UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Mestrado em Matemática

MATRÓIDES INDUZIDAS POR EMPACOTAMENTOS EM GRAFOS COM PESO

Hebe Cavalcanti Coutinho

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Recife
Outubro de 1990

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Hebe Cavalcanti Coutinho

MATRÓIDES INDUZIDAS POR EMPACOTAMENTOS EM GRAFOS COM PESO

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado em Matemática do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Prof. Manuel Lemos*

Recife
Outubro de 1990

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Coutinho, Hebe Cavalcanti
Matróides induzidas por empacotamentos em grafos com pesos / Hebe Cavalcanti Coutinho - Recife: O Autor, 1990.
vii, 46 folhas.

Orientador: Manoel Lemos.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 1990.

Inclui bibliografia.

1. Matemática. 2. Matemática discreta. 3. Matróides. I. Lemos, Manoel (orientador). II. Título.

510 CDD (22. ed.) MEI2011 – 177

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Gradução do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestre em Ciências.

Aprovado: ______________________________
Orientador

____

____

MATRÓIDES INDUZIDAS POR EMPACOTAMENTOS EM GRAFOS COM PESO

Por

Hebe Cavalcanti Coutinho

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária - Tels. 271-2211/R.2411
RECIFE - BRASIL

Outubro - 1990

RESUMO

Esta dissertação se propõe a explorar o artigo intitulado *Matroids induced by packing wheited subgraphs* de M. Lemos. Apresentamos, baseado no artigo de M. Loebl e S. Poljak, *On Matroids induced by packing subgraphs*, uma família $\mathcal{F}$, de subgrafos de $\mathcal{G}$ que preservam a propriedade de o conjunto dos vértices cobertos por algum $\mathcal{F}$-empacotamento gerarem uma matróide. Introduzimos os conceitos de família hipoemparelhável, $\mathcal{H}$, e família fechada de propulsores enraizados Π, e mostramos que se $\mathcal{F} = \mathcal{H} \cup \Pi$, os conjuntos dos vértices dos $\mathcal{F}$,-empacotamentos de peso máximo de uma matróide, com pequenas restrições à função peso, formam uma matróide.

Palavras chave: Matemática, Matemática discreta, matróides

ABSTRACT

The main purpose of this work is to study M. Lemos's paper named *Matroids induced by packing wheited subgraphs.* Regarding M. Loebl e S. Poljak's article, entitled *On Matroids induced by packing subgraphs*, we present a family $\mathcal{F}$, of subgraphs of $\mathcal{G}$, that maintains the property that any set of vertices covered by some $\mathcal{F}$-packing generates a matroid. We introduce the concepts a hipomatchable family, $\mathcal{H}$, and closed family or rooted propellers Π, to show that if $\mathcal{F} = \mathcal{H} \cup \Pi$, the maximum weighted sets of vertices of a $\mathcal{F}$- packing of a matroid turns out to be a matroid, under a weak conditions imposed to the weight function.

Key words: Mathematics, Discrete Mathematics, Matroids,

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O problema do F-empacotamento em um grafo G, onde F é uma família de subgrafos de G, consiste em encontrar um empacotamento $Q \subseteq F$ que cubra o maior número possível de vértices de G. Este problema foi estudado para os casos de empacotamentos por:

i) arestas [5,71];

ii) cópias de um único grafo H [9];

iii) arestas e cópias de um único grafo H [10];

iv) arestas e subgrafos hipoemparelháveis de G [3,4,10];

v) subgrafos isomorfos a uma seqüência de arestas [1,2,11,12].

Sabe-se que este problema foi resolvido em tempo polinomial nos casos *i, iv* e *v* descritos acima [5,4,3,10,8] e que esses possuem uma característica comum: a de os subgrafos cobertos por esses empacotamentos formarem os independentes de uma matróide [8,3,12].

Loebl e Poljak sugerem a seguinte conjectura: Um $\binom{G}{F}$-empacotamento induz uma matróide, se e só se, o problema do $\binom{G}{F}$-empacotamento é resolvido em tempo polinomial, onde $\binom{G}{F}$ denota o sistema de todos os subgrafos de um grafo G isomorfos a algum membro de F, sendo F uma família finita de grafos. Nesta dissertação estudamos exemplos de empacotamentos mais gerais que os descritos acima, mas que também geram matróides. Uma questão em aberto é verificar a conjectura nesses casos, ou seja, que existe algoritmo polinomial para solucionar o problema F-empacotamento.

Apresentamos no Capítulo 2, baseado em artigo de Loebl e Poljak [14], uma nova família F de subgrafos de G, constituída das arestas de G, de subgrafos hipo-emparelháveis de G e de uma família fechada de propulsores enraizados, contendo os casos *i, iv* e *v*, e que preserva a propriedade de os conjuntos dos vértices cobertos por algum F-empacotamento gerarem uma matróide.

No Capítulo 4, com base no artigo de M. Lemos [13], trabalhamos em grafos com pesos nos vértices. Introduzimos os conceitos de família hipoemparelhável, $\mathcal{H}$, e família fechada de propulsores enraizados Π e mostramos que, se $F \cup \Pi$, os conjuntos dos vértices dos F-empacotamentos de peso máximo formam as bases de um matróide, com uma pequena restrição a função peso.

Dando suporte aos Capítulos 2 e 4 acima citados, apresentamos no Capítulo 1, as matróides: Definições básicas e exemplos importantes dentro dessa teoria. E no Capítulo 3, os empacotamentos econômicos, importantes para tornar mais simples a leitura do Capítulo 4.

CAPÍTULO 1

MATRÓIDES

Os fundamentos da Teoria das Matróides foram lançados por Whitney, em 1935, [17], tendo evoluído a partir dos trabalhos de Birkoff, Van der Waerden e dele próprio. Essa teoria nos permite abstrair as propriedades de independência comuns aos espaços vetorias e aos grafos.

Apresentamos aqui algumas noções dentro dessa teoria. Optamos por definir matróides de maneira pouco usual, mas que nos permite perceber a abrangência de suas aplicações.

DEFINIÇÕES E EXEMPLOS:

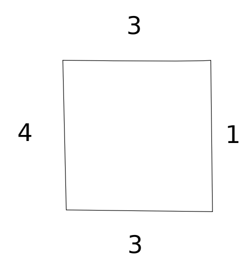
Dados um conjunto finito E, uma família $\mathcal{J}$ não vazia de subconjuntos de E satisfazendo a condição de hereditariedade ($I_1 \in \mathcal{J},\ I_2 \subseteq I_1$ então $I_2 \in \mathcal{J}$) e uma função peso $\rho : E \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ queremos encontrar um elemento de $\mathcal{J}$ que tenha peso máximo, entendendo-se por peso de $X \subseteq E,\ \rho(x) = \sum_{x \in X} \rho(x)$.

Dentre as várias maneiras de atacar esse problema, existe um algoritmo bastante simples, e por isso chamado de *Algoritmo Ambicioso*, que funciona da seguinte maneira:

Em cada passo, escolha o elemento "disponível" de major peso. Ou seja:
Tendo sido escolhidos $e_1, \ldots, e_n \in E,\ E_n = \{e_1, \ldots, e_n\} \in \mathcal{J}$, escolha $e_{n+1} \in E \setminus E_n$ com e_{n+i} de peso máximo tal que $\{e_i, \ldots, e_n,\ e_{n+1}\} \in \mathcal{J}$.

Verifica-se facilmente que este algoritmo nem sempre funciona, isto é, nem sempre produz elemento de peso máximo.

Por exemplo: Dado o grafo G com peso nas arestas, representado abaixo, queremos encontrar um emparelhamento de peso máximo. Se definirmos E como sendo o conjunto das arestas de G e $\mathcal{J}$ como sendo a família das arestas dos emparelhamentos de G, E e finito e $\mathcal{J}$ satisfaz a condição de hereditariedade. Aplicando o Algoritmo Ambicioso obtemos, no primeiro passo, a aresta de peso 4, e em seguida, a única aresta disponível: a de peso 1. Encontramos assim um emparelhamento de peso 5, não máximo visto que existe um emparelhamento de peso 6.



Às estruturas onde o Algoritmo Ambicioso funciona, chamaremos de Matróides. Mais precisamente, uma MATRÓIDE é um par $(E, \mathcal{J})$, E conjunto finito, $\mathcal{J} \subseteq 2^E$ satisfazendo à condição de hereditariedade, onde o Algoritmo Ambicioso produz elementos de $\mathcal{J}$ com peso máximo, para toda função peso $\rho : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Exemplo 1.1 Se A é uma matriz $m \times n$ sobre um corpo F, E é o conjunto dos vetores coluna de A e $\mathcal{J}$ á família dos subconjuntos linearmente independentes de elementos de E, então $(E, \mathcal{J})$ é uma matróide, como verificamos a seguir.

Obviamente E é um conjunto finito e, como todo subconjunto de um conjunto linearmente independente é linearmente independente, a hereditariedade de $\mathcal{J}$ é satisfeita.

Seja $\rho : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função peso qualquer e suponha que $\tilde{B} \in \mathcal{J}$ é uma solução produzida pelo Algoritmo Ambicioso. Seja B um conjunto linearmente independente de peso máximo, tendo o maior número possível de vetores em comum com $\tilde{B}$.

Mostraremos que $\tilde{B} = B$. Suponhamos $\tilde{B} \neq B$. Como os elementos de $\tilde{B}$ foram escolhidos um a um, seja $\tilde{v}_i$ o primeiro vetor de $\tilde{B}$ (obedecendo à ordem da escolha) que não está em B. Como B gera E (B e $\tilde{B}$ são na realidade bases de E), $\tilde{v}_i = \Sigma \lambda_j v_j, v_j \in B, \lambda_j \neq 0$. Observemos que algum dos v_j, digamos v_{j_0}, não está em $\tilde{B}$ pois, caso contrário, $\tilde{B}$ não seria linearmente independente.

Ora, no instante em que $\tilde{v}_i$ foi escolhido, v_{j_0} era candidato, logo $\rho(\tilde{v}_i) \geq \rho(v_{j_0})$. Seja então $\tilde{B} = (B \setminus v_{j_0}) \cup \tilde{v}_i$.

Observemos que $\tilde{B}$ é linearmente independente, logo pertence a $\mathcal{J}$; $\rho(\tilde{B}) = \rho(B) - \rho(v_{j_0}) + \rho(\tilde{v}_i) \geq \rho(B)$ então $\rho(\tilde{B}) = \rho(B)$ pois, por hipótese, B tem peso máximo, porém tem mais elementos em comum com $\tilde{B}$ que B, o que é uma contradição.

Logo, $\tilde{B} = B$, ou seja, $\tilde{B}$ tem peso máximo, qualquer que seja ρ.

Chamaremos de *Matróide Vetorial* à matróide obtida dessa forma a partir da matriz Ae denotaremos por $M(A)$.

Com uma demonstração análoga à do exemplo anterior, mostra-se facilmente o exemplo seguinte.

Exemplo 1.2 Se $G = (V, E)$ é um grafo, $E = E(G)$ e $\mathcal{J}$ é a família das arestas das florestas de G então $M = (E, \mathcal{J})$ é uma matróide, entendendo-se por floresta de um grafo qualquer subgrafo que não contenha ciclos. A matróide assim obtida chamaremos de *Matróide dos Ciclos* de G, e denotaremos por $M(G)$.

Esses dois exemplos são clássicos na teoria dos matróides e deles se extrai boa parte de sua terminologia.

Seja $M = (E, \mathcal{J})$ uma, matróide. M é dita uma matróide em E, e E é o seu conjunto base. Os elementos de $\mathcal{J}$ são ditos *independentes* de M. E os subconjuntos de E, que não estão em $\mathcal{J}$ são ditos *dependentes*. Os elementos independentes maximais são ditos *bases* de M, e notaremos por $\mathcal{B}$, ou $\mathcal{B}(M)$ se necessário, o conjunto das bases de M. Os elementos dependentes minimais de M são chamados de *Circuitos* de M e notaremos por $\mathcal{C}$, ou $\mathcal{C}(M)$, o conjunto dos circuitos de M.

Duas matróides $M_1 = (E_1, \mathcal{J}_1)$ e $M_2 = (E_2, \mathcal{J}_2)$ são ditas *isomorfas* se existe correspondência biuívoca entre E_1 e E_2 que preserva independência. Ou seja, M_1 é isomorfa a $M_2, M_1 \simeq M_2$, se e só se existe uma bijeçao $\psi : E_1 \longrightarrow E_2$ tal que $\psi(X)$ é independente em M_2, se e só se, X e independente em M_1.

Uma matróide isomorfa à matróide dos ciclos de G, para algum grafo G, é dita *Matróide Gráfica*. E diremos que uma matróide M é *representável sobre F*, ou

F-representável, se M é isomorfa a alguma matróide vetorial $M[A]$, para alguma matriz A sobre o corpo F.

UMA OUTRA DEFINIÇÃO DE MATRÓIDES – A DEFINIÇÃO VIA BASES

Caracterizamos agora as matróides via suas bases – independentes maximais. Essa equivalência é para nós destacável pois nos sera útil posteriormente. Na realidade, as matróides possuem a rara propriedade de poder ser definida de várias formas: por seus independentes, por seus circuitos, por meio de duas funções, posto e fecho, até agora não apresentadas, além das aqui abordadas – via algoritmos e bases.

Assim como as bases nos espaços vetorias, as bases das matróides satisfazem uma série de propriedades. Mostraremos inicialmente:

Proposição 1.3 *Se B_1 e B_2 são duas bases da matróide M e $x \in B_1 \setminus B_2$ então existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tal que $(B_2/y) \cup x \subseteq B_3 \in \mathcal{B}(M)$.*

Demonstração: Sejam B_1 e B_2 duas bases de M e $x \in B_1 \setminus B_2$, e defina a função peso $\rho : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\rho(e) = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad e \in B_1 \cap B_2 \quad \text{ou} \quad e = x \\ 1 - \varepsilon \quad \text{se} \quad e \in B_2 \setminus B_1 \\ 0 \quad \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

onde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

O Algoritmo Ambicioso, nesse caso, escolheria inicialmente os elementos de $B_1 \cap B_2$ e o elemento x. Em seguida pegaria alguns elementos de $B_2 \setminus B_1$, digamos os de $B_2' \subseteq B_2 \setminus B_1$. Por último poderia pegar elementos de peso zero, digamos de um conjunto B'.

Seja $B_A = (B_1 \cap B_2) \cup \{x\} \cap B_2' \cap B'$ a base obtida pelo algoritmo. (Observe que o algoritmo produz sempre independentes maximais, ou seja, bases, uma vez que a função peso não assume valores negativos).

Como M é uma matróide, $\rho(B_A) \geq \rho(B)$ qualquer que seja o independente B. Em particular, $\rho(B_A) \geq \rho(B_2)$, ou seja:

$$|B_1 \cap B_2| + 1 + |B_2'|(1-\varepsilon) \geq |B_1 \cap B_2| + |B_2 \setminus B_1|(1-\varepsilon).$$

Logo $|B_2'| > |B_2 \setminus B_1| - 1$. Assim, existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tal que $B_2' \supseteq B_2 \setminus (B_1 \cap y)$. E então, dado $x \in B_1 \setminus B_2$, existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tal que

$$(B_2 \setminus y) \cup x \subset B_A \in \mathcal{B}.$$

como queríamos demonstrar. ■

A proposição anterior (Proposição 1.3) é também conhecida como um dos axiomas da troca. Existem vários outros axiomas da troca, aparentemente mais fortes, mas na realidade equivalentes.

Nosso próximo passo será demonstrar a recíproca dessa proposição.

Proposição 1.4 *Seja $\mathcal{B}$ uma coleção não vazia de subconjuntos de um conjunto finito E tal que: se $B_1,\ B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \setminus B_2$, então existe $y \in B_2 \setminus B_1$ e $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $(B_2 \setminus y) \cup x \subseteq B_3$. Então B é o conjunto das bases da matróide $M = (E, \mathcal{J})$, onde $\mathcal{J}$ é a coleção de subconjuntos de E contidos em algum elemento de $\mathcal{B}$.*

Demonstração: É imediato ver que $\mathcal{J}$ satisfaz à condição de hereditariedade. Seja $\rho : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função peso qualquer, $\tilde{B}$ um elemento escolhido pelo Algoritmo Ambicioso e B um elemento de peso máximo de M tal que $|B \cap \tilde{B}|$ seja a maior possível. Mostraremos que $\tilde{B} = B$. Supondo $\tilde{B} \neq B$, sejam $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_m)$ ordenados decrescentemente (nos pesos) e seja $\tilde{b}_i$ o primeiro elemento de $\tilde{B}$ tal que $\tilde{b}_i \neq b_i$. (Vamos supor $\tilde{b}_i \in B$ pois, se $\tilde{b}_i \notin B$, podemos reordenar os elementos de B de tal forma que $\tilde{b}_i = b_i$). Então $\rho(\tilde{b}_i) \geq \rho(b_j) \quad \forall j \geq i$. Por hipótese, existe $b_{j_0} \in B \setminus \tilde{B}$ tal que $\tilde{B} = (B \setminus b_{j_0}) \cup \tilde{b}_i subset \tilde{B} \in B$. Mas $\rho(\tilde{B}) \geq \rho(B)$ pois $j_0 \geq i$. Logo $\rho(\tilde{B}) = \rho(B)$, visto que $\rho(B)$ é máximo.

Assim, $\tilde{B}$ é uma base (de peso máximo) com mais elementos em comum com $\tilde{B}$ que B, contradizendo a maximalidade da interseção de B com $\tilde{B}$. Logo $\tilde{B} = B$, como queríamos demonstrar. ■

Das proposições 1.3 e 1.4 decorre a seguinte proposição:

Corolário 1.5 *Se $\mathcal{B}$ é uma coleção não vazia de subconjuntos de um conjunto finito E, então $\mathcal{B}$ é a coleção das bases de uma matróide se e so se $\mathcal{B}$ satisfaz: se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \setminus B_2$, então existe $y \in B_2 \setminus B_1$ e $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $(B_2 \setminus y) \cup x \subseteq B_3$.* ■

Continuaremos a explorar um pouco mais o comportamento das bases, não por constituírem em si um assunto atraente, mas por nos proporcionarem ferramentas necessárias à conclusão de fatos interessantes posteriormente.

Proposição 1.6 *Se B_1 e B_2 são duas bases de uma matróide M e $x \in B_1 \setminus B_2$, então existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tal que $(B_1 \setminus x) \cup y \subseteq B_3 \in \mathcal{B}(M)$.*

Demonstração: Dados B_1 e $B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \setminus B_2$ construa a função peso $\rho : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$\rho(e) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad e \in (B_1 \setminus x) \cup B_2 \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Se o Algoritmo Ambicioso já pegou todos os elementos de $B_1 \setminus x$ (e nada impede que assim o faça), deve existir pelo menos um $y \in B_2 \setminus B_1$ tal que $B = (B_1 \setminus x) \cup y$ seja um independente – caso contrário o algoritmo não poderia produzir um elemento B_A de peso máximo. Então $(B_1 \setminus x) \cup y \subseteq B_A \in \mathcal{B}$, como queríamos demonstrar. ■

Proposição 1.7 *Toda base de uma matróide tem a mesma cardinalidade.*

Demonstração: Seja M uma matróide e defina $\rho : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\rho \equiv 1$. Observamos que, nesse caso, o peso de um independente qualquer é igual à sua cardinalidade, e o Algoritmo Ambicioso pode escolher qualquer maximal independente (ou seja, qualquer base). Logo $|B_1| = |B_2|, \quad \forall B_1,\ B_2 \in \mathcal{B}$.

Segue diretamente do Corolário 1.5 e das proposições 1.6 e 1.7:

Corolário 1.8 *Se B_1 e B_2 são duas bases de uma matróide M e $x \in B_1$, então:*

i) $\exists y \in B_2 \setminus B_1$ *tal que* $(B_2 \setminus y) \cup x \in \mathcal{B}$ *e*

ii) $\exists y' \in B_2 \setminus B_1$ *tal que* $(B_1 \setminus x) \cup y' \in \mathcal{B}$.

Com uma demonstração bastante técnica e envolvendo conceitos ainda não abordados, mostra-se que, nas hipóteses desse Corolário podemos escolher $y = y'$. Esse resultado é conhecido como o axioma de troca, versão forte, e o enunciaremos como:

Proposição 1.9 *Se B_1 e B_2 são duas bases de uma matróide M e $x \in B_1 \setminus B_2$, então existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tal que $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathcal{B}$ e $(B_2 \setminus y) \cup x \in \mathcal{B}$.*

O corolário abaixo segue imediatamente dos corolários 1.5 e 1.8, encerrando assim as equivalência via bases.

Corolário 1.10 *Seja $\mathcal{B}$ uma coleção não vazia de subconjuntos de um conjunto E. Então $\mathcal{B}$ é a coleção das bases de uma matróide se e só se $\mathcal{B}$ satisfaz: se B_1 e $B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \setminus B_2$, então existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tal que $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathcal{B}$ e $(B_2 \setminus y) \cup x \in \mathcal{B}$.*

MAIS EXEMPLOS: DUAL E MENORES A FUNÇÃO POSTO.

Destacamos alguns exemplos de matróides obtidos a partir de uma matróide dada e apresentamos algumas conseqüências interessantes.

Iniciamos mostrando que, dada uma matróide M, definida num conjunto E, podemos definir uma outra matróide M^* dita *Matróide de Dual de M*, também definida em E, cujas bases são os complementos das bases de M.

Proposição 1.11 *Se M é uma matróide em E então $\mathcal{B}^*(M) = \{E \setminus B; B \in \mathcal{B}(M)\}$ é o conjunto das bases de uma matróide em E.*

Demonstração: Dados B_1^* e $B_2^* \in \mathcal{B}^*$ e $x \in B_1^* \setminus B_2^*$, queremos mostrar que existe $y \in B_2^* \setminus B_1^*$ tal que $(B_2^*) \cup y \in \mathcal{B}^*$ pois, pelo Corolário 1.5, $\mathcal{B}^*$ é o conjunto das bases de uma matróide.

Seja $B_i = E \setminus B_i^*$. Então $B_i \in \mathcal{B}(M)$ e $B_1^* \setminus B_2^* = B_2 \setminus B_1$. Como $x \in B_1^* \setminus B_2^*$, $x \in B_2 \setminus B_1$, logo, pelo Corolário 1.8, existe $y \in B_1 \setminus B_2$ tal que $(B_2 \setminus x) \cup y \in \mathcal{B}(M)$. Mas se $y \in B_2 \setminus B_1$, $y \in B_1^* \setminus B_2^*$ e $E \setminus [(B_2 \setminus x) \cup y] \in \mathcal{B}^*$ pois $(B_2 \setminus x) \cup y] \in \mathcal{B}$. Mas

$E\backslash[(B_2\backslash x)\cup y] = [(E\backslash B_2)\backslash y)\cup x] = (B_2^*\backslash y)\cup x \in \mathcal{B}^*$, finalizando a demonstração.■

Observemos que $\mathcal{B}(M^*) = \mathcal{B}(M)$ e que dualidade é idempotente, ou seja $(M^*)^* = M$.

Em seguida mostramos que, se $M = (E, \mathcal{J})$ é uma matróide, $T \subseteq E$, e $\mathcal{J}|T = \{I \subseteq T : I \in \mathcal{J}\}$, então $M|T = (T, \mathcal{J}|T)$ forma uma matróide: a *Matróide Restrição* de M a T, algumas vezes chamada de deleção de $E \setminus T$ e notada, por $M \setminus (E \setminus T)$. Claramente as bases de $M|T$ são da forma $B|T$, onde B é uma base de M.

Proposição 1.12 *Se $M = (E, \mathcal{J})$ é uma matróide e $T \subseteq E$, então $M|T = (T, \mathcal{J}|T)$ é uma matróide.*

Demonstração: Seja $\rho : T \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função peso qualquer e $\tilde{B}$ um elemento maximal de $\mathcal{J}|X$ escolhido por meio do Algoritmo Ambicioso.

Se supusermos $\rho(\tilde{B})$ não máximo, podemos construir $\rho' : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$\rho'(e) = \begin{cases} \rho(e) & \text{se} \quad e \in T \\ 0 & \text{se} \quad e \in E \setminus T \end{cases}$$

e o Algoritmo Ambicioso poderá gerar o elemento $\tilde{B} \cup C$, para algum $C \subseteq E \setminus T$, logicamente com peso não máximo, contradizendo o fato de M ser uma matróide. Logo $\tilde{B}$ tem que ter peso máximo e assim $M|T$ é uma matróide. ■

Definimos a *contração* de $T \subseteq E$, como sendo a matróide $M/T = (M^*|(E \setminus T))^* = (M^* \setminus T)^*$.

Toda matróide obtida a partir de M por meio de restrição e/ou contração é chamada de menor de M.

Dada uma matróide $M = (E, \mathcal{J})$, para cada $T \subseteq E$ podemos associar o número real $p(T) = |B_T|$, onde B_T é uma base da matróide $M|T$, e construir, dessa forma, a função $p : 2^E \longrightarrow \mathbb{R}^+$, *Função Posto da Matróide M*. (Observemos que p está bem definida pois vimos, na Proposição 1.7, que toda base de uma matróide tem a mesma cardinalidade). E define-se *Posto da Matróide M*, $p(M)$, como sendo o posto do conjunto E, ou seja, $p(M) = p(E)$.

Mostra-se que a função posto goza de algumas propriedades, a saber:

($p1$) se $X \subseteq E$,então $0 \leq p(X) \leq |X|$;

($p2$) se $X \subseteq Y \subseteq E$, então $p(X) \leq p(Y)$

($p3$) $p(X \cup Y) + p(X \cap Y) \leq p(X) + p(Y), \quad \forall X,\ Y \subseteq E$,

e que essas propriedades são suficientes para definir uma matróide M em E, onde os independentes são os subconjuntos X de E tais que $p(X) = |X|$.

A propriedade ($p3$), única de verificação não imediata, é chamada de *Desigualdade de Semimodularidade* e, devido à simplicidade de sua verificação, exibiremos sua demonstração.

Proposição 1.13 *A função posto de uma matróide $M = (E, \mathcal{J})$ satisfaz:*

$$p(X \cup Y) + p(X \cap Y) \leq p(X) + p(Y),\ \forall X, Y \subseteq E.$$

Demonstração: Seja $B_{X\cap Y}$ uma base para $M(X \cap Y)$. Então $B_{X\cap Y}$ é um independente de $M(X \cup Y)$, logo contido numa base $B_{X\cup Y}$ dessa matróide. Por ($p2$),

$$|B_{X\cup Y} \cap Y| \leq p(Y)$$

$$|B_{X\cup Y} \cap X| \leq p(X),$$

então:

$$\begin{aligned}
P(X) + p(Y) \leq& |B_{X\cup Y} \cap Y| + |B_{X\cup Y} \cap X| = \\
=& |(B_{X\cup Y} \cap X) \cap (B_{X\cup Y} \cap Y)| + |(B_{X\cup Y} \cap X) \cup (B_{X\cup Y} \cap Y)| = \\
=& |B_{X\cup Y} \cap (X \cap Y)| + |B_{X\cup Y} \cap (X \cup Y)| = |B_{X\cap Y}| + |B_{X\cup Y}| = \\
=& p(X \cap Y) + p(X \cup Y).
\end{aligned}$$

■

Decorre diretamente das definições de dual e posto:

Proposição 1.14 $p(M) + p(M^*) = |E| \quad$ *onde* $\quad M = (E, \mathcal{J})$.

Exemplo: Matróide Uniforme

Se E e um conjunto de n elementos e $\mathcal{J}$ é a família dos subconjuntos de E de cardinalidade $\leq k$, onde $k \leq n$, é fácil ver que $(E, \mathcal{J})$ é uma matróide, conhecida como *Matróide Uniforme* e notada por $U_{k,n}$. Nesse caso, segue sem dificuldade que:

$$U_{k,n}^{*} \simeq U_{n-k,n}.$$

Assim, o dual de uma matróide uniforme é ainda uniforme. Então a classe dos matróides uniforme é fechada para dual.

E, se $T \subseteq E$ com $|T| = t$, temos:

$$U_{k,n}|T \simeq \begin{cases} U_{k,t} & \text{se} \quad k \leq t \\ U_{t,t} & \text{se} \quad k > t \end{cases}$$

e

$$U_{k,n}|T \simeq \begin{cases} U_{k-t,n-t} & \text{se} \quad t \leq k \\ U_{0,n-t} & \text{se} \quad t > k. \end{cases}$$

Observando que a restrição e a contração de uma matróide uniforme é ainda uniforme, podemos concluir que qualquer menor de uma matróide uniforme é uniforme.

Adiantamos que nem todas as classes de matróides gozam dessa propriedade. As classes que gozam dessa propriedade são ditas fechadas para menores.

A função posto de $U_{k,n}$ é dada por

$$p(X) = \begin{cases} |X| & \text{se} \quad |X| \leq k \\ k & \text{se} \quad |X| > k. \end{cases}$$

Exemplo: Matróide Gráfica

Vimos, no exemplo 1.2, que se G é um grafo, $M(G)$ é uma matróide nas arestas de G, cujos independentes são as arestas das florestas de G. Assim, $X \subseteq E = E(G)$

é uma base para $M(G)$ se e só se $G[X]$ é uma floresta maximal de G (onde $G[X]$ é o subgrafo de G induzido por X, ou seja, é o subgrafo de G cujas arestas são as arestas de X e os vértices são os vértices terminais das arestas de X). No caso de G ser conexo, $X \subseteq E(G)$ é base se e só se $G[X]$ é uma árvore geradora.

Da teoria dos grafos temos os seguintes resultados:

Proposição 1.15 *Se T é uma árvore então $|T| = |V(T)| - 1$ e, se T é uma florestas com $\omega(T)$ componentes, $|T| = |V(T)| - \omega(T)$.*

É fácil verificar que, se X ⊆ E(M),

Proposição 1.16 *$M(G)|X = M(G|X) = M(G[X])$ e $M(G)/X = M(G/X)$ (onde G/X é um grafo obtido a partir de G contraindo-se as arestas de X, isto é, deletando-se as arestas de X e identificando seus vértices terminais.)*

Podemos concluir então que a função posto de $M(G)$ é dada por

Proposição 1.17 *$p(X) = |V(G|X|)| - \omega(G[X])$, $\forall X \subseteq E(G)$ e, se G é conexo, $p(G) = |V(G)| - 1$.*

E, da Proposição 1.16, podemos concluir que a classe das matróides gráficas é fechada para menores.

Veremos a seguir que a classe das matróides gráficas não é fechada para dual.

Proposição 1.18 *$M^*(K_5)$ e $M^*(K_{3,3})$ não são matróides gráficas.*

Antes de demonstrar a Proposição 1.18, mostraremos um fato bastante simples que será necessário nessa demonstração.

Proposição 1.19 *Se M é uma matróide gráfica, então $M \simeq M(\overline{G})$ para algum grafo $\overline{G}$ conexo.*

Demonstração: Suponha G não conexo e $H_1, \ldots, H_n$ suas componentes conexas. Escolha um vértice v_i de cada componente H_i, $1 \leq i \leq n$, e identifique-os num único vértice. Obtemos assim um novo grafo $overlineG$ conexo. Como $E(G) = E(\overline{G})$ e nenhum ciclo foi criado com essa identificação, $G[X]$ é floresta se e só se $overlineG[X]$ é floresta, onde $X \subseteq E(G)$. Então $M(G) \simeq M(\overline{G})$, com $\overline{G}$ conexo. ■

Demonstração da Proposição 1.18: Suponhamos que $M^*(K_5)$ seja gráfica e seja G um grafo conexo (pela Proposição 1.19), tal que $M^*(K_5) \simeq M(G)$. Como $M(K_5)$ tem 10 elementos e posto 4, pelas proposições 1.14 e 1.17, $M(G)$ tem 10 elementos e posto 6. Então, pela proposição1.17, G tem 7 vértices e 10 arestas. Assim, podemos concluir que G tem um vértice de grau no máximo 2 (se todos os vértices possuissem grau pelo menos 3, como $\Sigma dv = 2|E|$, G teria que ter pelo menos 10,5 arestas). Então, K_5 tem um circuito de tamanho no máximo 2, pois G tem um corte mínimo (por aresta) de tamanho no máximo 2 que é absurdo. Logo $M^*(K_5)$ não é gráfica. Para $M^*(K_{3,3})$ a demonstração é bem parecida. ■

Lembremos que um grafo é dito plano se é desenhado no plano cartesiano de tal forma que suas arestas se interceptem apenas nos seus vértices terminais. E um grafo é dito planar se é isomorfo a algum grafo plano.

Nosso próximo passo será demonstrar que se G é um grafo planar, então $M^*(G)$ é gráfica.
Antes porém recordemos que, dado um grafo plano G, o dual (geométrico) de G, G^*, é construído da seguinte forma:

- No interior de cada face F_i de G, escolhe-se um ponto v_i^*. O conjunto desses pontos será o conjunto dos vértices de G^*.
- cada aresta e_j de G é fronteira de 2 faces F_n e F_m, não necessariamente distintas, então:
  Se $n \neq m$, constrói-se aresta e_j^*, ligando v_n^* a v_m^*. Se $n = m$ constrói-se o laço e_j^*, com base em v_m^*. Essas arestas serão as arestas de G^*.

Lembremos que as faces do grafo plano G são as regiões conexas em que o plano cartesiano fica dividido mediante as arestas de G. Observemos que G^* é um grafo plano que satisfaz $(G^*)^* = G$.

Um dual de um grafo planar G é o dual de algum grafo plano H, isomorfo a G. (H é dito uma representação planar de G). Um grafo planar pode ter várias representações (planares) e estas podem gerar duais não isomorfos. Entretanto:

Teorema 1.20 *Se G é um grafo planar e G^* é o dual (geométrico) de alguma representação planar de G, então $M^*(G) \simeq M(G^*)$.*

Demonstração: Para facilitar a demonstração, chamaremos de H uma representação planar de G e H^* seu dual geométrico. Temos que mostrar então que $M^*(G) = M(H^*)$.

Se G é uma árvore, $\mathcal{B}(M(G)) = \{E(G)\}$ logo $\mathcal{B}(M^*(G)) = \{\phi\}$. Como H^* tem um único vértice e alguns laços, $\mathcal{B}(M(H^*)) = \{\phi\}$. Logo $M^*(G) \simeq M(H^*)$.

Seja então G planar não árvore (isto é, G contém algum ciclo). Suponhamos, sem perda de generalidade, G conexo – caso desconexo poderíamos analisar cada componente separadamente.

Suponhamos que T é o conjunto das arestas de uma árvore geradora de H (T é uma base para $M(H)$). Seja T' as arestas correspondentes em H^*. Mostraremos que $T^* = E(H^*) \setminus T'$ é conjunto das arestas de uma árvore geradora de H^*, ou seja, T^* e incidente a todos os vértices de H^* e T^* não contém ciclos. T^* tem que ser incidente a todos os vértices de H^* pois, caso contrário, T conteria um ciclo, contrariando a hipótese de T ser árvore. Agora se C é um ciclo contido em T^*, então em H, a área (plana) dentro de C contém pelo menos 1 vértice v de H e: ou $v \in E(T)$ ou T é desconexo. Absurdo. Assim, se T é base $M(H)$, $E(H^*) \setminus T'$ é base para $M(H^*)$. Com um raciocínio análogo mostra-se que toda base de $M(H^*)$ é assim obtida de um base de $M(H)$. Logo $M(H^*) = M^*(H)$.

Então, se G é um grafo planar, $M^*(G)$ é uma matróide gráfica. ■

MATRÓIDES REPRESENTÁVEIS

Faremos aqui alguns comentários e observações sobre essa importante classe de matróides sem, no entanto, nos deter em detalhes e demonstrações.

Observemos inicialmente que se M é uma matróide F-representável, ($M \simeq M[A]$ para alguma matriz A sobre um corpo F) A não é, em geral, unicamente determinada. Verifica-se facilmente que M não se altera, se efetuarmos algumas operações sobre a matriz A, tais como: mudança de linha, mudança de coluna, multiplicação de uma linha por um escalar não nulo de F, deleção de uma linha nula, etc.

Mediante essas operações toda matriz pode se reduzir ao que se chama de *Forma Standard* para M. A pode ser reduzida a forma $[I_r|D]$ onde é a identidade $r \times r$ e D é alguma matriz $r \times (n-r)$ sobre F.

Usando-se a noção de posto de uma matriz mostra-se que:

Proposição 1.21 *Se M é a matróide vetorial de $[I_R, D]$, então M^* é a matróide vetorial de $[-D^T|I_{n-r}]$.*

E então podemos concluir que:

Proposição 1.22 *O dual de uma matróide representável sobre F é ainda representável sobre F.*

Ou seja. As matróides representáveis são fechadas para dual.

Seja A uma matriz e $T \subseteq E = \{\text{colunas de } A\}$. Denotemos por $A \setminus T$ a matriz obtida de A, deletando-se as colunas de T. Observa-se que:

Proposição 1.23 $M[A] \setminus T = M[A \setminus T]$.

E então podemos concluir que: todo menor de uma matróide F-representável é F-representável.

Daremos em seguida algumas definições para podermos apresentar alguns resultados relevantes.

Uma matróide é dita *binária* se é representável sobre $GF(2)$, é dita *ternária* se é representável sobre $GF(3)$, e é dita *regular* se é representável sobre todo corpo.

Por exemplo, a matróide de $U_{2,4}$ é ternária: $U_{2,4} \simeq M[A]$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ sobre $GF(3)$. E é simples ver que não é nem binária nem regular.

Define-se a *Matróide de Fano* – F_7 – como sendo a matróide $M \simeq M[A]$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} sobre GF(2)$$

. (Essa matróide advém de uma interpretação do plano projetivo de 7 pontos, o plano de Fano).

Dado um grafo G qualquer, podemos atribuir, arbitrariamente, direção a suas arestas e gerar assim o grafo dirigido $D(G)$. A partir de $D(G)$ constrói-se a matriz $AD(G)$ - matriz de incidência de $D(G)$ – cujas linhas e colunas são indexadas pelas arestas e vértices de $D(G)$ onde:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o vértice } i \text{ é terminal de} \\ & \text{uma aresta } j \text{ (não laço)} \\ -1 & \text{se o vértice } i \text{ é inicial de} \\ & \text{uma aresta } j \text{ (não laço)} \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Se F é um corpo qualquer, seja $A_{D(G)}(F)$ a matriz obtida de $A_{D(G)}$ com suas entradas reduzidas módulo F, mostra-se que $M(G) \simeq M[A_{D(G)}(F)]$ o que nos permite concluir:

Teorema 1.24 *Toda matróide gráfica é regular.*

Tutte [15] apresenta condições necessárias e suficientes para que uma matróide seja gráfica ou regular, em termos da exclusão de menores:

Teorema 1.25 *Uma matróide M é binária se e só se não contém menores isomorfos a $U_{2,4}$.*

Teorema 1.26 *Uma matróide M é regular se e só se é binária e não contém menor isomorfo a F_7 ou F_7^*.*

Teorema 1.27 *Uma, matróide M e gráfica se e só se é regular e não contém menor isomorfo a $M^*(K_{3,3})$ ou $M^*(K_5)$.*

MATRÓIDES E EMPARELHAMENTOS

Vimos que os grafos nos fornecem, por meio de suas arestas, uma classe importante (até mesmo motivadora) na Teoria das Matróides. Veremos agora que os grafos, através de seus vértices, nos fornece outra classe de matróides – a *matróide dos emparelhamentos*.

Dado um grafo G simples (sem laços ou arestas múltiplas), lembramos que um emparelhamento em G é um conjunto M de arestas de G sem que duas delas sejam adjacentes.

Um emparelhamento M *cobre* ou *satura* um vértice v de G, ou v e M-saturado, se alguma aresta de M e incidente a v. E um conjunto $X \subseteq V(G)$ é dito coberto pelo emparelhamento M se cada um dos seus vértices e coberto por M.

Um emparelhamento M é dito *máximo* se cobre o maior número de vértices de G, e É dito *perfeito* se cobre todos os vertices de G

Um caminho C é dito M-*alternante* se C alterna arestas de M e $E(G) \setminus M$. Um caminho M-*alternante* é dito um *caminho de aumento* se seus vértices terminais não são M-saturados.

A proposição seguinte é conhecida como o Teorema de Berge (1957) e nos fornece uma estratégia interessante para atacar problemas envolvendo maximalidade (por enquanto) de emparelhamento.

Proposição 1.28 *Um emparelhamento M é máximo num grafo G se e só se G não contém caminho de aumento em relação a M.*

Demonstração: Suponha que G contém um caminho de aumento L em relação a M. Defina então $\overline{M} = M \Delta E(L)$, onde $A \Delta B$ denota a diferença simétrica de A e

B, $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, e $E(L)$ é conjunto das arestas do caminho L. $\overline{M}$ é um novo emparelhamento (que coincide com M fora de L, e em L coincide com os elementos de $E \setminus M$) com $|\overline{M}| = |M| + 1$, contrariando a hipótese de M ser máximo.

Suponha M não máximo, ou seja, suponha que existe M', emparelhamento de G, tal que $|M'| > |M|$. Seja $H = G[M\Delta M']$. Observemos que todo vértice v de H tem grau 1 ou 2, uma vez que existe no máximo uma aresta de M e uma de M' incidente a v. Assim cada componente conexa de H é um ciclo par (se fosse ímpar haveria necessariamente duas arestas de um mesmo emparelhamento incidindo sobre um mesmo vértice), ou um caminho alternante em M e M'. Como H contém mais arestas de M' que M, haverá um caminho de comprimento ímpar e vértices terminais não M-saturado – logo de aumento em relação a M. ■

Denotaremos por $M_{E(G)}(G)$ a família dos subconjuntos de $V(G)$ cobertos por algum emparelhamento de G.

Teorema 1.29 *Se G é uma grafo simples, então $M_{E(G)}(G)$ é a coleção dos independentes de uma matróide.*

Demonstração: Sejam B_1 e B_2 elementos maximais de $M_{E(G)}$ e $x \in B_1 \setminus B_2$. Mostraremos que existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tal que $(B_2 \setminus y) \cup x \in M_{E(G)}(G)$ e, pela Proposição 1.15, concluiremos que $M_{E(G)}(G)$ é uma matróide.

Sejam M_l e M_2 emparelhamentos máximos de G tais que $V(M_1) = B_1$ e $V(M_2) = B_2$.

Observemos que $G[M_1\Delta M_2]$ é um grafo cujas componentes conexas são ciclos pares ou caminhos necessariamente pares pois se existisse um caminho de comprimento ímpar teríamos um caminho de aumento em relação a M_i, para algum i, que por hipótese é máximo.

Como $x \in B_1 \setminus B_2$, existe pelo menos um caminho par P, cujos vértices terminais são $x \in B_1 \setminus B_2$ e $y \in B_2 \setminus B_1$.

Se $\overline{M} = M_2 \Delta E(P)$ então $\overline{M}$ é emparelhamento de G tal que

$$V(\overline{M}) = (B_2 \setminus y) \cap x = \overline{B} \in M_{E(G)}(G),$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema 1.30 *Se $G = (V, E)$ é um grafo, então a função posto da matróide $M_{E(G)}(G)$, definida em $V(G)$, e dada por:*

$$p(A) = \min_{T \subseteq V}(|A| + |T| - 0(A, T),$$

onde $A \subseteq V(G)$ e $0(A, T)$ é o número de componentes ímpares de $G \setminus T$, que estão contidas em A.

A demonstração desse teorema se encontra no Welsh [16] e foge ao nono objetivo aqui reproduzi-la.

Provavelmente o mais importante resultado sobre emparelhamentos foi obtido por Tutte (1947) e responde quando um grafo G tem emparelhamento que cobre todos os seus vértices. Tutte mostra que, uma condição trivialmente necessaria – a de o número de componentes ímpares do grafo $G \setminus X$, onde $X \subseteq V(G)$, não ser maior que $|X|$, é também suficiente para garantir a existência de tal emparelhamento.

Veremos a seguir que tal resultado – o conhecido Teorema de Tutte – pode ser obtido de maneira mais simples através do posto de matróides $M_{E(G)}(G)$.

Teorema 1.31 *Teorema de Tutte: Seja G um grafo simples, conexo. Então G tem emparelhamento perfeito se e só se*

$$0(V, T) \leq |T|.$$

Demonstração: Se G tem emparelhamento perfeito então $p(V) = V$, ou seja

$$\min(|V| + |T| - 0(V, T)) = |V|$$

logo $\min(|T| - 0(V, T)) = 0$ e então

$$|T| \geq 0(V, T).$$

Se $0(V,T) \leq |T|$ então $0(V,T) - |T| \leq 0$ e

$$\rho(v) = \min_{T \subseteq V}(|V| + |T| - O(V,T)) \geq |V|$$

mas se $T = \phi, |T| - 0(V,T) = 0$ então $p(V) = |V|$, ou seja, G tem emparelhamento perfeito.

A função posto de $M_{E(G)}(G)$ nos permite ainda demonstrar a generalização do Teorema de Tutte, enunciada abaixo:

Teorema 1.32 *Seja $G = (V,E)$ um grafo simples e conexo. Então, o número de vértices não cobertos por emparelhamento máximo é dado por:*

$$\max_{T \subseteq V}(0(V,T) - |T|).$$

Demonstração: O número de vértices não cobertos por um emparelhamento máximo é dado por:

$$|V| - p(V) = |V| - \min_{T \subseteq V}(|V| + |T| \cdot 0(V,T)) = \max_{T \subseteq V}(0(V,T) - |T|).$$

■

CAPÍTULO 2

MATRÓIDES E EMPACOTAMENTOS EM GRAFOS

Seja G um grafo e F uma família de subgrafos de G. Um conjunto $Q \subseteq F$ é dito um F-*empacotamento* se qualquer dois grafos de Q são vértices disjuntos. (Um emparelhamento em G é um $E(G)$-empacotamento). Um vértice v é dito *coberto* pelo F-empacotamento Q se v pertence a algum grafo de Q. Um conjunto X de vértices de G é dito coberto por Q se cada elemento de x é coberto por Q. Um F-empacotamento Q é dito maximal se não existir outro F-empacotamento Q' com $V(Q) \subset V(Q')$. Notemos por $M_F(G)$ à família de subconjuntos de $V(G)$, cobertos por algum F-empacotamento.

Vimos, no Teorema 2.9, que para $F = E(G)$, $M_F(G)$ é a coleção dos independentes de uma matróide. Em [3], esse resultado foi estendido para $F = E(G) \cup \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ é um conjunto de subgrafos hipoemparelhável de G. (Um grafo H é dito *hipoemparelhável* se $H \setminus v$ tem emparelhamento perfeito, para todo $v \in V(H)$). Um resultado equivalente foi obtido em [12], para a família F de todos os subgrafos de G isomorfos a uma estrela $S_i = K_{1,2},\ 1 < i < n$, para algum inteiro n fixo.

Mostraremos aqui que é possível construir uma nova família F, contendo as referidas acima, mantendo a condição de $M_F(G)$ formar a coleção dos independentes de uma matróide.

Antes, porém, necessitamos introduzir o conceito de família fechada de propulsores enraizados, além de algumas outras definições de menor porte.

Diremos que um grafo conexo H é um k-*propulsor* se existe um vértice c de H, dito seu *centro*, tal que $H \setminus c$ consista de $k+1$ componentes conexas $D_0, D_1, \cdots, D_k$ onde $|D_0| = 1$ e cada D_i e hipoemparelhável.

Um k-propulsor é dito *enraizado* se, dentre os possíveis vértices de grau 1 (existe pelo menos um) destacamos um deles que será chamado de *raiz*.

Observemos que um mesmo k-propulsor H, pode gerar vários propulsores enraizados, exatamente tantos quantos seu número de vértices de grau 1.

Observemos também que a raiz r de um propulsor enraizado H está necessariamente ligada ao centro c de H, uma vez que, em cada componente (hipoemparelhável por definição) não pode existir vértices de grau um. A aresta rc é dita *haste* de H.

Se H é um propulsor enraizado de centro c e raiz r, chamaremos as componentes conexas de $H \setminus c$, diferentes de r, de *lâminas* e denotaremos por $D(H)$ ao conjunto das lâminas de H.

Seja G um grafo e $\mathcal{P}$ uma família de propulsores enraizados que são subgrafos de G. Tal família é dita fechada se satisfaz os axiomas:

(P1) da hereditariedade:

se H e H' são propulsores com mesma haste, $H \in P$ e $D(H') \subseteq D(H)$, então $H' \in \mathcal{P}$.

(P2) da mudança de haste:

se $H \in \mathcal{P}$ tem centro c e raiz r, e r' é um vértice de $G \setminus H$, adjacente (em G) a c, então o propulsor $(H \setminus r) \cup r'c$, enraizado em r', pertence a $\mathcal{P}$.

(P3) da mudança de lâmina:

se H e H' são propulsores com mesma haste rc e $D(H') \not\subseteq D(H)$, então, para toda lâmina D de H disjunta das lâminas de H', existe lâmina $D' \in D(H') \setminus D(H)$ tal que o propulsor H'', com haste rc e lâminas $(D(H') \setminus D') \cup D$ pertence a $\mathcal{P}$.

Estamos em condições agora de enunciar o resultado antes mencionado:

Teorema 2.1 *Seja G um grafo e $F = E(G) \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{P}$, família de subgrafos de G onde cH é uma família de subgrafos hipoemparelháveis de G e $\mathcal{P}$ é uma família fechada de propulsores. Então $M_F(G)$ é a coleção dos independentes de uma matróide.*

A demonstração que apresentaremos, segue muito de perto a apresentada por Loebl e Poljak em [14], com algumas alterações que percebemos necessárias para podermos garantir validade do resultado.

Como no artigo citado, antes de iniciarmos a demonstração, introduziremos um pouco de linguagem e provaremos um lema bastante central na demonstração.

Seja Q um F-empacotamento. Notaremos por $V(Q)$ e $E(Q)$ os conjuntos de vértices e arestas, respectivamente, que pertencem a algum grafo de Q.
Uma aresta é dita *livre* se pertence a Q.
Um vértice $v \in V(Q)$ é dito *crítico* em Q se v for coberto por um grafo hipoemparelhável ou por alguma lâmina de algum propulsor de Q.
Uma aresta$e \in E(Q)$ é dita livre se e (considerada como 2-clique) pertence a Q.
Notaremos por $S(Q)$ o conjunto das arestas livres de Q e hastes dos propulsores de Q. Definimos um *x-caminho alternante* com respeito a Q como sendo um caminho com vértice inicial x e contendo alternadamente arestas de $S(Q)$ e $E(G) \setminus E(Q)$, de tal forma que o primeiro vértice de cada haste seja sempre seu centro.

Lema 2.2 *Se P é um x-caminho alternante com respeito a Q de comprimento ímpar, x não coberto em Q, e seu vértice terminal y sendo crítico, raiz ou não coberto, então Q não é maximal.*

Demonstração: Se y é não coberto, defina Q' por $E(Q') = E(Q)\Delta P$ (lembrando que dados A e B conjuntos, $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$). Notemos que Q' é um F-empacotamento pois P satisfaz o axioma da mudança de haste e todas as arestas de G estão em F.

Notemos também que $V(Q') = V(Q) \cup \{x, y\}$ logo Q não é maximal.

Se y é crítico, seja W o hipoemparelhável que é membro de $\mathcal{H}$ ou é uma lâmina de algum propulsor de P que cobre y. Seja M o emparelhamento perfeito de $W \setminus y$. Defina Q' por $E(Q') = (E[V(Q) \setminus V(W)]\Delta P) \cup M$. Q' é um f-empacotamento pelas razões do caso anterior acrescentando que P satisfaz o axioma da hereditariedade. Observemos que $V(Q') = V(Q) \cup \{x\}$. Logo Q é não maximal. Absurdo.

Finalmente, se y é raiz de um propulsor $H \in P$, seja D uma lâmina qualquer de H e $r' \in D$ um vértice adjacente ao centro c de H. $H' = H \setminus (D \cup y) \cup cr$ é um propulsor com raiz r' ou a aresta cr'.

Defina Q' por $E(Q') = [E((Q \backslash H) \cup H') \Delta P] \cup M$. Q' é novamente um F-emparelhamento pelos axiomas da hereditariedade e da mudança de haste e $V(Q') = V(Q) \cup x$, contrariando a maximalidade de Q. ■

Observemos que este Lema 2.2 pode ser enunciado como:

Corolário 2.3 *Seja P um x-caminho alternante com respeito a Q e x não coberto em Q. Se P é maximal e de comprimento ímpar, então Q não é maximal.* ■

Por fim definimos a *distância entre dois F-empacotamentos* Q e Q' por:

$$d(Q, Q') = |S(Q) \setminus E(Q')| + |S(Q') \setminus E(Q)| + |V(G)||D(Q) \Delta D(Q')|.$$

Demonstração do Teorema 2.1: Queremos mostrar que $M_F(G)$, família dos conjuntos dos vértices de G cobertos por algum F-empacotamento de G, forma o conjunto dos independentes de uma matróide.

Mostremos então, usando a Proposição 1.5, que $\mathcal{B} = \{B = V(Q),\ Q\ F\text{-emparelhamento maximal}\}$ é o conjunto das bases de uma matróide em $V(G)$. Ou seja:

$(*)$ dadas B e $B' \in \mathcal{B}$ e $x \in B \backslash B'$, existe $y \in B' \backslash B$ e $B'' \in \mathcal{B}$ tal que $(B' \backslash y) \cup x \subseteq B''$.

Suponhamos que existe um grafo G tal que $(*)$ não é verdade para os elementos maximais de $M_F(G)$. Sejam Q e Q' F-empacotamentos maximais de G com $B = V(Q)$, $B' = V(Q')$ tais que: existe $v_0 \in B \setminus B'$ tal que, para todo $w \in B' \setminus B$ e toda $B'' \in \mathcal{B}$, $(B' \setminus w) \cup v_0 \nsubseteq B''$. Escolhamos Q e Q' de forma que $d(Q, Q')$ seja mínima.

Vamos analisar três casos para tal $v_0 \in B \setminus B'$:

Caso A: v_0 é não crítico;

Caso B: v_0 é critico pertencente a um hipoemparelhável;

Caso C: v_0 é critico pertencente a uma lâmina; que esgotam as possíveis possibilidades para v_0.

Caso A: v_0 é não critico, ou seja, existe $e = v_0u \in S(Q)$.

Deve então existir $v' \in B'$ tal que $P = (v_0u,\ uv')$ é um v_0-caminho alternante (caso contrário $\tilde{P} = (v_0u)$ seria um caminho de aumento em relação a Q', que é absurdo pelo Corolário 1.3. Defina $\overline{Q}$ por $E(\overline{Q}) = E(Q')\Delta P$ e observe que $V(\overline{Q}) = \overline{B} = (B' \setminus v') \cup v_0$. Usando-se a propriedade de mudança de haste ou simplesmente permutando-se uma aresta livre, observamos que Q é um F-empacotamento. No entanto, não podemos garantir que $\overline{B}$ é um elemento maximal de $M_F(G)$. Sabemos simplesmente que ele terá a mesma cardinalidade de um maximal o que, até o momento, não nos permite concluir sobre sua maximilidade. Entretanto podemos afirmar que $\overline{B}$ está contido num maximal $B'' \in B$, ou seja,

$$\overline{B} = (B' \setminus v') \cup v_0 \subseteq B'' \in \mathcal{B}.$$

Analisando as possibilidades de $v' \in B'$, em relação a B temos:

Caso A.1: $v' \in B' \setminus B$.

Como $\overline{B} = (B' \setminus v') \cup v_0 \subseteq B'',\ B$ e B'' satisfazem $(*)$, contrariando a suposição de não $(*)$.

Caso A.2: $v' \in B$.

Observemos que $v' \notin B''$ pois, se assim o fosse, $B'' \supset B'$ – absurdo pois B' é maximal $(B'' \supset \overline{B} = (B' \setminus v') \cup v_0)$. Assim, $v' \in B \setminus B''$.

Como $d(B, B'') < d(B, B''),\ B$ e B' devem satisfazer $(*)$, e então, existe $v'' \in B'' \setminus B$ e $B''' \in \mathcal{B}$ tal que $(B'' \setminus v'') \cup v' \subseteq B'''$.

– Se $v'' \in B', (B' \setminus v'') \cup v_0 \subset (B'' \setminus v'') \cup v' \subset B'''$ e então B e B' satisfazem $(*)$ e chegamos a uma contradição.

– Se $v'' \notin B',\ B' \subset B' \cup v_0 \subseteq (B'' \setminus v'') \cup v' \subseteq B'''$, contrariando a maximalidade de B'.

OBS.: O resultado a que chegamos na última parte do Caso A.2, vai ser usado outras vezes durante a demonstração do Teorema, justificando assim enunciá-lo como:

Lema 2.4 *Sejam* B, B' *e* $B'' \in \mathcal{B}$, $v_0 \in B$, $v' \in B'$ *e* $B'' \supseteq (B' \setminus v') \cup v_0$. *Se* B *e* B'' *satisfazem* $(*)$*, então* B *e* B' *também satisfazem.*

Caso B: V_0 é crítico pertencente a um hipoemparelhável W.

Dividiremos este caso em dois subcasos:

Caso B.1: Todos os vértices de $W \setminus v_0$ são cobertos por arestas livres de Q', inteiramente contidas em W.

Nesse caso podemos construir um F-empacotamento $\overline{Q}$, a partir de Q', retirando-se todas as arestas que estão em V e adicionando-se o próprio W. Observemos que $V(\overline{Q}) = V(Q) \cup v_0$, e assim Q' não é maximal. Absurdo.

Caso B.2: é a negação do Caso 2.1, que podemos traduzir da seguinte forma: existe $w \in V(W)$, $w \neq v_0$, tal que: Se w for coberto por Q', então w não é raiz de um propulsor de Q' e não é coberto por uma aresta livre de Q' com vértices terminais em $V(W)$.

Consideremos M o emparelhamento perfeito de $W \setminus w$. Seja $|P|$ o v_0-caminho alternante maximal, alternando arestas de M e $S(Q')$.

Se $|P|$ é ímpar, Q' não é maximal pelo Corolário 1.3. Se $|P|$ é par então a última aresta e de P é livre ou haste de Q'. Como P é maximal, o último vértice v' de P não está coberto por uma aresta de M. Temos então que $v' = w$ ou $v' \notin V(W)$. 0 primeiro caso não pode ocorrer, pois e seria uma haste tendo w como centro – como P é alternante, o centro de e deveria ser percorrido antes da raiz.

Assim, v', o último vértice de P, está fora de $V(W)$.

Defina $\overline{Q}$ por $E(\overline{Q}) = E(Q')\Delta P$ e observe que:
– $\overline{Q}$ é um F-empacotamento.
– $\overline{Q}$ possui mais uma aresta em comum com Q que Q'. – $V(\overline{Q}) = (V(Q') \setminus v') \cup V_0$.
– $\overline{Q}$ não é necessariamente maximal, porém certamente contido num maximal Q''.

Pondo $B'' = V(Q'')$ temos $B'' \supseteq (B' \setminus v') \cup v_0$ e $d(B'', B) < d(B', B)$. Estamos nas condições do Lema 2.4 e então B e $B'a$ satisfazem $(*)$. Absurdo.

Caso C: v_0 é coberto por uma lâmina D de propulsor H de Q, com haste rc e $W = D \cup rc$.

Dividiremos esse caso em 3 subcasos:

Caso C.1: mesmas hipóteses de (B.1) e mesmo procedimento de (B.1).

Observe que isto pode ser feito por termos considerando $W = D \cup cr$, garantindo assim que $W \in F$ por P satisfazer o axioma da hereditariedade.

Se houvéssemos tornado W apenas a lâmina D, não poderíamos garantir que $D \in F$ e não poderíamos agir como em (B.1).

Caso C.2: Mesmas hipóteses de (B.2), acrescentando a hipótese de W ser diferente do centro c de H. Com essa condição podemos garantir que $W \setminus w$ tem emparelhamento perfeito, muito embora W não seja um hipoemparelhável (na realidade W é um 1-propulsor). Desenvolve-se então esse caso exatamente como o caso (B.2).

Caso C.3: Existe um propulsor $H' \in Q'$ tal que é centro de ambos $H \in Q$ e H'. A raiz $r' \in H'$ deve estar em W pois, caso contrário, devido à paridade de W, existiria um outro vértice w em W, diferente de c, nas condições de C.2.

Todos os outros vértices de W (menos c e r') estão cobertos por arestas livres de Q' e inteiramente contidos em W – se não teríamos as condições de C.2.
A lâmina $D = W \setminus cr$, de H, é disjunta de todas as outras lâminas de H' pois, como vimos, a menos de $v_0 \notin V(Q')$, todos os vértices de D estão cobertos por arestas livres de Q', não podendo pertencer a nenhum outro grafo de Q'.
Se $D(H') \subseteq D(H)$, defina H'' como sendo propulsor de haste rc e $D(H'') = D(H') \cup D$. H'' é propulsor de F, pela hereditariedade de P aplicada ao propulsor H de Q, já que toda lâmina de H'' também é de H e possuem mesma haste.
Q' pode então ser aumentado, colocando-se H'' no lugar de $H' \cup M'$, onde M' é o conjunto das arestas livres contidas em W, obtendo-se assim um novo emparelhamento Q'' que cobre todos os vértices de Q' mais o vértice $v_0 \notin V(Q')$.

Assim, $D(H') \nsubseteq D(H)$.

i) Se H e H' tem mesma haste cr, com $D(H) \nsubseteq D(H')$, pelo axioma da mudança de lâminas existe $D' \in H'$ tal que $H'' = G[(V(H') \setminus V(D')) \cup V(D)]$ é propulsor de F, com haste cr.

Seja v' um vértice arbitrário de D' e M'' o emparelhamento perfeito de $D' \setminus v'$. Defina $\overline{Q}$, a partir de Q', pela troca de H' por H'' e de M' por M''.

Observemos que $\overline{Q}$ assim definido é um F-empacotamento, tem mais lâminas em comum com Q do que Q' e que cobre v_0 (descoberto em Q') ou seja:

$$V(\overline{Q}) = (V(Q') \setminus v') \cup v_0.$$

$\overline{Q}$, novamente, não necessariamente é maximal mas contido num maximal Q'' pondo $V(Q'') = B''$ e $V(Q') = B'$, então

$$B'' \supseteq (B' \setminus v') \cup v_0 \quad \text{e} \quad d(B'', B) < d(B', B).$$

Estamos novamente nas condições do Lema 2.4 e B e B' satisfazem $(*)$. Absurdo.

ii) Supondo $r \neq r',\ r'$ tem que pertencer a $V(D)$. Como r é adjacente a c em G, pela propriedade de mudança de haste, $\tilde{H}' = (H' \setminus r') \cup rc$ é propulsor com haste rc e pertencente a P

Seja M o emparelhamento perfeito de $D \setminus v_0$ e M' o conjunto das arestas livres de Q', contidos em W.

Construa $\tilde{Q}$ a partir de Q' da seguinte forma:

$$\overline{Q}' = (Q^{\setminus}(H' \cup M')) \cup \tilde{H}' \cup M.$$

Observe que $S(Q') = S(\tilde{Q}'),\ D(Q') = D(\tilde{Q})$ obtendo-se assim Q' e $\tilde{Q}'$ equidistantes. Como $V(Q') = V(\tilde{Q}')$, $\tilde{Q}'$ é maximal. No contexto dessa demonstração, Q' pode ser identificado a $\tilde{Q}$. Ou seja, podemos considerar H e H' como mesma haste e caímos no caso anterior.

Corolário 2.5 *Seja G um grafo e $F = E(G) \cup \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ é uma família de subgrafos hipoemparelháveis de G. Então $M_F(G)$ é uma matróide.*

Demonstração: No Teorema 2.1, faça $P = \emptyset$. ∎

Corolário 2.6 *Seja G um grafo e F a família de subgrafos de G isomorfos a alguma estrela $S_i,\ 1 \leq i \leq n$, para algum inteiro n fixo. Então $M_F(G)$ é uma matróide.*

Demonstração: Observemos que S_1 é uma aresta e que cada $S_{i+1} = K_{1,i+1}$ pode ser visto como um k-propulsor enraizado (há $(i+1)$ possibilidades para a raiz). É de imediata verificação que se $P = \{S_i,\ 2 \leq i \leq n\}$, P é uma família fechada de propulsores enraizados que contém as arestas de G. $\blacksquare$

Se fizermos $\mathcal{H} = \emptyset$ em no Teorema 2.1, o corolário segue.

CAPÍTULO 3

EMPACOMENTOS ECONÔMICOS

Exploraremos aqui empacotamentos por arestas e subgrafos hipoemparelháveis de um grafo G, definindo uma família especial, bastante simples, de tais empacotamentos: os empacotamentos econômicos.

Seja G um grafo e $F = E(G) \cup \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ é uma família de subgrafos hipoemparelháveis de G. Dado um F-empacotamento Q, poderemos dividí-lo em duas partes, Q_e e Q_h, onde Q_e consiste das arestas livres de Q e Q_h dos hipoemparelháveis de Q. Assim, $Q = Q_e \cup Q_h$.

Diremos que um F-empacotamento é *econômico* se não existir outro F-empacotamento $Q' \neq Q$ com

i) $V(Q') \subset V(Q)$ e $Q'_h \subseteq Q_h$ ou

ii) $V(Q') = V(Q)$ e $Q'h \supset Q$.

Dados dois F-empacotamentos Q e Q', C é dita uma componente de $Q \cup Q'$ se C é uma componente conexa do grafo $G[E(Q) \cup E(Q')]$.

Diremos que uma componente C é do tipo $k-1$ ou uma $k-1$ componente se C contém k hipoemparelháveis de Q e l hipoemparelháveis de Q'.

Mostraremos agora um resultado sobre os possíveis tipos de componentes, dados dois F-empacotamentos econômicos Q e Q'.

Teorema 3.1 *Sejam G um grafo, $\mathcal{H}$ uma família de subgrafos hipoemparelháveis de G, $F = E(G) \cup \mathcal{H}$, Q e Q' dois F-empacotamentos econômicos e C uma componente de $Q \cup Q'$. Então:*

i) C contém no máximo um hipoemparelhável de cada empacotamento;

ii) Se C é do tipo 0-0, então C é um ciclo par ou caminho par;

iii) Se C é do tipo 1-0, então Q cobre todos os vértices de C, e Q' cobre todos os vértices de C menos um deles.

iv) Se C é do tipo 1-1, então Q e Q' cobrem todos os vértices de C.

Antes de iniciarmos a demonstração, daremos algumas definições e provaremos dois lemas que facilitarão a exposição da demonstração, sendo o segundo de conteúdo determinante.

Dado um F-empacotamento Q, chamaremos um caminho P de *alternante* com respeito a Q se P alterna as arestas de Q_c e $E(G) \setminus E(Q)$.

Um caminho alternante P, com vértices terminais u e v, é dito de *aumento* com respeito a Q se $\{u, v\} \cap V(Q_e) = \emptyset$ e u e v não estão no mesmo hipoemparelhável de Q. Em outras palavras, P é de aumento se é maximal sem que exista $H \in Q_h$ tal que $\{u, v\} \subset V(H)$.

Lema 3.2 *Se Q é econômico, então Q não admite caminho de aumento.*

Demonstração: Seja Q um F-empacotamento econômico e P um caminho de aumento relativo a Q, de vértices terminais u e v. Temos as seguinte possibilidades para u e v:

a) u e v são não cobertos por Q.

Nesse caso, defina o F-empacotamento $\overline{Q}$ por:

$$E(\overline{Q}) = E(Q)\Delta P.$$

Observemos que $V(\overline{Q}) = V(Q) \cup \{u, v\}$ e $Q_h = \overline{Q}_h$, Logo, Q não pode ser econômico.

b) u é coberto por um hipoemparelhável H de Q e v é não coberto em Q.

Podemos construir um F-empacotamento Q' definido por:

$$E(Q') = [E(Q \setminus H)\Delta P] \cup M,$$

onde M é com emparelhamento perfeito de $H \setminus u$. Observemos que $V(Q') = V(Q) \cup v$ e $Q'_h = Q_h \setminus H$, contrariando o fato de Q ser econômico.

c) u e v são cobertos por H_1 e H_2 respectivamente, onde H_l e H_2 são hipoemparelháveis distintos de Q. Definimos Q' por:

$$E(Q')[E(Q \setminus \{H_1 \cup H_2\} \Delta P] \cup M_1 \cup M_2,$$

onde M_1 e M_2 são emparelhamentos perfeitos de $H_1 \setminus u$ e $H_2 \setminus v$, respectivamente. Q' assim definido sobre os mesmos vértices de Q porém $Q'_h = Q_u \setminus \{H_1, H_2\}$, contrariando o fato de Q ser econômico. ■

Lema 3.3 *Seja C uma componente de $Q \cup Q'$ e H um hipoemparelhável de Q. Suponha $V(H) \subseteq V(C)$ e w um vértice qualquer de C com $w \in V(H)$. Então existe um caminho Q-alternante ligando algum vértice v de H a w.*

Demonstração: Sendo C conexo, sabemos que existe um caminho ligando dois quaisquer de seus vértices, em particular existe um caminho P ligando algum $v \in V(H)$ a w (suporemos aqui $V(P) \cap V(H) = v$, por conveniência e sem perder generalidade). Mostraremos que podemos escolher tal caminho Q-alternante, ou seja, que alterna arestas de Q_e e $E(G) \setminus E(Q)$.

Se P não e alternante, então teremos que:

a) P contém uma aresta de um hipoemparelhável de Q, ou

b) P contém arestas consecutivas de um hipoemparelhável de Q'.

Seja $v_1 \neq v$ o primeiro vértice de P que está coberto por um hipoemparelhável de Q ou ambas as arestas incidentes a v_1 em P pertençam a um hipoemparelhável de Q'.

a) Seja v_1 coberto por um hipoemparelhável H_1 de Q. Denotamos por $P|_{(v_i, v_j)}$ (e dizemos P restrito a v_i, v_j) ao caminho de vértices terminais v_i e v_j, obtido a partir de P, deletando-se o começo deste caminho até v_i e o fim a partir de v_j.

Seja $\overline{P} = P|_{(v,v_1)}$. *overlineP* é caminho alternante com vértices de Q, logo de aumento e, pelo lema 3.2, Q é não econômico.

b) $v_1(= v')$ e adjacente em P a duas arestas de um hipoemparelhável H' de Q'.

Sejam M' o emparelhamento perfeito de $H' \setminus v'$, $Q'' = (Q' \setminus H') \cup M'$ e $\tilde{P}$ caminho maximal, alternante com respeito a ambos Q e Q'' contendo v'.

Necessariamente v' é um vértice terminal de $\tilde{P}$. Seja $\tilde{v}$ o outro vértice terminal de P, com $a = u\tilde{v}$ sua última aresta, aresta esta que existe, uma vez que se a não existisse, $\tilde{P}$ se reduziria a um único vértice, indicando que não existe elemento de Q_e incidindo sobre v'. v' seria então coberto por um hipoemparelhável de Q ou simplesmente não coberto. Em ambos casos, $P_1 = P|_{(v,v_1)}$ seria um caminho de aumento em relação a Q, o que é impossível.

Vamos agora analisar as possibilidades para a aresta a, dividindo-as em dois casos:

Caso b.1 – quando $a \in Q_e$.

Caso b.2 – quando $a \in Q''_e$.

Caso b.1 – $a \in Q_e$. Como $\tilde{P}$ é caminho maximal, $\tilde{v}$, o último vértice de $\tilde{P}$, é não coberto por Q'' ou coberto por um hipoemparelhável H'' de Q''.

Em ambos os casos $\tilde{P}$ seria caminho de aumento em relação Q'' possibilitando-nos construir Q''' com $V(Q''') = V(Q'') \cup v'(Q)$ e menos hipoemparelháveis que Q' contrariando a economicidade de Q'. Absurdo.

Caso b.2 – $a \in Q''_e$.

Novamente, como $\tilde{P}$ é maximal, $\tilde{v}$ é não coberto por Q ou coberto por um hipoemparelhável H'' de Q.

Em ambos os casos $\overline{P} = P|_{(v,v')} \cup \tilde{P}$ seria caminho de aumento em relação a Q, o que é absurdo, a menos que H_1 coincida com H, quando teríamos $\overline{P}$ com vértices terminais num mesmo hipoemparelhável de Q.

Mas, observando que $\tilde{P}$ é Q-alternante, poderíamos construi o caminho $P' = \tilde{P} \cup P|_{(v',w)}$.

Assim como P, P' liga algum vértice de H a w, concide com P a partir do vértice v' e é Q-alternante até v', transferindo de uma aresta o (possivelmente existente) problema de arestas consecutivas pertencentes a algum hipoemparelhável de Q'_h. E então, repetiríamos o caso b.2 no máximo um número finito de vezes até mostrarmos a inexistência de arestas consecutivas de Q' ou chegarmos a uma contradição.

Demonstração do Teorema 3.1:

(i) Se C contém mais de um hipoemparelhável de Q, pelo Lema 3.3, existe caminho de aumento entre eles e Q não seria econômico pelo Lema 3.2. Logo C contém no máximo um hipoemparelhável de Q. Analogamente para Q'.

ii) Se C não contém qualquer hipoemparelhável, C tem que ser ciclo par – pois se fosse ímpar encontraríamos arestas consecutivas de um mesmo empacotamento – ou caminho par – pois se fosse ímpar seria de aumento em relação a um dos empacotamentos.

iii) Se C contém um hipoemparelhável H de Q, Q deve cobrir todos os vértices de C pois, se existe em C um vértice v não coberto por Q, existiria pelo Lema 3.3, caminho de aumento relativo a Q

iv) Se C contém um hipoemparelhável de cada, pelo item iii) tanto Q quanto Q' têm que cobrir todo o C.

CAPÍTULO 4

MATRÓIDES E EMPARELHAMENTOS EM GRAFOS COM PESO

Neste capítulo, explicitaremos condições suficientes, impostas aos grafos com pesos (nos vértices) e aos tipos de empacotamentos, para que os empacotamentos de peso máximo gerem matróides, generalizando os casos já estudados de matróides induzidas por grafos sem pesos, ou melhor, em grafos com pesos constante (positivo).

ALGUMAS DEFINIÇÕES:

Se G é um grafo e F uma família de subgrafos de G, diremos que um subgrafo H de G é F-*Hipoempacotável* se $H \setminus v$ tem F-empacotamento perfeito $\forall v \in V(H)$. E diremos que F é uma *família hipoempacotável* se $E(G) \subseteq F$ e, qualquer que seja $H \in F \setminus E(G),\ H$ é F-hipoempacotável.

Daqui em diante, $\mathcal{H}$ denotará sempre uma família hipoempacotável de subgrafos de G.

Seja I um conjunto finito de índices e $\mathcal{L}_i$ uma família de conjuntos de subgrafos de G. Diremos que $(\mathcal{L}_i)_{i \in I}$ é *compatível* com $\mathcal{H}$ se:

(C1) Se $H \in \mathcal{L}_i$ e $H' \subseteq H$ então $H' \in \mathcal{L}_i$;

(C2) Se H e $H' \in \mathcal{L}_i,\ B \in H$ e $V(B) \cap V(H') = \emptyset$;
então existe $B' \in H' \setminus H$ tal que $(H' \setminus B') \cup B \in \mathcal{L}_i$.

(C3) Se $B \in H \in \mathcal{L}_i$, então B é $\mathcal{H}$ hipoempacotável.

Seja $(\mathcal{L})_{i \in I}$ compatível com $\mathcal{H}$ e $\mathcal{L} = \{\cup \mathcal{L}_i,\ i \in I\}$. Diremos que com $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-

empacotamento B é *admissível* com respeito a $(\mathcal{L}_i)$ quando, para cada $i \in I$, existe $B_i \in \mathcal{L}_i$ tal que

$$B \setminus \cup\{B_i;\ i \in I\} \subset \mathcal{H}.$$

Seja $\rho : V(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida nos vértices de G – dita *Função Peso*. Dado um F-empacotamento B, definiremos seu peso $\rho(B)$, por:

$$\rho(B) = \sum_{v \in V(B)} \rho(v).$$

Notaremos por $M_{(\mathcal{H}\cup\mathcal{L};\ (\mathcal{L}_i))}(G, \rho)$ à família dos vértices de B, onde B é um $(\mathcal{H}\cup\mathcal{L})$-empacotamento admissível com respeito a $(\mathcal{L}_I)$ e de peso máximo. Mostraremos mais adiante que, com alguma restrição à função peso, $M_{(\mathcal{H}\cup\mathcal{L};\ (\mathcal{L}_i))}(G, \rho)$ é o conjunto das bases de uma matróide. Antes porém, se faz necessário demonstrar alguns resultados.

PRIMEIRA PROPOSIÇÃO:

Dados dois $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$- empacotamentos B_1 e B_2 podemos construir o grafo $G' = G[B_1 \cup B_2]$, composto de várias componentes conexas. Veremos aqui uma propriedade comum a essas componentes, quando B_1 e B_2 são $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$- empacotamentos admissíveis com respeito a $(\mathcal{L}_i)$ e de peso máximo, ou seja, quando $V(B_i) = V_i \in M_{(\mathcal{H}\cup\mathcal{L};(\mathcal{L}_i))}(G, \rho)$.

Suponhamos V_1 e V_2 elementos de $M_{(\mathcal{H}\cup\mathcal{L};(\mathcal{L}_i))}(G, \rho)$ e escolhemos B_1 e B_2 dos $(\mathcal{H}\cup\mathcal{L})$-empacotamentos tais que:

(B1) B_i é admissível com respeito a $(\mathcal{L}_i)$;
(B2) $V(B_i) = V_i$;
(B3) Dentre os B_i, que satisfazem (B_1) e (B_2), escolha aqueles que possuem o maior numero de arestas.

Um caminho λ e dito B_i-*alternante* se contém alternadamente arestas de B_i e arestas não pertencentes a B_i. Chamaremos os elementos de $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L}) \setminus E(G)$ de *elementos-não-triviais.*

Proposição 4.1 *Seja $\rho : V(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ com $\rho(v) \neq 0$ $\forall v \in V(G)$. Seja C uma componente conexa de $G' = G[B_1 \cup B_2]$. Suponha que C contém um elemento-não-*

trivial $H_1 \in B_1$ e seja v um vértice de C. Então existe um caminho B_1-alternante ligando algum vértice de H_1 a v.

Demontração: Como C é conexo, existirá sempre um caminho λ ligando um vértice v_i de H_1 a v. Observemos que v_1 e λ podem ser escolhidos de tal forma que $V(H_1) \cap V(\lambda) = \{v_i\}$.

Suponha que λ não seja B_1-alternante. Então existe uma aresta $e = v_2v_2'$ tal que $\lambda_1 = \lambda|_{(v_1,v_2)}$ é B_1 alternante e $\lambda|_{(v_1,v_2')}$ não é B_1-alternante. Teremos então um dos casos:

a) e é aresta de um elemento-não-trivial H_1' de$B_1 \setminus \{H_1\}$.

b) v_2 é adjacente em λ a arestas de um elemento-não-trivial de B_2.

Assim,

a) Sendo v_2 coberto por um elemento-não-trivial $H_1' \in B_1 \setminus \{H_1\}$, sejam M_1 e M_1', respectivamente, os $\mathcal{H}$-empacotamentos perfeitos de $H_1 \setminus v_1$ e $H_1' \setminus v_2$. Então, $\overline{B} = [(B_1 \setminus \{H_1, H_2\}) \cup M_1 \cup M_1'] \Delta E(\lambda_1)$ é um $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-empacotamento, admissível com respeito a (L_i), isto é, satisfaz (B1); cobre os mesmos vértices que B_1, isto é, satisfaz (B2); porém usa mais arestas que B_1, o que contradiz (B3).

b) $v_2 \in V(\lambda)$ é adjacente em λ a arestas consecutivas de H_2 e tal que $\overline{\lambda} = \lambda|_{(v_1,v_2)}$ é B_1-alternante.

Seja $\lambda_2 = \lambda|_{(v_2,v)}$ e $n(\lambda)$ o número de aresta de λ_2.

Se M_2 é o $\mathcal{H}$-empacotamento perfeito de $H_2 \setminus v_2$, seja $B_2' = (B_2 \setminus \{H_2\}) \cup M_2$ e λ' o único caminho B_1 e B_2' alternante maximal iniciando em v_2. Suponha w' o outro vértice terminal de λ' (se λ' não possui arestas pomos $w' = v_2$).

Analisando as possíveis possibilidades para w' teremos:

b.1) w' pertence a um elemento-não-trivial $H_1' \in B_1 \setminus \{H_1\}$.
Sendo M_1 um $\mathcal{H}$-empacotamento perfeito de $H_1 \setminus v_1$ e M_1' um $\mathcal{H}$-empacotamento perfeito de $H_1' \setminus w$, teremos que $\overline{B} = [(B_1 \setminus \{H_1, H_2'\}) \cup M_1 \cup M_1'] \Delta E(\lambda_1 \lambda')$ é,

como no caso a), um $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-empacotamento que satisfaz (B1) e (B2) e com mais arestas que B_1, contradizendo (B3).

b.2) w' pertence a um elemento-não-trivial $H_2' \in B_2'$ (ou seja, $H_2' \in B_2 \setminus \{H_2\}$). Se$M_2'$ é o $\mathcal{H}$-empacotamento perfeito de $H_2' \setminus w'$.

$$\begin{aligned} \overline{B} &= [(B_2' \setminus \{H_2'\}) \cup M_2']\Delta E(\lambda') = \\ &= [(B_2 \setminus (\{H_1', H_2'\}) \cup M_2' \cup M_2]\Delta E(\lambda'). \end{aligned}$$

é $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-empacotamento satisfazendo (B1) e (B2) porém com mais arestas que B_2, contradizendo (B3).

b.3) w' pertence a H_1. Seja $\overline{\lambda}$ o subcaminho simples de $\tilde{\lambda}^{-1}\lambda_2$, ligando $\tilde{w}$ a v. Observe que $n(\overline{\lambda}) < n(\lambda)$. Fazendo $\lambda = \overline{\lambda}$, recomeça-se o processo de análise.

Se w não pertence a um elemento-não-trivial de B_1 ou de B_2, então w' pertence a V_1 ou a V_2, mas não a ambos, visto que λ' é maximal. Teremos então:

b.4) w' *não pertence* a V_1 e $\rho(w') > 0$ ou
w' *não pertence* a V_2 e $\rho(w') < 0$.
Se M_1 é o $\mathcal{H}$-empacotamento perfeito de $H_1 \setminus v_1$, então $\overline{B} = [(B_1 \setminus \{H_1\}) \cup M_1]\Delta E(\lambda_1\lambda')$ é novamente um $(\mathcal{H}\cup\mathcal{L})$-empacotamento admissível com respeito a $(\mathcal{L}_i)$, porém de peso maior que B_1, o que é uma contradição.

b.5) w' não pertence a V_1 com $\rho(w') < 0$ ou
w' não pertence a V_2 com $\rho(w') > 0$.
Construindo $\overline{B} = B_2'\Delta E(\lambda) = [(B_2 \setminus \{H_2\}) \cup M_2]\Delta E(\lambda')$, teremos $\overline{B}$ um $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-empacotamento admissível com respeito a $(\mathcal{L}_i)$ porém de peso maior que B_2, e obtemos uma contradição. ■

SEGUNDA PROPOSIÇÃO

Da Proposição 4.1, podemos concluir que cada componente conexa C, do grafo G', possui no máximo um elemento não trivial de B_1 e no máximo um de B_2. A proposição seguinte nos dirá um pouco mais sobre essas componentes.

Proposição 4.2 *Seja $\rho : V(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ com $\rho(v) \neq 0$ $\forall v \in V(G)$. Suponha que a componente C contém um elemento não trivial $H_1 \in B_1$. então:*

i) se $v \in V(C) \setminus V_1$, então $\rho(v) < 0$;

ii) se $v \in V(C) \cap V_1$, então $\rho(v) > 0$;

iii) se $V(C) \setminus V_1 \neq 0$ então C não contém um elemento-não-trivial de B_2;

iv) se $v_2 \in V(C) \setminus V_1$ então $V(C) \setminus V_1 = \{V_2\}$ e $V_2 \supseteq V(C)$;

v) se $V_1 \supseteq V(C)$ então $|V(C) \setminus V_2| \leq 1$.

Demonstração:

i) Pela Proposição 4.1, existe um caminho λ, B_1-alternante, unindo v a um vértice v_1 de H_1. Se M_1 é o $\mathcal{H}$-empacotamento perfeito de $H_1 \setminus v_1$, $\overline{B} = [(B_1 \setminus \{H_1\}) \cup M_1]\Delta E(\lambda_1)$ é $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-empacotamento admissível com respeito a $(\mathcal{L}_i)$, que cobre $V_i \cup v$. Assim, $\rho(v) < 0$;

ii) Como no item anterior, seja λ um caminho B_1-alternante ligando v a um vértice v_1 de H_1. Se M_1 é $\mathcal{H}$-empacotamento perfeito de $H_1 \setminus v_1$, $\overline{B} = [(B_1 \setminus \{H_1\}) \cup M_1]\Delta E(\lambda_1)$ é admissível com respeito a $(\mathcal{L}_i)$ e cobre $V_1 \setminus v$. Como B_1 tem peso máximo, $\rho(v) \geq 0$. Assim $\rho(v) > 0$;

iii) Seja $v_2 \in V(C) \setminus V_1$ (então $v_2 \in V_2$). Se B_2 contivesse um elemento-não-trivial H_2, teríamos: por ii) que $p(v_2) > 0$ e por i) que $p(v_2) < 0$, nos levando a uma contradição.

iv) Dos ítens anteriores podemos concluir que, se C contém um elemento-não-trivial de B_1 em v.

$$V_1 \cap V(C) = \{v; \rho(v) > 0\} \quad \text{e,}$$

como na Proposição 4.1, podemos mostrar que existe um caminho B_2-alternante ligando um vértice $v_2 \in V(C) \setminus V_1$ a qualquer outro vértice de C.

Seja então λ um caminho B_2-alternante ligando v_2 a $v \in V(C)$. Se $v \in V(C) \setminus (V_1 \cup v_2)$, então $\overline{B} = B_2 \Delta E(\lambda)$ é $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-empacotamento, cobrindo apenas $V_2 \setminus \{V_2, v\}$ e com peso maior que o de B_2 (lembre que v_2 e v têm peso negativo, por (i)). Logo $|V(C) \setminus |V_1|| = 1$. Se $v \in V(C) \setminus V_2$, $\overline{B} = B_2 \Delta E(\lambda)$

é $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-empacotamento que cobre $(V_2 \setminus v_2) \cup v$, tendo, consequentemente, peso maior que B_2. Logo $V_2 \supseteq V(C)$.

v) Suponhamos $v \in V(C) \setminus V_2$.
Vamos construir um $(\mathcal{H} - \mathcal{L})$-empacotamento B_2, admissível com respeito a $(\mathcal{L}_i)$, que coincide com B_2 for a, de C e, em C, cobre todos os vértices menos v.

Como sabemos que todos os vértices de C tem pesos positivos (pelo item i), se V_2 deixar de cobrir algum outro vértice de C, além de v, B_2 terá menos peso que B', contradizendo a hipótese de B_2 ter peso máximo.

Construção de B_2':
Se $v \in V(C)V_2$, pela Proposição 4.1, existe um caminho B_1-alternante λ ligando v a um vértice w de H_1. Se M é o $\mathcal{H}$-empacotamento perfeito de $H_1 \setminus w$, ponha

$$B_2' = B_2 \backslash H \in B_2 : V(H) \subset V(c) \cup H \in [(B_1 \setminus H_1) \cup M]\delta E(\lambda) : V(H) \subset V(C)$$

UM LEMA

Lema 4.3 *Seja G um grafo e ρ uma função peso tal que $\rho(v) + \rho(w) \neq 0$, $\forall v,\ w \in V(G)$. Então $M_{(\mathcal{H}\cup\mathcal{L};(\mathcal{L}_i))}(G, \rho)$ é a família das bases de uma matróide.*

Demonstração: Continuaremos aqui com a notação desenvolvida até agora e acrescentaremos algumas observações.

Da Proposição 4.2, temos que, se C e uma componente que contém um elemento-não-trivial H, de B_1, então

$$(V_1 \Delta V_2) \cap V(C)\{v\},$$

com $\rho(v) > 0$ se $v \in V_1$ ou $\rho(v) < 0$ se $v \in V_2$ ou $V_1 = V_2 = V(C)$.

Diremos que C é uma *i-componente* quando contiver um elemento-não-trivial $H_i \in B_i$ e V_j não contiver $V(C)$, para, algum j. Notaremos por $B_1 \# C$ o empacotamento que coincide com B_1 fora de C e que em C muda de papel com B_2, ou seja:

$$B_1\#C = \{B_1 \setminus \{H \in B_1 : V(H) \subset V(C)\} \cup \{H \in [(B_2 : V(H) \subset V(C)\}.$$

Analogamente definimos $B_2\#C$.

Como, por hipótese, B_i é um $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-empacotamento admissível com respeito a $(\mathcal{L}_i)$ para cada i podemos escolher $B^i_j \in \mathcal{L}_i$, tal que

$$B_i \setminus \cup\{B^i_j;\ j \in I\} \subset \mathcal{H}.$$

$G' = G[E(B_1 \cup B_2)]$ é composto de várias componentes: algumas 1-componentes, algumas 2-componentes e outras tantas não-i-componentes.

Aos elementos B^1_j que estão numa i-componente notaremos por $\frac{1}{j}$. Analogamente $A^2_j = \{H \in B$ que estão numa 2-componente$\}$.

Observemos que o conjunto dos vértices dos elementos de $A^1_j \cup A^2_j$ são disjuntos e, se

$$\mathcal{L}'_j = \{H \cap (A'_j \cup A^2_j);\ H \in \mathcal{L}_j\},$$

segue direto de (C1), (C2) e (C3) (compatibilidade de $\mathcal{L}_i$ com $\mathcal{H}$) que $\mathcal{L}'_j$ é uma matróide.

Observemos que A^i_j é uma base para $\mathcal{L}'_j$ – caso contrário $B_i\#C$ é um $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-empacotamento admissível com respeito a $(\mathcal{L}_i)$, onde C é um k-componente ($k \neq i$), contendo $H \in \mathcal{L}'_j$, tal que $A^i_j \cup \{H\}$ é independente em $\mathcal{L}'_j$, e o peso de $B_i\#C$ sendo maior que o peso B_i.

Feitas essas observações, seja $w \in V_1 \setminus V_2$. Mostraremos que existe $w' \in V_2 \setminus V_1$ tal que $(V_2 \setminus w') \cup w$ é elemento de $M_{(\mathcal{H}\cup\mathcal{L})(\mathcal{L}_i)}(G, \rho)$.

Seja C a componente de G' que contém w como vértice. Temos dois casos a analisar:

1º Caso: C não contém elemento-não-trivial. Assim, C é um caminho $B_1 - B_2$-alternante com um número par de arestas ligando w a um outro vértice $w' \in V_2 \setminus V_1$ (não podendo ser ímpar pois facilmente mostraríamos que B_2 ou B_1 não teria peso máximo).

Observemos que $\rho(w) = \rho(w')$, caso contrário B_1 ou B_2 não teria peso máximo.

Então $B_2' = B_2 \Delta E(C)$ é $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-empacotamento admissível com respeito a $\mathcal{L}_i$, de peso máximo, que cobre $(V_2 \setminus w') \cup w$.

2º Caso: C contém um elemento-não-trivial de B_1 ou B_2. Então C é uma i-componente tal que $w \in V(C)$. Seja H_i o elemento-não-trivial de B_j^i em C.

Como $\mathcal{L}_j'$ e uma matróide, existe $H_k \in B_j^k (k \neq i)$ tal que

$$(B_j^1 \setminus H_1) \cup H_2 \quad \text{e} \quad (B_j^2 \setminus H_2) \cup H_1$$

são bases para $\mathcal{L}_j'$.

Notando por C_k a k-componente que contém H_k,$\tilde{B}_i = B_1 \# C_1 \# C2$ é $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-empacotamento admissível com respeito a $\mathcal{L}_i$. Então $\rho(V(B_1')) = \rho(V(B_2)) = \rho(V_2)$ posto que $\rho(V_1) = P(V_2)$ e $\rho(V_1) + \rho(V_2) = \rho(V(B_1')) + \rho(V(B_2'))$.

Assim, B_1' e B_2' têm peso máximo. Como $C_k(k \neq i)$ é uma k-componente, $(V_1 \Delta V_2) \cap V(C_k) = \{w'\}$, para algum w'.

Se $w' \in V_1 \setminus V_2$, então:

$$V(B_1') = V_1 \setminus \{w, w'\} \quad \text{e} \quad V(B_2') = V_2 \cup \{w, w'\}.$$

Como $\rho(V(B_2')) = \rho(V_2)$,

$$\rho(w) + \rho(w) = 0,$$

contrariando a hipótese.

Logo $w' \in V_2 \setminus V_1$ e

$$V(B_2') = (V_2 \setminus w) \cup w,$$

onde B_2' é um $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-empacotamento admissível com respeito a $(\mathcal{L}_i)$ e de peso máximo. Assim $M_{(\mathcal{H} \cup \mathcal{L};(\mathcal{L}_i))}(G, \rho)$ é uma matróide. ■

RESULTADO CENTRAL:

Seja $\mathcal{H}$ uma família hipoemparelhável de subgrafos de G.

Um subgrafo H de G e dito um *hipopropulsor enraizado com respeito a* $\mathcal{H}$ se possui um par de vértices (distintos) r e c, ditos raiz e centro, tais que:

(P1) rc é uma aresta de H, chamada de haste de H.

(P2) $d_H(r) = 1$.

(P3) Se D é uma componente conexa de $H \setminus \{rc\}$ (D é chamada de it lâmina de H, D é $\mathcal{H}$-hipoempacotável. $D(H)$ denotará o conjunto das lâminas de H.

Uma família II de hipopropulsores enraizados com respeito a $\mathcal{H}$ é dita *fechada* se satisfaz:

(H1) Se $H \in \Pi$ e H' é hipopropulsor com respeito a $\mathcal{H}$, de mesma haste que H e tal que $D(H') \subseteq D(H)$ então $H' \in \Pi$.

(H2) Se $H \in \Pi$ tem centro c e raiz r e $r' \in V(G) \setminus V(H)$ é adjacente a c então $(H \setminus r) \cup cr'$ é hipopropulsor enraizado em r' pertencente a Π.

(H3) Se H e $H' \in \Pi$ tem mesma haste rc e $D \in D(H)$ e $V(D) \cap V(D(H')) = \emptyset$ então existe $D' \in D(H')$ tal que o hipropulsor H'' de haste rc e lâminas $D(H'') = (D(H') \setminus D') \cup (D)$ pertence a Π.

O mesmo resultado central pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 4.4 *Seja* Π *uma família fechada de hipopropulsores enraizados com respeito a* $\mathcal{H}$ *tendo seus centros em vértices de peso positivo. Se* ρ *é uma função peso tal que* $\rho(w) + \rho(w') \neq 0$ *para* $w,\ w' \in V(G)$, *então*

$$M_{\mathcal{H}\cup\Pi}(G, \rho) \quad \textit{é o conjunto das bases de uma matróide.}$$

Demonstração: Essa demonstração se resume em mostrar que,

$$M_{\mathcal{H}\cup\Pi}(G, \rho) = M_{(\mathcal{H}\mathcal{L};(\mathcal{L}))}(G, \rho),$$

para uma determinada $(\mathcal{L}_i)$, e o resultado então segue do Lema 4.3.

Para cada vértice v de G, seja

$$\mathcal{L}_v = \{D(H) : H \in \Pi \quad \text{e} \quad H \quad \text{tem centro em} \quad v\}.$$

É consequência direta da definição da família fechada de propulsores que $(\mathcal{L}_v)$ é compatível com $\mathcal{H}$. Seja $\mathcal{L} = \cup(\cup\mathcal{L}_v : v \in V(G))$.

Seja B um $\mathcal{H} \cup \Pi$-empacotamento de peso máximo ($V(B) \in M_{(\mathcal{H}\cup\Pi)}(G,\rho)$). Para cada $H \in B \setminus \mathcal{H}$ seja $H' = D(H) \cup \{vr\}$ onde vr é a haste de H.

Se $B' = (B \cap \mathcal{H}) \cup (\cup\{H' : H \in B \setminus \mathcal{H}\})$, então B' é um $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-empacotamento admissível com respeito a $(\mathcal{L}_v)$.

Claramente B e B' cobrem os mesmos vértices de G e assim existe um $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-empacotamento admissível com respeito a $(\mathcal{L}_a)$ cobrindo os mesmos vértices que B.

Seja agora B um $H \cup \mathcal{L}$-empacotamento admissível com respeito a $(\mathcal{L}_v)$ e de peso máximo.

Então, para cada $v \in V(G)$, existe $H_v \in \mathcal{L}_v$ tal que $B' = B \setminus \cup\{H_v : v \in V(G)\} \subseteq \mathcal{H}$.

Para cada $H_v \neq \emptyset$, Construímos um hipopropulsor P_v tal que $B' \cup \{P_v;\ v \in V(G)\}$ cubra exatamente $V(B)$.

Teremos então dois casos:

Caso 1: v não é coberto por B.

Seja w um vértice de algum $H \in H_v$ tal que $wv \in E(G)$. Seja M um $\mathcal{H}$-empacotamento perfeito de $H \setminus w$. Então

$$\overline{B} = (B \setminus \{H\}) \cup M \cup \{vw\}$$

é $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-empacotamento admissível com respeito a $(\mathcal{L}_v)$ cobrindo $V(B) \cup \{v\}$. Como B tem peso máximo, $\rho(v) < O$. Então existe um hipopropulsor em Π com centro de peso negativo. Contradição. Nesse caso, $P_v = \emptyset$.

Caso 2: v é coberto por B.

Dividiremos a análise em dois subcasos:

2.1 – $v \in H_1 \in B$ e H_1 não é aresta de B. Seja w um vértice de algum $H_2 \in H_v$ tal que $wv \in E(G)$. Sejam M_1 e M_2 os empacotamentos perfeitos de $H_1 \setminus v$ e $H_2 \setminus w$ respectivamente.

Então, $\overline{B} = (B \setminus \{H_1, H_2\}) \cup M_1 \cup M_2 \cup \{vw\}$ é um $(\mathcal{H} \cup \mathcal{L})$-empacotamento admissível com respeito a (D_v) e cobrindo os mesmos vértices que B.
Podemos então supor que esse caso não ocorre.

2.2 – Existe $e \in B$ tal que v é um dos seus vértices. Seja P_v o hipopropulsor de Π tendo como lâminas H_v e haste e. Então, $\overline{B} = B' \cup (P_v;\ v \in V(G))$ é um $\mathcal{H} \cup \Pi$-empacotamento cobrindo os mesmos vértices que B. Assim,

$$M_{\mathcal{H}\cup\Pi}(G, \rho) = M_{(\mathcal{H}\cup D;(D_i))}(G, \rho)$$

e, pelo Lema 4.3, $M_{\mathcal{H}\cup\Pi}(G, \rho)$ é uma matróide. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] J. Akiyama, D. Avis and H. Era, *"On a $\{1,2\}$-factor of a graph"*, TRU math., **16** (1980), 97–102.

[2] A. Amahashi and M. Kano, *"On factors with given components"*, Discrete Math., **42** (1982), 7–26.

[3] A. Cornuejols and D. Hartvigsen, *"An extension of matching theory"*, J. Combin. Theory Ser. B.40, 285–296, 1986.

[4] A. Cornuejols, D. Hartvigsen and W.R. Pulleyblank, *"Packing subgraphs in a graph"*, Oper. Lett., **1** (1982), 139–143.

[5] J. Edmonds, *"Path, trees and flowers"*, Canad. J. Math., **17** (1965), 449–467.

[6] J. Edmonds, *"Submodular functions, matroids and certain polyhedra, combinatorial structures and their applications"*, in Proceedings, Calgary International Conference, 1969, pp. 69–87, Gordon & breach, New York.

[7] J. Edmonds and D.R. Fulkerson, *"Transversals and matroid partition"*, J. Res. Nat. bur. Standard Sec. B.69, 147–153, 1965.

[8] P. Hell and D. Kirkpatrick, *"Star factor and star packings"*, TR 82-6, Department of Computing Science, Simon Fraser University, 1982.

[9] P. Hell and D. Kirkpatrick, *"On the complexity of general graph factor problems"*, SIAM J. Comput., 601–609, 1983.

[10] P. Hell and D. Kirkpatrick, *"Packings by cliques and by finite families of graphs"*, Discrete Math., **49** (1984), 118–133.

[11] P. Hell and D. Kirkpatrick, *"Packings by complete bipartite graphs"*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods, **7** (1986), 199-209.

[12] M. Las Vergnas, *"An extension of Tutte's 1-factor theorem"*, Discrete Math., **23** (1978), 241–255.

[13] M. Lemos, *"Matroids induced by packing wheighted subgraphs"*, preprint.

[14] M. Loebl and S. Poljak, *"On matroids induced by packing subgraphs"*, J. Combin. Theory, Ser. B.44, (1988), 338–354.

[15] W.T. Tutte, *"Lectors on matroids"*, JRNBS, 69B, (1965), 1–47.

[16] D.J.A. Welsh, *"Matroid Theory"*, Academic Press, New York, 1976.

[17] H. Whitney, *"On the abstract properties of linear dependence"*, Amer. J. Math., **57** (1935), 509–533.