)/(s-1)$, desde que $(2m+1)/(s-1) \notin \mathbb{N}$, próximas de círculos com período T e raio $s^{-2/3}$.

Demonstração: *i)* Basta aplicar o Teorema 5.9.1, item *ii)* e concluir que existem condições iniciais parametrizadas em ϵ e ΔP_1 , de tal forma que estas condições dão origem a soluções do problema (6.51), $\tau(\epsilon, \Delta P_1)$ -periódicas, onde τ é próximo a $T = 2\pi m/(s-1)$, e $\mathcal{S}_1$ -simétricas contidas no plano equatorial e próximas de soluções circulares com período T . Observamos que estas soluções são periódicas no sistema de coordenadas giratório e desta forma, para serem periódicas no sistema inercial necessitamos da condição de comensurabilidade. Porém para todo ϵ suficientemente pequeno, podemos tomar ΔP_1 suficientemente pequeno tal que $\tau(\Delta P_1, \epsilon)/2\pi = p/q$, para p, q inteiros positivos. Desta forma provamos o teorema.

ii) Aplicando o Teorema 5.9.2, item ii) e usando um argumento semelhante ao item anterior conclui-se o resultado.

iii) Aplicando o Teorema 5.9.3, item ii) e usando um argumento semelhante ao primeiro item conclui-se o resultado. ■

Órbitas próximas a elipses

Podemos no sub-problema do plano equatorial do problema do anel ou disco circular homogêneo obter soluções periódicas simétricas como continuação de soluções elípticas do problema de Kepler. Para isso precisamos escrever o problema nas variáveis de Delaunay 5.60. Nestas coordenadas a função hamiltoniana (6.41) é dada por

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon) = -\frac{1}{2P_1^2} + \epsilon^2 \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (6.53)$$

e o sistema Hamiltoniano associado é

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{Q}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (6.54)$$

Já a função Hamiltoniana em coordenadas giratórias, para o problema planar equatorial (6.49), nas coordenadas de Delaunay (5.60), é dada por

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon) = -\frac{1}{2P_1^2} - P_2 + \epsilon^2 \frac{-MC}{\|\mathbf{q}\|^3} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (6.55)$$

com sistema Hamiltoniano associado dado por

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_1 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{Q}_2 &= -1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{P}_2 &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Teorema 6.2.7. (Soluções a um parâmetro) *Dados $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do anel ou disco circular homogêneo, dado por (6.40) no plano equatorial, temos:*

i)– *Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ -simétricas com período $\tau = 2\pi p/q$ próximo a $T = 2\pi m/s$, desde que $m/s \in \mathbb{N}$, próximas de elipses com período T .*

ii)– *Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período $\tau = 2\pi p/q$ próximo a $T = 2\pi m/s$, desde que $m/s \in \mathbb{N}$, próximas de elipses com período T .*

iii)– *Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas com período $\tau = 4\pi p/q$ próximo a $T = 2\pi m/s$, desde que $m/s = n + 1/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, próximas de elipses com período T .*

Demonstração:

i) Basta aplicar o Teorema 5.9.4, e concluir que existem condições iniciais parametrizadas em ϵ e ΔP_2 , de tal forma que estas condições dão origem a soluções do problema (6.51) $\tau(\epsilon, \Delta P_2)$ -periódicas com τ

próximo a $T = 2\pi m/s$, desde que $m/s \in \mathbb{N}$. Estas soluções são $\mathcal{S}_1$ -simétricas e estão contidas no plano equatorial, próximas de soluções elípticas com período T . Observamos que estas soluções são periódicas no sistema de coordenadas giratório e desta forma, para serem periódicas no sistema inercial necessitamos da condição de comensurabilidade. Porém para todo ϵ suficientemente pequeno, podemos tomar ΔP_2 suficientemente pequeno tal que $\tau(\Delta P_2, \epsilon)/2\pi = p/q$, para p, q inteiros positivos. Desta forma provamos o teorema.

ii) Aplicando o Teorema 5.9.5 e usando um argumento semelhante ao item anterior conclui-se o resultado.

iii) Aplicando o Teorema 5.9.6 e usando um argumento semelhante ao primeiro item conclui-se o resultado. ■

6.3 Outras soluções Periódicas do problema do anel ou disco circular

Apresentamos nesta seção a existências de outras soluções periódicas do problema do anel ou disco circular, porém sem exigir argumentos de simetrias. Obteremos um resultado que mostra a existência de soluções periódicas (não necessariamente simétricas) próximas a soluções circulares do problema de Kepler no caso planar. Ainda vamos discutir sobre soluções do problema do anel ou disco circular homogêneo, que estão afastadas do anel ou do disco, ou de outra forma "próxima do infinito". Estas soluções são chamadas de *órbitas far* ou *órbitas cometas*.

6.3.1 Continuação de órbitas circulares

Procederemos de maneira similar ao realizado no problema restrito dos três corpos onde Meyer-Hall em [25], mostram a existência de soluções periódicas próximas a soluções circulares do problema de Kepler, mas sem exigir nenhuma simetria. Estas órbitas são chamada de *Órbitas de Poincaré*. O problema do Anel circular homogêneo tem um parâmetro de perturbação ϵ que está associado a espessura e raio interno do anel e o disco circular homogêneo, o parâmetro ϵ está associado simplesmente ao raio do disco. Quando $\epsilon = 0$, em ambos os casos, o problema é justamente o problema de Kepler. O problema de Kepler tem muitas soluções circulares, mas todos seus multiplicadores característicos são igual a 1 em coordenadas cartesianas. Isto se deve ao fato de que em coordenadas cartesianas, todas as soluções periódicas em qualquer nível de energia tem o mesmo período e são não isoladas em um nível de energia. Então de resultados clássicos de continuação de soluções periódicas, segue que estas soluções não podem ser continuadas (veja [25], para maiores detalhes). Porém em coordenadas giratórias, as órbitas circulares possuem os multiplicadores característicos não triviais e desta forma podem ser continuadas no problema do anel ou disco circular homogêneo, para valores de ϵ suficientemente pequeno.

A função Hamiltoniana do problema do anel ou disco em coordenadas giratórias é da forma

$$K = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - (xp_y - yp_x) - \lambda \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{[(x - \rho \cos \theta)^2 + (y - \rho \sin \theta)^2 + z^2]^{1/2}} d\theta d\rho. \quad (6.57)$$

onde no problema do disco $a = 0$. Introduzindo o parâmetro de perturbação ϵ , obtemos que a função (6.57) pode ser escrita como

$$K = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - (xp_y - yp_x) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (6.58)$$

e quando $\epsilon = 0$, temos justamente o problema de Kepler em coordenadas giratórias. Usando coordenadas cilíndricas na função (6.58), ou seja, fazendo a mudança de coordenadas simpléticas

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \\ z &= z, \\ R &= p_x \cos \theta + p_y \sin \theta = \frac{xp_x + yp_y}{r}, \\ \Theta &= -p_x r \sin \theta + p_y r \cos \theta = xp_y - yp_x, \\ Z &= p_z, \end{aligned} \tag{6.59}$$

então a função Hamiltoniana (6.58) assume a forma

$$K = \frac{1}{2}[R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} + Z^2] - \Theta - \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \epsilon V(r \cos \theta, r \sin \theta, z, \epsilon). \tag{6.60}$$

As equações de movimento, correspondente ao sistema Hamiltoniano em coordenadas cilíndricas são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{r} &= R + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{R} &= \frac{\Theta^2}{r^3} - \frac{r}{[r^2 + z^2]^{3/2}} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{\theta} &= \frac{\Theta}{r^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{\Theta} &= 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \dot{z} &= Z + \mathcal{O}(\epsilon^2), & \dot{p}_z &= -\frac{z}{[r^2 + z^2]^{3/2}} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{6.61}$$

Consideremos o sistema (6.61) com $\epsilon = 0$. Desta forma é claro que Θ é o momento angular e uma integral primeira do sistema perturbado (6.61). Desta forma podemos fixar $\Theta = c$ uma constante. Agora nos restringimos, ao caso planar $z = p_z = 0$. Para $c \neq 1$, a órbita circular

$$R = 0, r = c^2,$$

é uma solução periódica $2\pi|\frac{c^3}{1-c^3}|$ (este é o tempo para θ atingir 2π). Nós queremos considerar o caso quando

$$2\pi|\frac{c^3}{1-c^3}| = 2\pi\frac{p}{q},$$

que implica em

$$c = (\frac{p}{p+q})^{1/3} \quad \text{or} \quad c = (\frac{p}{p-q})^{1/3}.$$

Linearizando as equações em r e R obtemos

$$\dot{r} = R, \quad \dot{R} = -\frac{1}{c^6}r, \tag{6.62}$$

o qual tem solução da forma $e^{\pm it/c^3}$, e de tal forma que os multiplicadores não-triviais da solução são da forma $e^{\pm i\frac{2\pi}{1-c^3}}$ os quais são diferentes de $+1$, devido ao fato de que $\frac{1}{1-c^3} \notin \mathbb{Z}$. Então temos provado o seguinte resultado

Teorema 6.3.1. *Seja p, q inteiros primos entre si e $T = 2\pi p/q$. Se $c = (\frac{p}{p+q})^{1/3}$ ou $c = (\frac{p}{p-q})^{1/3}$, $c \neq 0$ e $\frac{p}{q} + 1 \notin \mathbb{Z}$ ou $-\frac{q}{p} + 1 \notin \mathbb{Z}$ então a solução circular T -periódica do problema de Kepler em coordenadas giratórias com momento angular constante c pode ser continuada a uma órbita $2\pi p$ -periódica do nosso problema com $z = p_z = 0$ para valores pequenos de ϵ .*

6.3.2 Órbitas Cometas

Outra forma de obter soluções periódicas consistem em introduzir outro parâmetro de tal forma que passemos a considerar órbitas muito afastadas dos corpos. Consideremos a seguinte mudança de coordenada ν -simplética.

$$\begin{aligned}x &= \nu^2 u, & p_x &= \nu p_u, \\y &= \nu^2 v, & p_y &= \nu p_v, \\z &= \nu^2 w, & p_z &= \nu p_w.\end{aligned}\tag{6.63}$$

Então considerando a função Hamiltoniana K dada por (6.58) e fazendo a mudança $K = \nu \mathcal{H}$, obtemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= -(up_v - vp_u) - \nu^3 \frac{p_u^2 + p_v^2 + p_w^2}{2} + \nu^3 \lambda \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{[(u - \rho \nu^2 \cos \theta)^2 + (v - \rho \nu^2 \sin \theta)^2 + w^2]^{1/2}} d\theta d\rho, \\&= -(up_v - vp_u) - \nu^3 \left[\frac{p_u^2 + p_v^2 + p_w^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \right] + \mathcal{O}(\nu^7).\end{aligned}\tag{6.64}$$

Queremos destacar que estamos usando a massa M do anel ou disco como sendo unitária.

Consideremos o caso planar $w = p_w = 0$. Mudando para coordenadas polares obtemos que

$$\mathcal{H} = -\Theta - \nu^3 \left[\frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \right] + \mathcal{O}(\nu^7),\tag{6.65}$$

onde as equações de movimento são

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \nu^3 R + \mathcal{O}(\nu^7), & \dot{R} &= \nu^3 \left(\frac{\Theta^2}{r^3} - \frac{1}{r^2} \right) + \mathcal{O}(\nu^7) \\ \dot{\theta} &= -1 + \nu^3 \frac{\Theta}{r^2} + \mathcal{O}(\nu^7), & \dot{\Theta} &= 0 + \mathcal{O}(\nu^7).\end{aligned}\tag{6.66}$$

Desconsiderando os termos de ordem ν^7 nas equações (6.66) e assim para esta ordem de aproximação Θ é uma integral primeira.

Teorema 6.3.2. *Existem duas famílias a um parâmetro próximas a círculos com raio grande de soluções periódicas do problema do anel ou disco circular. Estas soluções estão próximas ao infinito.*

Demonstração: Consideremos (6.66) e desprezamos os termos de ordem ν^7 . Então um par de soluções circulares deste sistema é $\Theta = \pm c$, $R = 0$ e $r = c^2$, onde c é uma constante. O período destas soluções é $2\pi c^3 / (c^3 - \nu^3)$. Linearizando as equações em r e R ao longo destas soluções obtemos

$$\dot{r} = \nu^3 R, \quad \dot{R} = -\frac{\nu^3}{c^6} r.\tag{6.67}$$

As equações 6.67 tem solução da forma $\exp(\pm i\nu^3 t / c^3)$, e os multiplicadores não triviais da solução circular do sistema (6.66), desprezando os termos de ordem ν^7 , são $\exp(\pm i\nu^3 2\pi / (c^3 - \nu^3)) = 1 \pm 2\pi i\nu^3 / c^3 + \mathcal{O}(\nu^6)$.

Considere o mapa do Período em uma superfície de nível da função Hamiltoniana ao longo da órbita circular. Denotamos por ς a coordenada nesta superfície, com $\varsigma = 0$ correspondendo a solução circular quando $\nu = 0$. O mapa do período tem um ponto fixo na origem para até os termos de ordem ν^3 e é a identidade até os termos de ordem ν^2 e existe um termo multiplicando ν^3 cujo jacobiano tem autovalores $\pm 2\pi i / c^3$. Desta forma o mapa do período é da forma $P(\varsigma) = u + \nu^3 p(\varsigma) + \mathcal{O}(\nu^6)$, onde $p(0) = 0$ e $\partial p(0) / \partial \varsigma$ tem autovalores $\pm 2\pi i / c^3$, tal que, em particular é não singular. Definimos $G(\varsigma, \nu) = (P(\varsigma) - \varsigma) / \nu^3 = p(\varsigma) + \mathcal{O}(\nu^3)$. Desde que $G(0, 0) = 0$ e $\partial G(0, 0) / \partial \varsigma = \partial p(0) / \partial \varsigma$, existe uma função diferenciável $\bar{\varsigma}(\nu)$ tal que, $G(\bar{\varsigma}(\nu), \nu) = 0$ para todo ν suficientemente pequeno. Então estas soluções podem ser continuadas no problema (6.66) com os termos ν^7 . ■

Observação 6.3.1. *Observamos que aqui introduzimos um novo parâmetro ν que não tem nenhuma relação com o parâmetro ϵ que está relacionado com o raio e espessura do anel. Assim as soluções cometas do Teorema 6.3.2 são válidas em um anel com qualquer espessura e raio interno a e para o disco com qualquer raio.*

6.4 Novas soluções periódicas no problema do fio circular homogêneo

Consideremos o problema de uma partícula infinitesimal atraída unicamente pela força gravitacional induzida por um fio circular homogêneo fixo $\mathcal{C}$, contido no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$.

O problema do fio circular homogêneo fixo $\mathcal{C}$ foi estudado por [5] e [15] onde os autores apresentam o estudo da dinâmica do problema e também uma grande quantidade de soluções periódicas simétricas. Nos trabalhos citados acima, os autores descrevem o problema do fio circular homogêneo fixo como perturbações do problema de Kepler e assim obtêm soluções periódicas simétricas próximas a círculos no plano horizontal (plano- (x, y)) ou no plano vertical (plano- (x, z)). As soluções continuadas são planares, ou seja estão no mesmo plano da órbita de Kepler e além disso, não possuem período fixo, apenas próximo ao da órbita de Kepler. As técnicas utilizadas para continuação de soluções periódicas são diferentes das que apresentaremos em nosso texto. O problema do fio circular ainda foi estudado, sob o ponto de vista numérico, por [1], onde o autor apresenta famílias de soluções quasi-periódicas espaciais. Ainda, [10] também determinou numericamente a dinâmica das órbitas do problema do fio circular.

Apresentaremos no que segue a existência analítica de soluções periódicas simétricas espaciais do problema do fio circular homogêneo fixo. Tais soluções serão obtidas como continuação de soluções circulares como também elípticas do problema de Kepler e as soluções encontradas poderão ter período fixo e em alguns casos, período próximo da órbita de Kepler.

6.4.1 O problema do fio circular homogêneo fixo como perturbação do problema de Kepler

Consideremos o fio circular homogêneo $\mathcal{C}$ contido no plano- (x, y) do espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, com raio a , com densidade linear λ constante e massa $M = 2\pi\lambda a$. Segue que a função potencial em um ponto $P = (x, y, z)$, induzida pelo fio circular $\mathcal{C}$ é dado por

$$V(P) = -\frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(x - a \cos \theta)^2 + (y - a \sin \theta)^2 + z^2}}. \quad (6.68)$$

A dedução do potencial para o fio circular homogêneo pode ser encontrada por exemplo em [1], [5], [15], [24]. Porém segue da Proposição 2.3.8, que também podemos obter o potencial do fio circular a partir do potencial do anel circular.

Considerando a função potencial induzida pelo anel $\mathcal{A}$ em termos de polinômios de Legendre, então segue da equação 6.3 que a expressão é dada por

$$V = -\frac{M}{\|\mathbf{q}\|} + \frac{(b^2 + a^2)M}{8\|\mathbf{q}\|^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1) - \frac{M}{8\|\mathbf{q}\|^5} (b^4 + a^2 b^2 + b^4) \left(\frac{35}{8} \cos^4 \vartheta - \frac{15}{4} \cos^2 \vartheta + \frac{3}{8} \right) + \dots \quad (6.69)$$

então escrevendo a equação acima em termos da espessura μ , obtemos

$$V(\mathbf{q}, a, \mu, M) = -\frac{M}{\|\mathbf{q}\|} + \frac{M}{8\|\mathbf{q}\|^3} (\mu^2 + 2\mu a + 2a^2) (3 \cos^2 \vartheta - 1) - \frac{M}{8\|\mathbf{q}\|^5} (\mu^4 + 4\mu^3 a + 7\mu^2 a^2 + 3a^4) \left(\frac{35}{8} \cos^4 \vartheta - \frac{15}{4} \cos^2 \vartheta + \frac{3}{8} \right) + \dots \quad (6.70)$$

Logo, pela Proposição 2.3.8, fazendo $\mu = 0$, obtemos que o potencial na região exterior ao fio circular, ou seja no exterior a esfera de centro na origem e raio a e em termos de polinômios de Legendre é dada por

$$V(\mathbf{q}, a, \mu = 0, M) = -\frac{M}{\|\mathbf{q}\|} + \frac{M}{4\|\mathbf{q}\|^3}a^2(3\cos^2\vartheta - 1) - \frac{3M}{8\|\mathbf{q}\|^5}a^4\left(\frac{35}{8}\cos^4\vartheta - \frac{15}{4}\cos^2\vartheta + \frac{3}{8}\right) + \dots \quad (6.71)$$

Observe que $V(\mathbf{q}, a = 0, \mu = 0, M) = -\frac{M}{\|\mathbf{q}\|}$ que corresponde ao potencial do problema de Kepler. Então fazendo $a = \epsilon$ e desta forma usando o raio do fio circular como parâmetro de perturbação, que o problema do fio circular é uma perturbação analítica do problema de Kepler na região exterior a esfera de raio ϵ .

O movimento da partícula infinitesimal P obedece ao seguinte sistema mecânico:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(x - \epsilon \cos \theta)}{[(x - \epsilon \cos \theta)^2 + (y - \epsilon \sin \theta)^2 + z^2]^{3/2}} d\theta, \\ \ddot{y} &= -\frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(y - \epsilon \sin \theta)}{[(x - \epsilon \cos \theta)^2 + (y - \epsilon \sin \theta)^2 + z^2]^{3/2}} d\theta, \\ \ddot{z} &= -\frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{[(x - \epsilon \cos \theta)^2 + (y - \epsilon \sin \theta)^2 + z^2]^{3/2}} d\theta.\end{aligned} \quad (6.72)$$

as equações de movimento podem ser escritas como um sistema Hamiltoniano de equações diferenciais de primeira ordem, com três graus de liberdade cuja função Hamiltoniana é da forma

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2 - \frac{M}{\|\mathbf{q}\|} + \epsilon^2 H_1(\mathbf{q}) + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (6.73)$$

onde

$$H_1(\mathbf{q}) = \frac{M}{4\|\mathbf{q}\|^3}(3\cos^2\vartheta - 1). \quad (6.74)$$

Observação 6.4.1. Observe que se definimos $c_a = C = 1/4$ então a função H_1 dada por (6.74) é dada por

$$H_1(\mathbf{q}) = \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|^3}(3\cos^2\vartheta - 1),$$

que é como a função perturbadora H_1 no caso do problema do anel ou disco circular homogêneos. Portanto, a função Hamiltoniana do problema do fio circular é dada por

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2 - \frac{MC}{\|\mathbf{q}\|} + \epsilon^2 \frac{M}{\|\mathbf{q}\|^3}(3\cos^2\vartheta - 1) + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (6.75)$$

exatamente como no problema do anel circular homogêneo sendo que a única diferença está na interpretação do parâmetro perturbador, na constante C e no espaço de configurações, que no caso do fio circular homogêneo é dado por

$$\Omega = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3); \mathbf{q} \notin \mathcal{C}\}.$$

Desta maneira basta proceder como no capítulo 6 e escrever o problema do fio circular homogêneo nas coordenadas de Poincaré-Delaunay e nas coordenadas de Delaunay e obter todas as soluções periódicas simétricas obtidas para o caso do anel de maneira quase idêntica. Por isso vamos enunciar alguns dos resultados e vamos omitir as demonstrações.

Observação 6.4.2. Novamente, como vamos utilizar coordenadas de Delaunay e Poincaré-Delaunay devemos tomar a órbita do problema de Kepler e a vizinhança $\mathcal{U}$ de tal maneira que $\mathcal{U}$ esteja suficientemente afastada do fio circular e esta condição poder satisfeita escolhendo convenientemente s , tal que $s > s^*$, $s, s^* \in \mathbb{R}^+$ tal que s^* é suficientemente grande.

6.4.2 Órbitas periódicas simétricas próximas a círculos

Consideremos a mesma notação do capítulo 6. Desta forma temos os seguintes resultados:

Teorema 6.4.1. (*Soluções a um parâmetro*) Dados $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do fio circular circular homogêneo temos:

i)– *Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período fixo $T = 2\pi m/s$ próximas do plano xz e de círculos sobre este plano com raio $s^{-2/3}$ e período T .*

ii)– *Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_1$ simétricas) com período fixo $T = 2\pi(2m+1)/s$ próximas do plano xz e de círculos sobre este plano com raio $s^{-2/3}$ e período T .*

iii)– *Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período $\tau = 2\pi p/q$ próximo a $T = 2n\pi$ próximas de círculos em um plano com certa inclinação e com raio $s^{-2/3}$, onde $s = m/n$ e período T .*

iv)– *Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ simétricas) com período $\tau = 4\pi p/q$ próximo a $T = 4n\pi$ próximas de círculos em um plano com qualquer inclinação e com raio $s^{-2/3}$, onde $s = (2m+1)/2n$ e período T .*

v)– *Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$ simétricas) com período $\tau = 4\pi p/q$ próximo a $T = (2n+1)\pi$ próximas de círculos em um plano com qualquer inclinação e com raio $s^{-2/3}$, onde $s = (2m+1)/(2n+1)$ e período T .*

Façamos alguns comentários, sobre as soluções simétricas periódicas obtidas no teorema acima

Observação 6.4.3. *Todas as soluções do Teorema 6.4.1 são famílias de soluções cujas condições iniciais são parametrizadas por ϵ , para ϵ suficientemente pequeno. Nos itens i) e ii) podemos obter soluções simétricas com período fixo e próximas a círculos contidos no plano vertical e com raio $s^{-2/3}$ onde $s > s^*$, $s, s^* \in \mathbb{R}^+$, s^* suficientemente grande, para evitar problemas de singularidades.*

Nos itens iii), iv) e v) obtemos soluções simétricas periódicas próximas a círculos com plano orbital com qualquer inclinação e raio $s^{-2/3}$. Já as soluções continuadas tem período próxima da órbita de Kepler. Todas estas soluções são espaciais de modo que não aparecem nos trabalhos de [5] e [15].

Observação 6.4.4. *Em todos os casos do Teorema 6.4.1 a solução continuada tem posição inicial diferente e próxima da posição inicial da órbita de Kepler. Já a velocidade inicial da órbita continuada possivelmente poderá também ser diferente e próxima da da órbita de Kepler. Veja observações 5.4.3, 5.4.6 e 5.8.6. Esta é uma grande diferença da técnica aplicada pelos autores [5], [15] onde a posição da órbita continuada era a mesma da órbita de Kepler e só havia uma variação na velocidade.*

Teorema 6.4.2. (*soluções a dois parâmetros*) Dados $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do fio circular homogêneo temos:

i)– *Existem condições iniciais, a dois parâmetros, que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período τ próximo a $T = 2\pi m/s$ próximas do plano xz e de círculos sobre este plano com raio $s^{-2/3}$ e período T .*

ii)– *Existem condições iniciais, a dois parâmetros, que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ simétricas) com período τ próximo a $T = 2\pi(2m-1)/s$ próximas do plano xz e de círculos sobre este plano com raio $s^{-2/3}$ e período T .*

6.4.3 Soluções periódicas próximas a elipses

Nesta seção vamos mostrar a existência de soluções periódicas simétricas obtidas como continuação de soluções elípticas do problema de Kepler. Na literatura não existem resultados que garante a continuação de soluções elípticas do problema de Kepler para o problema do fio circular homogêneo.

Teorema 6.4.3. (Soluções a um parâmetro) *Dados $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema fio circular homogêneo fixo temos*

i)– Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ simétricas) com período $\tau = 4\pi p/q$ próximo a $T = 2\pi(2m+1)/(s-1)$, desde que $(2m+1)/2(s-1) \notin \mathbb{N}$, próximas de círculos contidos no plano- (x, y) e com período T .

ii)– Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas ($\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_3$ simétricas) com período $\tau = 4\pi p/q$ próximo a $T = 4\pi m/(s-1)$, desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$, próximas de círculos contidos no plano- (x, y) e com período T .

Observação 6.4.5. *Valem aqui comentários similares aos da Observação 6.4.4 .*

6.4.4 Soluções periódicas no plano vertical

No sub-problema do plano vertical (plano- (x, z)) determinamos a existência de soluções periódicas simétricas em relação ao eixo x , em relação ao eixo z e também simétricas a ambos os eixos: x e z , ou seja, duplamente simétricas. Porém tais soluções são continuação de soluções circulares do problema de Kepler. Em [5] ou [15] os autores determinam soluções periódicas simétricas próximas a circulares no mesmo sub-problema, porém sem período fixo. Poderemos ver no teorema abaixo, que conseguimos soluções com esta propriedade.

Teorema 6.4.4. (Soluções a um parâmetro) *Dados $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do fio circular homogêneo no plano vertical temos:*

i)– Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período $T = 2\pi m/s$ próximas de círculos e com período T .

ii)– Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas (simétricas em relação ao eixos x e y) com período $\tau = 4\pi p/q$ próximo a $T = 2\pi(2m+1)/s$ próximas de círculos e com período T .

Podemos obter outras soluções no plano vertical, porém sem período fixo, mas neste caso obtemos famílias se soluções a dois parâmetros.

Teorema 6.4.5. (soluções a dois parâmetros) *Dados $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do fio circular homogêneo temos:*

i)– Existem condições iniciais, parametrizadas a dois parâmetros, que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período τ próximo a $T = 2\pi m/s$ próximas de círculos com período T .

ii)– Existem condições iniciais, parametrizadas a dois parâmetros, que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas com período τ próximo a $T = 2\pi(2m-1)/s$ próximas de círculos com período T .

Observação 6.4.6. *As famílias de soluções periódicas simétricas obtidas nos teoremas 6.4.4 e 6.4.5 estão contidas no plano vertical. Porém o problema do fio circular homogêneo é invariante por rotações em torno do eixo- z e desta forma estas soluções podem ser encontradas em qualquer plano vertical, . Em outras palavras, qualquer plano vertical pode ser estudo como um sub-problema do problema do fio circular homogêneo*

6.4.5 Soluções periódicas no plano horizontal

No sub-problema do plano horizontal (plano- (x, y)) determinamos a existência de soluções periódicas simétricas em relação ao eixo x , em relação ao eixo y e duplamente simétricas. Determinamos soluções que são continuação de soluções circulares e elípticas do problema de Kepler. Em [5] ou [15] os autores determinam soluções periódicas simétricas próximas a circulares no mesmo sub-problema, porém sem período fixo. Assim como na Seção 6.4.4, determinamos a existência de soluções próxima a círculos com período fixo.

Teorema 6.4.6. (**Soluções a um parâmetro**) *Dados $m \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do fio circular homogêneo no plano equatorial, temos:*

i)– Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período fixo $T = 2\pi m/s$ próximas de círculos com raio $s^{-2/3}$ e período T .

ii)– Existem condições iniciais, parametrizadas por ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas com período fixo $T = 2\pi(2m+1)/s$ próximas de círculos sobre este plano com raio $s^{-2/3}$ e período T .

iii)– Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período $\tau = 2\pi p/q$ próximo a $T = 2\pi m/(s-1)$, desde que $m/(s-1) \notin \mathbb{N}$, próximas de círculos com período T .

iv)– Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas com período $\tau = 4\pi p/q$ próximo a $T = 2\pi(2m+1)/(s-1)$, desde que $(2m+1)/(s-1) \notin \mathbb{N}$, próximas de círculos com período T .

v)– Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período $\tau = 2\pi p/q$ próximo a $T = 2\pi m/s$, desde que $m/s \in \mathbb{N}$, próximas de elipses com período T .

vi)– Existem condições iniciais, parametrizadas em ϵ , que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas com período $\tau = 4\pi p/q$ próximo a $T = 2\pi m/s$, desde que $m/s = n + 1/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, próximas de elipses com período T .

Observação 6.4.7. *Nos itens i), ii), iii), e iv), obtemos soluções a um parâmetro dependendo de ϵ , sendo que nos itens i) e ii), as soluções possuem período fixo. Nos itens v) e vi) obtemos soluções próximas a elipses.*

Teorema 6.4.7. (**Soluções a dois parâmetros**) *Dados $m \in \mathbb{N}$ e $s > \epsilon \in \mathbb{R}^+$ escolhido convenientemente; então para o problema do fio circular homogêneo no plano equatorial, temos:*

i)– Existem condições iniciais, a dois parâmetros, que dão origem a soluções periódicas $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ -simétricas com período τ próximo a $T = 2\pi m/s$ próximas de círculos com raio $s^{-2/3}$ e período T .

ii)– Existem condições iniciais, a dois parâmetros, que dão origem a soluções periódicas duplamente simétricas com período próximo a $T = 2\pi(2m+1)/s$ próximas de círculos com raio $s^{-2/3}$ e período T .

Façamos agora um comentário que valem para todas as soluções periódicas simétricas obtidas no problema do fio circular homogêneo.

Observação 6.4.8. *Nos Teoremas 6.4.1 e 6.4.2 acima, os resultados são válidos para valores do parâmetro epsilon teorema acima as soluções obtidas valem para alguns suficientemente pequeno. Porém as propriedades dadas pelo Lema 2.3.1 e o corolário 2.3.1 com $\mu = 0$ valem para o problema do fio circular homogêneo. Desta forma podemos obter a solução para o problema do fio para qualquer raio a partir da solução periódica do problema do fio de raio ϵ . Veja Observação 6.1.2.*

6.4.6 Órbitas Cometas no problema do fio

Assim como no problema do anel ou disco podemos obter soluções periódicas afastadas do fio circular homogêneo. Consideremos a seguinte mudança de coordenada ν -simplética.

$$x = \nu^2 u, \quad p_x = \nu p_u,$$

$$y = \nu^2 v, \quad p_y = \nu p_v,$$

$$z = \nu^2 w, \quad p_z = \nu p_w.$$

Então considerando a função Hamiltoniana H dada por (6.57) com $\mu = 0$ também pode ser escrita na forma (6.58) e fazendo a mudança $H = \nu \mathcal{H}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -(up_v - vp_u) - \nu^3 \frac{p_u^2 + p_v^2 + p_w^2}{2} + \nu^3 \lambda \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{[(u - \rho\nu^2 \cos \theta)^2 + (v - \rho\nu^2 \sin \theta)^2 + w^2]^{1/2}} d\theta d\rho, \\ &= -(up_v - vp_u) - \nu^3 \left[\frac{p_u^2 + p_v^2 + p_w^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \right] + \mathcal{O}(\nu^7). \end{aligned} \quad (6.76)$$

Queremos destacar que estamos usando a massa M do fio como sendo unitária e observe que na função Hamiltoniana (6.76) o parâmetro perturbador ν não tem nenhuma relação com ϵ , ou seja com o raio ou espessura.

Consideremos o caso planar $w = p_w = 0$.

Desta forma procedendo da mesma maneira que na seção 6.3.2 para o problema do anel ou disco, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 6.4.8. *Existem duas famílias a um parâmetro próximas a círculos com raio grande de soluções periódicas do problema do fio circular. Estas soluções estão próximas ao infinito.*

Capítulo 7

Órbitas de escape no problema geral de uma partícula atraída por um corpo maciço

Consideremos o problema de uma partícula infinitesimal P atraída unicamente pela atração gravitacional induzida por um corpo maciço com distribuição de massa homogênea e de dimensão finita. Recordamos da Seção 2.1, que o movimento da partícula P obedece ao sistema de equações

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= - \int_{\mathcal{M}} \frac{(x - \xi)dM}{[x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)]^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{y} &= - \int_{\mathcal{M}} \frac{(y - \eta)dM}{[x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)]^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{z} &= - \int_{\mathcal{M}} \frac{(z - \zeta)dM}{[x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)]^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\tag{7.1}$$

As equações acima estão associadas a função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \int_{\mathcal{M}} \frac{dM}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta)}}.\tag{7.2}$$

Lembremos que o sistema (7.1) ou a função Hamiltoniana H está definida no subconjunto de $\mathbb{R}^6$

$$\mathbb{R}^6 \setminus \{(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^6 \mid (x, y, z) \in \mathcal{M}\}.$$

Estudaremos as órbitas de escape no problema de um corpo maciço para energia fixa h , logo o fluxo estará sobre a superfície de energia

$$\Sigma_h : H = h.\tag{7.3}$$

Inicialmente estudaremos as órbitas de escape na direção do eixo z . Mais precisamente, motivados pelas definições do problema dos N -corpos, dizemos que:

Definição 7.0.1. *Uma órbita escapa (captura) a infinito na direção vertical z se $z(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$). O escape é parabólico se $p_z(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$). Se este limite existe e é diferente de zero, dizemos que a órbita é hiperbólica.*

O conjunto das órbitas parabólicas de escape será chamado de ω -parabólico e o das órbitas parabólicas de captura será chamado de α -parabólico.

Para realizar a análise das órbitas de escape a idéia é trazer o "infinito" na direção de z a um valor finito. Para isto, uma conveniente transformação de coordenadas é

$$z = q^{-2}, \quad \text{e} \quad p_z = p, \quad (7.4)$$

de modo que o escape se dá quando $q(t) \rightarrow 0$. Nestas, coordenadas, as equações de movimento (6.72) transformam-se nas equações

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x, & \dot{p}_x &= -q^6 \int_{\mathcal{M}} \frac{(x - \xi)dM}{[1 + q^2\zeta + q^4\{x^2 + y^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta)\}]^{\frac{3}{2}}}, \\ \dot{y} &= p_y, & \dot{p}_y &= -q^6 \int_{\mathcal{M}} \frac{(y - \eta)dM}{[1 + q^2\zeta + q^4\{x^2 + y^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta)\}]^{\frac{3}{2}}}, \\ \dot{q} &= -\frac{1}{2}q^3p, & \dot{p} &= -q^4 \int_{\mathcal{M}} \frac{(1 - q^2\zeta)dM}{[1 + q^2\zeta + q^4\{x^2 + y^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta)\}]^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

e a relação de energia assume a forma

$$\Sigma_h : \quad h = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p^2) - q^2 \int_{\mathcal{M}} \frac{dM}{[1 + q^2\zeta + q^4\{x^2 + y^2 + \rho^2 - 2(x\xi + y\eta)\}]^{1/2}}. \quad (7.6)$$

Da relação de energia segue-se que no limite, ou seja, quando $q \rightarrow 0$ toda a energia do sistema satisfaz $p_x^2 + p_y^2 + p^2 = 2h$ e portanto, a energia h só pode ser maior que zero e só existe energia cinética. Este fato, é uma diferença relevante quando a comparamos com problemas de N -corpos da Mecânica Celeste, pois lá, em geral o problema se reduzia a um problema de Kepler. Por outro lado, é importante enfatizar que o campo (7.5) associado ao fluxo no infinito na direção de z não possui singularidades uma vez que estas só podem acontecer na parte limitada.

É claro de (7.5) que o conjunto definido por $q = 0$ é uma subvariedade de Σ_h , invariante pelo fluxo, que denotaremos $\Lambda_h(z)$ e que chamaremos de variedade no infinito na direção de z ,

$$\Lambda_h(z) = \{(x, y, q, p_x, p_y, p) \in \mathbb{R}^6 / q = 0 \quad \text{e} \quad p_x^2 + p_y^2 + p^2 = 2h\}, \quad (7.7)$$

assim,

Proposição 7.0.1. *No Problema do corpo maciço, para $h > 0$ no caso espacial a topologia da variedade no infinito na direção de z corresponde ao produto cartesiano $\mathbb{R}^2 \times S^2$.*

Em particular,

Corolário 7.0.1. *No Problema do corpo maciço, para $h > 0$ no caso planar $x = p_x = 0$ ou $y = p_y = 0$ a topologia da variedade no infinito na direção de z corresponde ao produto cartesiano $\mathbb{R} \times S^1$, isto é, um cilindro.*

Agora, observemos que o fluxo sobre $\Lambda_h(z)$ é determinado pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x, & \dot{p}_x &= 0, \\ \dot{y} &= p_y, & \dot{p}_y &= 0, \\ \dot{q} &= 0, & \dot{p} &= 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Logo, o fluxo associado ao problema do corpo maciço é dado por

$$\begin{aligned}x(t) &= p_x^0 t + x_0, & p_x(t) &= p_x^0, \\y(t) &= p_y^0 t + y_0, & p_y(t) &= p_y^0, \\q(t) &= 0, & p(t) &= p^0,\end{aligned}\tag{7.9}$$

com $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ arbitrários e $p_x^0, p_y^0, p^0 \in \mathbb{R}$ satisfazendo a relação

$$(p_x^0)^2 + (p_y^0)^2 + (p^0)^2 = 2h.\tag{7.10}$$

Proposição 7.0.2. *As soluções de equilíbrio do sistema (7.5) para o problema do corpo maciço correspondem a*

$$x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad q = 0, \quad p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p = \pm\sqrt{2h},$$

desta forma todas elas estão sobre a variedade no infinito $\Lambda_h(z)$. Assim, topologicamente são duas cópias de $\mathbb{R}^2$. Em particular, se fixamos $x = x_0, y = y_0$ os equilíbrios são dois pontos.

Por outro lado, sobre $\Lambda_h(z)$ com $p = 0$ fixo, o fluxo é dado simplesmente por

$$\begin{aligned}x(t) &= p_x^0 t + x_0, & p_x(t) &= p_x^0, \\y(t) &= p_y^0 t + y_0, & p_y(t) &= p_y^0.\end{aligned}\tag{7.11}$$

onde

$$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \quad (p_x^0)^2 + (p_y^0)^2 = 2h.\tag{7.12}$$

Assim,

Proposição 7.0.3. *No caso espacial do problema do corpo maciço, para $h > 0$ os conjuntos ω -parabólico e α -parabólico correspondem topologicamente a $\mathbb{R}^2 \times S^1$.*

Em particular,

Corolário 7.0.2. *Para $h > 0$ no caso planar do problema do corpo maciço $x = p_x = 0$ ou $y = p_y = 0$ os conjuntos ω -parabólico e α -parabólico correspondem topologicamente a duas cópias de $\mathbb{R}$, isto é, duas retas.*

Demonstração: É suficiente observar que pela relação (7.12) $p_x^0 = \pm\sqrt{2h}$ ou $p_y^0 = \pm\sqrt{2h}$. ■

Na Figura 7.1 mostramos o fluxo no caso planar $y = p_y = 0$.

Em resumo, podemos concluir o seguinte:

Teorema 7.0.9. *Para $h > 0$ no problema do corpo maciço as soluções de escape hiperbólicas na direção z correspondem aos equilíbrios do sistema (7.5) sobre $\Sigma_h(z)$ e as demais soluções deste sistema correspondem as órbitas parabólicas.*

Observação 7.0.9. *Um estudo completamente análogo pode ser efetuado para estudar os escapes na direção dos outros eixos coordenados, isto é, o eixo x e o eixo y , e verifica-se que valem as mesmas conclusões.*

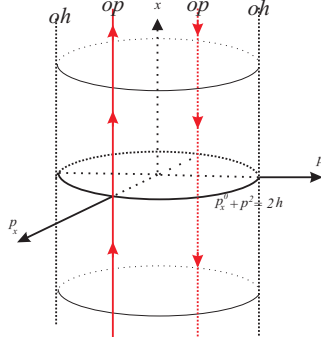


Figura 7.1: O fluxo sobre $\Lambda_h(z)$ no caso planar $y = p_y = 0$, para o problema do corpo maciço. As retas op representam as órbitas parabólicas e as órbitas oh representam as órbitas hiperbólicas.

7.0.7 Órbitas de escape no problema do anel e do disco circular homogêneo

É claro que os resultados acima valem para o problema do anel ou disco circular homogêneo fixo. Porém poderíamos dar uma prova direta para o caso do anel ou disco como descrito abaixo. Para o problema do anel ou disco circular homogêneo a função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \lambda \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{[(x - \rho \cos \theta)^2 + (y - \rho \sin \theta)^2 + z^2]^{1/2}} d\theta d\rho. \quad (7.13)$$

Lembremos que o sistema (6.72) ou a função Hamiltoniana H está definida no subconjunto de $\mathbb{R}^6$

$$\mathbb{R}^6 \setminus \{(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^6 / a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, \text{ e } z = 0\}.$$

Após a mudança de variáveis (7.4) as equações de movimento transformam-se nas equações

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x, & \dot{p}_x &= -\lambda q^6 \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{(x - \rho \cos \theta)}{[1 + q^4 \{\rho(x - \rho \cos \theta)^2 + (y - \rho \sin \theta)^2\}]^{3/2}} d\theta d\rho, \\ \dot{y} &= p_y, & \dot{p}_y &= -\lambda q^6 \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{(y - \rho \sin \theta)}{[1 + q^4 \{(x - \rho \cos \theta)^2 + (y - \rho \sin \theta)^2\}]^{3/2}} d\theta d\rho, \\ \dot{q} &= -\frac{1}{2} q^3 p, & \dot{p} &= -\lambda q^4 \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{[1 + q^4 \{(x - \rho \cos \theta)^2 + (y - \rho \sin \theta)^2\}]^{3/2}} d\theta d\rho, \end{aligned} \quad (7.14)$$

e a relação de energia assume a forma

$$\Sigma_h : \quad h = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p^2) - \lambda q^2 \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{[1 + q^4 \{(x - \rho \cos \theta)^2 + (y - \rho \sin \theta)^2\}]^{1/2}} d\theta d\rho. \quad (7.15)$$

Da relação de energia segue-se que no limite, ou seja, quando $q \rightarrow 0$ toda a energia do sistema satisfaz $p_x^2 + p_y^2 + p^2 = 2h$ e portanto, a energia h só pode ser maior que zero. Agora o estudo das órbitas de escape é equivalente ao problema do corpo maciço, uma vez que no infinito (isto é, $q = 0$) não envolve a expressão do potencial e não apresenta singularidades.

Capítulo 8

Apêndice A

Seja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mu) \quad (8.1)$$

um sistema de primeira ordem de equações diferenciais em $\mathbb{R}^n$ com $\mathbf{g}$ analítica em $\mathbf{x}$ e μ em alguma vizinhança $\mathbf{x} = \mathbf{x}_*$. Expandindo em série de Taylor em torno $\mu = 0$, obtemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mu) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, 0) + \mu \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mu}(\mathbf{x}, 0) + O(\mu^2) \\ &:= \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \mu \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) + O(\mu^2). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Seja $\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*)$ solução particular do sistema não perturbado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}), \quad (8.3)$$

e queremos determinar uma solução de (8.1) próxima de $\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*)$ da seguinte forma

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_*, \mu) = \mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*) + \mu \mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*) + O(\mu^2). \quad (8.4)$$

Nosso objetivo é caracterizar a equação que satisfaz $\mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*)$. Substituindo $\mathbf{x}$ em (8.2) pela relação dada em (8.4) e expandindo em séries de Taylor em torno de $\mu = 0$ temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*) + \mu \mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*) + O(\mu^2), \mu) &= \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*) + \mu \mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*) + O(\mu^2)) \\ &+ \mu \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*) + \mu \mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*) + O(\mu^2)) + O(\mu^2) \\ &= \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*)) + \mu [D\mathbf{g}_0(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*))\mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*) \\ &+ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*))] + O(\mu^2). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Diferenciando (8.4) com respeito a t e comparando com (8.5) segue que $\mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = D\mathbf{g}_0(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*))\mathbf{x}_1 + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*)). \quad (8.6)$$

Desde que $\mathbf{x}_1(0) = 0$ segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t, \mathbf{x}_*) &= X(t) \int_0^t X^{-1}(s) \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0(s, \mathbf{x}_*)) ds \\ &= X(t) \int_0^t X^{-1}(s) \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mu}(\mathbf{x}_0(s, \mathbf{x}_*)) ds, \end{aligned} \quad (8.7)$$

onde $X(t)$ é a matrix fundamental do sistema de equações lineares

$$\begin{aligned}\dot{X} &= D\mathbf{g}_0(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*))X \\ &= D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t, \mathbf{x}_*), 0)X.\end{aligned}\tag{8.8}$$

Claramente, nós temos que

$$X(t) = D_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_0(t, x)|_{\xi=\mathbf{x}_*}.\tag{8.9}$$

8.1 Apêndice B

Nesta seção apresentaremos algumas expansões convergentes para as transformações entre as coordenadas polares e as variáveis de Poincaré-Delaunay $(PD - 2)$ para a partícula infinitesimal.

8.1.1 A vizinhança de algumas soluções do problema de Kepler

Iremos descrever uma vizinhança de uma solução circular do problema de Kepler nas variáveis de Poincaré-Delaunay $(PD - 1)$ e $(PD - 2)$. Uma vez que usaremos os elementos orbitais clássicos, primeiramente, relembremos algumas fórmulas que serão necessárias aqui.

Seja E anomalia excêntrica, então temos a seguinte relação

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{4}} \tan \frac{f}{2}.\tag{8.10}$$

A anomalia média l está relacionada à anomalia excêntrica E através da equação de Kepler

$$l = E - e \sin E.\tag{8.11}$$

A distância à origem e o ângulo ψ são dados por

$$\|\mathbf{q}\| = a(1 - e \cos E),\tag{8.12}$$

$$\psi = f + g,\tag{8.13}$$

onde f é a anomalia verdadeira. Da equação de Kepler (8.11) as seguintes expansões podem ser derivadas

$$\begin{aligned}e \cos E &= e \cos l - (e \sin l)^2 + \mathcal{O}_3(e \sin l, e \cos l) \\ e \sin E &= e \sin l + e \sin(l) e \cos(l) + \mathcal{O}_3(e \sin l, e \cos l).\end{aligned}\tag{8.14}$$

A diferença $f - E$ pode ser expandida de (8.10) como

$$f - E = e \sin E + \frac{1}{2} e \sin(E) e \cos(E) + \mathcal{O}(e \sin E, e \cos E),\tag{8.15}$$

e a diferença $E - l$ é dada por (8.11). Nas variáveis de Poincaré-Delaunay $(PD - 1)$, $Q_1 = l + g$, então segue que

$$\begin{aligned}e \cos l &= \cos(Q_1) e \cos(g) + \sin(Q_1) e \sin(g), \\ e \sin l &= \sin(Q_1) e \cos(g) - \cos(Q_1) e \sin(g).\end{aligned}\tag{8.16}$$

Já nas variáveis de Poincaré-Delaunay $(PD - 2)$,

$Q_1 = l + g + h$, e assim obtemos que

$$\begin{aligned} e \cos l &= \cos(Q_1) e \cos(g + h) + \sin(Q_1) e \sin(g + h), \\ e \sin l &= \sin(Q_1) e \cos(g + h) - \cos(Q_1) e \sin(g + h). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Procuramos agora por fórmulas que permitem passar das coordenadas polares para as variáveis de Poincare-Delaunay $(PD - 1)$ e $(PD - 2)$. Da definição de Q_2 e P_2 dadas em e da relação $G = \sqrt{a(1 - e^2)}$, $L = \sqrt{a}$ segue que

$$e = \frac{1}{L} \sqrt{(L - G)(L + G)} = \sqrt{\frac{(Q_2^2 + P_2^2)(4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2))}{4P_1^2}},$$

Portanto nas variáveis $(PD - 1)$ segue que

$$\begin{aligned} \sin(g) &= -\frac{Q_2^2}{\sqrt{Q_2^2 + P_2^2}}, & e \sin(g) &= -\frac{1}{\sqrt{2P_1}} Q_2 \sqrt{2P_1 - \frac{1}{2}(Q_2^2 + P_2^2)}, \\ \cos(g) &= \frac{P_2}{\sqrt{Q_2^2 + P_2^2}}, & e \cos(g) &= \frac{1}{\sqrt{2P_1}} P_2 \sqrt{2P_1 - \frac{1}{2}(Q_2^2 + P_2^2)}, \end{aligned} \quad (8.18)$$

E nas variáveis $(PD - 2)$, segue que

$$\begin{aligned} \sin(g + h) &= -\frac{Q_2^2}{\sqrt{Q_2^2 + P_2^2}}, & e \sin(g + h) &= -\frac{1}{\sqrt{2P_1}} Q_2 \sqrt{2P_1 - \frac{1}{2}(Q_2^2 + P_2^2)}, \\ \cos(g + h) &= \frac{P_2}{\sqrt{Q_2^2 + P_2^2}}, & e \cos(g + h) &= \frac{1}{\sqrt{2P_1}} P_2 \sqrt{2P_1 - \frac{1}{2}(Q_2^2 + P_2^2)}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Substituindo (8.16), (8.18) e a primeira equação de (8.14) em (8.12) obtemos a expressão de $\|\mathbf{q}\|$ nas variáveis de Poincaré- Delaunay $(PD - 1)$ a qual é dada por

$$\|\mathbf{q}\| = P_1^2 \left(1 - [e \cos g \cos Q_1 + e \sin g \sin Q_1] + [e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1]^2 \right),$$

onde $e \cos g$ e $e \sin g$ são dadas por (8.18). Para obter uma melhor aproximação, podemos expandir o lado direito de (8.18) como série de potências em Q_2, P_1, P_2 perto da condição inicial escolhida da órbita do sistema não perturbado. Em nosso caso, escolhemos $Q_2 = 0, P_1 = s^{-1/3}, P_2 = 0$ (caso circular). Levando em conta (8.16), conseguimos $e \sin l, e \cos l$ como série de potências nas variáveis mencionadas e coeficientes trigonométricos em Q_1 e de (8.14) eventualmente encontramos $e \sin E, e \cos E$, novamente como série do mesmo tipo. Finalmente, de (8.12) conseguimos a expressão para $\|\mathbf{q}\|$, a qual é dada por

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}\| &= s^{-2/3} + s^{-1/2} Q_2 \sin Q_1 - s^{-1/2} P_2 \cos Q_1 + 2s^{-1/3} (P_1 - s^{-1/3}) + s^{-1/3} Q_2^2 \cos^2 Q_1 \\ &\quad + \frac{3}{2} s^{-1/6} Q_2 (P_1 - s^{-1/3}) \sin Q_1 + 2s^{-1/3} Q_2 P_2 \sin Q_1 \cos Q_1 + (P_1 - s^{-1/3})^2 - \frac{3}{2} s^{-1/6} (P_1 - s^{-1/3}) P_2 \cos Q_1 \\ &\quad + s^{-1/3} P_2^2 \sin^2 Q_1 + \mathcal{O}(\|X\|^3), \end{aligned}$$

onde $X = (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_2) = (Q_2, P_1 - s^{-1/3}, P_2)$.

Agora substituindo (8.17), (8.19) e a primeira equação de (8.14) em (8.12) obtemos a expressão de $\|\mathbf{q}\|$ nas variáveis de Poincaré- Delaunay $(PD - 2)$ a qual é dada por

$$\|\mathbf{q}\| = P_1^2 \left(1 - [e \cos(g+h) \cos Q_1 + e \sin(g+h) \sin Q_1] + [e \cos(g+h) \sin Q_1 - e \sin(g+h) \cos Q_1]^2 \right),$$

onde $e \cos(g+h)$ e $e \sin(g+h)$ são dadas por (8.19). Para obter uma melhor aproximação, nós podemos expandir o lado direito de (8.19) como série de potências em Q_2, P_1, P_2 perto da condição inicial escolhida da órbita do sistema não perturbado. Em nosso caso, escolhemos $Q_2 = 0, P_1 = s^{-1/3}, P_2 = 0$ (caso circular). Levando em conta (8.17), conseguimos $e \sin l, e \cos l$ como série de potências nas variáveis mencionadas e coeficientes trigonométricos em Q_1 e de (8.14) eventualmente encontramos $e \sin E, e \cos E$, novamente como série do mesmo tipo. E, finalmente de (8.12) conseguimos a expressão para $\|\mathbf{q}\|$ dada por

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}\| &= s^{-2/3} + s^{-1/2} Q_2 \sin Q_1 - s^{-1/2} P_2 \cos Q_1 + 2s^{-1/3} (P_1 - s^{-1/3}) + s^{-1/3} Q_2^2 \cos^2 Q_1 + \\ &\quad \frac{3}{2} s^{-1/6} Q_2 (P_1 - s^{-1/3}) \sin Q_1 + 2s^{-1/3} Q_2 P_2 \sin Q_1 \cos Q_1 + (P_1 - s^{-1/3})^2 - \frac{3}{2} s^{-1/6} (P_1 - s^{-1/3}) P_2 \cos Q_1 + \\ &\quad s^{-1/3} P_2^2 \sin^2 Q_1 + \mathcal{O}(\|X\|^3), \end{aligned}$$

where $X = (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_2) = (Q_2, P_1 - s^{-1/3}, P_2)$ and $Q_1 = (s^{-1/3} + \Delta P_1)t - m\pi$.

O cálculo para ψ nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD-1$) é feito da seguinte forma: ψ nestas variáveis pode ser escrito como

$$\psi = Q_1 + f - E + E - l.$$

Assim, usando as expressões dadas em (8.15) e (8.11) para $f - E$ e $E - l$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \psi &= Q_1 + 2 \left([e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1] + [e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1][e \cos g \cos Q_1 + e \sin g \sin Q_1] \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left([e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1] + [e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1][e \cos g \cos Q_1 + e \sin g \sin Q_1] \right) \\ &\quad \left(e \cos g \cos Q_1 + e \sin g \sin Q_1 - [e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1]^2 \right), \end{aligned}$$

onde as expressões para $e \cos g$ e $e \sin g$ nas variáveis de Delaunay estão em (8.18). Expandindo esta expressão em série de potências, como no caso de $\|\mathbf{q}\|$, obtemos a expressão de ψ nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD-1$) numa vizinhança de uma órbita do sistema não perturbado

$$\begin{aligned} \psi &= Q_1 + 2P_2 s^{1/6} \sin Q_1 + 2Q_2 s^{1/6} \cos Q_1 \\ &\quad - \frac{5}{2} s^{1/3} Q_2^2 \cos Q_1 \sin Q_1 + \frac{5}{2} s^{1/3} P_2 Q_2 \cos 2Q_1 - Q_2 s^{1/2} (P_1 - s^{-1/3}) \cos Q_1 \\ &\quad - P_2 s^{1/2} (P_1 - s^{-1/3}) \sin Q_1 + \frac{5}{2} P_2^2 s^{1/3} \sin Q_1 \cos Q_1 + \mathcal{O}(\|X\|^3), \end{aligned}$$

onde $X = (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_2) = (Q_2, P_1 - s^{-1/3}, P_2)$.

O cálculo para ψ nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($PD-2$) é feito da seguinte forma: ψ nestas variáveis pode ser escrito como

$$\psi = Q_1 + f - E + E - l - h.$$

Assim, usando as expressões dadas em (8.15) e (8.11) para $f - E$ e $E - l$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \psi &= Q_1 - h + 2 \left([e \cos(g + h) \sin Q_1 - e \sin(g + h) \cos Q_1] + [e \cos(g + h) \sin Q_1 - e \sin(g + h) \cos Q_1] \right. \\ &\quad \left. [e \cos(g + h) \cos Q_1 + e \sin(g + h) \sin Q_1] \right) + \frac{1}{2} \left([e \cos(g + h) \sin Q_1 - e \sin(g + h) \cos Q_1] + \right. \\ &\quad \left. [e \cos(g + h) \sin Q_1 - e \sin(g + h) \cos Q_1] [e \cos(g + h) \cos Q_1 + e \sin(g + h) \sin Q_1] \right) \\ &\quad \left(e \cos(g + h) \cos Q_1 + e \sin(g + h) \sin Q_1 - [e \cos(g + h) \sin Q_1 - e \sin(g + h) \cos Q_1]^2 \right), \end{aligned}$$

onde as expressões para $e \cos(g + h)$ e $e \sin(g + h)$ são como em (8.19).

Bibliografia

- [1] Alberti, A.: (2003). *Dinâmica de uma partícula no potencial de um fio circular homogêneo*, Master thesis, Departamento de Matemática- UFPE.
- [2] Alberti, A. and Vidal, C.: 2007, *Dynamics of a particle in a gravitational field of a homogeneous circular annulus*, Celest. Mech. Dynam. Astronom. **98**, 75-93.
- [3] Ambrosetti, A. and Bessi, U.: (1992). *Multiple closed orbits for perturbed Keplerian problems*. *J. Diff. Eq.*, **96**, 283-294.
- [4] Arnold, V.I.: (1978). *Mathematical methods of classical mechanics*, New York: Springer.
- [5] Azevêdo, C.: (2002). *Dinâmica do problema do fio circular homogêneo*, Tese de doutorado em Matemática, Universidade Federal de Pernambuco. Brazil. *On the fixed homogeneous circle problem*, ArXiv:math.DS/0307329 v3, (2003-09-03).
- [6] Azevêdo, C. and Ontaneda, P.: (2005). *Continuous symmetric perturbations of planar power law forces*, *J. Diff. Eq.*, **211**, 20-37.
- [7] Belbruno, E., Llibre, J. and Ollé, M.: (1994). *On the families of periodic orbits which bifurcate from the circular Sitnikov motions*. Celest. Mech. Dynam. Astronom., bf 60, 99-129.
- [8] Bessi, U. (1993). *Multiple closed orbits of fixed energy for gravitational potentials*. *J. Diff. Eq.*, **104**, 1-10.
- [9] Boccaletti D., Pucacco G.: (1996). *Theory of orbits* vol 1, Springer.
- [10] Broucke, R. A. and Elife, A.: (2005). *The Dynamics of Orbits in a Potential Field of a solid Circular Ring*, Regular and Chaotic Dynamics, **10**, 2, 129-143.
- [11] Brouwer, D. and Clemence, G.: (1961). *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York and London.
- [12] Byrd, Paul F. and Friedman, Morris D.: (1954). *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*, Berlin: Springer Verlag, 355 p.
- [13] Byrnes, B.V. and D´Amario, L.A.: (1995). *Dactyl orbit determination analysis*, AAS AIAA Astrodynamics Specialist Conference, AAS 95-315.
- [14] Cabral, H. and Vidal, C.: (2000). *Periodic solutions of symmetric perturbations of the Kepler problem*. *J. Diff. Eq.*, **163**, 76-88.
- [15] Cabral, H. E.; Azevêdo, C.; Ontaneda, P.: (2007). *On the fixed homogeneous circle problem*. *Advanced Non-Linear Studies*, **7**, 1, 47-75.
- [16] Cors J., Pinyol C., Soler J.: (2005). *Analytic continuation in the case of non-regular dependency on a small parameter with an application to celestial mechanics*, *J. Diff. Eqs.*, **219**, 1- 19.
- [17] Elife, A. , Riaguas, A. and Lara M.: (1999). *Periodic orbits around a massive Straight Segment*, Celest. Mech. Dynam. Astronom., **73**, 169-178.
- [18] Elife, A. and Riaguas, A.: (2003). *Nonlinear Stability under a Logarithmic Gravity Field*, Intern. Math. Jornal, **3**, 4, 435-453.
- [19] Elife, A., and Lara M.: (2003). *A Simple Model for the Chaotic Motion Around (433) Eros*, The journal of the Astronautic Sciences, **51**, 4, 391-404.
- [20] Esa's Rosetta mission and systema definition documents. Technical report ESA Publications, 1991.

- [21] Howard, J.E.: (1998). *Stability of Relative Equilibria in Arbitrary Axisymmetric Gravitational and Magnetic Fields*, *Celest. Mech. Dynam. Astronom.*, **74**, 20-56.
- [22] Kellog, O.D.: (1929). *Foundations of the potential theory*, Dover Publications, Inc. New York.
- [23] Lass, H. and Blitzler, L.: (1983). *The gravitational potential due to uniform disk and rings*, *Cel. Mech.*, **30**, 225-228.
- [24] MacMillan, W.D.: (1958). *The theory of the potential*, Dover Publications, Inc. New York.
- [25] Meyer, K. R. and Hall, G.R.: (1992). *Introduction to Hamiltonian Dynamical System and the N-Body Problem*. Springer-Verlag, New York.
- [26] Meyer K., Howison Clarissa R.: (2000). *Doubly-Symmetric Periodic Solutions in the Spatial Restricted Three-Body Problem*, *J. Diff. Eqs.*, **163**, 174-197.
- [27] Meyer K.: (1999). *Periodic solution of the N-Body Problem*, *Lectures Notes in Math.*, **1719**, Springer-Verlag, Berlin.
- [28] Murison, A. M.: (1998). *Series solutions of Kepler's Equation*, <http://aa.usno.navy.mil/murison/>.
- [29] NEAR Special Issue on the Near Mission to 433 Eros. 1995, *Journal Astronautical Sciences* 43.
- [30] Plakhov, Y.: (1968). *Solution of the problem of motion of a particle in the gravity field of Saturn's ring*, *Geodesy and Aerophotography*, **1**, 38-41.
- [31] Poincaré, H.: (1889). *Theorié du potentiel Newtonien*. Redigees par Edouard Le Roy, Georges Vicent. Paris: Georges Carre; C. Naud.
- [32] Poincaré, H.: (1957). *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Dover Publ.
- [33] Riaguas, A., Elife, A. and López-Moratalla, T.: (2001). *Non-linear stability of the equilibria in the gravity field of a finite straight segment*, *Celest. Mech. Dynam. Astronom.*, **81**, 3, 235-248.
- [34] Schewehm, G. and Hechler, M.: (1994) *Rosetta-ESA's Planetary cornerstone mission*, *ESA Bulletin*, **77**, 1-18.
- [35] Siegel, C.L. and Moser, J.K. (1971). *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, New York.
- [36] Vidal, C.: (2001). *Periodic solutions for any planar symmetric perturbation of the Kepler problem*, *Celest. Mech.*, **80**, 119-132.
- [37] Special Issue on the NEAR Mission to 433 Eros. *Journal of Astronautical Sciences*, 43-4, 1995.
- [38] Vidal, C.: (2005). *Periodic solutions of symmetric perturbations of gravitational problems*, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **17**, 1, 85-114.
- [39] Vidal, C. and Alberti, A.: (2006). *Periodic solutions of a particle in a potential field of a planar massive annulus*, Preprint.
- [40] Stiefel, E. L., Scheifele, G.: (1971). *Linear and Regular Celestial Mechanics*. Springer-Verlag.
- [41] Szebehely, V.: (1967). *Theory of Orbits*, New York, Academic Press.
- [42] Wintner, A.: (1941). *The Analytical Foundations Celestial of Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, New York.