UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TEORIA DOS MÓDULOS IDEALIZADORES DIFERENCIAIS

por

Cleto Brasileiro Miranda Neto

Agosto de 2006

TEORIA
DOS MÓDULOS
IDEALIZADORES DIFERENCIAIS

CLETO BRASILEIRO MIRANDA NETO

Área de Concentração: Álgebra Comutativa

Tese de Doutorado apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Recife - Pernambuco

Agosto, 2006

Miranda Neto, Cleto Brasileiro
Teoria dos módulos idealizadores diferenciais / Cleto Brasileiro Miranda Neto. - Recife: O Autor, 2006.
50 folhas.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2006.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Álgebra comutativa. I. Título.

512.24 CDD (22.ed.) MEI2008-082

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Ciências.

Aprovado: ____________________________

Aron Simis, UFPE

Orientador

____

Francesco Russo, UFPE

S. C. Coutinho

____

Severino Coutinho Collier, UFRJ

____

Paulo Roberto Brumatti, UNICAMP

____

Wolmer Verçosa Vasconcelos, Rutgers University-USA

TEORIA DOS MÓDULOS IDEALIZADORES DIFERENCIAIS

por

Cleto Brasileiro Miranda Neto

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL

Agosto - 2006

Aos meus queridos pais,

Fernando e Rejane.

Agradecimentos

- Agradeço aos membros externos da banca examinadora, por terem aceito vir de seus departamentos e compromissos a fim de compô-la. O professor orientador (Aron Simis) sugeriu em linhas gerais um tema inicial, que pude desenvolver e aprofundar nesta tese.

- Um agradecimento à parte, mais do que especial, vai ao meu amigo e incondicional estimulador, Prof. Wolmer Vasconcelos, com quem tive a honra de manter contato durante o meu doutoramento. Sua conduta, seus ensinamentos e a maneira sábia de enxergar a vida - compartilhando sua visão também para além da Matemática - constituem um exemplo a ser seguido pelas futuras gerações (mesmo a sua própria geração...), e em particular me guiarão pelo caminho que deverei trilhar. Ele é a prova viva de que consagrada qualidade matemática e admirável simplicidade humana podem andar juntas.

- Sou grato pela amizade e apoio por parte de alguns professores, dentre os quais Manoel Lemos, Francisco Brito, Roberto Bedregal e Fernando Xavier. Minha gratidão vai também ao Prof. Eduardo Leandro, pela pessoa que ele é e pela boa e sensata conversa que sempre proporcionou.

- Agradeço a todos os colegas do departamento, pelo companheirismo e bons momentos, em especial ao amigo Kalasas Araújo; as angústias vivenciadas e obstáculos vencidos (muitos dos quais não deveriam ter existido...), principalmente nestes últimos dois anos, certamente terão seu efeitos revertidos e nos fortalecerão para o futuro que despontará em nossas veredas profissionais.

- Quero registrar minha gratidão a todos os funcionários técnico-administrativos do DMAT, especialmente Tânia Maranhão (minha “segunda mãe”, sempre paciente e acessível), Manoel Ronaldo e Oscar. Sou também bastante grato às bibliotecárias da Setorial, especialmente Jane Souto, que sempre me recebeu com muita simpatia e disponibilidade.

- É claro que a minha mais profunda gratidão vai aos meus pais Fernando Parísio e Rejane Miranda. Meu reconhecimento vai também para os meus irmãos João e Nando, meus avós e tios (em especial os tios professores Peco e Clóvis, pelo estímulo constante).

- Quero agradecer a S. Marcílio, D. Dayse e família, pelo apoio constante principalmente durante o último ano de meu doutorado. Com muito carinho agradeço a Cecília Aroucha, por tudo o que ela fez e faz por mim, e por tudo o que ela significa para mim... Sou grato também ao iluminado Chiquinho!

- Agradeço ao CNPq pelo fundamental auxílio financeiro.

Resumo

Dado um ideal em um anel de polinômios (a coeficientes em um corpo, que usualmente assumimos ter característica zero), podemos considerar as derivações que o preservam. Elas dão origem a um módulo especial denominado *idealizador diferencial* (do ideal dado). Tal objeto desempenha um papel primordial nesta tese, que está dividida em duas seções principais. Na primeira seção a teoria de tais módulos é desenvolvida a partir de uma definição completamente geral: propomos uma versão relativa, não necessariamente polinomial, com propriedades e técnicas que se mostram úteis a vários resultados subseqüentes. Em seguida focalizamos em idealizadores polinomiais, principalmente fornecendo critérios efetivos de reflexividade e liberdade, bem como introduzindo a classe dos então chamados *ideais* (*e anéis*) *diferencialmente livres* (generalização não-trivial da conhecida noção de *divisor livre*). A segunda seção lida com aplicações ao módulo clássico de derivações (ou de campos vetoriais tangentes) de uma álgebra finitamente gerada sobre um corpo. Inicialmente é dado um método computacional para obtenção de um conjunto de geradores. Obstruções à sua Cohen-Macaulicidade são investigadas - uma delas sendo que o anel deve ser eqüidimensional -, com critérios no caso de hipersuperfícies e de interseções completas homogêneas com singularidade isolada. São obtidas decomposição primária no caso reduzido, álgebras de explosão no caso de hipersuperfícies, e certas estimativas de multiplicidade. Finalmente, uma resolução livre no caso de anéis diferencialmente livres é explicitada, e versões da *Conjectura de Zariski-Lipman* são estabelecidas.

Palavras-chave: Derivação, idealizador diferencial, divisor livre, anel diferencialmente livre, Cohen-Macaulicidade, hipersuperfície, álgebra de explosão, Zariski-Lipman.

Abstract

Given an ideal in a polynomial ring (with coefficients in a field usually assumed to have characteristic zero), we may consider the derivations that preserve it. They give rise to a special module called *differential idealizer* (of the given ideal). Such an object plays a primordial role in this thesis, which is divided into two main sections. In the first section the theory of such modules is developed from a completely general definition: we propose a relative version, not necessarily polynomial, with properties and techniques that turn out to be useful to several subsequent results. We then focus on polynomial idealizers, mainly giving effective criteria for reflexiveness and freeness, as well as introducing the class of the so-called *differentially free ideals* (*and rings*) (non-trivial generalization of the well-known notion of *free divisor*). The second section deals with applications to the classical module of derivations (or of tangent vector fields) of an algebra of finite type over a field. Firstly a computational method to obtain a set of generators is given. Obstructions to its Cohen-Macaulayness are investigated - one of them being that the ring must be equidimensional -, with criteria in the case of hypersurfaces and homogeneous complete intersections with isolated singularity. Primary decomposition in the reduced case, blowup algebras in the hypersurface case and certain multiplicity estimates are established. Finally, a free resolution in the case of differentially free rings is explicited, and versions of the *Zariski-Lipman Conjecture* are settled.

Keywords: Derivation, differential idealizer, free divisor, differentially free ring, Cohen-Macaulayness, hypersurface, blowup algebra, Zariski-Lipman.

Conteúdo

1 Introdução

Esta tese tem como objetivo desenvolver e justificar a teoria dos chamados *idealizadores diferenciais* (ou *tangenciais*) - tal é a designação para os módulos constituídos das derivações que satisfazem uma certa propriedade de *condução*, ou *idealização*, num sentido que logo tornaremos preciso.

O trabalho está dividido em duas partes principais. Na primeira são dadas a definição geral e uma série de propriedades acerca do módulo idealizador diferencial, com ênfase no contexto polinomial, a menos da Seção 2.1. Além disso, tem início o estabelecimento dos resultados centrais, e isto se estende à segunda parte da tese, que se dedica a aplicações da teoria aqui proposta - trata-se, portanto, da justificativa a que nos referimos acima. O interesse está voltado especialmente ao módulo de derivações (propriamente dito) de uma álgebra finitamente gerada sobre um corpo, isto é, o módulo tradicional dos *campos de vetores tangentes algébricos*, objeto que reconhecidamente desempenha um papel fundamental em Álgebra Comutativa - pode-se considerar, em particular, o seu potencial de aplicações à Teoria dos Anéis (*e.g.*, os resultados de Seidenberg sobre derivações e fecho inteiro de domínios noetherianos) - bem como em Geometria Algébrica, conhecida a sua característica de traduzir propriedades tangenciais; contudo salientamos, desde já, que a abordagem e as ferramentas aqui utilizadas são puramente algébricas.

Subdividimos esta introdução em duas seções, a primeira tratando da motivação e descrição resumida dos resultados obtidos neste trabalho, e a segunda, ainda a título de motivação - e principalmente de contextualização - focalizando em uma revisão geral sobre o módulo de derivações, incluindo propriedades no caso "concreto" das álgebras finitamente geradas sobre um corpo.

1.1 Apresentação geral

É natural que uma das metas da tese seja mostrar que a teoria aqui apresentada desperta interesse próprio, o que já se justifica pelo fato de que o módulo idealizador tem sido estudado em certos casos particulares no contexto polinomial, e conduzido a teorias de atual relevância - a exemplo da protagonizada pelos *divisores livres* (e a noção estendida de *divisores Koszul-livres*). Assim, como toda teoria que se propõe, almeja firmar-se como uma alternativa promissora de abordagem a contextos e problemas relacionados, especialmente em áreas fronteiriças. A título de vago exemplo, há uma relação com estruturas denominadas *folheações* (a respeito das quais nada será dito aqui), que de maneira geral constituem um fértil campo de pesquisa em Geometria Algébrica, tendo estreita ligação com certos sistemas de equações diferenciais e singularidades de campos vetoriais (o que é de interesse mesmo em duas variáveis, a exemplo do estudo das curvas algébricas planas invariantes por um dado campo vetorial); em particular, as folheações tangentes *1-dimensionais* estão intuitivamente relacionadas à noção de campo de direções tangentes a uma variedade fixada.

A motivação propulsora deste trabalho reside nas duas vertentes seguintes, a primeira habitando o cerne da teoria, e a segunda constituindo-se de aplicações:

(1) O auto-desenvolvimento da teoria aqui estabelecida, como generalização não-trivial da teoria das derivações logarítmicas de Saito - o que aqui se expressa através do módulo idealizador diferencial associado a um ideal principal - e divisores livres algébricos,

os quais, como veremos, constituem um caso bem particular de ideais aqui batizados *diferencialmente livres* (ou *tangencialmente livres*);

(2) O potencial de aplicações ao "desbravamento" do módulo de derivações $\mathrm{Der}_k(R)$ de uma álgebra finitamente gerada R sobre um corpo k (em geral assumido perfeito ou de característica zero).

Uma breve justificativa para (2): O módulo $\mathrm{Der}_k(R)$ detém importantes "informações tangenciais" do ente geométrico associado à algebra inicial. Trata-se de um objeto clássico e presente em vários contextos, mas pouco se sabe, além de seu perfil básico, em termos de estrutura e invariantes numéricos associados. Na maioria dos casos ainda não se conhece um conjunto de geradores bem estruturado para tal módulo, bem como condições efetivas - no vago sentido de serem implementáveis ou teoricamente constatáveis à mão - equivalentes à sua Cohen-Macaulicidade ou liberdade, esta última propriedade estando relacionada à tradicional *Conjectura de Zariski-Lipman*, positivamente estabelecida na maior parte dos casos mas ainda resistente mesmo para as interseções completas afins 2-dimensionais (além disso, o problema admite uma versão homológica mais forte). Um entendimento satisfatório destas e outras questões poderia refletir-se sobre a própria natureza da álgebra (finitamente gerada) considerada, e do objeto geométrico (variedade ou esquema) associado.

Antes da descrição das contribuições desenvolvidas neste trabalho, fornecemos a definição precisa de nosso objeto central: sejam R um anel comutativo com unidade, M um R-módulo e $\mathrm{Der}_S(R, M)$ o R-módulo das S-derivações de R a valores em M (vide seção a seguir). Para cada $\mathfrak{a} \subset R$ ideal, $S \subset R$ subanel e $N \subset M$ submódulo, definimos o *idealizador* (S-)*diferencial* (ou *tangencial*), *a valores em* M e *relativo ao par* $\mathfrak{a}, N$, por

$$\mathrm{Der}^S_{\mathfrak{a},N}(R, M) = \{\delta \in \mathrm{Der}_S(R, M) \mid \delta(\mathfrak{a}) \subseteq N\},$$

onde $\delta(\mathfrak{a}) \subseteq N$ siginifica $\delta(a) \in N,\ \forall a \in \mathfrak{a}$. Dizemos que uma tal derivação *idealiza* ou *conduz* $\mathfrak{a}$ em N. Se $M = R$ e $N = \mathfrak{b} \subset R$ é um ideal, escrevemos $\mathrm{Der}^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(R)$, ou $\mathrm{Der}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(R)$ quando o subanel S estiver subentendido. Se além disso $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, a notação se reduz a $\mathrm{Der}_{\mathfrak{a}}(R)$, o denominado *idealizador diferencial* (*absoluto*) *de* $\mathfrak{a}$.

Este módulo é apresentado na Seção 2.1, que lida com algumas de suas propriedades gerais. Por exemplo, é explicitada a estrutura de idealizadores diferenciais associados a certas extensões inteiras de domínios. Além disso, são estabelecidos vários resultados preliminares de comparação entre idealizadores, alguns dos quais de fundamental valia em demonstrações de resultados posteriores. Apesar de bastante gerais, parecem interessantes em si e propõem, de certa forma, um caminho para futuros desdobramentos.

Deste ponto em diante, o trabalho se concentra no contexto polinomial. Neste caso, o idealizador diferencial relativo a um par de ideais $I \subseteq J \subset A = k[X_1, \ldots, X_n]$ (k corpo) se escreve concretamente como

$$\mathrm{Der}_{I,J}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial}{\partial X_i} \in \bigoplus_{i=1}^{n} A \frac{\partial}{\partial X_i} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial X_i} \in J,\ \forall f \in I \right\}.$$

De fundamental interesse é o caso "colapsante" $I = J$, isto é, pousamos sobre o módulo absoluto $\mathrm{Der}_I(A)$, o qual já havia sido explorado (com outra terminologia e notação) no caso em que $I \subset A$ é um ideal *monomial* (*cf.* [2]). Quando $I = (f)$ é um ideal principal, o módulo idealizador correspondente $\mathrm{Der}_f(A)$ – aqui batizado *módulo de Saito* de f – constitui a tradução algébrica (no ambiente polinomial) dos chamados *campos vetoriais logarítmicos*, que protagonizam a teoria original de K. Saito (*cf.* [10], principal inspiração desta tese), estabelecida no contexto de anéis de germes de funções analíticas. Contudo, é interessante observar que a idéia de "preservar" um ideal ou mesmo conduzi-lo em outro – noção de *idealização* – já havia sido aplicada, por exemplo, no contexto do anel de operadores diferenciais (*cf.* [14], por J. Tripp, onde também podem ser encontradas referências anteriores, que a propósito já faziam uso da expressão em inglês *idealizer*).

A Seção 2.2 se dedica exatamente às propriedades iniciais do módulo $\mathrm{Der}_{I,J}(A)$ descrito acima. Investigamos sua relação estrutural com o correspondente módulo de k-derivações de A/I com valores em A/J, e estabelecemos uma seqüência exata curta – batizada *seqüência exata jacobiana* – que se mostra ferramenta útil em algumas seções seguintes.

Os *idealizadores diferenciais parciais* (IDP's) são introduzidos na Seção 2.3. Através de uma observação elementar, é possível escrever todo idealizador diferencial absoluto como interseção de parciais. Exibimos geradores para cada IDP associado a um ideal com geradores fixados, e em particular revisitamos o caso dos idealizadores diferenciais de ideais principais, quando são explicitadas sua resolução livre e álgebras de *blowup* (álgebras simétrica e de Rees). Por fim, investigamos IDP's associados a divisores livres.

A Seção 2.4 é a mais importante no que diz respeito à teoria dos idealizadores diferenciais polinomiais. Contém um critério efetivo para a reflexividade do módulo idealizador (uma obstrução básica a esta propriedade é que o ideal deve ter codimensão 1), do qual segue imediatamente um critério de liberdade, o que nos permite introduzir a classe dos *ideais diferencialmente livres* e os correspondentes *anéis diferencialmente livres*. Propriedades centrais do módulo de derivações de um tal anel são descritas na segunda parte do trabalho. É neste sentido que classificamos a teoria protagonizada por estes ideais como sendo generalização não-trivial da teoria dos *divisores livres* (algebricamente, trata-se dos polinômios com módulo de Saito livre) – além do bônus proporcionado pelas várias propriedades independentes da liberdade do idealizador, exploradas sistematicamente com vista a aplicações dentro e fora da teoria.

A Seção 2.5 tem caráter técnico e trata de estimativas básicas da profundidade do módulo idealizador no caso graduado. Em certas situações, determinamos o valor exato deste invariante.

Na Seção 2.6 é fornecida a decomposição primária do idealizador diferencial absoluto de um ideal radical, em termos dos idealizadores dos primos componentes.

Passemos finalmente à descrição das aplicações obtidas, acerca de propriedades do módulo de derivações de álgebras de tipo finito sobre um corpo.

Um método computacional para a obtenção de geradores do módulo de derivações é proposto na Seção 3.1, em termos de resultados obtidos na Seção 2.3 a respeito dos IDP's. A justificativa crucial para o apelo ao método é a dificuldade quase sempre presente nos cálculos "manuais" de interseções de módulos.

Obstruções à Cohen-Macaulicidade do módulo de derivações compõem o objetivo central da Seção 3.2. Inicialmente mostra-se que, no contexto graduado, a dimensão deste módulo coincide com a da álgebra em questão. Em seguida, obtém-se um critério em termos da profundidade do módulo idealizador, e prova-se que uma condição necessária à sua Cohen-Macaulicidade é que o anel seja eqüidimensional (no nível dos primos mínimos). Investiga-se também o reflexo desta propriedade sobre a codimensão de ideais jacobianos, em especial no caso de interseções completas reduzidas. Na última subseção, é feito o cálculo explícito da profundidade do módulo de derivações de uma hipersuperfície (absoluta ou relativa a um ideal Cohen-Macaulay).

Na Seção 3.3 exibimos decomposição primária para o módulo de derivações de uma álgebra reduzida finitamente gerada sobre um corpo de característica zero. Trata-se de conseqüência automática do que se obteve na Seção 2.6 e do resultado básico da Subseção 2.2.1.

A Seção 3.4 dedica-se a cotas (inferiores e superiores) para o comprimento do módulo de derivações no caso artiniano, bem como para a multiplicidade de Hilbert-Samuel em dimensão arbitrária. O último resultado demonstrado na seção traz o valor exato da multiplicidade no caso de uma classe específica de anéis.

Na Seção 3.5 são obtidos os ideais que definem as álgebras de *blowup* do módulo de derivações de uma hipersuperfície. Um ingrediente primordial é o entendimento de como está "mergulhado" um certo submódulo (o submódulo "trivial") do módulo de Saito, expresso em termos de sua decomposição estrutural.

Propriedades do módulo de derivações de anéis diferencialmente livres são exploradas na Seção 3.6. Explicitamos uma resolução livre (sobre o anel de polinômios) e estabelecemos a *Conjectura Homológica de Zariski-Lipman* para esta classe de anéis, incluindo um caso em que se verifica a versão forte da conjectura.

Finalmente, o Apêndice traz algumas propriedades básicas do módulo de diferenciais de Kähler que foram utilizadas no trabalho.

Prosseguimos com a última parte desta introdução, onde relembramos o conceito e propriedades gerais do módulo de derivações de um anel comutativo.

1.2 Preliminares sobre o módulo de derivações

De maneira geral, se R é um anel (comutativo, com unidade) e M é um R-módulo, uma *derivação de R a valores em M* é uma aplicação aditiva $\delta\colon R \to M$ que satisfaz a *regra de Leibniz*, isto é, $\delta(ab) = a\delta(b) + b\delta(a), \forall a, b \in R$, onde, no segundo membro, estamos nos referindo à operação estrutural de M como módulo sobre R. O conjunto de tais derivações constitui de maneira natural um R-módulo, denotado por $\mathrm{Der}(R, M)$. No caso $M = R$, a notação se reduz a $\mathrm{Der}(R)$. Se $S \subseteq R$ é um subanel, podemos considerar o submódulo $\mathrm{Der}_S(R, M)$ constituído das *S-derivações de R a valores em M*,

$$\mathrm{Der}_S(R, M) = \{\delta \in \mathrm{Der}(R, M) \mid \delta|_S \equiv 0\}.$$

É claro que $\mathrm{Der}(R, M) = \mathrm{Der}_{\mathbb{Z}}(R, M)$, já que $\delta \in \mathrm{Der}(R, M) \Rightarrow \delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 1\delta(1) + 1\delta(1) \Rightarrow \delta(1) = 0 \Rightarrow \delta|_{\mathbb{Z}} = 0$. Além disso, a partir da própria definição segue uma inclusão $\mathrm{Der}_S(R, M) \subset \mathrm{Hom}_S(R, M)$.

Intimamente relacionado às derivações é o módulo $\Omega_S(R)$ das *S-diferenciais de Kähler de R*, ao qual se dedica o Apêndice. De agora em diante serão remetidas a ele (ou, preferencialmente, às referências lá citadas) a definição e quaisquer propriedades a respeito de $\Omega_S(R)$ que eventualmente forem utilizadas ao longo deste trabalho. Uma delas, extremamente importante, é o isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_R(\Omega_S(R), M) \simeq \mathrm{Der}_S(R, M)$$

dado por composição com a derivação universal $d = d_{R|S}\colon R \to \Omega_S(R)$. Uma conseqüência é que $\mathrm{Der}_S(R, M)_T \simeq \mathrm{Der}_S(R_T, M_T)$, para qualquer conjunto multiplicativo $T \subset R$.

Concentremo-nos agora no contexto particular em que $S = k \subset R = A/I$, onde $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ é anel de polinômios sobre um corpo k e $I \subset A$ é um ideal. Se J é um ideal contendo I, o homomorfismo sobrejetor $A/I \to A/J$ dá a $M = R' = A/J$ uma estrutura de módulo sobre R, de modo que podemos considerar o R'-módulo $\mathrm{Der}_k(R, R') \simeq \mathrm{Hom}_R(\Omega_k(R), R')$ das k-derivações de R a valores em R'. No caso colapsante $I = J$, podemos identificar $\mathrm{Der}_k(R) \simeq \Omega_k(R)^* = \mathrm{Hom}_R(\Omega_k(R), R)$.

Uma vez que $\Omega_k(A) = \oplus_{i=1}^n A dX_i$, o isomorfismo universal acima garante a existência de uma base $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ de homomorfimos $\xi_j \colon \oplus_i A dX_i \to A$ satisfazendo $\xi_j \circ d = \partial/\partial X_j$. Em outras palavras, as derivações parciais $\partial/\partial X_1, \ldots, \partial/\partial X_n$ constituem uma base para o módulo das k-derivações de A,

$$\mathrm{Der}_k(A) = \bigoplus_{j=1}^n A \frac{\partial}{\partial X_j},$$

que muitas vezes confundiremos com o módulo livre A^n, mediante a identificação usual de $\partial/\partial X_j$ com o j-ésimo vetor canônico $\mathrm{e}_j \in A^n$. De maneira completamente análoga, se $R = S[X_1, \ldots, X_n]$, onde S é um anel sobre o qual os X_j's são indeterminadas, então $\mathrm{Der}_S(R) = \oplus_j R \frac{\partial}{\partial X_j} \simeq R^n$.

Pode-se questionar a respeito da estrutura dos submódulos $\mathrm{Der}_B(A) \subset \mathrm{Der}_k(A)$ para outros subanéis $B \subset A$. Temos a resposta quando B é uma k-subálgebra finitamente gerada:

Proposição 1.1 *Sejam k um corpo e $B = k[\mathbf{f}] = k[f_1, \ldots, f_m] \subset A$ uma k-subálgebra. Se Θ denota a matriz jacobiana usual $\Theta(\mathbf{f}) = (\partial f_i/\partial X_j)$ (que confundiremos com o correspondente homomorfismo $A^n \to A^m$), então, considerando $\mathrm{Der}_B(A)$ como submódulo de A^n, tem-se* $\mathrm{Der}_B(A) = \mathrm{Ker}\ \Theta$.

Demonstração. Tomemos $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathrm{Der}_B(A)$. Logo $\sum_j p_j \partial f_i/\partial X_j = 0$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Em outras palavras, o produto da matriz Θ pelo vetor-coluna constituído dos p_j's fornece o vetor nulo. Assim $\mathrm{Der}_B(A) \subseteq \mathrm{Ker}\ \Theta$. Para a outra inclusão, se $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathrm{Ker}\ \Theta$ então $\sum_j q_j \partial f_i/\partial X_j = 0, \forall i$. Pondo $\delta = \sum_j q_j \partial/\partial X_j$, temos $\delta(f_i) = 0, \forall i$. Aplicando δ a qualquer

$$f = \sum a_{i_1 \ldots i_m} f_1^{i_1} \ldots f_m^{i_m} \in k[\mathbf{f}] = B,$$

obtemos, por aplicações sucessivas da regra de Leibniz, que $\delta(f) \in \sum_i B\delta(f_i) = 0$. Logo $\delta(f) = 0$ e isto significa que $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathrm{Der}_B(A)$. □

Uma aplicação desta proposição é uma prova alternativa para o fato bem-conhecido de que o posto de Θ não ultrapassa a dimensão da subálgebra.

Corolário 1.2 (k *corpo arbitrário.*) *Tem-se* posto $\Theta \leq \dim B$.

Demonstração. Por um lado, sendo $\mathrm{Der}_B(A) = \mathrm{Ker}\ \Theta$, temos posto $\mathrm{Der}_B(A) = n - p$, onde $p =$ posto Θ. Por outro lado, denotando $K = A_{(0)} = k(\mathbf{X})$ e observando que $\mathrm{Der}_B(A)_{(0)} \simeq \mathrm{Hom}_K(\Omega_B(K), K)$, podemos escrever posto $\mathrm{Der}_B(A) = \dim_K \Omega_B(K)$. A seqüência cotangente relativa, aplicada às extensões $B \subset L = k(\mathbf{f}) \subset K$, fornece em particular um homomorfismo sobrejetor de K-espaços vetoriais $\Omega_B(K) \to \Omega_L(K)$ e assim $\dim_K \Omega_B(K) \geq \dim_K \Omega_L(K) \geq \mathrm{gr.tr}_L(K) = \mathrm{gr.tr}_k(K) - \mathrm{gr.tr}_k(L) = n - \dim B \Rightarrow n - p \geq n - \dim B \Rightarrow p \leq \dim B$. □

Fixemos geradores $f_1, \ldots, f_m$ do ideal $I \subset A = k[X_1, \ldots, X_n]$ (suponhamos por simplicidade car $k = 0$, embora em muitas situações seja suficiente supor k perfeito). Seja J um ideal contendo I e consideremos a matriz θ obtida de $\Theta = \Theta(\mathbf{f})$ por redução módulo J, que naturalmente define um homomorfismo $\theta\colon (A/J)^n \to (A/J)^m$. O módulo de k-diferenciais $\Omega_k(A/I)$ se apresenta pela transposta de Θ reduzida módulo I, de maneira que, aplicando-se a esta apresentação o funtor $\mathrm{Hom}_{A/I}(-, A/J)$, obtém-se uma seqüência exata de A/J-módulos

$$0 \to \mathrm{Der}_k(A/I, A/J) \to (A/J)^n \xrightarrow{\theta} (A/J)^m \to \mathrm{Coker}\ \theta \to 0.$$

Isto mostra que o A/J-módulo $\mathrm{Der}_k(A/I, A/J) = \mathrm{Ker}\ \theta$ é livre de torção, e mais que isto, é um módulo de sizigias de ordem 2 (de Coker θ). Como tal, se J é radical (ou mais geralmente, se A/J é *genericamente Gorenstein*), trata-se de um A/J-módulo reflexivo. Além disso, denotando por r o maior inteiro tal que $I_r(\theta) \neq 0$, (ou alternativamente, $I_r(\Theta) \nsubseteq J$ em A), as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\mathrm{Der}_k(A/I, A/J)$ tem posto bem-definido sobre A/J, igual a $n - r$;

(ii) $\mathrm{Der}_k(A/I, A/J)$ tem posto bem-definido sobre A/J;

(iii) A matriz θ tem posto bem-definido r;

(iv) O ideal $I_r(\theta) \subset A/J$ contém algum elemento A/J-regular.

Situações típicas em que isto ocorre são quando J é um ideal primo (com I qualquer contido em J), ou $I = J$ é um ideal *puro* (isto é, todos os primos associados de I têm a mesma altura) que é *genericamente uma interseção completa*, no sentido de que $I_\wp$ é gerado por uma $A_\wp$-seqüência, para todo $\wp \in \mathrm{Ass}\ A/I$; neste caso, o posto de $\mathrm{Der}_k(A/I)$ coincide com a dimensão de Krull de A/I. Lembrando que se I (ou A/I) é *eqüidimensional* então todos os seus primos mínimos têm a mesma altura, concluímos em particular que se I é radical (logo genericamente regular) e eqüidimensional (logo, neste caso, puro) então $\mathrm{Der}_k(A/I)$ tem posto bem-definido. Pode-se também fazer uso do chamado *ideal diagonal* $\mathbb{D}_{A/I}$ de A/I, quando este é genericamente uma interseção completa com a propriedade de que as seqüências regulares obtidas localmente têm o mesmo comprimento; porém, optamos por não adotar esta última abordagem.

Uma aplicação destas observações preliminares é que, se θ possui posto bem-definido r, então, utilizando a fórmula para a dimensão da *álgebra de Rees* de um módulo finitamente gerado com posto, obtém-se $\dim \mathcal{R}_{A/J}(\mathrm{Der}_k(A/I, A/J)) = \dim A/J + n - r$. Em particular, se $R = A/I$ é um anel reduzido eqüidimensional de dimensão d, então $\mathcal{R}_R(\mathrm{Der}_k(R))$ tem dimensão $2d$.

2 Módulos idealizadores diferenciais

Doravante a teoria dos idealizadores diferenciais será apresentada e elaborada *ab initio*, partindo da situação geral e logo (da Seção 2.2 em diante) concentrando-se no contexto fundamental de ideais em anéis de polinômios sobre um corpo.

2.1 Módulos idealizadores diferenciais gerais

Iniciamos com a definição central deste trabalho.

Definição 2.1 Sejam R um anel comutativo com unidade e M um R-módulo. Para cada $\mathfrak{a} \subset R$ ideal, $S \subset R$ subanel e $N \subset M$ submódulo, definimos o *idealizador* (S-)*diferencial* (ou (S-)*tangencial*), *a valores em* M *e relativo ao par* $\mathfrak{a}, N$, por

$$\mathrm{Der}^S_{\mathfrak{a},N}(R, M) = \{\delta \in \mathrm{Der}_S(R, M) \mid \delta(\mathfrak{a}) \subseteq N\},$$

onde $\delta(\mathfrak{a}) \subseteq N$ siginifica $\delta(a) \in N$, $\forall a \in \mathfrak{a}$. Dizemos que uma tal derivação *idealiza* ou *conduz* $\mathfrak{a}$ em N. Se $M = R$ e $N = \mathfrak{b} \subset R$ é um ideal, escrevemos $\mathrm{Der}^S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(R)$, ou $\mathrm{Der}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(R)$ quando o subanel S estiver subentendido. Se além disso $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, a notação se reduz a $\mathrm{Der}_{\mathfrak{a}}(R)$, o denominado *idealizador diferencial* (absoluto) de $\mathfrak{a}$.

Claramente, trata-se de um R-submódulo de $\mathrm{Der}_S(R, M)$. Introduzindo agora a hipótese de que $\mathfrak{a} \subseteq N{:}_R M$, é útil observar que a condição $\delta(\mathfrak{a}) \subseteq N$ é equivalente a $\delta(a_\alpha) \in N$, para todo elemento a_α em um conjunto (qualquer, possivelmente infinito) de geradores de $\mathfrak{a}$. De fato, seja $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ um tal conjunto e tomemos $a \in \mathfrak{a}$ arbitrário. De modo geral, uma soma possivelmente infinita de módulos é constituída, por definição, de somas finitas de elementos, e assim neste caso tem-se uma expressão $a = \sum_{\alpha\in\mathcal{F}} b_\alpha a_\alpha$, onde $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ é um subconjunto finito de índices. Aplicando $\delta \in \mathrm{Der}_S(R, M)$ a esta soma obtemos

$$\delta(a) = \sum_{\alpha\in\mathcal{F}} b_\alpha \delta(a_\alpha) + \sum_{\alpha\in\mathcal{F}} a_\alpha \delta(b_\alpha) \in N + \mathfrak{a}M = N,$$

mostrando portanto que $\delta \in \mathrm{Der}^S_{\mathfrak{a},N}(R, M)$, e que em particular não há dependência com relação à escolha de geradores. Vê-se que a hipótese $\mathfrak{a}M \subseteq N$ é crucial, embora possamos considerar módulos idealizadores completamente gerais (no contexto comutativo), como na definição acima.

Proposição 2.2 *Sejam $S \subset R$ anéis e $N \subset M$ R-módulos. Então, para qualquer ideal $\mathfrak{a} \subset N{:}_R M$, tem-se uma seqüência exata de R-módulos*

$$0 \to \mathrm{Der}_S(R, N) \to \mathrm{Der}^S_{\mathfrak{a},N}(R, M) \to \mathrm{Der}_{S/(\mathfrak{a}\cap S)}(R/\mathfrak{a}, M/N),$$

e em particular uma seqüência exata

$$0 \to \mathrm{Der}_S(R, N) \to \mathrm{Der}_S(R, M) \to \mathrm{Der}_S(R, M/N).$$

Demonstração. Denotando $M' = M/N$, a hipótese $\mathfrak{a} \subseteq N{:}_R M = 0{:}_R M'$ garante que M' tem estrutura de módulo sobre $R' = R/\mathfrak{a}$. A cada $\delta \in \mathrm{Der}^S_{\mathfrak{a},N}(R, M)$ podemos associar a aplicação $\pi \circ \delta \colon R \to M'$, onde $\pi \colon M \to M'$ é a projeção natural. Para quaisquer $b_1, b_2 \in R$, podemos escrever $(\pi \circ \delta)(b_1 b_2) = \pi(b_1\delta(b_2) + b_2\delta(b_1)) = b_1(\pi \circ \delta)(b_2) + b_2(\pi \circ \delta)(b_1)$ e assim $\pi \circ \delta \in \mathrm{Der}_S(R, M')$. Denotando $S' = S/(\mathfrak{a} \cap S) \subset R'$, afirmamos que tem-se induzida uma aplicação $\overline{\delta} \colon R' \to M'$ que é uma S'-derivação. De fato, pondo $\overline{\delta}(\overline{b}) = (\pi \circ \delta)(b), \forall b \in R$ ($\overline{b}$ denota a imagem de b em R') e tomando $a_1, a_2 \in R$ tais que $a_1 - a_2 \in \mathfrak{a}$, então, usando que $\delta(\mathfrak{a}) \subseteq N$, tem-se $\delta(a_1) - \delta(a_2) = \delta(a_1 - a_2) \in N \Rightarrow (\pi \circ \delta)(a_1) = (\pi \circ \delta)(a_2)$ e portanto $\overline{\delta}$ está bem definida. Além disso $\overline{\delta} \in \mathrm{Der}_{S'}(R', M')$, já que $\pi \circ \delta \in \mathrm{Der}_S(R, M')$.

Este processo define a aplicação

$$\begin{array}{rlcl}\Upsilon = \Upsilon_{\mathfrak{a},N}: & \mathrm{Der}^S_{\mathfrak{a},N}(R,M) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{S'}(R',M'),\\ & \delta & \longmapsto & \Upsilon(\delta) = \overline{\delta}\end{array}$$

que claramente é R-linear. É fácil ver também que Ker $\Upsilon = \mathrm{Der}_S(R,N)$.

Para a seqüência exata particular basta tomar $\mathfrak{a} = 0$ e observar que $\mathrm{Der}^S_{(0),N}(R,M) = \mathrm{Der}_S(R,M)$. □

Questão 2.3 Quando o homomorfismo $\Upsilon_{\mathfrak{a},N}$ é sobrejetor?

Mais adiante (*cf.* Proposição 2.25) mostraremos que isto ocorre para as álgebras finitamente geradas e *essencialmente de tipo finito* sobre um corpo — não são conhecidos, porém, outros casos em que seja válida tal propriedade.

Corolário 2.4 *Suponhamos que o anel $R/\mathfrak{a}$ é noetheriano e finitamente gerado como álgebra sobre $S/(\mathfrak{a}\cap S)$. Se $\Omega_{S/(\mathfrak{a}\cap S)}(R/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} = 0$, $\forall\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{R/\mathfrak{a}}(M/N)$, então*

$$\mathrm{Der}^S_{\mathfrak{a},N}(R,M) = \mathrm{Der}_S(R,N).$$

Demonstração. Sejam $S' = S/(\mathfrak{a}\cap S) \subset R' = R/\mathfrak{a}$ e $M' = M/N$. A condição sobre R' garante que $\Omega_{S'}(R')$ é um R'-módulo finitamente gerado e satisfaz

$$\mathrm{Ass}_{R'}\mathrm{Hom}_{R'}(\Omega_{S'}(R'),M') = \mathrm{Supp}_{R'}\Omega_{S'}(R') \cap \mathrm{Ass}_{R'}M'.$$

Mas a hipótese sobre o módulo de diferenciais significa que esta interseção é vazia. Assim $\mathrm{Der}_{S'}(R',M') \simeq \mathrm{Hom}_{R'}(\Omega_{S'}(R'),M') = 0$, e o desejado segue da seqüência exata estabelecida na Proposição 2.2. □

2.1.1 Idealizadores relacionados a extensões inteiras de domínios

Esta subseção tem início com uma proposição de interesse independente, mas que auxiliará a explicitação da estrutura de idealizadores diferenciais associados a certas extensões de domínios.

Sejam $S \subset R$ anéis e M um R-módulo. Da definição de S-derivação de R a valores em M segue uma inclusão $\mathrm{Der}_S(R,M) \subset \mathrm{Hom}_S(R,M)$. Assim, para qualquer $\delta \in \mathrm{Der}_S(R,M)$, a imagem Im $\delta = \delta(R) \subset M$ é um S-módulo. Isto nos permite definir o seguinte S-submódulo de M:

$$\mathfrak{D}_{S,R}(M) = \sum_{\delta} \mathrm{Im}\ \delta, \quad \delta \in \mathrm{Der}_S(R,M).$$

Sob condições razoáveis, como veremos agora, este módulo está contido no submódulo de R-torção de M, e é portanto anulado – no caso finitamente gerado – por uma potência de um certo ideal de Fitting de M.

Proposição 2.5 *Seja $S \subset R$ uma extensão inteira de domínos noetherianos contendo um corpo de característica zero, e seja M um R-módulo com submódulo de R-torção $\tau_R(M)$. Então $\mathfrak{D}_{S,R}(M) \subset \tau_R(M)$.*

Demonstração. Sejam $\delta \in \mathrm{Der}_S(R, M)$ e $b \in R$ quaisquer, e tomemos $n = n(b)$ o menor inteiro positivo satisfazendo $b^n + a_1 b^{n-1} + \ldots + a_{n-1} b + a_n = 0$, com $a_1, \ldots, a_n \in S$. Aplicando δ a esta relação de dependência inteira, e usando que $\delta|_S = 0$, obtemos

$$nb^{n-1}\delta(b) + a_1(n-1)b^{n-2}\delta(b) + \ldots + a_{n-1}\delta(b) = 0,$$

isto é, $c \cdot \delta(b) = 0 \in M$, onde $c = nb^{n-1} + a_1(n-1)b^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \in R$. Como $\mathbb{Q} \subset S$, podemos escrever

$$\frac{c}{n} = b^{n-1} + \frac{a_1(n-1)}{n} b^{n-2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n}, \quad \text{com} \quad \frac{a_1(n-1)}{n}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{n} \in S.$$

Decorre que $c \neq 0$, do contrário teríamos $b^{n-1} + (a_1(n-1)/n)b^{n-2} + \ldots + a_{n-1}/n = 0$, contradizendo a minimalidade de n. Sendo R um domínio, isto mostra que $\delta(b)$ pertence ao submódulo de R-torção $\tau_R(M)$ de M, e como $b \in R$ é arbitrário, $\mathrm{Im}\, \delta \subset \tau_R(M)$. Já que $\delta \in \mathrm{Der}_S(R, M)$ também foi tomada arbitrária, obtemos $\mathfrak{D}_{S,R}(M) \subset \tau_R(M)$. $\square$

Observação 2.6 Assumindo que o módulo M da proposição é finitamente gerado de posto r sobre o domínio noetheriano R, e usando que $\mathfrak{D}_{S,R}(M) \subset \tau_R(M) = 0 :_M \mathfrak{F}_r(M)^\infty = 0 :_M \mathfrak{F}_r(M)^l$, para $l \gg 0$, obtém-se que

$$\mathfrak{F}_r(M)^l \cdot \mathfrak{D}_{S,R}(M) = 0,$$

onde $\mathfrak{F}_r(M)$ (*resp.* “ $\cdot$ ”) denota o r-ésimo ideal de Fitting (*resp.* a operação de R-módulo) de M.

A Proposição 2.5 revela uma obstrução “diferencial” para um módulo (não necessariamente finitamente gerado) ser livre de torção:

Corolário 2.7 *Seja $S \subset R$ uma extensão inteira de domínos noetherianos contendo um corpo de característica zero, e seja M um R-módulo. Se existir uma S-derivação $\delta \colon R \to M$ não-trivial, então M não é livre de torção sobre R.*

Demonstração. Temos $\mathfrak{D}_{S,R}(M) \subset \tau_R(M)$. Se M fosse um R-módulo livre de torção, teríamos $\mathfrak{D}_{S,R}(M) = 0$ e assim $\mathrm{Der}_S(R, M) = 0$, contradizendo a hipótese. $\square$

Observação 2.8 Seja $S \subset R$ uma extensão inteira como acima, e seja N um R-módulo finitamente gerado. Se existir uma S-derivação não-trivial de R na álgebra simétrica $\mathcal{S}_R(N)$ de N, então, aplicando o corolário com $M = \mathcal{S}_R(N)$, podemos afirmar que $\mathcal{S}_R(N)$ possui R-torção, isto é, N não é de *tipo linear*. Uma situação em que isto possivelmente se aplica é quando R é uma álgebra de tipo finito sobre um corpo e S é uma normalização de Noether de R.

Corolário 2.9 *Além das condições da Proposição 2.5, suponha-se que M é livre de R-torção e seja k um corpo de característica zero contido em S. Então existe injeção de R-módulos*

$$\mathrm{Der}_k(R, M) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(S, M),$$

dada por restrição a S. Em particular, $\mathrm{Der}_k(R) \subseteq \mathrm{Der}_k(S, R)$.

Demonstração. Do Corolário 2.7 decorre $\mathrm{Der}_S(R, M) = 0$. Escrevamos a seqüência cotangente relativa associada à extensão de k-álgebras $S \subset R$:

$$\Omega_k(S) \otimes_S R \to \Omega_k(R) \to \Omega_S(R) \to 0.$$

Aplicando $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ e fazendo as identificações usuais, obtemos a seqüência exata de módulos de derivações

$$0 \to \mathrm{Der}_S(R, M) \to \mathrm{Der}_k(R, M) \xrightarrow{\rho_S} \mathrm{Der}_k(S, M),$$

onde ρ_S é o homomorfismo de restrição a S. Portanto ρ_S é injetor se e somente se $\mathrm{Der}_S(R, M) = 0$. $\square$

Pode-se mostrar também que, se o domínio R é uma álgebra finitamente gerada sobre um corpo k de característica zero, então toda $\delta \in \mathrm{Der}_k(R)$ se estende a uma k-derivação $\overline{\delta}\colon \overline{R} \to \overline{R}$ do seu fecho inteiro $\overline{R}$, induzindo assim uma injeção $\mathrm{Der}_k(R) \hookrightarrow \mathrm{Der}_k(\overline{R})$ (*cf.* [16, Theorem 5.11]).

Proposição 2.10 *Sejam $B \subset A$ anéis, com B contendo um corpo de característica zero. Sejam $N \subset M$ A-módulos e $\mathfrak{p} \subset N{:}_A M$ um ideal primo tal que $B/(\mathfrak{p} \cap B) \subset A/\mathfrak{p}$ é uma extensão inteira de domínios noetherianos, e suponhamos que o $A/\mathfrak{p}$-módulo M/N é livre de torção. Então*

$$\mathrm{Der}^B_{\mathfrak{p},N}(A, M) = \mathrm{Der}_B(A, N).$$

Demonstração. Considerando a extensão inteira $S = B/(\mathfrak{p} \cap B) \subset R = A/\mathfrak{p}$, o Corolário 2.7 fornece $\mathrm{Der}_S(R, M/N) = 0$ já que M/N não tem R-torção. Aplicando a Proposição 2.2 à extensão $B \subset A$, obtemos a igualdade proposta. $\square$

Corolário 2.11 *Sejam B um anel contendo um corpo de característica zero e $\mathfrak{p} \subset A = B[X_1, \ldots, X_n]$ (X_i's indeterminadas sobre B) um ideal primo tal que $B/(\mathfrak{p} \cap B) \subset A/\mathfrak{p}$ é uma extensão inteira de domínios noetherianos. Então a estrutura do idealizador B-diferencial de $\mathfrak{p}$ se explicita por*

$$\mathrm{Der}^B_{\mathfrak{p}}(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{p}\frac{\partial}{\partial X_i} \simeq \mathfrak{p}^{\oplus n}.$$

Demonstração. No caso especial $N = \mathfrak{p} \subset M = A = B[X_1, \ldots, X_n]$, a proposição acima fornece $\mathrm{Der}^B_{\mathfrak{p}}(A) = \mathrm{Der}_B(A, \mathfrak{p})$. Mas $\mathrm{Der}_B(A, \mathfrak{p}) \subset \mathrm{Der}_B(A) = \oplus_i A\partial/\partial X_i$, de modo que, se $\delta \in \mathrm{Der}^B_{\mathfrak{p}}(A)$, então tem-se uma expressão $\delta = \sum_i p_i \partial/\partial X_i$, p_i's em A. Como $\mathrm{Im}\,\delta \subset \mathfrak{p}$ tem-se $p_j = \delta(X_j) \in \mathfrak{p}, \forall j$, e portanto $\mathrm{Der}^B_{\mathfrak{p}}(A) \subseteq \oplus_i \mathfrak{p}\partial/\partial X_i$. A inclusão oposta é clara. $\square$

Finalmente, apresentamos uma família de exemplos na forma de corolário.

Corolário 2.12 *Consideremos a extensão de anéis $B \subset A = B[X_1, \ldots, X_n]$ (X_i's indeterminadas sobre B), onde B é um anel noetheriano contendo um corpo de característica zero. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tomemos em A um polinômio da forma*

$$f_i = \sum_{k=0}^{m_i} b_{ik} X_i^k + X_i^{n_i}, \quad m_i < n_i, \quad b_{ik} \in B, \ \forall k.$$

Então, para todo ideal $\mathfrak{b} \subset B$ com a propriedade de que $P = \mathfrak{b}A + (f_1, \ldots, f_n)$ é um ideal primo de A, tem-se

$$\mathrm{Der}_P^B(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} P \frac{\partial}{\partial X_i} \simeq P^{\oplus n}.$$

Demonstração. Com o que já foi obtido, é suficiente mostrar que a extensão de domínios noetherianos $B/(P \cap B) \subset A/P$ é inteira. Mas isto segue imediatamente do próprio aspecto dos f_i's : denotando por x_i a imagem em $A' = A/P$ de X_i, e por b'_{ik} a imagem em $B' = B/(P \cap B)$ de b_{ik}, obtém-se, por redução módulo P, uma relação de dependência inteira $\sum_{k=0}^{m_i} b'_{ik} x_i^k + x_i^{n_i} = 0 \in A'$ com coeficientes em B'. Sendo A' a B'-álgebra gerada pelos x_i's, segue-se o desejado. □

2.1.2 Comparações entre idealizadores diferenciais

Dados ideais $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ de um anel R, podemos questionar como se relacionam os respectivos idealizadores absolutos em termos do posicionamento relativo entre $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$. Em outras palavras, pergunta-se se a operação de tomar idealizadores diferenciais satisfaz propriedades funtoriais. Nesta subseção detectaremos alguns casos em que existe algum padrão, embora não exista um comportamento funtorial completamente geral; por exemplo, em algumas situações a inclusão entre ideais é preservada, mas em outras, é revertida. Um subanel $S \subset R$ estará subentendido por simplicidade (isto é, escreveremos $\mathrm{Der}(R) = \mathrm{Der}_S(R)$ e $\mathrm{Der}_{\mathfrak{c}}(R) = \mathrm{Der}_{\mathfrak{c}}^S(R)$, para qualquer ideal $\mathfrak{c} \subset R$), a menos que seja necessário explicitá-lo.

Antes do primeiro resultado desta subseção, observaremos uma propriedade elementar das derivações.

Lema 2.13 *Dados um inteiro $n \geq 2$ e elementos $x_1, \ldots, x_n \in R$, tem-se, para qualquer derivação D de R, uma expressão*

$$(n-1) \cdot D(x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i D(y_i), \quad y_i = \prod_{j \neq i} x_j$$

Demonstração. Para um produto finito geral $z = z_1 \cdots z_s$, o uso iterado da regra de Leibniz fornece $D(z) = z_2 \cdots z_s D(z_1) + \ldots + z_1 \cdots z_{s-1} D(z_s)$. Assim, é fácil ver que

$$\begin{array}{rcl} x_1 D(y_1) & = & y_2 D(x_2) + y_3 D(x_3) + \ldots + y_n D(x_n) \\ x_2 D(y_2) & = & y_1 D(x_1) + y_3 D(x_3) + \ldots + y_n D(x_n) \\ & & \cdots \\ x_n D(y_n) & = & y_1 D(x_1) + y_2 D(x_2) + \ldots + y_{n-1} D(y_{n-1}). \end{array}$$

Somando, obtemos $\sum_{i=1}^{n} x_i D(y_i) = \sum_{i=1}^{n} (n-1) y_i D(x_i) = (n-1)\{x_2 \cdots x_n D(x_1) + \ldots + x_1 \cdots x_{n-1} D(x_n)\} = (n-1) D(x_1 \cdots x_n)$, como queríamos. □

Proposição 2.14 *Se $\mathfrak{a} \subset R$ é um ideal, então $r \cdot \mathrm{Der}_{\mathfrak{a}^r}(R) \subseteq \mathrm{Der}_{\mathfrak{a}^{r+1}}(R)$, para qualquer inteiro $r \geq 1$. Em particular, $\mathrm{Der}_{\mathfrak{a}}(R) \subseteq \mathrm{Der}_{\mathfrak{a}^2}(R)$. Além disso, se S contém um corpo de característica zero, a cadeia descendente das potências de $\mathfrak{a}$ induz uma cadeia ascendente de submódulos de $\mathrm{Der}(R)$,*

$$\mathrm{Der}_{\mathfrak{a}}(R) \subseteq \mathrm{Der}_{\mathfrak{a}^2}(R) \subseteq \mathrm{Der}_{\mathfrak{a}^3}(R) \subseteq \ldots$$

Demonstração. Seja $D \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{a}^r}(R)$ e consideremos um gerador típico $a = a_1 \cdots a_{r+1}$ de $\mathfrak{a}^{r+1}$. Então, aplicando o lema acima com $n = r+1$, obtemos $(rD)(a) = rD(a) = \sum_{i=1}^{r+1} a_i D(b_i)$, com $b_i = \prod_{j \neq i} a_j \in \mathfrak{a}^r$. Logo $D(b_i) \in \mathfrak{a}^r$ e assim $a_i D(b_i) \in \mathfrak{a}^{r+1}$, donde $(rD)(a) \in \mathfrak{a}^{r+1}$, como queríamos. Se $\mathbb{Q} \subseteq S$, a cadeia ascendente proposta é clara. $\square$

Corolário 2.15 *Se $\mathbb{Q} \subseteq S$ e R é noetheriano e finitamente gerado como S-álgebra, então, dado um ideal $\mathfrak{a} \subset R$, tem-se*

$$\mathrm{Der}_{\mathfrak{a}^t}(R) = \mathrm{Der}_{\mathfrak{a}^{t+i}}(R),$$

para $t \gg 0$ e para todo $i \geq 0$.

Demonstração. Sendo R uma S-álgebra finitamente gerada, o R-módulo $\Omega_S(R)$ é finitamente gerado e portanto seu R-dual $\mathrm{Der}_S(R)$ também tem esta propriedade. Assim, sendo R noetheriano, o R-módulo $\mathrm{Der}_S(R)$ é noetheriano e isto implica na estabilização da cadeia ascendente obtida na proposição acima. $\square$

Proposição 2.16 *Se 2 é invertível em um anel local noetheriano R e $\mathfrak{a} \subset R$ é um ideal gerado por uma R-seqüência, então $\mathrm{Der}_{\mathfrak{a}}(R) = \mathrm{Der}_{\mathfrak{a}^2}(R)$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que $\mathrm{Der}_{\mathfrak{a}^2}(R) \subseteq \mathrm{Der}_{\mathfrak{a}}(R)$. Seja $\{a_1, \ldots, a_m\}$ uma R-seqüência que gera $\mathfrak{a}$. Como R é um anel local noetheriano, qualquer permutação dos a_i's também é R-seqüência (*cf.*[3, Proposition 1.1.6]), isto é, $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_m) \colon (a_i) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_m), \forall i$. Para qualquer $D \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{a}^2}(R)$, temos $2a_1 D(a_1) = D(a_1^2) \in \mathfrak{a}^2$ e assim existem $a'_{11}, \ldots, a'_{1m} \in \mathfrak{a}$ tais que $a_1 D(a_1) = a'_{11} a_1 + \ldots + a'_{1m} a_m$, ou seja, $(a'_{11} - D(a_1)) a_1 + a'_{12} a_2 \ldots + a'_{1m} a_m = 0 \Rightarrow a'_{11} - D(a_1) \in (a_2, \ldots, a_m) \colon (a_1) = (a_2, \ldots, a_m) \Rightarrow D(a_1) \in \mathfrak{a}$. Da mesma forma, mostra-se que $D(a_2), \ldots, D(a_m) \in \mathfrak{a}$ e portanto $D \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{a}}(R)$. $\square$

Questão 2.17 Sob que condições adicionais poderia valer a recíproca da Proposição 2.16?

Proposição 2.18 *Sejam $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \subset R$ ideais tais que o ideal $\mathfrak{a} \colon \mathfrak{b}$ contém algum elemento $R/\mathfrak{b}$-regular. Então $\mathrm{Der}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(R) = \mathrm{Der}_{\mathfrak{b}}(R)$. Em particular, $\mathrm{Der}_{\mathfrak{a}}(R) \subseteq \mathrm{Der}_{\mathfrak{b}}(R)$.*

Demonstração. Sendo $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, a inclusão $\mathrm{Der}_{\mathfrak{b}}(R) \subseteq \mathrm{Der}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(R)$ é óbvia. Tomemos então quaisquer $D \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(R)$ e $b \in \mathfrak{b}$. Queremos mostrar que $D(b) \in \mathfrak{b}$. Por hipótese existe $a \in \mathfrak{a} \colon \mathfrak{b}$ que é regular módulo $\mathfrak{b}$. Sendo $ab \in \mathfrak{a}$, temos $D(ab) \in \mathfrak{b}$ e isto significa que $bD(a) + aD(b) \in \mathfrak{b}$, donde $aD(b) \in \mathfrak{b}$ e portanto necessariamente $D(b) \in \mathfrak{b}$, uma vez que a não divide zero em $R/\mathfrak{b}$. Isto mostra a igualdade proposta. Em particular obtemos que $\mathrm{Der}_{\mathfrak{a}}(R) \subseteq \mathrm{Der}_{\mathfrak{b}}(R)$, já que claramente $\mathrm{Der}_{\mathfrak{a}}(R) \subseteq \mathrm{Der}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(R)$. $\square$

Proposição 2.19 *Consideremos um produto de ideais $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c} \subset R$, onde $\mathfrak{a} \colon \mathfrak{b}$ contém algum elemento $R/\mathfrak{b}$-regular (e.g., $\mathfrak{b}$ ideal primário e $\mathfrak{c} \not\subseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$). Então*

$$\mathrm{Der}_{\mathfrak{a}}(R) \;=\; \mathrm{Der}_{\mathfrak{b}}(R) \;\cap\; \mathrm{Der}_{\mathfrak{c},\ \mathfrak{a}:\mathfrak{b}}(R).$$

Demonstração. Seja $D \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{a}}(R)$. Aplicando a Proposição 2.18 obtemos $\mathrm{Der}_{\mathfrak{a}}(R) \subseteq \mathrm{Der}_{\mathfrak{b}}(R)$. Assim, $D(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}$. Tomemos $c \in \mathfrak{c}$ qualquer e verifiquemos que $\mathfrak{b}D(c) \subseteq \mathfrak{a}$. Para todo $b \in \mathfrak{b}$ tem-se $bc \in \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$, logo $D(bc) \in \mathfrak{a}$ e assim $bD(c) + cD(b) \in \mathfrak{a}$. Mas

$cD(b) \in \mathfrak{a}$ já que $D(b) \in \mathfrak{b}$. Portanto $bD(c) \in \mathfrak{a}$, o que mostra a inclusão $\mathrm{Der}_{\mathfrak{a}}(R) \subseteq \mathrm{Der}_{\mathfrak{b}}(R) \cap \mathrm{Der}_{\mathfrak{c},\ \mathfrak{a}:\mathfrak{b}}(R)$. Inversamente, seja $D \in \mathrm{Der}(R)$ satisfazendo $D(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b}D(\mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{a}$. Dado um elemento $a \in \mathfrak{a}$ arbitrário, podemos escrevê-lo como soma finita de termos da forma $b_i c_i \in \mathfrak{bc}$. Assim, por aditividade, podemos supor que $a = bc$, com $b \in \mathfrak{b}$ e $c \in \mathfrak{c}$, e portanto $D(a) = bD(c) + D(b)c \in \mathfrak{a} + \mathfrak{bc} = \mathfrak{a}$, como queríamos. $\square$

Proposição 2.20 *Seja $\mathfrak{a} \subset R$ um ideal admitindo uma apresentação livre finita*

$$R^t \xrightarrow{\psi} R^r \to \mathfrak{a} \to 0.$$

Então $\mathrm{Der}_{\mathfrak{a}}(R) \subseteq \mathrm{Der}_{I_1(\psi)}(R)$, onde $I_1(\psi)$ denota o ideal gerado pelas entradas de ψ.

Demonstração. Seja $\{a_1, \ldots, a_r\}$ conjunto de geradores de $\mathfrak{a}$ em relação ao qual foi construída a apresentação dada, e escrevamos $\psi = (b_{ij})$, $1 \le i \le r$, $1 \le j \le t$. Tomemos $D \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{a}}(R)$ qualquer e mostremos que $D(b_{ij}) \in I_1(\psi), \forall i, j$. Sendo $D(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$, existem, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, elementos $c_{i1}, \ldots, c_{ir} \in R$ tais que $D(a_i) = \sum_{s=1}^r c_{is} a_s$. Uma vez que as colunas de ψ são sizigias de $\{a_1, \ldots, a_r\}$, temos $\sum_{i=1}^r b_{ij} a_i = 0$, $j = 1, \ldots, t$. Aplicando a derivação D a cada tal relação, obtemos $\sum_{i=1}^r b_{ij} D(a_i) + \sum_{i=1}^r a_i D(b_{ij}) = 0$, ou seja, $\sum_{i=1}^r b_{ij} (\sum_{s=1}^r c_{is} a_s) + \sum_{i=1}^r a_i D(b_{ij}) = 0$, que podemos escrever como

$$(\sum_{l=1}^r b_{lj} c_{l1} + D(b_{1j}))a_1 + \ldots + (\sum_{l=1}^r b_{lj} c_{lr} + D(b_{rj}))a_r = 0, \quad j = 1, \ldots, t.$$

Em outras palavras, para cada $j \in \{1, \ldots, t\}$ o vetor

$$\xi_j = \left(\sum_{l=1}^r b_{lj} c_{l1} + D(b_{1j}) \ , \ \ldots \ , \ \sum_{l=1}^r b_{lj} c_{lr} + D(b_{rj}) \right) \in R^r$$

é uma sizigia de $\{a_1, \ldots, a_r\}$, e assim, utilizando que as colunas da matriz de apresentação ψ geram o módulo das sizigias dos a_i's, existem $p_{1j}, \ldots, p_{tj} \in R$ satisfazendo uma igualdade vetorial $\xi_j = p_{1j}(b_{11}, \ldots, b_{r1}) + \ldots + p_{tj}(b_{1t}, \ldots, b_{rt})$. Comparando coordenadas, obtém-se finalmente $D(b_{ij}) = \sum_{k=1}^t p_{kj} b_{ik} - \sum_{l=1}^r b_{lj} c_{li} \in I_1(\psi)$. $\square$

2.2 Propriedades básicas do idealizador diferencial polinomial

No nível de generalidade anterior – em que foi definido o idealizador $\mathrm{Der}^S_{\mathfrak{a},N}(R, M)$ – não se dispõe, em princípio, de ferramentas ou técnicas diretamente aplicáveis ou suficientemente "palpáveis", pela simples razão de que R e M foram tomados arbitrariamente e portanto não "transferem" propriedades. Por isso, especializaremos a partir de agora ao caso de idealizadores diferenciais relativos a ideais em anéis de polinômios sobre um corpo.

Tomemos ideais $I, J \subset A = k[X_1, \ldots, X_n]$, onde k é um corpo qualquer. Nesta situação, o módulo idealizador (k-)diferencial relativo ao par I, J,

$$\mathrm{Der}_{I,J}(A) = \{\delta \in \mathrm{Der}_k(A) \mid \delta(I) \subseteq J\},$$

proporciona um ambiente de propriedades mais concretas. Em se tratando de um submódulo de $\mathrm{Der}_k(A) = \oplus_i A\partial/\partial X_i$, cada $\delta \in \mathrm{Der}_{I,J}(A)$ possui uma expressão $\delta = \sum_i p_i \partial/\partial X_i$, para certos p_i's em A. No caso fundamental $I = (f_1, \ldots, f_m) \subseteq J$ (já que assim, como enfatizamos no início da Seção 2.1, podemos restringir a propriedade de condução a um conjunto qualquer de geradores de I), dar um elemento do idealizador diferencial significa fornecer uma n-upla $(p_1, \ldots, p_n) \in A^n$ com a propriedade de que existem polinômios $h_{ij} \in A,\ 1 \leq i, j \leq m$, satisfazendo o sistema algébrico

$$p_1 \frac{\partial f_i}{\partial X_1} + \ldots + p_n \frac{\partial f_i}{\partial X_n} = h_{i1} f_1 + \ldots + h_{im} f_m, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Para uma descrição matricial, sejam Θ a matriz jacobiana dos f_i's, $(\mathbf{p})$ o vetor-coluna dos p_i's, $\mathbf{H}$ a matriz $m \times m$ dos h_{ij}'s e $(\mathbf{f})$ o vetor-coluna dos f_i's. Podemos então escrever:

$$\Theta \cdot (\mathbf{p}) = \mathbf{H} \cdot (\mathbf{f})$$

Observações 2.21 (1) Se $I \subseteq J$, é imediato que os idealizadores absolutos $\mathrm{Der}_I(A)$ e $\mathrm{Der}_J(A)$ de I e J estão ambos contidos no relativo $\mathrm{Der}_{I,J}(A)$.

(2) O idealizador diferencial $\mathrm{Der}_{I,J}(A)$ está contido no módulo livre $\mathrm{Der}_k(A)$ e portanto é livre de torção, e uma vez que contém o submódulo $J\mathrm{Der}_k(A) \simeq J^{\oplus n}$ (que tem posto n), obtém-se posto $\mathrm{Der}_{I,J}(A) = n$.

(3) Considerando em $A = \oplus_{j \geq 0} A_j = \oplus_{j \geq 0} k[\mathbf{X}]_j$ a graduação *standard*, podemos graduar o A-módulo livre $\mathrm{Der}_k(A) = \oplus_i A \partial/\partial X_i$ atribuindo, por exemplo, grau -1 a cada gerador livre $\partial/\partial X_i$, ou seja, para cada $d \geq -1$, escreve-se $\mathrm{Der}_k(A)_d = \oplus_i A_{d+1} \partial/\partial X_i$. Desta forma, se I e J são ideais homogêneos, $\mathrm{Der}_{I,J}(A)$ herda uma estrutura de submódulo homogêneo de $\mathrm{Der}_k(A)$,

$$\mathrm{Der}_{I,J}(A) = \bigoplus_{d \geq -1} \mathrm{Der}_{I,J}(A)_d, \quad \mathrm{Der}_{I,J}(A)_d = \mathrm{Der}_{I,J}(A) \cap \bigoplus_{i=1}^{n} A_{d+1} \partial/\partial X_i.$$

Em particular, se $I = (f_1, \ldots, f_m) \subseteq J$ então a *derivação de Euler* $\epsilon = \sum_i X_i \partial/\partial X_i$ satisfaz $\epsilon(f_j) = \mathrm{gr}(f_j) f_j \in J, \forall j$, e assim $\epsilon \in \mathrm{Der}_{I,J}(A)_0$. Além disso, é possível que $\mathrm{Der}_{I,J}(A)_{-1} \neq 0$. Por exemplo, se $I = (XZ - YZ) \subset A = k[X, Y, Z]$, então $\partial/\partial X + \partial/\partial Y \in \mathrm{Der}_I(A)_{-1}$.

(4) Considerando ideais $I = (f_1, \ldots, f_m) \subseteq J \subset A$ e a matriz jacobiana $\Theta = \Theta(\mathbf{f})$, tem-se $\mathrm{Der}_{I,J}(A) = \mathrm{Der}_k(A) \ \Leftrightarrow\ \partial/\partial X_j \in \mathrm{Der}_{I,J}(A), \forall j \ \Leftrightarrow\ \partial f_i/\partial X_j \in J, \forall i, j \ \Leftrightarrow\ I_1(\Theta) \subseteq J$. Em particular, se car $k = 0$ e $I = J$, então $\mathrm{Der}_I(A) \neq \mathrm{Der}_k(A)$. Um exemplo trivial em que há igualdade é obtido tomando-se um polinômio $f \in A$ e seu *ideal jacobiano* J_f, gerado por f e suas derivadas parciais. Neste caso $I_1(\Theta) = J_f$, e assim $\mathrm{Der}_{f, J_f}(A) = \oplus_i A \partial/\partial X_i$.

Exemplo 2.22 Queremos generalizar a classe de exemplos dada na Observação 2.21(4) acima. Seja $I \subset A$ um ideal radical e suponhamos que car $k = 0$. Para cada inteiro $r \geq 0$, sua r-ésima *potência simbólica* $I^{(r)}$ coincide com sua r-ésima *potência infinitesimal* $I^{<r>}$ (*cf.* [5, Theorem 3.14], onde é dada uma demonstração no caso em que I é primo e k é algebricamente fechado, e onde são dadas referências para o caso aqui mencionado), isto é,

$$I^{(r)} = \left\{ f \in A \mid \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{X}^\alpha} \in I, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq r - 1 \right\}.$$

Assim, para qualquer $f \in I^{(r+1)}$ podemos escrever $\partial^{|\alpha|} f/\partial \mathbf{X}^\alpha \in I, \forall \alpha, |\alpha| \leq r$, ou seja, $\partial^{|\beta|}(\partial f/\partial X_j)/\partial \mathbf{X}^\beta \in I, \forall j, \forall \beta, |\beta| \leq r - 1 \Rightarrow \partial f/\partial X_j \in I^{(r)}, \forall j$, donde $\partial(I^{(r+1)})/\partial X_j \subset I^{(r)}, \forall j$. Concluímos que $\mathrm{Der}_{I^{(r+1)}, I^{(r)}}(A) = \mathrm{Der}_k(A)$.

Embora a "posição relativa" $I \subseteq J$ seja de central interesse, uma situação ingênua ocorre no caso $I \nsubseteq J$, a saber, quando existe em I algum elemento A/J-regular. Não há necessidade de apelo a geradores, e o módulo $\mathrm{Der}_{I,J}(A)$ pode ser facilmente explicitado:

Proposição 2.23 *Sejam $I, J \subset A$ ideais tais que $J \colon I = J$. Então*

$$\mathrm{Der}_{I,J}(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} J\frac{\partial}{\partial X_i} \simeq J^{\oplus n}.$$

Demonstração. Seja $\delta \in \mathrm{Der}_{I,J}(A)$. Tomemos $f \in I$ e $g \in A$ quaisquer. Logo $\delta(f)$, $\delta(fg) \in J$, e sendo $\delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f)$ obtemos $f\delta(g) \in J$, ou seja, $\delta(g) \in J \colon I = J$. Como g foi tomado arbitrariamente tem-se em particular $\delta(X_j) \in J, \forall j$, e assim, escrevendo $\delta = \sum_i h_i \partial/\partial X_i$, decorre $h_j = \delta(X_j) \in J$. Isto mostra que $\mathrm{Der}_{I,J}(A) \subseteq J\mathrm{Der}_k(A)$. A inclusão oposta é óbvia e portanto $\mathrm{Der}_{I,J}(A) = J(\oplus_i A\partial/\partial X_i) = \oplus_i J\partial/\partial X_i$. □

Corolário 2.24 *Seja $f \in A = k[X_1, \ldots, X_n]$ um polinômio não-nulo com fatoração $f = f_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{a_r}$, a_i's inteiros positivos e f_i's irredutíveis distintos. Seja $I \subset A$ ideal tal que $I \nsubseteq (f_i), \forall i$ (e.g., alt $I \geq 2$). Então o idealizador diferencial relativo ao par $I, (f)$ é o A-módulo livre*

$$\mathrm{Der}_{I,f}(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} (f)\partial/\partial X_i.$$

Demonstração. Segue da proposição acima e de que $\mathrm{Ass}_A(A/(f)) = \{(f_1), \ldots, (f_r)\}$. □

2.2.1 Relação estrutural com o módulo de derivações

Investigaremos a relação estrutural entre o módulo idealizador relativo a um par de ideais e o módulo de derivações correspondente, e veremos que a operação de tomar idealizadores diferenciais comuta com formação de frações. Para qualquer A-módulo M, denotaremos por M_S a localização de M com respeito a um conjunto multiplicativo $S \subset A$.

Proposição 2.25 *Denotemos por B o anel de polinômios A ou o anel de frações A_S com respeito a um conjunto multiplicativo $S \subset A$. Para quaisquer ideais $I \subseteq J \subset B$, tem-se um isomorfismo de B/J-módulos*

$$\mathrm{Der}_k\left(\frac{B}{I}, \frac{B}{J}\right) \simeq \frac{\mathrm{Der}_{I,J}(B)}{J\mathrm{Der}_k(B)} \subset \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\frac{B}{J}\right) \frac{\partial}{\partial X_i}$$

e um isomorfismo de A_S-módulos $\mathrm{Der}_{I,J}(A)_S \simeq \mathrm{Der}_{I_S,J_S}(A_S)$.

Demonstração. Tomemos inicialmente $B = A$. O homomorfismo Υ definido em geral na demonstração da Proposição 2.2 fornece, nesta situação particular, um homomorfismo de A-módulos $\Upsilon_{I,J}$ que a cada $\delta = \sum_i p_i \partial/\partial X_i \in \mathrm{Der}_{I,J}(A)$ associa $\overline{\delta} = \sum_i \overline{p}_i \partial/\partial X_i \in \mathrm{Der}_k(A/I, A/J)$, onde $\overline{p}_i$ denota a imagem de p_i em A/J. Além disso, tem-se $\mathrm{Ker}\ \Upsilon_{I,J} = \mathrm{Der}_k(A, J)$. Se $D = \sum_i p_i \partial/\partial X_i \in \mathrm{Der}_k(A, J)$ então $p_j = D(X_j) \in J, \forall j \Rightarrow \mathrm{Der}_k(A, J) \subseteq J\mathrm{Der}_k(A)$, e a inclusão oposta é imediata. Assim, $\mathrm{Ker}\ \Upsilon_{I,J} = J\mathrm{Der}_k(A)$. Queremos então mostrar que $\Upsilon_{I,J}$ é sobrejetor. Conforme observamos na primeira subseção, identifica-se

$\mathrm{Der}_k(A/I, A/J) \simeq \mathrm{Ker}\ \theta \subset (A/J)^n$, onde $\theta\colon (A/J)^n \to (A/J)^m$ é o homomorfismo induzido pela matriz jacobiana de um conjunto de geradores $\{f_1, \ldots, f_m\}$ de I. Desta forma, para qualquer $\Delta = \sum_i \overline{g}_i \partial/\partial X_i \in \mathrm{Der}_k(A/I, A/J)$, tem-se $\sum_i \overline{g}_i \overline{\partial f_j/\partial X_i} = \overline{0} \in A/J, \forall j$, isto é, $\sum_i g_i \partial f_j/\partial X_i \in J, \forall j \Rightarrow \Delta' = \sum_i g_i \partial/\partial X_i \in \mathrm{Der}_{I,J}(A) \Rightarrow \Upsilon_{I,J}(\Delta') = \Delta \Rightarrow \Upsilon_{I,J}$ é sobrejetor. Disto decorre o isomorfismo proposto quando $B = A$, e uma seqüência exata curta de A-módulos

$$0 \to J\mathrm{Der}_k(A) \to \mathrm{Der}_{I,J}(A) \xrightarrow{\Upsilon_{I,J}} \mathrm{Der}_k(A/I, A/J) \to 0.$$

De modo geral, se R é um anel e $T \subset R$ é um conjunto multiplicativo qualquer, cada $D \in \mathrm{Der}(R)$ induz uma derivação $D_T \in \mathrm{Der}(R_T)$ (*cf.*[9, Exercise 25.3]). Explicitamente, se $a \in R$ e $t \in T$, então $D_T(a/t) = 1/t^2(tD(a) - aD(t))$. Em particular, se $S \subset A$ é um conjunto multiplicativo, tem-se $\mathrm{Der}_k(A_S) = \oplus_i A_S(\partial/\partial X_i)_S$. Assim, se $\delta/1 \in \mathrm{Der}_{I,J}(A)_S \subset \mathrm{Der}_k(A)_S$, com $\delta = \sum_i p_i \partial/\partial X_i \in \mathrm{Der}_{I,J}(A)$ arbitrária, considera-se de maneira natural a derivação $\delta' = \sum_i (p_i/1)(\partial/\partial X_i)_S \in \mathrm{Der}_k(A_S)$. Se $f/h \in I_S$, com $f \in I$ e $h \in S$, podemos escrever $(\delta')(f/h) = \sum_i (p_i/1)(\partial/\partial X_i)_S(f/h) = (1/h^2)\sum_i p_i(h\partial f/\partial X_i - f\partial h/\partial X_i) = (1/h)\delta(f) - (\delta(h)/h^2)f \in J_S + I_S = J_S$, mostrando portanto que $\delta' \in \mathrm{Der}_{I_S,J_S}(A_S)$. Tem-se então uma aplicação

$$\beta : \mathrm{Der}_{I,J}(A)_S \to \mathrm{Der}_{I_S,J_S}(A_S), \quad \delta/g \mapsto (1/g)\delta', \quad \delta \in \mathrm{Der}_{I,J}(A), \quad g \in S,$$

que claramente está bem definida, é A_S-linear e torna comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & J\mathrm{Der}_k(A)_S & \to & \mathrm{Der}_{I,J}(A)_S & \xrightarrow{(\Upsilon_{I,J})_S} & \mathrm{Der}_k(A/I, A/J)_S & \to & 0 \\
 & & \alpha \downarrow \wr & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \wr & & \\
0 & \to & J_S\mathrm{Der}_k(A_S) & \to & \mathrm{Der}_{I_S,J_S}(A_S) & \xrightarrow{\Upsilon_{I_S,J_S}} & \mathrm{Der}_k(A_S/I_S, A_S/J_S) & &
\end{array}$$

onde α e γ são os isomorfismos naturais. Note-se que, analogamente ao fato $\mathrm{Ker}\ \Upsilon_{I,J} = J\mathrm{Der}_k(A)$, tem-se $\mathrm{Ker}\ \Upsilon_{I_S,J_S} = J_S\mathrm{Der}_k(A_S)$. Finalmente, aplicando o *lema da serpente* concluímos que β é um isomorfismo; sendo $(\Upsilon_{I,J})_S$ sobrejetor e $\gamma \circ (\Upsilon_{I,J})_S = \Upsilon_{I_S,J_S} \circ \beta$, segue-se que Υ_{I_S,J_S} é sobrejetor. □

Com isto poderemos identificar $\mathrm{Der}_k(B/I, B/J) = \mathrm{Der}_{I,J}(B)/J^{\oplus n} \subset (B/J)^n$, sempre que for conveniente. Uma conseqüência ingênua é o seguinte

Corolário 2.26 *Seja $\mathfrak{m} \subset A$ um ideal maximal tal que $A/\mathfrak{m}$ é uma extensão separável de k (e.g., k perfeito). Então*

$$\mathrm{Der}_{\mathfrak{m}}(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{m}\frac{\partial}{\partial X_i} \simeq \mathfrak{m}^{\oplus n}.$$

Demonstração. A versão algébrica (de Zariski) para o teorema dos zeros de Hilbert assegura que a extensão de corpos $L = A/\mathfrak{m} \supseteq k$ é finita, e sendo por hipótese separável, satisfaz $\Omega_k(L) = 0$ (*cf., e.g.*, [5, Exercise 16.9]) e portanto $\mathrm{Der}_k(L) = \mathrm{Hom}_L(\Omega_k(L), L) = 0$. Por outro lado tem-se $\mathrm{Der}_k(L) = \mathrm{Der}_{\mathfrak{m}}(A)/\mathfrak{m}^{\oplus n}$, donde segue o desejado. □

2.2.2 A seqüência exata jacobiana

Sejam k corpo e $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ anel de polinômios.

Proposição 2.27 *Consideremos ideais* $I = (f_1, \ldots, f_m) \subseteq J \subset A$ *e a matriz jacobiana* $\Theta = \Theta(\mathbf{f})$ *(deliberadamente confundida com o correspondente homomorfismo* $A^n \to A^m$*). Então tem-se uma seqüência exata curta de* A*-módulos*

$$0 \to \mathrm{Ker}\Theta \to \mathrm{Der}_{I,J}(A) \to \mathrm{Im}\Theta \cap JA^m \to 0.$$

Demonstração. Por restrição a $\mathrm{Der}_{I,J}(A)$, o homomorfismo $\Theta\colon A^n \to A^m$ induz de maneira natural uma aplicação A-linear $\tau\colon \mathrm{Der}_{I,J}(A) \to \mathrm{Im}\Theta \cap JA^m$. A inclusão $\mathrm{Im}\tau \subseteq \mathrm{Im}\Theta$ é clara, e para cada $\delta \in \mathrm{Der}_{I,J}(A)$ podemos escrever $\tau(\delta) = (\delta(f_1), \ldots, \delta(f_m)) \in JA^m$, ou seja, tem-se de fato $\mathrm{Im}\tau \subseteq \mathrm{Im}\Theta \cap JA^m$. Afirmamos que ocorre igualdade. Tomemos então qualquer

$$\nu = \left(\sum_i q_i \partial f_1/\partial X_i, \ldots, \sum_i q_i \partial f_m/\partial X_i \right) \in \mathrm{Im}\Theta \cap JA^m,$$

que podemos exprimir como $\nu = (D(f_1), \ldots, D(f_m))$, onde $D = \sum_i q_i \partial/\partial X_i \in \mathrm{Der}_k(A)$. Sendo $D(f_j) \in J, \forall j$, vem $D \in \mathrm{Der}_{I,J}(A)$ e assim $\nu = \tau(D)$, isto é, τ é sobrejetor, como queremos. Resta-nos verificar que o A-módulo $\mathrm{Ker}\tau$ se identifica a $\mathrm{Ker}\Theta$. Isto segue diretamente da construção, pois, denotando $\rho = \sum_i h_i \partial/\partial X_i$, tem-se: $\rho \in \mathrm{Ker}\tau \Rightarrow \tau(\rho) = \mathbf{0} \in A^m \Rightarrow \Theta \cdot (\mathbf{h}) = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{h}) \in \mathrm{Ker}\Theta$, e reciprocamente, $(\mathbf{h}) \in \mathrm{Ker}\Theta \Rightarrow \sum_i h_i \partial f_j/\partial X_i = 0, \forall j \Rightarrow \rho(f_j) = 0, \forall j$ (em particular, $\rho \in \mathrm{Der}_{I,J}(A)$) $\Rightarrow \tau(\rho) = (\rho(f_1), \ldots, \rho(f_m)) = \mathbf{0} \Rightarrow \rho \in \mathrm{Ker}\tau$. □

Corolário 2.28 *Se* $I_n(\Theta) \neq 0$ *(ou seja, algum subdeterminante de ordem* n *é não-nulo, donde necessariamente* $n \leq m$*), então tem-se um isomorfismo de* A/J*-módulos*

$$\mathrm{Der}_k(A/I, A/J) \;\simeq\; \frac{\mathrm{Im}\Theta \;\cap\; J^{\oplus m}}{J\mathrm{Im}\Theta}.$$

Em particular, isto se aplica ao caso $n = m$ *e* $\det \Theta \neq 0$.

Demonstração. É claro que $I_n(\Theta) \neq 0$ se e só se posto $\Theta = n$, o que equivale à injetividade de Θ. Assim, o homomorfismo sobrejetor $\tau = \Theta|_{\mathrm{Der}_{I,J}(A)}$ utilizado na demonstração da proposição acima é um isomorfismo. Por A-linearidade tem-se $\Theta(JA^n) = J\Theta(A^n)$, ou seja, $\tau(J^{\oplus n}) = J\mathrm{Im}\Theta$, donde se conclui que

$$\mathrm{Der}_k(A/I, A/J) = \mathrm{Der}_{I,J}(A)/J^{\oplus n} \simeq \tau(\mathrm{Der}_{I,J}(A))/\tau(J^{\oplus n}) = (\mathrm{Im}\Theta \cap J^{\oplus m})/J\mathrm{Im}\Theta.$$

□

2.3 O idealizador diferencial parcial (IDP)

2.3.1 Geradores de um IDP

Fixemos um corpo k e um conjunto minimal de geradores $\{f_1, \ldots, f_m\}$ de um ideal $I \subset A = k[X_1, \ldots, X_n]$. Para cada $t \in \{1, \ldots, m\}$, podemos considerar o A-módulo

$$\mathrm{Der}_{f_t,I}(A) = \left\{ \delta \in \bigoplus_{i=1}^{n} A\partial/\partial X_i \mid \delta(f_t) \in I \right\},$$

denominado *idealizador diferencial parcial* (IDP) *de* I *com relação a* f_t. Trata-se portanto de um tipo especial de idealizador relativo.

O estudo dos idealizadores parciais de I, visando uma descrição do seu idealizador absoluto, justifica-se através da igualdade

$$\mathrm{Der}_I(A) = \bigcap_{t=1}^{n} \mathrm{Der}_{f_t,I}(A),$$

que decorre facilmente da regra de Leibniz.

Seja $I_t = I_{f_t} = (\partial f_t/\partial X_1, \ldots, \partial f_t/\partial X_n)$ o *ideal gradiente* de f_t. Explicitaremos um conjunto (possivelmente não minimal) de geradores para o IDP correspondente, através de uma apresentação livre do ideal $\mathcal{I}_t = I_t + I$, cujos geradores $\partial f_t/\partial X_1, \ldots, \partial f_t/\partial X_n, f_1, \ldots, f_m$ serão tomados nesta ordem e com seus devidos coeficientes.

Proposição 2.29 *Consideremos a apresentação livre*

$$A^{r_t} \xrightarrow{\Phi_t} A^{n+m} \to \mathcal{I}_t \to 0, \quad \Phi_t = (Q_{ij}^{(t)}),\ 1 \le i \le n+m,\ 1 \le j \le r_t.$$

Então o IDP de I *com relação a* f_t *é dado, em termos de geradores, por*

$$\mathrm{Der}_{f_t,I}(A) = \sum_{j=1}^{r_t} A\delta_j^{(t)}, \qquad \delta_j^{(t)} = \sum_{i=1}^{n} Q_{ij}^{(t)} \partial/\partial X_i,\ j = 1, \ldots, r_t.$$

Demonstração. Omitindo o índice t por simplicidade, tomemos $\delta = \sum_{i=1}^n p_i \partial/\partial X_i \in \mathrm{Der}_{f,I}(A)$. Logo, existem $h_1, \ldots, h_m \in A$ tais que

$$\delta(f) = \sum_{i=1}^{n} p_i \partial f/\partial X_i = \sum_{k=1}^{m} h_k f_k \in I,$$

ou seja, $\sum_{i=1}^n p_i \partial f/\partial X_i - \sum_{k=1}^m h_k f_k = 0$, e isto significa que

$$\nu := (p_1, \ldots, p_n, -h_1, \ldots, -h_m) \in \mathrm{Syz}_1(\mathcal{I}) = \sum_{j=1}^{r} A\nu_j \subset A^{n+m},$$

onde $\nu_j = (Q_{1j}, \ldots, Q_{nj}, Q_{n+1,j}, \ldots, Q_{n+m,j})$ é o j-ésimo vetor-coluna de Φ. Podemos então escrever $\nu = \sum_j g_j \nu_j$, para certos $g_1, \ldots, g_r \in A$. Comparando as n primeiras coordenadas nesta igualdade, obtemos

$$(p_1, \ldots, p_n) = g_1(Q_{11}, \ldots, Q_{n1}) + \ldots + g_r(Q_{1r}, \ldots, Q_{nr}),$$

ou de maneira equivalente, $\delta = \sum_j g_j \delta_j$, mostrando portanto a inclusão $\mathrm{Der}_{f,I}(A) \subseteq \sum_{j=1}^r A\delta_j$. A fim de obtermos igualdade, resta-nos verificar que $\delta_j(f) \in I$, para cada j. De fato, usando que as colunas de Φ são sizigias de $\mathcal{I}$, temos

$$\delta_j(f) = \sum_{i=1}^{n} Q_{ij}\ \partial f/\partial X_i = -\sum_{s=1}^{m} Q_{n+s,j}\ f_s \in I.$$

$\square$

Corolário 2.30 *Tem-se uma igualdade de A/I-módulos*

$$\mathrm{Der}_k(A/f_t, A/I) = \sum_{j=1}^{r_t} (A/I)\overline{\delta_j^{(t)}},$$

onde a barra denota classe residual módulo I.

Demonstração. Segue imediatamente da proposição acima e de que $\mathrm{Der}_k(A/f_t, A/I)$ se identifica ao A/I- módulo $\mathrm{Der}_{f_t,I}(A)/I^{\oplus n}$ (*cf.* Proposição 2.25). □

Observação 2.31 Considerando os idealizadores diferenciais como submódulos de A^n (isto é, identificando $\partial/\partial X_i$ com o i-ésimo vetor canônico de A^n), a Proposição 2.29 nos permite escrever

$$\mathrm{Der}_{f_t,I}(A) = \mathrm{Im}\ \phi_t = \mathrm{Im} \begin{pmatrix} Q_{11}^{(t)} & \dots & Q_{1r_t}^{(t)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1}^{(t)} & \dots & Q_{nr_t}^{(t)} \end{pmatrix},$$

de modo que o IDP em questão é gerado pelos vetores-coluna $v_j^{(t)} = (Q_{1j}^{(t)}, \dots, Q_{nj}^{(t)}), j = 1, \dots, r_t$, da matriz ϕ_t obtida deletando-se as m últimas linhas de Φ_t. Portanto ϕ_t tem tamanho $n \times r_t$ e suas colunas são as coordenadas, na base $\{\partial/\partial X_1, \dots, \partial/\partial X_n\}$, das derivações $\delta_1^{(t)}, \dots, \delta_{r_t}^{(t)}$, que podem então ser identificadas aos vetores $v_j^{(t)}$'s. Observe que, se existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\partial f_t/\partial X_i = 0$, então o polinômio nulo deve constar como i-ésimo "gerador" do ideal $\mathcal{I}_t$; neste caso, as coordenadas do vetor canônico $\mathrm{e}_i \in A^n$ figuram como uma coluna de ϕ_t. Da mesma maneira, identifica-se

$$\mathrm{Der}_k(A/f_t, A/I) = \mathrm{Im}\ \overline{\phi_t}\ \subset\ (A/I)^n.$$

Podemos definir os inteiros positivos

$$\nu_t = \#\{j \mid v_j^{(t)} \notin \sum_{l \neq j} A v_l^{(t)}\}, \quad \overline{\nu}_t = \#\{j \mid v_j^{(t)} \notin \sum_{l \neq j} A v_l^{(t)} + I^{\oplus n}\}$$

e observar que, se I é homogêneo, então por construção tem-se $\mu(\mathrm{Der}_{f_t,I}(A)) = \nu_t$ e $\mu(\mathrm{Der}_k(A/f_t, A/I)) = \overline{\nu}_t$. Note-se que não há ambigüidade quanto ao número $\overline{\nu}_t$, já que, de modo geral, se $I \subseteq J \subset A$ são ideais homogêneos, o número mínimo de geradores de $\mathrm{Der}_k(A/I, A/J)$ é o mesmo, seja visto como módulo sobre A, A/I ou A/J.

Forneceremos um exemplo (com $m = 2$), a fim de ilustrar o método.

Exemplo 2.32 Consideremos o ideal

$$I = (f_1, f_2) \subset A = \mathbb{Q}[X, Y, Z],\ f_1 = X^2Y - Z^3,\ f_2 = Y^4 - X^2Z^2.$$

Vamos exibir geradores para os idealizadores parciais $\mathrm{Der}_{f_1,I}(A)$ e $\mathrm{Der}_{f_2,I}(A)$,vistos como submódulos de A^3. Primeiramente, o ideal $\mathcal{I}_1 = I_1 + I = (2XY, X^2, -3Z^2, f_1, f_2)$ se apresenta pela matriz

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 3Z^2 & -Y^3 & 0 \\ -2Y & 3Y & 3Z^2 & 0 & 2XZ^2 & 3Z^4 \\ 0 & Z & X^2 & 2XY & 0 & Y^4 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2X & 3Z^2 \end{pmatrix},$$

que, por deleção das 2 últimas linhas, produz

$$\mathrm{Der}_{f_1,I}(A) = \mathrm{Im}\ \phi_1 = \mathrm{Im} \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 3Z^2 & -Y^3 & 0 \\ -2Y & 3Y & 3Z^2 & 0 & 2XZ^2 & 3Z^4 \\ 0 & Z & X^2 & 2XY & 0 & Y^4 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, partindo da apresentação livre do ideal $\mathcal{I}_2 = (-2XZ^2, 4Y^3, -2X^2Z, f_1, f_2)$, obtemos a matriz

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} X & 0 & -Z^2 & 2Y^2Z & 0 & 0 & 2Y^3 \\ 0 & Y & 0 & X^3 & Z^3 & X^2Z & XZ^2 \\ -Z & 2Z & XY & 0 & 2X^2Z & 2Y^3 & 0 \end{pmatrix},$$

cujos vetores-coluna geram o IDP de I com relação a f_2.

2.3.2 O caso especial dos módulos de Saito e divisores livres

Concentremo-nos agora no caso particular de um ideal principal $I = (f) \subset A$. Naturalmente, fundem-se as noções de idealizador parcial e absoluto, resultando no A-módulo

$$\mathrm{Der}_f(A) = \{\delta \in \mathrm{Der}_k(A) \mid \delta(f) \in (f)\},$$

denominado *módulo de Saito de* f, em referência a K. Saito e seus resultados (originalmente obtidos no contexto analítico) sobre campos vetoriais logarítmicos (*cf.* [10]).

Uma aplicação imediata da Proposição 2.29 é a explicitação de geradores para o módulo de Saito de $f \in A$, e conseqüentemente para o módulo de k-derivações da hipersuperfície associada. Os geradores $\partial f/\partial X_1, \ldots, \partial f/\partial X_n, f$ do ideal jacobiano $J_f = (I_f, f)$ serão tomados nesta ordem e com coeficientes.

Corolário 2.33 *Consideremos a apresentação livre*

$$A^{r_f} \xrightarrow{\Phi_f} A^{n+1} \to J_f \to 0, \quad \Phi_f = (Q_{ij}),\ 1 \le i \le n+1,\ 1 \le j \le r_f.$$

(i) *Podemos escrever*

$$\mathrm{Der}_f(A) = \sum_{j=1}^{r_f} A\delta_j, \qquad \delta_j = \sum_{i=1}^{n} Q_{ij}\partial/\partial X_i,\ j = 1, \ldots, r_f.$$

Alternativamente, identificamos $\mathrm{Der}_f(A) = \mathrm{Im}\ \phi_f \subset A^n$*, onde* ϕ_f *é a matriz* $n \times r_f$ *obtida por deleção da última linha de* Φ_f*;*

(ii) *Tem-se*

$$\mathrm{Der}_k(A/(f)) = \sum_{j=1}^{r_f} (A/(f))\overline{\delta}_j,$$

ou ainda, $\mathrm{Der}_k(A/(f)) = \mathrm{Im}\ \overline{\phi}_f \subset (A/(f))^n$*, onde a barra denota classe residual módulo* (f)*.*

Este corolário é válido para $f \in A$ arbitrário, mas na medida em que exibe geradores construídos a partir das sizigias de um ideal auxiliar, não traz indícios de como pode ser obtida, por exemplo, uma resolução livre para $\mathrm{Der}_f(A)$, bem como alguns de seus invariantes numéricos. Contudo, se f é um polinômio *euleriano*, no sentido de que $f \in I_f$ (*e.g.*, f homogêneo de grau não divisível por car k), o módulo de Saito torna-se especial em relação aos IDP's mais gerais descritos na Subseção 2.3.1; explicitaremos sua estrutura como sendo soma direta de um módulo conhecido com um módulo livre de posto 1.

Proposição 2.34 *Seja $f = \sum_i h_i \partial f/\partial X_i \in I_f \subset A$ um polinômio euleriano. Consideremos a derivação $\varepsilon_f = \sum_i h_i \partial/\partial X_i$, e denotemos por $\mathcal{Z}(f)$ o primeiro módulo de sizigias das derivadas parciais $\partial f/\partial X_1, \ldots, \partial f/\partial X_n$. Tem-se então uma decomposição de A-módulos*

$$\mathrm{Der}_f(A) \;=\; \mathcal{Z}(f) \;\oplus\; A\varepsilon_f.$$

Em particular, $\mathrm{Der}_f(A)$ é um módulo reflexivo.

Demonstração. Por hipótese, $I_f \cap (f) = (f)$. Assim, denotando $Z = \mathcal{Z}(f) \subset A^n$, a seqüência exata da Proposição 2.27, aplicada ao caso particular $J = I = (f)$, escreve-se

$$0 \to Z \to \mathrm{Der}_f(A) \xrightarrow{\tau} (f) \to 0,$$

com $\tau(\delta) = \delta(f), \forall \delta \in \mathrm{Der}_f(A)$, que admite a cisão $\tau' \colon (f) \to \mathrm{Der}_f(A)$ dada naturalmente por $hf \mapsto h\varepsilon_f, \forall h \in A$. Logo $\mathrm{Der}_f(A) = Z \oplus \mathrm{Im}\ \tau' = Z \oplus A\varepsilon_f$. A afirmação particular é clara pois Z é um módulo de sizigias de ordem 2 (do A-módulo A/I_f) sobre um domínio. $\square$

Observação 2.35 Consideremos a apresentação

$$A^q \xrightarrow{\varphi_f} A^n \to \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial X_n}\right) \to 0$$

do ideal gradiente do polinômio euleriano $f = \sum_i h_i \partial f/\partial X_i$. A proposição acima afirma que $\mathrm{Der}_f(A)$ é soma direta de $\mathcal{Z}(f) = \mathrm{Im}\ \varphi_f$ com o módulo cíclico $A\varepsilon_f$, portanto a matriz ϕ_f do Corolário 2.33(i) pode ser obtida de φ_f por acréscimo de uma coluna com as coordenadas $h_1, \ldots, h_n$ de $\varepsilon_f = \delta_{q+1}$, e em particular $r_f = q+1$. Além disso, consideramos que os vetores-coluna $v_1, \ldots, v_q$ de φ_f (que então se indentificam às derivações $\delta_1, \ldots, \delta_q$) são geradores minimais de $\mathrm{Im}\ \varphi_f$ (logo $v_j \notin \sum_{l \neq j} Av_l$, $j = 1, \ldots, q$). Assim, se f é homogêneo, os módulos em questão são graduados e por construção tem-se $\mu(\mathcal{Z}(f)) = \mu(\mathrm{Im}\ \varphi_f) = q$, donde $\mu(\mathrm{Der}_f(A)) = q + 1$.

Exemplo 2.36 Consideremos a cúbica $f = X^2Y - Z^3 \in A = \mathbb{Q}[X, Y, Z]$, cujo ideal gradiente $I_f = (2XY, X^2, -3Z^2)$ se apresenta pela matriz 3×3

$$\varphi_f = \begin{pmatrix} X & 0 & 3Z^2 \\ -2Y & 3Z^2 & 0 \\ 0 & X^2 & 2XY \end{pmatrix}.$$

Podemos então escrever geradores minimais

$$\mathrm{Der}_f(A) = A\delta_1 + A\delta_2 + A\delta_3 + A\epsilon,$$

onde $\delta_1 = X\partial/\partial X - 2Y\partial/\partial Y$, $\delta_2 = 3Z^2\partial/\partial Y + X^2\partial/\partial Z$, $\delta_3 = 3Z^2\partial/\partial X + 2XY\partial/\partial Z$.

Uma conseqüência fácil do resultado estrutural da Proposição 2.34 é o cálculo da profundidade do módulo de Saito de um polinômio $f \neq 0$, e em particular a determinação de uma condição necessária e suficiente à sua liberdade. Quando o módulo de Saito de f é livre, f é dito *divisor livre*. Para aprofundamentos sobre divisores livres e suas relações com outros temas, recomendamos, por exemplo, [10] e [13] (onde também são indicadas outras referências).

Por simplicidade, a fim de que $\mathrm{Der}_f(A)$ seja um módulo graduado, assumiremos que f é homogêneo (no caso afim podemos passar às localizações em primos). Suporemos também que I_f é um ideal próprio não-principal (evitando casos degenerados triviais, a exemplo de $\mathrm{gr}(f) = 1$ ou $f = X_i^d \in A$, $d \in \mathbb{N}$), pois do contrário $I_f \simeq A \Rightarrow \mathcal{Z}(f)$ livre $\Rightarrow f$ divisor livre $\Rightarrow$ prof $\mathrm{Der}_f(A) = n$. Finalmente, é claro que podemos desconsiderar a patologia $I_f = (0)$, possível apenas em característica positiva.

Corolário 2.37 *Seja $f \in A_+$ um polinômo homogêneo com ideal gradiente próprio, não-nulo e não-principal. Então*

$$\text{prof } \mathrm{Der}_f(A) = \text{prof } A/I_f + 2.$$

Em particular, f é divisor livre se e somente se dh $I_f = 1$.

Demonstração. Do isomorfismo $\mathrm{Der}_f(A) \simeq Z \oplus A$, onde $Z = \mathcal{Z}(f)$, resulta prof $\mathrm{Der}_f(A) =$ prof Z. As hipóteses sobre I_f implicam em prof $I_f < n =$ prof A^n. Logo, através da seqüência exata curta

$$0 \to Z \to A^n \to I_f \to 0,$$

obtemos prof $Z =$ prof $I_f + 1$. Por fim, a seqüência exata

$$0 \to I_f \to A \to A/I_f \to 0$$

fornece prof $I_f =$ prof $A/I_f + 1$, donde prof $Z =$ prof $A/I_f + 2$. Em particular, f é divisor livre $\Leftrightarrow$ prof $\mathrm{Der}_f(A) = n \Leftrightarrow$ prof $A/I_f = n - 2$, e isto, por aplicação direta da fórmula de Auslander-Buchsbaum, equivale a dh $I_f = 1$. □

Exemplo 2.38 Se $F = X^3Y^2 - X^2Y^2Z + X^2Y^2W - Z^3W^2 \in A = \mathbb{Q}[X, Y, Z, W]$, tem-se prof $A/I_F = 0$ e assim prof $\mathrm{Der}_F(A) = 2$. Pode-se também constatar que o polinômio $f = F + Z^3W^2$ satisfaz prof $A/I_f = 2$, isto é, dh $I_f = 1$ e portanto f é um divisor livre (não-reduzido). Note que, sendo codim $I_f = 1$, o anel jacobiano A/I_f *não* é Cohen-Macaulay.

Podemos de fato construir uma resolução livre para o módulo de Saito (de um polinômio não necessariamente homogêneo):

Proposição 2.39 *Seja $f \in A$ euleriano e tomemos a resolução livre*

$$0 \to F_l \to F_{l-1} \to \ldots \to A^p \xrightarrow{\psi_f} A^q \xrightarrow{\varphi_f} A^n \to I_f \to 0.$$

Então

$$0 \to F_l \to F_{l-1} \to \ldots \to A^p \xrightarrow{\tilde{\psi}_f} A^{q+1} \to \mathrm{Der}_f(A) \to 0$$

é resolução livre do módulo de Saito de f, onde a matriz $\tilde{\psi}_f$ é obtida de ψ_f por acréscimo de uma $(q+1)$-ésima linha nula.

Demonstração. Para simplificar a notação, escrevamos $\varphi_f = \varphi$ e $\psi_f = \psi$. Consideremos o módulo $Z = \mathcal{Z}(f) = \mathrm{Im}\ \varphi \subset A^n$, que se apresenta por

$$A^p \xrightarrow{\psi} A^q \xrightarrow{\varphi} Z \to 0$$

e naturalmente induz a apresentação livre

$$A^p \xrightarrow{\tilde{\psi}} A^q \oplus A \xrightarrow{\varphi \oplus \mathrm{id}} Z \oplus A \to 0$$

de $Z \oplus A \simeq \mathrm{Der}_f(A)$, onde $\tilde{\psi}(u) = (\psi(u), 0), \forall u \in A^p$; matricialmente, $\tilde{\psi}$ é obtida acrescentando-se a ψ uma $(q+1)$-ésima linha nula. Além disso é claro que $\mathrm{Ker}\ \tilde{\psi} = \mathrm{Ker}\ \psi$. Assim, denotando por $\mathfrak{R}$ a resolução

$$0 \to F_l \to F_{l-1} \to \ldots \to A^p$$

de $\mathrm{Ker}\ \varphi \subset A^q$, obtemos que

$$\mathfrak{R} \xrightarrow{\tilde{\psi}} A^{q+1} \to \mathrm{Der}_f(A) \to 0$$

é resolução livre do módulo de Saito, como queríamos. □

2.3.3 Álgebras de *blowup* do módulo de Saito

Exibiremos as álgebras simétrica e de Rees do módulo $\mathrm{Der}_f(A)$, para um dado polinômio euleriano $f \in A = k[X_1, \ldots, X_n]$. Para o item (ii) abaixo lembramos que um módulo M finitamente gerado sobre um anel noetheriano $\mathbb{N}$-graduado R com ideal maximal $R_+ = \oplus_{i \geq 1} R_i$ é dito *localmente livre no espectro perfurado* se o $R_{\mathfrak{p}}$-módulo $M_{\mathfrak{p}}$ é livre para todo ideal primo $\mathfrak{p} \neq R_+$.

Proposição 2.40 *Seja $f \in A$ euleriano.*

(i) *O i-ésimo ideal de Fitting do módulo de Saito de f é $\mathfrak{F}_i(\mathrm{Der}_f(A)) = I_{q+1-i}(\psi_f)$. Além disso, $f \in \sqrt{I_{q+1-n}(\psi_f)}$;*

(ii) *Se $\mathfrak{p} \subset A$ é um ideal primo, então $\mathrm{Der}_f(A)_{\mathfrak{p}}$ é um $A_{\mathfrak{p}}$-módulo livre se e somente se $\mathfrak{p} \not\supseteq I_{q+1-n}(\psi_f)$. Em particular, se $f \in A_+$ é homogêneo, então $\mathrm{Der}_f(A)$ é localmente livre no espectro perfurado se e somente se o ideal $I_{q+1-n}(\psi_f)$ é A_+-primário;*

(iii) *Se $T_1, \ldots, T_q, U$ são indeterminadas sobre A e $\psi_f = (g_{ij})$, a álgebra simétrica do módulo de Saito de f pode ser descrita como*

$$\mathcal{S}_A(\mathrm{Der}_f(A)) = A[T_1, \ldots, T_q, U]/\mathcal{L}_f, \quad \mathcal{L}_f = (L_1, \ldots, L_p),$$

onde $L_j = \sum_{i=1}^{q} g_{ij} T_i,\ j = 1, \ldots, p$;

(iv) *A álgebra de Rees de $\mathrm{Der}_f(A)$ é dada por*

$$\mathcal{R}_A(\mathrm{Der}_f(A)) = \frac{A[T_1, \ldots, T_q, U]}{\mathcal{L}_f : I_{q+1-n}(\psi_f)^{\infty}}$$

Demonstração. (i) A expressão para o ideal de Fitting segue imediatamente da apresentação livre obtida acima e da observação óbvia de que $I_j(\tilde{\psi}_f) = I_j(\psi_f), \forall j$. Seja agora $B = A_f$ o anel de frações de A com respeito ao sistema multiplicativo das potências de f. Por hipótese $f \in I_f$, logo $I_f B = B$ e a resolução livre de I_f, localizada em f, é cindida. Daí $I_{q+1-n}(\psi_f)B = B = A_f$ e isto significa que $f \in \sqrt{I_{q+1-n}(\psi_f)}$.

(ii) Uma vez que $\mathrm{Der}_f(A)$ tem posto n (*cf.* Observação 2.21(2)), tem-se que $\mathrm{Der}_f(A)_{\mathfrak{p}}$ é livre se e só se $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{F}_n(\mathrm{Der}_f(A)) = I_{q+1-n}(\psi_f)$. A segunda afirmação torna-se imediata.

(iii) A maneira usual pela qual se obtém a álgebra simétrica fornece $\mathcal{S}_A(\mathrm{Der}_f(A)) = A[T_1, \ldots, T_q, U]/\mathcal{L}$, onde $\mathcal{L} = I_1((T_1 \cdots T_q\ U) \cdot \tilde{\psi}_f)$. Sendo nula a última linha de $\tilde{\psi}_f$, tem-se $\mathcal{L} = I_1((T_1 \cdots T_q) \cdot (g_{ij})) = (\sum_{i=1}^q g_{i1}T_i, \ldots, \sum_{i=1}^q g_{ip}T_i) = (L_1, \ldots, L_p) = \mathcal{L}_f$.

(iv) Denotando $S = \mathcal{S}_A(\mathrm{Der}_f(A)) = A'/\mathcal{L}_f$ e $R = \mathcal{R}_A(\mathrm{Der}_f(A))$, tem-se $R = S/\tau$, onde τ é o submódulo (de fato, ideal) de A-torção de S. Podemos escrever $\tau = 0 :_S I^\infty = (\mathcal{L}_f :_{A'} I^\infty)/\mathcal{L}_f$, para qualquer ideal não-nulo $I \subset A$ tal que $S_{\mathfrak{p}}$ é um $A_{\mathfrak{p}}$-módulo livre de torção para todo ideal primo $\mathfrak{p} \not\supseteq I$. Neste caso, é claro que $R = A'/\mathcal{L}_f : I^\infty$. Aplicando o item (ii) temos $\mathfrak{p} \not\supseteq I_{q+1-n}(\psi_f) \Rightarrow \mathrm{Der}_f(A)_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}}^n \Rightarrow S_{\mathfrak{p}} \simeq \mathcal{S}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}^n) \simeq A_{\mathfrak{p}}[Y_1, \ldots, Y_n]$ (Y_i's indeterminadas) $\Rightarrow S_{\mathfrak{p}}$ é livre de $A_{\mathfrak{p}}$-torção, e isto mostra que o candidato $I = I_{q+1-n}(\psi_f)$ satisfaz ao requerido. □

Observação 2.41 Podemos escrever $\dim \mathcal{R}_A(\mathrm{Der}_f(A)) = \text{posto } \mathrm{Der}_f(A) + \dim A = 2n$, e assim $\dim \mathcal{S}_A(\mathrm{Der}_f(A)) \geq 2n$.

Proposição 2.42 *Seja $f \in A_+$ homogêneo. Tem-se* $\dim \mathcal{S}_A(\mathrm{Der}_f(A)) = 2n$ *(dimensão mínima) se e somente se* alt $I_t(\psi_f) \geq q-n+2-t$*, para todo inteiro t tal que* $1 \leq t \leq q-n+1$. *Em particular, isto ocorre se o anel* $\mathcal{S}_A(\mathrm{Der}_f(A))$ *(descrito na Proposição 2.40(iii)) é puro.*

Demonstração. Primeiramente note-se que $\mathrm{Der}_f(A)$ é um módulo graduado com posto sobre o anel graduado Cohen-Macaulay A. Desta forma é sabido (*cf.* [6]) que a minimalidade da dimensão da álgebra simétrica equivale à condição $\mathcal{F}_0$ sobre a altura dos ideais de Fitting do módulo, que neste caso se expressa alt $I_t(\psi_f) \geq \text{posto } \psi_f - t + 1 = (q+1-n) - t + 1 = q - n + 2 - t$, com $1 \leq t \leq \text{posto } \psi_f = q - n + 1$. Sabe-se também que isto ocorre se a álgebra simétrica é pura. □

Lembramos que um módulo M finitamente gerado sobre um anel noetheriano R, com posto bem-definido sobre R, é dito *de tipo linear* se sua álgebra de Rees $\mathcal{R}_R(M)$ coincidir com a álgebra simétrica $\mathcal{S}_R(M)$, ou em outras palavras, se $\mathcal{S}_R(M)$ não possuir R-torção.

Proposição 2.43 *Para um dado polinômio $f \in A$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\mathrm{Der}_f(A)$ *é um módulo de tipo linear;*

(ii) $\mathcal{S}_A(\mathrm{Der}_f(A))$ *é um anel puro e* alt $I_t(\psi_f) \geq q - n + 3 - t$*, para todo inteiro t tal que* $1 \leq t \leq q - n + 1$.

Demonstração. A propriedade de ser de tipo linear (sobre um anel Cohen-Macaulay) equivale à condição $\mathcal{F}_1$ juntamente com a pureza da álgebra simétrica. Neste caso podemos expressar $\mathcal{F}_1$ como alt $I_t(\psi_f) \geq \text{posto } \psi_f - t + 2 = (q+1-n) - t + 2 = q - n + 3 - t$, com $1 \leq t \leq q - n + 1$. □

2.3.4 IDP associado a um divisor livre

Seja $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ (k corpo de característica zero). Remeteremos à referência [12] para a relação entre o *ideal de Bourbaki* de um módulo e sua álgebra de Rees.

Proposição 2.44 *Seja $I \subset A$ um ideal contendo um divisor livre f, com ideal gradiente I_f. Então $I_f \cap I$ é um ideal de Bourbaki do IDP* $\mathrm{Der}_{f,I}(A)$.

Demonstração. Denotemos por Z o primeiro módulo de sizigias das derivadas parciais de f, ou de outra maneira, $Z = \mathrm{Ker}\ \Theta(f)$. A Proposição 2.27, aplicada a este caso particular, fornece

$$0 \to Z \to \mathrm{Der}_{f,I}(A) \to I_f \cap I \to 0.$$

Sendo f um divisor livre, temos que Z é um módulo livre e assim $I_f \cap I$ é um ideal de Bourbaki para o IDP em questão. □

Aplicando esta proposição e consultando [12, Proposition 3.11(b)] obtemos:

Corolário 2.45 *Seja $I \subset A$ um ideal contendo um divisor livre f tal que $I_f \cap I$ é um ideal de tipo linear. Então* $\mathrm{Der}_{f,I}(A)$ *é um módulo de tipo linear.*

2.4 Critério de reflexividade e anéis diferencialmente livres

Exibiremos condições necessárias e suficientes à *reflexividade* do módulo idealizador polinomial (seria plausível esperar que resultados análogos ocorram em maior generalidade – por exemplo, para anéis locais regulares – mas neste trabalho nos contentaremos com o contexto polinomial). Um critério de liberdade será conseqüência imediata e dará origem à classe dos ideais (e anéis) *diferencialmente livres*, constituindo uma generalização não-trivial da teoria dos divisores livres devida a K. Saito.

2.4.1 A obstrução básica

Sejam k corpo e $I \subseteq J \subset A = k[X_1, \ldots, X_n]$ ideais não-nulos. Se $\Theta = \Theta(\mathbf{g})$ é a matriz jacobiana de um conjunto de geradores $\{g_1, \ldots, g_m\}$ de I, podemos assumir que $I_1(\Theta) \nsubseteq J$, já que do contrário o módulo é automaticamente livre (*cf.* Observação 2.21(4)).

Proposição 2.46 *Se* $\mathrm{alt}\ J \geq 2$ *então* $\mathrm{Der}_{I,J}(A)^*$ *é livre.*

Demonstração. Dualizando a seqüência exata curta correspondente à identificação $\mathcal{D} = \mathrm{Der}_k(A/I, A/J) = \mathrm{Der}_{I,J}(A)/J^{\oplus n}$, obtemos

$$0 \to \mathcal{D}^* \to \mathrm{Der}_{I,J}(A)^* \to (J^*)^{\oplus n} \to \mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{D}, A) \to \ldots$$

Como $\mathrm{alt}\ J \geq 2$, tem-se $J^* \simeq A$. Além disso, sendo $J \subseteq 0:_A \mathcal{D}$, podemos escrever $\mathcal{D}^* = \mathrm{Ext}^0_A(\mathcal{D}, A) = 0$ e $\mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{D}, A) = 0$. Logo $\mathrm{Der}_{I,J}(A)^* \simeq A^n$. □

A condição necessária básica é dada em termos de codimensão:

Proposição 2.47 *Se* $\mathrm{Der}_{I,J}(A)$ *é reflexivo então* $\mathrm{alt}\ J = 1$.

Demonstração. Seja C o conúcleo da inclusão $\mathrm{Der}_{I,J}(A) \subset A^n$. Suponhamos que $\mathrm{Der}_{I,J}(A) \simeq \mathrm{Der}_{I,J}(A)^{**}$ e, por absurdo, que alt $J \geq 2$. Aplicando a proposição acima, tem-se $\mathrm{Der}_{I,J}(A) \simeq A^n$ e assim C admite uma resolução livre

$$0 \to A^n \to A^n \to C \to 0,$$

isto é, dh $C = 1$. De $J \subseteq 0{:}_A C$ segue que alt $J \leq$ dh $C = 1$, contradizendo a hipótese de que J tem altura pelo menos 2. Portanto deve-se ter, de fato, alt $J = 1$. □

Observação 2.48 Estas duas proposições nos permitem concluir que, se alt $J \geq 2$, então $\mathrm{Der}_{I,J}(A)$ é um *ideal-module*, na terminologia de [12].

2.4.2 Critério efetivo

Focalizaremos a partir de agora no caso $I = J$. Se I tem altura 1, seu idealizador absoluto pode ser decomposto, no sentido a seguir.

Proposição 2.49 *Se $I = fI' \subset A$, onde I' não está contido em nenhum primo associado de (f) (e.g., alt $I' \geq 2$), então*

$$\mathrm{Der}_I(A) \;=\; \mathrm{Der}_f(A) \;\cap\; \mathrm{Der}_{I'}(A).$$

Demonstração. Basta notar que $I' = I{:}\,(f)$, e aplicar a Proposição 2.19. □

O lema seguinte, extremamente útil, baseia-se em um resultado clássico devido a P. Samuel.

Lema 2.50 *Sejam $M \subseteq N$ módulos finitamente gerados sobre um domínio normal R. Se M é reflexivo, N é livre de torção e $M_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{p}}$ para todo ideal primo $\mathfrak{p} \subset R$ de altura 1, então $M = N$.*

Demonstração. Queremos mostrar que $N \subseteq M$. É bem sabido (*cf.*[11]) que o bidual de qualquer módulo finitamente gerado sobre um tal R se exprime, num espaço vetorial adequado (produto tensorial do módulo pelo corpo de frações do domínio), como a interseção das localizações do módulo nos primos de altura 1. Portanto, usando que o módulo livre de torção N e o módulo reflexivo M coincidem em codimensão 1, obtemos uma inclusão (de fato igualdade)

$$N \subseteq N^{**} = \bigcap_{\mathrm{alt}\ \mathfrak{p}=1} N_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\mathrm{alt}\ \mathfrak{p}=1} M_{\mathfrak{p}} = M^{**} = M.$$

□

Estamos agora em condições de obter um critério para a reflexividade do idealizador diferencial. Enfatizamos que, em virtude da Proposição 2.47, o problema se reduz ao caso alt $I = 1$. Tem-se então o aspecto $I = fI'$, onde f será tomado euleriano, isto é, existem $h_1, \ldots, h_n \in A$ tais que $f = \sum_i h_i \partial f/\partial X_i$. Para a parte efetiva do critério (item (iii) abaixo), desempenha um papel primordial a matriz $\phi_f = (Q_{ij})$ de tamanho $n \times (q+1)$ cujos vetores-coluna correspondem às derivações $\delta_j = \sum_i Q_{ij}\partial/\partial X_i$, $j = 1, \ldots, q+1$ (com $\delta_{q+1} = \varepsilon_f = \sum_i h_i \partial/\partial X_i$) que geram o módulo de Saito de f (*cf.* Corolário 2.33 e Observação 2.35).

Teorema 2.51 *Seja $I = fI'$, com $f \neq 0$ euleriano, $I' = (f_1, \dots, f_m)$,* $\mathrm{mdc}(f_1, \dots, f_m) = 1$. *Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\mathrm{Der}_I(A)$ *é um módulo reflexivo;*

(ii) $\mathrm{Der}_I(A) = \mathrm{Der}_f(A)$*;*

(iii) $I_1(\Theta' \cdot \phi_f) \subseteq I'$, *onde* $\Theta' = \Theta(\mathbf{f})$.

Em particular, se $I_1(\phi_f) \subseteq I'$ então $\mathrm{Der}_I(A)$ é reflexivo.

Demonstração. Se $m = 1$ tem-se $f_1 = 1$, logo $I = (f) \subset I' = A$. Como f é euleriano, seu módulo de Saito é reflexivo (Proposição 2.34) e não há nada a mostrar. Podemos então supor que $m \geq 2$. Assim, a hipótese sobre o máximo divisor comum dos f_i's implica em que $\{f_1, f_2\} \subseteq I'$ é uma seqüência regular e assim alt $I' \geq 2$. Da Proposição 2.49 decorre $\mathrm{Der}_I(A) = \mathrm{Der}_{I'}(A) \cap \mathrm{Der}_f(A) \subseteq \mathrm{Der}_f(A)$. Seja $\mathcal{C}$ o conúcleo da inclusão $\mathrm{Der}_I(A) \subseteq \mathrm{Der}_f(A)$. É claro que $I'\mathrm{Der}_f(A) \subseteq \mathrm{Der}_{I'}(A) \cap \mathrm{Der}_f(A) = \mathrm{Der}_I(A)$, isto é, $I' \subseteq \mathrm{Der}_I(A){:}\,\mathrm{Der}_f(A) = 0{:}_A\,\mathcal{C}$, donde $2 \leq \text{alt } 0{:}\,\mathcal{C}$. Assim, se $\mathfrak{p}$ é um primo de altura 1, então necessariamente $\mathcal{C}_\mathfrak{p} = 0$, ou seja, $\mathrm{Der}_I(A)_\mathfrak{p} = \mathrm{Der}_f(A)_\mathfrak{p}$. Se $\mathrm{Der}_I(A)$ é reflexivo, o Lema 2.50 se aplica e garante igualdade global, como queremos. Isto mostra (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Uma vez que $\mathrm{Der}_I(A) = \mathrm{Der}_f(A) \cap \mathrm{Der}_{I'}(A)$, torna-se imediato perceber que (ii) equivale à inclusão

$$\mathrm{Der}_f(A) = \sum_{j=1}^{q+1} A\delta_j \subseteq \mathrm{Der}_{I'}(A).$$

Explicitamente, isto se escreve $\delta_j(f_t) = (\sum_i Q_{ij}\partial/\partial X_i)(f_t) = \sum_i Q_{ij}\partial f_t/\partial X_i \in I', \forall j, t$, que é exatamente a condição $I_1(\Theta' \cdot \phi_f) \subseteq I'$ expressa no item (iii).

A afirmação particular é imediata já que $I_1(\Theta' \cdot \phi_f) \subseteq I_1(\phi_f)$. □

Note-se que se f e I' são homogêneos, então, uma vez que $\phi_f = (\varphi_f \mid \epsilon)$ – onde as colunas de φ_f geram as sizigias das derivadas parciais de f, como na Observação 2.35 –, fica claro que a condição (iii) equivale a $I_1(\Theta' \cdot \varphi_f) \subseteq I'$.

Investigaremos algumas situações especiais. Para a primeira delas, que fornece uma classe de exemplos, lembramos que um polinômio homogêneo $f \in A_+^2$ é dito uma *singularidade isolada* se I_f é A_+-primário, ou de maneira equivalente, $\{\partial f/\partial X_1, \dots, \partial f/\partial X_n\}$ é uma seqüência regular. O exemplo básico, em característica zero, é $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i^{\alpha_i}$, com $\lambda_i \in k \setminus \{0\}$ e $\alpha_i \geq 2, \forall i$.

Corolário 2.52 *Se f é uma singularidade isolada homogênea, então $\mathrm{Der}_{fI_f}(A)$ é reflexivo.*

Demonstração. Neste caso é bem sabido que as sizigias das derivadas parciais de f são geradas pelas relações triviais, de maneira que $I_1(\varphi_f) \subseteq I_f$. □

Corolário 2.53 *Sejam $f \in A$ euleriano e $L = (\ell_1, \dots, \ell_m) \subset A$ um ideal gerado por polinômios lineares. Para cada i, escrevamos $\ell_i = \alpha_i + \alpha_{i1}X_1 + \dots \alpha_{in}X_n$ e consideremos a matriz $m \times n$ com entradas escalares $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})$. Então $\mathrm{Der}_{fL}(A)$ é reflexivo se e somente se $I_1(\mathcal{A} \cdot \phi_f) \subseteq L$. Se f é homogêneo, $\mathrm{Der}_{fA_+}(A)$ é reflexivo se e somente se o ideal $I_1(\varphi_f)$ é próprio.*

Demonstração. Basta notar que, no caso $I' = L$, tem-se $\Theta' = \mathcal{A}$. Se $f \in A$ é homogêneo e $I' = A_+$, então Θ' é a matriz identidade de ordem n e há apenas duas possibilidades: $I_1(\phi_f) = A_+$ ou $I_1(\phi_f) = A$. De fato, devido à derivação de Euler $(X_1, \ldots, X_n)$, tem-se $A_+ \subseteq I_1(\phi_f)$, ocorrendo igualdade, portanto, se e só se $\mathrm{Der}_{fA_+}(A)$ é reflexivo, o que também equivale a $I_1(\varphi_f) \subseteq A_+$. □

Exemplo 2.54 Ao contrário do que se pode imaginar à primeira vista, é possível que $I_1(\varphi_f) = A$ mesmo quando f é um polinômio homogêneo de grau arbitrário, contendo todas as variáveis. Seja por exemplo $f = X^dY - X^dZ \in A = k[X,Y,Z]$, com $d \geq 1$. Neste caso, as coordenadas do vetor $(0,1,1)$ – correspondente à derivação $\partial/\partial Y + \partial/\partial Z \in \mathrm{Der}_f(A)_{-1}$ (*cf.* Observação 2.21(3)) – figuram como uma coluna da matriz φ_f e assim $I_1(\varphi_f) = A$. Portanto $\mathrm{Der}_{fA_+}(A)$ não é reflexivo (mesmo sendo f um divisor livre).

2.4.3 Ideais diferencialmente livres

Uma conseqüência imediata do teorema da subseção anterior é o seguinte critério de liberdade do módulo idealizador:

Corolário 2.55 *Na mesma situação do Teorema 2.51, são equivalentes:*

(i) $\mathrm{Der}_I(A)$ *é um módulo livre;*

(ii) f *é divisor livre e* $\mathrm{Der}_I(A) = \mathrm{Der}_f(A)$*;*

(iii) f *é divisor livre e* $I_1(\Theta' \cdot \phi_f) \subseteq I'$.

Definição 2.56 Consideremos um ideal da forma $I = (ff_1, \ldots, ff_m) \subset A$, onde f é um polinômio euleriano e $\mathrm{mdc}(f_1, \ldots, f_m) = 1$. Se I satisfaz uma (e portanto qualquer) das condições equivalentes do corolário acima, dizemos que I é um *ideal diferencialmente livre.* Um anel R é dito um *anel diferencialmente livre* se admitir uma apresentação $R = A/I$, onde I é um ideal diferencialmente livre.

Observação 2.57 Se $I = fI'$ é diferencialmente livre (neste caso $n = q+1$), o item (ii) do critério fornece uma base para o idealizador correspondente:

$$\mathrm{Der}_I(A) = A\delta_1 \oplus \ldots \oplus A\delta_{n-1} \oplus A\varepsilon_f.$$

Em particular,

$$\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{I}\right) = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{A}{I}\right)\overline{\delta}_j + \left(\frac{A}{I}\right)\overline{\varepsilon}_f,$$

onde a barra denota classe residual módulo I.

Exemplo 2.58 O ideal gradiente $I_f = (X_2 \cdots X_n,\ X_1X_3 \cdots X_n,\ \ldots,\ X_1 \cdots X_{n-1})$ do monômio $f = X_1 \cdots X_n$ tem dimensão homológica 1 (o Corolário 2.37 garante, então, que

f é um divisor livre) e suas sizigias são geradas pelas colunas da matriz

$$\varphi_f = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & X_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & X_{n-1} \\ -X_n & -X_n & -X_n & \cdots & -X_n \end{pmatrix}$$

Tomando $I' = I_f$ (logo Θ' é a matriz hessiana de f) tem-se neste caso $I_1(\Theta' \cdot \varphi_f) = I_f$ e portanto fI_f é um ideal diferencialmente livre. Uma base de $\mathrm{Der}_{fI_f}(A)$ é composta pelas colunas de φ_f e pela derivação de Euler.

Exemplo 2.59 Se f é a cúbica do Exemplo 2.36, obtém-se

$$\varphi_f = \begin{pmatrix} X & 0 & 3Z^2 \\ -2Y & 3Z^2 & 0 \\ 0 & X^2 & 2XY \end{pmatrix},$$

donde $I_1(\varphi_f) = (X, Y, Z^2) \subset A_+$ e portanto $\mathrm{Der}_{fA_+}(A)$ é reflexivo. Porém, f não é divisor livre pois dh $I_f = 2$ e assim o ideal (fX, fY, fZ) não é diferencialmente livre.

Inspirados pelo Exemplo 2.58 acima e por vários outros experimentos, propomos a seguinte

Questão 2.60 Se $f \in A_+$ é um divisor livre homogêneo, podemos afirmar que o ideal fI_f é diferencialmente livre?

2.5 Estimativas para a profundidade do idealizador diferencial

Nesta seção, consideremos ideais homogêneos $I \subseteq J \subseteq A_+ \subset A = k[X_1, \ldots, X_n]$ (k corpo), bem como a matriz jacobiana $\Theta = \Theta(\mathbf{f})$ de um conjunto de geradores $\{\mathbf{f}\}$ de I.

Proposição 2.61 *Suponhamos que* prof $A/J > 0$. *Se $g \in A_+$ é um polinômio A/J-regular e $f \in A_+$ é um polinômio $A/(g)$-regular, então $\{f, g\}$ é uma* $\mathrm{Der}_{I,J}(A)$*-seqüência. Em particular,* prof $\mathrm{Der}_{I,J}(A) \geq 2$.

Demonstração. Denotando $D = \mathrm{Der}_{I,J}(A)$, o polinômio $f \neq 0$ é D-regular. Suponhamos por absurdo que g é divisor de zero em D/fD. Então existe $\delta \in D \setminus fD$ tal que $g \cdot \delta = f \cdot \eta$, para alguma derivação $\eta \in D$. Escrevendo $\delta = \sum_i p_i \partial/\partial x_i$, $\eta = \sum_i q_i \partial/\partial x_i$, obtemos $gp_i = fq_i, \forall i$, donde $fq_i \in (g)$. Sendo f regular módulo g, cada q_i é múltiplo de g; digamos, $q_i = h_i g$. Com isto podemos escrever $\eta = g \cdot \rho$, onde $\rho = \sum_i h_i \partial/\partial x_i$. Substituindo em $g \cdot \delta = f \cdot \eta$ e cancelando g, resta $\delta = f \cdot \rho$. Se h é um polinômio qualquer em I então $\eta(h) \in J$ (pois $\eta \in D$), donde $g\rho(h) \in J$, isto é, $\rho(h) \in J \colon (g) = J$ e isto significa que $\rho \in D$. Sendo $\delta = f \cdot \rho$, teríamos $\delta \in fD$, contradição. Assim, g é D/fD-regular; estando a D-seqüência $\{f, g\}$ contida em A_+, obtemos prof $D \geq 2$. $\square$

Exemplo 2.62 Seja $J = (X^3, X^2Y + Z^3) \subset A = k[X,Y,Z]$. Vemos que $g = Y$ é A/J-regular. Assim, obtemos que $\{X,Y\}$ e $\{Z,Y\}$ são exemplos de $\mathrm{Der}_J(A)$-seqüências, e $\mathrm{prof}\ \mathrm{Der}_J(A) \geq 2$. Por outro lado, como estamos a 3 indeterminadas e $\mathrm{Der}_J(A)$ não pode ser livre (*cf.* Subseção 2.4.3), tem-se $\mathrm{prof}\ \mathrm{Der}_J(A) = 2$. Este exemplo também mostra que a cota obtida a seguir pode ser atingida.

Proposição 2.63 *Se* $J \not\supseteq I_1(\Theta)$, *então* $\mathrm{prof}\ \mathrm{Der}_{I,J}(A) \leq \dim A/(J\colon I_1(\Theta)) + 1$.

Demonstração. Seja C o conúcleo da inclusão $D = \mathrm{Der}_{I,J}(A) \subset \mathrm{Der}_k(A)$. A hipótese $J \not\supseteq I_1(\Theta)$ garante que $C \neq 0$ (*cf.* Observação 2.21(4)). Estudando a profundidade ao longo da seqüência exata curta

$$0 \to D \to A^n \to C \to 0,$$

segue que $\mathrm{prof}\ D = \mathrm{prof}\ C + 1$. Como $\mathrm{prof}\ C \leq \dim C = \dim A/(J\colon I_1(\Theta))$, tem-se o resultado desejado. $\square$

Em particular, se $I = J$ e $\mathrm{car}\ k = 0$ (a fim de garantir que $I \not\supseteq I_1(\Theta)$), tem-se $\mathrm{prof}\ \mathrm{Der}_I(A) \leq \dim A/I + 1$. Assim, para anéis 1-dimensionais, as duas proposições acima fornecem o seguinte

Corolário 2.64 ($\mathrm{car}\ k = 0$) *Se o anel* A/I *é Cohen-Macaulay de dimensão* 1, *então* $\mathrm{prof}\ \mathrm{Der}_I(A) = 2$.

Proposição 2.65 ($\mathrm{car}\ k = 0$) *Tem-se* $\mathrm{prof}_I \mathrm{Der}_I(A) = 1$. *Em particular, se* I *é* A_+-*primário, então* $\mathrm{prof}\ \mathrm{Der}_I(A) = 1$.

Demonstração. Tem-se uma seqüência exata curta do tipo

$$0 \to \mathrm{Der}_I(A) \to A^n \to C \to 0,$$

onde claramente $I \subset 0 :_A C \subsetneq A$. Logo $\mathrm{prof}_I C = 0$ e isto implica no desejado. $\square$

Proposição 2.66 *Suponhamos que* $I\colon J$ *contém algum elemento* A/J-*regular e que* $J \not\subseteq I\colon I_1(\Theta)$.

(i) *Se* $\dim A/(I\colon J) \leq 1$ *então* $\mathrm{prof}\ \mathrm{Der}_I(A) \leq 2$. *Se além disso* $\mathrm{prof}\ A/I > 0$, *tem-se* $\mathrm{prof}\ \mathrm{Der}_I(A) = 2$;

(ii) *Tem-se* $\mathrm{prof}_{I:J}\mathrm{Der}_I(A) = 1$. *Em particular, se* $\sqrt{I\colon J} = A_+$, *então* $\mathrm{prof}\ \mathrm{Der}_I(A) = 1$.

Demonstração. (i) A hipótese sobre a $I\colon J$-profundidade de A/J nos permite aplicar a Proposição 2.18, que fornece uma inclusão $\mathrm{Der}_I(A) \subset \mathrm{Der}_J(A)$, cujo conúcleo denotaremos por $C_{I,J}$. É imediato perceber que $(I\colon J)\mathrm{Der}_J(A) \subset \mathrm{Der}_I(A)$, isto é, $0\colon C_{I,J} \supseteq I\colon J$ e assim $C_{I,J}$ possui estrutura de módulo sobre o anel $A/(I\colon J)$. Logo $\mathrm{prof}\ C_{I,J} \leq \dim C_{I,J} \leq \dim A/(I\colon J) \leq 1$. Como $I\colon J \subset A_+$ (pois $I \neq J$) tem-se $\mathrm{prof}\ A/J > 0$ e assim, aplicando a Proposição 2.61, $\mathrm{prof}\ \mathrm{Der}_J(A) \geq 2 > \mathrm{prof}\ C_{I,J}$. Da seqüência exata curta

$$0 \to \mathrm{Der}_I(A) \to \mathrm{Der}_J(A) \to C_{I,J} \to 0$$

segue, então, que $\mathrm{prof}\ \mathrm{Der}_I(A) = \mathrm{prof}\ C_{I,J} + 1 \leq 2$. Observe que isto pode ser feito pois $C_{I,J} \neq 0$. De fato, $0\colon C_{I,J} \subseteq ((I\colon I_1(\Theta))\colon J) \neq A$, inclusão que passamos a verificar: seja

$h \in A$ tal que $h\mathrm{Der}_J(A) \subseteq \mathrm{Der}_I(A)$. Seja $g \in J$. Queremos mostrar que $hgI_1(\Theta) \subseteq I$. Sendo $g\partial/\partial X_j \in \mathrm{Der}_J(A)$, tem-se $hg\partial/\partial X_j \in \mathrm{Der}_I(A)$, donde $hg\partial f_i/\partial X_j \in I$.

Se A/I tem profundidade positiva, utilizamos novamente a Proposição 2.61 e obtemos que $\mathrm{prof}\ \mathrm{Der}_I(A) = 2$.

(ii) Segue da seqüência exata curta acima e de que $\mathrm{prof}_{I:J} C = 0$ pois $I\colon J \subseteq 0\colon C_{I,J}$. $\square$

Proposição 2.67 *Suponhamos que* $J \nsubseteq I\colon I_1(\Theta)$ *e que* $I\colon J$ *contém algum elemento* A/J*-regular. Se além disso* $I\colon J$ *é* $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_r})$*-primário, para algum subconjunto de índices* $\{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, n\}$, *então* $\mathrm{prof}\ \mathrm{Der}_I(A) \leq 1 + n - r$.

Demonstração. Reordenando os índices se necessário, podemos supor que $\sqrt{I\colon J} = P = (X_1, \ldots, X_r)$. Do item (ii) da proposição acima decorre $\mathrm{prof}_P \mathrm{Der}_I(A) = 1$ e portanto, sendo $A_+ = P + (X_{r+1}, \ldots, X_n)$, obtemos $\mathrm{prof}\ \mathrm{Der}_I(A) \leq \mathrm{prof}_P \mathrm{Der}_I(A) + n - r = 1 + n - r$. $\square$

2.6 Decomposição primária do idealizador diferencial

Fixemos um anel de polinômios $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ sobre um corpo k de característica zero.

Proposição 2.68 *Seja* $I \subset A$ *um ideal radical com decomposição primária* $I = \cap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$. *Então*

$$\mathrm{Der}_I(A) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Der}_{\mathfrak{p}_i}(A),$$

com $\mathrm{Ass}_A(A^n/\mathrm{Der}_{\mathfrak{p}_i}(A)) = \{\mathfrak{p}_i\}$, $\forall i$, *ou seja, esta é a decomposição primária do idealizador diferencial* $\mathrm{Der}_I(A)$ *em* A^n.

Demonstração. Tomemos qualquer $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\} = \mathrm{Ass}\, A/I$. Como I é radical, temos $I_\mathfrak{p} = \cap_i (\mathfrak{p}_i)_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$, ou seja, $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Supp}\ \mathfrak{p}/I$, e isto também significa que $\mathfrak{p} \not\supseteq 0\colon(\mathfrak{p}/I) = I\colon\mathfrak{p}$. Logo $I\colon\mathfrak{p}$ contém algum polinômio $A/\mathfrak{p}$-regular. Aplicando a proposição 2.15 podemos afirmar que $\mathrm{Der}_I(A) \subseteq \mathrm{Der}_\mathfrak{p}(A)$, e isto então mostra que $\mathrm{Der}_I(A) \subseteq \cap_i \mathrm{Der}_{\mathfrak{p}_i}(A)$. A inclusão oposta é imediata: se $f \in I$ e $\delta \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{p}_i}(A), \forall i$, então, sendo $f \in \mathfrak{p}_i, \forall i$, tem-se $\delta(f) \in \cap_i \mathfrak{p}_i = I$, como queremos. Resta-nos mostrar que a decomposição obtida é primária. Para isto denotemos novamente por $\mathfrak{p}$ qualquer dos $\mathfrak{p}_i$'s e tomemos $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}\, A^n/\mathrm{Der}_\mathfrak{p}(A)$. Note-se que um tal primo existe pois, sendo car $k = 0$, tem-se $\mathrm{Der}_\mathfrak{p}(A) \neq A^n$ (*cf.* Observação 2.18(4)). Podemos escrever $\mathfrak{q} = \mathrm{Der}_\mathfrak{p}(A)\colon_A \delta$, para algum $\delta \in A^n \setminus \mathrm{Der}_\mathfrak{p}(A)$. Precisamos então mostrar que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. A inclusão $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ é clara pois $f \in \mathfrak{p} \Rightarrow f\delta \in \mathfrak{p}^{\oplus n} \subset \mathrm{Der}_\mathfrak{p}(A)$. Seja agora $g \in \mathfrak{q}$, isto é, $(g\delta)(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}$. Uma vez que $\delta \notin \mathrm{Der}_\mathfrak{p}(A)$, existe $h \in \mathfrak{p}$ tal que $\delta(h) \notin \mathfrak{p}$. Por outro lado, $g\delta(h) = (g\delta)(h) \in \mathfrak{p}$ e assim necessariamente $g \in \mathfrak{p}$, como queríamos. $\square$

Corolário 2.69 *Se* $I \subset A$ *é um ideal radical então* $\mathrm{Ass}\ A^n/\mathrm{Der}_I(A) = \mathrm{Ass}\ A/I$.

3 Aplicações

3.1 Um método computacional para obtenção do módulo de derivações

Na Subseção 2.3.1 obtivemos geradores para cada IDP $\mathrm{Der}_{f_t,I}(A) \subset A^n$ de um ideal $I = (f_1, \ldots, f_m) \subset A = k[X_1, \ldots, X_n]$, através de matrizes explícitas $\phi_1, \ldots, \phi_m$ (a notação será mantida). Assim, visto que o idealizador diferencial absoluto é interseção de seus parciais, podemos escrever

$$\mathrm{Der}_I(A) = \bigcap_{t=1}^{m} \mathrm{Im}\ \phi_t,$$

isto é, o idealizador de I se decompõe em termos de módulos conhecidos. Esta expressão possui valor teórico, denunciando uma certa complexidade estrutural, mas na prática, no que diz respeito à obtenção de geradores de $\mathrm{Der}_I(A)$, não traz muita vantagem; isto porque a determinação à mão de um conjunto de geradores de uma interseção quase sempre requer longos e exaustivos cálculos de sizigias. Contudo, do ponto de vista computacional, uma vez que os programas de computação algébrica mais utilizados dispõem de comandos para este fim, a igualdade acima torna-se promissora.

O objetivo aqui não é a descrição rigorosa de algoritmos (um manual apropriado seria bem mais eficaz), mas a idéia de que calcular interseções, mesmo que com o auxílio de um *software* adequado, é o bastante para a finalidade proposta. Essencialmente, o *input* deve consistir das matrizes $\phi_1, \ldots, \phi_m$, e o *output*, de uma matriz cujos vetores-coluna devem compor, então, um conjunto de geradores para $\mathrm{Der}_I(A)$. Assumindo que o ideal I é homogêneo (com respeito à graduação *standard* de A) e utilizando por exemplo o programa *Macaulay* ([1]), o roteiro é simples: cada matriz ϕ_t é inserida no sistema através do comando `mat` (existem outras opções), e em seguida, a fim de assegurar homogeneidade, usa-se `setdegs` (procedendo-se por *default*). Finalmente, o comando `intersect` realiza o trabalho desejado.

Se $\phi_{1,\ldots,m}$ é a matriz-resultado, então, sendo $R = A/I$ e

$$\mathrm{Der}_k(R) \ = \ \bigcap_{t=1}^{m} \mathrm{Im}\ \overline{\phi}_t \ \subset \ R^n,$$

obtém-se que os vetores-coluna da matriz $\overline{\phi}_{1,\ldots,m}$, obtida por redução módulo I, formam um conjunto de geradores para o módulo das k-derivações do anel graduado R. É importante salientar que um tal conjunto não é minimal em geral, mesmo que os vetores-coluna de $\phi_{1,\ldots,m}$ gerem $\mathrm{Der}_I(A)$ minimamente. Em outros termos, denotando $\nu = \mu(\mathrm{Der}_I(A))$ e $\overline{\nu} = \mu(\mathrm{Der}_k(R))$, freqüentemente ocorre $\nu - \overline{\nu} > 0$.

A seguir, dois exemplos: no primeiro o módulo de derivações de um anel de dimensão 1 satisfaz $\overline{\nu} = 2 < 8 = \nu$, e no segundo tem-se $\overline{\nu} = \nu = 6$.

Exemplo 3.1 Retomemos o ideal homogêneo $I = (f_1, f_2) \subset A$ do Exemplo 2.32 e as matrizes ϕ_1 e ϕ_2 lá obtidas. Utilizando *Macaulay* como descrito no roteiro acima, obtemos que $\mathrm{Im}\ \phi_1 \cap \mathrm{Im}\ \phi_2 = \mathrm{Im}\ \phi_{1,2}$, onde

$$\phi_{1,2} = \begin{pmatrix} X & Y^3Z & Z^3 & Y^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y & XZ^3 & XY^2 & XYZ^2 & f_1 & 0 & f_2 & 0 \\ Z & X^3Z & XYZ & XZ^3 & 0 & f_1 & 0 & f_2 \end{pmatrix},$$

de modo que os vetores-coluna desta matriz constituem um conjunto de geradores de $\mathrm{Der}_I(A)$. Vê-se facilmente que se trata de um conjunto minimal. Tem-se então $\nu = 8$, e como tinha de ser, por estarmos no contexto graduado, a derivação de Euler $\epsilon = \sum_i X_i \partial/\partial X_i$ é um dos geradores (figura na primeira coluna de $\phi_{1,2}$).

Vamos investigar o que ocorre quando passamos ao anel 1-dimensional $R = A/I$. Denotemos por x, y, z as imagens em R das indeterminadas X, Y, Z, donde $z^3 = x^2y$ e $y^4 = x^2z^2$. A matriz $\overline{\phi}_{1,2}$ surge automaticamente como

$$\overline{\phi}_{1,2} = \begin{pmatrix} x & y^3z & x^2y & x^2z^2 \\ y & xz^3 & xy^2 & xyz^2 \\ z & x^3z & xyz & xz^3 \end{pmatrix},$$

e seus vetores-coluna geram o R-módulo das k-derivações de R. Porém não se trata de geradores minimais: considerando a derivação de Euler $\overline{\epsilon}$, vista agora em $\mathrm{Der}_k(R) \subset R^3$, tem-se

$$(x^2y, xy^2, xyz) = xy \cdot \overline{\epsilon}, \quad (x^2z^2, xyz^2, xz^3) = xz^2 \cdot \overline{\epsilon}$$

Finalmente, exibimos

$$\mathrm{Der}_k(R) \;=\; R \cdot \overline{\epsilon} \;+\; R \cdot (y^3z, xz^3, x^3z),$$

donde $\overline{\nu} = 2$, e $\nu - \overline{\nu} = 6$.

Exemplo 3.2 Seja $I = (f_1, f_2) \subset A = \mathbb{Q}[X, Y, Z]$, com $f_1 = X^2Y$ e $f_2 = XZ^2 - XYZ$. Aplicando o método obtemos que

$$\mathrm{Der}_I(A) = \mathrm{Im} \begin{pmatrix} -2X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y & Y & 0 & 0 & 0 & Z^2 \\ Z & Z & XY - 2XZ & XZ & YZ - Z^2 & Z^2 \end{pmatrix}.$$

Note-se que

$$2 \cdot \epsilon \;=\; 3 \cdot (0, Y, Z) \;-\; (-2X, Y, Z).$$

Além disso, os vetores-coluna são geradores minimais. Neste exemplo, ao contrário do anterior, esta propriedade se preserva por redução módulo I e assim $\overline{\nu} = \nu = 6$.

3.2 Módulos de derivações Cohen-Macaulay

Fixemos um corpo k e um anel de polinômios $A = k[X_1, \ldots, X_n]$. Dados $I \subseteq J \subset A$ ideais, um problema interessante (e não menos intrigante) é a determinação de condições suficientes e/ou necessárias à Cohen-Macaulicidade do módulo $\mathrm{Der}_k(A/I, A/J)$, ao menos em alguns casos especiais. Nesta seção constataremos obstruções e fatos relacionados a esta propriedade, incluindo sua ligação com o idealizador diferencial $\mathrm{Der}_{I,J}(A)$.

Podemos inicialmente observar o seguinte fato: sendo $\mathrm{Der}_k(A/I, A/J)$ um A/J-dual (do A/I-módulo de diferenciais $\Omega_k(A/I)$), então, assumindo por simplicidade I e J homogêneos, tem-se prof $\mathrm{Der}_k(A/I, A/J) \geq \min\{2, \text{prof } A/J)$. A seqüência exata de A/J-módulos (*cf.* Seção 1.2)

$$0 \to \mathrm{Der}_k(A/I, A/J) \to (A/J)^n \xrightarrow{\theta} (A/J)^m \to \mathrm{Coker}\ \theta \to 0$$

nos permite afirmar que, se A/J é anel Cohen-Macaulay d-dimensional, então o módulo $\mathrm{Der}_k(A/I, A/J)$ é Cohen-Macaulay se e somente se prof Coker $\theta \geq d - 2$. Em particular, $d \leq 2 \;\Rightarrow\; \mathrm{Der}_k(A/I, A/J)$ Cohen-Macaulay.

3.2.1 Dimensão no caso graduado

Uma vez que estamos em busca da igualdade entre a profundidade e a dimensão do módulo de derivações, devemos inicialmente nos questionar a respeito deste último invariante (que é bem mais acessível se comparado ao primeiro).

Fornecemos uma prova alternativa para o seguinte fato geral bem-conhecido:

Lema 3.3 *Sejam R um anel noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado com posto positivo. Então* $\dim M = \dim R$.

Demonstração. Seja $r = \text{posto } M > 0$. A partir de uma apresentação livre

$$R^s \xrightarrow{\phi} R^t \to M \to 0$$

obtemos que a matriz ϕ possui posto bem definido dado por $t-r$, isto é, considerando ideais de subdeterminantes de ϕ, temos $t - r < i \Rightarrow I_i(\phi) = (0)$. Necessariamente $t - r < t$ já que $r > 0$, e assim $\mathfrak{F}_0(M) = I_t(\phi) = (0)$. Portanto $\sqrt{0\colon M} = \sqrt{\mathfrak{F}_0(M)} = \sqrt{(0)}$, e calculamos $\dim M = \dim R/(0\colon M) = \dim R/\sqrt{0\colon M} = \dim R/\sqrt{(0)} = \dim R$, como queríamos. □

Assim, por exemplo, se $I = J$ é um ideal puro e genericamente interseção completa (*cf.* Seção 1.2), então $\dim \text{Der}_k(A/I) = \dim A/I$.

Contudo, em geral, pode ocorrer que o A/J-módulo $\text{Der}_k(A/I, A/J)$ não possua posto bem definido e não conheçamos, *a priori*, sua dimensão. Nesta etapa é natural considerar o seu ideal anulador como A-módulo,

$$\mathfrak{a}(I, J) = 0 :_A \text{Der}_k(A/I, A/J) \subset A.$$

Notemos primeiramente que a Proposição 2.25 nos permite escrevê-lo como o ideal condutor $\mathfrak{a}(I, J) = J^{\oplus n} :_A \text{Der}_{I,J}(A)$, onde estamos considerando o idealizador como submódulo de A^n. Em particular é imediato que $J \subseteq \mathfrak{a}(I, J)$, o que também é automático a partir da estrutura de $\text{Der}_k(A/I, A/J)$ como módulo sobre A/J. No caso homogêneo tem-se algo mais a ser dito:

Proposição 3.4 *Se $I \subseteq J \subseteq A_+^2$ são ideais homogêneos, então $\sqrt{\mathfrak{a}(I, J)} = \sqrt{J}$. Em particular,* $\text{Der}_k(A/I, A/J)$ *é um módulo não-nulo de dimensão* $\dim A/J$*, satisfazendo* $\text{Min } A/J \subseteq \text{Ass } \text{Der}_k(A/I, A/J) \subseteq \text{Ass } A/J$.

Demonstração. Denotemos $\mathcal{D} = \text{Der}_k(A/I, A/J)$ e mostremos primeiramente que $\mathcal{D} \neq 0$. Suponhamos por absurdo que $\mathcal{D} = 0$. Aplicando a Proposição 2.25, isto significa que $\text{Der}_{I,J}(A) = J^{\oplus n}$, e como a derivação de Euler $\epsilon = (X_1, \ldots, X_n)$ é um elemento do idealizador, teríamos $X_i \in J, \forall i$, contradição pois $J \subseteq A_+^2$. Seja agora $f \in \mathfrak{a}(I, J)$, isto é, $f\text{Der}_{I,J}(A) \subseteq J^{\oplus n}$. Em particular $f\epsilon \in J^{\oplus n}$, e assim $fX_i \in J, \forall i$. Sendo $\mathcal{D} \neq 0$ temos $\mathfrak{a}(I, J) \subseteq A_+$. Tomemos agora um ideal primo $P \neq A_+$ contendo J. Podemos supor que $X_1 \notin P$. Como em particular $fX_1 \in J \subseteq P$, tem-se $f \in P$ e portanto $\mathfrak{a}(I, J) \subseteq P$. Isto mostra que

$$\mathfrak{a}(I, J) \subseteq \bigcap_{P \supseteq J} P = \sqrt{J},$$

ou seja, $\mathfrak{a}(I, J)$ e J têm o mesmo radical. Em particular, $\dim \mathcal{D} = \dim A/\mathfrak{a}(I, J) = \dim A/J$. Além disso, $\text{Min } A/J = \text{Ass } A/\sqrt{J} = \text{Ass } A/\sqrt{\mathfrak{a}(I, J)} \subseteq \text{Ass } A/\mathfrak{a}(I, J) \subseteq \text{Ass } \mathcal{D} \subseteq \text{Ass } A/J$, onde a última inclusão decorre da injeção $\mathcal{D} \hookrightarrow (A/J)^n$. □

Corolário 3.5 *Sejam $I \subseteq J \subseteq A_+^2$ ideais homogêneos.*

(i) *Se J é radical então $\mathfrak{a}(I, J) = J$;*

(ii) *Se J não tem primos imersos (e.g., J radical), então* $\operatorname{Ass}\operatorname{Der}_k(A/I, A/J) = \operatorname{Ass} A/J$.

Em particular, a Proposição 3.4 garante que, no caso graduado (*standard*, usualmente), o módulo $\operatorname{Der}_k(A/I, A/J)$ é Cohen-Macaulay (sobre qualquer dos anéis A, A/I ou A/J) se e somente se for um A/J-módulo Cohen-Macaulay *máximo*, isto é, sua profundidade coincide com $\dim A/J$.

3.2.2 Obstruções à Cohen-Macaulicidade (Parte I)

Nesta subseção e na seguinte detectaremos condições necessárias à Cohen-Macaulicidade (máxima) do módulo de derivações. Antes disto será estabelecido um critério em termos da profundidade do módulo idealizador diferencial, o que reforça a necessidade de métodos eficazes para estimativas (ou mesmo determinação) deste invariante.

Proposição 3.6 *Sejam $I \subseteq J \subseteq A_+^2$ ideais homogêneos.*

(i) *Se A/J é Cohen-Macaulay e* $\operatorname{prof}\operatorname{Der}_{I,J}(A) \geq \dim A/J$, *então* $\operatorname{Der}_k(A/I, A/J)$ *é Cohen-Macaulay;*

(ii) *Se* $\operatorname{Der}_k(A/I, A/J)$ *é Cohen-Macaulay então* $\operatorname{prof}\operatorname{Der}_{I,J}(A) \geq \operatorname{prof} A/J$.

Demonstração. (i) Suponhamos A/J Cohen-Macaulay d-dimensional e $\operatorname{prof}\operatorname{Der}_{I,J}(A) \geq d$. Seja $\mathcal{D} = \operatorname{Der}_k(A/I, A/J)$. Devido à hipótese sobre a profundidade do idealizador, podemos supor que $\operatorname{prof}\mathcal{D} < \operatorname{prof}\operatorname{Der}_{I,J}(A)$. Neste caso, através da seqüência exata curta de A-módulos

$$0 \to J^{\oplus n} \to \operatorname{Der}_{I,J}(A) \to \mathcal{D} \to 0,$$

obtemos $\operatorname{prof} J = \operatorname{prof}\mathcal{D} + 1$, e sendo $\operatorname{prof} J = \operatorname{prof} A/J + 1 = d + 1$, concluímos que $\mathcal{D}$ é Cohen-Macaulay.

(ii) Suponhamos que $\operatorname{prof}\mathcal{D} = d$, e por absurdo que $\operatorname{prof}\operatorname{Der}_{I,J}(A) < \operatorname{prof} A/J$. Teríamos $\operatorname{prof}\operatorname{Der}_{I,J}(A) < d = \operatorname{prof}\mathcal{D}$ e assim, a seqüência utilizada acima implicaria em $\operatorname{prof}\operatorname{Der}_{I,J}(A) = \operatorname{prof} J = \operatorname{prof} A/J + 1 > \operatorname{prof} A/J$, contradição. $\square$

Corolário 3.7 *Sejam $I \subseteq J \subseteq A_+^2$ ideais homogêneos, com A/J Cohen-Macaulay. Então* $\operatorname{Der}_k(A/I, A/J)$ *é Cohen-Macaulay se e somente se* $\operatorname{prof}\operatorname{Der}_{I,J}(A) \geq \dim A/J$.

Observação 3.8 Sejam $d = \dim A/J$ e $p = \operatorname{prof}\operatorname{Der}_{I,J}(A)$, e assumamos que car $k = 0$. Devido à cota obtida na Proposição 2.63, a condição $p \geq d$ do corolário acima é equivalente a $p \in \{d,\, d+1\}$.

Lembramos que um anel noetheriano R é dito *eqüidimensional* se $\dim R = \dim R/\wp$, para todo $\wp \in \operatorname{Min} R$. Assim, no presente contexto em que A é um anel de polinômios e $J \subset A$ é um ideal, tem-se que A/J é eqüidimensional se todos os primos mínimos de J têm a mesma altura.

Proposição 3.9 *Sejam $I \subseteq J \subset A_+^2$ ideais homogêneos tais que* $\mathrm{Der}_k(A/I, A/J)$ *é Cohen-Macaulay. Então A/J é eqüidimensional.*

Demonstração. Se $\mathcal{D} = \mathrm{Der}_k(A/I, A/J)$ é Cohen-Macaulay então prof $\mathcal{D} = \dim A/P$, para todo $P \in \mathrm{Ass}_A\mathcal{D}$ (*cf.* [3, Theorem 2.1.2(a)]). Mas vimos na Proposição 3.4 que $\mathrm{Min}\, A/J \subseteq \mathrm{Ass}\,\mathcal{D}$, logo A/J é eqüidimensional. □

Questão 3.10 Se R é uma álgebra reduzida finitamente gerada sobre um corpo k de característica zero tal que o módulo $\mathrm{Der}_k(R)$ é Cohen-Macaulay, podemos afirmar que R é anel Cohen-Macaulay? (O autor desta tese acredita que sim...)

3.2.3 Obstruções à Cohen-Macaulicidade (Parte II)

Se $\{\mathbf{f}\} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ é um conjunto de geradores de um ideal $I \subset A$, podemos considerar os ideais gerados por subdeterminantes (de várias ordens) da matriz jacobiana $\theta = \Theta(\mathbf{f}) \mathrm{mod}\, I$, deliberadamente confundida com o homomorfismo de módulos livres $(A/I)^n \to (A/I)^m$ naturalmente associado. Trata-se dos ideais de Fitting

$$I_i(\theta) = \mathfrak{F}_{m-i}(\mathrm{Coker}\ \theta), \quad 1 \leq i \leq m.$$

O *ideal jacobiano* da k-álgebra finitamente gerada $R = A/I$ é definido por $\mathrm{Jac}(R) = I_g(\theta) \subset R$, onde g é a codimensão de I. Sua importância maior reside no fato de que este é o ideal do lugar de singularidades da variedade algébrica associada a I; em particular, sua codimensão determina as condições de regularidade R_i eventualmente satisfeitas por R. Veremos, de início, a título de motivação à proposição seguinte, que a propriedade de R ser uma interseção completa se traduz pela existência de um elemento regular no 0-ésimo ideal de Fitting $I_m(\theta) \subset R$. Serão úteis os seguintes fatos:

(1) Se R é um anel noetheriano e $\phi\colon R^m \to R^n$ é um homomorfismo de módulos livres tal que o ideal $I_m(\phi)$ (considerando-se ϕ como uma matriz da maneira usual) contém algum não-divisor-de-zero, então ϕ é injetor (*cf.* [4, Proposition 2.9] para uma formulação mais geral);

(2) Se k é perfeito e $I \subset A_+^2$ é radical homogêneo tal que o módulo de diferenciais $\Omega_k(A/I)$ tem dimensão homológica finita, então I é gerado por uma seqüência regular (esta é a resposta afirmativa, no caso graduado, a uma tradicional conjectura de W. Vasconcelos).

Lema 3.11 (k *perfeito*) *Se $I \subset A_+^2$ é radical homogêneo, então A/I é uma interseção completa se e somente se* grade $I_m(\theta) > 0$ (*em cujo caso* $\mathrm{Jac}(A/I)$ *contém algum não-divisor-de-zero*).

Demonstração. Se $R = A/I$ é uma interseção completa reduzida, então $m = g = \mathrm{alt}\ I$ e seu módulo de diferenciais admite resolução livre finita

$$0 \to R^g \xrightarrow{\theta^*} R^n \to \Omega_k(R) \to 0.$$

Assim, sendo neste caso $g =$ posto θ, o critério de aciclicidade de Buchsbaum-Eisenbud (*cf.* [5]) se aplica e fornece grade $I_g(\theta) \geq 1$.

Inversamente, se o ideal $I_m(\theta)$ contém algum elemento regular, então aplicamos o fato (1) acima com $\phi = \theta^*$ e obtemos que o homomorfismo definido por θ^* é injetor, ou seja, $\mathrm{dh}_R\Omega_k(R) = 1 < \infty$. O fato (2) garante, então, o desejado. □

Investigaremos agora como a hipótese de Cohen-Macaulicidade do módulo de derivações se reflete na codimensão do ideal $I_m(\theta)$.

Proposição 3.12 *Seja* $I = (f_1, \ldots, f_m) \subset A$ *um ideal Cohen-Macaulay tal que o módulo* $\mathrm{Der}_k(A/I)$ *é Cohen-Macaulay. Então* $\mathrm{alt}\ I_m(\theta) \leq 2$*, valendo igualdade se (e somente se) o anel* A/I *é uma interseção completa normal (neste caso,* $\mathrm{alt}\ \mathrm{Jac}(A/I) = 2$*).*

Demonstração. Claramente podemos substituir A/I por um anel R que é uma localização de A/I em um de seus ideais maximais. Consideremos a seqüência exata de R-módulos

$$0 \to \mathrm{Der}_k(R) \to R^n \xrightarrow{\theta} R^m \to \mathrm{Coker}\ \theta \to 0.$$

Sendo R Cohen-Macaulay, temos que $\mathcal{D} = \mathrm{Der}_k(R)$ é Cohen-Macaulay se e somente se $\mathrm{prof}\ \mathcal{C} \geq d - 2$, onde $\mathcal{C} = \mathrm{Coker}\ \theta$ e $d = \dim R$. Portanto, usando que os R-ideais $0 \colon \mathcal{C}$ e $\mathfrak{F}_0(\mathcal{C}) = I_m(\theta) = I'$ possuem o mesmo radical (logo mesma altura), e assumindo que $\mathcal{D}$ é Cohen-Macaulay, podemos escrever $d - 2 \leq \mathrm{prof}\ \mathcal{C} \leq \dim \mathcal{C} = \dim R/0 \colon \mathcal{C} = \dim R/I' = d - \mathrm{alt}\ I'$, donde $\mathrm{alt}\ I' \leq 2$.

Se $R = A/I$ é uma interseção completa normal, então, sendo $I_m(\theta) = I_g(\theta) = \mathrm{Jac}(R)$ e denotando este ideal por J, tem-se por um lado $\mathrm{alt}\ J \geq 2$ (já que R satisfaz a propriedade R_1), e por outro, aplicando o que provamos acima, $\mathrm{alt}\ J \leq 2$. □

Corolário 3.13 *Seja* $I = (f_1, \ldots, f_m) \subset A$ *um ideal Cohen-Macaulay tal que o anel* $A/(I, I_m(\Theta))$ *é 0-dimensional. Então o módulo* $\mathrm{Der}_k(A/I)$ *é Cohen-Macaulay se e somente se* $\dim A/I \leq 2$*.*

Demonstração. Sabemos que se A/I é Cohen-Macaulay de dimensão $d \leq 2$, então $\mathrm{Der}_k(A/I)$ é Cohen-Macaulay. Inversamente, suponhamos que $\mathrm{Der}_k(A/I)$ é um módulo Cohen-Macaulay e denotemos $S = A/(I, I_m(\Theta))$. A demonstração da proposição fornece $\dim S = \dim R/I' \geq d - 2$; logo, se S é artiniano, tem-se necessariamente $d \leq 2$. □

Observação 3.14 Claramente, o corolário acima se aplica à classe das interseções completas homogêneas com singularidade isolada.

3.2.4 Profundidade no caso de hipersuperfícies

No caso de uma hipersuperfície (absoluta, ou relativa a um ideal Cohen-Macaulay), é possível determinar explicitamente a profundidade do módulo de derivações correspondente. Uma conseqüência imediata será um critério de Cohen-Macaulicidade neste caso.

Proposição 3.15 *Seja* $f \in J \subset A_+$ *um polinômio homogêneo, onde* J *é um ideal homogêneo Cohen-Macaulay. Então, denotando* $r = \mathrm{prof}\ A/(I_f, J)$ *e* $d = \dim A/J$ *, tem-se*

$$\mathrm{prof}\ \mathrm{Der}_k(A/(f), A/J) = \begin{cases} r + 2 & , \ \textit{se} \ \ r < d - 2 \\ d & , \ \textit{se} \ \ r \geq d - 2 \end{cases}$$

Demonstração. Neste caso temos $\mathrm{Im}\ \theta = (I_f, J)/J$, e assim, denotando este módulo por T, e $\mathcal{D} = \mathrm{Der}_k(A/(f), A/J)$, obtemos uma seqüência exata curta

$$0 \to \mathcal{D} \to (A/J)^n \to T \to 0,$$

que fornece prof $\mathcal{D} = $ prof $T + 1$ se prof $T < d$, e prof $\mathcal{D} = d$ se prof $T = d$. Por outro lado, denotando $N = A/(I_f, J)$ e estudando a seqüência exata

$$0 \to T \to A/J \to N \to 0,$$

segue que prof $T = r + 1$ se $r < d$, e prof $T = d$ se $r = d$. Com isto, podemos constatar o caso $r \geq d - 2$ considerando 3 subcasos:

(1) $r = d \Rightarrow$ prof $T = d \Rightarrow$ prof $\mathcal{D} = d$;

(2) $r = d - 1 < d \Rightarrow$ prof $T = r + 1 = (d - 1) + 1 = d \Rightarrow$ prof $\mathcal{D} = d$;

(3) $r = d - 2 < d \Rightarrow$ prof $T = r + 1 = (d - 2) + 1 = d - 1 < d \Rightarrow$ prof $\mathcal{D} = $ prof $T + 1 = (d - 1) + 1 = d$.

Suponhamos, finalmente, que $r < d - 2 < d$. Então prof $T = r + 1 < d - 1 < d \Rightarrow$ prof $\mathcal{D} = $ prof $T + 1 = r + 2$. □

Corolário 3.16 *Nas condições da proposição, são equivalentes:*

(i) $\mathrm{Der}_k(A/(f), A/J)$ *é Cohen-Macaulay;*

(ii) $r \geq d - 2$*;*

(iii) prof $\mathrm{Der}_{f,J}(A) \geq d$.

Demonstração. A equivalência entre (i) e (ii) decorre automaticamente da proposição acima; entre (i) e (iii), é aplicação imediata do critério dado no Corolário 3.7. □

Corolário 3.17 *Seja $f \in A_+$ um polinômio homogêneo.*

(i) $\mathrm{Der}_k(A/(f))$ *é Cohen-Macaulay se e somente se* prof $A/I_f \geq n - 3$*;*

(ii) *Se $n \leq 3$ então* $\mathrm{Der}_k(A/(f))$ *é Cohen-Macaulay;*

(iii) *Se $n = 4$ então* $\mathrm{Der}_k(A/(f))$ *é Cohen-Macaulay se e somente se* $A_+ \notin \mathrm{Ass}\ A/I_f$*;*

(iv) *Se f é uma singularidade isolada então* $\mathrm{Der}_k(A/(f))$ *é Cohen-Macaulay se e somente se $n \leq 3$.*

Demonstração. (i) Se $J = (f)$ tem-se $r = $ prof A/I_f e $d = n - 1$, e portanto o corolário anterior fornece que $\mathrm{Der}_k(A/(f))$ é Cohen-Macaulay se e somente se prof $A/I_f \geq (n - 1) - 2 = n - 3$.

(ii) Por (i), esta afirmação é óbvia.

(iii) Neste caso $\mathrm{Der}_k(A/(f))$ é Cohen-Macaulay se e somente se A/I_f tem profundidade positiva, ou de maneira equivalente, $A_+ \notin \mathrm{Ass}\ A/I_f$.

(iv) Se f é uma singularidade isolada então prof $A/I_f = 0$, logo $\mathrm{Der}_k(A/(f))$ é Cohen-Macaulay se e somente se $n \leq 3$. □

Observamos que, por Auslander-Buchsbaum, o critério do item (i) pode ser expresso em termos da condição dh $I_f \leq 2$. Daremos como exemplo uma hipersuperfície determinantal.

Exemplo 3.18 Consideremos em $A = \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_6]$ o polinômio homogêneo

$$f = \det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_2 & X_4 & X_5 \\ X_3 & X_5 & X_6 \end{pmatrix} = X_1X_4X_6 - X_2^2X_6 - X_1X_5^2 + 2X_2X_3X_5 - X_3^2X_4.$$

O anel jacobiano de f possui resolução livre mínima do tipo

$$0 \to A^3 \to A^8 \to A^6 \to A \to A/I_f \to 0$$

e assim prof $A/I_f = 6 - 3 = 3$. Logo $r = 3 = d - 2 \Rightarrow$ prof $\mathrm{Der}_k(A/(f)) = 5$ (Cohen-Macaulay).

Observação 3.19 Não é verdade que se I é um ideal de uma k-álgebra R tal que o módulo $\mathrm{Der}_k(R/I)$ é Cohen-Macaulay, então $\mathrm{Der}_k(R)$ é Cohen-Macaulay. Isto pode falhar, mesmo se R e R/I são domínios homogêneos Cohen-Macaulay. Como exemplo, consideremos os polinômios $f = XW - YZ$, $g = Z^2 - YW$, $h = Y^2 - XZ$ em $A = k[X, Y, Z, W]$, e o ideal $I = (f, g, h)/(f) \subset R = A/(f)$. O anel R/I é isomorfo ao domínio Cohen-Macaulay 2-dimensional $A/(f, g, h)$ e assim $\mathrm{Der}_k(R/I)$ é Cohen-Macaulay. No entanto, $I_f = A_+ \Rightarrow \mathrm{Der}_k(R)$ não é Cohen-Macaulay (Corolário 3.17(iii)).

3.3 Decomposição primária do módulo de derivações

Fixemos mais uma vez um anel de polinômios $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ sobre um corpo k de característica zero.

Teorema 3.20 *Seja $I \subset A$ um ideal radical com decomposição primária $I = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r$. Então*

$$\mathrm{Der}_k(A/I) \;=\; \mathrm{Der}_{\mathfrak{p}_1}(A)/I^{\oplus n} \;\cap\; \ldots \;\cap\; \mathrm{Der}_{\mathfrak{p}_r}(A)/I^{\oplus n}$$

é uma decomposição primária, em $(A/I)^n$, do módulo de derivações $\mathrm{Der}_k(A/I)$.

Demonstração. Já sabemos que $\mathrm{Der}_I(A) = \cap_i \mathrm{Der}_{\mathfrak{p}_i}(A)$ é uma decomposição primária de $\mathrm{Der}_I(A)$ em A^n (*cf.* Proposição 2.68). Assim, por redução módulo $I^{\oplus n} \simeq I\mathrm{Der}_k(A)$, obtemos que $\mathrm{Der}_k(A/I)$ se expressa como interseção dos $\mathrm{Der}_{\mathfrak{p}_i}(A)/I^{\oplus n}$ e esta decomposição é primária em $(A/I)^n$ pois, para cada i, tem-se

$$\mathrm{Ass}\,(A/I)^n/(\mathrm{Der}_{\mathfrak{p}_i}(A)/I^{\oplus n}) = \mathrm{Ass}\,A^n/\mathrm{Der}_{\mathfrak{p}_i}(A) = \{\mathfrak{p}_i\}.$$

□

3.4 Multiplicidade do módulo de derivações

Nesta subseção apresentaremos cotas para a multiplicidade (no contexto graduado *standard*) do módulo de derivações de álgebras finitamente geradas, e em casos especiais calcularemos seu valor exato. A definição e propriedades que utilizaremos podem ser encontradas, por exemplo, em [9].

Naturalmente, partiremos do caso zero-dimensional, onde o problema consiste em estimar comprimento – o que, neste caso, requer "confronto" com módulos conhecidos. Se $I \subset A = k[X_1, \ldots, X_n]$ (k corpo) é um ideal homogêneo A_+-primário, denotaremos por s_i o menor inteiro tal que $X_i^{s_i} \in I$, para $i = 1, \ldots, n$.

Proposição 3.21 *Seja* $I = (f_1, \ldots, f_m) \subset A$ *um ideal.*

(i) *Considerando o ideal* $\mathfrak{c}_i = (\partial f_1/\partial X_i, \ldots, \partial f_m/\partial X_i) \subset A$ *(gerado pelas entradas da i-ésima coluna da matriz jacobiana dos* f_i*'s), tem-se*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} (I \colon \mathfrak{c}_i) \, \frac{\partial}{\partial X_i} \;\subset\; \mathrm{Der}_I(A);$$

(ii) *Se* I *é homogêneo* A_+*-primário, com* s_i *não divisível por* car k*,* $\forall i$*, então*

$$\mathrm{Der}_I(A) \;\subset\; \bigoplus_{i=1}^{n} I \colon (X_i^{s_i - 1}) \, \frac{\partial}{\partial X_i}.$$

Demonstração. (i) Seja $(q_1, \ldots, q_n) \in \oplus_i (I \colon \mathfrak{c}_i)$, isto é, para cada i tem-se $q_i \partial f_j/\partial X_i \in I, \forall j$. Logo $\sum_i q_i \partial f_j/\partial X_i \in I, \forall j \;\Rightarrow\; \sum_i q_i \partial/\partial X_i \in \mathrm{Der}_I(A)$.

(ii) Seja $\delta = \sum_i q_i \partial/\partial X_i \in \mathrm{Der}_I(A)$. Mas $X_i^{s_i} \in I, \forall i \Rightarrow s_i X_i^{s_i - 1} \delta(X_i) \in I, \forall i \Rightarrow s_i X_i^{s_i - 1} q_i \in I, \forall i \Rightarrow q_i \in I \colon (X_i^{s_i - 1}), \forall i$. □

Denotaremos a função-comprimento simplesmente por $\lambda(-)$, estando subentendido o anel de base.

Proposição 3.22 *Seja* $I \subset A$ *um ideal homogêneo* A_+*-primário, com* s_i *não divisível por* car k*,* $\forall i$*. Então, considerando os números* $r = \dim_k A/I$*,* $a_i = \dim_k A/(I \colon \mathfrak{c}_i)$ *e* $b_i = \dim_k A/(I \colon (X_i^{s_i - 1}))$*, tem-se*

$$nr - \sum_{i=1}^{n} a_i \;\leq\; \lambda(\mathrm{Der}_k(A/I)) \;\leq\; nr - \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Além disso, se existe t *tal que* $X_t \notin I \colon \mathfrak{c}_t$*, então* $\lambda(\mathrm{Der}_k(A/I)) \geq nr - \sum_{i=1}^{n} a_i + 1$*.*

Demonstração. Usando as inclusões obtidas na proposição anterior e o fato de que $\mathcal{D} = \mathrm{Der}_k(A/I) = \mathrm{Der}_I(A)/I^{\oplus n}$, obtemos

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \frac{I \colon \mathfrak{c}_i}{I} \, \frac{\partial}{\partial X_i} \;\subset\; \mathcal{D} \;\subset\; \bigoplus_{i=1}^{n} \frac{I \colon (X_i^{s_i - 1})}{I} \, \frac{\partial}{\partial X_i},$$

e assim $\sum_{i=1}^{n} \lambda\left(\frac{I \colon \mathfrak{c}_i}{I}\right) \leq \lambda(\mathcal{D}) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda\left(\frac{I \colon (X_i^{s_i - 1})}{I}\right)$. Da seqüência exata

$$0 \to (I \colon \mathfrak{c}_i)/I \to A/I \to A/(I \colon \mathfrak{c}_i) \to 0$$

segue que $\lambda((I \colon \mathfrak{c}_i)/I) = \lambda(A/I) - \lambda(A/(I \colon \mathfrak{c}_i)) = r - a_i$. De modo totalmente análogo, tem-se $\lambda((I \colon (X_i^{s_i - 1}))/I) = \lambda(A/I) - \lambda(A/(I \colon (X_i^{s_i - 1}))) = r - b_i$. Portanto $nr - \sum_i a_i = \sum_i (r - a_i) \leq \lambda(\mathcal{D}) \leq \sum_i (r - b_i) = nr - \sum_i b_i$.

Para a segunda afirmação usamos a derivação de Euler: se existe índice t tal que $X_t \notin I \colon \mathfrak{c}_t$ então $\epsilon \notin \oplus_i (I \colon \mathfrak{c}_i) \Rightarrow \overline{\epsilon} \in \mathcal{D} \setminus \oplus_i ((I \colon \mathfrak{c}_i)/I)$, isto é, a inclusão esquerda obtida acima é estrita e portanto $\sum_i (r - a_i) < \lambda(\mathcal{D})$. □

Observação 3.23 Se existe t tal que $X_t \notin I\colon \mathfrak{c}_t$, o número

$$\mathfrak{d}(I) = (nr - \sum_{i=1}^{n} b_i) - (nr - \sum_{i=1}^{n} a_i + 1) = (\sum_{i=1}^{n} a_i) - (\sum_{i=1}^{n} b_i) - 1$$

mede o quão próximo (ou distante) o módulo de derivações da k-álgebra artiniana A/I está de uma decomposição em soma direta de n ideais. Ainda não se sabe se isto pode ocorrer, exceto quando I é um ideal monomial (de dimensão arbitrária); neste caso, $\mathrm{Der}_k(A/I) \simeq \oplus_i (I\colon (I\colon (X_i)))/I$ (*cf.* [2]). Experimentos conduzem à suspeita de que a hipótese monomial é necessária. Poderíamos conjecturar, portanto, que se $I \subsetneq A_+$ (car $k = 0$) é um ideal homogêneo tal que $\mathrm{Der}_k(A/I)$ é decomponível, neste sentido, então I pode ser gerado por monômios. Ao menos, podemos concluir que se existe j tal que $a_j = b_j$, então o ideal $(I\colon \mathfrak{c}_j)/I$ é um somando direto, e que se $a_i > b_i, \forall i$, então $\mathfrak{d}(I) \geq n - 1$, com igualdade se e somente se $a_i = b_i + 1, \forall i$ (vide exemplo abaixo).

Exemplo 3.24 Seja $I = (X^2, Y^4, Z^3, XY^3 - Y^2Z^2) \subset A = k[X, Y, Z]$ (car $k \neq 2, 3$). Neste caso tem-se $r = 19$ e $(s_1, s_2, s_3) = (2, 4, 3)$, $(a_1, a_2, a_3) = (10, 4, 6)$, $(b_1, b_2, b_3) = (9, 3, 5)$. Logo $(nr - \sum_i a_i) = 3 \cdot 19 - 20 = 37$ e $(nr - \sum_i b_i) = 3 \cdot 19 - 17 = 40$. Além disso, sendo $X\mathfrak{c}_1 = (X^2, XY^3) \nsubseteq I$, concluímos que

$$38 \leq \lambda(\mathrm{Der}_k(A/I)) \leq 40$$

e $\mathfrak{d}(I) = 2 = n - 1$.

Se A/I é graduado (de dimensão arbitrária) e M é um A/I-módulo finitamente gerado, podemos considerar a multiplicidade de Hilbert-Samuel $e(M) = e(\mathfrak{m}, M)$ de M com relação a $\mathfrak{m} = A_+/I$ (o maximal homogêneo de A/I).

Proposição 3.25 *Se $I \subset A$ é um ideal homogêneo puro, genericamente interseção completa, então $e(\mathrm{Der}_k(A/I)) = e(A/I) \cdot \dim A/I$.*

Demonstração. Imediato pois neste caso, como já vimos, o A/I-módulo $\mathrm{Der}_k(A/I)$ tem posto bem-definido, necessariamente igual à dimensão de Krull de A/I (*cf.* Seção 1.2). $\square$

Proposição 3.26 (car $k = 0$) *Seja $I \subset A$ um ideal tal que $I\colon (X_i)$ é radical, $\forall i$ (e.g., I radical). Para $i = 1, \ldots, n$, consideremos os ideais $I_i = I\colon (I\colon (X_i))^{(2)}$ (a segunda potência simbólica está sendo tomada sobre $I\colon (X_i)$). Então*

$$\mathrm{Der}_I(A) \; \subset \; \bigoplus_{i=1}^{n} I_i \frac{\partial}{\partial X_i}.$$

Demonstração. Seja $\delta = \sum_i q_i \partial/\partial X_i \in \mathrm{Der}_I(A)$. Queremos mostrar que $q_i g_i \in I$, se $g_i \in (I\colon (X_i))^{(2)}$. Temos $X_i g_i \in I$ e $X_i \partial g_i/\partial X_j \in I, \forall j$, e assim $\delta(X_i g_i) \in I \Rightarrow X_i \delta(g_i) + q_i g_i \in I$. Mas $X_i \delta(g_i) = \sum_j q_j (X_i \partial g_i/\partial X_j) \in I$, logo $q_i g_i \in I$. $\square$

Proposição 3.27 (car $k = 0$) *Seja $I \subset A$ um ideal homogêneo tal que $I\colon (X_i)$ é radical, $\forall i$. Consideremos os ideais $I_1, \ldots, I_n$ como na proposição anterior, e as multiplicidades $e = e(A/I)$, $e_i = e(A/I_i)$ e $c_i = e(A/(I\colon \mathfrak{c}_i))$, $i = 1, \ldots, n$. Então tem-se*

$$ne - \sum_{i=1}^{n} c_i \;\leq\; e(\mathrm{Der}_k(A/I)) \;\leq\; ne - \sum_{i=1}^{n} e_i.$$

Se além disso alt $(I\colon \mathfrak{c}_i)\colon I_i >$ alt I, $\forall i$, *então estas desigualdades são de fato igualdades.*

Demonstração. Denotemos $\mathcal{D} = \mathrm{Der}_k(A/I)$. Da inclusão obtida na proposição acima decorre $e(\mathcal{D}) \leq \sum_{i=1}^n e(I_i/I)$. Utilizando a seqüência exata

$$0 \to I_i/I \to A/I \to A/I_i \to 0,$$

podemos escrever $e(I_i/I) = e - e_i$ e assim $e(\mathcal{D}) \leq \sum_i (e - e_i) = ne - \sum_i e_i$. De modo totalmente análogo, usando a Proposição 3.21(i), obtemos $\sum_{i=1}^n e((I\colon \mathfrak{c}_i)/I) \leq e(\mathcal{D})$ e $e((I\colon \mathfrak{c}_i)/I) = e - c_i$, donde $e(\mathcal{D}) \geq ne - \sum_i c_i$. □

Teorema 3.28 *Sejam $I \subseteq J \subset A$ ideais homogêneos tais que o ideal $I\colon J$ contém algum polinômio A/J-regular e tem altura estritamente maior do que a de I. Então*

$$e(\mathrm{Der}_k(A/I)) = e(\mathrm{Der}_k(A/J))$$

Demonstração. A condição de que a $I\colon J$-profundidade de A/J é positiva acarreta, como já sabemos, uma inclusão $\mathrm{Der}_I(A) \subseteq \mathrm{Der}_J(A)$, cujo conúcleo denotaremos por C. Por hipótese $\dim\, A/(I\colon J) < d = \dim\, A/I$, e como $I \subset I\colon J \subseteq \mathrm{Der}_I(A)\colon \mathrm{Der}_J(A) = 0\colon C$, obtemos $\dim\, C = \dim\, A/(0\colon C) < d$, donde $e(C) = 0$. A seqüência exata curta

$$0 \to \mathrm{Der}_I(A) \to \mathrm{Der}_J(A) \to C \to 0$$

induz a seqüência de A/I-módulos

$$0 \to \mathrm{Der}_k(A/I) \to \mathrm{Der}_J(A)/I^{\oplus n} \to C \to 0,$$

através da qual obtém-se $e(\mathrm{Der}_k(A/I)) = e(\mathrm{Der}_J(A)/I^{\oplus n})$, já que $e(C) = 0$. Por outro lado, da seqüência

$$0 \to (J/I)^{\oplus n} \to \mathrm{Der}_J(A)/I^{\oplus n} \to \mathrm{Der}_k(A/J) \to 0,$$

segue $e(\mathrm{Der}_J(A)/I^{\oplus n}) = e(\mathrm{Der}_k(A/J)) + ne(J/I)$. Resta-nos então verificar que $e(J/I) = 0$. Mas isto decorre da hipótese de que $\mathrm{alt}\ I\colon J > \mathrm{alt}\ I$, já que assim $\dim\, J/I = \dim\, A/(I\colon J) < \dim\, A/I \Rightarrow e(J/I) = 0$. □

Corolário 3.29 *Seja $I \subset A_+$ ideal homogêneo com a propriedade de que existe subconjunto de índices $\{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{1, \ldots, n\}$ tal que o ideal primo $P = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_s})$ contém I e satisfaz $I\colon P \nsubseteq P$, bem como $\mathrm{alt}\ I\colon P > \mathrm{alt}\ I$. Sejam $d = \dim\, A/I$, $e = e(A/I)$. Então a multiplicidade do módulo de derivações de A/I é dada por $e(\mathrm{Der}_k(A/I)) = e \cdot d$.*

Demonstração. O teorema acima, com $J = P$, fornece $e(\mathrm{Der}_k(A/I)) = e(\mathrm{Der}_k(A/P))$. Por outro lado, supondo por simplicidade que $\{i_1, \ldots, i_s\} = \{1, \ldots, s\}$, é fácil ver que

$$\mathrm{Der}_P(A) = \bigoplus_{i=1}^{s} P\frac{\partial}{\partial X_i} \oplus \bigoplus_{i=s+1}^{n} A\frac{\partial}{\partial X_i} \simeq P^{\oplus s} \oplus A^{n-s} \Rightarrow \mathrm{Der}_k(A/P) \simeq (A/P)^{\oplus(n-s)},$$

donde $e(\mathrm{Der}_k(A/I)) = (n-s)e(A/P)$. Sendo $\dim\, P/I = \dim\, A/(I\colon P) < \dim\, A/I \Rightarrow e(P/I) = 0$, tem-se $e(A/P) = e$ (em particular, $g = \mathrm{alt}\ I = \mathrm{alt}\ P = s$). Assim, $e(\mathrm{Der}_k(A/I)) = (n-g)e = de$. □

3.5 Álgebras de *blowup* do módulo de derivações de uma hipersuperfície

Denotando como de costume $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ (k corpo), descreveremos as álgebras de explosão do módulo de derivações da hipersuperfície associada a um polinômio euleriano $f \in A$. Antes, faz-se necessário entender o "mergulho" de $f\mathrm{Der}_k(A)$ no módulo de Saito de f induzido pela decomposição $\mathrm{Der}_f(A) = \mathcal{Z}(f) \oplus A\varepsilon_f \subset A^n = \oplus_i A\mathrm{e}_i$ (*cf.* Proposição 2.34). Precisamos então encontrar vetores $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n \in \mathcal{Z}(f)$ e polinômos $f_1, \ldots, f_n \in A$ tais que $f\mathrm{e}_i = \vartheta_i + f_i\varepsilon_f, \forall i$.

Proposição 3.30 *Seja $f = \sum_i h_i \partial f/\partial X_i \in I_f \subset A$ um polinômio euleriano. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, consideremos o polinômio $F_i = \sum_{s \neq i} h_s \partial f/\partial X_s$ e o vetor*

$$\vartheta_i \ = \ \left(-h_1\frac{\partial f}{\partial X_i}, \ldots, -h_{i-1}\frac{\partial f}{\partial X_i},\ F_i\ , -h_{i+1}\frac{\partial f}{\partial X_i}, \ldots, -h_n\frac{\partial f}{\partial X_i}\right).$$

Então $\vartheta_i \in \mathcal{Z}(f)$, e

$$f\mathrm{e}_i = \vartheta_i + \frac{\partial f}{\partial X_i}\varepsilon_f.$$

Demonstração. O truque consiste em escrever

$$(f, 0, \ldots, 0) = (\underbrace{h_2\frac{\partial f}{\partial X_2} + \ldots + h_n\frac{\partial f}{\partial X_n}}_{F_1}, -h_2\frac{\partial f}{\partial X_1}, \ldots, -h_n\frac{\partial f}{\partial X_1})\ +\ \frac{\partial f}{\partial X_1}(h_1, \ldots, h_n),$$

ou seja, $f\mathrm{e}_1 = \vartheta_1 + \frac{\partial f}{\partial X_1}\varepsilon_f$. Além disso, $\vartheta_1 \in \mathcal{Z}(f)$ pois

$$\left(h_2\frac{\partial f}{\partial X_2} + \ldots + h_n\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)\frac{\partial f}{\partial X_1} - h_2\frac{\partial f}{\partial X_1}\frac{\partial f}{\partial X_2} - \ldots - h_n\frac{\partial f}{\partial X_1}\frac{\partial f}{\partial X_n} = 0.$$

De maneira completamente análoga, mostra-se que $f\mathrm{e}_i = \vartheta_i + \frac{\partial f}{\partial X_i}\varepsilon_f$ e $\vartheta_i \in \mathcal{Z}(f)$ se $i \in \{2, \ldots, n\}$. $\square$

De maneira geral, se $N = \sum_{i=1}^r Rn_i \subset M = \sum_{j=1}^s Rm_j$ é uma inclusão de módulos finitamente gerados sobre um anel R e se M tem álgebra simétrica $\mathcal{S}_R(M) = R[T_1, \ldots, T_s]/\mathcal{L}$, então induz-se um ideal de "formas lineares" $N(1) = (n_1(1), \ldots, n_r(1)) \subset \mathcal{S}_R(M)$ de maneira natural: escrevendo combinações R-lineares $n_i = \sum_{j=1}^s b_{ij}m_j,\ i = 1, \ldots, r$, associa-se o elemento $n_i(1) = \sum_{j=1}^s b_{ij}t_j$, onde t_j denota a classe residual da indeterminada T_j módulo $\mathcal{L}$. Além disso, da seqüência exata

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

resulta uma identificação de álgebras $S_R(M/N) \simeq \mathcal{S}_R(M)/N(1)$.

Aplicaremos isto na demosntração do teorema abaixo. Uma vez obtido o submódulo $\sum_{i=1}^n A\vartheta_i \subset \mathcal{Z}(f) = \sum_{j=1}^q Av_j$, onde, como antes, os v_j's são os vetores-coluna da matriz φ_f que apresenta o ideal gradiente I_f, escolheremos combinações A-lineares

$$\vartheta_i = \sum_{j=1}^q a_{ij}v_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Consideraremos também o ideal $\mathcal{L}_f$ que define a álgebra simétrica de $\mathrm{Der}_f(A)$, como no Corolário 2.40(iii).

Teorema 3.31 *Seja $f \in A$ um polinômio euleriano.*

(i) *Se $T_1, \ldots, T_q, U$ são indeterminadas sobre A, a álgebra simétrica do $A/(f)$-módulo das k-derivações da hipersuperfície $A/(f)$ pode ser descrita como*

$$\mathcal{S}_{A/(f)}\left(\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{(f)}\right)\right) = \frac{A[T_1, \ldots, T_q, U]}{(f, \mathcal{L}_f, \mathcal{H}_f)}, \quad \mathcal{H}_f = (H_1, \ldots, H_n),$$

onde $H_i = \sum_{j=1}^q a_{ij}T_j + \frac{\partial f}{\partial X_i}U, \ \ i = 1, \ldots, n;$

(ii) *A álgebra de Rees do $A/(f)$-módulo $\mathrm{Der}_k(A/(f))$ é dada por*

$$\mathcal{R}_{A/(f)}\left(\mathrm{Der}_k\left(\frac{A}{(f)}\right)\right) = \frac{A[T_1, \ldots, T_q, U]}{(f, \mathcal{L}_f, \mathcal{H}_f) : {I_f}^{\infty}}.$$

Demonstração. (i) Denotemos $N = f\mathrm{Der}_k(A) = \sum_i Af\mathrm{e}_i$ e $\mathcal{D} = \mathrm{Der}_k(A/(f))$. Da seqüência exata

$$0 \to N \to \mathrm{Der}_f(A) \to \mathcal{D} \to 0$$

decorre que $\mathcal{S}_A(\mathcal{D}) = S/N(1)$, onde $S = \mathcal{S}_A(\mathrm{Der}_f(A)) = A[T_1, \ldots, T_q, U]/\mathcal{L}_f = A'/\mathcal{L}_f$. Temos $N(1) = (\sum_i Af\mathrm{e}_i)(1) = ((f\mathrm{e}_1)(1), \ldots, (f\mathrm{e}_n)(1)) \subset S$. Aplicando a proposição acima obtemos expressões $f\mathrm{e}_i = \vartheta_i + \frac{\partial f}{\partial X_i}\varepsilon_f = \sum_{j=1}^q a_{ij}v_j + \frac{\partial f}{\partial X_i}\varepsilon_f$ e assim $(f\mathrm{e}_i)(1) = \sum_{j=1}^q a_{ij}t_j + \frac{\partial f}{\partial X_i}u$, onde $t_1, \ldots, t_q, u$ denotam as classes residuais de $T_1, \ldots, T_q, U$ módulo $\mathcal{L}_f$. A maneira como está definido o ideal $\mathcal{H}_f \subset A'$ permite escrever $N(1) = (\mathcal{L}_f, \mathcal{H}_f)/\mathcal{L}_f \subset A'/\mathcal{L}_f$, portanto $\mathcal{S}_A(\mathcal{D}) = S/N(1) = (A'/\mathcal{L}_f)/((\mathcal{L}_f, \mathcal{H}_f)/\mathcal{L}_f) = A'/(\mathcal{L}_f, \mathcal{H}_f)$. Finalmente,

$$\mathcal{S}_{A/(f)}(\mathcal{D}) = \mathcal{S}_A(\mathcal{D}) \otimes_A A/(f) = A'/(\mathcal{L}_f, \mathcal{H}_f) \otimes_A A/(f) = A'/(f, \mathcal{L}_f, \mathcal{H}_f).$$

(ii) Procederemos de maneira análoga à demonstração do Corolário 2.40(iv). Se $S' = \mathcal{S}_{A/(f)}(\mathcal{D})$, então $R' = \mathcal{R}_{A/(f)}(\mathcal{D}) = S'/\tau$, onde τ é o ideal de $A/(f)$-torção de S', que pode ser expresso em termos de saturação por um ideal conveniente. Para isto, observemos que o módulo de diferenciais $\Omega = \Omega_k(A/(f))$ se apresenta pela matriz-coluna com entradas dadas pelas imagens das $\partial f/\partial X_i$'s em $B = A/(f)$. Logo Ω tem posto $n-1$ e $(n-1)$-ésimo ideal de Fitting $\mathfrak{F}_{n-1}(\Omega) = (I_f, f)/(f) = I_f/(f)$, de modo que, se $\mathfrak{p} \subset B$ é um ideal primo que não contém $I_f/(f)$, então $\Omega_\mathfrak{p}$ é $B_\mathfrak{p}$-livre e conseqüentemente, sendo $\mathcal{D} \simeq \mathrm{Hom}_B(\Omega, B)$, resulta $\mathcal{D}_\mathfrak{p} \simeq B_\mathfrak{p}^{n-1} \Rightarrow S'_\mathfrak{p} \simeq \mathcal{S}_{B_\mathfrak{p}}(B_\mathfrak{p}^{n-1}) \simeq B_\mathfrak{p}[Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$ (Y_i's indeterminadas) $\Rightarrow S'_\mathfrak{p}$ é livre de $B_\mathfrak{p}$-torção. Assim, denotando $\mathcal{J} = (f, \mathcal{L}_f, \mathcal{H}_f)$, tem-se $S' = A'/\mathcal{J}$ e concluímos $\tau = 0 :_{S'} (I_f/(f))^\infty = (\mathcal{J} : {I_f}^\infty)/\mathcal{J} \ \Rightarrow\ R' = S'/\tau = A'/(\mathcal{J} : {I_f}^\infty)$. □

3.6 O módulo de derivações de um anel diferencialmente livre

Seja $A = k[X_1, \ldots, X_n]$, onde k é um corpo.

3.6.1 Resolução livre

O objetivo desta subseção é explicitar uma resolução A-livre para o módulo das k-derivações de um anel diferencialmente livre. Em conseqüência, será obtida a álgebra simétrica deste módulo. Entrarão novamente em cena as expressões

$$f\mathrm{e}_i = \sum_{j=1}^q a_{ij}v_j + \frac{\partial f}{\partial X_i}\varepsilon_f, \quad i = 1, \ldots, n,$$

obtidas na seção anterior para um dado polinômio euleriano $f \in A$. Se f é um divisor livre, como no teorema a seguir, tem-se $q = n - 1$.

Teorema 3.32 *Consideremos um ideal da forma $I = fI' \subset A$, com f divisor livre euleriano, $I' = (f_1, \ldots, f_m)$, $\mathrm{mdc}(f_1, \ldots, f_m) = 1$. Suponhamos que $I_1(\Theta' \cdot \phi_f) \subseteq I'$, onde $\Theta' = \Theta(\mathbf{f})$, e consideremos*

$$0 \to A^{b_s} \xrightarrow{\partial_s} A^{b_{s-1}} \xrightarrow{\partial_{s-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_2} A^{b_1} \xrightarrow{\partial_1} A^m \to I' \to 0,$$

resolução livre do ideal I'. Então

$$0 \to A^{nb_s} \xrightarrow{\partial_s{}^{\oplus n}} \ldots \xrightarrow{\partial_2{}^{\oplus n}} A^{nb_1} \xrightarrow{\partial_1{}^{\oplus n}} A^{mn} \xrightarrow{\Psi_I} A^n \to \mathrm{Der}_k(A/I) \to 0$$

é uma resolução A-livre do módulo de derivações de A/I, onde cada $\partial_i{}^{\oplus n}$ denota a matriz diagonal em blocos associada a ∂_i da maneira natural, e a matriz de apresentação Ψ_I é dada (com respeito às bases canônicas de A^{mn} e A^n) por

$$\Psi_I = \begin{pmatrix} f_1a_{11} & \cdots & f_ma_{11} & \cdots & \cdots & f_1a_{n1} & \cdots & f_ma_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ f_1a_{1,n-1} & \cdots & f_ma_{1,n-1} & \cdots & \cdots & f_1a_{n,n-1} & \cdots & f_ma_{n,n-1} \\ f_1\frac{\partial f}{\partial X_1} & \cdots & f_m\frac{\partial f}{\partial X_1} & \cdots & \cdots & f_1\frac{\partial f}{\partial X_n} & \cdots & f_m\frac{\partial f}{\partial X_n} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Nestas condições, o Corolário 2.55 assegura que $\mathrm{Der}_I(A) = \mathrm{Der}_f(A)$; uma base deste módulo livre é composta pelos vetores-coluna $v_1, \ldots, v_{n-1}$ de φ_f e pela derivação $v_n = \varepsilon_f = (h_1, \ldots, h_n)$, onde $f = \sum_i h_i\partial f/\partial X_i$. Considerando a seqüência

$$0 \to I^{\oplus n} \longrightarrow \mathrm{Der}_I(A) \xrightarrow{p} \mathrm{Der}_k(A/I) \to 0,$$

bem como o isomorfismo $\sigma\colon \mathrm{Der}_I(A) = \oplus_i Av_i \to A^n$, $v_i \mapsto \mathrm{e}_i$, obtemos a seqüência exata curta

$$0 \to I^{\oplus n} \xrightarrow{\sigma|_{I^{\oplus n}}} A^n \xrightarrow{p\circ\sigma^{-1}} \mathrm{Der}_k(A/I) \to 0.$$

Se $\mathfrak{R}$ denota a resolução livre de I' fornecida, que evidentemente também é resolução de $I = fI'$, então

$$\mathfrak{R}^{\oplus n}\colon \quad 0 \to A^{nb_s} \xrightarrow{\partial_s{}^{\oplus n}} \ldots \xrightarrow{\partial_2{}^{\oplus n}} A^{nb_1} \xrightarrow{\partial_1{}^{\oplus n}} A^{mn}$$

é resolução livre de $I^{\oplus n}$. Da "composição" com $\mathfrak{R}^{\oplus n}$ resulta, então, a resolução livre proposta $\mathfrak{R}^{\oplus n} \to A^n \to \mathrm{Der}_k(A/I) \to 0$, e em particular uma apresentação

$$A^{mn} \xrightarrow{\Psi} A^n \to \mathrm{Der}_k(A/I) \to 0.$$

Resta-nos verificar que $\Psi = \Psi_I$. Podemos escrever $\Psi = \sigma|_{I^{\oplus n}} \circ \pi$, onde $\pi\colon A^{mn} \to I^{\oplus n}$ é a projeção natural, que a cada vetor $\mathbf{g} = ((g_{11}, \ldots, g_{1m}), \ldots, (g_{n1}, \ldots, g_{nm})) \in A^{mn}$ associa $\pi(\mathbf{g}) = (\sum_{s=1}^m g_{1s}ff_s)\mathrm{e}_1 + \ldots + (\sum_{s=1}^m g_{ns}ff_s)\mathrm{e}_n = \sum_{s=1}^m g_{1s}f_s(f\mathrm{e}_1) + \ldots + \sum_{s=1}^m g_{ns}f_s(f\mathrm{e}_n)$, ou seja, $\pi(\mathbf{g}) = \sum_{s=1}^m g_{1s}f_s(\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j}v_j + \frac{\partial f}{\partial X_1}v_n) + \ldots + \sum_{s=1}^m g_{ns}f_s(\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}v_j + \frac{\partial f}{\partial X_n}v_n) =$

$(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}(\sum_{s=1}^{m} g_{is}f_s))v_1+\ldots+(\sum_{i=1}^{n} a_{i,n-1}(\sum_{s=1}^{m} g_{is}f_s))v_{n-1}+(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(\sum_{s=1}^{m} g_{is}f_s))v_n$. Finalmente, sendo $\sigma(v_i) = \mathrm{e}_i$, concluímos

$$\Psi(\mathbf{g}) = (f_1a_{11}g_{11} + \ldots + f_ma_{11}g_{1m} + \ldots \ \ldots + f_1a_{n1}g_{n1} + \ldots + f_ma_{n1}g_{nm})\mathrm{e}_1 + \ldots +$$
$$(f_1a_{1,n-1}g_{11} + \ldots + f_ma_{1,n-1}g_{1m} + \ldots \ \ldots + f_1a_{n,n-1}g_{n1} + \ldots + f_ma_{n,n-1}g_{nm})\mathrm{e}_{n-1} +$$
$$(f_1\frac{\partial f}{\partial X_1}g_{11} + \ldots + f_m\frac{\partial f}{\partial X_1}g_{1m} + \ldots \ \ldots + f_1\frac{\partial f}{\partial X_n}g_{n1} + \ldots + f_m\frac{\partial f}{\partial X_n}g_{nm})\mathrm{e}_n = \Psi_I(\mathbf{g}),$$

como queríamos. □

Corolário 3.33 *Seja $I = fI'$ como no teorema. A álgebra simétrica do módulo de derivações de A/I é dada por*

$$\mathcal{S}_{A/I}(\mathrm{Der}_k(A/I)) = \frac{A[T_1, \ldots, T_n]}{(I,\ I_1((T_1 \cdots T_n) \cdot \Psi_I))}.$$

Demonstração. Da apresentação obtida acima segue que a álgebra simétrica do A-módulo $\mathrm{Der}_k(A/I)$ é a A-álgebra $A[T_1, \ldots, T_n]/(I_1((T_1 \cdots T_n) \cdot \Psi_I))$. Tensorizando (sobre A) com A/I, chegamos ao desejado. □

3.6.2 Conjectura Homológica de Zariski-Lipman

A versão tradicional da *Conjectura de Zariski-Lipman* (CZL) afirma que, se R é uma álgebra finitamente gerada sobre um corpo k de característica zero e $\mathfrak{p} \subset R$ é um ideal primo tal que o $R_\mathfrak{p}$-módulo $\mathrm{Der}_k(R_\mathfrak{p})$ é livre, então $R_\mathfrak{p}$ é um anel local regular. Sabe-se que um anel local satisfazendo as hipóteses da conjectura é necessariamente um domínio normal (*cf.*[8]). Além disso, a CZL é verdadeira na maioria dos casos, carecendo de solução, entretanto, para certas interseções completas 2-dimensionais (mesmo algumas bastante simples, *e.g.*, $R = k[X, Y, Z, W]/(f, g)$, com $f, g \in (X, Y, Z, W)$ sem fator comum). O caso graduado merece destaque e foi positivamente estabelecido (em dimensão arbitrária) em [7]: Se $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ (car $k = 0$) é graduado (não necessariamente *standard*) e $I \subset A_+^2$ é ideal homogêneo tal que o $R = A/I$-módulo $\mathrm{Der}_k(R)$ é livre, então $I = (0)$, isto é, R é um anel de polinômios (logo regular).

A CZL admite uma versão homológica, independentemente proposta por J. Herzog e W. Vasconcelos: Se R é uma álgebra finitamente gerada sobre um corpo k de característica zero tal que $\mathrm{Der}_k(R)$ admite uma resolução projetiva finita como R-módulo, então $\mathrm{Der}_k(R)$ é um R-módulo projetivo (isto é, localmente livre). Aqui, queremos registrar que a CZL homológica também é válida para a classe dos anéis diferencialmente livres. Utilizaremos o critério de liberdade para o idealizador diferencial (*cf.* Corolário 2.55), estabelecido em termos da matriz ϕ_f já explorada.

Proposição 3.34 *Consideremos um ideal da forma $I = fI' \subset A = k[X_1, \ldots, X_n]$ (k corpo), com f divisor livre euleriano, $I' = (f_1, \ldots, f_m)$, $\mathrm{mdc}(f_1, \ldots, f_m) = 1$. Suponhamos que $I_1(\Theta' \cdot \phi_f) \subseteq I'$, onde $\Theta' = \Theta(\mathbf{f})$. Seja $\mathfrak{p} \subset A/I$ um ideal primo tal que o módulo $\mathrm{Der}_k(A/I)_\mathfrak{p}$ tem dimensão homológica finita sobre $(A/I)_\mathfrak{p}$. Então $\mathrm{Der}_k(A/I)_\mathfrak{p}$ é livre.*

Demonstração. Nestas condições o idealizador diferencial é livre e portanto tem-se uma seqüência exata de A-módulos

$$0 \to I^{\oplus n} \to A^n \to \mathrm{Der}_k(A/I) \to 0,$$

da qual decorre (já que evidentemente podemos assumir $I \neq (0)$) prof $\mathrm{Der}_k(A/I)_{\mathfrak{p}} =$ prof $I_P - 1 =$ prof $(A/I)_{\mathfrak{p}}$, para todo primo $\mathfrak{p} = P/I \subset A/I$. Se $\mathfrak{p}$ é tal que o $(A/I)_{\mathfrak{p}}$-módulo $\mathrm{Der}_k(A/I)_{\mathfrak{p}}$ tem dimensão homológica finita, a fórmula de Auslander-Buchsbaum fornece, então, que $\mathrm{Der}_k(A/I)_{\mathfrak{p}}$ é livre. □

Corolário 3.35 *Seja $I = fI'$ como na proposição acima. Seja $\mathfrak{p} = P/I \subset A/I$ um ideal primo, com $P \supseteq (f, I')$. Então $\mathrm{dh}_{(A/I)_{\mathfrak{p}}}\mathrm{Der}_k(A/I)_{\mathfrak{p}} = \infty$.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $\mathrm{dh}_{(A/I)_{\mathfrak{p}}}\mathrm{Der}_k(A/I)_{\mathfrak{p}} < \infty$. Com o obtido acima concluiríamos que $\mathrm{Der}_k(A/I)_{\mathfrak{p}}$ é livre e assim $(A/I)_{\mathfrak{p}}$ seria necessariamente um domínio (normal), como já mencionamos. Ou seja, o ideal $I_P = (f)_P I'_P$ seria primo e portanto $(f)_P = A_P$ ou $I'_P = A_P$, ou de maneira equivalente, $f \notin P$ ou $P \not\supseteq I'$, contradizendo a hipótese de que $P \supseteq (f, I')$. □

A combinação da CZL tradicional com a homológica fornece uma versão *forte* para a conjectura. Precisamente, prediz que se R é uma álgebra finitamente gerada sobre um corpo k de característica zero e $\mathfrak{p} \subset R$ é um ideal primo tal que o $R_{\mathfrak{p}}$-módulo $\mathrm{Der}_k(R_{\mathfrak{p}})$ tem dimensão homológica finita, então $R_{\mathfrak{p}}$ é um anel local regular.

Corolário 3.36 *Seja $I = fI'$ como antes. Suponha-se que $I' \subseteq I_f$ e seja $\mathfrak{p} = P/I \subset A/I$ um ideal primo tal que $f \in P$ e $\mathrm{dh}_{(A/I)_{\mathfrak{p}}}\mathrm{Der}_k(A/I)_{\mathfrak{p}} < \infty$. Então $(A/I)_{\mathfrak{p}}$ é uma hipersuperfície local regular.*

Demonstração. O corolário anterior assegura que $P \not\supseteq (f, I')$. Sendo $f \in P$ e $I' \subseteq I_f$, tem-se necessariamente $P \not\supseteq I_f$ e isto significa (por aplicação imediata do critério jacobiano usual – vide Apêndice) que a hipersuperfície local $(A/(f))_{\mathfrak{p}}$ é regular. Por fim note-se que, assim como já foi observado, $I'_P = A_P$ (uma vez que, por hipótese, $(f)_P \neq A_P$) e portanto $I_P = (f)_P$. □

A Apêndice

A.1 O módulo de diferenciais de Kähler

De modo geral, se S é um anel noetheriano e R é uma S-álgebra, o módulo de diferenciais $\Omega_S(R)$ pode ser definido em termos do ideal diagonal da S-álgebra $R \otimes_S R$, e é munido de uma derivação $d\colon R \to \Omega_S(R)$ que satisfaz a uma certa propriedade universal. Além disso, se S é uma álgebra sobre um anel T, então existe uma seqüência exata de R-módulos (denominada *seqüência cotangente relativa*)

$$\Omega_T(S) \otimes_S R \to \Omega_T(R) \to \Omega_S(R) \to 0$$

Contudo não entraremos nos detalhes desta situação geral, que podem ser encontrados nas referências básicas [5] e [9]. Para os nossos propósitos, é suficiente considerar o seguinte contexto: k corpo, $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ anel de polinômios, $I \subset A$ ideal minimamente gerado por $f_1, \ldots, f_m$, $B = A/I = k[x_1, \ldots, x_n]$ (x_i denota a classe residual de X_i módulo I), $\Theta = (\partial f_i/\partial X_j)$ matriz jacobiana dos f_i's, com transposta Θ^*. Neste caso o módulo das k-diferenciais de Kähler de B pode ser descrito em termos da chamada *seqüência exata conormal*

$$I/I^2 \xrightarrow{\partial} B^n \to \Omega_k(B) \to 0$$

com $\partial(f\text{mod}I^2) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) \in B^n$, $f \in I$. Compondo ∂ com o epimorfismo $B^m \twoheadrightarrow I/I^2$ que envia $(\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_m) \in B^m$ em $\sum_{i=1}^m g_i f_i \text{mod}I^2$, obtemos o homomorfismo de módulos livres $B^m \to B^n$ determinado pela matriz $\theta^* = \overline{\Theta}^* = \Theta^*\text{mod}I$. Assim, explicitamos

$$\Omega_k(B) = \text{Coker}(B^m \xrightarrow{\theta^*} B^n) = B^n/L,$$

onde $L = \sum_{i=1}^m B \cdot (\partial f_i/\partial x_1, \ldots, \partial f_i/\partial x_n) \subset B^n$ é o B-submódulo gerado pelas linhas de θ. Isto significa que θ^* é uma matriz de apresentação livre do módulo $\Omega_k(B)$. Em particular, o módulo de diferenciais possui i-ésimo ideal de Fitting dado por $F_i(\Omega_k(B)) = I_{n-i}(\theta) \subset B$. São válidas também as seguintes propriedades:

1. $\Omega_k(A) = \bigoplus_{i=1}^n AdX_i \simeq A^n$;

2. Se $\mathfrak{p} = P/I \subset B$ é um ideal primo, então $\Omega_k(B)_\mathfrak{p} \simeq \Omega_k(A_P/I_P)$;

3. Para qualquer ideal $J \supseteq I$, composição com a derivação universal $d\colon B \to \Omega_k(B)$ fornece um isomorfismo de $C = A/J$-módulos

$$\text{Hom}_B(\Omega_k(B), C) \simeq \text{Der}_k(B, C);$$

4. *Critério jacobiano*: Se $\mathfrak{p} \subset A$ é um ideal primo contendo I tal que a extensão de corpos $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p} \supseteq k$ é separável (e.g., k perfeito), então as seguintes afirmações são equivalentes:

   (i) $\Omega_k(A_\mathfrak{p}/I_\mathfrak{p})$ é um $A_\mathfrak{p}/I_\mathfrak{p}$-módulo livre de posto $n - \text{alt } I_\mathfrak{p}$;

   (ii) $\text{posto}(\Theta\text{mod}\mathfrak{p}) = \text{alt } I_\mathfrak{p}$;

   (iii) $A_\mathfrak{p}/I_\mathfrak{p}$ é um anel local regular.

5. (k corpo perfeito) Se $\mathfrak{p} \supset I$ é um ideal primo tal que $I_\mathfrak{p} \subset A_\mathfrak{p}$ é uma interseção completa radical, então $I_\mathfrak{p}/I_\mathfrak{p}^2$ é um $A_\mathfrak{p}/I_\mathfrak{p}$-módulo livre (de posto $g = \text{alt } I_\mathfrak{p}$) e o homomorfismo ∂ é injetor. Logo, pondo $R = B_{\mathfrak{p}/I} = A_\mathfrak{p}/I_\mathfrak{p}$, obtemos a resolução livre

$$0 \to R^g \to R^n \to \Omega_k(R) \to 0$$

   determinada pela matriz θ^* com entradas vistas em R. Assim $\text{dh}_R\ \Omega_k(R) \leq 1$, sendo nula se e somente se R é regular (de acordo com o critério jacobiano). Se o ideal $I \neq 0$ é homogêneo contido em A_+^2, então a dimensão homológica do B-módulo $\Omega_k(B)$ é exatamente 1.

Referências

[1] D. Bayer and M. Stillman, *Macaulay*: A system for computation in algebraic geometry and commutative algebra. 1992. Available via anonymous ftp from `math.harvard.edu`.

[2] P. Brumatti and A. Simis, The module of derivations of a Stanley-Reisner ring, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 1309–1318.

[3] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge University Press, 1993.

[4] W. Bruns and U. Vetter, *Determinantal rings*, Lecture Notes in Math., vol. 1327, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.

[5] D. Eisenbud, *Commutative Algebra (with a view toward Algebraic Geometry)*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1995.

[6] J. Herzog, A. Simis and W. Vasconcelos, Koszul homology and blowing-up rings, in *Commutative Algebra*, Proceedings: Trento 1981 (S. Greco and G. valla, Eds.), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **84**, Marcel-Dekker, New York, 1983, pp. 79–169.

[7] M. Hochster, The Zariski-Lipman conjecture in the graded case, J. Algebra **47** (1977), 411–424.

[8] J. Lipman, Free derivation modules on algebraic varieties, American J. Math. **87** (1965), 874–898.

[9] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, 1986.

[10] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A Math. **27** (1980), 265–291.

[11] P. Samuel, Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs, Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 237–249.

[12] A. Simis, B. Ulrich and W. Vasconcelos, Rees algebras of modules, Proc. London Math. Soc., **87 (3)** (2003), 610–646.

[13] H. Terao, Arrangements of hyperplanes and their freeness I, II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. Math. **27** (1980), 293–320.

[14] J. R. Tripp, Differential operators on Stanley-Reisner rings, Trans. Amer. Math. Soc. **349**, No. **6** (1997), 2507–2523.

[15] W. V. Vasconcelos, *Arithmetic of Blowup Algebras*, London Math. Soc., Lecture Note Series **195**, Cambridge University Press, 1994.

[16] W. V. Vasconcelos, *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Algorithms and Computation in Mathematics, vol. 2, Springer, Heidelberg, 1998.