

Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática

Doutorado em Matemática

## **HIPERPLANOS CONEXOS EM MATRÓIDES BINÁRIAS**

Tereza Raquel Brito de Melo

TESE DE DOUTORADO

Recife  
17 de fevereiro de 2005



Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
**Secretaria de Pós-Graduação**

50670-901 Cidade Universitária - Recife/PE - Fone (5581) 2126.8415 - Fax (5581) 2126.8410  
[posgrad@dmat.ufpe.br](mailto:posgrad@dmat.ufpe.br)

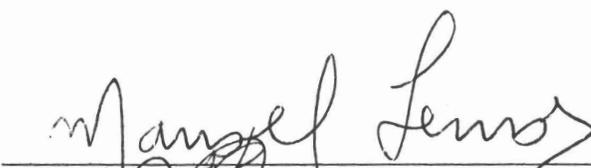
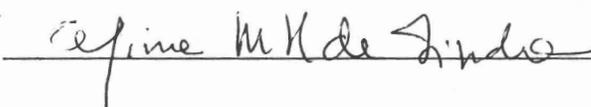
**ATA DE DEFESA DE TESE DE DOUTORADO REALIZADA NO DEPARTAMENTO  
DE MATEMÁTICA DO CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**

Aos dezessete dias do mês de fevereiro de dois mil e cinco, às onze horas, no Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, em seção pública, teve início à defesa de tese, intitulada : **“Hiperplanos Conexos em Matrôides Binárias”**, da aluna **Tereza Raquel Brito de Melo**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Matemática. A Banca Examinadora, indicada pelo Colegiado da Pós-Graduação em Matemática e aprovada com “Ad-Referendum” pelas Câmaras de Pesquisa e Pós-Graduação da UFPE, foi composta pelos professores Manoel José Machado Soares Lemos, Sóstenes Luiz Soares Lins do Departamento de Matemática da UFPE, Silvio Barros Melo do Centro de Informática da UFPE, André Toom do Departamento de Estatística da UFPE e Celina Miraglia Herrera de Figueiredo do Departamento Ciência e Computação da UFRJ. O professor Manoel José Machado Soares Lemos em virtude da sua condição de orientador, presidiu os trabalhos e depois das formalidades de apresentação, convidou a aluna a discorrer sobre o conteúdo da tese. Concluída a explanação, a candidata foi argüido pela Banca Examinadora, que em seguida, sem a presença da aluna, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar tendo concedido a menção : **APROVADO COM DISTINÇÃO**. E para constar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

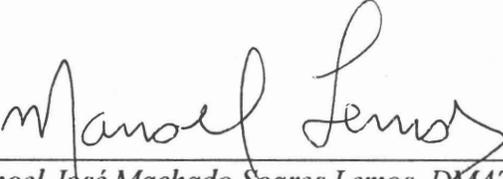
Recife, 17 de fevereiro de 2005.

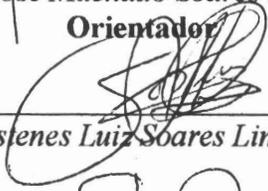
Banca Examinadora

- Manoel Lemos
- Sóstenes Lins
- Silvio Melo
- André Toom
- Celina Figueiredo

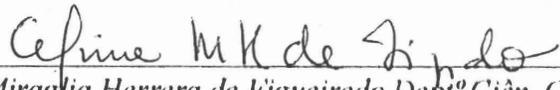
Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Ciências.

Aprovado: ...   
\_\_\_\_\_  
*Manoel José Machado Soares Lemos, DMAT-UFPE*  
**Orientador**

  
\_\_\_\_\_  
*Sóstenes Luiz Soares Lins, DMAT-UFPE*

  
\_\_\_\_\_  
*Silvio de Barros Melo, CIN-UFPE*

  
\_\_\_\_\_  
*André Toom, DE-UFPE*

  
\_\_\_\_\_  
*Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, Deptº Ciên..Comp-UFPE*

**HIPERPLANOS CONEXOS EM  
MATRÓIDES BINÁRIAS**

por  
*Tereza Raquel Brito de Melo*

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
*Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415 – Fax: (081) 2126.8410*  
RECIFE – BRASIL

Fevereiro - 2005

Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática

Tereza Raquel Brito de Melo

## **HIPERPLANOS CONEXOS EM MATRÓIDES BINÁRIAS**

*Trabalho apresentado ao Programa de Doutorado em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.*

Orientador: *Prof. Dr. Manoel Lemos*

Recife  
17 de fevereiro de 2005

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus maiores amigos, meus pais; a Chiara Lubich, que me ensinou o valor das dificuldades e a nunca parar nelas; à minha família; às gen que me ajudaram a ter um pouco de vida normal, mesmo se cheia de aventuras; à compreensão dos amigos quanto a minha ausência; ao meu orientador; à banca examinadora; aos professores Sérgio Santa Cruz e Sóstenes; aos colegas e funcionários do DMAT, particularmente à Tânia; ao CNPq e à FACEPE.

*...para mim a matemática apareceu como expressão da lógica das coisas, isto é, a lógica das infinitas maneiras das coisas se relacionarem.*

*...Em matemática, qualidade e quantidade são dois conceitos intimamente unidos porque cada equação, cada função, cada operador, exprimem relações entre seres (ainda que abstratos, mas em plena analogia com o real), que qualificam um ser global e uma situação global.*

*... direi que estudes matemática como uma expressão da lógica divina do ser das coisas. A mim não parece que a matemática seja pura abstração, pois se é lógica, se não é contraditória, essa diz sempre alguma coisa que descreve o real.*

—PIERO PASOLINI (Além da Ciência, 1990)

## RESUMO

Circuitos e cocircuitos não-separadores são muito importantes para a compreensão das matróides gráficas. Por exemplo, Tutte [27] caracterizou os grafos 3-conexos planares usando o conceito de circuitos não-separadores. Bixby e Cunningham [2] generalizaram esse resultado para a classe das matróides binárias. Kelmans [11] e independentemente Seymour (veja [16]) provaram que cada matróide binária, conexa, simples e co-simples tem pelo menos um cocircuito não-separador. McNulty e Wu [15] provaram que essas matróides têm no mínimo quatro cocircuitos não-separadores, sendo este resultado o melhor possível. Lemos [14] calculou, para matróides binárias 3-conexas, a dimensão do subespaço do espaço dos cociclos gerado pelos cocircuitos não-separadores que evitam um elemento da matróide. Nesta tese, será fornecido um limite inferior para a dimensão de um tal subespaço gerado pelos cocircuitos não-separadores que evitam um conjunto com no mínimo dois elementos da matróide.

Inicialmente, será feita uma abordagem geral da teoria das matróides utilizada para provar os principais resultados encontrados nesta tese, apresentados em seguida. No segundo capítulo, o problema de encontrar cocircuitos não-separadores de uma matróide binária, conexa, simples e co-simples será reduzido ao problema de encontrar cocircuitos não-separadores evitando, no máximo, dois elementos em matróides binárias 3-conexas.

No terceiro capítulo, serão caracterizadas as matróides binárias 3-conexas sem cocircuitos não-separadores que evitam um 2-subconjunto do conjunto de elementos da matróide. Este resultado é essencial para o cálculo da dimensão do subespaço do espaço dos cociclos gerado pelos cocircuitos não-separadores que evitam um 2-subconjunto do conjunto de elementos de uma matróide binária 3-conexa. Será feito ainda o cálculo da dimensão de um tal subespaço quando o subconjunto de elementos evitado por esses cocircuitos é um triângulo da matróide. Além disso, será determinada a dimensão do mesmo subespaço para cocircuitos não-separadores que evitam uma coleção qualquer

dos elementos de uma matróide binária 3-conexa, desde que a restrição da matróide a esse conjunto não tenha colaço.

**Palavras-chave:** grafos, planares, matróide, conexa, 3-conexa, binária, simples, co-simples, dimensão, cocircuito não-separador, colaço.

## ABSTRACT

Non-separating circuits and cocircuits play an important role in the understanding of the structure of graphic matroids. For example, using this concept Tutte [27] characterized the 3-connected graphs which are planar. Bixby and Cunningham [2] generalized Tutte's result for the class of binary matroids. Kelmans [11] and, independently, Seymour (see [16]) proved that every simple and cosimple connected binary matroid has a non-separating cocircuit. McNulty and Wu [15] proved that these matroids have at least four non-separating cocircuits. Moreover, this result is sharp. For 3-connected binary matroids, Lemos [14] presented the dimension of the subspace of the cocycle space spanned by the non-separating cocircuits of the matroid avoiding an element. In this thesis we give a lower bound for the dimension of such subspace spanned by the non-separating cocircuits avoiding a set with at least two elements of the matroid.

The first Chapter deals with the matroid theory which is used to prove the main results of this thesis. These results are stated in that chapter. In Chapter 2, the problem of finding non-separating cocircuits in a simple and cosimple connected binary matroid is reduced to the problem of finding non-separating cocircuits avoiding a set of elements in some 3-connected binary matroids. In the third Chapter the 3-connected binary matroids without non-separating cocircuits avoiding some set with two elements are characterized. This result is essential for setting a lower bound for the dimension of the subspace of the cocycle space spanned by the non-separating cocircuits avoiding a 2-set of elements of a 3-connected binary matroid. Moreover, the dimension of such subspace is computed when the subset avoided by these cocircuits is a triangle of the matroid. Finally, the dimension of the same subspace is determined for the non-separating cocircuits avoiding any collection of elements in the matroid, if the restriction of the matroid to this set has no coloops.

**Keywords:** graph, planar, matroid, connected, 3-connected, binary, simple, cosim-

ple, dimension, non-separating cocircuit, coloop.

# SUMÁRIO

|  |    |
|--|----|
| <b>Capítulo 1—Introdução</b>                                   | 1  |
| 1.1 Resultados nas teorias de grafos e matróides . . . . .     | 1  |
| 1.2 Reduzindo ao caso 3-conexo . . . . .                       | 8  |
| 1.3 Ouriços . . . . .  | 11 |
| 1.4 Resultados principais . . . . .                            | 13 |
| <b>Capítulo 2—Cocircuitos em matróides 3-conexas</b>           | 17 |
| 2.1 Considerações gerais . . . . .                             | 17 |
| 2.2 2-soma e alguns resultados . . . . .                       | 20 |
| <b>Capítulo 3—Matróides sem cocircuitos não-separadores</b>    | 25 |
| 3.1 Resultados Preliminares . . . . .                          | 25 |
| 3.2 Matróides sem cocircuitos não-separadores . . . . .        | 30 |
| <b>Capítulo 4—Cocircuitos em matróides 3-conexas</b>           | 44 |
| 4.1 Resultados para matróides 3-conexas . . . . .              | 44 |
| 4.2 Propriedades de um contra-exemplo mínimo . . . . .         | 46 |
| 4.3 Cocircuitos não-separadores evitando um conjunto . . . . . | 48 |
| 4.4 Continuando as provas dos resultados principais . . . . .  | 50 |
| 4.5 Conclusão . . . . .  | 61 |
| <b>Referências Bibliográficas</b>                              | 61 |

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

O estudo da Teoria das Matróides surgiu quando Whitney [29] relacionou as propriedades fundamentais de dependência que são comuns aos grafos e às matrizes. Neste capítulo, inicialmente, serão discutidos vários resultados para matróides que são generalizações de tais resultados obtidos para grafos. Em seguida, os principais resultados encontrados nesta tese serão abordados. Pressupõe-se, por parte do leitor, uma certa familiaridade com as teorias de grafos e matróides, mas alguns conceitos aqui são previamente esboçados. Em geral, a notação e terminologia seguirão a do livro do Oxley [21].

### 1.1 RESULTADOS NAS TEORIAS DE GRAFOS E MATRÓIDES

Existem várias maneiras equivalentes de definir matróides. Apresentaremos a mais natural a partir das observações de Whitney:

Uma *matróide* é um par de conjuntos  $(E, \mathcal{I})$  onde  $E$  é um conjunto finito e  $\mathcal{I}$  é uma coleção de subconjuntos de  $E$  satisfazendo as seguintes condições:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{I}$ .
- (ii) Se  $I \in \mathcal{I}$  e  $J \subseteq I$ , então  $J \in \mathcal{I}$ .
- (iii) Se  $I_1$  e  $I_2$  estão em  $\mathcal{I}$  e  $|I_1| < |I_2|$ , então existe um elemento  $e$  de  $I_2 - I_1$  tal que  $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$ .

Os membros de  $\mathcal{I}$  são os *conjuntos independentes* de  $M$ . Um conjunto independente maximal é uma *base* de  $M$ . Um subconjunto de  $E$  que não está em  $\mathcal{I}$  é chamado *dependente*. Um conjunto dependente minimal é um *circuito* de  $M$ .

O nome *matróide* foi criado por Whitney [29] porque uma classe fundamental de tais objetos nasce das matrizes no seguinte sentido:

**Lema 1.1.1** *Seja  $E$  o conjunto dos rótulos das colunas de uma matriz  $A$   $m \times n$  sobre um corpo  $K$  e seja  $\mathcal{I}$  a coleção dos subconjuntos  $I$  de  $E$  para os quais as colunas rotuladas pelos elementos de  $I$  são linearmente independentes no espaço vetorial  $V(m, K)$ . Então,  $(E, \mathcal{I})$  forma uma matróide.*

A matróide obtida como acima da matriz  $A$  será denotada por  $M[A]$ . Esta matróide é chamada *matróide vetorial* de  $A$ . Dizemos que uma matróide  $M$  é *representável* sobre um corpo  $K$  se existe uma matriz  $A$  com entradas em  $K$  tal que  $M \cong M[A]$ . Trataremos de algumas matróides representáveis, a saber: matróides binárias e matróides regulares. Uma matróide é *binária* quando é representável sobre  $GF(2)$ . Uma matróide é dita *regular* quando pode ser representada por uma *matriz totalmente unimodular*, a última sendo uma matriz sobre  $\mathbb{R}$  para a qual cada submatriz quadrada tem determinante em  $\{0, 1, -1\}$ . Toda matróide regular é representável sobre qualquer corpo.

**Lema 1.1.2** *Seja  $E$  o conjunto das arestas de um grafo  $G$  e  $\mathcal{I}$  a coleção dos conjuntos das arestas dos subgrafos de  $G$  que são florestas. Então  $M = (E, \mathcal{I})$  é uma matróide.*

A matróide obtida a partir do grafo  $G$  é chamada a *matróide dos ciclos* de  $G$  e denotada por  $M(G)$ . Dizemos que uma matróide  $M$  é *gráfica* se  $M \cong M(G)$  para algum grafo  $G$ .

Dada uma matróide  $M = (E, \mathcal{I})$ , se  $\mathcal{B}$  é a coleção de suas bases, pode-se mostrar que  $\mathcal{B}^* = \{E(M) - B : B \in \mathcal{B}\}$  é a coleção das bases de uma matróide tendo  $E$  como seu conjunto de elementos. Esta matróide é chamada a *dual* de  $M$  e denotada por  $M^*$ .

Dada uma matróide  $M = (E, \mathcal{I})$  considere a função  $r : 2^{|E|} \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que para um subconjunto  $X$  de  $E$ ,  $r(X)$  é a cardinalidade do maior independente de  $M|X$ . Pode-se mostrar que esta função está bem definida. A função  $r$  é chamada de *função posto* da matróide  $M$ .

Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  sobre o corpo  $F$  e  $M[A]$  a matróide vetorial de  $A$ . Se  $M = M[A]$ , é fácil ver que  $M$  não se altera se uma das seguintes operações são feitas em  $A$ :

- (i) Permutação de duas linhas.
- (ii) Multiplicação de uma linha por um membro não nulo de  $F$ .

- (iii) Permutação de uma linha pela soma daquela linha e uma outra.
- (iv) Deleção de uma linha nula (a menos que esta seja a única linha).
- (v) Permutação de duas colunas (movendo os rótulos com as colunas).
- (vi) Multiplicação de uma coluna por um membro não nulo de  $F$ .
- (vii) Troca de cada entrada da matriz pela sua imagem através de um automorfismo de  $F$ .

As operações acima são chamadas de *operações elementares*. Assuma que uma matriz  $A$  é não nula. É conhecido o fato que por uma seqüência de operações elementares pode-se reduzir  $A$  a forma  $[I_r|D]$ , onde  $I_r$  é a matriz identidade  $r \times r$  e  $D$  é alguma matriz  $r \times (n - r)$  sobre  $F$ . Evidentemente  $r = r(M)$ . No próximo Teorema assumiremos que as colunas de  $[I_r|D]$  são rotuladas na ordem  $e_1, \dots, e_n$  e que a matriz  $[I_{n-r} | -D^T]$  tem suas colunas rotuladas por  $e_{r+1}, \dots, e_n, e_1, \dots, e_r$ . Oxley [21] provou o seguinte resultado:

**Teorema 1.1.3** *Se  $M$  é a matróide vetorial de  $[I_r|D]$ , então  $M^*$  é a matróide vetorial de  $[I_{n-r} | -D^T]$ .*

Precisaremos do conceito de matróides uniformes, que definiremos a seguir. Sejam  $m$  e  $n$  inteiros não negativos tais que  $m \leq n$ . Seja  $E$  um conjunto de  $n$  elementos e  $\mathcal{I} = \{I \subseteq E : |I| \leq m\}$ . Então  $(E, \mathcal{I})$  é uma matróide. Denotamos esta matróide por  $U_{m,n}$  e a chamamos de *matróide uniforme* de posto  $m$  em um conjunto de  $n$  elementos.

Trataremos geralmente de matróides 3-conexas, por isso, definiremos  $n$ -conexidade para matróides, introduzida por Tutte em [28].

Suponha que  $M$  é uma matróide e que  $\{X, Y\}$  é uma partição de  $E(M)$ . Definimos a *função conectividade de  $M$*  como sendo

$$\xi_M(X, Y) = r(X) + r(Y) - r(M),$$

onde  $r$  é a função posto de  $M$ . Para um inteiro positivo  $k$ , diremos que  $\{X, Y\}$  é uma  *$k$ -separação* de  $M$  se:

$$\xi_M(X, Y) < k \text{ e } \min\{|X|, |Y|\} \geq k.$$

Uma matróide  $M$  é chamada  $k$ -conexa quando não possui  $k'$ -separação para todo inteiro  $k'$  tal que  $1 \leq k' < k$ . Se  $|X|$  ou  $|Y|$  é igual a  $k$ , dizemos que  $\{X, Y\}$  é uma  $k$ -separação minimal. Além disso, se  $k = 1$ , dizemos que  $\{X, Y\}$  é uma separação de  $M$ . Uma matróide é dita conexa quando não tem separação. Sabe-se que para um grafo simples  $G$  e  $k \in \{2, 3\}$ ,  $M(G)$  é  $k$ -conexa se e somente se  $G$  é  $k$ -conexo.

Se  $M$  tem uma  $k$ -separação para algum  $k$ , então a conectividade  $\lambda(M)$  de  $M$  é definida como

$$\lambda(M) = \min\{j : M \text{ tem uma } j\text{-separação}\}.$$

Algumas vezes  $\lambda(M)$  é chamada de conectividade de Tutte de  $M$  para distinguir de outros tipos de conectividade que existem para matróides. É fácil ver que a conectividade de Tutte é invariante por dualidade. De fato, pode-se provar que se  $r^*$  for a função posto da matróide dual  $M^*$ , então

$$r^*(X) = |X| + r(E - X) - r(M).$$

Assim, se  $\{X, Y\}$  é uma  $k$ -separação de  $M$ :

$$\xi_M(X, Y) = r(X) + r^*(X) - |X|.$$

Logo,

$$\xi_M(X, Y) = \xi_{M^*}(X, Y).$$

Então,  $\{X, Y\}$  é uma  $k$ -separação de  $M$  se e somente se é uma  $k$ -separação de  $M^*$ , o que faz a conectividade de Tutte ter esta atrativa propriedade de ser invariante por dualidade. Por esta razão não generaliza a noção de conectividade para grafos quando  $n \geq 4$ .

Um cocircuito de uma matróide  $M$  é um circuito da matróide dual de  $M$ . Dizemos que um cocircuito  $C^*$  de uma matróide  $M$  é não-separador quando  $M \setminus C^*$  é uma matróide conexa. Um hiperplano  $H$  de uma matróide  $M = (E, \mathcal{I})$  é um subconjunto de  $E$  fechado tal que  $r(H) = r(M) - 1$ . Pode-se provar que  $C^*$  é um cocircuito não-separador de  $M$  se e somente se  $E(M) - C^*$  é um hiperplano conexo de  $M$ . Um circuito de uma matróide  $M$  é não-separador quando  $M/C$  é conexa. Dado um grafo  $G$  2-conexo, um cocircuito  $C^*$  de  $G$  é não-separador quando  $M(G) \setminus C^*$  é conexa.

Circuitos e cocircuitos não-separadores são fundamentais para o conhecimento da estrutura de matróides gráficas. Por exemplo, os três próximos resultados foram conjecturados por Jack Edmonds e também foram fortemente sugeridos por comentários de Tutte [27]. No caso particular em que  $M$  é uma matróide cográfica, estes resultados foram mostrados por Tutte [27].

**Teorema 1.1.4** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa com no mínimo quatro elementos. Se  $e \in E(M)$ , então  $e$  é um elemento de pelo menos dois cocircuitos não-separadores de  $M$ .*

**Teorema 1.1.5** *Se  $M$  é uma matróide binária 3-conexa, então o conjunto de cocircuitos não-separadores de  $M$  geram o espaço dos cocircuitos de  $M$ .*

O próximo resultado foi provado com diferentes abordagens por Bixby e Cunningham em [2] e por Kelmans em [12].

**Teorema 1.1.6** *Uma matróide binária 3-conexa  $M$  é gráfica se e somente se cada elemento de  $M$  está contido em, no máximo, dois cocircuitos não-separadores de  $M$ .*

Os grafos *minimamente  $k$ -conexos* são aqueles que perdem sua  $k$ -conexidade sempre que uma de suas arestas é deletada. Vértices de grau  $k$  aparecem extensivamente em grafos minimamente  $k$ -conexos, como evidenciado pelos dois resultados seguintes fundamentais de Dirac [8] e Halin [17], respectivamente.

**Teorema 1.1.7** *Se  $G$  é um grafo minimamente 2-conexo com  $n$  vértices, então  $G$  tem, no mínimo,  $\frac{n+4}{3}$  vértices de grau dois.*

**Teorema 1.1.8** *Se  $G$  é um grafo minimamente 3-conexo com  $n$  vértices, então  $G$  tem, no mínimo,  $\frac{2n+6}{5}$  vértices de grau três.*

O Teorema seguinte é o resultado mais útil na prova de teoremas sobre grafos minimamente 2- e 3-conexos. O caso  $k = 2$  deste Teorema pode ser deduzido de um resultado de Tutte [28]. O caso  $k = 3$  deste Teorema é devido a Halin [9].

**Teorema 1.1.9** *Seja  $e$  uma aresta de um grafo  $G$  minimamente  $k$ -conexo para  $k \in \{2, 3\}$ . Se  $e$  liga dois vértices de grau excedendo  $k$ , então  $G/e$  é minimamente  $k$ -conexo.*

Uma matróide  $M$  é *minimamente  $n$ -conexa* quando  $M$  é  $n$ -conexa e  $M \setminus e$  não é  $n$ -conexa para todo  $e \in E(M)$ .

Pela relevância do último Teorema é importante a generalização do mesmo para o estudo de matróides minimamente 2- e 3-conexas. Por esta razão discutiremos a noção que generaliza o conceito de vértice em um grafo. Seja  $M$  uma matróide gráfica tal que  $M(G) \cong M$ . Suponha que  $M$  é conexa, isto é,  $G$  é um bloco. Se  $T$  é um cocircuito não-separador de  $M$  de tamanho dois então  $T$  é o conjunto de arestas incidentes a um vértice de grau 2 em  $G$ . Não vale a recíproca deste resultado. Suponha que  $M$  é 3-conexa. O conjunto  $T$  é um cocircuito não-separador de  $M$  de tamanho três se e somente se  $T$  é o conjunto de arestas incidentes a um vértice de grau 3 em  $G$ . Assim, cocircuitos não-separadores de tamanho dois e três em matróides modelam vértices de graus dois e três, respectivamente, em grafos. Muitos resultados para grafos podem ser generalizados para matróides binárias usando cocircuitos não-separadores de tamanho três. O próximo resultado generaliza o Teorema 1.1.9 para matróides binárias.

**Teorema 1.1.10** [23] *Seja  $e$  um elemento de uma matróide  $M$  minimamente 3-conexa e binária. Se  $e$  não está em nenhum cocircuito não-separador de  $M$  de tamanho três, então  $M/e$  é minimamente 3-conexa.*

Este Teorema foi usado por Reid e Wu em [23] para provar o seguinte:

**Teorema 1.1.11** *Se  $M$  é uma matróide minimamente 3-conexa, binária, com posto excedendo cinco, então o número de elementos de  $M$  em algum cocircuito não-separador de  $M$  com três elementos é, no mínimo,  $\frac{3}{2}r^*(M) + 3$ .*

É fácil ver que:

**Teorema 1.1.12** *Se  $G$  é um grafo 3-conexo, então cada aresta de  $G$  está em exatamente dois cocircuitos não-separadores.*

Note que se  $G$  é um grafo simples e 2-conexo, um cocircuito de  $M(G)$  corresponde a um corte mínimo de arestas de  $G$ . Assim, um cocircuito não-separador de  $M(G)$  corresponde ao conjunto de arestas incidentes a algum vértice  $v$  tal que  $G \setminus v$  é 2-conexo. Tal vértice é chamado vértice *deletável*.

Kaugars em [10], provou que certos grafos têm, no mínimo, um vértice deletável; logo, no mínimo um cocircuito não-separador.

**Teorema 1.1.13** *Seja  $G$  um grafo simples e 2-conexo. Se cada vértice de  $G$  tem grau no mínimo três, então  $G$  tem, no mínimo, um vértice deletável.*

Lozovanu e Syrbu (veja [31]) melhoraram o limite de Kaugars mostrando que tal grafo tem, no mínimo, quatro vértices deletáveis. Kelmans [11] e, independentemente dele, Seymour (veja [16]), provaram a seguinte versão para matróides binárias do resultado de Kaugar:

**Teorema 1.1.14** *Se  $M$  é uma matróide binária, conexa, simples e co-simples, então  $M$  tem, no mínimo, um cocircuito não-separador.*

O Teorema 1.1.14 foi conjecturado por Thomassen e Toft [25]. Note que esse Teorema pode ser reescrito como: *uma matróide binária, conexa, simples e co-simples tem um hiperplano conexo.* O próximo resultado, provado por McNulty e Wu [15], fornece uma generalização do Teorema 1.1.14 e do resultado para grafos de Lozovanu e Syrbu.

**Teorema 1.1.15** *Se  $M$  é uma matróide binária, conexa, simples e co-simples, então para cada elemento  $e$ ,*

- (i) *existem, no mínimo, dois cocircuitos não-separadores evitando  $e$ , e*
- (ii) *existem, no mínimo, dois circuitos não-separadores evitando  $e$ .*

*Além disso,  $M$  tem, no mínimo, quatro cocircuitos não-separadores e quatro circuitos não-separadores.*

Observe que a hipótese de  $M$  ser uma matróide binária é essencial nos teoremas anteriores, pois existem matróides 3-conexas e não binárias sem cocircuitos não-separadores. Um exemplo é  $U_{3,5}$ . No caso geral,  $U_{r,n}$  para  $2 < r < n$ , não tem cocircuitos não-separadores.

### 1.2 REDUZINDO AO CASO 3-CONEXO

Precisaremos do conceito de 2-soma, que definimos a seguir. Utilizaremos este conceito para decompor uma matr oide conexa em partes que são 3-conexas. Brylawski em [5], trata detalhadamente das opera es de conexão em série e conexão em paralelo, ferramentas essenciais para definir 2-soma. A seguir ilustramos com um exemplo a conexão em paralelo e a 2-soma para grafos.

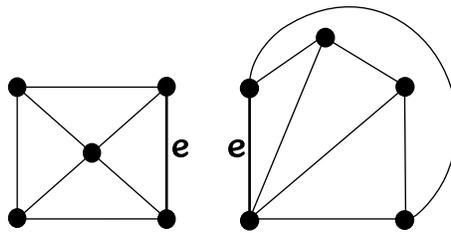


Figura 1.1. Grafos  $G$  e  $H$  com um elemento em comum.

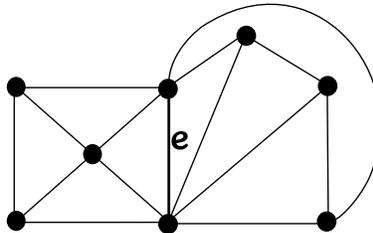


Figura 1.2. Conexão em Paralelo de  $G$  e  $H$ .

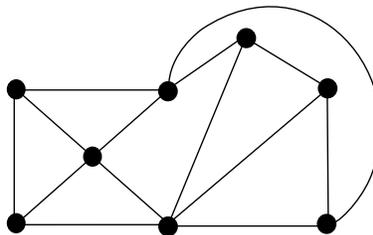


Figura 1.3. A 2-soma de  $G$  e  $H$ .

Esses conceitos em matr oides são uma extensão natural destas opera es em grafos. Suponha que  $M_1$  e  $M_2$  são matr oides definidas sobre conjuntos que se interceptam em um único elemento  $e$  que não   laço nem colaço de ambas  $M_1$  e  $M_2$ . Sejam

$$\mathcal{C}_S = \mathcal{C}(M_1 \setminus e) \cup \mathcal{C}(M_2 \setminus e) \cup \{C_1 \cup C_2 : e \in C_i \in \mathcal{C}(M_i), \text{ para } i \in \{1, 2\}\}$$

$$\mathcal{C}_P = \mathcal{C}(M_1) \cup \mathcal{C}(M_2) \cup \{(C_1 \cup C_2) - e : e \in C_i \in \mathcal{C}(M_i), \text{ para } i \in \{1, 2\}\}.$$

Faça  $E = E(M_1) \cup E(M_2)$ . Está provado em [21], pág. 240, que cada conjunto  $\mathcal{C}_S$  e  $\mathcal{C}_P$  é a coleção de circuitos de uma matróide em  $E$ . As matróides que têm  $\mathcal{C}_S$  e  $\mathcal{C}_P$  como seus conjuntos de circuitos serão denotadas respectivamente por  $S((M_1, e), (M_2, e))$  e  $P((M_1, e), (M_2, e))$ , ou abreviadamente, por  $S(M_1, M_2)$  e  $P(M_1, M_2)$ . Essas matróides são chamadas respectivamente de: *conexões em série* e *em paralelo* de  $M_1$  e  $M_2$  em relação ao *ponto base*  $e$  [3]. Então a 2-soma  $M_1 \oplus_2 M_2$  de  $M_1$  e  $M_2$  é  $S(M_1, M_2)/e$  ou equivalentemente  $P(M_1, M_2) \setminus e$ . O elemento  $e$  é chamado o *ponto base* da 2-soma e  $M_1$  e  $M_2$  são chamadas as *partes* da 2-soma.

Cunningham, em [6], deu a seguinte definição para *árvore de decomposição* de uma matróide conexa:

**Definição 1** *Seja  $M$  uma matróide conexa tal que  $|E(M)| \geq 3$ . Definimos uma árvore de decomposição de  $M$  como uma árvore  $T_M$  com arestas rotuladas por  $e_1, \dots, e_{k-1}$  e vértices rotulados por  $M_1, \dots, M_k$  tais que:*

- (i) *cada  $M_i$  é uma matróide 3-conexa com, no mínimo, quatro elementos, ou é um circuito, ou um cocircuito com no mínimo três elementos;*
- (ii)  $E(M_1) \cup E(M_2) \cup \dots \cup E(M_k) = E(M) \cup \{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$ ;
- (iii) *Se a aresta  $e_i$  liga os vértices  $M_{j_1}$  e  $M_{j_2}$  então  $E(M_{j_1}) \cap E(M_{j_2}) = \{e_i\}$ ;*
- (iv) *Se nenhuma aresta liga os vértices  $M_{j_1}$  e  $M_{j_2}$  então  $E(M_{j_1}) \cap E(M_{j_2}) = \emptyset$ ;*
- (v)  *$M$  é a matróide que rotula o único vértice da árvore  $T/e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$  na conclusão do seguinte processo: contraia as arestas  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$  de  $T$  uma por uma, em ordem; quando  $e_i$  é contraída, seus finais são identificados e o vértice formado por esta identificação é rotulado pela 2-soma das matróides que previamente rotulavam os finais de  $e_i$ .*

Cunningham e Edmonds [6] provaram o seguinte resultado.

**Teorema 1.2.1** *Cada matróide conexa  $M$  tem uma árvore de decomposição  $T_M$  na qual dois vértices adjacentes não são ambos rotulados por circuitos nem por cocircuitos. Além disso, a árvore  $T_M$  é única a menos de rotações de suas arestas.*

Seja  $\Lambda_2^u(M)$  o conjunto das matróides que rotulam os vértices de  $T_M$ . Faça

$$\Lambda_2^t(M) = \{H \in \Lambda_2^u(M) : H \text{ não é um circuito ou um cocircuito}\}.$$

O conceito de  $T_M$  será utilizado para reduzir o problema de encontrar cocircuitos não-separadores de uma matróide binária, conexa, simples e co-simples, ao de encontrar os cocircuitos não-separadores de algumas matróides binárias 3-conexas, que possuam no mínimo quatro elementos e evitam um conjunto de elementos. Para isto, serão consideradas as matróides 3-conexas que rotulam os vértices de  $T_M$  e possuem mais de quatro elementos, isto é,  $\Lambda_2^t(M)$ .

Se  $A$  é um subconjunto de  $E(M)$ , dizemos que um cocircuito  $C^*$  de  $M$  evita  $A$  se  $C^* \cap A = \emptyset$ . Denotamos por  $\mathcal{R}_A^*(M)$  o conjunto dos cocircuitos não-separadores de  $M$  que evitam  $A$  e por  $\dim_A(M)$  a dimensão do subespaço do espaço dos cociclos de  $M$  gerado por  $\mathcal{R}_A^*(M)$ . Como  $|\mathcal{R}_A^*(M)| \geq \dim_A(M)$  a obtenção de um limite inferior para  $\dim_A(M)$  nos fornece um limite inferior para  $|\mathcal{R}_A^*(M)|$ . Se  $A = \emptyset$ , denotamos  $\mathcal{R}_A^*(M)$  e  $\dim_A(M)$  por  $\mathcal{R}^*(M)$  e  $\dim(M)$ , respectivamente.

**Teorema 1.2.2** *Seja  $M$  uma matróide binária, conexa, simples e co-simples. Se  $M$  não é 3-conexa, então*

$$\mathcal{R}^*(M) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{R}_{A_i}^*(M_i),$$

onde  $\Lambda_2^t(M) = \{M_1, \dots, M_n\}$  e para  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $A_i$  é o conjunto dos rótulos das arestas incidentes ao vértice rotulado por  $M_i$  em  $T_M$ . (Isto é,  $A_i = E(M_i) - E(M)$ ).

Desse resultado que será demonstrado no Capítulo 2, segue-se que quando  $M$  é uma matróide binária, conexa, simples e co-simples, então:

$$|\mathcal{R}^*(M)| = \sum_{H \in \Lambda_2^t(M)} |\mathcal{R}_{E(H)-E(M)}^*(H)|. \quad (1.1)$$

Para obter um limite inferior para  $|\mathcal{R}^*(M)|$  é suficiente encontrar um tal limite para  $|\mathcal{R}_{E(H)-E(M)}^*(H)|$ , com  $H \in \Lambda_2^t(M)$ . Quando  $|E(H) - E(M)| = 1$ , isto é, quando  $H$  rotula um vértice terminal de  $T_M$ , Lemos [14] encontrou um limite inferior para  $|\mathcal{R}_{E(H)-E(M)}^*(H)|$ .

**Teorema 1.2.3** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa. Se  $A$  é um subconjunto unitário de  $E(M)$ , então*

$$|\mathcal{R}_A^*(M)| \geq \dim_A(M) \geq r(M) - 1.$$

Usando (4.4.7) e o Teorema 1.2.3, obtêm-se o limite de McNulty e Wu do Teorema 1.1.15.

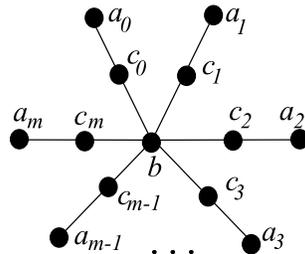
Esta tese é essencialmente uma generalização o Teorema 1.2.3 para um conjunto  $A$  de tamanho no mínimo dois. Para isto, faz-se necessário definir um  $A$ -ouriço.

### 1.3 OURIÇOS

Um conceito que será freqüentemente utilizado é o de  $A$ -ouriço. Para defini-lo, considere um inteiro  $m$  tal que  $m \geq 2$  e uma matróide  $S_m$  representada sobre  $GF(2)$  pela seguinte matriz:

$$I_{m+1} \left[ \begin{array}{cccc|cccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & b & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m \\ \hline & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{array} \right],$$

onde  $I_{m+1}$  é a matriz identidade de ordem  $m + 1$ . Note que  $L_i = \{a_i, b, c_i\}$  é um circuito de  $S_m$  para  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ . Diz-se que  $S_m$  é um *super-ouriço* binário com *pernas*  $L_0, L_1, \dots, L_m$  e *corpo*  $b$ . Estas matróides foram primeiramente estudadas por Oxley em [19].



**Figura 1.4.** Representação geométrica de  $S_m$ .

Seja  $O_m = S_m \setminus c_m$  e  $a_m = a$ . Segue-se que  $O_m$  é uma matróide binária 3-conexa. Vejamos que a aplicação que troca  $a$  por  $b$  e  $a_i$  por  $c_i$ , para  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  é um isomorfismo de  $O_m$  e  $O_m^*$ . Para isto, considere uma representação para  $O_m$  sobre  $GF(2)$  dada pela matriz abaixo:

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} a_0 & \cdots & a_{m-1} & a & c_0 & \cdots & c_{m-1} & b \\ & & & & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ & & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Note que a permutação de uma coluna com seu respectivo rótulo não altera a matróide. Por isso, a matriz acima representa  $O_m$ . Então, uma representação sobre  $GF(2)$  para  $O_m^*$  é dada por:

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} c_0 & \cdots & c_{m-1} & b & a_0 & \cdots & a_{m-1} & a \\ & & & & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ & & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Logo, a aplicação que troca  $a$  por  $b$  e  $a_i$  por  $c_i$  é um isomorfismo de  $O_m$  e  $O_m^*$ . Dizemos que  $O_m$  é um  $\{a, b\}$ -ouriço com  $m$  pernas, corpo  $b$  e cocorpo  $a$ . Além disso, para qualquer 2-subconjunto  $\{i, j\}$  de  $\{0, 1, \dots, m-1\}$ ,  $(a_i a_j)(c_i, c_j)$  é um automorfismo de  $O_m$ . Isto é, a matriz acima, que representa  $O_m$  sobre  $GF(2)$ , permanece invariante depois das seguintes permutações: as colunas rotuladas por  $a_i$  e  $a_j$ , as colunas rotuladas por  $c_i$  e  $c_j$  e a  $i$ -ésima pela  $j$ -ésima linha. Além do mais,  $O_m/a$  é um super-ouriço de  $m$  pernas com corpo  $b$  e  $(O_m \setminus b)^*$  é um super-ouriço de  $m$  pernas com corpo  $a$ .

Observe que se  $A = \{a, b\}$  então  $\mathcal{R}_A^*(O_m) = \emptyset$ . De fato, suponha que  $C^* \in \mathcal{R}_A^*(O_m)$ . Então  $C^* \cap L_i \neq \emptyset$  para algum  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ . Como  $L_i = \{a_i, b, c_i\}$ ,  $b \notin C^*$  e um circuito e um cocircuito de uma matróide não podem ter um único elemento em comum, então  $L_i - b \subseteq C^*$ . Mas  $(L_i - b) \cup a$  é tríade de  $O_m$ , então  $a$  é colaço de  $O_m \setminus C^*$ ; chega-se a uma contradição. Conseqüentemente  $\mathcal{R}_A^*(O_m) = \emptyset$ .

## 1.4 RESULTADOS PRINCIPAIS

Para generalizar o Teorema 1.2.3, para um 2-subconjunto  $A$  do conjunto de elementos da matróide, no Capítulo 3, serão caracterizadas as matróides binárias 3-conexas sem cocircuitos não-separadores evitando  $A$ , através do seguinte resultado:

**Teorema 1.4.1** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa, com  $r(M) \geq 3$ . Se  $A$  é um 2-subconjunto de  $E(M)$  tal que  $\mathcal{R}_A^*(M) = \emptyset$ , então  $M$  é um  $A$ -ouriço.*

A partir deste resultado será demonstrado, no Capítulo 4, que a única condição para que uma matróide binária 3-conexa tenha cocircuito não-separador, evitando um 2-subconjunto  $A$  do conjunto de elementos da matróide, é que esta matróide não tenha um  $A$ -ouriço como menor.

**Teorema 1.4.2** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa sem menor isomorfo a  $O_n$  para inteiro  $n \geq 2$ . Se  $A$  é um 2-subconjunto de  $E(M)$ , então*

$$\dim_A(M) \geq \frac{r(M) - n}{2}.$$

Para um inteiro  $n$  excedendo dois, rotule os conjuntos estáveis maximais de  $K_{3,n}$  por  $V_1$  e  $V_2$  tal que  $|V_1| = 3$ . Sejam  $K_{3,n}''$  e  $K_{3,n}'''$  os grafos obtidos de  $K_{3,n}$  adicionando respectivamente duas e três arestas unindo vértices em  $V_1$ , sendo cada par delas não paralelas. Agora, faremos exemplos para mostrar que o limite encontrado para  $\dim_A(M)$  no Teorema 1.4.2 é o melhor possível. Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  constantes tais que

$$\dim_A(M) \geq \alpha r(M) + \beta, \tag{1.2}$$

para cada matróide  $M$  binária 3-conexa, sem um menor isomorfo a  $O_n$  e para um 2-subconjunto  $A$  de  $E(M)$ . Primeiro mostraremos que  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ . Seja  $M = M^*(K_{3,m}'')$ , para um inteiro  $m$  excedendo dois. Se  $A$  contém as duas arestas de  $K_{3,m}''$  as quais não são incidentes a um vértice de grau três, então  $\dim_A(M) = m - 1$ . Como  $r(M) = 2m$ , segue que

$$\alpha + \frac{\beta}{r(M)} \leq \frac{\dim_A(M)}{r(M)} = \frac{m - 1}{2m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}.$$

Fazendo o limite quando  $m$  vai para infinito concluímos que  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ . Se  $\alpha = \frac{1}{2}$ , então  $\beta \leq -\frac{n}{2}$  porque (1.2) vale para  $O_{n-1}$ .

O próximo resultado é uma consequência do Teorema 1.4.2, para  $n = 3$ , porque  $O_3$  não é regular. ( $O_3/a \cong F_7$ .)

**Teorema 1.4.3** *Seja  $M$  uma matróide regular e 3-conexa. Se  $A$  é um 2-subconjunto de  $E(M)$ , então*

$$\dim_A(M) \geq \left\lceil \frac{r(M) - 3}{2} \right\rceil.$$

Note que o limite deste Teorema é o melhor possível já que é atingido por  $M^*(K''_{3,n})$ , para cada  $n$  excedendo dois, desde que  $A$  seja o conjunto de elementos adicionados a  $K_{3,n}$  para obter  $K''_{3,n}$ .

O limite obtido no Teorema 1.4.2 pode ser melhorado se assumirmos que  $M$  não tem também um menor isomorfo a  $M^*(K''_{3,n})$ . O limite dado no Teorema 1.4.4 é muito próximo daquele para matróides gráficas, a saber; se  $M$  é uma matróide gráfica 3-conexa e  $A$  é um 2-subconjunto de  $E(N)$ , então  $\dim_A(M) \geq r(M) - 3$ .

**Teorema 1.4.4** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa e  $A$  um 2-subconjunto de  $E(M)$ . Se  $M$  não tem menor isomorfo a  $O_n$  nem a  $M^*(K''_{3,n})$ , para inteiro  $n \geq 2$ , então*

$$\dim_A(M) \geq r(M) - n.$$

Serão definidos alguns conceitos usados no exemplo apresentado a seguir para mostrar que o limite do Teorema 1.4.4 é o melhor possível.

Suponha que  $r \geq 2$ . Uma *roda*  $\mathcal{W}_r$  de posto  $r$  é um grafo tendo  $r + 1$  vértices,  $r$  dos quais estão em um circuito chamado *borda*; o vértice restante é ligado por uma única aresta chamada *raio* a cada um dos outros vértices. Frequentemente nos referimos a uma roda como a matróide dos ciclos de uma roda.

A *conexão em paralelo generalizada*  $P_N(M_1, M_2)$  de duas matróides simples  $M_1$  e  $M_2$  que têm uma restrição comum  $N$ , isto é,  $T = E(M_1) \cap E(M_2)$  e  $N = M_1|T = M_2|T$ , é uma matróide em  $E(M_1) \cup E(M_2)$ , cujos fechados são os subconjuntos  $X$  de  $E(M_1) \cup E(M_2)$  tal que  $X \cap E(M_i)$  é fechado em  $M_i$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Brylawski provou, em [4], que esta construção produz uma matróide, no caso em que  $N$  é um triângulo, por exemplo.

Agora, vejamos que o limite do Teorema 1.4.4 é o melhor possível. Seja  $m$  um inteiro tal que  $m$  é maior ou igual a três. Escolha um triângulo  $T$  de  $O_{n-1}$ , para

$n \geq 4$ . Se  $b$  é o corpo de  $O_{n-1}$ , então  $b \in T$ , digamos  $T = \{b, c, d\}$ . Suponha que  $T$  é também um triângulo da roda  $\mathcal{W}_m$  tal que  $b$  e  $d$  são raios. Além do mais, assuma que  $E(O_{n-1}) \cap E(\mathcal{W}_m) = T$ . Seja  $M$  a matróide obtida da conexão em paralelo generalizada de  $O_{n-1}$  e  $M(\mathcal{W}_m)$  deletando  $c$ . Observe que  $r(M) = r(O_{n-1}) + r(\mathcal{W}_m) - 2 = n + m - 2$ . Note que cada tríade de  $M(\mathcal{W}_m)$  que não contém  $c$  é um cocircuito não-separador de  $M$ . Além do mais, estes são os únicos cocircuitos não-separadores de  $M$  evitando  $A$ . Isto é,  $\dim_A(M) = m - 2$  e o limite no Teorema 1.4.4 é atingido.

O próximo resultado foi provado por Ding, Oporowski, Oxley e Vertingan em [7]. Ele fornece uma lista de menores inevitáveis de uma matróide binária 3-conexa com tamanho grande. Observe que  $O_n$  e  $M^*(K''_{3,n})$  são as únicas matróides não-gráficas na lista dos menores. É interessante que precisemos excluir as matróides não-gráficas da lista deles para obter um limite inferior para o número de cocircuitos não-separadores em matróides 3-conexas binárias, evitando um 2-subconjunto que seja próximo ao limite para grafos 3-conexos.

**Teorema 1.4.5** *Para cada inteiro  $n$  maior do que dois, há um inteiro  $N(n)$  tal que cada matróide 3-conexa binária com mais do que  $N(n)$  elementos, contém um menor isomorfo a uma das matróides  $M(K''_{3,n})$ ,  $M^*(K''_{3,n})$ ,  $M(W_n)$  e  $O_n$ .*

Quando  $A$  é um subconjunto do conjunto de elementos de uma matróide  $M$  e  $|A| \geq 3$ , não há limite inferior interessante para  $\dim_A(M)$ . Para obter um tal limite, quando  $|A| = 2$ , excluimos alguns menores da matróide  $M$ . Assim, entendemos completamente o comportamento de  $\dim_A(M)$  quando  $|A| = 2$ . Parece difícil poder estender esta abordagem quando  $|A| \geq 3$ . Mesmo no caso regular já que  $\mathcal{R}_A^*(M^*(K'''_{3,n})) = \emptyset$  quando  $A$  é o conjunto das arestas incidentes a  $K'''_{3,n}$  que não é incidente a nenhum vértice de grau três. Então, tentamos uma outra abordagem. Ao invés de excluirmos menores de  $M$ , impusemos algumas propriedades estruturais para  $M|_A$ , a saber que  $M|_A$  não tenha colaço. Quando  $M$  é gráfica e  $M|_A$  não tem colaço é fácil ver que

$$\dim_A(M) \geq r(M) - (|A| - 1). \quad (1.3)$$

Além do mais, este limite é o melhor possível. Em geral, encontramos um limite inferior para  $\dim_A(M)$  que é próximo de (1.3).

**Teorema 1.4.6** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa. Se  $A$    um subconjunto de  $E(M)$  tal que  $M|A$  não tem colaços, então*

$$\dim_A(M) \geq r(M) - (2^{|A|} - |A| - 1).$$

Estes limites têm o mesmo comportamento quando  $r(M)$  vai para infinito e  $A$  está fixo. Achamos que o limite do Teorema 1.4.6 está longe de ser o melhor possível, mas quando  $A$    um triângulo de  $M$ , temos o seguinte resultado para  $\dim_A(M)$ :

**Teorema 1.4.7** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa. Se  $A \subseteq E(M)$    um triângulo de  $M$ , então*

$$\dim_A(M) = r(M) - 2.$$

Este resultado   próximo daquele obtido por Lemos [14].

## CAPÍTULO 2

# COCIRCUITOS EM MATRÓIDES 3-CONEXAS

Neste capítulo serão citados resultados conhecidos e feitas algumas definições usadas nas provas dos principais teoremas mostrados nesta tese. Na última seção será demonstrado o Teorema 1.2.2.

### 2.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Um elemento  $e$  de uma matróide 3-conexa  $M$  é dito *essencial* se  $M \setminus e$  e  $M/e$  não são 3-conexas. Um *triângulo* de  $M$  é um circuito com três elementos e uma *tríade* de  $M$  é um triângulo de  $M^*$ . Para uma matróide  $N$ , a matróide simples e a matróide co-simples associadas a  $N$  serão denotadas por  $si(N)$  e  $cosi(N)$  respectivamente. Chamamos estas matróides de *simplificação* e *co-simplificação* de  $N$ .

Tutte, em [28], mostrou que todo elemento essencial de uma matróide 3-conexa  $M$ , com no mínimo 4 elementos, pertence a um triângulo ou a uma tríade dessa matróide. Utilizando a demonstração desse resultado, Bixby, em [1], provou o seguinte:

**Teorema 2.1.1** *Seja  $M$  uma matróide 3-conexa. Se  $e$  é um elemento de  $M$ , então toda 2-separação de  $M \setminus e$  ou  $M/e$  é minimal. Além disso, no primeiro caso,  $cosi(M \setminus e)$  é 3-conexa enquanto, no segundo caso,  $si(M/e)$  é 3-conexa.*

Uma consequência deste resultado, apresentada a seguir, será muito utilizada nesta tese.

**Corolário 2.1.2** *Seja  $M$  uma matróide 3-conexa. Considere um triângulo  $T$  de  $M$  e uma tríade  $T^*$  de  $M$  que intercepta  $T$ . Se  $e \in T^* - T$ , então  $si(M/e)$  é 3-conexa.*

*Demonstração.* Se  $|E(M)| \leq 6$ , então toda 2-separação de  $M/e$  é minimal. Pelo Teorema 2.1.1,  $si(M/e)$  é 3-conexa. Podemos supor que  $E(M) \geq 7$ . Vejamos que

$$\{T, E(M) - (T \cup e)\} \text{ é uma 2-separação não minimal de } M \setminus e. \quad (2.1)$$

De fato,  $T^* \subseteq T \cup e$ , logo,  $E(M) - (T \cup e) \subseteq E(M) - T^*$  e

$$r(E(M) - (T \cup e)) \leq r(E(M) - T^*) = r(M) - 1.$$

Então

$$r(T) + r(E(M) - (T \cup e)) - r(M) \leq 2 + r(M) - 1 - r(M) = 1.$$

Note que (2.1) segue, pois  $\min\{|T|, |E(M) - (T \cup e)|\} \geq 3$ .

Assim, pelo Teorema 2.1.1, toda 2-separação de  $M/e$  é minimal. Além disso,  $si(M/e)$  é 3-conexa. ■

O Lema seguinte, devido a Tutte, é freqüentemente chamado de Lema do Triângulo de Tutte [28].

**Lema 2.1.3** *Seja  $M$  uma matróide 3-conexa tendo no mínimo quatro elementos. Suponha que  $\{x, y, z\}$  é um triângulo de  $M$  tal que  $M \setminus x$  e  $M \setminus y$  não são 3-conexas, então  $M$  tem uma tríade que contém  $x$  e exatamente um dos elementos  $y$  ou  $z$ .*

Este simples resultado será necessário adiante.

**Lema 2.1.4** *Se um triângulo é também uma tríade em uma matróide 3-conexa  $M$ , então  $M \cong U_{2,4}$ .*

Se  $\mathcal{W}_r$  é uma roda, então o *giro*  $\mathcal{W}^r$  de posto  $r$  é uma matróide sobre  $E(\mathcal{W}_r)$  tendo como o conjunto de suas bases a borda de  $\mathcal{W}_r$  e todos os conjuntos das arestas das árvores geradoras de  $\mathcal{W}_r$ . O principal resultado de Tutte, em [28], é o seguinte:

**Teorema 2.1.5** *As seguintes afirmações são equivalentes para uma matróide 3-conexa  $M$ :*

- (i) *Todo elemento de  $M$  é essencial.*
- (ii)  *$M$  tem posto no mínimo 3 e é isomorfa a um giro ou a matróide dos ciclos de uma roda.*

Em [24], Seymour provou que:

**Lema 2.1.6** *Seja  $M$  uma matr oide conexa e para algum  $n \geq 2$ ,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  e  $\{f_1, \dots, f_n\}$  subconjuntos disjuntos de  $E(M)$ . Suponha que para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  e todo  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\{e_i, f_i, e_{i+1}\}$    um triângulo e  $\{f_j, e_{j+1}, f_{j+1}\}$    uma tri de, onde todos os sub-índices são lidos módulo  $n$ , então  $M$    isomorfa a  $M(\mathcal{W}_n)$  ou  $\mathcal{W}^n$ .*

Oxley e Wu, em [22], através do resultado seguinte, provaram que a hipótese no teorema acima de  $\{e_n, f_n, e_1\}$  ser triângulo pode ser removida adicionando-se a condi o de que a matr oide seja 3-conexa. A demonstra o deste resultado está implícita em [28].

**Lema 2.1.7** *Seja  $M$  uma matr oide 3-conexa e para algum  $n \geq 2$ ,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  e  $\{f_1, \dots, f_n\}$  subconjuntos disjuntos de  $E(M)$ . Suponha que para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  e todo  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\{e_i, f_i, e_{i+1}\}$    um triângulo e  $\{f_j, e_{j+1}, f_{j+1}\}$    uma tri de, onde todos os sub-índices são lidos módulo  $n$ , então  $M$    isomorfa a  $M(\mathcal{W}_n)$  ou  $\mathcal{W}^n$ .*

Um conceito que será usado mais adiante   o de cadeia de triângulos e tri des [20]. Seja  $T_1, \dots, T_k$  uma seq ncia não vazia de conjuntos, cada um dos quais sendo um triângulo ou uma tri de de uma matr oide  $M$  tal que para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ :

- (i) em  $\{T_i, T_{i+1}\}$ , exatamente um   um triângulo e exatamente um   uma tri de ;
- (ii)  $|T_i \cap T_{i+1}| = 2$ ; e
- (iii)  $(T_{i+1} - T_i) \cap (T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_i) = \emptyset$ .

Então chamamos  $T_1, \dots, T_k$  uma *cadeia* de  $M$  de comprimento  $k$  com *elos*  $T_1, \dots, T_k$ . Além disso, se  $M$    uma matr oide 3-conexa e  $T_1, \dots, T_k$    uma cadeia maximal de  $M$ , onde  $M$  não   uma roda nem um giro, então chamamos esta cadeia maximal de  $M$  de *leque* de  $M$ . Neste caso, se  $T_i = \{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}\}$  para todo  $i$ , então  $a_1, a_2, \dots, a_{k+2}$  são os *elementos* do leque. Chamamos  $a_1$  e  $a_{k+2}$  os  *finais* do leque.

Usaremos o seguinte resultado de Oxley e Wu [22], cuja prova também está implícita em [28]:

**Teorema 2.1.8** *Seja  $M$  uma matr oide 3-conexa que não   uma roda nem um giro. Se  $e$    um elemento essencial de  $M$ , então  $e$  está num leque, cujos finais são ambos não essenciais.*

Uma propriedade básica que iremos usar freqüentemente é que um circuito e um cocircuito de uma matróide não podem ter um único elemento em comum. Essa propriedade será referida como *ortogonalidade*.

Em [30], Wu provou que:

**Lema 2.1.9** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa. Se  $T^*$  é uma tríade que contém um elemento essencial de  $M$ , então  $T^*$  é não-separadora.*

Usaremos com uma certa freqüência o seguinte resultado:

**Lema 2.1.10** *As seguintes afirmações são equivalentes para uma matróide  $M$ :*

- (i)  $M$  é binária.
- (ii)  $|C \cap C^*|$  é par para todo circuito  $C$  e cocircuito  $C^*$  de  $M$ .
- (iii) A diferença simétrica de qualquer conjunto de circuitos de  $M$  é a união disjunta de circuitos.

Em [13], Lemos provou o seguinte resultado:

**Teorema 2.1.11** *Suponha que  $M$  é uma matróide 3-conexa com, no mínimo, quatro elementos. Seja  $C$  um circuito de  $M$ . Se  $M \setminus e$  não é 3-conexa para cada  $e \in C$ , então  $C$  intercepta no mínimo duas tríades de  $M$ .*

Wu, em [30], generalizou o resultado de Lemos, citado acima, para matróides binárias, através do seguinte Teorema:

**Teorema 2.1.12** *Suponha que  $M$  é uma matróide binária 3-conexa com, no mínimo, quatro elementos. Seja  $C$  um circuito de  $M$ . Se  $M \setminus e$  não é 3-conexa para cada  $e \in C$ , então  $C$  intercepta, no mínimo, duas tríades não-separadores de  $M$ .*

## 2.2 2-SOMA E ALGUNS RESULTADOS

Serão importantes as seguintes propriedades de 2-soma:

- (i) A invariância por dualidade da 2-soma segue do fato que  $S(M_1, M_2) = [P(M_1^*, M_2^*)]^*$ .

- (ii) [24] Se  $\{X_1, X_2\}$  é uma 2-separação exata de  $M$ , então  $M$  é 2-soma de matróides  $M_1$  e  $M_2$  com  $E(M_1) = X_1 \cup e$ ,  $E(M_2) = X_2 \cup e$ .
- (iii) [24] Se  $M = M_1 \oplus_2 M_2$  com  $|E(M_i)| \geq 3$ , para  $i \in \{1, 2\}$ , então  $\{E(M_1) - E(M_2), E(M_2) - E(M_1)\}$  é uma 2-separação exata de  $M$ .
- (iv) Pelos itens (ii) e (iii), concluímos que  $M$  tem 2-separação exata se e somente decompõe-se como 2-soma de matróides com menos elementos.
- (v) Se  $M_1$  e  $M_2$  são matróides, então  $M_1 \oplus_2 M_2$  é conexa se e somente se  $M_i$  é conexa para  $i \in \{1, 2\}$ .
- (vi) A 2-soma é comutativa, isto é,  $M = M_1 \oplus_2 M_2 = M_2 \oplus_2 M_1$ .
- (vii) Se  $M = M_1 \oplus_2 M_2$ ,  $X \cap Y \neq \emptyset$ , com  $X, Y \subseteq E(M_1)$  e  $E(M_1) - (X \cup Y \cup e) \neq \emptyset$ , então:
  - (a)  $M \setminus X/Y = (M_1 \setminus X/Y) \oplus_2 M_2$  ou;
  - (b)  $M \setminus X/Y$  é desconexa e  $M \setminus X/Y$  tem  $E(M_1) - (X \cup Y \cup e)$  como conjunto separador.

Analisaremos como os cocircuitos não-separadores se comportam com relação a operação de 2-soma.

**Lema 2.2.1** *Seja  $C$  um circuito de uma matróide conexa  $M$  tal que  $M/C$  também é conexa. Se  $\{X, Y\}$  é uma 2-separação de  $M$ , então:*

- (i)  $X \subseteq C$ ; ou
- (ii)  $Y \subseteq C$ ; ou
- (iii)  $C \subseteq X$ ; ou
- (iv)  $C \subseteq Y$ .

Além disso, quando  $M$  é co-simples,  $C \subseteq Z$  para algum  $Z \in \{X, Y\}$ .

*Demonstração.* Sejam  $C_X = C \cap X$  e  $C_Y = C \cap Y$ . Podemos assumir que  $C_X \neq \emptyset$  e  $C_Y \neq \emptyset$ , do contrário (iii) ou (iv) segue. Vejamos que para  $Z \in \{X, Y\}$ ,

$$r_{M/C}(Z - C_Z) = r(Z) - |C_Z|. \quad (2.2)$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que  $Z = X$ . Primeiro mostraremos que

$$r(X \cup C_Y) = r(X) + |C_Y| - 1. \quad (2.3)$$

Como  $C_X$  é independente em  $M$ , existe base  $B_X$  de  $M|X$  tal que  $C_X \subseteq B_X$ . Logo  $B_X \cup C_Y$  contém base de  $M|(X \cup C_Y)$ . Se  $e \in C_Y$ , então  $(B_X \cup C_Y) - e$  gera  $X \cup C_Y$  em  $M$ . Seja  $B_Y$  base de  $M|Y$  tal que  $C_Y \subseteq B_Y$ , então  $B_X \cup B_Y$  gera  $M$  e daí  $(B_X \cup B_Y) - e$  gera  $M$ . Assim,  $r((B_X \cup B_Y) - e) = r(M)$ . Como

$$\begin{aligned} |B_X| + |B_Y| - 1 &= |(B_X \cup B_Y) - e| \\ &\geq r(M) \\ &= r(X) + r(Y) - 1 \\ &= |B_X| + |B_Y| - 1, \end{aligned}$$

temos que  $r(M) = |(B_X \cup B_Y) - e|$ . Logo,  $r((B_X \cup B_Y) - e) = |(B_X \cup B_Y) - e|$  e segue que  $(B_X \cup B_Y) - e$  é base de  $M$ . Daí  $(B_X \cup C_Y) - e \subseteq (B_X \cup B_Y) - e$  é independente. Como  $(B_X \cup C_Y) - e$  gera  $X \cup C_Y$ , então  $(B_X \cup C_Y) - e$  é base de  $X \cup C_Y$  e temos que (2.3) segue. Então,

$$\begin{aligned} r_{M/C}(X - C_X) &= r_M((X - C_X) \cup C) - r_M(C) \\ &= r_M(X \cup C_Y) - r_M(C) \\ &= [r_M(X) + |C_Y| - 1] - [|C| - 1] \\ &= r(X) - |C_X|. \end{aligned}$$

Logo, (2.2) se verifica. Como

$$\begin{aligned} r(M/C) &= r(M) - r(C) \\ &= r(M) - (|C| - 1), \end{aligned} \quad (2.4)$$

somando (2.2) para  $Z = X$  e  $Z = Y$  e subtraindo (2.4) obtemos:

$$\begin{aligned} r_{M/C}(X - C_X) + r_{M/C}(Y - C_Y) - r(M/C) &= [r(X) - |C_X|] + [r(Y) - |C_Y|] - \\ &\quad [r(M) - |C| + 1] \\ &= r(X) + r(Y) - r(M) - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, como  $\{X - C_X, Y - C_Y\}$  não é uma separação de  $M/C$ , pois, por hipótese,  $M/C$  é conexa, concluímos que para algum  $Z \in \{X, Y\}$ ,  $Z - C_Z = \emptyset$ . Logo,  $Z \subseteq C_Z$  e temos que (i) ou (ii) ocorre. Além disso, como  $Z \subseteq C$ , segue que  $Z$  está contido em uma classe em série não trivial de  $M$ . ■

*Demonstração do Teorema 1.2.2.* Note que  $n \geq 2$ , pois  $M$  não é 3-conexa, por hipótese. Vejamos que  $\mathcal{R}_A^*(N) \subseteq \mathcal{R}^*(M)$ , onde  $N$  é um dos rótulos dos vértices de  $T_M$  e  $A$  é o conjunto dos rótulos das arestas incidentes ao vértice rotulado por  $N$  em  $T_M$ . Sejam  $e_1, e_2, \dots, e_k$  os rótulos das arestas de  $T_M$  incidentes ao vértice rotulado por  $N$ . Nomeie as componentes conexas de  $T_M - \{e_1, \dots, e_k\}$  como  $T_0, T_1, \dots, T_k$  de forma que  $T_0$  tenha apenas um vértice rotulado por  $N$ . Para  $i \in \{1, \dots, k\}$ , seja  $N_i$  uma matróide tal que  $T_i = T_{N_i}$ . Observe que  $e_i \in E(N_i)$ . Logo  $M = N \oplus_2 N_1 \oplus_2 \dots \oplus_2 N_k$ , onde  $N$  e cada  $N_i$  têm, no mínimo, três elementos. Seja  $C^* \in \mathcal{R}_A^*(N)$ . Como  $N \setminus C^*$  é conexa, então  $|E(N) \setminus C^*| \geq 3$ . Pela propriedade (v) de 2-soma, temos que

$$M \setminus C^* = (N \setminus C^*) \oplus_2 N_1 \oplus_2 \dots \oplus_2 N_k$$

é conexa. Resta mostrar que  $C^*$  é cocircuito de  $M$ . Isto ocorre pela definição de 2-soma, já que  $C^*$  evita todo ponto base. Logo  $C^* \in \mathcal{R}^*(M)$ .

Para a recíproca, seja  $C^* \in \mathcal{R}^*(M)$ . Pelo dual do Lema 2.2.1,  $C^* \subseteq E(H)$ , para alguma matróide  $H \in \Lambda_2^u(M)$ . Assim,  $C^*$  é um cocircuito de  $H$ . Temos dois casos a considerar:

*Caso 1.*  $|E(H) - C^*| \geq 2$ .

Como a operação de 2-soma comuta com a operação de deleção, segue que  $M \setminus C^*$  é a 2-soma das matróides pertencentes ao conjunto  $[\Lambda_2^u(M) - \{H\} \cup \{H \setminus C^*\}]$ . Por hipótese,  $M \setminus C^*$  é conexa, então  $H \setminus C^*$  é conexa. Portanto  $C^* \in \mathcal{R}^*(H)$ . O resultado segue desde que  $H \in \Lambda_2^t(M)$ . Podemos assumir que  $H$  é um circuito ou um cocircuito. Em ambas os casos chegamos a uma contradição já que  $H \setminus C^*$  é uma matróide conexa tendo, no mínimo, dois elementos.

*Caso 2.*  $|E(H) - C^*| \leq 1$ .

Como  $M$  não é 3-conexa, segue que  $E(H) - E(M) \neq \emptyset$ . (Isto é,  $H$  deve ter um elemento que rotule uma aresta de  $T_M$ ). Assim  $E(H) = C^* \cup b$ , onde  $b$  rotula uma aresta de  $T_M$ . Então,  $r(H) = r(\{b\}) + 1 = 2$ . Como  $M$  é simples e co-simples, segue

que  $H \cong U_{2,n}$ , para algum  $n \geq 4$ . Em particular,  $H \in \Lambda_2^t(M)$  e  $C^* \in \mathcal{R}_{\{b\}}^*(H)$ .

## CAPÍTULO 3

# MATRÓIDES SEM COCIRCUITOS NÃO-SEPARADORES

Neste capítulo será demonstrado que uma matróide 3-conexa  $M$  sem cocircuitos não-separadores evitando um 2-subconjunto  $A$  de  $E(M)$  é um  $A$ -ouriço. Primeiro será provado um resultado similar, considerando a mais a hipótese que a deleção de todo elemento de  $M$  que não está em  $A$  destrói a 3-conexidade da matróide.

### 3.1 RESULTADOS PRELIMINARES

Os seguintes resultados serão enunciados e freqüentemente utilizados adiante. Os dois próximos lemas são conhecidos e podem ser encontrados em [21].

**Lema 3.1.1** *Seja  $M$  uma matróide e  $e$  um laço ou um colaço de  $M$ , então  $M \setminus e = M/e$ .*

**Lema 3.1.2** *Seja  $M$  uma matróide. Suponha que  $e$  é um elemento de  $M$  tal que  $M/e$  é conexa mas  $M$  não, então  $e$  é um laço ou um colaço de  $M$ .*

É fácil ver que:

**Lema 3.1.3** *Seja  $M$  uma matróide 3-conexa e  $X \subseteq E(M)$  tal que  $M \setminus X$  é 3-conexa. Se  $r(M) = r(M \setminus X)$ , então  $M \setminus x$  é 3-conexa para cada  $x \in X$ .*

Em [18], Oxley provou o resultado seguinte para matróides  $n$ -conexas. Enunciaremos particularmente o caso em que  $n$  é igual a três.

**Lema 3.1.4** *Seja  $M$  uma matróide 3-conexa e  $\{x, y\}$  um 2-subconjunto de  $E(M)$  tal que  $M \setminus x$  não é 3-conexa e  $M \setminus x/y$  é 3-conexa. Então, existe uma tríade  $T^*$  de  $M$  contendo  $x$  e  $y$ .*

Refinaremos este lema em um caso particular, a saber:

**Lema 3.1.5** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa e  $A$  um 2-subconjunto de  $E(M)$  tal que  $\mathcal{R}_A^*(M) = \emptyset$ . Se  $\{e, x\}$  é um 2-subconjunto de  $E(M) - A$  tal que  $M \setminus x$  não é 3-conexa e  $M/e \setminus x$  é 3-conexa, então existe uma tríade não-separadora  $T^*$  de  $M$  tal que  $\{e, x\} \subseteq T^*$  e  $T^* \cap A = \{x'\}$ , onde  $T^* = \{e, x, x'\}$ . Além disso,  $y' \neq x'$  quando  $y \neq x$  e  $M \setminus y$  não é 3-conexa, sendo  $M/e \setminus y$  3-conexa.*

*Demonstração.* Pelo Lema 3.1.4, existe tríade  $T^*$  de  $M$  tal que  $\{e, x\} \subseteq T^*$ . Sendo  $M/e \setminus x$  3-conexa, temos que  $(M/e \setminus x) \setminus x'$  é conexa, onde  $T^* = \{e, x, x'\}$ . Mas  $e$  é um colaço de  $M \setminus x \setminus x'$ . Assim, pelo Lema 3.1.1,

$$M \setminus T^* = (M \setminus x \setminus x') \setminus e = (M \setminus x \setminus x') / e = (M/e \setminus x) \setminus x'$$

é conexa. Logo,  $T^*$  é não-separadora. Como toda tríade não-separadora de  $M$  intercepta  $A$  e  $\{e, x\} \subseteq E(M) - A$ , temos que  $T^* \cap A = \{x'\}$ . Se  $y \neq x$ ,  $M/e \setminus y$  for 3-conexa e  $M \setminus y$  não for 3-conexa, existe  $y' \in A$  tal que  $T'^* = \{e, y, y'\}$  é uma tríade não-separadora de  $M$ . Note que  $y' \neq x'$ ; caso contrário,  $\{e, x\}$  geraria  $x'$  e  $y'$  em  $M^*$ , o que não acontece porque toda linha numa matróide binária simples tem, no máximo, três elementos. ■

**Lema 3.1.6** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa. Se  $e$  é um elemento de  $M$  e  $D^*$  é um cocircuito de  $M$  que gera  $e$  em  $M^*$ , então existe partição  $\{X_1, X_2\}$  de  $D^*$  tal que  $D_i^* = X_i \cup e$  é um cocircuito de  $M$ , para  $i \in \{1, 2\}$ .*

*Demonstração.* Como  $D^*$  gera  $e$  em  $M^*$ , existe circuito  $C^*$  em  $M^*$  tal que  $e \in C^* \subseteq D^* \cup e$ . Como  $M^*$  é binária, pelo Lema 2.1.10,

$$C^* \Delta D^* = \bigcup_{i=1}^k C_i^*,$$

onde  $C_i^*$  é cocircuito de  $M$  e  $C_i^* \cap C_j^* = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Observe que  $C_i^* - D^* \subseteq \{e\}$ , pois  $(C^* \Delta D^*) - D^* = \{e\}$ . Como  $D^*$  é circuito de  $M^*$  segue que:

- (i)  $k = 1$  e  $C^* \Delta D^*$  é cocircuito de  $M$ ; ou
- (ii)  $k > 1$  e então  $e \in C_i^*$  para um único  $i$ , digamos  $i = 1$ . Daí  $C_j^* - D^* = \emptyset$ , para  $j \geq 2$ . Logo,  $C_2^* = D^*$ ,  $C_1^* = \{e\}$  e  $k = 2$ .

Temos que (ii) não ocorre porque  $M$  é 3-conexa. Fazendo  $D_1^* = C^*$ ,  $D_2^* = C^* \Delta D^*$  e  $X_i = D_i^* - e$ , segue que  $\{X_1, X_2\}$  é uma partição de  $D^*$  tal que  $D_i^* = X_i \cup e$  é cocircuito de  $M$  para  $i \in \{1, 2\}$ . ■

**Lema 3.1.7** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa e  $A$  um subconjunto de  $E(M)$ . Suponha que  $D^* \in \mathcal{R}_A^*(M/e)$  para  $e \in E(M) - A$ . Se  $M|(H \cup e)$  não é conexa, onde  $H = E(M/e) - D^*$ , então existe partição  $\{X_1, X_2\}$  de  $D^*$  tal que  $D_i^* = X_i \cup e \in \mathcal{R}_A^*(M)$ .*

*Demonstração.* Como  $[M|(H \cup e)]/e = (M/e)|H$  é conexa, pelo Lema 3.1.2, segue que  $e$  é um colaço de  $M|(H \cup e) = M \setminus D^*$ . Então  $e$  é laço de  $M^*/D^*$  e  $r_{M^*/D^*}(e) = 0$ . Mas  $r_{M^*/D^*}(e) = r_{M^*}(D^* \cup e) - r_{M^*}(D^*)$ , logo  $r_{M^*}(D^* \cup e) = r_{M^*}(D^*)$  e temos que  $D^*$  gera  $e$  em  $M^*$ . Pelo Lema 3.1.6, existe partição  $\{X_1, X_2\}$  de  $D^*$  tal que  $D_i^* = X_i \cup e$  é um cocircuito de  $M$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Como  $M$  é 3-conexa segue que  $\min\{|X_1|, |X_2|\} \geq 2$ . Agora vejamos que  $M \setminus D_i^*$  é conexa para  $i \in \{1, 2\}$ , digamos  $i = 1$ . Como  $e$  é um colaço de  $M|(H \cup e)$ , segue que  $[M|(H \cup e)] \setminus e = M|H$  é conexa. Conseqüentemente  $M \setminus D_1^*$  tem componente conexa  $N$  tal que  $H \subseteq E(N)$ , pois  $D_1^* \subseteq D^* \cup e$  e daí  $H = E(M) - (D^* \cup e) \subseteq E(M) - D_1^*$ . Se  $x \in X_2$ , então  $r(H \cup x) = r(H) + 1 = r(M) - 1$ . Logo, se  $y \in X_2 - x$ , como  $X_2 \subseteq E(M) - D_1^*$  e  $H \subseteq E(M) - D_1^*$ , teremos que  $H \cup x \subseteq H \cup \{x, y\} \subseteq E(M) - D_1^*$ . Então

$$r(M) - 1 \leq r(H \cup \{x, y\}) \leq r(M) - 1$$

e concluímos que  $r(H \cup \{x, y\}) = r(H \cup x)$ , ou seja,  $H \cup x$  gera  $X_2$ . Para  $y \in X_2 - x$ , seja  $C_y$  um circuito de  $M$  tal que  $y \in C_y \subseteq H \cup x$ . Note que  $C_y \cap H \neq \emptyset$  porque  $|C_y| \geq 3$ . Temos que

$$H \cup X_2 \subseteq E(N) \subseteq E(M) - D_1^* = [E(M) - (D^* \cup e)] \cup X_2 = H \cup X_2.$$

Assim  $E(N) = H \cup X_2$ . Logo  $M \setminus D_1^*$  é conexa. ■

**Lema 3.1.8** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa e  $A$  um subconjunto de  $E(M)$  tal que  $\mathcal{R}_A^*(M) = \emptyset$ . Suponha que  $r(M) \geq 3$ . Se  $M/e \setminus X$  é 3-conexa para algum  $e \in E(M) - A$  e  $X \subseteq E(M) - (A \cup e)$ , com  $r(M/e \setminus X) = r(M/e)$ , então  $\mathcal{R}_A^*(M/e \setminus X) = \emptyset$ .*

*Demonstração.* Suponha que existe  $C^* \in \mathcal{R}_A^*(M/e \setminus X)$ . Logo,  $H = E(M/e \setminus X) - C^*$  é um hiperplano conexo de  $M/e \setminus X$ . Temos que  $r_{M/e}(H) = r_{M/e \setminus X}(H) = r_M(M/e \setminus X) -$

$1 = r(M/e) - 1$ . Se  $H$  não é fechado em  $M/e$ , considere  $\overline{H} = cl_{M/e}(H) = E(M/e) - D^*$ . Temos que  $\overline{H}$  é um hiperplano conexo de  $M/e$  e assim  $D^*$  é um cocircuito não-separador de  $M/e$ . Além disso,  $D^*$  é um cocircuito de  $M$ . Se  $M|(\overline{H} \cup e)$  é conexa temos que  $D^* \in \mathcal{R}_A^*(M)$ ; chega-se a uma contradição. Conseqüentemente, pelo Lema 3.1.7, temos que existe partição  $\{X_1, X_2\}$  de  $D^*$  tal que  $D_i^* = X_i \cup e \in \mathcal{R}_A^*(M)$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Assim  $\mathcal{R}_A^*(M) \neq \emptyset$ , o que é uma contradição. Logo,  $\mathcal{R}_A^*(M/e \setminus X) = \emptyset$ . ■

**Lema 3.1.9** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa e  $A$  um 2-subconjunto de  $E(M)$ . Considere  $\{e, x\} \subseteq E(M) - A$ , onde  $M/e$  é 3-conexa e  $M/e \setminus x$  é um  $A$ -ouriço. Se  $y \in E(M) - (A \cup \{x, e\})$  é tal que  $M/e \setminus y$  não é 3-conexa e  $T^*$  é a única tríade de  $M/e \setminus x$  contendo  $y$ , então:*

(i) as únicas possíveis 2-separações de  $M' = M/e \setminus y$  são :

$$\{T^* - y, E(M') - (T^* - y)\} \text{ e } \{(T^* - y) \cup x, E(M') - ((T^* - y) \cup x)\}; e$$

(ii)  $E(M/e) - (T^* \cup x)$  gera  $x$  em  $M/e$  ou  $(T^* - y) \cup x$  é um triângulo de  $M/e$ . Ainda mais, há no máximo um elemento  $y \in E(M) - (A \cup x)$  tal que  $(T_y^* - y) \cup x$  é um triângulo de  $M/e$ , onde  $T_y^*$  é a única tríade de  $M/e \setminus x$  contendo  $y$ .

*Demonstração.* (i) Seja  $\{Z, W\}$  uma 2-separação de  $M'$ . (Lembrar que  $M' = M/e \setminus y$  como definida no enunciado deste lema). Então:

$$r_{M'}(Z) + r_{M'}(W) - r(M') = 1. \quad (3.1)$$

Temos dois casos a considerar:

*Caso 1.* Se  $\{Z, W\}$  é uma 2-separação não minimal de  $M'$ .

Se  $x \notin Z$ , por (3.1), segue-se que:

$$r_{M' \setminus x}(Z) + r_{M' \setminus x}(W - x) - r(M' \setminus x) \leq 1.$$

Se  $x \in Z$ , novamente por (3.1), temos que:

$$r_{M' \setminus x}(Z - x) + r_{M' \setminus x}(W) - r(M' \setminus x) \leq 1.$$

Como  $M/e \setminus x$  é um  $A$ -ouriço, a única 2-separação de  $M' \setminus x = (M/e \setminus x) \setminus y$  é  $\{T^* - y, E(M' \setminus x) - (T^* - y)\}$ . Assim, se  $x \notin Z$ ,  $Z = T^* - y$  e  $W = E(M') - (T^* - y)$  e se  $x \in Z$ ,  $Z - x = T^* - y$ , logo,  $Z = (T^* - y) \cup x$  e  $W = E(M') - ((T^* - y) \cup x)$ .

*Caso 2.* Se  $\{Z, W\}$  é uma 2-separação minimal de  $M'$ .

Sem perda de generalidade podemos supor que  $|Z| = 2$ . Como  $M/e$  é 3-conexa, então  $T'^* = Z \cup y$  é uma tríade de  $M/e$ . Assim, há cocircuito de  $M/e \setminus x$  contido em  $T'^* - x$ . Como  $T'^* - x$  tem no máximo 3 elementos, temos que  $T'^* - x = T'^*$  é tríade de  $M/e \setminus x$ , pois  $M/e \setminus x$  é 3-conexa. Logo,  $T'^* = T^*$  e temos que  $Z = T^* - y$ , o que mostra o item (i) deste lema.

(ii) Pelo item anterior, caso tomemos  $Z = T^* - y$ , obtemos:

$$r_{M'}(Z) + r_{M'}(E(M') - Z) - r(M') = 1; \text{ ou} \quad (3.2)$$

$$r_{M'}(Z \cup x) + r_{M'}(E(M') - (Z \cup x)) - r(M') = 1. \quad (3.3)$$

Mas  $Z$  é um conjunto 2-separador de  $(M/e \setminus y) \setminus x$  pertencente a única 2-separação de  $(M/e \setminus y) \setminus x$ . Logo:

$$r_{M' \setminus x}(Z) + r_{M' \setminus x}(E(M') - (Z \cup x)) - r(M' \setminus x) = 1.$$

Se (3.2) acontece,  $r_{M'}(E(M') - Z) = r_{M' \setminus x}(E(M' \setminus x) - Z)$ , ou equivalentemente,  $r_{M/e}(E(M/e) - T^*) = r_{M/e}(E(M/e) - (T^* \cup x))$ . Logo,  $E(M/e) - (T^* \cup x)$  gera  $x$  em  $M/e$ . Se (3.3) acontece,  $r_{M'}(Z \cup x) = r_{M' \setminus x}(Z) = 2$ . Assim,  $(T^* - y) \cup x$  é dependente em  $M'$ . Como as únicas 2-separações de  $M'$  foram determinadas no item anterior, em  $M'$   $x$  não pode estar em paralelo com nenhum outro elemento e temos que  $(T^* - y) \cup x$  é um triângulo de  $M'$  e conseqüentemente de  $M/e$ . Como toda linha numa matróide binária simples tem, no máximo, três elementos, temos que  $x$  está unicamente determinado por  $\{y', a\}$  em  $M/e$ , onde  $T^* = \{y, y', a\}$ , com  $a \in A$ . Logo,  $x$  determina unicamente  $y'$  e daí  $y$ . Então, existe, no máximo, um  $y \in E(M) - (A \cup x)$  tal que  $(T_y^* - y) \cup x$  é um triângulo de  $M/e$ , onde  $T_y^*$  é a única tríade de  $M/e \setminus x$  contendo  $y$ . ■

**Lema 3.1.10** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa e  $A$  um 2-subconjunto de  $E(M)$  tal que  $\mathcal{R}_A^*(M) = \emptyset$ . Se  $r(M) = 3$ , então  $M$  é um  $A$ -ouriço.*

*Demonstração.* As únicas matróides binárias 3-conexas de posto 3, a menos de isomorfismo, são  $F_7$  e  $M(K_4)$ . Se  $M \cong F_7$ , pela sua representação geométrica, vemos que há sempre uma linha contendo os elementos de  $A$ . Esta linha é um hiperplano e seu complementar é um cocircuito não-separador de  $M$  evitando  $A$ , ou seja,  $M$  não

satisfaz as hipóteses do teorema. Se  $M \cong M(K_4)$ , só teremos que  $\mathcal{R}_A^*(M) = \emptyset$  quando  $A$  for um conjunto de duas arestas não adjacentes de  $K_4$ . Neste caso, vemos facilmente que  $M$  é um  $A$ -ouriço. ■

### 3.2 MATRÓIDES SEM COCIRCUITOS NÃO-SEPARADORES

**Proposição 3.2.1** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa e  $A$  um 2-subconjunto de  $E(M)$  tal que  $\mathcal{R}_A^*(M) = \emptyset$ . Se  $r(M) \geq 3$  e  $M \setminus w$  não é 3-conexa para todo  $w \in E(M) - A$ , então  $M$  é um  $A$ -ouriço.*

*Demonstração.* A prova desta Proposição será por indução em  $r(M)$ . Se  $r(M) = 3$ , pelo Lema 3.1.10, segue que este resultado vale. Considere  $M$  satisfazendo as hipóteses desta Proposição com  $r(M) \geq 4$ . Precisamos dos seguintes lemas para concluir este resultado.

**Lema 3.2.2** *Seja  $T^*$  uma tríade não-separadora de  $M$  tal que  $|T^* \cap A| = 1$ . Se  $e \in T^* - A$ , temos que  $M/e$  não é 3-conexa.*

*Demonstração.* Suponha que este resultado não é verdadeiro. Seja  $X$  um subconjunto maximal de  $E(M) - (A \cup e)$  tal que  $M/e \setminus X$  é 3-conexa e  $r(M/e \setminus X) = r(M/e)$ , digamos  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Pelo Lema 3.1.3,  $M/e \setminus x_i$  é 3-conexa para cada  $x_i \in X$ . Pelo Lema 3.1.5, para cada  $x_i \in X$  existe  $x'_i$  tal que  $\{e, x_i, x'_i\}$  é uma tríade removível de  $M$  com  $x'_i \in A$ . Se  $i \neq j$  então  $x'_i \neq x'_j$  já que toda linha em  $M^*$  tem, no máximo, três elementos. Logo,  $k \leq |A|$  ou equivalentemente  $|X| \leq 2$ .

Pelo Lema 3.1.8, temos que  $\mathcal{R}_A^*(M/e \setminus X) = \emptyset$  e pela escolha de  $X$ ,  $(M/e \setminus X) \setminus y$  não é 3-conexa para todo  $y \in E(M/e \setminus X) - A$ . Logo, por hipótese de indução,  $M/e \setminus X$  é um  $A$ -ouriço. Assim, uma representação binária para  $M/e \setminus X$  é dada por:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a & b & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-3} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $\{a_0, a_1, \dots, a_{n-3}, a, b, c_0, c_1, \dots, c_{n-3}\}$  são os elementos de  $M/e \setminus X$  e  $A = \{a, b\}$ . Observe que  $n \geq 4$ , já que  $n - 1 = r(M/e \setminus X) = r(M) - 1$  e então  $r(M) = n$ .

Consideraremos 3 casos:

*Caso 1.*  $|X| = 2$ .

Neste caso, uma representação binária para  $M$  é dada por:

$$\left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a & e & b & c_0 & \cdots & c_{n-3} & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & s_1 & t_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & s_2 & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & s_{n-2} & t_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & s_{n-1} & t_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-1} & s_n & t_n \end{array} \right].$$

Para a matróide dual de  $M$  temos a seguinte representação binária:

$$\left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} b & c_0 & \cdots & c_{n-3} & x_1 & x_2 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a & e \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & r_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & r_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & r_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & r_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & r_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-2} & s_{n-1} & s_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} & t_n \end{array} \right].$$

Como vimos, para cada  $x_i \in X$ , existe  $x'_i \in A$  tal que  $\{e, x_i, x'_i\}$  é tríade de  $M$ , com  $x_1 \neq x_2$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $\{e, x_1, a\}$  e  $\{e, x_2, b\}$  são tríades de  $M$ . Temos o seguinte sistema de equações de acordo com a representação binária de  $M^*$  acima:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 + 1 = 0 \\ r_2 + 1 = 0 \\ \vdots \\ r_{n-1} + 1 = 0 \\ s_n + s_{n-1} = 1 \\ t_n + t_{n-1} = 0 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 + 1 = 0 \\ r_2 + 0 = 0 \\ \vdots \\ r_{n-1} + 0 = 0 \\ s_n + 0 = 0 \\ t_n + 0 = 1 \end{array} \right.$$

Como o sistema é impossível, este caso não acontece.

*Caso 2.*  $|X| = 1$ .

Para simplificar a notação faça  $x_1 = x$ . Então, para  $X = \{x\}$ , uma representação binária para  $M$  é dada por:

$$\left[ \begin{array}{cccccc|cccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a & e & b & c_0 & \cdots & c_{n-3} & x \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & s_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & s_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & s_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-1} & s_n \end{array} \right].$$

Para a matróide dual de  $M$  temos a seguinte representação binária:

$$\left[ \begin{array}{cccccc|cccc} b & c_0 & \cdots & c_{n-3} & x & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a & e \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & r_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & r_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & r_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & r_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & r_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-2} & s_{n-1} & s_n \end{array} \right].$$

Como vimos, há uma tríade de  $M$  contendo  $\{e, x\}$  que intercepta  $A$ . Então:

$$\{e, x, a\} \text{ é tríade de } M; \text{ ou} \quad (3.4)$$

$$\{e, x, b\} \text{ é tríade de } M. \quad (3.5)$$

Vamos lidar com estes dois casos simultaneamente. Primeiro mostraremos que  $M/e \setminus y$  não é 3-conexa para todo  $y \in E(M) - (A \cup x)$ .

Se (3.4) acontece, sendo  $\{e, x, a\}$  um triângulo de  $M^*$ , pela sua representação vemos que  $r_1 = r_2 = \dots = r_{n-1} = 1$  e  $s_n = s_{n-1} + 1$ .

Assim,  $M^*$  fica representada pela matriz:

$$\begin{bmatrix} b & c_0 & \cdots & c_{n-3} & x & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a & e \\ \left[ \begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-2} & s_{n-1} & s_n \end{array} \right. & \end{bmatrix}.$$

Se  $M/e \setminus y$  for 3-conexa para algum  $y \in E(M) - (A \cup x)$ , pelo Lema 3.1.5, teremos que  $\{y, e, a\}$  ou  $\{y, e, b\}$  será tríade de  $M$ , o que, pela representação de  $M^*$  acima, vemos que não pode acontecer. Logo,  $M/e \setminus y$  não é 3-conexa para todo  $y \in E(M) - (A \cup x)$ .

Se (3.5) ocorre, como  $\{e, x, b\}$  é um triângulo de  $M^*$ , pela sua representação teremos que  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = \dots = r_{n-1} = 0$  e  $s_n = 1$ . Neste caso, a representação de  $M^*$  é dada por:

$$\begin{bmatrix} b & c_0 & \cdots & c_{n-3} & x & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a & e \\ \left[ \begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-2} & s_{n-1} & 1 \end{array} \right. & \end{bmatrix}.$$

Se  $M/e \setminus y$  for 3-conexa para algum  $y \in E(M) - (A \cup x)$ , pelo Lema 3.1.5, teremos que  $\{y, e, a\}$  ou  $\{y, e, b\}$  será tríade de  $M$ , o que, pela representação de  $M^*$  acima, vemos que não é viável. Logo,  $M/e \setminus y$  não é 3-conexa para todo  $y \in E(M) - (A \cup x)$ .

Denote por  $T_i^*$  a tríade  $\{a_{i-1}, c_{i-1}, a\}$  de  $M/e \setminus X$ , para  $i = 1, \dots, n-2$ . Como  $M/e \setminus y$  não é 3-conexa para todo  $y \in E(M) - (A \cup x)$ , podemos usar o Lema 3.1.9 e temos que  $x$  é gerado por  $E(M/e) - (T_i^* \cup x)$  para todo  $i$  com a possível exceção de um, que denotaremos por  $j$ , onde  $y = a_{j-1}$  ou  $y = c_{j-1}$  é tal que  $(T_j^* - y) \cup x$  é um triângulo de  $M/e$ . Pela representação de  $M/e$ , note que a  $i$ -ésima e a  $(n-1)$ -ésima

linhas diferem apenas nas colunas indexadas por  $a_{i-1}, a, c_{i-1}$  e talvez  $x$ . Logo, qualquer combinação linear das colunas da representação de  $M/e$  indexadas pelos elementos em  $E(M/e) - \{a_{i-1}, a, c_{i-1}, x\} = E(M/e) - (T_i^* \cup x)$  tem a  $i$ -ésima e a  $(n-1)$ -ésima entradas iguais. Como  $x$  é gerado por  $E(M/e) - (T_i^* \cup x)$  para todo  $i$  com a possível exceção de  $j$ , temos que  $s_i = s_{n-1}$  para todo  $i$  com a possível exceção de  $j$ .

Se esta exceção realmente ocorre, seja  $y \in E(M) - (A \cup X)$  tal que  $(T_j^* - y) \cup x$  é um triângulo de  $M/e$  e veja  $y, y', a$  e  $x$  como colunas da representação de  $M/e$  onde  $\{y, y'\} = \{a_{j-1}, c_{j-1}\}$ . Temos dois casos a considerar:

$$\text{Se } y = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)^t \text{ em } M/e \text{ com a } j\text{-ésima entrada nula.} \quad (3.6)$$

$$\text{Se } y = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t \text{ em } M/e \text{ com a } j\text{-ésima entrada 1.} \quad (3.7)$$

No primeiro caso,  $y' = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$  com a  $j$ -ésima entrada 1 e  $x = a + y' = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1)$  em  $M/e$ . Logo,  $s_{n-1} \neq s_i$  para todo  $i \notin \{j, n-1\}$ , o que é uma contradição.

No segundo caso,  $y' = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)^t$  com a  $j$ -ésima entrada nula e  $x = a + y' = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1, 0)$  em  $M/e$ . Logo,  $s_{n-1} \neq s_i$  para todo  $i \notin \{j, n-1\}$ , o que é uma contradição.

Assim, não existe  $y \in E(M) - (A \cup x)$  tal que  $(T_j^* - y) \cup x$  é um triângulo de  $M/e$ . Então  $s_1 = s_2 = \dots = s_{n-1}$  e temos que  $s_i = 1$  para  $i = 1, \dots, n-1$  pois  $M/e$  é 3-conexa. Mas, se (3.4) acontece,  $M$  é um  $\{a, b\}$ -ouriço; uma contradição. Se (3.5) acontece, a coluna indexada por  $x$  é igual à coluna indexada por  $b$  na representação de  $M$ ; um absurdo. Logo, não existe  $x \in E(M) - A$  tal que  $M/e \setminus x$  é 3-conexa.

*Caso 3.*  $X = \emptyset$ .

Neste caso, uma representação binária para  $M$  é dada por:

$$\left[ \begin{array}{cccccc|cccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a & e & b & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-1} \end{array} \right].$$

Para a matróide dual de  $M$  temos a seguinte representação binária:

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} b & c_0 & \cdots & c_{n-3} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a & e \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & r_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & r_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & r_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & r_{n-3} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & r_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & r_{n-1} \end{array} \right].$$

Para  $f \in T^* - (A \cup e)$ , temos que há uma tríade  $T_f^*$  de  $M/e$  que contém  $f$ , pois  $M/e$  é um  $A$ -ouriço. Como em todas as tríades de  $M/e$ ,  $T_f^*$  é uma tríade de  $M$  e  $a \in T_f^*$ , assim  $T_f^* = \{f, f', a\}$ , para algum  $f' \in E(M) - (A \cup T^*)$ . Por hipótese  $T^* = \{e, f, g\}$  para algum  $f \in E(M) - (A \cup e)$  e  $g \in A$ . Se  $g = a$  então  $T^* \Delta T_f^* = \{e, f'\}$ ; um absurdo. Logo  $g \neq a$  e temos que  $g = b$ . Assim,  $T^* = \{e, f, b\}$ .

Seja  $T_i = \{a_{i-1}, c_{i-1}, b\}$  um triângulo de  $M/e$ . Então,  $T_i$  ou  $T_i \cup e$  é um circuito de  $M$ . Se  $T_i$  é triângulo de  $M$ , por ortogonalidade com  $T^*$ , temos que  $f \in T_i$ . Logo, no máximo um triângulo de  $M/e$  é triângulo de  $M$  e concluímos que se  $f \notin T_i$ , então  $T_i \cup e$  é circuito de  $M$ . Assim, pela representação de  $M$  acima, temos que  $r_{i+1} + r_1 = 1$ . Isto ocorre para todo  $i$  com exceção de  $j$  para o qual  $f \in \{a_{j-1}, c_{j-1}\}$ . Note que, por ortogonalidade com  $T^*$ , necessariamente  $T_j = \{a_{j-1}, c_{j-1}, b\}$  é um triângulo de  $M$ . Temos dois casos a considerar:

(i) Se  $r_1 = 1$ . Neste caso,  $r_{j+1} = 1$  e  $r_i = 0$  para  $i \neq 1$  e  $i \neq j + 1$ . Para  $j = 1$ , considere o cocircuito de  $M$ ,  $D_1^* = \{c_2, \dots, c_{n-3}, a_1, e\}$ . Observe que

$$M \setminus D_1^* = M | \{c_0, c_1, a_0, a_2, \dots, a_{n-3}, a, b\}.$$

Em  $M$  temos que  $b = a_0 + c_0$  e  $a_0 + a_2 + \cdots + a_{n-3} + a = c_1$  são combinações lineares mínimas. Logo,  $M \setminus D_1^*$  é conexa. Assim,  $D_1^* \in \mathcal{R}_A^*(M)$ , o que é uma contradição. Para  $j \geq 2$ , considere o cocircuito de  $M$  dado por  $D_j^* = \{c_0, \dots, c_{j-3}, c_j, \dots, c_{n-3}, a_{j-2}, e\}$ . Observe que

$$M \setminus D_j^* = M | \{c_{j-2}, c_{j-1}, a_0, \dots, a_{j-3}, a_{j-1}, \dots, a_{n-3}, a, b\}.$$

Em  $M$  temos que  $b = a_{j-1} + c_{j-1}$  e  $a_0 + \dots + a_{j-3} + a_{j-1} + \dots + a_{n-3} + a = c_{j-2}$  são combinações lineares mínimas. Logo,  $M \setminus D_j^*$  é conexa. Assim,  $D_j^* \in \mathcal{R}_A^*(M)$ , o que é uma contradição e temos que este caso não ocorre.

(ii) Se  $r_1 = 0$ . Neste caso,  $r_{j+1} = 0$  e  $r_i = 1$  para  $i \neq 1$  e  $i \neq j+1$ . Para  $j = 1$  considere o cocircuito de  $M$ ,  $D_1'^* = \{c_1, \dots, c_{n-3}, e\}$ . Observe que

$$M \setminus D_1'^* = M \setminus \{c_0, a_0, \dots, a_{n-3}, a, b\}.$$

Em  $M$ , temos que  $b = a_0 + c_0$  e  $a_1 + \dots + a_{n-3} + a = c_0$  são combinações lineares mínimas. Logo  $M \setminus D_1^*$  é conexa. Assim,  $D_1^* \in \mathcal{R}_A^*(M)$ , o que é uma contradição. Para  $j \geq 2$ , considere o cocircuito de  $M$ ,  $D_j'^* = \{c_0, \dots, c_{j-2}, c_j, \dots, c_{n-3}, e\}$ . Note que

$$M \setminus D_j'^* = M \setminus \{c_{j-1}, a_0, \dots, a_{n-3}, a, b\}.$$

Em  $M$  temos que  $b = a_{j-1} + c_{j-1}$  e  $a_0 + \dots + a_{j-2} + a_j + \dots + a_{n-3} + a = c_{j-1}$  são combinações lineares mínimas. Logo,  $M \setminus D_j^*$  é conexa. Assim,  $D_j^* \in \mathcal{R}_A^*(M)$ , o que é uma contradição. De (i) e (ii) concluímos que  $M/e$  não é 3-conexa.  $\blacksquare$

**Lema 3.2.3** *Seja  $C$  um circuito de  $M \setminus A$  e  $T^*$  uma tríade não-separadora de  $M$  tal que  $T^* \cap C \neq \emptyset$  e  $|T^* \cap A| = 1$ . Então,  $T^* \cap C$  está contido em triângulo  $T$  de  $M$ .*

*Demonstração.* Seja  $\{e, f\} = C \cap T^*$ . Pelo Lema 3.2.2,  $M/e$  e  $M/f$  não são 3-conexas. Pelo dual do Lema do Triângulo de Tutte, temos que existem triângulos  $T_e$  e  $T_f$  de  $M$  que contêm  $e$  e  $f$  respectivamente. Se nem  $T_e$  nem  $T_f$  contêm  $\{e, f\}$ , por ortogonalidade com  $T^*$ ,  $T^* \cap A \subseteq T_e \cap T_f$ . Como  $|A| = 2$  e  $M$  não é uma roda, pelo dual do Lema 2.1.7 quando  $n=2$ , temos que  $(T_f - T^*) \cap A = \emptyset$  ou  $(T_e - T^*) \cap A = \emptyset$ . Suponha, sem perda da generalidade que  $(T_f - T^*) \cap A = \emptyset$ . Como  $M \setminus w$  não é 3-conexa para todo  $w \in E(M) - A$ , pelo Lema do Triângulo de Tutte, existe uma tríade  $T_x^*$  de  $M$  que contém  $x$ , onde  $\{x\} = T_f - T^*$ . Note que  $T_x^*$  contém  $\{f, x\}$ . Caso contrário, por ortogonalidade com  $T_e$  e  $T_f$  teríamos  $T_x^* \subseteq T_e \cup T_f$ , e  $\{T_e \cup T_f, E(M) - (T_e \cup T_f)\}$  seria uma 2-separação de  $M$ , logo  $\{f, x\} \subseteq T_x^*$ . Como toda tríade de  $M$  que intercepta um triângulo é não-separadora e  $\mathcal{R}_A^*(M) = \emptyset$ , temos que  $T_x^* \cap A \neq \emptyset$ . Seja  $\{x'\} = T_x^* \cap A$ . Se  $(T_e - T^*) \cap A = \emptyset$ , como  $M \setminus e$  e  $M \setminus y$  não são 3-conexas, onde  $\{y\} = T_e - T^*$ , pelo Lema do Triângulo de Tutte, temos que existe tríade  $T_y^*$  de  $M$  contendo  $y$ . Como  $T_y^* \cap T_e \neq \emptyset$ , temos que  $T_y^*$  intercepta  $A$ . Logo  $x' \in T_y^*$ , pois  $T_y^* \cap T_f = \emptyset$ . Pelo Lema

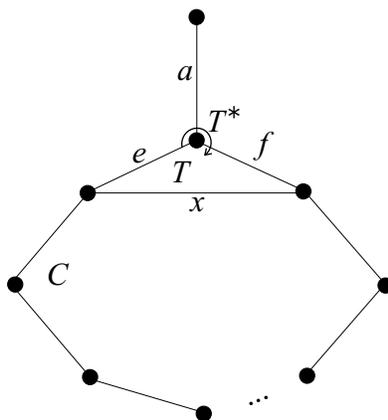
2.1.7,  $M$  será uma roda, o que é uma contradição. Assim  $(T_e - T^*) \cap A \neq \emptyset$ , logo  $y \in A$  e temos que  $y = x'$ . Por ortogonalidade de  $T_x^*$  com  $T_e$  e como  $M$  é 3-conexa, chega-se a uma contradição. Assim concluímos que  $T_e = T_f$  e fazendo  $T = T_e$  temos que  $C \cap T^* \subseteq T$ . ■

**Lema 3.2.4** *Seja  $C$  um circuito de  $M \setminus A$ . Então:*

- (i)  $|C| = 3$ ,  $C$  é componente conexa de  $M \setminus A$  e  $C$  gera  $A$  em  $M^*$ ; ou
- (ii)  $|C| = 4$  e há uma partição  $X_1, X_2$  de  $C$  e diferentes elementos  $a$  e  $b$  de  $A$  tais que  $X_i \cup a$  é tríade de  $M$  e  $X_i \cup b$  é triângulo de  $M$  para  $i \in \{1, 2\}$ .

Mais ainda, (i) ocorre para todo circuito  $C$  de  $M \setminus A$  ou (ii) ocorre para todo circuito  $C$  de  $M \setminus A$ .

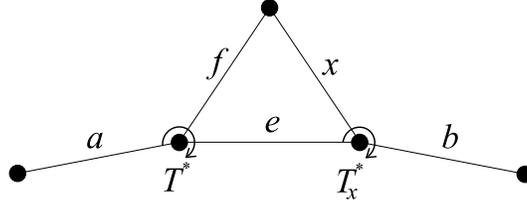
*Demonstração.* Pelo Teorema 2.1.12, há uma tríade não-separadora  $T^*$  de  $M$  tal que  $T^* \cap C \neq \emptyset$ . Como  $C \subseteq E(M) \setminus A$  e  $T^*$  é não-separadora, podemos supor sem perda de generalidade que  $T^* - C = \{a\}$ , onde  $A = \{a, b\}$ . Pelo Lema 3.2.3,  $T^* \cap C = \{e, f\}$  está contida em triângulo  $T$  de  $M$ . Sendo  $T = \{e, f, x\}$  e  $T^* = \{e, f, a\}$ , segue que a matróide dos ciclos do grafo da Figura 3.1 é isomorfa a  $M|(C \cup T^* \cup T)$ . Temos dois casos a considerar:



**Figura 3.1.**  $M|(C \cup T^* \cup T)$ .

*Caso 1.* Se  $x \notin A$ . Neste caso, pelo Lema do Triângulo de Tutte, há tríade  $T_x^*$  de  $M$  que contém  $x$ . Por ortogonalidade com  $T$ ,  $T_x^*$  contém  $e$  ou  $f$ . Como  $\{e, f\} \subseteq C$ , por ortogonalidade de  $T_x^*$  com  $C$ , a menos que  $C = T$ , temos que o terceiro elemento de  $T_x^*$  está em  $C \cap A$  já que  $T_x^*$  é não-separadora; chega-se a uma contradição. Logo, se

$x \notin A$ , concluímos que  $C = T$ . A matróide dos ciclos do grafo da Figura 3.2 é isomorfa a  $M|(C \cup T^* \cup T_x^*)$ .



**Figura 3.2.**  $M|(C \cup T^* \cup T_x^*)$ .

Assim,  $|C| = 3$  e como  $A = (T^* - C) \cup (T_x^* - C)$ , temos que  $C$  gera  $A$  em  $M^*$ . Observe que  $C$  está contido em uma classe em série de  $M \setminus A$ . Como  $C$  é circuito, será uma classe em série de  $M \setminus A$ . Se  $C' \cap C \neq \emptyset$ , para um circuito  $C'$  de  $M \setminus A$ , então  $C \subseteq C'$  e daí  $C' = C$ . Conseqüentemente  $C$  é uma componente conexa de  $M \setminus A$ .

*Caso 2.* Se  $x \in A$ . Observe que  $x \neq a$ , caso contrário teríamos um triângulo que é tríade em  $M$ . O Teorema 2.1.12 garante a existência de outra tríade não-separadora  $C^*$  de  $M$ , que intercepta  $C$  além de  $T^*$ . Seja  $t \in C^* - C$ , então  $t \in A$ , pois  $C^*$  é não-separadora. Sendo  $C^* = \{r, s, t\}$ , onde  $C^* \cap C = \{r, s\}$ , pelo Lema 3.2.3, há um triângulo em  $M$  que contém  $\{r, s\}$ . Seja  $T' = \{r, s, y\}$  tal triângulo. Se  $y \notin A$ , analogamente ao caso anterior concluímos que  $C = T'$  e temos que vale o item (i) deste Lema. Se  $y \in A$ , então se  $y = a$  temos que  $t = x$  e por ortogonalidade de  $C^*$  com  $T$  concluímos que  $|\{r, s\} \cap \{e, f\}| = 1$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $r \in \{e, f\}$ . Neste caso,  $\{e, f, a, x, s\}$  é um conjunto separador de  $M$ , a menos que  $M$  seja uma roda, o que não acontece. Logo,  $y \neq a$ , o que implica que  $y = x$  e  $a = t$ . Assim, temos que  $T \Delta T' = \{e, f, x\} \Delta \{r, s, y\} = \{e, f, r, s\}$  é um circuito contido em  $C$ . Logo,  $C = \{e, f, r, s\}$  e temos que  $|C| = 4$ . Além disso, sendo  $X_1 = \{e, f\}$ ,  $X_2 = \{r, s\}$  e  $b = y$  concluímos que  $\{X_1, X_2\}$  é uma partição de  $C$  tal que  $X_i \cup a$  é uma tríade de  $M$  e  $X_i \cup b$  é um triângulo de  $M$  para  $i = 1, 2$ .

Considere  $C$  e  $D$  circuitos de  $M \setminus A$  tais que  $|C| = 3$  e  $|D| = 4$ . Como por (i)  $C$  é uma componente conexa de  $M \setminus A$ , segue que  $C \cap D = \emptyset$ . Pelo que mostramos em (ii) existem  $\alpha \in A$  e  $X \subseteq D$  tais que  $\alpha \cup X$  é um triângulo de  $M$ . Por (i) existe  $Y \subseteq C$  tal que  $\alpha \cup Y$  é tríade de  $M$ . Um absurdo pois  $(\alpha \cup X) \cap (\alpha \cup Y) = \alpha$ . Logo (i) ou (ii) sempre ocorre para todo circuito  $C$  de  $M \setminus A$ . ■

**Lema 3.2.5** *Se  $M \setminus A$  contém um triângulo, então todas as componentes conexas de  $M \setminus A$  são triângulos de  $M$ .*

*Demonstração.* Assuma que  $M \setminus A$  contém um triângulo  $T = \{x, y, z\}$ . Pelo item (i) do Lema 3.2.4, todo circuito de  $M \setminus A$  é um triângulo de  $M$ , que é componente conexa de  $M \setminus A$ . Suponha que  $M \setminus A$  tem um colaço  $e$ . Então  $T_e^* = A \cup e$  é uma tríade de  $M$ . Novamente, pelo item (i) do Lema 3.2.4,  $T$  gera  $A$  em  $M^*$ , isto é, existem  $T_1^*$  e  $T_2^*$  tríades de  $M$  contendo  $a$  e  $b$  respectivamente, com  $T_1^* \cup T_2^* - A = \{x, y, z\}$  e  $A = \{a, b\}$ . Sem perda de generalidade assuma que  $T_1^* = \{x, z, a\}$  e  $T_2^* = \{y, z, b\}$ . Assim,  $T_e^* \Delta T_1^* = \{x, z, b, e\}$  é cocircuito de  $M$  e  $(T_e^* \Delta T_1^*) \Delta T_2^* = \{x, y, e\}$  também é um cocircuito  $C^*$  de  $M$ . Então,  $x$  é um elemento essencial de  $M$ , pois está num triângulo e numa tríade de  $M$ . Pelo Lema 2.1.9, temos que  $C^*$  é uma tríade não-separadora de  $M$ , o que é uma contradição, pois  $C^* \cap A = \emptyset$ . Assim, não existe colaço em  $M \setminus A$  e todas as componentes conexas de  $M \setminus A$  são triângulos de  $M$  o que prova este Lema. ■

Observe que  $M \setminus A$  contém um circuito  $C$ , senão  $r^*(M) \leq 2$  e  $M \cong U_{r,n}$  para inteiros  $r$  e  $n$  tais que  $n - r \leq 2$ , o que não ocorre. Considere este tal circuito  $C$ . Pelo Lema 3.2.4,  $|C| = 3$  ou  $|C| = 4$ . No primeiro caso, pelo item (i) do Lema 3.2.4 e pelo Lema 3.2.5, temos que  $M \setminus A$  será uma coleção de triângulos que não se interceptam e geram  $A$  em  $M^*$ . Sendo  $T$  um dos triângulos de  $M \setminus A$  temos que  $M|(T \cup A)$  é isomorfa à matróide dos ciclos do grafo mostrado na Figura 3.2 e vemos que  $M|(T \cup A)$  é a união de duas tríades que se interceptam em um elemento. Escolha  $t_i \in T_i$ , onde  $T_1, \dots, T_n$  são os triângulos de  $M \setminus A$ , de forma que  $t_i$  pertença às duas tríades contidas em  $T_i \cup A$ . Então  $\bigcup_{i=1}^n (T_i - t_i)$  é base de  $M \setminus A$  e conseqüentemente de  $M$ . Logo,  $A \cup \{t_1, \dots, t_n\}$  é uma cobase de  $M$ . Sendo  $T_i = \{r_i, s_i, t_i\}$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $A = \{a, b\}$ , temos que uma representação binária para  $M^*$  é dada por:

$$I_{n+2} = \begin{bmatrix} a & b & t_1 & t_2 & \cdots & t_n & r_1 & s_1 & r_2 & s_2 & \cdots & r_n & s_n \\ \hline & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,  $M^* \cong M(K''_{3,n})$ , onde  $n$  é o número de componentes conexas de  $M \setminus A$  e  $K''_{3,n}$  é o grafo da Figura 3.3. Neste caso,  $\mathcal{R}_A^*(M) \neq \emptyset$ , o que é uma contradição.

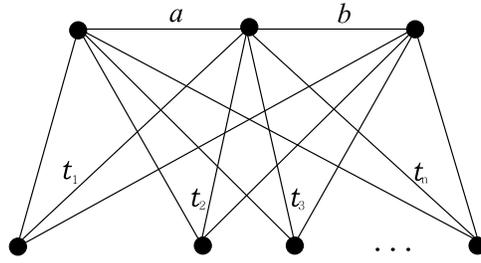


Figura 3.3.  $K''_{3,n}$ .

Assim  $|C| = 4$  e o item (ii) do Lema 3.2.4 acontece para todo circuito de  $M \setminus A$ . Se  $b \in A$  é gerado por  $C$  em  $M$ , então  $b$  é gerado por todo circuito de  $M \setminus A$  em  $M$ . Logo, toda classe em série de  $M \setminus a$  que não contém  $b$  possui dois elementos. Além disso, temos que se  $u \in \text{cosi}(M \setminus a)$ , então  $\{u, b\}$  é um circuito de  $\text{cosi}(M \setminus a)$ . Assim,  $\text{cosi}(M \setminus a) \cong U_{1,k+2}$ , digamos  $E(\text{cosi}(M \setminus a)) = \{a_0, \dots, a_k, b\}$ . Para  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ , seja  $c_i$  o outro elemento da classe em série de  $M \setminus a$  que contém  $a_i$ . Então,  $\{a_0, a_1, \dots, a_k, b\}$  é uma base para  $M$ ,  $\{a_i, c_i, a_j, c_j\}$  são circuitos de  $M$  para 2-subconjunto  $\{i, j\}$  de  $\{0, 1, \dots, k\}$  e  $\{a_i, c_i, b\}$  são triângulos de  $M$  para  $i = 0, 1, \dots, k$ . Como  $M$  é conexa, considere  $D$  um circuito de  $M$  contendo  $\{a, b\}$ . Escolha os elementos  $a_1, \dots, a_k$  de  $\text{cosi}(M \setminus a)$  de forma que  $|D \cap \{a_0, a_1, \dots, a_k\}|$  seja máximo. Por ortogonalidade,  $D \cap \{a_i, c_i\} \neq \emptyset$  para toda classe em série de  $M \setminus a$ . Temos que  $D$  contém todos os elementos  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  da base de  $M$  em questão. (Se  $D$  contivesse um  $c_i$  escolha  $a_i$  em vez de  $c_i$  como elemento de  $\text{cosi}(M \setminus a)$ ). Logo,  $D = \{a_0, a_1, \dots, a_k, a, b\}$ . Assim, uma representação binária para  $M$  é dada por:

$$\left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_k & a & b & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_k \\ & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array} \right].$$

Então  $M$  é um  $A$ -ouriço, como queríamos mostrar. ■

**Teorema 3.2.6** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa com  $r(M) \geq 3$ . Se  $A$  é um 2-subconjunto de  $E(M)$  tal que  $\mathcal{R}_A^*(M) = \emptyset$ , então  $M$  é um  $A$ -ouriço.*

*Demonstração.* Pelo Lema 3.1.10, podemos supor que  $r(M) \geq 4$ . Escolha  $X \subseteq E(M) - A$  maximal tal que  $M \setminus X$  é 3-conexa e  $r(M \setminus X) = r(M)$ . Se  $X = \emptyset$ , pela Proposição 3.2.1, o resultado segue. Então  $|X| \geq 1$  e trataremos 2 casos.

*Caso 1.* Se  $|X| = 1$ . Neste caso, sendo  $X = \{x\}$ , temos que  $M \setminus x$  é 3-conexa e  $(M \setminus x) \setminus y$  não é 3-conexa para todo  $y \in E(M) - A$ . Pela Proposição 3.2.1,  $M \setminus x$  é um  $A$ -ouriço e uma representação binária para  $M$  é dada por:

$$\left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a & b & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & x \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & 1 & x_{n-3} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & x_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x_n \end{array} \right].$$

Observe que  $r(M) = n$  daí  $n \geq 4$ .

Uma representação binária para  $M^*$  é dada por:

$$\begin{bmatrix} b & c_0 & \cdots & c_{n-2} & x & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{bmatrix}.$$

Note que podemos supor sem perda de generalidade que  $x_1 = \cdots = x_s = 1$ ,  $x_{s+1} = \cdots = x_{n-1} = 0$  e  $x_n \in \{0, 1\}$ . Vejamos o que acontece quando  $x_n = 0$  e o que acontece quando  $x_n = 1$ .

(i) Se  $x_n = 0$ . Como  $M$  é 3-conexa, pela representação de  $M$  vemos que  $s \geq 2$ . Conseqüentemente, pela representação de  $M^*$ , temos que  $\{a_0, c_0, a, x\}$  e  $\{a_1, c_1, a, x\}$  são cocircuitos de  $M$ . Logo,  $\{a_0, c_0, a_1, c_1\} = \{a_0, c_0, a, x\} \Delta \{a_1, c_1, a, x\}$  é cocircuito de  $M$  que evita  $A$ . Vejamos que este é um cocircuito não-separador. De fato,

$$M \setminus \{a_0, c_0, a_1, c_1\} = M | \{a_2, c_2, \dots, a_{n-2}, c_{n-2}, a, b, x\}.$$

Vendo  $a_{i-1}, c_{i-1}, a$ , e  $x$  como colunas da matriz que representa  $M$  temos que:

$$a_{i-1} + c_{i-1} = b \text{ para } i = 3, \dots, n-1 \text{ e}$$

$$x + b + a + (a_s + \cdots + a_{n-2}) = 0$$

são combinações lineares mínimas. Destas equações segue que  $M \setminus \{a_0, c_0, a_1, c_1\}$  é conexa e chega-se a uma contradição, pois  $\mathcal{R}_A^*(M) = \emptyset$ .

(ii) Se  $x_n = 1$ . Neste caso, se  $s \geq 2$  teremos, como antes, que  $\{a_0, c_0, a_1, c_1\} = \{a_0, c_0, a\} \Delta \{a_1, c_1, a\}$  é um cocircuito de  $M$ . Assim, novamente verifica-se que

$$M \setminus \{a_0, c_0, a_1, c_1\} = M | \{a_2, c_2, \dots, a_{n-2}, c_{n-2}, a, b, x\}.$$

Considerando  $a_{i-1}, c_{i-1}, a$ , e  $x$  como colunas da matriz que representa  $M$ , temos que:

$$a_{i-1} + c_{i-1} = b \text{ para } i = s+1, \dots, n-1;$$

$$a_0 + \cdots + a_{s-1} + x + a = 0 \text{ e}$$

$$a_s + \cdots + a_{n-2} + b + x = 0$$

são combinações lineares mínimas. Concluimos que  $\mathcal{R}_A^*(M) \neq \emptyset$ ; chega-se a uma contradição. Se  $s = 1$ , temos que  $\{a_1, c_1, a, x\}$  e  $\{a_2, c_2, a, x\}$  são cocircuitos de  $M$ , já que  $n \geq 4$ . Então

$$\{a_1, c_1, a_2, c_2\} = \{a_1, c_1, a, x\} \Delta \{a_2, c_2, a, x\}$$

é um cocircuito de  $M$  que evita  $A$ . Vejamos que este é um cocircuito não-separador. De fato,

$$M \setminus \{a_1, c_1, a_2, c_2\} = \{a_0, c_0, a_3, c_3, \dots, a_{n-2}, c_{n-2}, a, b, x\}.$$

Considerando  $a_{i-1}, c_{i-1}, a$ , e  $x$  como colunas da matriz que representa  $M$ , temos que:

$$a_{i-1} + c_{i-1} = b \text{ para } i = 1, 4, \dots, n - 1 \text{ e}$$

$$a_0 + x + a = 0$$

são combinações lineares mínimas. Concluimos que  $\{a_2, c_2, a_3, c_3\}$  é um cocircuito não-separador; chega-se a uma contradição. Então, se  $|X| = 1$  e  $X$  é maximal tal que  $M \setminus X$  3-conexa, temos que  $\mathcal{R}_A^*(M) \neq \emptyset$ .

*Caso 2.* Se  $|X| \geq 2$ .

Neste caso, sendo  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ , temos que  $N = M \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$  é tal que  $N \setminus x_k$  é 3-conexa e  $(N \setminus x_k) \setminus y$  não é 3-conexa para todo  $y \in E(N) - (A \cup x_k)$ . Pelo que acabamos de mostrar no caso 1, temos que  $\mathcal{R}_A^*(N) \neq \emptyset$ . Seja  $C^* \in \mathcal{R}_A^*(N)$ . Então,  $H = E(N) - C^*$  é um hiperplano conexo de  $N$  e  $H = E(M) - (C^* \cup \{x_1, \dots, x_{k-1}\})$ . Faça  $H' = cl_M(H)$ . Então  $H'$  é um hiperplano conexo de  $M$  e chega-se a uma contradição porque, no caso,  $\mathcal{R}_A^*(M) \neq \emptyset$ . Assim,  $X = \emptyset$  e o resultado segue. ■

Como mostramos no Capítulo 1 que um  $A$ -ouriço não tem cocircuitos não-separadores evitando  $A$ , do último Teorema segue o seguinte resultado:

**Corolário 3.2.7** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa tal que  $r(M) \geq 3$ . Então, para um 2-subconjunto  $A$  de  $E(M)$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)  $\mathcal{R}_A^*(M) = \emptyset$ .

(ii) *Para um inteiro  $n$  excedendo dois, há um isomorfismo  $\varphi$  de  $M$  em  $O_n$  tal que  $\varphi(A) = \{a, b\}$ , onde  $b$  é o corpo e  $a$  o cocorpo de  $O_n$ .* ■

## CAPÍTULO 4

# COCIRCUITOS EM MATRÓIDES 3-CONEXAS

Neste capítulo serão provados os principais resultados obtidos nesta tese. Para isto, serão considerados alguns resultados preliminares.

### 4.1 RESULTADOS PARA MATRÓIDES 3-CONEXAS

Tutte [26] provou o seguinte resultado:

**Lema 4.1.1** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa e não gráfica tal que  $r(M) = 4$ . Então  $M$  tem um menor isomorfo a  $F_7$ ,  $F_7^*$ , ou  $M^*(K_{3,3})$ .*

Em [24] Seymour provou que:

**Teorema 4.1.2** *Seja  $M$  uma matróide regular 3-conexa. Então  $M$  é gráfica, ou co-gráfica, ou é isomorfa a  $R_{10}$  ou tem menor isomorfo a  $R_{12}$ .*

**Lema 4.1.3** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa satisfazendo  $r^*(M) \geq 4$  e  $A$  um subconjunto de  $E(M)$ . Suponha que  $e$  é um elemento de  $M$  tal que  $si(M/e)$  é 3-conexa. Se  $X \subseteq E(M) - e$  é escolhido tal que  $si(M/e) = M/e \setminus X$  e  $A' = A - (X \cup e)$  tem cardinalidade máxima, então para cada  $C^* \in \mathcal{R}_{A'}^*(si(M/e))$ , há  $D^* \in \mathcal{C}^*(M)$  tal que  $C^* \subseteq D^* \subseteq C^* \cup X$  e*

- (i)  $D^* \in \mathcal{R}_A^*(M)$ ; ou
- (ii) há  $D_1^*, D_2^* \in \mathcal{R}_{A-e}^*(M)$  tais que  $D_1^* \cap D_2^* = \{e\}$ ,  $D_1^* \cup D_2^* = D^* \cup e$  e  $D_1^* \Delta D_2^* = D^*$ ; além disso, neste caso,  $e$  é o único colaço de  $M \setminus D^*$ .

*Demonstração.* Suponha que  $C^* \in \mathcal{R}_{A'}^*(si(M/e))$ . Seja  $D^*$  o cocircuito de  $M/e$  obtido a partir de  $C^*$ , trocando cada um dos seus elementos pela classe em paralelo de  $M/e$  que o contém. Note que como  $D^*$  é um cocircuito de  $M/e$ , então  $D^*$  é cocircuito de

$M$ . Como  $C^* \cap A' = \emptyset$ , segue que  $D^* \cap A = \emptyset$  pela escolha de  $X$ . Note também que  $C^* \subseteq D^* \subseteq C^* \cup X$ . Além disso,  $H = E(M/e) - D^*$  é um hiperplano conexo de  $M/e$  porque  $C^* \in \mathcal{R}_{A'}^*(si(M/e))$ , conseqüentemente  $D^* \in \mathcal{R}_{A-e}^*(M/e)$ . Se  $M|(H \cup e)$  é conexa, então  $D^* \in \mathcal{R}_A^*(M)$  e (i) segue. Se  $M|(H \cup e)$  não é conexa, então, pelo Lema 3.1.7, a primeira parte do item (ii) deste Lema segue. Para concluir (ii), precisamos apenas provar que  $e$  é o único colaço de  $M \setminus D^*$ . Isto segue, porque  $M \setminus D^*$  tem apenas duas componentes conexas, uma delas sendo  $M|H$  que não é um colaço porque  $r(H) \geq r(M) - 2 \geq 2$ . ■

**Lema 4.1.4** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa satisfazendo  $r^*(M) \geq 4$ . Seja  $A$  um subconjunto de  $E(M)$  e suponha que  $e$  é um elemento de  $M$  tal que  $si(M/e)$  é 3-conexa. Se  $X \subseteq E(M) - e$  é escolhido tal que  $si(M/e) = M/e \setminus X$  e  $A' = A - (X \cup e)$  tem cardinalidade máxima, então*

(i) quando  $e \notin A$ ,

$$dim_A(M) \geq dim_{A'}(si(M/e))$$

com igualdade se e somente se  $\mathcal{R}_A^*(M) = \mathcal{R}_{A \cup e}^*(M)$ ; e

(ii) quando há uma cadeia  $T_1, T_2, T_3$  de  $M$  tal que  $e \in T_1 \cap T_2 \cap T_3$ ,  $T_2$  é um triângulo de  $M$  e  $e \in A$ , então

$$dim_A(M) \geq dim_{A'}(si(M/e)) - 1.$$

*Demonstração.* Fixe uma base  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{R}_{A'}^*(si(M/e))$  para o subespaço do espaço dos cociclos de  $si(M/e)$  gerados por  $\mathcal{R}_{A'}^*(si(M/e))$ . Construiremos um subconjunto  $\mathcal{B}'$  de  $\mathcal{R}_A^*(M)$  como se segue: para cada  $C^* \in \mathcal{B}$  definiremos um subconjunto  $\chi_{C^*}$  de  $\mathcal{R}_A^*(M)$ . Pelo Lema 4.1.3, se  $C^* \in \mathcal{B}$  existe  $D^* \in \mathcal{C}^*(M)$ , com  $C^* \subseteq D^*$  e

(iii)  $D^* \in \mathcal{R}_A^*(M)$ ; ou

(iv) há  $D_1^*, D_2^* \in \mathcal{R}_{A-e}^*(M)$  tais que  $D_1^* \cap D_2^* = \{e\}$ ,  $D_1^* \cup D_2^* = D^* \cup e$  e  $D_1^* \Delta D_2^* = D^*$ .

Quando (iii) ocorre, definimos  $\chi_{C^*}$  como  $\{D^*\}$ . Quando (iv) ocorre, definimos  $\chi_{C^*} = \emptyset$  caso  $e \in A$ , ou  $\chi_{C^*} = \{D_1^*, D_2^*\}$  caso  $e \notin A$ . Tome

$$\mathcal{B}' = \bigcup_{C^* \in \mathcal{B}} \chi_{C^*}.$$

Note que  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{R}_A^*(M)$ .

Agora mostraremos (i). Para cada  $C^* \in \mathcal{B}$ ,  $D^*$  pertence ao espaço gerado por  $\mathcal{B}'$ . Assim, a dimensão deste espaço é, no mínimo, igual à dimensão do espaço gerado por  $\mathcal{B}$ , isto é,

$$\dim_A(M) \geq \dim_{A'}(si(M/e)). \quad (4.1)$$

Além do mais, quando, para algum  $C^* \in \mathcal{R}_{A'}^*(si(M/e))$ , (iv) acontece, então  $\mathcal{B}'$  gera um espaço com dimensão maior e não temos igualdade em (4.1). Se (iii) acontece para todo  $C^* \in \mathcal{R}_{A'}^*(si(M/e))$  e há  $D'^* \in \mathcal{R}_A^*(M)$  tal que  $e \in D'^*$ , então podemos adicionar  $D'^*$  a  $\mathcal{B}'$  e  $\mathcal{B}'$  gera um subespaço de dimensão maior. Novamente não teremos a igualdade em (4.1). Isto é, só teremos igualdade em (4.1) se  $\mathcal{R}_A^*(M) = \mathcal{R}_{A \cup e}^*(M)$ .

Para provar o item (ii) deste Lema, precisamos mostrar que

$$\text{há, no máximo, um } C^* \in \mathcal{R}_{A'}^*(si(M/e)) \text{ tal que (iv) acontece.} \quad (4.2)$$

Suponha que (iv) acontece para algum  $C^* \in \mathcal{R}_{A'}^*(si(M/e))$ . Sejam  $D_1^*, D_2^*$  como descritos em (iv). Note que, por ortogonalidade,  $|T_2 \cap D_i^*|$  é par e  $e \in T_2 \cap D_i^*$ . Portanto  $|T_2 \cap D_i^*| = 2$ , digamos  $c \in T_2 \cap D_1^*$  e  $d \in T_2 \cap D_2^*$ . Observe que  $c \neq d$  pois  $D_1^* \cap D_2^* = \{e\}$ . Logo,  $T_2 - e = \{c, d\} \subseteq D_1^* \cup D_2^*$ . Então  $T_2 - e \subseteq D^*$ . Mas  $S = (T_1 \cup T_3) - (T_2 - e)$  é uma classe em série ou um conjunto de colaços de  $M \setminus (T_2 - e)$ . Por (iv),  $e$  é um colaço de  $M \setminus D^*$ . Então  $S \setminus D^*$  é um conjunto de colaços de  $M \setminus D^*$ . Pelo Lema 4.1.3 (ii),  $M \setminus D^*$  tem apenas um colaço  $e$ , então  $S - e \subseteq D^*$ . Isto é,  $T_1 \Delta T_3$  é um subconjunto de  $D^*$ . Assim,  $D^* = T_1 \Delta T_3$ , ou seja  $D^*$  está unicamente determinado. Logo, (iv) só acontece para um único  $C^*$ , então (4.2) segue. ■

## 4.2 PROPRIEDADES DE UM CONTRA-EXEMPLO MÍNIMO

Seja  $\mathcal{F}$  uma família de matróides binárias e  $N$  uma matróide binária com  $E(N) = A$ . Faça  $\mathcal{F}_N = \{M \in \mathcal{F} : A \subseteq E(M) \text{ e } M|A = N\}$ . Para racionais  $\alpha$  e  $\beta$ , com  $0 < \alpha \leq 1$  e  $\beta \leq -3\alpha$  definimos:

$$\mathcal{F}_N^{\alpha, \beta} = \{M \in \mathcal{F}_N : M \text{ é 3-conexa e } \dim_A(M) < \alpha r(M) + \beta\}.$$

Nesta seção obteremos propriedades de um elemento de  $\mathcal{F}_N^{\alpha, \beta}$  com cardinalidade mínima. Isto é, estudaremos um contra-exemplo mínimo para a seguinte afirmação: Se

$M$  é uma matróide binária 3-conexa tal que  $A \subset E(M)$  e  $M|A = N$ , então  $\dim_A(M) \geq \alpha r(M) + \beta$ .

**Lema 4.2.1** *Seja  $M$  um membro de  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$  com tamanho mínimo. Se  $e \in E(M) - A$ , então,  $M \setminus e$  não é 3-conexa.*

*Demonstração.* Suponha que  $M \setminus e$  é 3-conexa. Pela escolha de  $M$  temos que  $M \setminus e \notin \mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$  e então

$$\dim_A(M \setminus e) \geq \alpha r(M \setminus e) + \beta = \alpha r(M) + \beta.$$

Se  $C^* \in \mathcal{R}_A^*(M \setminus e)$ , então  $H = E(M) - (C^* \cup e)$  é um hiperplano conexo de  $M \setminus e$ . Assim,  $H$  ou  $H \cup e$  é um hiperplano conexo de  $M$  e então  $\mathcal{R}_A^*(M) \cap \{C^*, C^* \cup e\} \neq \emptyset$ . Logo,  $\dim_A(M) \geq \dim_A(M \setminus e)$ ; chega-se a uma contradição. ■

**Lema 4.2.2** *Seja  $M$  um membro de  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$  com tamanho mínimo. Se  $e \in E(M) - cl_M(A)$  e  $si(M/e)$  é 3-conexa, então  $\mathcal{R}_A^*(M) = \mathcal{R}_{A \cup e}^*(M)$ .*

*Demonstração.* Faça a simplificação de  $M/e$  de maneira que  $A' = A \cap E(si(M/e))$  tenha cardinalidade máxima. Neste caso  $A' = A$ , pois  $e \in E(M) - cl_M(A)$ . Pelo Lema 4.1.4 (i),

$$\dim_A(M) \geq \dim_A(si(M/e)). \quad (4.3)$$

Suponha que  $si(M/e) = M/e \setminus X$ . Como  $A' = A$ , segue que  $X \cap A = \emptyset$ . Vejamos que  $si(M/e) \in \mathcal{F}_N$ . De fato, como  $M|A = N$ , temos que

$$(M/e)|A = N, \quad (4.4)$$

pois  $\mathcal{C}(M/e)|A = \mathcal{C}(N)$ , caso contrário  $e \in cl_M(A)$ . Temos ainda que  $\mathcal{C}(M/e \setminus X)|A = \mathcal{C}(M/e)|A$ , já que  $X \cap A = \emptyset$ . Logo,

$$(M/e \setminus X)|A = (M/e)|A. \quad (4.5)$$

Por (4.4) e por (4.5), concluímos que  $(M/e \setminus X)|A = N$ , ou seja,  $si(M/e) \in \mathcal{F}_N$ . Mas por hipótese,  $si(M/e) \notin \mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$ . Logo,

$$\dim_A(si(M/e)) \geq \alpha r(si(M/e)) + \beta = \alpha(r(M) - 1) + \beta \geq \alpha r(M) + \beta - 1. \quad (4.6)$$

Por (4.3), (4.6) e pela escolha de  $M$ , chega-se a uma contradição a menos que

$$\dim_A(M) = \dim_A(\text{si}(M/e)).$$

Pelo item (i) do Lema 4.1.4, temos que  $\mathcal{R}_A^*(M) = \mathcal{R}_{A \cup e}^*(M)$ . ■

**Lema 4.2.3** *Seja  $M$  um membro de  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$  com tamanho mínimo. Se  $T^*$  é uma tríade de  $M$  que intercepta pelo menos um triângulo de  $M$  então  $T^* \cap \text{cl}_M(A) \neq \emptyset$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $T^* \cap \text{cl}_M(A) = \emptyset$ . Considere  $T$  um triângulo de  $M$  tal que  $T^* \cap T \neq \emptyset$ . Seja  $e \in T^* - T$ . Pelo Corolário 2.1.2, temos que  $\text{si}(M/e)$  é 3-conexa. Assim, podemos usar o Lema 4.2.2 e concluimos que  $\mathcal{R}_A^*(M) = \mathcal{R}_{A \cup e}^*(M)$ . Como  $T^* \cap T \neq \emptyset$ , então para  $f \in T^* \cap T$ , temos que  $f$  é essencial; chega-se a uma contradição do Lema 2.1.9 porque  $T^* \in \mathcal{R}_A^*(M) - \mathcal{R}_{A \cup e}^*(M)$ . Assim,  $T^* \cap \text{cl}_M(A) \neq \emptyset$ . ■

### 4.3 COCIRCUITOS NÃO-SEPARADORES EVITANDO UM CONJUNTO

Nesta seção fornecemos um limite inferior para  $\dim_A(M)$  quando  $M|A$  não tem colaço e quando  $A$  é um triângulo de  $M$ . Para isto, precisamos do seguinte resultado:

**Proposição 4.3.1** *Seja  $M$  um membro de  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$  de tamanho mínimo. Se  $N$  não tem colaço então  $r^*(M) \leq |A|$ .*

*Demonstração.* É suficiente mostrar que  $M \setminus A$  é independente em  $M$ . Neste caso, existe cobase de  $M$  contida em  $A$  e, conseqüentemente,  $r^*(M) \leq |A|$ . Suponha que este resultado não é verdadeiro e considere um circuito  $C$  de  $M \setminus A$ . Pelo Lema 4.2.1, temos que  $M \setminus e$  não é 3-conexa para todo  $e \in C$ . Assim, pelo Lema 2.1.12, existe tríade não-separadora  $T^*$  de  $M$  interceptando  $C$ . Vejamos que  $T^* \cap \text{cl}_M(A) = \emptyset$ . Observe que  $(T^* - C) \cap A = \emptyset$ , caso contrário  $T^* - C$  conteria um colaço de  $M|A$ . Assim,  $T^* \cap A = \emptyset$ . Se  $e \in T^* \cap \text{cl}_M(A)$ , então existe circuito  $D$  de  $M$  tal que  $e \in D \subseteq A \cup e$ . Por ortogonalidade de  $D$  com  $T^*$ , temos uma contradição. Logo,  $T^* \cap \text{cl}_M(A) = \emptyset$ . Note que se  $f \in T^* \cap C$ , pelo Lema 4.2.2,  $M/f$  não é 3-conexa. Pelo dual do Lema do Triângulo de Tutte, segue que há triângulo de  $M$  interceptando  $T^*$ ; uma contradição do Lema 4.2.3. ■

**Teorema 1.4.6** *Seja  $M$  uma matr oide binária 3-conexa. Se  $A$    um subconjunto de  $E(M)$  tal que  $M|A$  não tem colaços, então*

$$\dim_A(M) \geq r(M) - (2^{|A|} - |A| - 1).$$

*Demonstração.* Suponha que  $N$    uma matr oide sem colaços. Faça  $\alpha = 1$  e  $\beta = -(2^{|A|} - |A| - 1)$ . Se  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta} = \emptyset$ , terminamos. Sen o, seja  $M$  um membro de  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$  com tamanho mínimo. Pela Proposição 4.3.1,  $r^*(M) \leq |A|$ . Assim,  $|E(M)| \leq 2^{r^*(M)} - 1$  e concluímos que  $r(M) \leq 2^{r^*(M)} - r^*(M) - 1$ . Como  $r^*(M) \leq |A|$  e  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 2^x - x - 1$    uma função crescente, segue que  $r(M) \leq 2^{|A|} - |A| - 1$ . Temos que  $M \in \mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$ , logo,

$$0 \leq \dim_A(M) < r(M) - (2^{|A|} - |A| - 1);$$

uma contradição. Então  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta} = \emptyset$  e o resultado segue. ■

Para uma matr oide binária 3-conexa  $M$ , Lemos [14] mostrou que  $\dim_A(M) \geq r(M) - 1$  quando  $A$    um subconjunto unitário de  $E(M)$ . Fizemos o cálculo da dimensão do subespaço do espaço dos cociclos gerado pelos cocircuitos não-separadores que evitam um triângulo  $A$  de uma matr oide binária 3-conexa  $M$  e obtivemos que  $\dim_A(M) \geq r(M) - 2$ . Note que este resultado   bem próximo daquele obtido por Lemos e ainda   o melhor possível, pois se  $A$    um triângulo de uma matr oide gráfica, este limite   atingido. Além disso, o Teorema 1.4.7   uma consequência do próximo Teorema. Pois se  $M$    uma matr oide binária 3-conexa, pelo Teorema 1.1.5,  $\dim(M) = r(M)$ . Pelo Teorema 1.1.4, para um elemento  $e \in A$ , existe cocircuito não-separador  $C_e^*$  de  $M$  contendo  $e$ . Mas  $C_e^*$  não   gerado por  $\mathcal{R}_A^*(M)$ , logo  $\dim_A(M) \leq r(M) - 1$ . Por ortogonalidade de  $A$  com  $C_e^*$ , existe  $f \in A - C_e^*$ . Considere  $C_f^*$  cocircuito não-separador de  $M$  contendo  $f$ . Temos que  $C_f^*$  não   gerado por  $\mathcal{R}_A^*(M) \cup \{C_e^*\}$ . Assim,  $\dim_A(M) \leq r(M) - 2$ .

**Teorema 4.3.2** *Seja  $M$  uma matr oide binária 3-conexa. Se  $A \subseteq E(M)$    um triângulo de  $M$ , então*

$$\dim_A(M) \geq r(M) - 2.$$

*Demonstração.* Seja  $N \cong U_{2,3}$ . Faça  $\alpha = 1$  e  $\beta = -2$ . Se  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta} = \emptyset$ , terminamos. Sen o, seja  $M$  um membro de  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$  com tamanho mínimo. Observe que  $M|E(N) = A$  não

tem colaço. Neste caso, pela Proposição 4.3.1,  $r^*(M) \leq |A| = 3$ . Mas as matróides 3-conexas binárias com coposto no máximo 3 são isomorfas a  $M(K_4)$  ou  $F_7^*$ . Para  $M(K_4)$ , este Teorema vale e  $F_7^*$  não tem triângulos. Chega-se a uma contradição e o resultado segue. ■

#### 4.4 CONTINUANDO AS PROVAS DOS RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção continuaremos a provar algumas propriedades de um contra-exemplo mínimo a fim de obter limites inferiores para  $\dim_A(M)$  quando  $A$  é um conjunto com dois elementos de uma certa matróide  $M$ . Note que o caso em que  $A$  está contido em um triângulo de  $M$  não será considerado, pois o Teorema 4.3.2 já fornece um limite inferior para  $\dim_A(M)$  que é o melhor possível neste caso. Por isto, tomaremos a família  $\mathcal{F}_N$  sobre uma matróide  $N \cong U_{1,1} \oplus U_{1,1}$  e assumiremos que  $cl_M(A) = A$ .

**Lema 4.4.1** *Seja  $M$  um membro de  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$  com tamanho mínimo. Suponha que  $T$  é um triângulo de  $M$  tal que  $A \not\subseteq T$ . Se  $e \in T - A$ , então há uma tríade  $T^*$  de  $M$  tal que  $e \in T^*$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 4.2.1,  $M \setminus f$  não é 3-conexa para cada  $f \in T - A$ . Como  $|T - A| \geq 2$ , pelo Lema do Triângulo de Tutte, segue que cada elemento de  $T - A$  pertence a uma tríade de  $M$ . ■

**Lema 4.4.2** *Seja  $M$  um membro de  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$  com tamanho mínimo. Se  $T_1, T_2, T_3$  é uma cadeia de  $M$  tal que  $T_2$  é um triângulo e não existe uma tríade de  $M$  além de  $T_1$  e  $T_3$  interceptando  $T_2$ , então  $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \not\subseteq A$ .*

*Demonstração.* Seja  $a \in T_1 \cap T_2 \cap T_3$  e suponha que  $a \in A$ . Seja  $\{e, f\} = T_2 - A$ . Mostraremos que neste caso  $si(M/a) = M/a \setminus e$  é uma matróide 3-conexa. De fato, pelo Corolário 2.1.2 aplicado para  $M^*$ , temos que  $si(M^*/e)$  é 3-conexa. Mas,  $si(M^*/e) = M^* \setminus a/e = (M/a \setminus e)^*$ . Assim,  $(si(M^*/e))^* = M/a \setminus e = si(M/a)$ . Então,  $si(M/a)$  é 3-conexa. Pelo Teorema 1.2.3, aplicado para  $si(M/a)$

$$\dim_{A-a}(si(M/a)) \geq r(si(M/a)) - 1 = r(M) - 2 \geq (\alpha r(M) + \beta) + 1. \quad (4.7)$$

Uma contradição, porque pelo Lema 4.1.4 (ii),

$$\dim_A(M) \geq \dim_{A-a}(si(M/a)) - 1. \quad (4.8)$$

Logo,  $a \notin A$  e o resultado segue. ■

**Lema 4.4.3** *Seja  $M$  um membro de  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$  com tamanho mínimo. Considere um triângulo  $T$  de  $M$  tal que  $|T - A| \geq 2$ . Então:*

- (i) *Se  $T \cap A \neq \emptyset$ , há uma tríade  $T^*$  de  $M$  tal que  $T, T^*$  ou  $T'^*, T, T^*$  para alguma tríade  $T'^*$  de  $M$  é um leque  $\mathcal{F}_T$  de  $M$  e  $(T - T^*) \cup (T^* - T) = A$ ; ou*
- (ii) *Se  $T \cap A = \emptyset$ , há tríades  $T_1^*$  e  $T_2^*$  de  $M$  tais que  $T_1^*, T, T_2^*$  é um leque  $\mathcal{F}_T$  de  $M$  e  $(T_1^* - T) \cup (T_2^* - T) = A$ .*

*Demonstração.* (i) Primeiro suponha que  $\{a\} = T \cap A$ , onde  $A = \{a, b\}$ . Se  $T - A = \{e, f\}$  pelo Lema 4.4.1, existem tríades  $T_e^*$  e  $T_f^*$  de  $M$  tais que  $e \in T_e^*$  e  $f \in T_f^*$ . Consideraremos três casos:

*Caso 1.* Se só há uma tríade de  $M$  interceptando  $T$ .

Neste caso,  $T_e^* = T_f^* = T^*$ , isto é, só há uma tríade de  $M$  contendo  $e$  e esta é a única tríade de  $M$  que contém  $f$ . Pelo Lema 4.2.3,  $T^* \cap A \neq \emptyset$  e assim,  $T^* = \{e, f, b\}$ . Se  $T, T^*$  não é um leque de  $M$  então existe triângulo  $T'$  de  $M$  interceptando  $T^*$  e  $T, T^*, T'$  é uma cadeia, já que não há outra tríade de  $M$  além de  $T^*$  interceptando  $T$ . Se existe um tal triângulo  $T'$ , seja  $\{g\} = T' - T^*$ , então  $g \notin A$  e pelo Lema 4.4.1, há tríade  $T_g^*$  de  $M$  contendo  $g$ . Pelo Lema 4.2.3 e por ortogonalidade, temos que  $T_g^* = \{g, f, a\}$  ou  $T_g^* = \{g, b, g'\}$ . Mas  $T_g^*$  não pode ser  $\{g, f, a\}$ , pois  $T^*$  é a única tríade de  $M$  contendo  $f$ . Note que se  $T_g^* = \{g, b, g'\}$  não há outra tríade além de  $T_g^*$  e  $T^*$  interceptando  $T'$ . De fato, caso existisse uma tal tríade, por ortogonalidade com  $T'$ , esta teria que conter  $\{g, f\}$ , o que não ocorre, pois  $T^*$  é a única tríade de  $M$  contendo  $f$  e concluímos que não há outra tríade além de  $T_g^*$  e  $T^*$  interceptando  $T'$ . Logo, podemos usar o Lema 4.4.2 e chega-se a uma contradição porque  $b \in T_g^* \cap T' \cap T^*$ . Assim,  $T'$  não existe e temos que  $T, T^*$  é um leque de  $M$ .

*Caso 2.* Se só existem duas tríades de  $M$  interceptando  $T$ .

Neste caso, podemos tomar  $T_e^* \neq T_f^*$ . Conseqüentemente não há outra tríade além de  $T_e^*$  e  $T_f^*$  interceptando  $T$ . Pelo Lema 4.4.2,  $a \notin T_e^* \cap T_f^*$ , digamos que  $a \notin T_e^*$ . Assim, por ortogonalidade,  $\{e, f\} = T_e^* \cap T$ . Pelo Lema 4.2.3,  $T_e^* \cap A \neq \emptyset$  e como  $a \notin T_e^*$  segue que  $b \in T_e^*$ . Agora provaremos que não há triângulo  $T'$  de  $M$  tal que  $T' \cap T_e^* \neq \emptyset$  e  $T' \neq T$ . Suponha que  $T'$  existe. Sendo  $T_e^* = \{e, f, b\}$ , temos que  $b \in T'$

e  $|T' \cap \{e, f\}| = 1$ . Se  $g \in T' - T_e^*$ , então  $g \neq a$ . (Caso contrário  $|T \cap T'| = 2$  e daí  $|T' \Delta T| = 2$ ). Pelo Lema 4.4.1, há uma tríade  $T_g^*$  de  $M$  tal que  $g \in T_g^*$ . Como  $M$  não é uma roda, segue que  $T_g^* \cap T = \emptyset$ . Assim,  $a \notin T_g^*$  e então  $b \in T_g^*$  pelo Lema 4.2.3. Observe que a cadeia  $T_e^*, T', T_g^*$  contradiz o Lema 4.4.2, porque  $b$  pertence aos três elos desta cadeia. Assim,  $T'$  não existe. Se  $T_e^*, T, T_f^*$  não é um leque de  $M$ , então há um triângulo  $T''$  de  $M$  diferente de  $T$  que intercepta  $T_f^*$ . Note que  $T'' \cap T_e^* \neq \emptyset$  e assim temos que  $a \in T''$ . Pelo Lema 4.4.1, há uma tríade  $T''^*$  de  $M$  tal que  $T_e^*, T, T_f^*, T'', T''^*$  é uma cadeia de  $M$  e  $T''^* \cap A = \emptyset$ , o que contradiz o Lema 4.2.3. Então,  $T_e^*, T, T_f^*$  é um leque de  $M$ .

*Caso 3.* Se existem três tríades de  $M$  interceptando  $T$ .

Neste caso, podemos supor que  $T_e^* \neq T_f^*$  e existe uma terceira tríade  $T^*$  de  $M$  interceptando  $T$ . Assuma, sem perda de generalidade, que  $T^*$  é a tríade que contém  $\{e, f\}$ . Suponha que existe triângulo  $T'$  de  $M$  que intercepta  $T_e^*$  de modo que  $T', T_e^*, T, T_f^*$  é uma cadeia. Por ortogonalidade de  $T'$  com  $T_e^*$ , temos que  $T' \cap T^* \neq \emptyset$  ou  $T' \cap T_f^* \neq \emptyset$ . Em ambos os casos  $T \cup T'$  será um conjunto 2-separador. Então,  $T'$  não existe. Analogamente se existe um triângulo  $T''$  de  $M$  que intercepta  $T_f^*$  de modo que  $T, T_f^*, T''$  seja cadeia, por ortogonalidade temos que  $T'' \cap T^* \neq \emptyset$  ou  $T'' \cap T_e^* \neq \emptyset$ . Em ambos os casos  $T \cup T''$  é um conjunto 2-separador e chega-se a uma contradição. Logo, se existem três tríades interceptando  $T$ , temos que  $T_e^*, T, T_f^*$  é um leque de  $M$ .

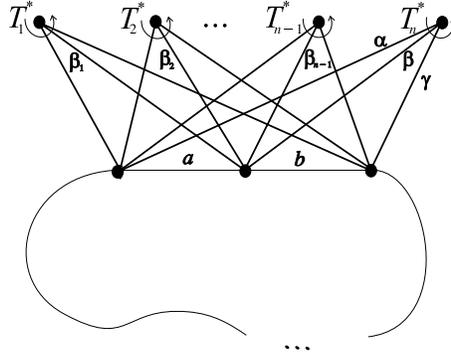
(ii) Agora suponha que  $T \cap A = \emptyset$ . Pelo Lema 4.4.1, há tríades  $T_1^*$  e  $T_2^*$  de  $M$  tais que  $T_1^*, T, T_2^*$  é uma cadeia de  $M$ . Pelo Lema 4.2.3,  $A = (T_1^* - T) \cup (T_2^* - T)$ . Se há um triângulo  $T'$  de  $M$  tal que  $T' \cap T_i^* \neq \emptyset$ , para algum  $i \in \{1, 2\}$ , digamos  $i = 2$ , e  $T' \neq T$ , então, pelo Lema 4.4.1, há uma tríade  $T_3^*$  de  $M$  tal que  $T_1^*, T, T_2^*, T', T_3^*$  é uma cadeia de  $M$ . Temos dois casos a considerar: se  $b \in T_3^*$  e se  $b \notin T_3^*$ . No primeiro caso, note que não há outra tríade além de  $T_2^*$  e  $T_3^*$  interceptando  $T'$ , caso contrário  $T \cup T'$  seria um conjunto 2-separador de  $M$ . Então a cadeia  $T_2^*, T', T_3^*$  contradiz o Lema 4.4.2 e concluímos que este caso não ocorre. No segundo caso, pelo Lema 2.1.7,  $T_3^* \cap A = \emptyset$ ; chega-se a uma contradição do Lema 4.2.3. Então,  $T'$  não existe e  $T_1^*, T, T_2^*$  é um leque de  $M$ . ■

**Lema 4.4.4** *Seja  $M$  uma matr oide binária 3-conexa. Considere  $X \subseteq E(M)$  e  $A = \{a, b\}$  um 2-subconjunto de  $E(M)$  tal que:*

- (i)  $M^*|X \cong M(K''_{3,n})$  e  $M^*|(X - A) \cong M(K_{3,n})$  para algum  $n \geq 1$ ; e
- (ii) para cada par de triângulos  $T_1, T_2$  de  $M^*|X$  que se interceptam em um elemento fora de  $A$ , temos que  $(T_1 \cup T_2) - A$    uma tri de de  $M^*$  e  $T_1, (T_1 \cup T_2) - A, T_2$    um leque de  $M$ .

Se  $\mathcal{R}_A^*(M) \neq \emptyset$  e  $\mathcal{R}_A^*(M) \subseteq \mathcal{C}(M^*|(X - A))$ , então  $E(M) = X$ . Em particular,  $M \cong M^*(K''_{3,n})$ .

*Demonstra o.* Por (i), existem tri des  $T_1^*, T_2^*, \dots, T_n^*$  de  $M^*|X$  evitando  $A$ . Por (ii),  $T_1^*, T_2^*, \dots, T_n^*$  são tri des de  $M^*$ . Para  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , escolha  $\beta_i \in T_i^*$  na interse o dos triângulos que geram  $T_i^*$  como descrito em (ii). Faça  $T_n^* = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ , com  $\{\alpha, \beta, a\}$  e  $\{\beta, \gamma, b\}$  triângulos de  $M$ . (Veja a figura 4.1). Tome  $Y = X - (\{\alpha, \beta, \gamma\} \cup A)$ .

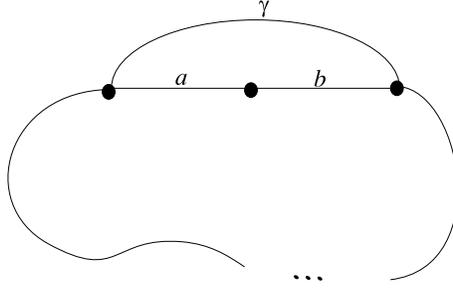


**Figura 4.1.**  $M^*$  com os elementos de  $X$  em negrito.

Considere o menor de  $M^*$  dado por:

$$N = \begin{cases} M^* \setminus (X - A), & \text{quando há triângulo em } M^* \setminus (X - A) \text{ contendo } A; \text{ e} \\ M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que se existe triângulo  $T$  em  $M^* \setminus (X - A)$  contendo  $A$  então  $M^* \setminus (X - A) \cong M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha \setminus t$ , onde  $T = A \cup t$ , já que  $\{\gamma, t\}$  estão em paralelo em  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$ . Assim, para ver que  $N$    3-conexa   suficiente mostrar que  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$    3-conexa ou que  $\{\gamma, \gamma'\}$    uma classe em paralelo que induz a única 2-separa o desta matr oide,



**Figura 4.2.** Menor  $N$ , quando não existe triângulo em  $M^*$  contendo  $A$ .

para algum  $\gamma' \in E(M) - X$ , tal que  $A \cup \gamma'$  é um triângulo de  $M$ . De fato, considere uma 2-separação  $\{Z, W\}$  de  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$ . Temos dois casos a considerar:

*Caso 1.* Se  $\{a, b\} \subseteq Z$ .

(a) Se  $\gamma \in Z$ . Mostraremos que isto não ocorre.

Neste caso,  $Z \cup \{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$  gera  $X$  em  $M^*$  e  $r_{M^*}(Z \cup X) = r_{M^*}(Z \cup \{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}) = r_M^*(Z) + n - 1$ , já que  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$  são colaços de  $M^* \setminus (Z \cup \{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\})$ . Logo,

$$\begin{aligned} r_{M^*}(Z \cup X) + r_{M^*}(W) &= r_{M^*}(Z) + r_{M^*}(W) + n - 1 \\ &= r_{M^*}(M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha) + 1 + (n - 1) \\ &= [r(M^*) - n] + n \\ &= r(M^*). \end{aligned}$$

Assim,  $\{Z \cup X, W\}$  é uma separação para  $M^*$ , o que é uma contradição.

(b) Se  $\gamma \notin Z$ . Mostraremos que  $W$  é uma classe em paralelo de  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$  contendo dois elementos, digamos  $\gamma$  e  $\gamma'$  tal que  $\{a, b, \gamma'\}$  é triângulo de  $M$ .

Temos que  $\{a, b\}$  gera  $\gamma$  em  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$ . Neste caso,  $\{Z \cup \gamma, W - \gamma\}$  não é uma 2-separação de  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$ , por (a), já que  $\{a, b, \gamma\}$  está contido num mesmo conjunto desta. Logo,  $|W| = 2$ . Note que  $W$  não é uma classe em série de  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$ , pois  $|W \cap \{a, b, \gamma\}| = 1$  e  $\{a, b, \gamma\}$  é circuito de  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$ . Então,  $W = \{\gamma, \gamma'\}$  está contido numa classe em paralelo de  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$ . Assim,  $\{\gamma, \gamma'\} \Delta \{a, b, \gamma\} = \{a, b, \gamma'\}$  é circuito de  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$ . Logo,  $\{a, b, \gamma'\}$  ou  $\{a, b, \gamma', \alpha\}$  é circuito de  $M^*$ . Como  $\{a, b, \gamma, \alpha\}$  é circuito de  $M^*$  e  $M^*$  é 3-conexa, segue que  $\{a, b, \gamma'\}$  é circuito de  $M^*$ .

*Caso 2.* Se  $a \in Z$  e  $b \in W$ . Mostraremos que este caso não ocorre.

Vejam primeiro que  $\{Z, W\}$  não é uma 2-separação minimal de  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$ . Suponha, por contradição, que  $|Z| = 2$ . Se  $Z$  está contido numa classe em paralelo de  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$ , pela 3-conexidade de  $M^*$ , temos que  $Z$  não está contido numa classe em paralelo de  $M^*$ . Logo, neste caso,  $Z \cup \alpha$  é circuito de  $M^*$ . Como  $\{a, \alpha, \beta\}$  é circuito de  $M^*$ ,  $(Z \cup \alpha) \Delta \{a, \alpha, \beta\} = (Z - a) \cup \beta$  está contido em classe em paralelo de  $M^*$ ; chega-se a uma contradição pela 3-conexidade de  $M^*$ . Se  $Z$  está contido em uma classe em série de  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$ , como  $\{a, b, \gamma\}$  é circuito de  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$  e  $Z \cap \{a, b, \gamma\} \subseteq \{a, \gamma\}$ , por ortogonalidade, temos que  $\gamma \in Z$ , e assim  $Z$  gera  $b$  em  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$ . Se  $|W| = 2$ , temos que  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$  tem 4 elementos. Como  $\{a, b, \gamma\} \subseteq E(M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha)$ , temos que  $M$  é uma matróide gráfica; chega-se a uma contradição. Logo  $\{Z \cup b, W - b\}$  é uma 2-separação de  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$  o que, pelo Caso 1, é uma contradição. Então  $\{Z, W\}$  não é uma 2-separação minimal.

Suponha, sem perda de generalidade, que  $\gamma \in Z$ . Assim,  $Z$  gera  $b$  em  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$ . Logo  $\{Z \cup b, W - b\}$  é uma 2-separação de  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$ , com  $\{a, b, \gamma\}$  contido no mesmo conjunto; chega-se a uma contradição pelo Caso 1.

Em resumo, concluímos que  $M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$  é 3-conexa ou  $\{\gamma, \gamma'\}$  é uma classe em paralelo para algum  $\gamma' \in E(M) - X$ . Segue que  $N$  é 3-conexa.

Agora mostraremos que  $\mathcal{R}_A^*(N^*) = \emptyset$ . Para isto, suponha, por contradição, que existe  $C^* \in \mathcal{R}_A^*(N^*)$ . Temos que  $C^*$  ou  $C^* \cup \alpha$  é circuito de  $M^*$ . Dividiremos a prova em dois casos. No primeiro caso mostraremos que  $C^* \in \mathcal{R}_A^*(M)$  e, no segundo caso, mostraremos que  $C^* \cup \alpha \in \mathcal{R}_A^*(M)$ . Em ambos os casos chega-se a uma contradição, já que  $\mathcal{R}_A^*(M) \subseteq \mathcal{C}(M^* | (X - A))$ .

*Caso 3.* Se  $C^*$  é circuito de  $M^*$ .

Vejam que  $M \setminus C^*$  é conexa ou, equivalentemente, que  $M^* / C^*$  é conexa. Note que se  $N = M^* \setminus (Y \cup \beta) / \alpha$ , por ortogonalidade,  $\gamma \notin C^*$ , pois  $C^* \in \mathcal{C}(M^*)$ ,  $\{\alpha, \beta, \gamma\} \in \mathcal{C}^*(M^*)$  e  $C^* \cap \{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \{\gamma\}$ . Como  $N / C^*$  é conexa, segue-se que  $E(N^*) - C^*$  está em uma componente conexa  $H$  de  $M^* / C^*$ . Em particular,  $A \subseteq E(H)$ . Agora, mostraremos que

$$T_i^* \subseteq E(H), \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (4.9)$$

Assuma que exista  $x \in T_i^* - E(H)$ . Por (i), existe triângulo  $T$  de  $M^*$  tal que  $x \in T$ ,  $T \subseteq X$  e  $|T \cap A| = 1$ ; digamos  $T \cap A = \{a\}$ . Se  $T_i^* - T = \{z\}$ , então  $T = (T_i^* - z) \cup a$ . Como  $T$  é união de circuitos de  $M^*/C^*$  e  $a \in E(H)$ , teremos que:

- (a)  $T$  é um triângulo de  $M^*/C^*$ ; ou
- (b)  $T$  está contido em classe em paralelo de  $M^*/C^*$ ; ou
- (c) existe  $y \in T - A$ , tal que  $\{a, y\}$  e  $T - \{a, y\}$  são circuitos de  $M^*/C^*$ .

Por ortogonalidade com a tríade  $T_i^*$  de  $M^*/C^*$ , concluímos que (a) ocorre. Portanto, temos (4.9). Por (4.9),  $E(H) = E(M^*) - C^*$  e daí  $H = M^*/C^*$ .

*Caso 4.* Se  $C^* \cup \alpha$  é circuito de  $M^*$ .

Analogamente ao Caso 3, provaremos que  $M \setminus (C^* \cup \alpha)$  é conexa ou, equivalentemente, que  $M^*/(C^* \cup \alpha)$  é conexa. Por ortogonalidade com a tríade  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  de  $M^*$ , temos que  $\gamma \in C^*$ . Como  $\{a, \alpha, \beta\}$  e  $\{b, \beta, \gamma\}$  são circuitos de  $M^*$ , então  $\{a, \beta\}$  e  $\{b, \beta\}$  estão contidos numa classe em paralelo de  $M^*/(C^* \cup \alpha)$ , ou  $a, \beta$  e  $b$  são laços, o que não ocorre, pois  $a$  e  $b$  estão em  $N$ . Como  $N/C^*$  é conexa, segue que  $E(N^*) - C^*$  está em uma componente conexa  $H$  de  $M^*/(C^* \cup \alpha)$ . Em particular  $\{a, b, \beta\}$  está contido em classe em paralelo de  $H$ . Será suficiente mostrar que

$$T_i^* \subseteq E(H), \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}. \quad (4.10)$$

Assuma que exista  $x \in T_i^* - E(H)$ , para algum  $i \neq n$ . Por (i), existe triângulo  $T$  de  $M^*$  tal que  $x \in T$ ,  $T \subseteq X$  e  $|T \cap A| = 1$ , digamos  $T \cap A = \{a\}$ . Se  $T_i^* - T = \{z\}$  então  $T = (T_i^* - z) \cup a$ . Como  $T$  é união de circuitos de  $M^*/(C^* \cup \alpha)$  e  $a \in E(H)$ , teremos que:

- (a)  $T$  é um triângulo de  $M^*/(C^* \cup \alpha)$ ; ou
- (b)  $T$  está contido em classe em paralelo de  $M^*/(C^* \cup \alpha)$ ; ou
- (c) existe  $y \in T - A$ , tal que  $\{a, y\}$  e  $T - \{a, y\}$  são circuitos de  $M^*/(C^* \cup \alpha)$ .

Por ortogonalidade com a tríade  $T_i^*$  de  $M^*/(C^* \cup \alpha)$ , concluímos que (a) ocorre. Portanto, temos (4.10). Por (4.10),  $E(H) = E(M^*) - (C^* \cup \alpha)$  e daí  $H = M^*/(C^* \cup \alpha)$ .

Pelos Casos 3 e 4, temos que  $C^* \in \mathcal{R}_A^*(M)$  ou  $C^* \cup \alpha \in \mathcal{R}_A^*(M)$ . Mas, por hipótese  $\mathcal{R}_A^*(M) \subseteq \mathcal{C}(M^*|(X - A))$  e como  $C^* - X \neq \emptyset$ , temos uma contradição. Concluimos que  $C^*$  não existe e, conseqüentemente,  $\mathcal{R}_A^*(N^*) = \emptyset$ . Pelo Teorema 3.2.6,  $r(N^*) \leq 2$  ou  $N^*$  é um  $A$ -ouriço. Se  $N^*$  é um  $A$ -ouriço, então  $N$  também é um  $A$ -ouriço. Mas há um triângulo de  $N$  contendo  $A$ ; assim,  $N$  não pode ser um  $A$ -ouriço. Logo,  $r(N^*) \leq 2$ . Como  $N$  é 3-conexa e existe triângulo  $\{a, b, c\}$  de  $N$ , temos que  $E(N) - \{a, b, c\} = \emptyset$ . Note que  $c = \gamma$ , já que se  $c \neq \gamma$  teríamos  $\mathcal{R}_A^*(M) = \emptyset$ , o que não acontece por hipótese. Então,  $E(M) = X$  e concluimos que  $M \cong M^*(K''_{3,n})$ . ■

**Lema 4.4.5** *Seja  $M$  um membro de  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$  com tamanho mínimo. Se  $\mathcal{R}_A^*(M) \neq \emptyset$ , então  $M \cong M^*(K''_{3,n})$ , onde os elementos adicionados a  $K_{3,n}$  correspondem aos elementos de  $A$ .*

*Demonstração.* É suficiente mostrar que existe  $X$  satisfazendo as hipóteses do Lema 4.4.4. Para isto, seja  $\mathcal{T}$  o conjunto dos triângulos  $T$  de  $M$  tal que  $T \cap C^* \neq \emptyset$ , para algum  $C^* \in \mathcal{R}_A^*(M)$ . Se  $T \in \mathcal{T}$ , por ortogonalidade, temos que  $|T - A| \geq 2$  e podemos usar o Lema 4.4.3. Vejamos que  $T \cap A = \emptyset$ . De fato, suponha que  $T \cap A \neq \emptyset$  e seja  $a \in T \cap A$ . Considere  $C^* \in \mathcal{R}_A^*(M)$  tal que  $T \cap C^* \neq \emptyset$ . Pelo item (i) do Lema 4.4.3, há uma tríade  $T^*$  de  $M$  tal que  $T - T^* \subseteq A$  e  $T^* - T \subseteq A$ . Por ortogonalidade,  $T^* \cap T \subseteq C^*$  e segue que  $T^* - T$  contém colaço de  $M \setminus C^*$ ; chega-se a uma contradição. Logo,  $T \cap A = \emptyset$ .

Note que  $|\mathcal{T}| \geq 2$ . Pois seja  $C^* \in \mathcal{R}_A^*(M)$ . Pelo Lema 4.2.2,  $M/e$  não é 3-conexa para cada  $e \in C^*$ . Pelo dual do Teorema 2.1.11, existem pelo menos dois triângulos de  $M$  interceptando  $C^*$ . Assim,  $|\mathcal{T}| \geq 2$ . Para cada  $T \in \mathcal{T}$ , como  $T \cap A = \emptyset$ , o leque  $\mathcal{F}_T$  de  $M$  contendo  $T$  é como no item (ii) do Lema 4.4.3. Seja  $X_T$  o conjunto dos elementos de  $\mathcal{F}_T$ . Faça  $X = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} X_T$ . Vejamos que  $X$  satisfaz as hipóteses do Lema 4.4.4.

(i) Assuma que  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ . Se para  $i \in \{1, \dots, n\}$   $T_i = \{e_i, f_i, g_i\}$ , então, pelo Lema 4.4.3, podemos supor que  $T_{1i}^* = \{a, e_i, g_i\}$ ,  $T_{2i}^* = \{b, f_i, g_i\}$  são tríades de  $M$ , onde  $A = \{a, b\}$ . Observe que  $B^* = \{a, b, g_1, \dots, g_n\}$  gera  $X$  em  $M^*$ . Agora, mostraremos que  $B^*$  é uma base de  $M^*|X$ . Se  $B^*$  contém um cocircuito  $C^*$  de  $M$ , então  $g_i \in C^*$ , para algum  $i \in \{1, \dots, n\}$ , já que  $|C^*| \geq 3$ . Observe que  $C^* \cap T_i = \{g_i\}$ ; uma contradição a ortogonalidade. Assim,  $B^*$  é uma base de  $M^*|X$ .

Seja  $[I_{n+2}|B_{n+2}]$  uma matriz que representa  $M^*|X$  sobre  $GF(2)$ , onde  $B_{n+2}$  é uma matriz  $(n+2) \times 2n$ . Rotule as colunas de  $I_{n+2}$  por  $a, b, g_1, \dots, g_n$ . Se  $v = (v_1, \dots, v_{n+2})$  e  $w = (w_1, \dots, w_{n+2})$  são respectivamente as colunas de  $B_{n+2}$  rotuladas por  $e_i$  e  $f_i$ , para algum  $i \in \{1, \dots, n\}$ , então  $v_j = 1$  se e somente  $j \in \{1, i+2\}$  e  $w_j = 1$  se e somente se  $j \in \{2, i+2\}$ . Então,  $[I_{n+2}|B_{n+2}]$  também representa  $M(K''_{3,n})$  sobre  $GF(2)$ , onde as arestas incidentes ao vértice de grau  $n+2$  rotula as colunas de  $I_{n+2}$  (com as duas primeiras colunas rotuladas pelas arestas adicionadas de  $K''_{3,n}$ ).

(ii) Sejam  $T_1^*$  e  $T_2^*$  tríades de  $M$  que se interceptam num elemento  $x \in X - A$ . Pela definição de  $X$ , existe triângulo  $T$  de  $M$  tal que  $x \in T$ . Assim,  $T_i^* \cap T \neq \emptyset$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Logo, pelo Lema 4.2.3 e como  $cl(A) = A$  por hipótese, concluímos que  $T_i^* \cap A \neq \emptyset$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Pela 3-conexidade de  $M$ , segue que  $T_1^*, T, T_2^*$  é um leque  $\mathcal{F}_T$  de  $M$  como no item (ii) do Lema 4.4.3. Então, a hipótese (ii) do Lema 4.4.4 é satisfeita.

Finalmente, seja  $C^* \in \mathcal{R}_A^*(M)$ . Como já vimos, existem pelo menos dois triângulos  $T_1$  e  $T_2$  de  $M$  interceptando  $C^*$ . Já que  $T_i \in \mathcal{T}$ , para  $i \in \{1, 2\}$ , segue que  $T_i \cap A = \emptyset$ . Pelo Lema 4.4.3, há tríades  $T_{1i}^*$  e  $T_{2i}^*$  de  $M$  tais que  $T_{1i}^*, T_i, T_{2i}^*$  é um leque de  $M$  e  $A = (T_{1i}^* \cup T_{2i}^*) - T_i$ . Seja  $t_i \in T_{1i}^* \cap T_i \cap T_{2i}^*$ . Como  $C^*$  intercepta  $T_i$  em dois elementos, segue que  $C^*$  intercepta  $T_i$  em  $T_i - t_i$ , caso contrário algum elemento de  $A$  seria um colaço de  $M \setminus C^*$ . Assim,

$$C^* \supseteq (T_1 - t_1) \cup (T_2 - t_2) = (T_{11}^* \Delta T_{21}^*) \Delta (T_{12}^* \Delta T_{22}^*).$$

Sendo a diferença simétrica de cocircuitos de  $M$  união de cocircuitos de  $M$ , temos que  $C^* = (T_1 - t_1) \cup (T_2 - t_2)$ . Logo,  $\mathcal{R}_A^*(M) \subseteq \mathcal{C}(M^*|(X - A))$ . ■

Do Lema 4.4.5 e do fato que  $\mathcal{R}_A^*(M) \neq \emptyset$  quando  $A$  é o conjunto dos elementos adicionados a  $K_{3,n}$  segue o seguinte resultado:

**Corolário 4.4.6** *Seja  $M$  um membro de  $\mathcal{F}_N^{\alpha, \beta}$  com tamanho mínimo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)  $\mathcal{R}_A^*(M) \neq \emptyset$ .

(ii) *Há um isomorfismo de  $M$  em  $M^*(K''_{3,n})$ , onde os elementos de  $A$  são levados nos elementos adicionados a  $K_{3,n}$ .* ■

Agora serão provados os outros resultados principais desta tese. Os Teoremas 1.4.2 e 1.4.4 são, respectivamente, conseqüências dos Teoremas 4.4.7 e 4.4.8.

**Teorema 4.4.7** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa. Suponha que  $A$  é um 2-subconjunto de  $E(M)$ . Se não há isomorfismo de um menor  $H$  de  $M$  em  $O_n$  usando  $A$ , para algum inteiro  $n$  tal que  $n \geq 2$ , levando os elementos de  $A$  no corpo e no cocorpo de  $O_n$ , então*

$$|\mathcal{R}_A^*(M)| \geq \dim_A(M) \geq \frac{r(M) - n}{2}.$$

*Demonstração.* Primeiro definimos uma família  $\mathcal{F}$  de matróides binárias como se segue: uma matróide  $M$  não pertence a  $\mathcal{F}$  se e somente se  $M$  tem um menor  $H$  tal que  $A \subseteq E(H)$  e há um isomorfismo de  $H$  em  $O_n$ , levando os elementos de  $A$  no corpo e no cocorpo de  $O_n$ . Observe que  $\mathcal{F}$  é fechada com relação a menores. Tome  $\mathcal{F}_N$  sobre  $\mathcal{F}$ . Faça  $\alpha = \frac{1}{2}$  e  $\beta = \frac{-n}{2}$ . Se  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta} = \emptyset$ , então o resultado segue. Suponha que  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta} \neq \emptyset$  e escolha  $M \in \mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$  com tamanho mínimo. Se  $\mathcal{R}_A^*(M) = \emptyset$ , então, pelo Corolário 3.2.7, há um isomorfismo de  $M$  em  $O_m$ , levando os elementos de  $A$  no corpo e cocorpo de  $O_m$ . Como  $M \in \mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$ , temos que  $m < n$ . Chega-se a uma contradição, pois

$$0 = \dim_A(M) < \alpha r(M) + \beta = \frac{m + 1 - n}{2} \leq 0.$$

Logo,  $\mathcal{R}_A^*(M) \neq \emptyset$ . Pelo Lema 4.4.5, temos que  $M \cong M^*(K''_{3,m})$ , para algum inteiro  $m$ . Pela escolha de  $M$

$$m - 1 = \dim_A(M) < \alpha r(M) + \beta = 2m\alpha + \beta = m - \frac{n}{2}.$$

Assim,  $n < 2$ ; chega-se a uma contradição. ■

**Teorema 4.4.8** *Seja  $M$  uma matróide binária 3-conexa. Suponha que  $A$  é um 2-subconjunto de  $E(M)$  e seja  $n$  um inteiro excedendo dois. Se não há isomorfismo entre um menor  $H$  de  $M$  usando  $A$  e*

(i)  $O_n$ , levando os elementos de  $A$  no corpo e no cocorpo de  $O_n$ ; ou

(ii)  $M^*(K''_{3,n})$ , levando os elementos de  $A$  nos elementos adicionados de  $K''_{3,n}$ ,

para algum  $n \geq 2$ , então

$$|\mathcal{R}_A^*(M)| \geq \dim_A(M) \geq r(M) - n.$$

*Demonstração.* Primeiro definimos uma família  $\mathcal{F}$  de matróides binárias como se segue: uma matróide  $M$  não pertence a  $\mathcal{F}$  se e somente se  $M$  tem um menor  $H$  tal que  $A \subseteq E(H)$  e há um isomorfismo de  $H$  em

(i)  $O_n$  levando os elementos de  $A$  no corpo e no cocorpo de  $O_n$ ; ou

(ii)  $M^*(K''_{3,n})$  levando os elementos de  $A$  nos elementos adicionados de  $K''_{3,n}$ .

Observe que  $\mathcal{F}$  é fechado com relação a menores. Tome  $\mathcal{F}_N$  sobre  $\mathcal{F}$ . Faça  $\alpha = 1$  e  $\beta = -n$ . Se  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta} = \emptyset$ , então o resultado segue. Suponha que  $\mathcal{F}_N^{\alpha,\beta} \neq \emptyset$  e escolha  $M \in \mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$  com tamanho mínimo. Se  $\mathcal{R}_A^*(M) = \emptyset$ , então, pelo Corolário 3.2.7, há um isomorfismo de  $M$  em  $O_m$ , levando os elementos de  $A$  no corpo e cocorpo de  $O_m$ . Como  $M \in \mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$ , temos que  $m < n$ . Chega-se a uma contradição, pois

$$0 = \dim_A(M) < \alpha r(M) + \beta = (m+1)\alpha + \beta = m+1-n \leq 0.$$

Logo,  $\mathcal{R}_A^*(M) \neq \emptyset$ . Pelo Lema 4.4.5, temos que  $M \cong M^*(K''_{3,m})$ , para algum inteiro  $m$ . Como  $M \in \mathcal{F}_N^{\alpha,\beta}$ , temos que  $m < n$ . Pela escolha de  $M$

$$m-1 = \dim_A(M) < \alpha r(M) + \beta = 2m\alpha + \beta = 2m-n.$$

Assim,  $n < m+1$ ; chega-se a uma contradição. ■

Neste último Teorema, tomamos  $n \geq 2$  porque, no caso em que  $n = 1$ , temos que  $M$  não possui  $M(K_4)$  como menor, portanto  $M$  é um *SP-network*. Logo, não é 3-conexa a menos que seja  $U_{1,1}, U_{0,1}, U_{1,2}, U_{2,3}$  ou  $U_{1,3}$ .

Do Teorema 4.4.8 segue o próximo resultado.

**Corolário 4.4.9** *Seja  $M$  uma matróide regular, 3-conexa e  $A$  um 2-subconjunto de  $E(M)$ . Se  $M$  não tem menor isomorfo a  $M^*(K''_{3,n})$ , para inteiro fixo  $n \geq 2$ , então*

$$\dim_A(M) \geq r(M) - n.$$

■

## 4.5 CONCLUSÃO

Para uma matróide binária 3-conexa  $M$  e um subconjunto  $A$  de seus elementos com tamanho dois foi determinado um limite inferior para  $\dim_A(M)$  que é o melhor possível, quando se excluem os ouriços como menores desta matróide. Melhoramos este limite quando excluimos também  $M^*(K''_{3,n})$  como menor da matróide em questão. Para um subconjunto  $A$  de elementos da matróide  $M$  com mais de dois elementos não foi possível estender a abordagem feita para um conjunto  $A$  de tamanho dois. Mesmo porque seria necessário, por exemplo, caracterizar as matróides binárias 3-conexas sem cocircuitos não-separadores evitando um 3-subconjunto de elementos da matróide. Sabe-se que  $\mathcal{R}_A^*(M^*(K'''_{3,n})) = \emptyset$  quando  $A$  é o conjunto dos três elementos adicionados a  $K_{3,n}$ . Porém há outras matróides sem cocircuitos não-separadores que evitam um 3-subconjunto de seus elementos; um  $\{a, b\}$ -ouriço, desde que  $\{a, b\} \subseteq A$  é uma delas.

Tentou-se, a partir de uma matróide  $M$  de menor cardinalidade numa família  $\mathcal{F}_N^{\alpha, \beta}$ , sendo  $E(N) = A$ , com  $|A| \geq 3$ , decompor  $M$  como 3-soma de duas outras matróides. O objetivo era provar por indução que esta matróide teria  $\dim_A(M) \geq \alpha r(M) + \beta$ . Assim, chegar-se-ia a uma contradição já que  $M$  é um elemento de  $\mathcal{F}_N^{\alpha, \beta}$ . Porém, os cocircuitos das matróides que são menores de  $M$  obtidas a partir da decomposição de  $M$  como 3-soma de outras duas matróides, podem interceptar o triângulo em comum às duas matróides da decomposição de  $M$ . Por isso, nem todo cocircuito de um desses menores de  $M$  seria cocircuito de  $M$ . Assim, tentamos a abordagem de impor algumas restrições a  $M|A$ .

Quando  $|A| = 3$ , foi determinada  $\dim_A(M)$ , no caso de  $A$  ser um triângulo de  $M$ . Quando  $A$  tinha um tamanho qualquer foi obtido um limite inferior para  $\dim_A(M)$  no caso de  $M|A$  não ter colaços. A partir desses resultados e do Teorema 1.2.2, é possível obter um limite inferior para  $\dim_A(M)$  sempre que  $M$  for uma matróide binária, conexa, simples e co-simples e sua árvore de decomposição for tal que as matróides que rotulam seus vértices bem como os elementos incidentes a eles tenham a estrutura necessária para determinação de  $\dim_{A_i}(M_i)$  a partir dos cálculos feitos nesta tese, onde  $M_i$  é uma matróide que rotula um vértice da árvore de decomposição da matróide em questão e  $A_i$  o conjunto dos elementos incidentes a esse vértice.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Bixby, R. E. 1982. A simple theorem on 3-connectivity. *Linear Algebra Appl.* **45**, 123-126.
- [2] Bixby, R. E. & Cunningham, W. H. 1979. Matroids, Graphs and 3-connectivity. Em *Graph Theory and Related Topics*, Ed. por James Bondy e U.S.R. Murty. Academic Press, NY, 91-103.
- [3] Brylawisk, T. H. 1971. A combinatorial model for series-parallel networks. *Trans. Amer. Math. Soc.* **154**, 1-22.
- [4] Brylawski, T. H. 1975. Modular construction for combinatorial geometries. *Trans. Amer. Math. Soc.* **203**, 1-44.
- [5] Brylawski, T. H. 1986. Constructions. Em *Theory of Matroids* (ed. N. White), pp 127-223. Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] Cunningham, W. H. 1973. *A combinatorial decomposition theory*, Ph. D. Thesis. University of Waterloo.
- [7] Ding, G., Oporowski, B., Oxley, J. & Vertigan, D. 1996. Unavoidable minors of large 3-connected binary matroids. *J. Combin. Theory Ser. B*, **66**, 334-360.
- [8] Dirac, G. A. 1967. Minimally 2-connected graphs. *J. Reine Angew. Mathe.* **228**, 204-216.
- [9] Halin, R. 1969. Untersuchungen über minimale n-fach zusammenhängende Graphen. *Math. Ann.* **182**, 175-188.
- [10] Harary, F. 1969. *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- [11] Kelmans, A. K. 1981. The concepts of a vertex in a matroid. The non-separating cocircuits and a new criterion for graph planarity. Em *Algebraic Methods in Graph*

- Theory, vol. 1, Colloq. Math. Soc. János Bolyai (Szeged, Hungary, 1978), vol. 25, 345-338, North-Holland, Amsterdam.
- [12] Kelmans, A. K. 1991. Graph Planarity and Related Topics. Em *Graph Structure Theory*. Ed. por Neil Robertson e Paul Seymour. Contemporary Mathematics, vol. 147, 1991, 635-667.
- [13] Lemos, M. 1989. On 3-connected matroids. *Discrete Math.* **73**, 273-283.
- [14] Lemos, M. 2004. Non-separating cocircuits in binary matroids. *Linear Algebra Appl.* **382**, 171-178.
- [15] McNulty, J. & Wu, H. 2000. Connected hyperplanes in binary matroids. *J. Combin. Theory Ser. B*, **79**, 87-97.
- [16] Oxley, J. G. 1978. Cocircuits coverings and packings for binary matroids. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **83**, 347-351.
- [17] Oxley, J. G. 1981. On connectivity in matroids and graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* **265**, 47-58.
- [18] Oxley, J. G. 1981. On matroid connectivity. *Quart. J. Math. Oxford Ser. 2*, **32**, 193-208.
- [19] Oxley, J. G. 1987. The binary matroids with no 4-wheel minor. *Trans. Amer. Math. Soc.* **301**, 63-75.
- [20] Oxley, J. G. & Reid, T. J. 1990. The smallest rounded sets of binary matroids. *European J. Combin.* **11**, 47-56.
- [21] Oxley, J. G. 1992. Matroid Theory. Oxford University Press. New York.
- [22] Oxley, J. G. & Wu, H. 2000. On the structure of 3-connected matroids and graphs. *European J. Combin.* **21**, 667-668.
- [23] Reid, T.J. & Wu, H. 2001. On minimally 3-connected binary Matroids. *Comb. Probab. Comput.* **10**, 453-461.
- [24] Seymour, P.D. 1980. Decomposition of regular matroids. *J. Combin. Theory Ser. B* **28**, 305-359.

- [25] Thomassen, C. & Toft, B. 1980. Non-separating induced cycles in graphs. *J. Combin. Theory, Ser. B*, **31**, 199-224.
- [26] Tutte, W.T. 1987. Matroids and Graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* **90**, 527-552.
- [27] Tutte, W.T. 1963. How to draw a graph. *Proc. London Math. Soc.* **13**, 734-768.
- [28] Tutte, W.T. 1966. Connectivity in matroids. *Canad. J. Math.* **18**, 1301-1324.
- [29] Whitney, H. 1935. On the abstract properties of linear dependence, *Amer. J. Math.* **57**, 509-533.
- [30] Wu, H. 1998. On vertex-triads in 3-connected binary matroids. *Comb. Probab. Comput.* **7**, 485-497.
- [31] Zykov, A. A. 1990. Fundamentals of Graph Theory. BCS Associates, Moscow, ID.

