Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Felipe Wergete Cruz

ESTIMATIVAS DE ERRO PARA AS APROXIMAÇÕES DE GALERKIN DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Recife

2011

Felipe Wergete Cruz

ESTIMATIVAS DE ERRO PARA AS APROXIMAÇÕES DE GALERKIN DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da UFPE, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Miguel Fidencio Loayza Lozano

Co-orientador: Prof. Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva

Recife

2011

Catalogação na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc L. Salvador, CRB 4-572

Cruz, Felipe Wergete.
Estimativas de erro para as aproximações de Galerkin das equações de Navier-Stokes / Felipe Wergete Cruz.- Recife: O Autor, 2011.
iii, 68 f.; fig.

Orientador: Miguel Fidencio Loayza Lozano
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2011.

Inclui bibliografia e apêndice.

1.Análise matemática. 2.Galerkin – Métodos de. 3.Navier-Stokes, equações de. I. Lozano, Miguel Fidencio Loayza (orientador). II. Título.

515 (22.ed.) MEI 2011-015

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: ______________________________

Miguel Fidencio Loayza Lozano, UFPE
Orientador

____
Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva, UFPE

____
Fágner Dias Araruna, UFPB

ESTIMATIVAS DE ERRO PARA AS APROXIMAÇÕES DE GALERKIN DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

POR

Felipe Wergete Cruz

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro – 2011

Dedicatória

A minha mãe

Graça Wergete

Agradecimentos

- A Deus, pelo dom da vida e por mais uma realização de um sonho;
- Aos meus pais (Graça e Valdemir), minha irmã (Elise), meus “pais adotivos” (Claudinho e tia Dora) e a toda minha família que sempre me apoiaram;
- A Isabel (minha companheira de todas as horas);
- A Paulo Carneiro (meu ex-chefe; o homem mais digno e humano que conheci até hoje);
- A Jahdson / “Delegado” (pelos conselhos e apoios dados);
- Ao professor Miguel Loayza, pela orientação, dedicação e incentivo. Ao Professor Pablo Braz pela co-orientação;
- Aos professores da UNICAP: Cleto Bezerra de França e Vicente Francisco de Sousa Neto;
- A todos os professores (e ex-professores) do DMAT-UFPE. Em especial, aos professores Lucas Catão, Henrique Araújo, Cleide Martins, Giuseppe Borelli, Paulo Santiago, Sérgio Santa Cruz e Ramón Mendoza;
- Aos amigos do DMAT-UFPE, pelo bom convívio de sempre. Em especial, aos seguintes: Gabriel Coutinho, Jorge Rehn (“O físico”), Itacíra, Fábio Botler, Filipe Andrade, Filipe Santos (“Bibi”), José Luiz (“Lulu”), Valmir (“Kikinho”), Charlene, Leandro, Alejandro Caicedo, Thamires, Fábio, Clessius, Wanderson, Ricardo (“Medible”), Renato Teixeira, André Ventura (“Adventure”) e Murilo (“Mumu”);
- Ao CNPq, pelo apoio financeiro;
- À Universidade Federal de Pernambuco, à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática e à funcionária Tânia Maria M. Maranhão.

Epígrafe

“Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo,
qualquer um pode começar agora e fazer um novo fim ” (Chico Xavier)

Resumo

Nesta dissertação, são obtidas estimativas de erro para as aproximações de Galerkin da solução do problema de valor de fronteira de Navier-Stokes, as quais regem o escoamento de fluidos homogêneos, incompressíveis e viscosos. Provaremos que tais estimativas para as expansões das autofunções decrescem em proporção inversa aos autovalores do correspondente problema de valor de fronteira de Stokes.

Palavras-Chave: Aproximações de Galerkin; Estimativas de Erro; Navier-Stokes.

Abstract

In this work we obtained error bounds for Galerkin approximations to the solution of Navier-Stokes boundary value problem, which govern the drainage of the homogeneous, incompressible and viscous fluids. We prove that such estimates for the expansions of the eigenfunctions decrease in inverse proportion to the corresponding Stokes boundary value problem eigenvalues.

Key-Words: Galerkin approximations; Error Bounds; Navier-Stokes.

Sumário

Notações

A fim de não sobrecarregarmos as notações utilizadas nesta dissertação, faremos as seguintes convenções:

$\mathbf{D}(\Omega) = (\mathcal{D}(\Omega))^3$

$\mathbf{L}^p(\Omega) = (L^p(\Omega))^3$

$\mathbf{L}^\infty(\Omega) = (L^\infty(\Omega))^3$

$\mathbf{W}^{m,p}(\Omega) = (W^{m,p}(\Omega))^3$

$\mathbf{H}^m(\Omega) = \mathbf{W}^{m,2}(\Omega)$

$\mathbf{W}_0^{m,p}(\Omega) =$ fecho de $\mathbf{D}(\Omega)$ no espaço $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$

$\mathbf{H}_0^m(\Omega) = \mathbf{W}_0^{m,2}(\Omega)$

$E \hookrightarrow F$ (E continuamente imerso em F)

$u = (u_1, u_2, u_3)$ (campo vetorial definido em Ω)

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \frac{\partial u_2}{\partial x_i}, \frac{\partial u_3}{\partial x_i}\right)$$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right)$$

$\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \partial_t u = u_t = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_3}{\partial t}\right)$$

$$u\nabla u = \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

Introdução

A solução do problema de valor inicial e de fronteira de Navier-Stokes é, muitas vezes, investigada com a ajuda das aproximações de Galerkin que são, por sua vez, construídas sobre a base das autofunções do correspondente problema linear de valor de fronteira de Stokes. Uma vez que as propriedades gerais do problema de valor de fronteira de Stokes e de suas autofunções são relativamente bem conhecidas, pode-se perguntar quão bem uma solução do problema não estacionário de Navier-Stokes pode ser aproximada usando como base as autofunções do operador de Stokes.

Em geral, as estimativas de erro para as expansões das autofunções dependem, essencialmente, das estimativas em $\mathbf{L}^2$ para a primeira e a segunda derivadas parciais da função a ser extendida. Em 1978 , de forma muito elegante, John Heywood demonstrou, para as aproximações de Galerkin de uma solução de Navier-Stokes e para as suas derivadas com respeito ao tempo, que podem ser deduzidas estimativas de erro se as aproximações de Galerkin são formadas com as autofunções do correspondente problema de valor de fronteira de Stokes. As estimativas de erro, que são o objetivo do nosso trabalho, resultam de uma desigualdade diferencial com relação as respectivas normas da diferença de duas aproximações de Galerkin e de uma passagem ao limite.

Esta dissertação, que foi desenvolvida baseada no artigo de Rautmann [12], consta de dois capítulos e de um apêndice.

No primeiro capítulo, apresentamos, de forma sucinta, os espaços funcionais apropriados para a análise matemática do sistema de Navier-Stokes.

No segundo capítulo, concentra-se a parte substancial do nosso trabalho. Na Seção 1 estabelecemos as propriedades do problema de valor de fronteira de Stokes na medida em que vamos usá-las. As estimativas de erro para as expansões das autofunções (que são o ponto de partida da nossa investigação) são formuladas em conjunto com provas curtas na Seção 2 . Usando as estimativas dadas por Heywood em [8], citadas na Seção 3, provaremos nas seções 4 , 5 e 6 as estimativas de erro indicadas nos Teoremas 2.5, 2.6, 2.8 e no Corolário 2.2.

No Apêndice, fazemos uma dedução do modelo matemático para o escoamento de fluidos homogêneos, incompressíveis e viscosos, por meio de argumentos elementares e intuitivos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços Funcionais

1.1.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção, admitiremos que o leitor está familiarizado com o conceito de funções mensuráveis, medida de Lebesgue e funções integráveis à Lebesgue. Por Ω representa-se um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e por Γ sua fronteira. Será fixada em Ω a medida de Lebesgue dx. Para as demonstrações, consulte [1] e [11].

Representa-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das funções reais u definidas em Ω, mensuráveis cuja potência p, $|u|^p$, é integrável (à Lebesgue) em Ω, ou seja,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, u \text{ mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\},$$

o qual é um espaço de Banach munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Uma função u que é mensurável em Ω é dita essencialmente limitada em Ω se existe uma constante k tal que $|u(x)| \leq k$ q.s. em Ω. Por $L^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço das funções reais u, mensuráveis em Ω e que são essencialmente limitadas em Ω, onde usamos a notação q.s. em Ω para indicar que a propriedade $|u(x)| \leq k$ é válida, exceto, possivelmente, para x pertencente a algum subconjunto de Ω com medida nula.

Chama-se supremo essencial de u ao ínfimo do conjunto

$$\{k \in \mathbb{R}; |u(x)| \leq k \text{ q.s. em } \Omega\}$$

e o denotamos por

$$\sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|\,.$$

Mostra-se que $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|\,.$$

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{loc}(\Omega)$ se $u|_K \in L^p(\Omega)$ para todo compacto $K \subset \Omega$.

Apresentamos a seguir alguns resultados sobre os espaços L^p:

Teorema 1.1. *(Desigualdade de Hölder) Sejam $u \in L^p(\Omega)\,, v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $u.v \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |(uv)(x)|\; dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema 1.2. *(Desigualdade de Hölder Generalizada) Sejam $u_1, ..., u_k$ funções tais que $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, ..., k$, com $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1$. Então o produto $u = u_1...u_k \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)}...\|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Teorema 1.3. *(Desigualdade da Interpolação) Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$ então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e se tem a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^\theta_{L^p(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}\,,$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ verifica $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Definição 1.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e u uma função definida em Ω com valores em $\mathbb{R}$. Consideremos a família de todos os abertos $(\omega_i)_{i\in I}\,, \omega_i \subset \Omega$ tais que para cada

$i \in I\,, u = 0$ q.s. em ω_i. Seja $\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$. Então $u = 0$ q.s. em ω. Definimos e representamos o suporte de u por

$$supp\, u = \Omega \setminus \omega$$

Sejam u e v funções reais mensuráveis definidas no $\mathbb{R}^n$. Definimos a convolução $u * v$ das funções u e v por

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x-y)dy\,.$$

Temos o seguinte resultado (também conhecido como Desigualdade de Young):

Teorema 1.4. *Sejam $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, e r o número real verificando $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$. Então $u * v \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|u * v\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Além disso,

$$supp(u * v) \subset supp\, u + supp\, v\,.$$

Teorema 1.5 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja (u_k) uma sequência de funções de $L^1(\Omega)$. Suponhamos que*

(i) $u_k(x) \xrightarrow{k\to\infty} u(x)$ *quase sempre em* Ω,

(ii) Existe uma função $v \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_k(x)| \leq v(x)$ quase sempre em $\Omega, \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Então, $u \in L^1(\Omega)$ e $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k(x) - u(x)|\, dx = 0.$

O próximo teorema afirma que toda forma linear e contínua φ sobre $L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$ se representa por meio de uma função u de $L^{p'}(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Diz também que a aplicação $\varphi \longmapsto u$ é um operador linear isométrico e sobrejetivo; permitindo, assim, identificar o dual de $L^p(\Omega)$ com $L^{p'}(\Omega)$. Sua demonstração pode ser encontrada em [3].

Teorema 1.6. *(Representação de Riesz) Suponhamos que* $1 < p < \infty$ *e* $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. *Então existe uma única* $u \in L^{p'}(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega u(x) f(x) dx, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Mais ainda,

$$\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

1.1.2 Espaços $\mathcal{D}(\Omega)$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções reais definidas em Ω, com suporte compacto, possuindo em Ω derivadas parciais contínuas de todas as ordens, ou seja,

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega);\ u \text{ possui suporte compacto em } \Omega\}.$$

Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Prova-se que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

Os elementos da forma $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ são denominados multi-índices e a ordem de um multi-índice α é denotada e definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ define-se

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_n^{\alpha_n} \text{ e } \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

Por D^α denota-se o operador de derivação de ordem α definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e para $\alpha = (0, \dots, 0)$ define-se $D^0 u = u$ para toda funcção u. Por D_i, para $i = 1, 2, \dots, n$, representa-se a derivação parcial $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

Dizemos que uma sequência (φ_k) de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero em $C_0^\infty(\Omega)$ quando as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Os suportes de todas as funções testes φ_k, da sequência dada, estão contidos num compacto fixo K de Ω.

(ii) Para cada multi-índice α, a sequência $(D^\alpha \varphi_k)$ converge para zero uniformemente em K.

Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, dizemos que a sequência (φ_k) de elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando a sequência $(\varphi_k - \varphi)$ converge para zero no sentido dado acima. O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com esta noção de convergência é denominado de *espaço das funções testes em* Ω e é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

1.1.3 Definição de Distribuição sobre um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$

Nesta seção, apresentamos um breve resumo da teoria das distribuições. As afirmações mencionadas encontram-se demonstradas em [1] e [11].

Dizemos que T é uma **distribuição** sobre Ω se T for um funcional linear definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ contínuo no sentido da convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$, ou seja, para toda sequência (φ_k) de $\mathcal{D}(\Omega)$ que converge para zero em $\mathcal{D}(\Omega)$, a sequência $(\langle T, \varphi_k\rangle)$ converge para zero em $\mathbb{R}$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Neste espaço, diz-se que uma sequência (T_k) de vetores de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para zero em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando para toda função teste $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a sequência $(\langle T_k, \varphi\rangle)$ converge para zero em $\mathbb{R}$. Neste caso, escrevemos $\lim\limits_{k\to\infty} T_k = 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dizemos que

$$\lim_{k\to\infty} T_k = T \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega),$$

quando $\lim\limits_{k\to\infty} (T_k - T) = 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1.1. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Considere a forma linear $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx\,, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Mostra-se sem dificuldades que T_u é uma distribuição sobre Ω.

Teorema 1.7. *(Lema de Du Bois Raymond) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ q.s. em Ω.*

Observação 1.1. *Segue-se, do Lema de Du Bois Raymond, que para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, tem-se T_u univocamente determinada por u sobre Ω, quase sempre, no seguinte sentido:*

se u, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω. Por esta razão, identifica-se u com a distribuição T_u por ela definida e diz-se a distribuição u ao invés de dizer a distribuição T_u.

Exemplo 1.2. Seja $x_0 \in \Omega$ e δ_{x_0} o funcional linear definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ do seguinte modo:

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0) \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

É fácil mostrar que δ_{x_0} é uma distribuição sobre Ω. Esta distribuição é denominada **distribuição de Dirac** ou **medida de Dirac** concentrada em x_0. Quando $x_0 = 0$ escreve-se δ_0.

Mostra-se que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função u de $L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(x_0)\,, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.2. *Da desigualdade de Hölder, é fácil ver que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ se $1 \leq p \leq \infty$. Portanto diremos que uma distribuição T pertence a $L^p(\Omega)$ se existir $u \in L^p(\Omega)$ tal que $T = T_u$.*

Observação 1.3. *Das definições anteriores temos a seguinte cadeia, para $1 \leq p < \infty$,*

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

sendo cada inclusão densa na seguinte.

Considere $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e α um multi-índice, i.e., $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T é, por definição, o funcional linear $D^\alpha T$ definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Mostra-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω. Portanto, as distribuições possuem derivadas de todas as ordens. Em particular, as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Para $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, diremos que $D^\alpha T_u$ é uma *derivada fraca* de u. Caso exista $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $T_{v_\alpha} = D^\alpha(T_u)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$,ou seja,

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha(x)\varphi(x)\, dx\ , \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ ,$$

diremos que $D^\alpha u = v_\alpha$ e que v_α é uma *derivada fraca* de u. Prova-se que a aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\mapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{k\to\infty} T_k = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{k\to\infty} D^\alpha T_k = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Exemplo 1.3. Considere a função de Heaviside $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Ela pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. De fato, tem-se

$$\langle u', \varphi\rangle = -\langle u, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

Observação 1.4. *O exemplo acima nos mostra que a derivada de uma função de* $L^1_{loc}(\Omega)$, **não** *é, em geral, uma função de* $L^1_{loc}(\Omega)$. *Este fato motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de Espaços de Sobolev.*

1.1.4 Espaços de Sobolev

Nesta seção, iremos definir e apresentar algumas propriedades importantes dos espaços de Sobolev. Usaremos esses espaços para encontrar *soluções* de algumas equações diferenciais parciais. As afirmações citadas, a seguir, encontram-se demonstradas em [1], [3], [6] e [11].

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Vimos, na seção anterior, que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivada de todas as ordens no sentido das distribuições. Vimos, também, que $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ for definida por uma função de $L^p(\Omega)$, define-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada de u no sentido das distribuições, ou seja,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ satisfazendo } |\alpha| \leq m\}.$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ define-se a norma de u por

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \text{se } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} ess |D^\alpha u(x)|.$$

Mostra-se que a função $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$, $1 \leq p \leq \infty$, é uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$. Os espaços normados $W^{m,p}(\Omega)$ são denominados *espaços de Sobolev*. Mais geralmente, mostra-se que o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Os espaços $W^{m,2}(\Omega)$ são também denotados por $H^m(\Omega)$ e neste caso $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u,\, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

para todo $u, v \in H^m(\Omega)$.

Definição 1.2. Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ no espaço $W^{m,p}(\Omega)$.

Assim, por definição, $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $W_0^{m,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$ escreve-se $H_0^m(\Omega)$ no lugar de $W_0^{m,2}(\Omega)$.

Observação 1.5. *Para qualquer m temos a seguinte cadeia óbvia*

$$W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

Temos também os seguintes resultados

Proposição 1.8. *Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, o complemento de Ω no $\mathbb{R}^n$ possui medida de Lebesgue igual a zero.*

Observação 1.6. *Resulta da proposição acima que se o complemento de Ω possui medida positiva, tem-se $W_0^{m,p}(\Omega) \neq W^{m,p}(\Omega)$. Em particular, se Ω é um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, tem-se $W_0^{m,p}(\Omega) \neq W^{m,p}(\Omega)$. No caso extremo $\Omega = \mathbb{R}^n$, tem-se $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, como uma consequência do seguinte teorema:*

Teorema 1.9. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso no $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Proposição 1.10. *Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e possui suporte compacto, então $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Definição 1.3. Suponha $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. O conjunto $W^{-m,q}(\Omega)$ é definido como sendo o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Sejam $f \in W^{-m,q}(\Omega)$ e (φ_k) uma sequência de funções testes em Ω tal que $\varphi_k \to 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Resulta que $\varphi_k \to 0$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$, portanto, $\langle f, \varphi_k \rangle \to 0$, o que nos permite concluir que a restrição de f a $\mathcal{D}(\Omega)$ é uma distribuição. Considere a aplicação linear

$$\sigma : W^{-m,q}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

definida por $\sigma(f) = f|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ para toda f em $W^{-m,q}(\Omega)$. Por ser $\mathcal{D}(\Omega)$ denso em $W_0^{m,q}(\Omega)$ resulta que σ é injetora. Também se (f_k) é uma sequência de vetores de $W^{-m,q}(\Omega)$ tal que $f_k \to 0$ em $W^{-m,q}(\Omega)$ então $\sigma(f_k) \to 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, isto é, σ é contínua. A aplicação σ permite identificar $W^{-m,q}(\Omega)$ a um subespaço vetorial de $\mathcal{D}'(\Omega)$ e com esta identificação tem-se

$$W^{-m,q}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Quando se diz que uma distribuição T pertence a $W^{-m,q}(\Omega)$, significa dizer que T, definida em $\mathcal{D}(\Omega)$, pode ser estendida como um funcional linear contínuo ao espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$. Esta extensão contínua é representada por T. Tem-se o seguinte teorema de caracterização

Teorema 1.11. *Seja T uma distribuição sobre Ω, então $T \in W^{-m,q}(\Omega)$ se, e somente se, existem funções $g_\alpha \in L^q(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, tais que*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha \ .$$

Definição 1.4. (Aplicação canônica) Sejam E um espaço de Banach e E'' seu bidual, i.e., o dual de E'. Existe uma aplicação canônica $J : E \to E''$ definida como segue: seja $x \in E$ fixo. A aplicação $f \mapsto \langle f, x \rangle$ de E' em $\mathbb{R}$ é uma forma linear contínua sobre E', i.e., um elemento de E''. Assim,

$$\langle Jx, f \rangle = \langle f, x \rangle \quad \forall x \in E \;\text{ e }\; \forall f \in E'.$$

Claramente J é uma isometria linear, i.e. , $\|Jx\| = \|x\| \;\; \forall x \in E$.

Definição 1.5. (Espaço reflexivo) Sejam E um espaço de Banach e J a aplicação canônica de E em E''. Dizemos que E é reflexivo se $J(E) = E''$, ou seja, se J for sobrejetiva.

Definição 1.6. (Convergência fraca) Dizemos que uma sequência (x_n) em um espaço normado X converge fracamente para x se

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \;\; \forall f \in X'.$$

Enunciaremos, agora, dois importantes resultados à respeito da reflexividade de espaços de Banach.

Proposição 1.12. *Se $1 < p < \infty$, entao $L^p(\Omega)$ é reflexivo.*

Proposição 1.13. *(Teorema de Alaoglu-Bourbaki) Um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, toda sequência limitada de vetores de E possui uma subsequência fracamente convergente.*

Teorema 1.14. *Se $1 < p < \infty$, entao $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo.*

Teorema 1.15. *(Desigualdade de Poincaré) Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante C (dependendo apenas de Ω) tal que*

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \le C \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx, \;\; \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Observação 1.7. *Note que $(u, v) := \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x) dx$ não define um produto interno em $H^1(\Omega)$ pois podemos ter $(u, u) = 0$ sem que u seja nula (por exemplo,*

u = constante). Mas, usando a desigualdade de Poincaré, vemos que $(u,\, v)_{H_0^1} := \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx$ define um produto interno em $H_0^1(\Omega)$. Assim

$$\|u\|_{H_0^1} := \left[\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\right]^{1/2}$$

define uma norma em $H_0^1(\Omega)$ que é equivalente à de $H^1(\Omega)$ restrita à $H_0^1(\Omega)$, quando Ω é limitado.

Definição 1.7. Por $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ representa-se a restrição a $\overline{\Omega}$ das funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e por $C_0^m(\overline{\Omega})$ a restrição a $\overline{\Omega}$ das funções de $C^m(\mathbb{R}^n)$ que possuem suporte compacto.

Definição 1.8. Seja $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. O conjunto $\mathbb{R}^n_+$ é o semi espaço definido por

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n / x_n > 0\}.$$

Proposição 1.16. *$\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ é denso em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$, sendo $1 \leq p < \infty$.*

Proposição 1.17. *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ e de classe C^m (ou seja, a fronteira Γ de Ω é uma variedade de classe C^m de dimensão $n-1$ e Ω está localmente de um mesmo lado de Γ). Então $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$, sendo $1 \leq p < \infty$.*

1.1.5 Imersões de Espaços de Sobolev

Enunciaremos, através de alguns teoremas, a relação entre os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e certos espaços clássicos de funções em $\mathbb{R}^n$. Faremos isso em três casos:

1. $n \geq 2$ e $1 \leq p < \infty$
2. $n = 1$ e $1 \leq p < \infty$
3. $n \geq 1$ e $p = \infty$

O primeiro caso será dividido em três partes: $mp < n$, $mp = n$ e $mp > n$.

Teorema 1.18. *(Caso 1 com $mp < n$) Sejam $1 \leq p < \infty$, $mp < n$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$. Então $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ está contido em $L^q(\mathbb{R}^n)$ e se verifica*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq (\frac{C_0}{n})^m \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right),$$

para todo $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, *onde* $C_0 = \frac{(n-1)p}{(n-p)}$.

Corolário 1.1. *Seja* $1 \leq p < \infty$ *e* $mp < n$. *Se* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ *ou* $p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$, *então*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n).$$

Corolário 1.2. *Se* $1 \leq p < \infty, mp < n$ *e* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ *então*

$$W^{m+k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{k,q}(\mathbb{R}^n)$$

para todo k *inteiro não negativo.*

Teorema 1.19. *(Caso* 1 *com* $mp = n$*) Seja* $1 \leq p < \infty, mp = n$ *e* $q \in [p, \infty)$. *Então*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n).$$

Observação 1.8. *No caso* $p = 1$ *tem-se o resultado suplementar* $W^{n,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n)$, *onde* $C_b^0(\mathbb{R}^n)$ *é o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas em* $\mathbb{R}^n$ *com valores em* $\mathbb{R}$, *equipado com a norma do supremo em* $\mathbb{R}^n$.

Antes do próximo teorema daremos algumas definições.

Definição 1.9. O conjunto $C_b^k(\mathbb{R}^n)$, k inteiro não negativo, é o espaço de Banach das funções $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^k, limitadas assim como todas suas derivadas até a ordem k, equipado com a norma

$$\|u\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|,$$

e denota-se por $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n), 0 < \lambda \leq 1$, o espaço de Banach das funções $u \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$ tais que u e todas suas derivadas até a ordem k são Hölderianas com expoente λ em $\mathbb{R}^n$, mais precisamente,

$$\max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x - y\|^\lambda} < \infty \quad (x \neq y)\,,$$

equipado com a norma

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} + \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x - y\|^\lambda} \quad (x \neq y)\,.$$

Observação 1.9. *Claramente* $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n)$. *Tem-se também que*

$$C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k,\sigma}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{se} \quad 0 < \sigma < \lambda.$$

Teorema 1.20. *(Caso 1 com $mp > n$) Seja $k < m - \frac{n}{p} \leq k + 1$, k um inteiro não negativo. Então*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

onde

(a) $0 < \lambda \leq m - k - \frac{n}{p}$ *se* $m - k - \frac{n}{p} < 1$

(b) $0 < \lambda < 1$ *se* $m - k - \frac{n}{p} = 1$

Observação 1.10. *Quando se diz que se $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, $k < m - \frac{n}{p} \leq k + 1$, então $u \in C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ significa dizer que u, depois de uma eventual modificação num conjunto de medida nula de $\mathbb{R}^n$, transforma-se numa função pertencente a $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.*

Corolário 1.3. *Sob as hipóteses do teorema anterior, tem-se:*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 1.21. *(caso 2) Tem-se com $m \geq 1$:*

(a) $W^{m,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\mathbb{R})$ *com* $0 < \lambda \leq 1 - \frac{1}{p}$ *se* $p > 1$

(b) $W^{m,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_b^{m-1}(\mathbb{R})$ *se* $p = 1$

Teorema 1.22. *(caso 3) Tem-se para $n \geq 1$ e $m \geq 1$:*

$$W^{m,\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n).$$

1.1.6 Imersões dos Espaços $W^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.10. O conjunto $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ é definido como sendo o espaço de Banach das restrições a $\overline{\Omega}$ das funções pertencentes a $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, equipado com a norma

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)| + \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x,y \in \overline{\Omega}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x - y\|^\lambda} \quad (x \neq y)\,.$$

Teorema 1.23. *(Imersões contínuas) Sejam Ω um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, Ω de classe C^m e $1 \leq p < \infty$. Então*

(a) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \frac{np}{n-mp} = p^*$ *se* $mp < n$

(b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$ *e* $mp = n$

(c) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ *se* $mp > n$.

No caso (c), k *é um inteiro verificando* $k < m - \frac{n}{p} \leq k+1$ *e* λ *um real satisfazendo* $0 < \lambda \leq m - k - \frac{n}{p} = \lambda_0$ *se* $\lambda_0 < 1$ *e* $0 < \lambda < 1$ *se* $\lambda_0 = 1$.

1.1.7 O Espaço $L^p(I, X)$

As definições e os resultados desta seção podem ser encontrados em [4].

Sejam I um intervalo da reta e X um espaço de Banach. Denotaremos por $C_0^\infty(I, X)$ o espaço de todas as funções $f : I \to X$ que têm suporte compacto tais que $f \in C^\infty$.

Definição 1.11. Sejam $p \in [1, +\infty]$, Denotamos por $L^p(I, X)$ o conjunto de todas as (classes de) funções mensuráveis $f : I \to X$ tais que a função $t \to \|f(t)\|_X$ pertence a $L^p(I)$. Para $f \in L^p(I, X)$, definimos

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \left(\int_I \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \quad \text{se} \quad p < +\infty,$$

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \sup_{t \in I} ess \|f(t)\|_X, \quad \text{se} \quad p = +\infty.$$

Como no caso dos espaços L^p, denotamos por $L^p_{loc}(I, X)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : I \to X$ tais que $f|_J \in L^p(J, X)$ para todo sub-intervalo limitado J de I. O espaço $L^p(I, X)$ herda a maioria das propriedades do espaço $L^p(I) = L^p(I, \mathbb{R})$, com provas análogas ou aplicando-se os resultados clássicos à função $F(t) = \|f(t)\|_X$. Em particular, obtem-se os seguintes resultados.

1. **(Completitude)** O espaço $L^p(I, X)$ é Banach munido da norma $\| \cdot \|_{L^p(I,X)}$.

2. **(Densidade)** Se $p \in [1, +\infty)$, então $C_0^\infty(I, X)$ é denso em $L^p(I, X)$.

3. **(Desigualdade de Hölder)** Se $f \in L^p(I, X)$ e $\varphi \in L^q(I)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$, então $\varphi f \in L^r(I, X)$ e $\|\varphi f\|_{L^r(I,X)} \leq \|\varphi\|_{L^q(I)} \|f\|_{L^p(I,X)}$. Em particular, $L^p(I, X) \subset L^p_{loc}(I, X)$.

4. **(Teorema da Convergência Dominada)** Sejam $(f_k) \subset L^p(I, X)$, $g \in L^p(I)$ e $p \in [1, +\infty)$. Se $\|f_k(t)\|_X \leq g(t)$ para quase todo $t \in I$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{k \to +\infty} f_k(t)$ existe para quase todo $t \in I$, então $f(t) := \lim\limits_{k \to +\infty} f_k(t) \in L^p(I, X)$ e $\lim\limits_{k \to +\infty} \|f_k(t) - f(t)\|_{L^p(I,X)} = 0$.

5. **(Lema de Du Bois-Raymond)** Se $f \in L^1_{loc}(I, X)$ é tal que
$$\int_I f(t)\varphi(t)dt = 0, \ \forall\, \varphi \in C_0(I).$$
Então, $f = 0$ quase sempre em I.

6. **(Teorema Fundamental do Cálculo)** Seja $g \in L^1_{loc}(I, X)$, $t_0 \in I$ e $f \in C(I, X)$ definida por $f(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} g(t)dt$, para $t \in I$. Então, f é diferenciável quase sempre e $f' = g$ quase sempre.

7. **(Reflexibilidade)** Se $1 < p < \infty$, então $L^p(I, X)$ é reflexivo.

1.2 Resultados Mais Utilizados

Proposição 1.24. *Seja M um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert H. Dada $f \in H$ e $P : H \to M$ uma projeção ortogonal, então $P(f)$ é caracterizada por*
$$(f - P(f), v) = 0 \ \ \forall\, v \in M.$$

Demonstração. Ver [3], Corolário V.4, pág. 80. ■

Corolário 1.4. *Com as mesmas hipóteses da proposição acima, temos:*
$$|P(f)|_H \leq |f|_H.$$

Demonstração. Tomando $v = P(f)$ concluímos, da Proposição acima, que
$$(f - P(f)\, , P(f)) = 0 \Rightarrow |P(f)|^2_H \, = \, (f\, , P(f))\, .$$
Logo, pela desigualdade de Cauchy Schwarz, obtemos:
$$|P(f)|^2_H \leq |f|_H\, |P(f)|_H\, .$$
Disto segue o resultado. ■

Teorema 1.25 (Fórmulas de Green). *Suponhamos que Ω seja um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave. Se $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ então*

$$\text{(i)} \int_\Omega \nabla v \nabla u \, dx = -\int_\Omega u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u \, dS \,,$$

$$\text{(ii)} \int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS \,,$$

onde $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ *é a derivada direcional na direção de* ν, *onde* ν *é o vetor normal exterior.*

Demonstração. Ver [6], Teorema 3, pág. 628. ■

Observação. A identidade *(i)* também é válida se $u \in H^1(\Omega)$ e $v \in H^2(\Omega)$; e *(ii)* é também válida se $u, v \in H^2(\Omega)$.

Enunciaremos a seguir, algumas desigualdades que serão úteis no decorrer do nosso trabalho. Para melhores detalhes, inclusive as demonstrações, consultar, respectivamente, as seguintes referências: [13] Teorema 4.17 pág. 85, [13] Teorema 4.18 pág. 85, [5] Teorema da pág. 311, [7] pág. 27, [3] Teorema IV.6 pág. 56 .

Proposição 1.26. *(a) (Desigualdade de Bessel) Seja H um espaço de Hilbert. Se $\{u_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é um conjunto ortonormal em H, então, para cada $u \in H$ tem-se*

$$\sum_{\alpha \in J} (u_\alpha, u)^2 \leq |u|^2.$$

(b)(Identidade de Parseval) Seja H um espaço de Hilbert. Então, para todo $u \in H$ tem-se

$$|u|^2 = \sum_{\alpha \in J} (u_\alpha, u)^2,$$

onde $\{u_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é um conjunto ortonormal completo de H.

(c) (Desigualdade de Cattabriga) Seja $f \in \mathbf{H}^2(\Omega)$. Então

$$|f|_{\mathbf{H}^2} \leq C |P\Delta f|_{\mathbf{L}^2} \,,$$

onde $-P\Delta$ é o operador de Stokes.

(d) Seja $G \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. Então

$$|G|_{\mathbf{L}^3} \leq C \left(|\nabla G|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2} |G|^{\frac{1}{2}}_{\mathbf{L}^2} + |G|_{\mathbf{L}^2} \right) .$$

Além disso, note que se substituirmos G por ∇g no resultado desta proposição e usarmos a desigualdade de Cattabriga obtemos

$$|\nabla g|_{\mathbf{L}^3} \leq C|P\Delta g|_{\mathbf{L}^2}\,. \tag{1.1}$$

(e) (Desigualdade de Young) Sejam $a, b > 0$ e $1 < p, q < \infty$ tais que $1/p + 1/q = 1$. Então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,.$$

Proposição 1.27. *Sejam E um espaço de Banach e (x_n) uma sequência em E. Se x_n converge fracamente para x em E, então $|x_n|_E$ é limitada e*

$$|x|_E \leq lim\,inf\,|x_n|_E.$$

Demonstração. Ver [3], Proposição III.5, pág.35. ■

Teorema 1.28. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja (x_n) uma sequência limitada em E. Então, existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge fracamente em E.*

Demonstração. Ver [3], Teorema III.27, pág.50. ■

Proposição 1.29 (Regra de Leibniz). *Suponhamos que Ω seja um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Se $f\,, g\, \in\, W^{k,p}\,(\Omega)\,,\ |\alpha| \leq k\,,$ então:*

$$D^\alpha\,(fg) = \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta\, f\, D^{\alpha-\beta}\, g\,.$$

Demonstração. Ver [6], Teorema 1, pág. 247. ■

Lema 1.1 (Desigualdade de Gronwall). *Sejam $g\,, v$ e $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, tais que $g\,, v$ são funções contínuas em $[a\,, b]$ e $h \geq 0$ uma função integrável em $[a\,, b]$. Suponha que*

$$v(t) \leq g(t) + \int_0^t h(\tau)\, v(\tau)\, d\tau \ \ sobre\ [a\,, b]\,.$$

Então

$$v(t) \leq g(t) + \int_0^t g(\tau)\, h(\tau)\, e^{H(t)-H(\tau)}\, d\tau \ \ sobre\ [a\,, b]\,,$$

onde

$$H(t) = \int_0^t h(\tau)\, d\tau\,.$$

Demonstração. Ver [15], pág. 14. ■

Proposição 1.30 (Desigualdade de Sobolev)**.** *Como caso particular do Teorema de Imersão de Sobolev, temos*

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^6(\Omega)$$

e

$$|f|_{\mathbf{L}^6} \leq C|f|_{\mathbf{H}^1} \leq K|\nabla f|_{\mathbf{L}^2}.$$

Observação 1.11. *Pela desigualdade de Hölder para $f \in \mathbf{L}^6$ e $\nabla g \in \mathbf{L}^3$, temos:*

$$|f\,\nabla g|_{\mathbf{L}^2} \leq |f|_{\mathbf{L}^6}\,|\nabla g|_{\mathbf{L}^3}.$$

Pela desigualdade de Sobolev (1.30) e por (1.1), segue que

$$|f\,\nabla g|_{\mathbf{L}^2} \leq c|\nabla f|_{\mathbf{L}^2}\,|P\Delta g|_{\mathbf{L}^2}\,. \tag{1.2}$$

Capítulo 2

Taxas de Convergência das Soluções Aproximadas do Problema Não Estacionário de Navier-Stokes

2.1 Problema de Valor de Fronteira de Stokes

Seja Ω um subconjuto aberto limitado do $\mathbb{R}^3$ com pontos $x = (x_1, x_2, x_3)$. Assumiremos que a fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ é de classe C^3. No que segue, adotaremos a seguinte notação:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \text{ e } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

que representam, respectivamente, o gradiente e o operador Laplaciano de uma determinada função vetorial. Além disso, se $u = (u_1, u_2, u_3)$ é um campo vetorial definido em Ω, o divergente de u, div u, é definido por

$$\text{div } u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

Representamos por $\mathbf{H}$ o fecho de $\mathcal{V} = \{u \in \mathbf{D}(\Omega);\ \text{div } u = 0 \text{ em } \Omega\}$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e por $\mathbf{V}$ o fecho de $\mathcal{V}$ em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Proposição 2.1. *Os espaços* $\mathbf{H}$ *e* $\mathbf{V}$ *mencionados acima são caracterizados por:*

$$\mathbf{H} = \left\{v \in \mathbf{L}^2(\Omega);\ \text{div}\, v = 0\ , v.\nu\ |_\Gamma = 0\right\}\ , \mathbf{V} = \left\{v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega);\ \text{div}\, v = 0\right\}\ .$$

Demonstração. Ver [14], Teoremas 1.4 e 1.6, páginas 15 e 18, respectivamente. ■

Proposição 2.2. *O complemento ortogonal de* $\mathbf{H}$ *em* $\mathbf{L}^2(\Omega)$ *é caracterizados por:*

$$\mathbf{H}^{\perp} = \left\{ v \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \, v \, = \, \nabla p \, , \, p \in H^1(\Omega) \right\} \, .$$

Demonstração. Ver [14], Teorema 1.4, página 15. ■

Observação 2.1. *Note que* $\mathbf{L}^2(\Omega) \, = \, \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}^{\perp}$.

Consideremos, inicialmente, o problema que consiste em determinar as funções v definida em $\mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ e $q \in H^1(\Omega)$ satisfazendo as condições:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v + \nabla q & = & h & \text{em } \Omega \, , \\ \text{div } v & = & 0 & \text{em } \Omega \, , \\ v & = & 0 & \text{em } \Gamma \, , \end{array} \right. \tag{2.1}$$

sendo $h(x) = (h_1(x), h_2(x), h_3(x)) \in \mathbf{H}$ uma função conhecida. Este problema é denominado **problema de valor de fronteira de Stokes** (este sistema, é o modelo linearizado do movimento de um fluido incompressível viscoso com velocidade v, confinado ao reservatório Ω, em regime permanente, submetido a uma densidade volumétrica de forças h. A função q é a pressão do fluido e estamos considerando que a sua viscosidade é igual a 1).

Considere a projeção ortogonal

$$P : \mathbf{L}^2(\Omega) \to \mathbf{H} \, .$$

Pela Proposicão 2.2, temos que $P(\nabla f) = 0 \ \ \forall \, f \in H^1(\Omega)$. Assim, se $q \in H^1(\Omega)$ e $h \in \mathbf{H}$, ao aplicarmos a projeção P em ambos os lados da equação $-\Delta v + \nabla q = h$ obtemos: $-P\Delta v = h$. Assim, o problema de valor de fronteira de Stokes toma a seguinte forma: Dada a função $h \in \mathbf{H}$, procuramos por uma solução $v \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ da equação

$$-P\Delta v = h. \tag{2.2}$$

As propriedades fundamentais do operador $-P\Delta$ **(operador de Stokes)** serão enunciadas a seguir.

Lema 2.1. *A aplicação* $-P\Delta : \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega) \to \mathbf{H}$ *define em* $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ *um operador simétrico definido positivo tendo inverso* $(-P\Delta)^{-1} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ *compacto.*

Demonstração. Ver [12], Lema 1.1, pág. 427. ■

Lema 2.2. *O operador* $-P\Delta$ *possui uma sequência de autovalores positivos* $\lambda_i > 0$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$, $\lambda_i \to \infty$ *e as correspondentes autofunções* $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *formam um conjunto ortonormal completo em* $\mathbf{H}$.

Demonstração. Ver [12], Lema 1.2, pág. 428. ■

Definição 2.1. Por $\mathbf{H}_m$ denotaremos o subespaço $m-$ dimensional de $\mathbf{H}$ gerado pelas m primeiras autofunções $e_1, \ldots, e_m$ do operador de Stokes, ou seja,

$$-P\Delta e_i = \lambda_i e_i \,. \tag{2.3}$$

Por P_m denotaremos a projeção ortogonal de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ em $\mathbf{H}_m$, isto é, se $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, então

$$P_m f = \sum_{i=1}^{m} \left(\int_\Omega f \, e_i \right) e_i \,.$$

Lema 2.3. *As funções* $\left(\dfrac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right)$ *formam um conjunto ortonormal completo em* $\mathbf{V}$ *e para qualquer* $f \in \mathbf{V}$ *a sequência* $(P_i f)$ *converge para* f *em* $\mathbf{V}$.

Demonstração. Ver [12], Lema 1.3, pág. 428. ■

Estabelecemos a regularidade das autofunções (e_i) no

Lema 2.4. *Suponha que* $\Gamma = \partial\Omega$ *é de classe* $C^m, m \geq 2$. *Então as autofunções* e_i *do operador de Stokes pertencem à* $\mathbf{H}^m(\Omega)$.

Demonstração. Ver [14], pág. 39. ■

Observação 2.2. *A igualdade*

$$\int_\Omega (-P\Delta f) g = \int_\Omega (\nabla f)(\nabla g) \tag{2.4}$$

é válida para qualquer $f \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ *e qualquer* $g \in \mathbf{V}$.

Demonstração. De fato, como $f \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ temos que $-\Delta f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Logo, podemos escrever

$$-\Delta f = v + \nabla u\,,$$

onde $v \in \mathbf{H}$ e $\nabla u \in \mathbf{H}^{\perp}$, uma vez que $\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}^{\perp}$. Disto segue que $-P\Delta f = v$. Assim, temos que

$$P\Delta f = \Delta f + \nabla u\,.$$

Como $g \in \mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ e $\nabla u \in \mathbf{H}^{\perp}$ segue que $(\nabla u\,,\, g)_{\mathbf{L}^2} = 0$. Portanto

$$(P\Delta f, g)_{\mathbf{L}^2} = (\Delta f, g)_{\mathbf{L}^2}\,, \quad \forall\, g \in \mathbf{V}\,. \tag{2.5}$$

Já pela fórmula de Green (Teorema 1.25 (i)), como $g\,|_{\partial\Omega}= 0$, temos que

$$(g, \Delta f)_{\mathbf{L}^2} = -\,(\nabla f\,, \nabla g)_{\mathbf{L}^2}\,. \tag{2.6}$$

De (2.5) e (2.6) segue que

$$(P\Delta\, f\,,\, g)_{\mathbf{L}^2} = -\,(\nabla f\,, \nabla g)_{\mathbf{L}^2}$$

como queríamos. ■

2.2 Estimativas de Erro para as Expansões em Termos das Autofunções do Problema de Valor de Fronteira de Stokes

Se aproximarmos os pontos de $\mathbf{V}$ por suas projeções no espaço $\mathbf{H}_m$, podemos estimar os erros de acordo com os seguintes lemas:

Lema 2.5. *Suponha que $f \in \mathbf{V}$. Então vale a seguinte estimativa de erro*

$$|f - P_m f|^2_{\mathbf{L}^2} \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} |\nabla f|^2_{\mathbf{L}^2} \tag{2.7}$$

Demonstração. Sabemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (-P\Delta f)\, g &= \int_\Omega \nabla f\, \nabla g \quad ,\forall\, f \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega),\, g \in \mathbf{V}\,,\\
-P\Delta e_i &= \lambda_i e_i\,,\\
\lambda_i &\geq \lambda_{m+1}\,, \ \text{se } i \geq m+1\,.
\end{aligned}$$

Assim, para $i \geq m+1$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega f\, e_i\right)^2 &= \left[\int_\Omega f\left(\frac{-P\Delta e_i}{\lambda_i}\right)\right]^2 &&= \frac{1}{\lambda_i^2}\left[\int_\Omega f\,(-P\Delta e_i)\right]^2 \\
&= \frac{1}{\lambda_i^2}\left[\int_\Omega (-P\Delta f)\, e_i\right]^2 &&= \frac{1}{\lambda_i^2}\left[\int_\Omega \nabla f\, \nabla e_i\right]^2 \\
&= \frac{1}{\lambda_i}\left[\int_\Omega \nabla f\, \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right]^2 &&\leq \frac{1}{\lambda_{m+1}}\left[\int_\Omega \nabla f\, \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right]^2 .
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Seja $f_m = f - P_m f$. Como $f \in \mathbf{V} \subset \mathbf{H}$, segue do Lema 2.2 que

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\, e_i\, ,$$

onde $\alpha_i = \displaystyle\int_\Omega f\, e_i$. Logo, $f_m = \displaystyle\sum_{i=m+1}^{\infty}\left(\int_\Omega f\, e_i\right) e_i$. Pela Identidade de Parseval, temos que

$$|f_m|^2_{\mathbf{L}^2} = \sum_{i=m+1}^{\infty}\left(\int_\Omega f e_i\right)^2 . \tag{2.9}$$

Como $f \in \mathbf{V}$, temos que

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i\, \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \ \text{ onde } \gamma_i = \left(f, \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)_{\mathbf{V}} = \int_\Omega \nabla f\, \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) ,$$

pois $\left(\dfrac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)$ é um conjunto ortonormal completo em $\mathbf{V}$, pelo Lema 2.3.

De (2.9), (2.8) e da Desigualdade de Bessel, concluimos

$$\begin{aligned}
|f_m|^2_{\mathbf{L}^2} &= \sum_{i=m+1}^{\infty}\left(\int_\Omega f\, e_i\right)^2 \\
&\leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \sum_{i=m+1}^{\infty}\left[\int_\Omega \nabla f\, \nabla\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right]^2 \\
&\leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} |f|^2_{\mathbf{V}} \\
&= \frac{1}{\lambda_{m+1}} |\nabla f|^2_{\mathbf{L}^2} .
\end{aligned}$$

■

Lema 2.6. *Suponha que $f \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$. Então vale a seguinte estimativa de erro*

$$|f - P_m f|^2_{\mathbf{L}^2} \leq \frac{1}{\lambda^2_{m+1}} |P\Delta f|^2_{\mathbf{L}^2} \tag{2.10}$$

Demonstração. Note que para $i \geq m+1$

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega f\, e_i\right)^2 &= \left[\int_\Omega f\left(\frac{-P\Delta e_i}{\lambda_i}\right)\right]^2 = \frac{1}{\lambda_i^2}\left[\int_\Omega f\,(-P\Delta e_i)\right]^2\\ &= \frac{1}{\lambda_i^2}\left(\int_\Omega -P\Delta f\, e_i\right)^2 \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}^2}\left(\int_\Omega -P\Delta f\, e_i\right)^2,\end{aligned}$$

pois $-P\Delta$ é simétrico.

Devido a (2.9) e a desigualdade anterior, temos

$$|f_m|_{\mathbf{L}^2}^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty}\left(\int_\Omega f\, e_i\right)^2 \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}^2}\sum_{i=m+1}^{\infty}\left(\int_\Omega -P\Delta f\, e_i\right)^2. \tag{2.11}$$

Como $f \in \mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega)$, temos pelo Lema 2.1 que $-P\Delta f \in \mathbf{H}$. Logo, pelo Lema 2.2 temos

$$-P\Delta f = \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\, e_i, \text{ onde } \beta_i = (-P\Delta f, e_i)_{\mathbf{L}^2} = \int_\Omega (-P\Delta f)\, e_i\,.$$

Logo, pela Identitade de Parseval,

$$|P\Delta f|_{\mathbf{L}^2}^2 = |-P\Delta f|_{\mathbf{L}^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_\Omega (-P\Delta f)\, e_i\right)^2.$$

Portanto, de (2.11) e da Desigualdade de Bessel, segue que

$$\begin{aligned}|f_m|_{\mathbf{L}^2}^2 &= \sum_{i=m+1}^{\infty}\left(\int_\Omega f\, e_i\right)^2\\ &\leq \frac{1}{\lambda_{m+1}^2}\sum_{i=m+1}^{\infty}\left(\int_\Omega (-P\Delta f)\, e_i\right)^2\\ &\leq \frac{1}{\lambda_{m+1}^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_\Omega (-P\Delta f)\, e_i\right)^2\\ &= \frac{1}{\lambda_{m+1}^2}|P\Delta f|_{\mathbf{L}^2}^2\,.\end{aligned}$$

■

Lema 2.7. *Suponha que $f \in \mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2(\Omega)$. Então vale a seguinte estimativa de erro*

$$|\nabla f - \nabla P_m f|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}}|P\Delta f|_{\mathbf{L}^2}^2\,. \tag{2.12}$$

Demonstração. Note que

(i)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla f \, \nabla \left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) &= \int_\Omega (-P\Delta f) \left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) &&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_\Omega f \, (-P\Delta e_i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_\Omega f \, (\lambda_i e_i) &&= \sqrt{\lambda_i} \int_\Omega f \, e_i\end{aligned}$$

(ii) $$\left[\int_\Omega \nabla f \, \nabla \left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right]^2 = \left(\int_\Omega (-P\Delta f) \, \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^2 \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \left(\int_\Omega (-P\Delta f) \, e_i\right)^2 ,$$

para $i \geq m+1$.

Como

$$f_m = \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\int_\Omega f \, e_i\right) e_i$$

converge em $\mathbf{V}$, temos de (i)

$$\begin{aligned}\nabla f_m &= \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\int_\Omega f \, e_i\right) \nabla e_i \\ &= \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_\Omega \nabla f \, \frac{\nabla e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) \nabla e_i \\ &= \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\int_\Omega \nabla f \, \frac{\nabla e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right) \nabla \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} .\end{aligned}$$

Portanto, f_m também é ortogonal à $e_1, ..., e_m$ em $\mathbf{V}$ com o produto interno $\int_\Omega \nabla f \, \nabla g$. Note que

$$|f_m|^2_{\mathbf{V}} = \int_\Omega \nabla f_m \, \nabla f_m = |\nabla f_m|^2_{\mathbf{L}^2} .$$

Logo, por (i) e pela Identidade de Paserval com respeito ao conjunto ortonormal completo $\left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)$ em $\mathbf{V}$, temos que

$$\begin{aligned}|\nabla f_m|^2_{\mathbf{L}^2} = |f_m|^2_{\mathbf{V}} &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(f_m, \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right)^2_{\mathbf{V}} \\ &= \sum_{j=m+1}^{\infty} \left(f_m, \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right)^2_{\mathbf{V}} \\ &= \sum_{j=m+1}^{\infty} \left(\int_\Omega \nabla f_m \, \nabla \left(\frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right)\right)^2 .\end{aligned} \tag{2.13}$$

Como

$$\nabla f_m = \nabla f - \nabla P_m f = \nabla f - \sum_{i=1}^{m} \left(\int_\Omega f \, e_i\right) \nabla e_i$$

e $\nabla e_i \perp \nabla e_j$ se $i \neq j$, segue de (2.13) que

$$|\nabla f_m|^2_{\mathbf{L}^2} = \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\int_\Omega \nabla f \, \nabla \left(\frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right) \right)^2 .$$

Assim, por (ii) e pela Desigualdade de Bessel aplicada a função $-P\Delta f \in \mathbf{H}$ temos que

$$|\nabla f_m|^2_{\mathbf{L}^2} \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\int_\Omega (-P\Delta f) \, e_i \right)^2 \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} |P\Delta f|^2_{\mathbf{L}^2} .$$

■

2.3 Estimativas para as Soluções Locais de Navier-Stokes e de suas Aproximações de Galerkin

Como antes, Ω representará um aberto limitado de $\mathbb{R}^3$ cuja fronteira, $\Gamma = \partial\Omega$, admitiremos ser de classe C^3.

Consideremos o sistema de Navier-Stokes (A.22) (ver Apêndice A) no qual a viscosidade do fluido, ν, é igual a 1 e a densidade de forças f é o gradiente de um potencial e assim possa ser absorvida dentro da pressão ($f = 0$), ou seja,

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u\nabla u &= -\nabla p \qquad \text{em } \Omega, \quad t > 0 \, , \\ \text{div } u &= 0 \qquad\quad\;\; \text{em } \Omega, \quad t > 0 \, , \\ u &= 0 \qquad\quad\;\; \text{em } \Gamma, \quad t \geq 0 \, , \\ u(0,x) &= u_0(x) \qquad \text{em } \Omega \, , \end{cases} \tag{2.14}$$

onde $u(t\,,\, x) \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade do fluido, $p(t\,,\, x) \in \mathbb{R}$ é a pressão hidrostática e $u_0(x)$ é a velocidade inicial.

Se aplicarmos a projeção P em ambos os membros da equação

$$\partial_t u - \Delta u + u\nabla u = -\nabla p$$

e lembrarmos que $P(\nabla p) = 0$ e que $P(\partial_t u) = \partial_t P(u) = \partial_t u \ \forall \ u \in \mathbf{V} \subset \mathbf{H}$, obtemos

$$\partial_t u - P\Delta u = -P(u\nabla u).$$

Portanto, podemos reescrever a equação (2.14) da seguinte forma

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u - P\Delta u & = & -P(u\nabla u) & \text{em } \Omega, \quad t>0\,, \\ \text{div } u & = & 0 & \text{em } \Omega, \quad t>0\,, \\ u & = & 0 & \text{em } \Gamma, \quad t\geq 0\,, \\ u(0,x) & = & u_0(x) & \text{em } \Omega\,. \end{array}\right. \tag{2.15}$$

Definição 2.2. Diremos que u é uma **solução local forte** de (2.15) se $u \in L^\infty((0,T),\mathbf{V})$ sobre um intervalo de tempo $[0,T]$, com as suas derivadas $\partial_t u,\ D^\alpha u$ para $|\alpha|\leq 2$ em $L^2((0,T),\mathbf{L}^2(\Omega))$ e $|\nabla u(t,.)-\nabla u_0|_{\mathbf{L}^2}\to 0$ quando $t\to 0$.

A solução do problema (2.15) pode ser obtida usando o **método de Galerkin espectral**, ou seja, consideramos aproximações da solução do problema (2.15) da forma

$$u_k(t,x)=\sum_{i=1}^{k} a_{k,i}(t)\,e_i(x) \tag{2.16}$$

na base de autofunções e_i do problema linear de Stokes (2.2), isto é, $-P\Delta e_i=\lambda_i e_i$, onde as funções $a_{k,i}(t)$ são dadas por

$$a_{k,i}(t)=\int_\Omega u_k(t,x)\,e_i(x)dx=(u_k(t,.)\,,\,e_i)_{\mathbf{L}^2}\ ,\ \ i=1,...,k$$

e tais aproximações satisfazem as equações

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u_k - P\Delta u_k & = & -P_k(u_k\nabla u_k) & \text{em } \Omega, \quad t>0\,, \\ u_k(0,x) & = & P_k u_0(x) & \text{em } \Omega\,. \end{array}\right. \tag{2.17}$$

O operador P_k é caracterizado pela Definição 2.1.

Procedendo formalmente, multiplicamos a primeira equação de (2.17) por $v\in\mathbf{V}$ e integramos sobre Ω para encontrarmos

$$\int_\Omega \partial_t u_k(t,.)\,v\ -\ \int_\Omega P\Delta u_k(t,.)\,v=-\int_\Omega P(u_k(t,.)\,\nabla u_k(t,.))\,v\ ,$$

ou ainda,

$$\partial_t(u_k(t,.),v)_{\mathbf{L}^2}-(P\Delta u_k(t,.),v)_{\mathbf{L}^2}=-(P(u_k(t,.)\nabla u_k(t,.)),v)_{\mathbf{L}^2}\,. \tag{2.18}$$

Usando o fato que os operadores P e $P\Delta$ são simétricos, de (2.5) e de acordo com o teorema de Green (Teorema 1.25 (ii)), temos que

$$\begin{aligned} (P(u_k(t,.)\nabla u_k(t,.)),v)_{\mathbf{L}^2} &= (u_k(t,.)\nabla u_k(t,.),Pv)_{\mathbf{L}^2}=(u_k(t,.)\nabla u_k(t,.),v)_{\mathbf{L}^2}\,, \\ (P\Delta u_k(t,.),v)_{\mathbf{L}^2} &= (\Delta u_k(t,.),Pv)_{\mathbf{L}^2}=(\Delta u_k(t,.),v)_{\mathbf{L}^2} \text{ e} \\ \partial_t(u_k(t,.),v)_{\mathbf{L}^2} &= (\partial_t u_k(t,.),v)_{\mathbf{L}^2}\ . \end{aligned}$$

A partir disto, a equação (2.18) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$(\partial_t u_k(t,.), v)_{\mathbf{L}^2} - (\Delta u_k(t,.), v)_{\mathbf{L}^2} = -(u_k(t,.)\nabla u_k(t,.), v)_{\mathbf{L}^2}\,. \tag{2.19}$$

Se na equação (2.19) substituirmos v por $a_{k,i}\, e_i$ e por fim somarmos em $i = 1, ..., k$, obtemos

$$(\partial_t u_k(t,.), u_k(t,.))_{\mathbf{L}^2} - (\Delta u_k(t,.), u_k(t,.))_{\mathbf{L}^2} = -(u_k(t,.)\nabla u_k(t,.), u_k(t,.))_{\mathbf{L}^2}\,. \tag{2.20}$$

Por outro lado, de (2.4) e (2.5) temos que

$$\begin{aligned}(\Delta u_k(t,.), u_k(t,.))_{\mathbf{L}^2} &= (P\Delta u_k(t,.), u_k(t,.))_{\mathbf{L}^2} \\ &= -(\nabla u_k(t,.), \nabla u_k(t,.))_{\mathbf{L}^2} \\ &= -|\nabla u_k(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,.\end{aligned}$$

Mais ainda, pela Observação 2.3 abaixo, temos que

$$(u_k(t,.)\nabla u_k(t,.), u_k(t,.))_{\mathbf{L}^2} = 0\,.$$

Portanto, a equação (2.20) pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{1}{2}\partial_t |u_k(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + |\nabla u_k(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} = 0\,.$$

Lema 2.8. *Em* $\mathbf{V}$*, a integral*

$$\int_\Omega (f\,\nabla g)\, h = b(f,g,h)$$

é uma forma trilinear contínua tal que

$$b(f,g,h) + b(f,h,g) = 0\,.$$

Demonstração. Ver [14], Lemas 1.2 e 1.3, págs. 162 e 163. ■

Observação 2.3. *Notemos que se* $f = g = h$ *no* Lema 2.8*, então* $b(f,f,f) = 0$.

As estimativas de erro das próximas seções são baseadas no

Teorema 2.3 (John Heywood)**.** *Suponha que o valor inicial* u_0 *está em* $\mathbf{V}$*. Então sobre um (possívelmente pequeno) intervalo de tempo* $[0,T]$*, o problema de Navier-Stokes (2.15) tem uma única solução forte* u*. As derivadas parciais de* u *e as suas* *aproximações de Galerkin u_k satisfazem as seguintes estimativas*

$$|\nabla u(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t |\partial_\tau u(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq F_0(t) \leq F_{0,0}\,, \tag{2.21}$$

$$\int_0^t |P\Delta u(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq h_0(t) \text{ sobre } [0,T]\,, \tag{2.22}$$

$$|\nabla \partial_t^n u(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_\varepsilon^t |\partial_\tau^{n+1} u(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq F_n(t,\varepsilon)\,, \tag{2.23}$$

$$\int_\varepsilon^t |P\Delta \partial_\tau^n u(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq h_n(t,\varepsilon)\,, \tag{2.24}$$

$$|\partial_t^n u(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_\varepsilon^t |\nabla \partial_\tau^n u(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq G_n(t,\varepsilon) \text{ e} \tag{2.25}$$

$$|P\Delta \partial_t^n u(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} \leq g_n(t,\varepsilon) \leq g_{n,\varepsilon} \tag{2.26}$$

em $[\varepsilon, T]$ para qualquer ε num intervalo aberto $(0,T)$ e qualquer $n = 0, 1, \ldots$ Ademais, no caso $u_0 \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2$ temos

$$|\partial_t u(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t |\nabla \partial_\tau u(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2} d\tau \leq G_1(t) \text{ e} \tag{2.27}$$

$$|P\Delta u(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} \leq g_0(t) \leq g_{0,0} \tag{2.28}$$

em $[0,T]$. As funções do lado direito das desigualdades acima dependem apenas de seu argumento t ou (t,ε) e também de n, T e da norma de Dirichlet $|\nabla u_0|^2_{\mathbf{L}^2}$; no último caso depende da $|u_0|_{\mathbf{H}^2}$ também. No intervalo em questão, estas funções são contínuas na variável t, e as funções h_0, F_n, G_n são continuamente diferenciáveis com respeito a t pela sua definição.

Como uma consequência imediata obtemos

Corolário 2.1. *Para qualquer número narural $n = 0, 1, ...$ e qualquer $\varepsilon \in (0,T)$ existe uma subsequência (u_{k^*}) das aproximações de Galerkin u_k de (2.16), $k = 1, 2, ...$ que converge em $\mathbf{H}^m(\Omega)$ uniformemente sobre $[\varepsilon, T]$ para a solução u do problema de Navier-Stokes, $m = 0, 1$. Esta convergência mantem-se para todas as suas derivadas com respeito ao tempo até a ordem n. No caso $u_0 \in \mathbf{V}$ e $n = m = 0$ ou $u_0 \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ e $n = 0, m = 0, 1$, a convergência é uniforme sobre $[0,T]$.*

Demonstração. Ver [12], Corolário 3.1, pág. 432. ∎

2.4 Estimativas de Erro para as Aproximações de Galerkin em $\mathbf{L}^2(\Omega)$

A proposição abaixo será utilizada na demonstração do teorema desta seção.

Proposição 2.4 (Variação do Lema de Gronwall). *Sejam $a, b : [0,T] \to \mathbb{R}$ funções não negativas tais que a é absolutamente contínua*[1] *com $a' \geq 0$ e b integrável. Suponha que $\varphi, \varphi^* : [0,T] \to \mathbb{R}$ são funções positivas satisfazendo*

$$\varphi(t) + \int_0^t \varphi^*(\tau)\, d\tau \leq \frac{a(t)}{\lambda} + \int_0^t b(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau \tag{2.29}$$

com $\lambda > 0$ uma constante. Então

$$\varphi(t) + \int_0^t \varphi^*(\tau)\, d\tau \leq \frac{A(t)}{\lambda}\,,$$

onde

$$A(t) = \left(1 + \int_0^t b(\tau)\, d\tau\right)\, \psi(t)$$

e

$$\psi(t) = a(t)\, e^{\int_0^t b(\tau)\, d\tau}\,.$$

Demonstração. Como φ^* é uma função positiva, segue de (2.29), que

$$\varphi(t) \leq \frac{a(t)}{\lambda} + \int_0^t b(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau\,.$$

Pela desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\varphi(t) \leq \frac{a(t)}{\lambda} + \int_0^t \frac{a(\tau)}{\lambda}\, b(\tau)\, e^{\int_\tau^t b(\sigma)\, d\sigma}\, d\tau\,.$$

Substituindo esta desigualdade em (2.29) e usando o fato que $a(t)$ é crescente,

[1] $f : I \to \mathbb{R}$ (I limitado) é absolutamente contínua quando $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que toda sequência finita de intervalos disjuntos (a_k, b_k) de I onde $\sum |b_k - a_k| < \delta$ implica que $\sum |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$.

resulta

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) + \int_0^t \varphi^*(\tau)\, d\tau \;&\leq\; \frac{a(t)}{\lambda} + \int_0^t b(\tau) \left(\frac{a(\tau)}{\lambda} + \int_0^\tau \frac{a(s)}{\lambda}\, b(s)\, e^{\int_s^\tau b(\sigma)\, d\sigma}\, ds \right) d\tau \\
&\leq\; \frac{a(t)}{\lambda} + \frac{a(t)}{\lambda} \int_0^t b(\tau)\, d\tau + \int_0^t \int_0^\tau b(\tau) \frac{a(s)}{\lambda}\, b(s)\, e^{\int_s^\tau b(\sigma)\, d\sigma}\, ds\, d\tau \\
&\leq\; \frac{a(t)}{\lambda} + \frac{a(t)}{\lambda} \int_0^t b(\tau)\, d\tau \\
&\quad + \frac{a(t)}{\lambda} \int_0^t b(\tau) \left[\int_0^\tau \left(-\frac{d}{ds} e^{\int_s^\tau b(\sigma)\, d\sigma} \right) ds \right] d\tau \\
&=\; \frac{a(t)}{\lambda} + \frac{a(t)}{\lambda} \int_0^t b(\tau)\, d\tau + \frac{a(t)}{\lambda} \int_0^t b(\tau) \left[e^{\int_0^\tau b(\sigma)\, d\sigma} - 1 \right] d\tau \\
&=\; \frac{a(t)}{\lambda} + \frac{a(t)}{\lambda} \int_0^t b(\tau)\, e^{\int_0^\tau b(\sigma)\, d\sigma}\, d\tau \\
&=\; \frac{a(t)}{\lambda} + \frac{a(t)}{\lambda} \int_0^t \left(\frac{d}{d\tau}\, e^{\int_0^\tau b(\sigma)\, d\sigma} \right) d\tau \\
&=\; \frac{a(t)}{\lambda} + \frac{a(t)}{\lambda} \left(e^{\int_0^t b(\sigma)\, d\sigma} - 1 \right) = \frac{a(t)}{\lambda}\, e^{\int_0^t b(\sigma)\, d\sigma} = \frac{\psi(t)}{\lambda}\,,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\varphi(t) + \int_0^t \varphi^*(\tau)\, d\tau \leq \frac{\psi(t)}{\lambda}\,.$$

Definindo

$$A(t) = \left(1 + \int_0^t b(\tau)\, d\tau \right) \psi(t)\,,$$

vemos que $\psi(t) \leq A(t)$, pois $b(t) \geq 0$. Portanto, a proposição está demonstrada. ■

Seja $[0, T]$ um intervalo de tempo como no Teorema 2.3, e (e_i) o sistema de autofunções correspondentes aos autovalores λ_i do problema linear de Stokes (2.2) como no Lema 2.2. Vamos provar

Teorema 2.5. *Suponhamos que a velocidade inicial $u_0 \in \mathbf{V}$. Então a aproximação de Galerkin u_k, definida por (2.16), da solução u de (2.15) satisfaz a estimativa*

$$|u(t,.) - u_k(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t |\nabla(u - u_k)\,(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \;\leq\; \frac{F_0^*(t)}{\lambda_{k+1}}\,, \tag{2.30}$$

para qualquer $t \in [0, T]$. A função contínua F_0^* da variável t depende apenas de T e da norma de Dirichlet de u_0 ($|\nabla u_0|_{\mathbf{L}^2}$). A desigualdade (2.30) vale também para qualquer u_l no lugar de u com $l > k$.

Demonstração. Sejam u_k e u_l, com $l > k$, duas aproximações de Galerkin (2.16) da solução u de (2.15). Temos, então, as seguintes equações

$$\begin{cases} \partial_t u_k - P\Delta u_k &= -P_k(u_k\nabla u_k) \text{ em } \Omega \text{ e } t>0\,, \\ u_k(0,.) &= P_k u_0 \qquad\quad \text{em } \Omega\,. \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \partial_t u_l - P\Delta u_l &= -P_l(u_l\nabla u_l) \text{ em } \Omega \text{ e } t>0\,, \\ u_l(0,.) &= P_l u_0 \qquad\quad \text{em } \Omega\,. \end{cases}$$

Seja $w = u_l - u_k$. Então, pelas equações acima

$$\begin{aligned} \partial_t w - P\Delta w &= -P_l(u_l\nabla u_l) + P_k(u_k\nabla u_k) \\ &= -P_l(u_l\nabla u_l) + P_k(u_l\nabla u_l) - P_k(u_l\nabla u_l) + P_k(u_k\nabla u_k) \\ &= -(P_l - P_k)(u_l\nabla u_l) - P_k(u_l\nabla u_l - u_k\nabla u_k) \\ &= -(P_l - P_k)(u_l\nabla u_l) - P_k(u_l\nabla u_l - u_l\nabla u_k + u_l\nabla u_k - u_k\nabla u_k) \\ &= -(P_l - P_k)(u_l\nabla u_l) - P_k(u_l\nabla w + w\nabla u_k)\,. \end{aligned} \tag{2.31}$$

e

$$w(0,.) = (P_l - P_k)u_0\,.$$

Fazendo o produto interno de (2.31) com $w \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ temos

$$(\partial_t w\,,\, w)_{\mathbf{L}^2} - (P\Delta w\,,\, w)_{\mathbf{L}^2} = -((P_l - P_k)(u_l\nabla u_l) + P_k(u_l\nabla w + w\nabla u_k),\, w)_{\mathbf{L}^2}\,.$$

Como

$$(\partial_t w\,,\, w)_{\mathbf{L}^2} = \frac{1}{2}\partial_t\,|w|^2_{\mathbf{L}^2}$$

e por (2.4)

$$-(P\Delta w\,,\, w)_{\mathbf{L}^2} = (\nabla w\,,\, \nabla w)_{\mathbf{L}^2} = |\nabla w|^2_{\mathbf{L}^2}\,,$$

a equação acima pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{1}{2}\partial_t\,|w|^2_{\mathbf{L}^2} + |\nabla w|^2_{\mathbf{L}^2} = -\int_\Omega [(P_l - P_k)(u_l\nabla u_l) + P_k(u_l\nabla w + w\nabla u_k)]\,w\,,$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \partial_t\,|w|^2_{\mathbf{L}^2} + 2\,|\nabla w|^2_{\mathbf{L}^2} = &-2\left[\int_\Omega (P_l - P_k)(u_l\nabla u_l)\,w + \int_\Omega P_k(u_l\nabla w)\,w\right. \\ &+ \left.\int_\Omega P_k(w\nabla u_k)\,w\right]\,. \end{aligned} \tag{2.32}$$

A seguir, estimaremos cada um dos termos do lado direito de (2.32).

Pelo Lema 2.5 e o Teorema 2.3, desigualdade (2.21), obtemos a estimativa para o valor inicial

$$|w(0,.)|_{\mathbf{L}^2}^2 = |u_l(0,.) - P_k\, u_l(0,.)|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} |\nabla u_l(0,.)|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} F_0(0)\,. \tag{2.33}$$

Note que P_l, P_k e $P_l - P_k$ são projeções ortogonais de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e, além disso,

$$P_l\, u_k = P_k u_k = u_k\,, P_l\, u_l = u_l\,,$$

para $l > k$. Portanto, para $l > k$, temos

$$\begin{aligned}(P_l - P_k)\,(u_l - u_k) &= P_l\, u_l - P_l\, u_k - P_k\, u_l + P_k\, u_k = u_l - u_k - P_k\, u_l + u_k \\ &= u_l - P_k\, u_l = (I - P_k) u_l\,,\end{aligned}$$

onde I denota a aplicação identidade.

Como $P_l - P_k$ é um operador simétrico, temos

$$\int_\Omega [(P_l - P_k)\, f]\, w = \int_\Omega f\,(I - P_k)\, u_l\,, \text{ para qualquer } f \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ e } l > k\,. \tag{2.34}$$

Logo, podemos escrever a primeia integral em (2.32) como

$$\int_\Omega [(P_l - P_k)\,(u_l \nabla u_l)]\, w = \int_\Omega u_l \nabla u_l\,(I - P_k)\, u_l\,. \tag{2.35}$$

Estimaremos o primeiro fator do lado direito em $\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ usando a desigualdade

$$|f|_{\mathbf{L}^\infty} \leq c_2\,|P\Delta f|_{\mathbf{L}^2}\,, \forall\, f \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2\,. \tag{2.36}$$

Esta desigualdade segue do teorema de imersão de Sobolev sobre regiões tridimensionais $\mathbf{H}^2(\Omega) \subset \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ e pela desigualdade de Cattabriga (veja [5] , pág. 311)

$$|f|_{\mathbf{H}^2} \leq c_3\,|P\Delta f|_{\mathbf{L}^2}. \tag{2.37}$$

Por outro lado, para quaisquer $g \in \mathbf{H}^1$ e $h \in \mathbf{L}^2$, obtemos, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e por (2.36), a estimativa

$$\left| \int_\Omega (f\,\nabla g)\, h \right| \leq |f\,\nabla g|_{\mathbf{L}^2}\,|h|_{\mathbf{L}^2} \leq |f|_{\mathbf{L}^\infty}\,|\nabla g|_{\mathbf{L}^2}\,|h|_{\mathbf{L}^2} \leq c_2\,|P\,\Delta f|_{\mathbf{L}^2}\,|\nabla g|_{\mathbf{L}^2}\,|h|_{\mathbf{L}^2}\,. \tag{2.38}$$

Assim, pela desigualdade de Young, temos que

$$\left|\int_\Omega (f\,\nabla g)\,h\right| \le \delta|\nabla g|^2_{\mathbf{L}^2} + c_\delta\,|P\,\Delta f|^2_{\mathbf{L}^2}\,|h|^2_{\mathbf{L}^2} \tag{2.39}$$

$$\left|\int_\Omega (f\,\nabla g)\,h\right| \le \delta|h|^2_{\mathbf{L}^2} + c_\delta\,|P\,\Delta f|^2_{\mathbf{L}^2}\,|\nabla g|^2_{\mathbf{L}^2} \tag{2.40}$$

onde o coeficiente c_δ depende apenas do valor arbitrário $\delta > 0$. Estimando o lado direito de (2.35) por meio de (2.38) obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (u_l\,\nabla u_l)\,(I-P_k)\,u_l\right| &\le |u_l\,\nabla u_l|_{\mathbf{L}^2}\,|(I-P_k)\,u_l|_{\mathbf{L}^2}\\ &\le c_2\,|P\,\Delta u_l|_{\mathbf{L}^2}\,|\nabla u_l|_{\mathbf{L}^2}\,|(I-P_k)\,u_l|_{\mathbf{L}^2}\,. \end{aligned}\tag{2.41}$$

Pelo Lema 2.6 e pelo Teorema 2.3, desigualdade (2.21), concluimos

$$\begin{aligned}|(I-P_k)\,u_l|^2_{\mathbf{L}^2} &= |u_l - P_k\,u_l|^2_{\mathbf{L}^2} \le \frac{1}{\lambda^2_{k+1}}|P\,\Delta u_l|^2_{\mathbf{L}^2} \text{ e}\\ |\nabla u_l|^2_{\mathbf{L}^2} &\le F_{0,0}\,.\end{aligned}$$

Usando estas estimativas em (2.41) concluimos que

$$\left|\int_\Omega (u_l\,\nabla u_l)\,(I-P_k)\,u_l\right| \le c_3\frac{|P\,\Delta u_l(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,\sqrt{F_{0,0}}}{\lambda_{k+1}}\,. \tag{2.42}$$

Portanto, o primeiro termo da integral em (2.32) é majorado por

$$\left|\int_\Omega [(P_l - P_k)\,(u_l\,\nabla u_l)]\,w\right| \le c_3\frac{|P\,\Delta u_l(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,\sqrt{F_{0,0}}}{\lambda_{k+1}}\,. \tag{2.43}$$

Para estimarmos a segunda integral de (2.32), notemos que, sendo P_k uma projeção ortogonal em $\mathbf{L}^2$, é possível concluir a partir do Corolário 1.4, que

$$|P_k\,f|_{\mathbf{L}^2} \le |f|_{\mathbf{L}^2} \tag{2.44}$$

para qualquer $f \in \mathbf{L}^2$. Então, usando (2.38) e (2.39), obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega [P_k\,(u_l\,\nabla w)]\,w\right| &\le |P_k\,(u_l\,\nabla w)|_{\mathbf{L}^2}|w|_{\mathbf{L}^2}\\ &\le |u_l\,\nabla w|_{\mathbf{L}^2}|w|_{\mathbf{L}^2}\\ &\le c_2\,|P\Delta u_l|_{\mathbf{L}^2}|\nabla w|_{\mathbf{L}^2}|w|_{\mathbf{L}^2}\\ &\le \delta\,|\nabla w|^2_{\mathbf{L}^2} + c_\delta\,|w|^2_{\mathbf{L}^2}|P\Delta u_l|^2_{\mathbf{L}^2}\,,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left| \int_\Omega [P_k\,(u_l\,\nabla w)]\,w \right| \le \delta\,|\nabla w|^2_{\mathbf{L}^2} + c_\delta\,|w|^2_{\mathbf{L}^2}|P\Delta u_l|^2_{\mathbf{L}^2}\,. \tag{2.45}$$

Agora estimaremos a terceira integral de (2.32). Aplicando a desigualdade de Hölder para $f \in \mathbf{L}^6$ e $\nabla g \in \mathbf{L}^3$, obtemos

$$\left| \int_\Omega [P_k\,(f\,\nabla g)]\,h \right| \le |P_k\,(f\,\nabla g)|_{\mathbf{L}^2}|h|_{\mathbf{L}^2} \le |f\,\nabla g|_{\mathbf{L}^2}|h|_{\mathbf{L}^2} \le |f|_{\mathbf{L}^6}|\nabla g|_{\mathbf{L}^3}|h|_{\mathbf{L}^2}\,. \tag{2.46}$$

Por outro lado, de (1.1) temos

$$|\nabla g|_{\mathbf{L}^3} \le c_4\,|P\Delta g|_{\mathbf{L}^2} \tag{2.47}$$

para qualquer $g \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$. Logo, de (2.46)

$$\left| \int_\Omega [P_k\,(f\,\nabla g)]\,h \right| \le c_5\,|f|_{\mathbf{L}^6}|P\Delta g|_{\mathbf{L}^2}|h|_{\mathbf{L}^2}\,. \tag{2.48}$$

Usando a desigualdade de Sobolev

$$|f|_{\mathbf{L}^6} \le c_6\,|\nabla f|_{\mathbf{L}^2} \tag{2.49}$$

(que é válida para qualquer $f \in \mathbf{V}$) em (2.48) temos

$$\left| \int_\Omega [P_k\,(f\,\nabla g)]\,h \right| \le c_7\,|\nabla f|_{\mathbf{L}^2}\,|P\Delta g|_{\mathbf{L}^2}\,|h|_{\mathbf{L}^2}\,. \tag{2.50}$$

Mais uma vez, pela desigualdade de Young para $f \in \mathbf{V}\,, g \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2$ e $h \in \mathbf{L}^2\,,$ obtemos

$$\left| \int_\Omega [P_k\,(f\,\nabla g)]\,h \right| \le \delta\,|\nabla f|^2_{\mathbf{L}^2} + c_\delta\,|P\Delta g|^2_{\mathbf{L}^2}\,|h|^2_{\mathbf{L}^2} \tag{2.51}$$

$$\left| \int_\Omega [P_k\,(f\,\nabla g)]\,h \right| \le \delta\,|h|^2_{\mathbf{L}^2} + c_\delta\,|P\Delta g|^2_{\mathbf{L}^2}\,|\nabla f|^2_{\mathbf{L}^2} \tag{2.52}$$

onde, novamente, o coeficiente $c_\delta > 0$ depende apenas do valor $\delta > 0$.

Em particular, da desigualdade (2.51) vemos que

$$\left| \int_\Omega [P_k\,(w\,\nabla u_k)]\,w \right| \le \delta\,|\nabla w|^2_{\mathbf{L}^2} + c_\delta\,|P\Delta u_k|^2_{\mathbf{L}^2}\,|w|^2_{\mathbf{L}^2}, \tag{2.53}$$

a qual é a estimativa desejada.

Substituindo as estimativas dadas em (2.43), (2.45) e (2.53) na equação (2.32), obtemos

$$\begin{aligned}\partial_t|w|^2_{\mathbf{L}^2} + 2\,|\nabla w|^2_{\mathbf{L}^2} \;&\leq\; 2c_3\,\frac{|P\,\Delta u_l(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\sqrt{F_{0,0}}}{\lambda_{k+1}} + 4\,\delta\,|\nabla w|^2_{\mathbf{L}^2}\\ &\quad +2c_\delta\,|w|^2_{\mathbf{L}^2}(|P\Delta u_l|^2_{\mathbf{L}^2} + |P\Delta u_k|^2_{\mathbf{L}^2})\end{aligned}$$

e daí,

$$\partial_t|w|^2_{\mathbf{L}^2} + (2-4\delta)|\nabla w|^2_{\mathbf{L}^2} \leq 2c_3\frac{|P\,\Delta u_l(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\sqrt{F_{0,0}}}{\lambda_{k+1}} + 2c_\delta\,|w|^2_{\mathbf{L}^2}(|P\Delta u_l|^2_{\mathbf{L}^2} + |P\Delta u_k|^2_{\mathbf{L}^2})\,.$$

Se assumirmos que $\delta \in (0, \frac{1}{4}]$ ou seja $1 \leq 2-4\delta \leq 2$ teremos

$$\partial_t|w|^2_{\mathbf{L}^2} + |\nabla w|^2_{\mathbf{L}^2} \leq 2c_3\frac{|P\,\Delta u_l(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\sqrt{F_{0,0}}}{\lambda_{k+1}} + 2c_\delta\,|w|^2_{\mathbf{L}^2}(|P\Delta u_l|^2_{\mathbf{L}^2} + |P\Delta u_k|^2_{\mathbf{L}^2}) \tag{2.54}$$

Integrando os termos de (2.54) com respeito à variável t

$$\begin{aligned}&|w(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t |\nabla w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,d\tau\\ &\leq \frac{2c_3\sqrt{F_{0,0}}}{\lambda_{k+1}}\int_0^t |P\Delta u_l(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,d\tau\\ &+2c_\delta\int_0^t (|P\Delta u_l(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + |P\Delta u_k(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2})\,|w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,d\tau \;+\; |w(0,.)|^2_{\mathbf{L}^2}.\end{aligned}$$

Usando agora a desigualdade (2.22) do Teorema 2.3 e a estimativa (2.33) temos

$$\begin{aligned}&|w(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t |\nabla w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,d\tau\\ &\leq \frac{2c_3\sqrt{F_{0,0}}\,h_0(t) + F_0(0)}{\lambda_{k+1}}\\ &+\int_0^t 2c_\delta\,(|P\Delta u_l(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + |P\Delta u_k(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2})\,|w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,d\tau\\ &= \frac{a(t)}{\lambda_{k+1}} + \int_0^t b(\tau)\,|w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,d\tau\end{aligned} \tag{2.55}$$

onde

$$\begin{aligned}a(t) &= F_0(0) + 2c_3\sqrt{F_{0,0}}\,h_0(t) \qquad (2.56)\\ b(t) &= 2c_\delta\,(|P\Delta u_l(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + |P\Delta u_k(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2}).\end{aligned}$$

Note que $\int_0^t b(\tau)\,d\tau \leq 4c_\delta\,h_0(t)$, pelo Teorema 2.3, (2.22). Mais ainda, como $h_0(t)$ é continuamente diferenciável, segue que $a(t)$ também o é.

De acordo com a Proposição 2.4, obtemos

$$\begin{aligned}
&|w(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t |\nabla w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \\
&\leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \left(1 + \int_0^t b(\tau)\, d\tau\right) a(t)\, e^{\int_0^t b(\tau)\, d\tau} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \left(1 + 4c_\delta\, h_0(t)\right) \left(F_0(0) + 2c_3 \sqrt{F_{0,0}}\, h_0(t)\right) e^{4c_\delta\, h_0(t)} \\
&= \frac{F_0^*(t)}{\lambda_{k+1}}\,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|u_l(t,.) - u_k(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t |\nabla(u_l(\tau,.) - u_k(\tau,.))|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \leq \frac{F_0^*(t)}{\lambda_{k+1}}\,. \tag{2.57}$$

Observe que o lado direito da desigualdade (2.57) é independente da particular aproximação de Galerkin $u_l\,, l > k$.

Como $u_0 \in \mathbf{V}$, pelo Corolário 2.1, existe uma subsequência $(u_{l'}(t,.))$ de $(u_l(t,.))$ convergindo em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ para $u(t,.)$ uniformemente em $[0,T]$. Logo

$$\lim_{l'\to\infty} |u_{l'}(t,.) - u_k(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} = |u(t,.) - u_k(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,.$$

De (2.57) vemos que

$$|\nabla(u_l - u_k)|^2_{L^2([0,T],\mathbf{L}^2(\Omega))} = \int_0^t |\nabla(u_l - u_k)(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau$$

é uniformemente limitada. Então, como $L^2([0,T],\mathbf{L}^2(\Omega))$ é um espaço de Banach reflexivo, segue do Teorema 1.28, que $\nabla(u_{l'} - u_k)$ converge fracamente em $L^2([0,T],\mathbf{L}^2(\Omega))$ para $\nabla(u - u_k)$ para qualquer $t \in (0,T)$. Logo, pela Proposição 1.27, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t |\nabla(u - u_k)(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau &\leq \liminf_{l'\to\infty} \int_0^t |\nabla(u_{l'} - u_k)(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \\
&\leq \limsup_{l'\to\infty} \int_0^t |\nabla(u_{l'} - u_k)(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau\,.
\end{aligned}$$

Passando ao limite (2.57), obtemos

$$\begin{aligned}
&|u(t,.) - u_k(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t |\nabla(u - u_k)\,(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \\
&\leq \lim_{l'\to\infty} |u_{l'}\,(t,.) - u_k\,(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \limsup_{l'\to\infty} \int_0^t |\nabla(u_{l'}\, - u_k)(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \\
&\leq \limsup_{l\to\infty} |u_l\,(t,.) - u_k\,(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \limsup_{l\to\infty} \int_0^t |\nabla(u_l - u_k)(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \\
&\leq \frac{F_0^*(t)}{\lambda_{k+1}}\,,
\end{aligned}$$

onde a função F_0^* é contínua e depende apenas de T e $|\nabla u_0|_{\mathbf{L}^2}$, por construção e pelo Teorema 2.3. ■

2.5 Estimativas de Erro para as Aproximações de Galerkin na Norma de Dirichlet

Como antes, denotaremos por $[0,T]$ um intervalo de tempo, sobre o qual as afirmações do Teorema 2.3 são satisfeitas. Em contrapartida ao Lema 2.7, no caso não-estacionário, temos o seguinte

Teorema 2.6. *Suponhamos que a velocidade inicial $u_0 \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2$. Então a aproximação de Galerkin u_k, dada por (2.16), da solução u de (2.15) satisfaz a estimativa de erro*

$$|\nabla u(t,.) - \nabla u_k(t,.)|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_0^t |\partial_\tau u\,(\tau,.) - \partial_\tau u_k\,(\tau,.)|_{\mathbf{L}^2}^2\, d\tau \,\leq\, \frac{G^*(t)}{\lambda_{k+1}}\,, \tag{2.58}$$

para qualquer $t \in [0,T]$. A função contínua G^* da variável t depende apenas de T e $|u_0|_{\mathbf{H}^2}$. Além disso, a desigualdade (2.58) vale também para qualquer u_l no lugar de u com $l > k$.

Demonstração. Seja $w = u_l - u_k$ a diferença de duas aproximações de Galerkin, definidas por (2.16) com $l > k$, da solução u de (2.15). Tomando o produto interno de (2.31) com $\partial_t w \in \mathbf{V}$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e usando (2.4) obtemos

$$|\partial_t\, w|_{\mathbf{L}^2}^2 + (\nabla w\,, \nabla \partial_t\, w)_{\mathbf{L}^2} = -\int_\Omega [(P_l - P_k)(u_l \nabla u_l) + P_k(u_l \nabla w + w \nabla u_k)]\ \partial_t\, w\,.$$

Como

$$\frac{1}{2}\partial_t\,|\nabla w|_{\mathbf{L}^2}^2 = (\partial_t\,\nabla w\,,\,\nabla w)_{\mathbf{L}^2} = (\nabla\,\partial_t\, w\,,\,\nabla w)_{\mathbf{L}^2}\,,$$

temos

$$|\partial_t\, w|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{1}{2}\partial_t\,|\nabla w|_{\mathbf{L}^2}^2 = -\int_\Omega [(P_l - P_k)(u_l \nabla u_l) + P_k(u_l \nabla w + w \nabla u_k)]\ \partial_t\, w.$$

Daí,

$$\begin{aligned} &|\nabla w(t,.)|_{\mathbf{L}^2}^2 - |\nabla w(\epsilon,.)|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2\int_\epsilon^t |\partial_t\, w(\tau,.)|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau = \\ &-2\int_\epsilon^t \int_\Omega [(P_l - P_k)(u_l \nabla u_l) + P_k(u_l \nabla w + w \nabla u_k)]\ \partial_t\, w\,. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Além disso, temos a condição inicial

$$|\nabla w(0,.)|^2_{\mathbf{L}^2} = |\nabla(P_l - P_k)u_0|^2_{\mathbf{L}^2}\,. \tag{2.60}$$

A seguir estimaremos individualmente cada um dos termos do lado direito de (2.59).

Pelo Lema 2.7 e o Teorema 2.3, desigualdade (2.28), temos que

$$\begin{aligned} |\nabla w(0,.)|^2_{\mathbf{L}^2} &= |\nabla u_l(0,.) - \nabla u_k(0,.)|^2_{\mathbf{L}^2} = |\nabla u_l(0,.) - \nabla\, P_k\, u_l(0,.)|^2_{\mathbf{L}^2} \\ &\le \frac{1}{\lambda_{k+1}} |P\Delta\, u_l(0,.)|^2_{\mathbf{L}^2} \le \frac{g_0(0)}{\lambda_{k+1}}\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|\nabla w(0,.)|^2_{\mathbf{L}^2} \le \frac{g_0(0)}{\lambda_{k+1}}\,. \tag{2.61}$$

Como as projeções ortogonais P_l e P_k comutam com a derivada ∂_t, concluimos de (2.35) que

$$\begin{aligned} \int_\Omega [(P_l - P_k)(u_l \nabla u_l)]\ \partial_t\, w &= \int_\Omega (u_l \nabla u_l)[(I - P_k)\,\partial_t\, u_l] \\ &= \int_\Omega (u_l \nabla u_l) \partial_t (I - P_k)\, u_l\,. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Integrando por partes com respeito a $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^t \int_\Omega [(P_l - P_k)(u_l \nabla u_l)]\, \partial_t w\, d\tau = &\int_\Omega (u_l \nabla u_l)(I - P_k) u_l \Big|_\varepsilon^t \\ &- \int_\varepsilon^t \int_\Omega (u_l \nabla u_l)_\tau (I - P_k) u_l \end{aligned} \tag{2.63}$$

para qualquer $\varepsilon \in [0, T]$.

Usando (2.50), a desigualdade de Cauchy-Schwartz e o Lema 2.6, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega (u_l \nabla u_l)_t (I - P_k)\, u_l \right| &\le \left| \int_\Omega [(u_l)_t\, \nabla u_l](I - P_k)\, u_l \right| + \left| \int_\Omega [u_l\, \nabla (u_l)_t](I - P_k)\, u_l \right| \\ &\le |(u_l)_t\, \nabla u_l|_{\mathbf{L}^2}\, |(I - P_k)\, u_l|_{\mathbf{L}^2} \\ &\quad + c_2 |P\Delta\, u_l|_{\mathbf{L}^2}\, |\nabla (u_l)_t|_{\mathbf{L}^2}\, |(I - P_k)\, u_l|_{\mathbf{L}^2} \\ &\le c_7 |\nabla (u_l)_t|_{\mathbf{L}^2} |P\Delta\, u_l|_{\mathbf{L}^2}\, |(I - P_k)\, u_l|_{\mathbf{L}^2} \\ &\quad + c_2 |P\Delta\, u_l|_{\mathbf{L}^2}\, |\nabla (u_l)_t|_{\mathbf{L}^2}\, |(I - P_k)\, u_l|_{\mathbf{L}^2} \\ &= (c_2 + c_7)\, |P\Delta\, u_l|_{\mathbf{L}^2}\, |\nabla (u_l)_t|_{\mathbf{L}^2}\, |u_l - P_k u_l|_{\mathbf{L}^2} \\ &\le \frac{c_2 + c_7}{\lambda_{k+1}}\, |P\Delta\, u_l|_{\mathbf{L}^2}\, |\nabla \partial_t u_l|_{\mathbf{L}^2}\, |P\Delta\, u_l|_{\mathbf{L}^2}\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left|\int_\Omega (u_l \nabla u_l)_t\,(I-P_k)\,u_l\right| \leq \frac{c_2+c_7}{\lambda_{k+1}}\,|P\Delta\, u_l(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,|\nabla \partial_t u_l(t,.)|_{\mathbf{L}^2}\,. \tag{2.64}$$

Pelo Teorema 2.3, desigualdade (2.26), temos que

$$|P\Delta\, u_l(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} \leq g_{0,\,\varepsilon}$$

e pela desigualdade de Young, temos

$$|\nabla\,\partial_t\, u_l(t,.)|_{\mathbf{L}^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,|\nabla\,\partial_t\, u_l(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,.$$

Substituindo estas desigualdades em (2.64) concluimos

$$\left|\int_\Omega (u_l \nabla u_l)_t\,(I-P_k)\,u_l\right| \leq \frac{c_2+c_7}{\lambda_{k+1}}\,g_{0,\,\varepsilon}\,\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,|\nabla\,\partial_t\, u_l(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\right)\,. \tag{2.65}$$

Integrando agora (2.65) com respeito a t, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\varepsilon^t \int_\Omega (u_l \nabla u_l)_\tau\,(I-P_k)\,u_l\,d\tau\right| \;&\leq\; \int_\varepsilon^t \left|\int_\Omega (u_l \nabla u_l)_\tau\,(I-P_k)\,u_l\right|\,d\tau \\
&\leq\; \frac{c_8\,g_{0,\,\varepsilon}}{\lambda_{k+1}} \int_\varepsilon^t (1+|\nabla\,\partial_\tau\, u_l(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2})\,d\tau \\
&=\; \frac{c_8}{\lambda_{k+1}}\,g_{0,\,\varepsilon}\left((t-\varepsilon) + \int_\varepsilon^t |\nabla\,\partial_\tau\, u_l(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2})\,d\tau\right) \\
&\leq\; \frac{c_8}{\lambda_{k+1}}\,g_{0,\,\varepsilon}\,((t-\varepsilon) + G_1(t,\varepsilon))\,.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

onde a última estimativa é obtida a partir da desigualdade (2.25) do Teorema 2.3. Note que a desigualdade anterior é uma estimativa do segundo termo da equação (2.63). Para estimarmos o primeiro termo, usamos novamente (2.38), o Lema 2.6 e a desigualdade de Young da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (u_l \nabla u_l)\,(I-P_k)\,u_l\,\Big|_{t_0}^{t}\right| \;&\leq\; 2\left|\int_\Omega (u_l \nabla u_l)\,(I-P_k)\,u_l\right| \\
&\leq\; 2c_2\,|P\Delta\, u_l|_{\mathbf{L}^2}\,|\nabla\, u_l|_{\mathbf{L}^2}\,|(I-P_k)\,u_l|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq\; 2c_2\,|P\Delta\, u_l|_{\mathbf{L}^2}\,|\nabla\, u_l|_{\mathbf{L}^2}\,\tfrac{1}{\lambda_{k+1}}\,|P\Delta\, u_l|_{\mathbf{L}^2} \\
&=\; \frac{2c_2}{\lambda_{k+1}}\,|P\Delta\, u_l|^2_{\mathbf{L}^2}\,|\nabla\, u_l|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq\; \frac{2c_2}{\lambda_{k+1}}\,\left(\frac{1}{2}\,|P\Delta\, u_l|^4_{\mathbf{L}^2} + \frac{1}{2}\,|\nabla u_l|^2_{\mathbf{L}^2}\right) \\
&=\; \frac{c_2}{\lambda_{k+1}}\,\left(|P\Delta\, u_l|^4_{\mathbf{L}^2} + |\nabla u_l|^2_{\mathbf{L}^2}\right)\,,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\left|\int_\Omega (u_l \nabla u_l)\,(I-P_k)\,u_l\,\Big|_{t_0}^{t}\right| \leq \frac{c_2}{\lambda_{k+1}}\,\left(|P\Delta\, u_l(t,.)|^4_{\mathbf{L}^2} + |\nabla u_l(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\right)\,, \tag{2.67}$$

para qualquer $t_0 \in [0,T]$.

Para obtermos uma estimativa do segundo termo da integral na igualdade (2.59) usamos (2.44), (2.38) e a desigualdade de Young

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega [P_k\,(u_l\,\nabla w)]\,\partial_t w\right| &\leq |P_k\,(u_l\,\nabla w)|_{\mathbf{L}^2}\,|\partial_t w|_{\mathbf{L}^2} \leq |u_l\,\nabla w|_{\mathbf{L}^2}\,|\partial_t w|_{\mathbf{L}^2}\\
&\leq c_2|P\Delta\, u_l|_{\mathbf{L}^2}\,|\nabla w|_{\mathbf{L}^2}\,|\partial_t w|_{\mathbf{L}^2}\\
&\leq \delta\,|\partial_t w|^2_{\mathbf{L}^2} + c_\delta|P\Delta\, u_l|^2_{\mathbf{L}^2}\,|\nabla w|^2_{\mathbf{L}^2}\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left|\int_\Omega [P_k\,(u_l\,\nabla w)]\,\partial_t w\right| \leq \delta\,|\partial_t w|^2_{\mathbf{L}^2} + c_\delta|P\Delta\, u_l|^2_{\mathbf{L}^2}\,|\nabla w|^2_{\mathbf{L}^2}. \tag{2.68}$$

Ao estimar o terceiro termo da igualdade (2.59), usamos (2.52) para ter

$$\left|\int_\Omega [P_k\,(w\,\nabla u_k)]\,\partial_t w\right| \leq \delta\,|\partial_t w|^2_{\mathbf{L}^2} + c_\delta|P\Delta\, u_k|^2_{\mathbf{L}^2}\,|\nabla w|^2_{\mathbf{L}^2}\,, \tag{2.69}$$

onde o coeficiente c_δ depende apenas do valor $\delta > 0$.

Agora escolhemos $\delta \in (0, \frac{1}{4}]$, ou seja, $1 \leq 2-4\delta < 2$ e $\varepsilon = 0$ (notemos que o fato de ε ser igual a 0 é possível de acordo com a última parte do Teorema 2.3 e pelo fato que $u_0 \in \mathbf{V}\cap\mathbf{H}^2$).

Usando as estimativas (2.68) e (2.69) em (2.59) obtemos

$$\begin{aligned}
&|\nabla w(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + 2\int_0^t |\partial_\tau w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,d\tau\\
&\leq 2\left(\left|\int_0^t\int_\Omega [(P_l-P_k)\,(u_l\,\nabla u_l)]\,\partial_\tau w\,d\tau\right| + 2\delta\int_0^t |\partial_\tau w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,d\tau\right.\\
&\left. +\ 2c_\delta\int_0^t (|P\Delta\, u_l(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + |P\Delta\, u_k(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2})\,|\,\nabla w\,(\tau,.)\,|^2_{\mathbf{L}^2}\,d\tau\right)\\
&+|\nabla w\,(0,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,.
\end{aligned}$$

Como $\delta \in (0, \frac{1}{4}]$, observando (2.63) e usando (2.66) e (2.67), temos

$$
\begin{aligned}
&|\nabla w(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \textstyle\int_0^t |\partial_\tau w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \\
&\leq |\nabla w(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + (2-4\delta) \int_0^t |\partial_\tau w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \\
&\leq 2\left[\frac{c_2}{\lambda_{k+1}} \left(|P\Delta\, u_l|^4_{\mathbf{L}^2} + |\nabla u_l|^2_{\mathbf{L}^2}\right) + \frac{c_8}{\lambda_{k+1}}\, g_{0,0}(t + G_1(t,0))\right] \\
&+ 2c_\delta \int_0^t \left(|P\Delta\, u_l(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + |P\Delta\, u_k(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\right) |\nabla w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \\
&+ |\nabla w(0,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,.
\end{aligned}
$$

Usando o Teorema 2.3, desigualdade (2.28), (2.21) e a estimativa (2.61)

$$
\begin{aligned}
|\nabla w(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t |\partial_\tau w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \;\; &\leq \;\; \frac{2c_2(g_{0,0}^2 + F_0(t)) + 2c_8\, g_{0,0}(t + G_1(t)) + g_0(0)}{\lambda_{k+1}} \\
&+ 4c_\delta\, g_{0,0} \int_0^t |\nabla w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \\
&= \frac{a(t)}{\lambda_{k+1}} + b \int_0^t |\nabla w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau\,, \qquad (2.70)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
a(t) \;\; &= \;\; g_0(0) + 2c_8\, g_{0,0}(t + G_1(t)) + 2c_2(g_{0,0}^2 + F_0(t)) \quad e \qquad (2.71) \\
b \;\; &= \;\; 4c_\delta\, g_{0,0}.
\end{aligned}
$$

Usando a Proposição 2.4 em (2.70) obtemos

$$
|\nabla u_l(t,.) - \nabla u_k(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t |\partial_\tau u_l(\tau,.) - \partial_\tau u_k(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \leq \frac{G^*(t)}{\lambda_{k+1}}\,, \qquad (2.72)
$$

onde $G^*(t) = (1\,+\,b\,t)\,a(t)\,e^{b\,t}$.

O lado direito de (2.72) é independente da particular aproximação de Galerkin $u_l\,, l > k$. Como $u_0 \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2$, pelo Corolário 2.1, existe uma subsequência $(u_{l'}(t,.))$ de $(u_l(t,.))$ convergindo em $\mathbf{H}^1(\Omega)$ para $u(t,.)$ uniformemente em $[0,T]$.

Sendo Ω limitado, sabemos que $|\nabla u|_{\mathbf{L}^2}$ é equivalente a $|u|_{\mathbf{H}^1}$. Portanto, a subsequência $(\nabla u_{l'}(t,.))$ converge em $\mathbf{L}^2$ para $\nabla u(t,.)$ uniformemente em $[0,T]$. Logo

$$
\lim_{l' \to \infty} |\nabla u_{l'}(t,.) - \nabla u_k(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} = |\nabla u(t,.) - \nabla u_k(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\,.
$$

De (2.72) vemos que

$$|\partial_\tau(u_l - u_k)|^2_{L^2([0,T],\mathbf{L}^2(\Omega))} = \int_0^t |\partial_\tau u_l(\tau,.) - \partial_\tau u_k(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau$$

é uniformemente limitada. Então, como $L^2([0,T],\mathbf{L}^2(\Omega))$ é um espaço de Banach reflexivo, segue do Teorema 1.28, que $\partial_\tau(u_{l'} - u_k)$ converge fracamente em $L^2([0,T],\mathbf{L}^2(\Omega))$ para $\partial_\tau(u - u_k)$ para qualquer $t \in (0,T)$. Logo, pela Proposição 1.27, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t |\partial_\tau(u - u_k)(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \ &\leq\ \liminf_{l'\to\infty} \int_0^t |\partial_\tau(u_{l'} - u_k)(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \\
&\leq\ \limsup_{l'\to\infty} \int_0^t |\partial_\tau(u_{l'} - u_k)(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau\,.
\end{aligned}$$

Passando ao limite (2.72), obtemos

$$\begin{aligned}
&|\nabla u(t,.) - \nabla u_k(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t |\partial_\tau u(\tau,.) - \partial_\tau u_k(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \\
&\leq \lim_{l'\to\infty} |\nabla u_{l'}(t,.) - \nabla u_k(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} \ + \limsup_{l'\to\infty} \int_0^t |\partial_\tau(u_{l'} - u_k)(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \\
&\leq \limsup_{l\to\infty} |\nabla u_l(t,.) - \nabla u_k(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} \ + \limsup_{l\to\infty} \int_0^t |\partial_\tau(u_l - u_k)(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \\
&\leq \frac{G^*(t)}{\lambda_{k+1}}\,,
\end{aligned}$$

onde a função G^* é contínua e depende apenas de T e $|u_0|_{\mathbf{H}^2}$, por construção e pelo Teorema 2.3. ■

Sem a restrição $u_0 \in \mathbf{H}^2$ não temos a estimativa inicial para $|\nabla w|^2_{\mathbf{L}^2}$ em $t = 0$. Usando apenas a primeira parte do Teorema 2.3, temos o seguinte

Corolário 2.2. *Suponhamos que a velocidade inicial $u_0 \in \mathbf{V}$. Então a aproximação de Galerkin u_k, dada por (2.16), da solução u de (2.15) satisfaz*

$$|\nabla u(t,.) - \nabla u_k(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_\varepsilon^t |\partial_\tau u\,(\tau,.) - \partial_\tau u_k\,(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \ \leq\ \frac{G_0^*(t,\,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}\,, \tag{2.73}$$

para qualquer $t \in [\varepsilon, T]$ e $\varepsilon > 0$. Sendo contínua com respeito a t, a função G_0^* depende apenas de t, T, ε e da norma de Dirichlet de u_0 ($|\nabla u_0|_{\mathbf{L}^2}$). A desigualdade (2.73) também vale com u_l no lugar de u com $l > k$.

Demonstração. Primeiramente estabelecemos da mesma maneira de [8] um equivalente para a condição inicial (2.60). Seja $w = u_l - u_k$, com $l > k$, a diferença de duas aproximações de Galerkin. Pelo Teorema 2.30 obtemos

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} |\nabla w|_{\mathbf{L}^2}^2 \, d\tau \leq \frac{F_0^*(2\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}$$

sendo o integrando contínuo. Portanto, o Teorema do Valor Médio garante a existência de pelo menos um $t_* \in (\varepsilon\,, 2\varepsilon)$ tal que

$$\varepsilon \, |\nabla w(t_*, .)|_{\mathbf{L}^2}^2 = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} |\nabla w(\tau, .)|_{\mathbf{L}^2}^2 \, d\tau \, .$$

Portanto, temos

$$|\nabla w(t_*, .)|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \frac{F_0^*(2\varepsilon)}{\varepsilon \, \lambda_{k+1}} \, . \tag{2.74}$$

As desigualdades (2.64) - (2.69) foram provadas sem a restrição $u_0 \in \mathbf{H}^2$. Assumindo $\delta \in (0, \frac{1}{4}]\,$, $\varepsilon > 0$ e assumindo as estimativas (2.21), (2.25) e (2.26) do Teorema 2.3 vemos pelas desigualdades (2.74) e (2.64) - (2.69), que (2.59) junto com a condição inicial (2.74) resulta na desigualdade integral

$$|\nabla w(t, .)|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_{t_*}^{t} |\partial_\tau w(\tau, .)|_{\mathbf{L}^2}^2 \, d\tau \leq \frac{a(t)}{\lambda_{k+1}} + b \int_{t_*}^{t} |\nabla w(\tau, .)|_{\mathbf{L}^2}^2 \, d\tau \, , \tag{2.75}$$

sobre $[t_*\,, T]\,$, com a função continuamente diferenciável

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{F_0^*(2\varepsilon)}{\varepsilon} + 2c_8 \, g_{0\,,\varepsilon} \, [(t - \varepsilon) + G_1(t\,, \varepsilon)] + 4c_2(g_{0\,\varepsilon}^2 + F_0(t)) \quad e \\ b &= 4c_\delta \, g_{0\,,\varepsilon} \end{aligned} \tag{2.76}$$

Para o cálculo de $a(t)\,$, temos usado o fato que a integral do lado direito de (2.64) é uma função monótona decrescente de seu limite inferior.

Logo, usando a Proposição 2.4 sobre $[t_*, T]$, obtemos

$$|\nabla w(t, .)|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_{t_*}^{t} |\partial_\tau w(\tau, .)|_{\mathbf{L}^2}^2 \, d\tau \leq \frac{A(t)}{\lambda_{k+1}} \, , \tag{2.77}$$

onde $A(t) = [1 + (t - t_*) \, b] \, a(t) \, e^{(t - t_*) \, b}$. Como $t_* \in (\varepsilon\,, 2\varepsilon)\,$, temos

$$\int_{2\varepsilon}^{t} |\partial_\tau w(\tau, .)|_{\mathbf{L}^2}^2 \, d\tau \leq \int_{t_*}^{t} |\partial_\tau w(\tau, .)|_{\mathbf{L}^2}^2 \, d\tau$$

e

$$e^{t - t_*} \leq e^{t - \varepsilon} \Rightarrow A(t) \leq [1 + (t - \varepsilon) \, b] \, a(t) \, e^{(t - \varepsilon) \, b} = G_0^*(t\,, 2\,\varepsilon) \, .$$

Logo, por (2.77)

$$|\nabla w(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_{2\varepsilon}^{t} |\partial_\tau w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \le \frac{G_0^*(t\,,2\,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}\,.$$

O corolário segue por passagem ao limite quando $l \to \infty$ como na prova do Teorema 2.6. ■

2.6 Estimativas de Erro para as Derivadas com Respeito ao Tempo das Aproximações de Galerkin em $\mathbf{H}^1$

A proposição abaixo será útil na prova do principal resultado desta seção.

Proposição 2.7. *Sejam $\epsilon_0 > 0$, $a, b, \varphi, \varphi^* : [\epsilon_0, T] \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $a(t) \ge 0\,, b(t) \ge 0\,, \varphi^*(t) \ge 0$, $\varphi(t)$ continuamente diferenciável. Suponha que as desigualdades*

$$\begin{aligned} \varphi'(t) + \varphi^*(t) &\le \frac{a(t)}{\lambda} + b(t)\,\varphi(t) \;\; \textit{sobre } [\varepsilon_0, T] \;\; \textit{e} \\ \varphi(t^*) &\le \frac{a_0}{\lambda} \end{aligned} \tag{2.78}$$

sejam satisfeitas com constantes $a_0 \ge 0\,, \lambda > 0$ e um valor $t^* \in [\varepsilon_0\,, \varepsilon_0 + \varepsilon]$. Então,

$$\varphi(t) + \int_{\varepsilon_0+\varepsilon}^{t} \varphi^*(\tau)\, d\tau \le \frac{A(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon)}{\lambda} \;\; \textit{sobre } [\varepsilon_0+\varepsilon\,, T]$$

com as funções contínuas

$$\begin{aligned} A(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon) &= a_0 + \int_{\varepsilon_0}^{t} [a(\tau) + b(\tau)\,\psi(\tau\,,\varepsilon_0+\varepsilon)]\, d\tau \;\; \textit{e} \\ \psi(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon) &= \left[a_0 + \int_{\varepsilon_0}^{t} a(\tau)\, e^{-\int_{\varepsilon_0+\varepsilon}^{t} b(\tau)\,d\tau}\, d\tau\right] e^{\int_{\varepsilon_0}^{t} b(\tau)\,d\tau} \end{aligned}$$

sendo monótonas crescentes na variável t.

Demonstração. Como $\varphi^*(t) \ge 0$ segue de (2.78) que $\varphi'(t) \le \dfrac{a(t)}{\lambda} + b(t)\,\varphi(t)$, ou seja,

$$\varphi'(t) - \left(\frac{a(t)}{\lambda} + b(t)\,\varphi(t)\right) \le 0\,. \tag{2.79}$$

Derivando $\psi(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon)$ com relação à t, obtemos

$$\begin{aligned}
\psi'(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon) &= a_0\, b(t)\, e^{\int_{\varepsilon_0}^{t} b(\tau)\,d\tau} \;+\; b(t)\, e^{\int_{\varepsilon_0}^{t} b(\tau)\,d\tau} \int_{\varepsilon_0}^{t} a(\tau)\, e^{-\int_{\varepsilon_0+\varepsilon}^{t} b(\sigma)\,d\sigma}\, d\tau \\
&\quad + e^{\int_{\varepsilon_0}^{t} b(\tau)\,d\tau}\, a(t)\, e^{-\int_{\varepsilon_0+\varepsilon}^{t} b(\tau)\,d\tau} \\
&= b(t)\,\psi(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon) \;+\; a(t)\, e^{\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_0+\varepsilon} b(\tau)\,d\tau} \\
&\geq b(t)\,\psi(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon) \;+\; a(t).
\end{aligned}$$

Daí,

$$0 \leq \left(\frac{\psi(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon)}{\lambda}\right)' - \left(\frac{a(t)}{\lambda} + b(t)\frac{\psi(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon)}{\lambda}\right). \tag{2.80}$$

Uma vez que $a(t) \geq 0$ e $b(t) \geq 0$, segue que $\psi(t^*\,,\varepsilon_0+\varepsilon) \geq a_0$. Logo

$$\varphi(t^*) \leq \frac{a_0}{\lambda} \leq \frac{\psi(t^*\,,\varepsilon_0+\varepsilon)}{\lambda}. \tag{2.81}$$

Seja $\xi(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon) = \dfrac{\psi(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon)}{\lambda}$. Então, segue de (2.80) que

$$\xi'(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon) - \left(\frac{a(t)}{\lambda} + b(t)\,\xi(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon)\right) \geq 0\,.$$

Portanto, usando (2.79), obtemos

$$(\,\varphi(t) - \xi(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon)\,)' \;-\; b(t)(\,\varphi(t) - \xi(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon)\,) \leq 0\,.$$

Seja $\eta(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon) = \varphi(t) \;-\; \xi(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon)$. Então

$$\eta'\,(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon) \leq b(t)\,\eta(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon)\,,\ \text{ ou seja}\,,\ \eta(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon) \leq \eta(t^*\,,\varepsilon_0+\varepsilon)\, e^{\int_{t^*}^{t} b(\tau)\,d\tau}\,.$$

Mas, por (2.81), $\eta(t^*\,,\varepsilon_0+\varepsilon) \leq 0$. Portanto,

$$\eta(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon) \leq 0\,,\ \text{ ou seja, } \varphi(t) \leq \frac{\psi(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon)}{\lambda} \ \text{ em } [t^*, T]\,.$$

Substituindo esta última desigualdade em (2.78), obtemos

$$\varphi'(t) + \varphi^*(t) \leq \frac{a(t)}{\lambda} + b(t)\,\frac{\psi(t\,,\varepsilon_0+\varepsilon)}{\lambda}\,.$$

Integrando adequadamente a integral acima, obtemos

$$\int_{\varepsilon_0+\varepsilon}^{t} \varphi'\,(\tau)\,d\tau + \int_{\varepsilon_0+\varepsilon}^{t} \varphi^*\,(\tau)\,d\tau \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\varepsilon_0+\varepsilon}^{t} [\,a(\tau) \;+\; b(\tau)\,\psi(\tau\,,\,\varepsilon_0+\varepsilon)\,]\,d\tau\,,$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) + \int_{\varepsilon_0+\varepsilon}^{t} \varphi^*(\tau)\, d\tau \;&\leq\; \frac{1}{\lambda}\left(\lambda\, \varphi(\varepsilon_0+\varepsilon) + \int_{\varepsilon_0+\varepsilon}^{t} [\, a(\tau) + b(\tau)\, \psi(\tau\,,\, \varepsilon_0+\varepsilon)\,]\, d\tau\right) \\
&\leq\; \frac{1}{\lambda}\left(a_0 + \int_{\varepsilon_0}^{t} [\, a(\tau) + b(\tau)\, \psi(\tau\,,\, \varepsilon_0+\varepsilon)\,]\, d\tau\right) \\
&=\; \frac{A(t\,,\,\varepsilon_0+\varepsilon)}{\lambda}\,. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Construiremos um sistema infinito de estimativas de erro para as aproximações de Galerkin u_k e de suas derivadas com respeito ao tempo na norma de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e $\mathbf{H}^1$. Temos o seguinte resultado.

Teorema 2.8. *Suponhamos que a velocidade inicial $u_0 \in \mathbf{V}$. Então a aproximação de Galerkin u_k, dada por (2.16), da solução u de Navier-Stokes (2.15) satisfaz o sistema enumerável de estimativas*

$$
|\partial_t^m(u(t,.) - u_k(t,.))|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_{\varepsilon}^{t} |\nabla\partial_\tau^m(u(\tau,.) - u_k(\tau,.))|_{\mathbf{L}^2}^2\, d\tau \;\leq\; \frac{F_m^*(t\,,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}\,, \qquad (2.82.\,m)
$$

$$
|\nabla\partial_t^m(u(t,.) - u_k(t,.))|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_{\varepsilon}^{t} |\partial_\tau^{m+1}(u(\tau,.) - u_k(\tau,.))|_{\mathbf{L}^2}^2\, d\tau \;\leq\; \frac{G_m^*(t\,,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}\,, \qquad (2.83.\,m)
$$

para qualquer $t \in [\varepsilon\,, T]$ e $\varepsilon > 0$. Sendo contínuas com respeito a t e monótonas crescentes em t e $m = 0, 1, \ldots,$ as funções F_m^* e G_m^* dependem apenas de $t\,, \varepsilon\,, m\,, T$ e $|\nabla u_0|_{\mathbf{L}^2}$. As estimativas (2.82.m) *e* (2.83.m) *valem também para u_l no lugar de u com $l > k$.*

Demonstração. Provaremos o teorema por indução com respeito a variável m. Para $m = 0$, a afirmação é verdadeira pelo Teorema 2.5 e pelo Corolário 2.2. Agora suponhamos que a afirmação é verdadeira para todo $m = 0\,, \ldots, n-1$. Provaremos para $m = n$. Como as soluções $a_{k\,,i}(t)$ da equação diferencial (2.17) têm derivadas de qualquer ordem, podemos derivar a equação (2.31) para a diferença $w = u_l - u_k$ (de duas aproximações de Galerkin (2.16) com $l > k$) n vezes com respeito a t. De acordo com a regra de Leibniz e usando o fato que P_k e ∂_t^n comutam, obtemos

$$\begin{aligned}
(\partial_t^n w)_t - P\Delta\partial_t^n w &= \partial_t^n\left(\partial_t w - P\Delta w\right)\\
&= \partial_t^n(-(P_l - P_k)(u_l\nabla u_l) - P_k(u_l\nabla w + w\nabla u_k))\\
&= -\left[(P_l - P_k)\partial_t^n(u_l\nabla u_l) + P_k(\partial_t^n u_l\nabla w) + P_k(\partial_t^n w\nabla u_k)\right]\\
&= -\left[(P_l - P_k)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\partial_t^j u_l\,\partial_t^{n-j}\nabla u_l\right)\right.\\
&\quad + P_k\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\partial_t^j u_l\,\partial_t^{n-j}\nabla w\right)\\
&\quad \left.+ P_k\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\partial_t^j w\,\partial_t^{n-j}\nabla u_k\right)\right]\\
&= -\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\{(P_l - P_k)[(\partial_t^j u_l)\nabla\partial_t^{n-j} u_l]\\
&\quad + P_k[(\partial_t^j u_l)\nabla\partial_t^{n-j} w]\\
&\quad + P_k[(\partial_t^j w)\nabla\partial_t^{n-j} u_k]\},
\end{aligned}$$

ou seja, obtemos a equação diferencial

$$\begin{aligned}
(\partial_t^n w)_t - P\Delta\partial_t^n w = &- \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\{(P_l - P_k)[(\partial_t^j u_l)\nabla\partial_t^{n-j} u_l]\\
&+ P_k[(\partial_t^j u_l)\nabla\partial_t^{n-j} w] + P_k[(\partial_t^j w)\nabla\partial_t^{n-j} u_k]\}. \qquad (2.82)
\end{aligned}$$

Usando a identidade (2.4), o produto interno de (2.82) com $\partial_t^n w \in \mathbf{V}$ em $\mathbf{L}^2$ resulta na seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\partial_t|\partial_t^n w|_{\mathbf{L}^2}^2 + |\nabla\partial_t^n w|_{\mathbf{L}^2}^2 &= ((\partial_t^n w)_t, \partial_t^n w)_{\mathbf{L}^2} + (-P\Delta\partial_t^n w, \partial_t^n w)_{\mathbf{L}^2}\\
&= -\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\int_\Omega\{(P_l - P_k)[(\partial_t^j u_l)\nabla\partial_t^{n-j} u_l]\\
&\quad + P_k[(\partial_t^j u_l)\nabla\partial_t^{n-j} w] + P_k[(\partial_t^j w)\nabla\partial_t^{n-j} u_k]\}\,\partial_t^n w,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\partial_t|\partial_t^n w|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2|\nabla\partial_t^n w|_{\mathbf{L}^2}^2 = &- 2\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\int_\Omega\{(P_l - P_k)[(\partial_t^j u_l)\nabla\partial_t^{n-j} u_l]\\
&+ P_k[(\partial_t^j u_l)\nabla\partial_t^{n-j} w]\\
&+ P_k[(\partial_t^j w)\nabla\partial_t^{n-j} u_k]\}\,\partial_t^n w. \qquad (2.83)
\end{aligned}$$

Em uma primeira etapa, vamos estabelecer uma estimativa para o valor inicial da função $|\partial_t^n w(t,.)|^2_{\mathbf{L}^2}$ em um ponto $t_* \in (\varepsilon, 2\varepsilon)$. Em seguida, usando estimativas para cada um dos três termos da integral em (2.83), que decorrerão das desigualdades enunciadas na seção 4, obteremos uma desigualdade diferencial linear e, então, resolvendo-a obteremos (2.82. n). Como, por hipótese, a desigualdade (2.82. $n-1$) é verdadeira, temos

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} |\partial_\tau^n w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \;\leq\; \frac{G^*_{n-1}(2\varepsilon\,,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}\,, \tag{2.84}$$

onde, por definição, o integrando é uma função contínua. Assim, o teorema do valor médio nos garante que a equação

$$\varepsilon|(\partial_t^n w)\,(t_*,.)|^2_{\mathbf{L}^2} = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} |\partial_\tau^n w(\tau,.)|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau$$

é válida para pelo menos um $t_* \in (\varepsilon, 2\varepsilon)$.

Portanto, pela desigualdade (2.84), obtemos

$$|(\partial_t^n w)\,(t_*,.)|^2_{\mathbf{L}^2} \;\leq\; \frac{G^*_{n-1}(2\varepsilon, \varepsilon)}{\varepsilon\,\lambda_{k+1}}\,, \tag{2.85}$$

para pelo menos um $t_* \in (\varepsilon, 2\varepsilon)$.

Agora reescrevemos o primeiro termo da integral em (2.83) de acordo com (2.35), ou seja,

$$\int_\Omega [(P_l - P_k)((\partial_t^j\, u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\, u_l)]\, \partial_t^n w = \int_\Omega ((\partial_t^j\, u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\, u_l)\,(I-P_k)\,\partial_t^n u_l\,.$$

Notemos que, por construção, a equação (2.35) também é válida com $\partial_t^n w$ e $(I-P_k)\,\partial_t^n u_l$ nos lugares de w e $(I-P_k)\,u_l$, respectivamente.

Então, usando (2.38), obtemos

$$\left|\int_\Omega [(P_l - P_k)((\partial_t^j\, u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\, u_l)]\, \partial_t^n w\right| \leq c_2\,|P\,\Delta\partial_t^j\, u_l|_{\mathbf{L}^2}\,|\nabla\partial_t^{n-j}\, u_l|_{\mathbf{L}^2}\,|(I-P_k)\,\partial_t^n u_l|_{\mathbf{L}^2}\,.$$

Portanto, das desigualdades (2.23) e (2.26) do Teorema 2.3 e pelo Lema 2.6, temos

$$\left|\int_\Omega [(P_l - P_k)((\partial_t^j\, u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\, u_l)]\, \partial_t^n w\right| \;\leq\; c_2\, g^{\frac{1}{2}}_{j,\varepsilon}\, F^{\frac{1}{2}}_{n-j}(t,\varepsilon)\,\frac{1}{\lambda_{k+1}}\, g^{\frac{1}{2}}_{n,\varepsilon}\,.$$

Usando o fato que as funções F_m e $g_{m,\varepsilon}$ são monótonas crescentes com respeito à m, obtemos

$$\left|\int_\Omega [(P_l - P_k)((\partial_t^j\, u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\, u_l)]\, \partial_t^n w\right| \;\leq\; \frac{c_2}{\lambda_{k+1}}\, F^{\frac{1}{2}}_n(t,\varepsilon)\, g_{n,\varepsilon}\,. \tag{2.86}$$

Para o segundo e o terceiro termo da integral no lado direito de (2.83), notemos que P_k é uma projeção ortogonal em $\mathbf{L}^2$. Então, por meio de (2.38) e pela desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega [P_k((\partial_t^j\, u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\, w)]\,\partial_t^n w\right| &\le |P_k((\partial_t^j\, u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\, w)|_{\mathbf{L}^2}|\partial_t^n w|_{\mathbf{L}^2}\\ &\le |(\partial_t^j\, u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\, w|_{\mathbf{L}^2}|\partial_t^n w|_{\mathbf{L}^2}\\ &\le c_2\,|P\,\Delta\partial_t^j\, u_l|_{\mathbf{L}^2}\,|\nabla\partial_t^{n-j}\, w|_{\mathbf{L}^2}\,|\partial_t^n w|_{\mathbf{L}^2}\\ &\le \delta|\nabla\partial_t^{n-j}\, w|^2_{\mathbf{L}^2}+c_\delta|P\,\Delta\partial_t^j\, u_l|^2_{\mathbf{L}^2}|\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2}\,,\end{aligned}$$

com c_δ dependendo apenas do valor arbitrário $\delta > 0$. Pelo Teorema 2.3, desigualdade (2.26) com $j = 0$, e no caso $j > 0$ usando também a estimativa (2.83. $n - j$), obtemos

$$\left|\int_\Omega [P_k(u_l\,\nabla\partial_t^n\, w)]\,\partial_t^n w\right| \le \delta|\nabla\partial_t^n\, w|^2_{\mathbf{L}^2}+c_\delta\, g_{0\,,\varepsilon}\,|\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} \tag{2.87}$$

$$\left|\int_\Omega [P_k(\partial_t^j\, u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\, w]\,\partial_t^n w\right| \le \frac{\delta}{\lambda_{k+1}}G^*_{n-1}(t\,,\varepsilon)+c_\delta\, g_{n\,,\varepsilon}|\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2}\,, \tag{2.88}$$

pois G^*_m e $g_{m\,,\varepsilon}$ são funções crescentes com respeito à m .

Usando (2.51) para o terceiro termo da integral em (2.83) obtemos

$$\left|\int_\Omega [P_k((\partial_t^j\, w)\nabla\partial_t^{n-j}\, u_k)]\,\partial_t^n w\right| \le \delta|\nabla\partial_t^j\, w|^2_{\mathbf{L}^2}+c_\delta|P\,\Delta\partial_t^{n-j}\, u_k|^2_{\mathbf{L}^2}|\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2}\,,$$

com c_δ dependendo apenas do valor arbitrário $\delta > 0$. Assim, no caso $j = n$, usando a estimativa (2.26) do Teorema 2.3 e no caso $j < n$ (ou seja , $j \le n-1$) usando também a estimativa (2.83. $n - j$) e o Teorema 2.3 (2.26), obtemos

$$\left|\int_\Omega [P_k((\partial_t^n\, w)\nabla u_k)]\,\partial_t^n w\right| \le \delta|\nabla\partial_t^n\, w|^2_{\mathbf{L}^2}+c_\delta\, g_{0\,,\varepsilon}\,|\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} \tag{2.89}$$

e

$$\left|\int_\Omega [P_k((\partial_t^j\, w)\nabla\partial_t^{n-j}\, u_k)]\,\partial_t^n w\right| \le \frac{\delta}{\lambda_{k+1}}G^*_{n-1}(t\,,\varepsilon)+c_\delta\, g_{n\,,\varepsilon}|\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2}\,, \tag{2.90}$$

pois G^*_m e $g_{m\,,\varepsilon}$ são funções crescentes com respeito à m. O coeficiente c_δ depende apenas do valor arbitrário $\delta > 0$.

Agora assumimos $\delta \in (0\,,\frac{1}{4}]$. Substituindo as estimativas (2.86) - (2.90) em (2.83), obtemos

$$
\begin{aligned}
\partial_t|\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} + 2|\nabla\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} \;\; \leq \;\; & 2\left\{ \frac{c_2}{\lambda_{k+1}}\, F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon)\, g_{n,\varepsilon} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \right. \\
& + \delta\, |\nabla\partial_t^n\, w|^2_{\mathbf{L}^2} \, + \, c_\delta\, g_{0,\varepsilon}\, |\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} \\
& + \left[\frac{\delta\, G^*_{n-1}(t\,,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} + c_\delta\, g_{n,\varepsilon} |\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} \right] \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \\
& + \delta\, |\nabla\partial_t^n\, w|^2_{\mathbf{L}^2} + \, c_\delta\, g_{0,\varepsilon}\, |\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} \\
& \left. + \left[\frac{\delta\, G^*_{n-1}(t\,,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} + c_\delta\, g_{n,\varepsilon} |\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} \right] \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \right\} \\
= \;\; & 2\left(\frac{c_2}{\lambda_{k+1}}\, F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon)\, g_{n,\varepsilon}\, 2^n + 2\delta |\nabla\partial_t^n\, w|^2_{\mathbf{L}^2} \right. \\
& \left. + 2\, c_\delta\, g_{0,\varepsilon}\, |\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} \right) \\
& + 4\left(\frac{\delta\, G^*_{n-1}(t\,,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} + c_\delta\, g_{n,\varepsilon} |\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} \right) (2^n - 1) \\
= \;\; & \frac{2^{n+1}\, c_2}{\lambda_{k+1}}\, F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon)\, g_{n,\varepsilon} \, + \, 4\delta |\nabla\partial_t^n\, w|^2_{\mathbf{L}^2} \, + \, 4 c_\delta\, g_{0,\varepsilon}\, |\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} \\
& + 4\,(2^n - 1) \left(\frac{\delta\, G^*_{n-1}(t\,,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} \, + \, c_\delta\, g_{n,\varepsilon} |\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} \right) \\
\leq \;\; & \frac{2^{n+1}}{\lambda_{k+1}} (c_2\, F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon)\, g_{n,\varepsilon} \, + \, 2\delta\, G^*_{n-1}(t\,,\varepsilon)) \, + \, 4\delta |\nabla\partial_t^n\, w|^2_{\mathbf{L}^2} \\
& + 4 c_\delta\, (g_{0,\varepsilon} \, + \, 2^n\, g_{n,\varepsilon})\, |\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2}\,.
\end{aligned}
$$

Logo, como $1 \leq 2 - 4\delta < 2$ (pois $\delta \in (0, \frac{1}{4}]$) , temos a seguinte desigualdade diferencial

$$
\partial_t|\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} + |\nabla\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} \leq \frac{a(t)}{\lambda_{k+1}} + b|\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2}\,, \tag{2.91}
$$

para a função continuamente diferenciável $|\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2}$ com coeficientes contínuos

$$
\begin{aligned}
a(t) \;\; &= \;\; 2^{n+1}[c_2\, F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon)\, g_{n,\varepsilon} + 2\delta\, G^*_{n-1}(t\,,\varepsilon)] \text{ e} \\
b \;\; &= \;\; 4 c_\delta\, (g_{0,\varepsilon} + 2^n\, g_{n,\varepsilon})\,.
\end{aligned} \tag{2.92}
$$

A desigualdade diferencial (2.91) juntamente com a estimativa inicial (2.85) e a Proposição 2.7 resulta na seguinte desigualdade integral

$$
|\partial_t^n(u_l(t,.) - u_k(t,.))|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_{2\varepsilon}^{t} |\nabla\partial_\tau^n(u_l(\tau,.) - u_k(\tau,.))|^2_{\mathbf{L}^2}\, d\tau \leq \frac{A(t\,,2\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}\,, \tag{2.93}
$$

sobre $[2\varepsilon\,,T]$, com as funções contínuas

$$\begin{aligned}
A(t\,,2\varepsilon) &= \frac{G^*_{n-1}(2\varepsilon\,,\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^t [a(\tau) + b(\tau)\psi(\tau\,,2\varepsilon)]\,d\tau \\
\psi(t\,,2\varepsilon) &= \left[\frac{G^*_{n-1}(2\varepsilon\,,\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^t a(\tau)\,e^{-\int_{2\varepsilon}^t b(\tau)\,d\tau}\,d\tau\right] e^{\int_\varepsilon^t b(\tau)\,d\tau}
\end{aligned}$$

que são monótonas crescentes na variável t. Notemos que as funções $A\,,a$ e b são independentes da particular aproximação de Galerkin $u_l\,,l > k$. Agora escrevemos ε no lugar de 2ε, ou seja,

$$|\partial_t^n(u_l(t,.) - u_k(t,.))|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_\varepsilon^t |\nabla\partial_\tau^n(u_l(\tau,.) - u_k(\tau,.))|^2_{\mathbf{L}^2}\,d\tau \le \frac{A(t\,,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}\,, \tag{2.94}$$

sobre $[\varepsilon\,,T]$. De acordo com o Corolário 2.1, existe uma subsequência $(u_{l'}(t,.))$ convergindo junto com todos os $\partial_t^j\,u_{l'}(t,.)\,,j = 0,...,n$, em $\mathbf{H}^1$ para o respectivo limite $\partial_t^j\,u(t,.)$. A convergência é uniforme sobre $[\varepsilon\,,T]$. Em (2.94) podemos passar para o limite $l' \to \infty$ de onde obtemos

$$|\partial_t^n(u(t,.) - u_k(t,.))|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_\varepsilon^t |\nabla\partial_\tau^n(u(\tau,.) - u_k(\tau,.))|^2_{\mathbf{L}^2}\,d\tau \le \frac{A(t\,,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}\,.$$

Definindo $F^*_n(t\,,\varepsilon) = max\,\{A(t\,,\varepsilon)\,,F^*_{n-1}(t\,,\varepsilon)\}$, a sequência (F^*_m) se torna, também, monótona crescente em $m = 0\,,...\,,n$. Portanto

$$|\partial_t^n(u(t,.) - u_k(t,.))|^2_{\mathbf{L}^2} + \int_\varepsilon^t |\nabla\partial_\tau^n(u(\tau,.) - u_k(\tau,.))|^2_{\mathbf{L}^2}\,d\tau \le \frac{F^*_n(t\,,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}\,,$$

ou seja, acabamos de demonstrar $(2.82.\,n)$. Já para provarmos $(2.83.\,n)$ tomamos o produto interno de (2.82) em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ com a função vetorial $\partial_t^{n+1}\,w \in \mathbf{V}$. Utilizando (2.4) obtemos a seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned}
|\partial_t^{n+1}w|^2_{\mathbf{L}^2} + \tfrac{1}{2}\partial_t|\nabla\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} &= (\,(\,\partial_t^n w)_t\,,\,\partial_t^{n+1}w\,)_{\mathbf{L}^2} + (\,-P\Delta\partial_t^n w\,,\,\partial_t^{n+1}w\,)_{\mathbf{L}^2} \\
&= -\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \int_\Omega \{(P_l - P_k)[(\partial_t^j\,u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\,u_l] \\
&\quad + P_k[(\partial_t^j\,u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\,w] \\
&\quad + P_k[(\partial_t^j\,w)\nabla\partial_t^{n-j}\,u_k]\}\,\partial_t^{n+1}w\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\partial_t|\nabla\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} + 2|\partial_t^{n+1}w|^2_{\mathbf{L}^2} = &- 2\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \int_\Omega \{(P_l - P_k)[(\partial_t^j\,u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\,u_l] \\
&+ P_k[(\partial_t^j\,u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\,w] \\
&+ P_k[(\partial_t^j\,w)\nabla\partial_t^{n-j}\,u_k]\}\,\partial_t^{n+1}w
\end{aligned} \tag{2.95}$$

para a função $|\nabla \partial_t^n w(t,.)|_{\mathbf{L}^2}^2$. Pela desigualdade $(2.82.\, n)$, temos

$$\int_{2\varepsilon}^{3\varepsilon} |\nabla \partial_\tau^n w(\tau,.)|_{\mathbf{L}^2}^2 \, d\tau \leq \frac{F_n^*(3\varepsilon, 2\varepsilon)}{\lambda_{k+1}} \, . \tag{2.96}$$

Como o integrando é uma função contínua, concluímos, pelo teorema do valor médio do cálculo integral, que a equação

$$\varepsilon |(\nabla \partial_t^n w)\,(t_*,.)|_{\mathbf{L}^2}^2 = \int_{2\varepsilon}^{3\varepsilon} |\nabla \partial_\tau^n w(\tau,.)|_{\mathbf{L}^2}^2 \, d\tau$$

é válida para pelo menos um $t_* \in (2\varepsilon, 3\varepsilon)$.

Portanto, pela desigualdade (2.96), obtemos

$$|(\nabla \partial_t^n w)\,(t_*,.)|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \frac{F_n^*(3\varepsilon, 2\varepsilon)}{\varepsilon\, \lambda_{k+1}} \, , \tag{2.97}$$

para pelo menos um $t_* \in (2\varepsilon, 3\varepsilon)$.

Reescrevemos o primeiro termo da integral em (2.95) de acordo com (2.35), ou seja,

$$\int_\Omega [(P_l - P_k)((\partial_t^j \, u_l)\nabla \partial_t^{n-j} \, u_l)] \, \partial_t^{n+1} w = \int_\Omega ((\partial_t^j \, u_l)\nabla \partial_t^{n-j} \, u_l)\,(I - P_k)\, \partial_t^{n+1} u_l \, .$$

Notemos que, por construção, a equação (2.35) também é válida com $\partial_t^{n+1} w$ e $(I - P_k)\,\partial_t^{n+1} u_l$ nos lugares de w e $(I - P_k)\, u_l$, respectivamente .

Então, usando (2.38), obtemos

$$\left| \int_\Omega [(P_l - P_k)((\partial_t^j \, u_l)\nabla \partial_t^{n-j} \, u_l)] \, \partial_t^{n+1} w \right| \leq c_2 \, |P\, \Delta \partial_t^j \, u_l|_{\mathbf{L}^2} \, |\nabla \partial_t^{n-j} \, u_l|_{\mathbf{L}^2} \, |(I - P_k)\, \partial_t^{n+1} u_l|_{\mathbf{L}^2} \, .$$

Portanto, pelo Teorema 2.3 (2.23), (2.26) e pelo Lema 2.6, temos

$$\left| \int_\Omega [(P_l - P_k)((\partial_t^j \, u_l)\nabla \partial_t^{n-j} \, u_l)] \, \partial_t^{n+1} w \right| \leq c_2 \, g_{j\,,\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \, F_{n-j}^{\frac{1}{2}}(t\,, \varepsilon) \, \frac{1}{\lambda_{k+1}} \, g_{n+1\,,\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \, .$$

Usando a monotonicidade de $g_{m\,,\varepsilon}$ e F_m com respeito à m (ambas são crescentes), obtemos

$$\left| \int_\Omega [(P_l - P_k)((\partial_t^j \, u_l)\nabla \partial_t^{n-j} \, u_l)] \, \partial_t^{n+1} w \right| \leq \frac{c_2}{\lambda_{k+1}} \, g_{n+1\,,\varepsilon} \, F_n^{\frac{1}{2}}(t, \varepsilon) \, . \tag{2.98}$$

Para o segundo e o terceiro termo da integral em (2.95), notemos que P_k é uma projeção ortogonal em $\mathbf{L}^2$, ou seja, vale (2.44). Então, por meio de (2.38) e pela desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega [P_k((\partial_t^j\, u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\, w)]\,\partial_t^{n+1} w\right| &\leq |P_k((\partial_t^j\, u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\, w)|_{\mathbf{L}^2}\,|\partial_t^{n+1} w|_{\mathbf{L}^2}\\ &\leq |(\partial_t^j\, u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\, w|_{\mathbf{L}^2}|\partial_t^{n+1} w|_{\mathbf{L}^2}\\ &\leq c_2\,|P\,\Delta\partial_t^j\, u_l|_{\mathbf{L}^2}\,|\nabla\partial_t^{n-j}\, w|_{\mathbf{L}^2}\,|\partial_t^{n+1} w|_{\mathbf{L}^2}\\ &\leq \delta|\partial_t^{n+1}\, w|^2_{\mathbf{L}^2} + c_\delta|P\,\Delta\partial_t^j\, u_l|^2_{\mathbf{L}^2}|\nabla\partial_t^{n-j} w|^2_{\mathbf{L}^2}\,.\end{aligned}$$

Portanto, usando a estimativa (2.26) do Teorema 2.3 com $j = 0$, e no caso $j > 0$ usando também a estimativa $(2.83.\, n-j)$, obtemos

$$\left|\int_\Omega [P_k(u_l\,\nabla\partial_t^n\, w)]\,\partial_t^{n+1} w\right| \leq \delta|\partial_t^{n+1}\, w|^2_{\mathbf{L}^2} + c_\delta\, g_{0\,,\varepsilon}\,|\nabla\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} \tag{2.99}$$

e

$$\left|\int_\Omega [P_k((\partial_t^j\, u_l)\nabla\partial_t^{n-j}\, w)]\,\partial_t^{n+1} w\right| \leq \delta|\partial_t^{n+1}\, w|^2_{\mathbf{L}^2} + c_\delta\, g_{n\,,\varepsilon}\,\frac{G^*_{n-1}(t\,,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}\,, \tag{2.100}$$

devido a monotonicidade de $g_{m\,,\varepsilon}$ e G^*_m em m.

Com a ajuda de (2.52) para o terceiro termo da integral em (2.95) concluimos

$$\left|\int_\Omega [P_k((\partial_t^j\, w)\nabla\partial_t^{n-j}\, u_k)]\,\partial_t^{n+1} w\right| \leq \delta|\partial_t^{n+1}\, w|^2_{\mathbf{L}^2} + c_\delta|\nabla\partial_t^j w|^2_{\mathbf{L}^2}\,|P\,\Delta\partial_t^{n-j}\, u_k|^2_{\mathbf{L}^2}\,,$$

com $c_\delta > 0$ dependendo apenas do valor arbitrário $\delta > 0$.

Assim, no caso $j = n$, usando a estimativa (2.26) do Teorema 2.3 e no caso $j < n$ (ou seja, $j \leq n-1$) usando também a estimativa $(2.83.\, j)$, temos

$$\left|\int_\Omega [P_k((\partial_t^n\, w)\nabla u_k)]\,\partial_t^{n+1} w\right| \leq \delta|\partial_t^{n+1}\, w|^2_{\mathbf{L}^2} + c_\delta\, g_{0\,,\varepsilon}\,|\nabla\partial_t^n w|^2_{\mathbf{L}^2} \tag{2.101}$$

e

$$\left|\int_\Omega [P_k((\partial_t^j\, w)\nabla\partial_t^{n-j}\, u_k)]\,\partial_t^{n+1} w\right| \leq \delta|\partial_t^{n+1}\, w|^2_{\mathbf{L}^2} + \frac{c_\delta}{\lambda_{k+1}} g_{n\,,\varepsilon}\, G^*_{n-1}(t\,,\varepsilon)\,. \tag{2.102}$$

Agora assumimos $\delta \in (0\,, 2^{-(n+3)})$. Reunindo as estimativas (2.98) - (2.102), a partir de (2.95) vemos

$$\begin{aligned}
\partial_t|\nabla\partial_t^n w|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2|\partial_t^{n+1}w|_{\mathbf{L}^2}^2 \;\le\; & 2\left\{ \frac{c_2}{\lambda_{k+1}}\, g_{n+1\,,\varepsilon}\, F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon) \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} \right. \\
& + \delta\, |\partial_t^{n+1}\, w|_{\mathbf{L}^2}^2 + c_\delta\, g_{0\,,\varepsilon}\, |\nabla\partial_t^n w|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
& + \left[\delta\, |\partial_t^{n+1}\, w|_{\mathbf{L}^2}^2 + c_\delta\, g_{n\,,\varepsilon}\, \frac{G_{n-1}^*(t\,,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}\right] \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j} \\
& + \delta\, |\partial_t^{n+1}\, w|_{\mathbf{L}^2}^2 + \; c_\delta\, g_{0\,,\varepsilon}\, |\nabla\partial_t^n w|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
& \left. + \left[\delta\, |\partial_t^{n+1}\, w|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{c_\delta}{\lambda_{k+1}}\, g_{n\,,\varepsilon} G_{n-1}^*(t\,,\varepsilon)\right] \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j} \right\} \\
= \;& 2\left(\frac{c_2}{\lambda_{k+1}}\, F_n^{\frac{1}{2}}(t\,,\varepsilon)\, g_{n+1\,,\varepsilon}\, 2^n + 2\delta|\partial_t^{n+1}\, w|_{\mathbf{L}^2}^2 \right. \\
& \left. + 2c_\delta\, g_{0\,,\varepsilon}\, |\nabla\partial_t^n w|_{\mathbf{L}^2}^2 \right) \\
& + 4\left(\delta|\partial_t^{n+1}\, w|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{c_\delta}{\lambda_{k+1}}\, g_{n\,,\varepsilon} G_{n-1}^*(t\,,\varepsilon)\right)\, (2^n - 1) \\
= \;& \frac{2^{n+1}\, c_2}{\lambda_{k+1}}\, F_n^{\frac{1}{2}}(t\,,\varepsilon)\, g_{n+1\,,\varepsilon}\, + 4\delta|\partial_t^{n+1}\, w|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
& + 4c_\delta\, g_{0\,,\varepsilon}\, |\nabla\partial_t^n w|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
& + 4(2^n - 1)\left(\delta|\partial_t^{n+1}\, w|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{c_\delta}{\lambda_{k+1}}\, g_{n\,,\varepsilon} G_{n-1}^*(t\,,\varepsilon)\right) \\
\le \;& \frac{2^{n+1}}{\lambda_{k+1}}(c_2\, F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon)\, g_{n+1\,,\varepsilon} + 2c_\delta\, g_{n\,,\varepsilon} G_{n-1}^*(t\,,\varepsilon)) \\
& + 4c_\delta\, g_{0\,,\varepsilon}\, |\nabla\partial_t^n\, w|_{\mathbf{L}^2}^2 + \; 4\,\delta\,(1 + 2^n)\, |\partial_t^{n+1}\, w|_{\mathbf{L}^2}^2\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
& \partial_t|\nabla\partial_t^n w|_{\mathbf{L}^2}^2 \;+\; [2 \;-\; 4\,\delta\,(1 \;+\; 2^n)]\, |\partial_t^{n+1} w|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
& \le \frac{2^{n+1}}{\lambda_{k+1}}(c_2\, F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon)\, g_{n+1\,,\varepsilon} + 2c_\delta\, g_{n\,,\varepsilon} G_{n-1}^*(t\,,\varepsilon)) \\
& + 4c_\delta\, g_{0\,,\varepsilon}\, |\nabla\partial_t^n\, w|_{\mathbf{L}^2}^2\,.
\end{aligned}$$

Logo, como $1 \;<\; 2 \;-\; 4\,\delta\,(1 \;+\; 2^n) \;<\; 2\,(\text{ pois } \delta \;\in\; (0\,, 2^{-(n+3)})\,)$, temos a seguinte desigualdade

$$\partial_t|\nabla\partial_t^n w|_{\mathbf{L}^2}^2 + |\partial_t^{n+1}w|_{\mathbf{L}^2}^2 \le \frac{a(t)}{\lambda_{k+1}} + b|\nabla\partial_t^n w|_{\mathbf{L}^2}^2\,, \tag{2.103}$$

sobre $[\varepsilon\,, T]$ para a função continuamente diferenciável $|\nabla\partial_t^n w(t,.)|_{\mathbf{L}^2}^2$ com coeficientes contínuos

$$\begin{aligned} a(t) &= 2^{n+1}[c_2\, F_n^{\frac{1}{2}}(t,\varepsilon)\, g_{n+1\,,\varepsilon} \,+\, 2c_\delta\, g_{n\,,\varepsilon}\, G_{n-1}^*(t\,,\varepsilon)] \qquad \text{e} \\ b &= 4c_\delta\, g_{0\,,\varepsilon}\,. \end{aligned} \tag{2.104}$$

De acordo com a Proposição 2.7 (com $\varepsilon_0 = 2\varepsilon$) , a desigualdade diferencial (2.103) juntamente com a condição inicial (2.97) resulta na seguinte desigualdade

$$|\nabla\partial_t^n(u_l(t,.) - u_k(t,.))|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_{3\varepsilon}^t |\partial_\tau^{n+1}(u_l(\tau,.) - u_k(\tau,.))|_{\mathbf{L}^2}^2\, d\tau \le \frac{A(t\,,3\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}\,, \tag{2.105}$$

sobre $[3\varepsilon\,,T]$, com as funções contínuas

$$\begin{aligned} A(t\,,3\varepsilon) &= \frac{F_n^*(3\varepsilon\,,2\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{2\varepsilon}^t [a(\tau) + b(\tau)\psi(\tau\,,3\varepsilon)]\, d\tau \\ \psi(t\,,3\varepsilon) &= \left[\frac{F_n^*(3\varepsilon\,,2\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{2\varepsilon}^t a(\tau)\, e^{-\int_{3\varepsilon}^t b(\tau)\, d\tau}\, d\tau\right] e^{\int_{2\varepsilon}^t b(\tau)\, d\tau}\,. \end{aligned}$$

As funções $A(t\,,3\varepsilon)\,, a$ e b são independentes da particular aproximação de Galerkin $u_l\,, l > k$. Agora escrevemos ε no lugar de 3ε , ou seja

$$|\nabla\partial_t^n(u_l(t,.) - u_k(t,.))|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_{\varepsilon}^t |\partial_\tau^{n+1}(u_l(\tau,.) - u_k(\tau,.))|_{\mathbf{L}^2}^2\, d\tau \le \frac{A(t\,,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}\,, \tag{2.106}$$

sobre $[\varepsilon\,,T]$. De acordo com o Corolário 2.1, existe uma subsequência $(u_{l'}(t,.))$ convergindo com todas as derivadas com respeito ao tempo $\partial_t^m\, u_{l'}(t,.)\,, m = 0,...,n+1\,,$ em $\mathbf{H}^1$ para $\partial_t^m\, u(t,.)$, respectivamente. A convergência é uniforme sobre $[\varepsilon\,,T]$. Em (2.106) podemos passar para o limite $l' \to \infty$ de onde obtemos

$$|\nabla\partial_t^n(u(t,.) - u_k(t,.))|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_{\varepsilon}^t |\partial_\tau^{n+1}(u(\tau,.) - u_k(\tau,.))|_{\mathbf{L}^2}^2\, d\tau \le \frac{A(t\,,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}\,.$$

Note que $\dfrac{A(t\,,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}$ é uma função monótona crescente em t . Definindo

$$G_n^*(t\,,\varepsilon) = max\,\{A(t\,,\varepsilon)\,, G_{n-1}^*(t\,,\varepsilon)\}\,,$$

a sequência (G_m^*) se torna, também, monótona crescente em $m = 0\,,1\,,...\,,n$. Portanto

$$|\nabla\partial_t^n(u(t,.) - u_k(t,.))|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_{\varepsilon}^t |\partial_\tau^{n+1}(u(\tau,.) - u_k(\tau,.))|_{\mathbf{L}^2}^2\, d\tau \le \frac{G_n^*(t\,,\varepsilon)}{\lambda_{k+1}}\,,$$

ou seja, $(2.83.\,n)$ acabou de ser demonstrado. ■

Apêndice A

Dedução das Equações de Navier-Stokes

Neste apêndice, temos como objetivo principal, fazer uma dedução do modelo matemático para o escoamento de fluidos homogêneos, incompressíveis e viscosos, por meio de argumentos elementares e intuitivos, dirigido às pessoas interessadas em ciência, em geral. Tal dedução é baseada nas notas de aula do Professor Luis Adauto Medeiros [9].

A.1 Considerações Físicas e Geométricas

Consideremos um fluido em movimento. Para fixar idéia, pensamos em água fluindo em um canal. Representemos por Ω um aberto limitado contido no ambiente onde se encontra o fluido. Pensamos Ω cheio do fluido, com fronteira regular Γ. O espaço onde Ω está imerso é o $\mathbb{R}^3$, constituído dos pontos $x = (x_1, x_2, x_3)$. Representamos por Γ a fronteira de Ω que é uma superfície do $\mathbb{R}^3$. Por $\vec{n}$ representamos a normal unitária externa à fronteira Γ de Ω. Denotamos por $\vec{u}$ o vetor de componentes $(u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$, denominado a velocidade do fluido, isto é, das partículas do fluido. Denotamos $\vec{u}$ por $\vec{u}(x, t)$ a velocidade no ponto x no instante t.

Consideremos uma porção $d\Gamma$ da superfície Γ. Denominamos fluxo através de $d\Gamma$, a massa de fluido que atravessa $d\Gamma$, na direção da normal, $\vec{n}$, na unidade de tempo. Calculamos, de modo intuitivo, o fluxo, considerando a velocidade $\vec{u}$ das partículas. De fato, no instante Δt uma partícula se desloca de $\vec{u}\,\Delta t$, na direção de $\vec{u}$. Considerando os pontos de $d\Gamma$, no instante Δt, o total de partículas atravessando $d\Gamma$ é a massa de fluido contida no prisma de altura $u\,\Delta t$, onde u é o módulo de $\vec{u}$, base $d\Gamma$. Se desejarmos este fluxo na direção da normal $\vec{n}$, projeta-se $\vec{u}$ sobre $\vec{n}$, obtendo-se $u_n\,\Delta t$ para altura do prisma, sendo $u_n = proj_{\vec{n}}\,\vec{u} = (\,\vec{u}\,,\,\vec{n}\,)$, produto escalar no $\mathbb{R}^3$. Portanto o total de partículas atravessando $d\Gamma$ na unidade de tempo Δt, na direção da normal $\vec{n}$, mede-se pelo total de partículas de fluido contido no prisma de base $d\Gamma$ e altura $u_n\,\Delta t$, isto é, seu volume é dado por

$$d\Gamma \times u_n\,\Delta t\,.$$

O fluxo sendo a massa de fluido contida neste prisma, será dado por

$$\rho\,u_n\,\Delta t\,d\Gamma\,,$$

onde por $\rho = \rho\,(x,t)$ representamos a densidade do fluido, massa por unidade de volume.

No plano tem-se a visão geométrica na Fig. 1.

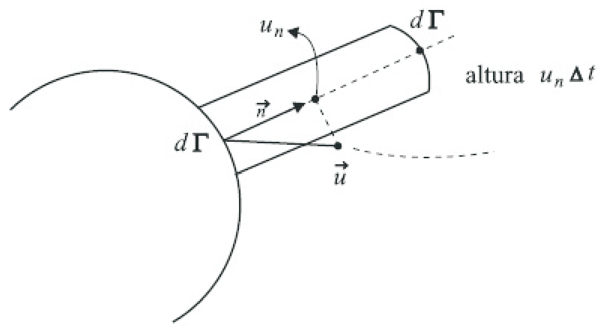

Fig. 1

Convencionamos que o fluxo é positivo se calculado na direção positiva de $\vec{n}$ e negativo na direção oposta.

Portanto, o fluxo através de Γ, no intervalo $\Delta t = 1$, será o somatório dos fluxos elementares $\rho\,u_n\,\Delta t$, isto é,

$$\int_\Gamma \rho\,(x,t)\,u_n\,(x,t)\,d\Gamma\,, \tag{A.1}$$

integral sobre a superfície Γ.

A.2 Equação de Continuidade

Admitiremos o princípio de conservação de massa de fluido: "a variação da massa de fluido no interior de Ω, em relação ao tempo, é igual ao fluxo de fluido através da fronteira Γ."

Traduziremos, a seguir, matematicamente, este princípio. De fato, sendo $\rho(x,t)$ a densidade do fluido, a massa de fluido contida em Ω é dada por

$$M(t) = \int_\Omega \rho(x,t)\,dx\,,$$

sendo $dx = dx_1\,dx_2\,dx_3$ a medida no $\mathbb{R}^3$. A variação, em relação ao tempo, é

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int_\Omega \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx\,. \tag{A.2}$$

Suponhamos a variação devido ao fluido entrando em Ω, isto é

$$-\int_\Gamma \rho(x,t)\,u_n(x,t)\,d\Gamma\,. \tag{A.3}$$

O princípio de conservação de massa diz que as integrais (A.2) e (A.3) são iguais, para todo aberto limitado Ω, com fronteira Γ. Notemos que se supõe Ω limitado e do mesmo lado de Γ. Por exemplo, Ω como na Fig. 2.

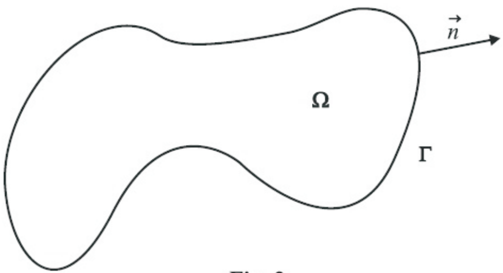

Fig. 2

Portanto, de (A.2), (A.3) e do princípio de conservação de massa, resulta

$$\int_\Omega \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx + \int_\Gamma \rho\,u_n\,d\Gamma = 0\,,$$

para todo Ω. Por meio do teorema da divergência, obtemos

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,\vec{u})\right] dx = 0\,,$$

para todo Ω. Supondo que o integrando é uma função contínua, obtemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{ div } (\rho \vec{u}) = 0 \text{ pontualmente em } \Omega . \tag{A.4}$$

Notemos que a componente u_i da velocidade $\vec{u}$ é $\dfrac{dx_i}{dt}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ vetor do $\mathbb{R}^3$, posição da partícula x no tempo t, isto é, $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Daí obtemos

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} u_i = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\text{ grad } \rho, \vec{u}). \tag{A.5}$$

Efetuando o cálculo, obtemos

$$\text{div } (\rho \vec{u}) = \rho \text{ div } (\vec{u}) + (\text{ grad } \rho, \vec{u}). \tag{A.6}$$

Substituindo (A.5) e (A.6) em (A.4), obtemos

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{ div } (\vec{u}) = 0 \text{ em } \Omega . \tag{A.7}$$

É claro que (A.4) e (A.7) são equivalentes e são chamadas de equação de continuidade ou lei de conservação de massa.

Dizemos que um fluido é **incompressível e homogêneo** quando sua densidade é constante ou, equivalentemente, div $\vec{u} = 0$ em todo Ω, isto é,

$$\text{div } \vec{u} = 0 \text{ em } \Omega . \tag{A.8}$$

A.3 Equações de Navier-Stokes

É um modelo matemático para descrição do movimento de fluidos homogêneos, densidade ρ constante, incompressíveis, div $\vec{u} = 0$ e viscosos. A dedução deste modelo será obtida por meio do princípio de conservação de quantidade de movimento. Estamos supondo

$$\rho \text{ constante e div } \vec{u} = 0 \text{ em } \Omega . \tag{A.9}$$

Consideremos um prisma de faces Δx_1, Δx_2, Δx_3 contido em Ω, cujo volume é

$$\Delta x = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

e massa $\rho\,\Delta\,x$. A quantidade de movimento desta massa é $\rho\,\Delta\,x\,\vec{u}$, sendo $\vec{u}$ a velocidade. Da definição de integral tripla, concluimos que a quantidade de movimento da massa de Ω é dada por

$$m\,(t) \;=\; \int_\Omega \rho\,\vec{u}\,(x,t)\,dx\,. \tag{A.10}$$

O princípio diz: " a variação da quantidade de movimento $m\,(t)$ de Ω , em relação ao tempo, é igual ao somatório das forças aplicadas a Ω ."

A variação da quantidade de movimento de Ω é

$$\frac{dm\,(t)}{dt} \;=\; \int_\Omega \rho\,\frac{d\,\vec{u}}{dt}dx\,. \tag{A.11}$$

As forças aplicadas em Ω , são de dois tipos:

(i) volumétricas aplicadas a Ω de densidade $\vec{f}\,(x,t) \;=\; (\,f_1\,(x,t)\,,\; f_2\,(x,t)\,,\; f_3(x,t)\,)$.

(ii) tensões internas, e viscosidades na fronteira Γ , cujas componentes admitiremos da forma

$$F_i\,(x,t) \;=\; \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\,(x,t)\,\eta_j\;, x \in \Omega\,, t \geq 0$$

$i \;=\; 1\,,\,2\,,3$. Os números reais η_j , $j \;=\; 1\,,\,2\,,3$, são as componentes da normal unitária $\vec{n}$, externa a Γ .

Suponhamos que as funções σ_{ij} são contínuas e continuamente diferenciáveis em relação a x e que as funções $f_i\,(x,t)$ são integráveis em Ω para todo $t \;>\; 0$. A matriz $\sigma_{ij}\,(x,t)\,,\, i\,,\, j \;=\; 1\,,2\,,3$, é denominada "tensor de tensões".

Deduzimos, do princípio de conservação da quantidade de movimento, a equação seguinte

$$\int_\Omega \rho\,\frac{d\,\vec{u}}{dt}\,dx \;=\; \int_\Omega \vec{f}\,(x,t)\,dx \;+\; \int_\Gamma \vec{F}\,(x,t)\,d\,\Gamma\,. \tag{A.12}$$

Escrevendo (A.12) para as componentes dos vetores dos integrandos, obtemos

$$\int_\Omega \rho\,\frac{du_i}{dt}\,dx \;=\; \int_\Omega f_i\,(x,t)\,dx \;+\; \int_\Gamma \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\,(x,t)\,\eta_j\,d\,\Gamma\,, \tag{A.13}$$

para $i \;=\; 1\,,2\,,3$.

Do Lema de Gauss, obtemos

$$\sum_{j=1}^{3} \int_{\Gamma} \sigma_{ij}\,(x,t)\,\eta_j\,d\,\Gamma \;=\; \sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j}\,\sigma_{ij}\,(x,t)\,dx\,,$$

que substituido em (A.13) resulta

$$\int_{\Omega} \rho\,\frac{du_i}{dt}\,dx \;=\; \int_{\Omega} f_i\,(x,t)\,dx \;+\; \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\,dx\,, \tag{A.14}$$

para $i\;=1\,,2\,,3\,.$

Para fluidos homogêneos, incompressíveis e viscosos encontramos que $\sigma_{ij}\,(x,t)$ tem a representação

$$\sigma_{ij}\,(x,t) \;=\; -\,p\,(x,t)\,\delta_{ij} \;+\; \nu\,\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \;+\; \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\,, \tag{A.15}$$

onde $p\,(x,t)$ é um número positivo e $\nu\;>\;0$ é a viscosidade do fluido. Sendo $\operatorname{div}\,\vec{u}\;=\;0\,,$ obtemos

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \;=\; -\,\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial p}{\partial x_j}\,\delta_{ij} \;+\; \nu\,\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\,\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \;+\; \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\,.$$

Notemos que $\delta_{ij}\;=\;0$ se $i\;\neq\;j$ e $\delta_{ij}\;=\;1$ se $i\;=\;j\,.$ Logo, $\dfrac{\partial p}{\partial x_j}\,\delta_{ij}\;=\;0$ se $i\;\neq\;j$ restando $\dfrac{\partial p}{\partial x_i}$, portanto

$$-\,\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial p}{\partial x_j}\,\delta_{ij} \;=\; -\,\frac{\partial p}{\partial x_i}\,. \tag{A.16}$$

Como $\operatorname{div}\,\vec{u}\;=\;0$ em $\Omega\,,$

$$\nu\,\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\,\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \;+\; \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \;=\; \nu\,\Delta\,u_i\,. \tag{A.17}$$

Substituindo (A.16) e (A.17) em (A.14) obtemos

$$\int_{\Omega} \rho\,\frac{\partial u_i}{\partial t}\,dx \;=\; \int_{\Omega} f_i\,(x,t)\,dx \;+\; \int_{\Omega} \left(-\,\frac{\partial p}{\partial x_i} \;+\; \nu\,\Delta\,u_i\right)\,dx \tag{A.18}$$

$i\;=\;1\,,2\,,3\,,$ para todo Ω imerso no fluido, resultando, devido a continuidade dos integrandos em (A.18)

$$\rho\,\frac{du_i}{dt} \;=\; f_i \;-\; \frac{\partial p}{\partial x_i} \;+\; \nu\,\Delta\,u_i \quad \text{em } \Omega \tag{A.19}$$

$i = 1, 2, 3$. O sistema (A.19) é denominado sistema de Navier-Stokes, para fluidos homogêneos, incompressíveis viscosos. Note-se que $\dfrac{du_i}{dt}$ é a aceleração do fluido.

Modificamos (A.19), observando que $\vec{u}(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ para $x = (x_1, x_2, x_3)$. Portanto, a velocidade das partículas é $u_j(x,t) = \dfrac{dx_j}{dt}$; logo

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j ,$$

que substituida em (A.12) resulta

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \text{ em } \Omega , \tag{A.20}$$

com $i = 1, 2, 3$, para $t \in (0,T), T > 0$. Podemos supor $\rho = 1$, pois ela é constante. Trata-se de um sistema de três equações diferenciais parciais nas incógnitas (u_1, u_2, u_3) e na pressão p. O problema matemático consiste em saber se o problema de valor inicial e de contorno (A.20) é bem posto no sentido de Hadamard, isto é, existe solução única que depende continuamente dos dados iniciais do problema?

De fato, dado Ω aberto limitado, não vazio do $\mathbb{R}^3$, com fronteira Γ de classe C^2, definamos o cilindro $Q = \Omega \times (0,T)$, $T > 0$, do $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^x \times \mathbb{R}^t$, com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$. O problema matemático consiste em determinar $u_i : Q \to \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, 3$, isto é, o vetor $\vec{u}(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$, solução do problema de valor inicial e de fronteira seguinte

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \dfrac{\partial p}{\partial x_i} & \text{em } Q \\ u_i = 0 & \text{em } \Sigma \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 & \text{em } Q \\ u_i(x,0) = u_{0i}(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{A.21}$$

Representamos o vetor $\vec{u}(x,t)$ por $u(x,t)$; grad $p = \left(\dfrac{\partial p}{\partial x_1}, \dfrac{\partial p}{\partial x_2}, \dfrac{\partial p}{\partial x_3} \right)$ por ∇p e

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) \quad ; \Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3).$$

Daí obtemos a notação

$$\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = \left(\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_2}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \right).$$

Com esta notação, escrevemos o sistema de Navier-Stokes (A.21) sob a forma

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} u_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j} & = & f - \nabla p & \text{em } Q \\ \text{div } u & = & 0 & \text{em } Q \\ u & = & 0 & \text{em } \Sigma \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{em } \Omega \end{array}\right. \tag{A.22}$$

Referências Bibliográficas

[1] Adams, Robert A. , *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Braz e Silva, P. & Rojas-Medar, M. , *Error bounds for semi-Galerkin approximations of nonhomogeneous incompressible fluids*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics 11 (2009) 186 − 207 .

[3] Brézis, H. , *Análisis Funcional, teoría y aplicaciones*, Alianza, Madrid, 1984.

[4] Brézis, H. & Cazenave, T. , *Nonlinear evolution equation* (em preparação), 1994.

[5] Cattabriga, L. , *Su un problema al contorno relativo al sistema de equazioni di Stokes*, Rend. Sem. Mat. Uni. Padova 31 (1961) 308-340.

[6] Evans, L. C. , *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Volume 19 (1998).

[7] Friedman, A. , *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[8] Heywood, J.G. , *The Navier-Stokes Equations: On The Existence, Regularity and Decay of Solutions*, Preprint, Univ. of British Columbia, Vancouver 1978.

[9] Medeiros, L. A. , *Sobre o Modelo Matemático Navier-Stokes*, IM-UFRJ, 2006.

[10] Medeiros, L. A. , *Tópicos em EDP: Lições sobre o Sistema de Navier-Stokes*, IM-UFRJ, 1983.

[11] Medeiros, L. A. & Miranda, M. Milla, *Espaços de Sobolev*, IM-UFRJ, 2000.

[12] Rautmann, R. , *On The Convergence Rate of Nonstationary Navier-Stokes Approximations*, Lecture Notes Mathematics - 771, Approximations Methods for Navier-Stoke Problem, Springer Verlag (1979) 425-449.

[13] Rudin, W. , *Real and Complex Analysis*, New York, McGraw-Hill, Third Edition, 1986.

[14] Temam, R. , *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, New York, North-Holland, 1977.

[15] Walter, W. , *Differential and Integral Inequalities*, Springer, Berlin 1970.

[16] Weyl, H. , *The method of orthogonal projection*, Duke Math. J. 7 (1940) 411-444.