

**Extensão de uma Solução  $k$ -Jato  
de uma Estrutura Tubular**

**Beto Rober Bautista Saavedra**

TESE APRESENTADA  
AO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
PARA  
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM  
MATEMÁTICA

Área de Concentração :**Matemática**

Orientador: **Prof. Dr. Joaquim Tavares de Melo Neto**

Recife, dezembro de 2004

# Extensão de uma Solução $k$ -Jato de uma Estrutura Tubular

Este exemplar corresponde à redação  
final da tese devidamente corrigida e defendida  
por Beto Rober Bautista Saavedra  
e aprovada pela comissão julgadora.

Recife, 16 de dezembro de 2004.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Joaquim Tavares (Orientador) (DMat-UFPE)
- Prof. Dr. Fernando Cardoso (DMat-UFPE)
- Prof. Dr. Cláudio Cuevas (DMat-UFPE)
- Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie (DM-UFSCar)
- Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro (IME-USP)

# Resumo

Na presente tese introduzimos os conceitos de uma Solução  $k$ -Jato e de uma  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa para provar a versão semi-local do Teorema de Extensão Tubular de Bochner para categoria das estruturas tubulares analíticas reais dando uma representação integral para a extensão .

Palavras-chaves:  $K$ -Jato; Estrutura Tubular; Teorema de Extensão de Bochner.

# Abstract

In the present work we introduce the notions of a  $k$ -Jet Solution and of a  $(\Phi, \kappa)$ -Convex Envelope to prove a semi-local Bochner's Tube Extension Theorem for the category of real analytic tubular structures giving an integral representation for the extension.

Keywords:  $K$ -Jet; Tube structure; Theorem Bochner's extension.

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, professor Joaquim Tavares, pela dedicação e paciência demonstrados durante a orientação deste trabalho.

Agradeço também aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco pela ajuda matemática e compreensão profissional dos problemas por mim enfrentados nestes cinco anos de doutorado. Não posso esquecer de agradecer aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Bahia por sua amizade e apoio.

Finalizando, dedico este trabalho a meus filhos que dá sentido à minha existência.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>1 Solução <math>k</math>-Jato e <math>(\Phi, \kappa)</math>-Envoltória Convexa</b>	<b>10</b>
1.1 A Estrutura Tubular: definição e generalidades	10
1.2 Solução $k$ -Jato	12
1.3 $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa	15
<b>2 O Teorema de Extensão do Tubo de Bochner Truncado</b>	<b>21</b>
2.1 Dados assumidos neste capítulo	21
2.2 Preliminares do Teorema de Extensão do Tubo de Bochner Truncado	22
2.2.1 Notações	22
2.2.2 Construção de uma coleção de funções $\{v_\epsilon : \epsilon > 0\}$ : definição e propriedades	23
2.3 Teorema de Extensão do Tubo de Bochner Truncado	30
2.3.1 Extensão de uma Solução $k$ - Jato de uma Estrutura Tubular Analítica $\mathcal{L}$	30
2.3.2 Extensão de uma Solução Distribuição de Sobolev de uma Estrutura Tubular Analítica $\mathcal{L}$	33
2.4 Demonstração do Teorema 2.2.7	40
<b>Simbologia</b>	<b>57</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>60</b>

# Introdução

Em 1906, Hartogs [26] provou um notável teorema de extensão .

**Teorema 1.** *Sejam  $\Omega$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}^m$ ,  $m \geq 2$ , e o subconjunto compacto  $K \subset \Omega$  tal que o subconjunto  $\Omega \setminus K$  é conexo. Se  $u$  é uma função holomorfa sobre  $\Omega \setminus K$ , então existe uma função holomorfa  $\hat{u}$  sobre  $\Omega$  tal que  $\hat{u}|_{\Omega \setminus K} = u$ .*

Em particular, o teorema 1 afirma que toda função holomorfa sobre o subconjunto aberto e conexo  $\mathbb{C}^m - K$ ,  $m \geq 2$ , onde  $K$  é um subconjunto compacto, pode ser estendida a todo  $\mathbb{C}^m$  como uma função holomorfa. Recentemente, Skawarczyński [33] dá uma prova elementar deste teorema quando  $K = \Omega$  é um domínio aberto e limitado com bordo  $\partial\Omega$  conexo.

Em 1943, Bochner [9] provou que toda função holomorfa  $u$ , definida num aberto tubular conexo  $\mathbb{R}^m + i\Omega \subseteq \mathbb{C}^m$ ,  $m \geq 2$ , estende-se como uma função holomorfa  $\hat{u}$ , definida sobre  $\mathbb{R}^m + i\hat{\Omega}$ , onde  $\hat{\Omega}$  é a Envoltória Convexa de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}^m$ . Este Teorema de Extensão Tubular de Bochner nos permite provar o caso particular do Teorema de Extensão de Hartogs, mencionado acima, como esboçaremos a seguir.

Se a aplicação  $\mathbb{C}^m \xrightarrow{P} \mathbb{R}^m$  é a projeção sobre a parte imaginária,  $P(x + it) = t$ , então

$$\mathbb{C}^m - K \supset \mathbb{R}^m + i[\mathbb{R}^m - P(K)]$$

Como  $\mathbb{R}^m - P(K)$  é um subconjunto aberto conexo, e sua envoltória convexa é  $\mathbb{R}^m$ , então o caso particular do Teorema de Extensão de Hartogs é demonstrado. Observamos que no esboço da prova não precisamos que  $K$  seja limitado senão somente fechado.

Também, Bochner [9] prova um refinamento do Teorema de Extensão de Hartogs. Ele demonstra que se  $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ ,  $m \geq 2$ , é um aberto limitado com bordo  $\partial\Omega \in C^\infty$ , tal que  $\mathbb{C}^m - \bar{\Omega}$  é conexo, então qualquer função  $u \in C^\infty(\partial\Omega; \mathbb{C})$  que satisfaz as equações tangenciais de Cauchy-Riemann pode ser

estendida suavemente como uma função que é holomorfa sobre  $\Omega$ . Registramos este teorema como a *Versão de Bochner do Teorema de Extensão de Hartogs*.

Anteriormente, Severi [32] prova que se  $\Omega \subset \mathbb{C}^m$  é um aberto com bordo  $\partial\Omega$  real analítico então qualquer função real analítica de  $\partial\Omega$  que satisfaz as equações tangenciais de Cauchy-Riemann pode ser estendida a uma vizinhança de  $\bar{\Omega}$  como uma função holomorfa. Para subconjuntos abertos  $\Omega$  com bordo conexo  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ , Fichera [20] prova que podemos estender uma  $C^1$ -função  $u$  que satisfaz as equações tangenciais de Cauchy-Riemann como uma função que é holomorfa sobre  $\Omega$ . Usando a fórmula de Bochner e Martinelli, Harvey e Lawson [23] estendem o anterior resultado de Fichera para a  $C^k$ -categoria.

Em 1961, Ehrenpreis [15] deu uma nova prova do Teorema de Extensão de Hartogs. A prova de Ehrenpreis é notavelmente simples e sua principal idéia é um argumento cohomológico. Uma completa descrição desta prova com todas as implicações dentro da análise complexa em  $\mathbb{C}^m$ ,  $m \geq 2$ , encontram-se em [34]. Hounie e Tavares [27], usando este método de Ehrenpreis, provaram a Versão de Bochner do Teorema de Extensão de Hartogs para qualquer  $C^\infty$ -Estrutura Tubular  $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{C} \otimes T(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ ,  $m \geq 2$ . Tais estruturas são finas generalizações da Estrutura Cauchy-Riemann em  $\mathbb{C}^m$ . A hipótese necessária na prova de Hounie e Tavares é o Princípio do Máximo [14] que deve satisfazer a parte real de toda solução homogênea da Estrutura Tubular. Esta propriedade, válida na Estrutura Cauchy-Riemann em  $\mathbb{C}^m$ , é equivalente [27] a integrabilidade do 1-nível da cadeia cohomológica (cadeia complexa) induzida pela Estrutura Tubular (ver [40]). Provaram que para um domínio limitado  $\Omega$ , com bordo  $\partial\Omega \in C^\infty$ , toda função  $u \in C^\infty(\partial\Omega; \mathbb{C})$  anulando-se sob a ação de campos vetoriais tangenciais de  $\mathcal{L}$  pode ser estendida suavemente como uma solução  $\hat{u}$  de  $\mathcal{L}$  sobre  $\Omega$ .

Malgrange e Zerner demonstraram uma versão do Teorema de Extensão Tubular de Bochner para subconjuntos tubulares  $\mathbb{R}^2 \times i\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^2$ , onde  $\mathcal{X}$  é uma curva poligonal em  $\mathbb{R}^2$ . A extensão é contínua sobre  $\mathbb{R}^2 \times \hat{\mathcal{X}}$ , onde  $\hat{\mathcal{X}}$  é a envoltória convexa, e holomorfa no interior (ver um resumo da prova em [17]). Em 1979, Kazlow [28] estende este último resultado para funções contínuas Cauchy-Riemann definidas numa subvariedade mergulhada  $\mathbb{R}^m \times i\mathcal{X}$  sob certas restrições técnicas sobre  $\mathcal{X}$ .

Os mesmos tipos de resultados anteriores aparecem recentemente nos trabalhos de Boivin-Dwilewicz [3] e nos trabalhos de Boggess [11], [12], [13]. Em particular, Boggess demonstra a existência destas extensões com o Método de Discos Analíticos. Porém o inconveniente do Método dos

Discos Analíticos é conseguir em geral extensões não -tangenciais. Nestes trabalhos demonstram como estender um  $CR$ -dado de uma subvariedade real de  $\mathbb{C}^m$  ao interior de sua envoltória convexa fechada em  $\mathbb{C}^m$  quando tais subvariedades são da forma  $\mathcal{X} + i\mathbb{R}^m$ , onde  $\mathcal{X}$  é uma subvariedade conexa em  $\mathbb{R}^m$ . Além disso, consideram implicitamente que a subvariedade  $M \subset \mathbb{R}^m$  não é um hiperplano. Pois, não é verdade, em geral, que cada  $CR$ -função, definida num hiperplano real, estende-se a um lado como uma função holomorfa. Por exemplo, a função  $u(z_1, \dots, z_m) = e^{\frac{-1}{[\Re(z_m)]^2}}$  é uma  $CR$ -função sobre o hiperplano real  $M = \{\Im(z_m) = 0\}$  (Ver exemplo 1.2.5 em [40]). Mas, não é estendida por uma função holomorfa definida ao menos sobre um lado de  $M$  em qualquer vizinhança de 0. Para verificar isto, basta considerar o *Princípio de Reflexão de Schwarz* e confrontar com a função holomorfa  $u(z_1, \dots, z_m) = e^{\frac{-1}{z_m^2}}$ . Por outro lado, observa-se que

$$\{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : z_m = 0\} \subset M.$$

Verificando assim, a condição excludente de Trépeau [37] que garante a existência de um germe de uma hiperfície complexa, contida em  $M$ , passando pelo ponto 0. O exemplo do hiperplano real  $M$  nos faz lembrar que para estender  $CR$ -funções tangenciais, nos últimos 50 anos, foi necessário introduzir certas condições (algumas delas relacionadas à Forma de Levi) que são extensivamente estudadas no livro [8].

Antes de continuar nossa introdução, precisamos estabelecer as seguintes notações: o símbolo  $B_R(0)$  denota a bola de raio  $R$  e centro 0 em  $\mathbb{R}^m$ ; o conjunto das funções holomorfas, definidas sobre uma vizinhança de um subconjunto qualquer  $F \subset \mathbb{C}^m$ , denotaremos por  $\mathcal{O}(F)$ ; e o símbolo  $T_F^R$  denota o subconjunto tubular  $B_R(0) + iF$ , onde  $F \subset \mathbb{R}^m$  é um subconjunto qualquer.

Andronikof [1] apresenta a *Propriedade Local de Bochner* dada por Komatsu [29] como segue:

**Teorema 2.** *Seja  $\Lambda$  a união de dois segmentos  $[a, b] \cup [a, c]$  sobre  $\mathbb{R}^m$ . Para cada número real  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ , sejam  $E_\epsilon$  a envoltória convexa fechada do conjunto  $\{a, (1 - 2\epsilon)b, c\}$  e  $A_\epsilon = E_\epsilon - \{c\}$ . Então a aplicação restrição*

$$\mathcal{O}(T_\Lambda^R \cup T_{A_\epsilon}^{R'}) \longrightarrow \mathcal{O}(T_\Lambda^R)$$

*é um isomorfismo se  $R - R' > 2\sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}} \sup(|b - a|, |c - a|)$ .*

O resultado mencionado acima de Malgrange e Zerner nos motiva a pensar que pode refinar-se o Teorema 2 como segue:

**Teorema 3.** *Seja  $\Lambda$  a união de dois segmentos  $[a, b] \cup [a, c]$  sobre  $\mathbb{R}^m$ . Sejam  $E$  a envoltória convexa fechada de  $\{a, b, c\}$  e  $A = E - [b, c]$ . Então a aplicação restrição*

$$\mathcal{O}(T_A^R) \longrightarrow \mathcal{O}(T_\Lambda^R)$$

*é um isomorfismo.*

Mas, confrontando com o contra-exemplo de Ye [41], podemos provar que o Teorema 3 não é válido. De fato, Ye nos deu um exemplo de uma função holomorfa sobre o subconjunto tubular aberto  $T_\Omega^R \subset \mathbb{C}^2$  que não pode ser estendida a  $T_{\widehat{\Omega}}^R$ , onde  $\widehat{\Omega}$  é a envoltória convexa de  $\Omega$ ; Porém, se o Teorema 3 for válido, podemos provar que o contra-exemplo de Ye é errôneo.

Porém, Andronikof [1] conseguiu provar, baseando-se no Teorema 2, uma versão semi-local do Teorema de Extensão Tubular de Bochner para a estrutura Cauchy-Riemann em  $\mathbb{C}^m$ .

**Teorema 4.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  um subconjunto aberto,  $K \subset \Omega$  um subconjunto compacto e conexo e  $\widehat{K}$  a envoltória convexa de  $K$ . Então, existe um número real  $R' > 0$  tal que cada função holomorfa sobre  $T_\Omega^R$  pode ser prolongada holomorficamente a uma vizinhança de  $T_{\widehat{K}}^{R'}$  se  $R - R' > 2\sqrt{3} \text{diam}(K)$ .*

Observamos que este teorema 4 não dá uma representação da extensão, mas garante a existência de tal.

Em nosso trabalho, como primeiro passo, introduziremos os conceitos de Solução  $k$ -Jato e de  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa. Logo, desenvolvendo o Método Cohomológico de Extensão de Ehrenpreis apresentaremos uma versão semi-local do Teorema de Extensão Tubular de Bochner para as estruturas tubulares analíticas. No caso particular da estrutura Cauchy-Riemann de  $\mathbb{C}^m$ ,  $m \geq 2$ , o teorema 4 de Andronikof diferencia principalmente de nossa versão porque nós usamos o inédito conceito de  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa em lugar de Envoltória Convexa fechada. Mas, conseguimos uma representação integral para a extensão. Por outro lado, mostraremos que a  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa de um compacto está contido na Envoltória Convexa fechada do mesmo compacto (ver corolário 1.3.5). Além disso, estenderemos parcialmente o resultado de Bogges [11] (ver corolário 2.3.4).

Finalmente, gostaríamos de dizer que esta introdução não é uma completa revisão desta área da Teoria das Funções Complexas de Várias Variáveis, senão uma apresentação de resultados que formam um alicerce ao nosso trabalho.

# Capítulo 1

## Solução $k$ -Jato e $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa

Em todo o presente trabalho, as coordenadas globais do espaço produto  $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , sendo  $n \geq 2$ , denotaremos por  $(x, t) = (x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n)$ . Neste capítulo lembraremos a definição da Estrutura Tubular e apresentaremos alguns resultados básicos relacionados. Introduziremos as definições de uma Solução  $k$ -Jato de uma Estrutura Tubular e uma  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa. Além disso, mostraremos que uma  $C^k$ -Solução da Estrutura Tangencial induzida de uma dada Estrutura Tubular, que é definida sobre uma subvariedade fechada tubular  $\mathbb{R}^m \times F$ , onde  $F \subset \mathbb{R}^n$  é uma subvariedade fechada, pode ser assumida como uma Solução  $(k - 1)$ -Jato.

### 1.1 A Estrutura Tubular : definição e generalidades.

Os espaços fibrados complexificados tangente e cotangente de  $\mathbb{R}^N$  denotaremos por  $\mathcal{CT}(\mathbb{R}^N)$  e  $\mathcal{CT}^*(\mathbb{R}^N)$  respectivamente.

**Definição 1.1.1** *Dada a aplicação de classe  $C^\infty$ ,  $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ ,  $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$ , o subfibrado vetorial complexo  $\mathcal{L} \subset \mathcal{CT}(\mathbb{R}^N)$  gerado globalmente pelos campos vetoriais complexos:*

$$L_\iota = \frac{\partial}{\partial t_\iota} - i \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial t_\iota} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \iota = 1, \dots, n, \quad (1.1.1)$$

denomina-se **Estrutura Tubular** definida sobre  $\mathbb{R}^N$ . Associamos as seguintes funções da classe  $C^\infty$  à Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$  :

$$Z_j(x, t) = x_j + i\phi_j(t), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.1.2)$$

No presente trabalho lidaremos com *Estruturas Tubulares Analíticas*. Isto é, assumiremos que a função  $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  é analítica.

Denotaremos o subfibrado vetorial complexo ortogonal de  $\mathcal{L}$  com respeito à dualidade entre vetores tangentes e formas por  $\mathcal{L}^\perp \subset \mathbb{C}T^*(\mathbb{R}^N)$ . Por um cálculo simples sobre as equações (1.1.1)-(1.1.2) obtemos

$$dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \neq 0; \quad (1.1.3)$$

$$L_\iota Z_j = 0, \quad L_\iota t_l = \delta_{\iota, l}, \quad 1 \leq \iota, l \leq n, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (1.1.4)$$

Interpretamos as equações (1.1.3)-(1.1.4) como segue. As 1-formas diferenciais linearmente independentes  $dZ_1, \dots, dZ_m$  geram globalmente  $\mathcal{L}^\perp$ . Além disso, das equações (1.1.3)-(1.1.4) decorremos que as 1-formas diferenciais

$$\{dZ_1, \dots, dZ_m, dt_1, \dots, dt_n\} \quad (1.1.5)$$

formam uma base de  $\mathbb{C}T^*(\mathbb{R}^N)$  e os campos vetoriais

$$\{L_1, \dots, L_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\} \quad (1.1.6)$$

formam uma base de  $\mathbb{C}T(\mathbb{R}^N)$ .

Quando a aplicação  $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  é uma submersão temos  $\mathcal{L}^\perp \cap \overline{\mathcal{L}^\perp} = 0$ ; isto é, a Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$  é Elíptica. Quando a aplicação  $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  é imersão temos  $\mathbb{C}T^*(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^\perp + \overline{\mathcal{L}^\perp}$ ; isto é, a Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$  é Cauchy-Riemann. E, quando a aplicação  $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  é um difeomorfismo local diremos que a Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$  é Complexa. Por outro lado, a derivada exterior covariante induzida de  $\mathcal{L}$  age nas potências exteriores de  $C^k(\mathbb{R}^N; E)$ ,  $k = 1, \dots, \infty$ , onde  $E = \mathbb{C}T^*(\mathbb{R}^N)/\mathcal{L}^\perp$ , construindo o associado complexo diferencial

$$\bigwedge^p C^k(\mathbb{R}^N; E) \xrightarrow{d_{\mathcal{L}}} \bigwedge^{p+1} C^{k-1}(\mathbb{R}^N; E) \quad (1.1.7)$$

Como exemplo vejamos como age sobre as 0-formas: se  $\mathbf{u} \in C^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ , a 1-forma diferencial  $d\mathbf{u}$  podemos expressar como

$$d\mathbf{u} = \sum_{\iota=1}^n L_\iota \mathbf{u} dt_\iota + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} dZ_j \quad (1.1.8)$$

Logo, conforme a definição do operador diferencial induzido  $d_{\mathcal{L}}$ , obtemos

$$d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}] \equiv \sum_{\iota=1}^n L_{\iota} \mathbf{u} dt_{\iota} \text{ mod}(\mathcal{L}^{\perp}). \quad (1.1.9)$$

Em todo nosso trabalho usaremos a seguinte identificação :  $d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}] := \sum_{\iota=1}^n L_{\iota} \mathbf{u} dt_{\iota}$ .

## 1.2 Solução $k$ -Jato.

Nesta seção , apresentaremos uma definição alternativa de uma solução de uma Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$ , definida sobre subconjuntos fechados  $\mathcal{F}$  que não necessariamente são subvariedades do espaço produto  $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . Precisaremos das seguintes notações :

$$\partial^{\sigma} = \left(\frac{\partial}{\sigma x_1}\right)^{\sigma_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\sigma_m} \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{\sigma_{m+1}} \dots \left(\frac{\partial}{\partial t_n}\right)^{\sigma_N}; \quad |\sigma| = \sigma_1 + \dots + \sigma_m + \sigma_{m+1} + \dots + \sigma_N,$$

onde  $(x, t) = (x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^N$ ,  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \dots, \sigma_N) \in \mathbb{N}^N$ . Dado o subconjunto fechado  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^N$ , podemos definir uma relação de equivalência sobre os espaços  $C^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ ,  $k = 0, 1, \dots, \infty$ , como segue : se  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$  temos

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v} \Leftrightarrow \partial^{\sigma} \mathbf{u}(x, t) = \partial^{\sigma} \mathbf{v}(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathcal{F}, \quad \forall |\sigma| \leq k.$$

Denotaremos o espaço quociente respectivo desta relação de equivalência por  $\mathcal{J}^k(\mathcal{F}; \mathbb{C})$ . Os elementos deste espaço chamaremos  $k$ -Jatos e denotaremos por  $J^k = [\mathbf{u}]$ ,  $\mathbf{u} \in C^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ . Sem perigo de ambigüidade, podemos identificar um  $k$ -Jato qualquer,  $J^k \in \mathcal{J}^k(\mathcal{F}; \mathbb{C})$ , com uma função  $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$  que é estendida por uma função  $\bar{u} \in C^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$  tal que  $J^k = [\bar{u}]$ . Os campos vectoriais  $L_1, \dots, L_n$ , definidos em (1.1.1), que geram a Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$  interpretaremos como operadores diferenciais sobre os  $k$ -Jatos como segue :

$$\begin{aligned} L_{\iota} : \mathcal{J}^k(\mathcal{F}; \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{J}^{k-1}(\mathcal{F}; \mathbb{C}), \quad \iota = 1, \dots, n \\ [\mathbf{u}] &\longmapsto [L_{\iota} \mathbf{u}] \end{aligned}$$

Pode-se verificar facilmente que nossa interpretação está bem definida. Portanto, procede a seguinte definição .

**Definição 1.2.1** *Seja a Estrutura Tubular  $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}T(\mathbb{R}^N)$ , gerada pelos campos vetoriais complexos  $L_1, \dots, L_n$ , definidos na equação (1.1.1). Seja o subconjunto fechado  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^N$  de forma tubular  $\mathcal{F} = \bar{V} \times F$ , onde o subconjunto  $V \subset \mathbb{R}^m$  é aberto e o subconjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  é fechado. Se o  $k$ -Jato  $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$  é estendido por uma função  $\bar{u} \in C^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$  tal que*

$$L_j \bar{u}(x, t) = 0, \forall (x, t) \in \mathcal{F}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.2.10)$$

então dizemos que  $u$  é uma **Solução  $k$ -Jato** da Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$  sobre  $\mathcal{F}$ .

O subconjunto de  $\mathcal{J}^k(\mathcal{F}; \mathbb{C})$ , formado por todas as *Soluções  $k$ -Jatos* da Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$  sobre o subconjunto fechado  $\mathcal{F} = \bar{V} \times F$ , denotaremos por  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^k(\bar{V} \times F)$ . Também, denotaremos o conjunto das soluções de classe  $C^k$  da Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$  sobre o aberto tubular  $V \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  por  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^k(V \times W)$ .

A seguir, definiremos a Estrutura Tangencial de uma subvariedade  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^N$  que é induzida de uma dada Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$ . Para isto, será necessário enunciar um caso particular da proposição I.3.1 dada em [40] que mostra quando é possível defini-la.

**Proposição 1.2.2** *Sejam a Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$ , definida sobre  $\mathbb{R}^N$ , e uma subvariedade  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^N$ . Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- i. *Os espaços  $\mathcal{L}^\perp \cap \mathbb{C}T^*(\mathcal{F})$ ,  $\mathcal{L} \cap \mathbb{C}T(\mathcal{F})$  são fibrados vetoriais complexos sobre  $\mathcal{F}$ .*
- ii. *Quando  $p$  varia em  $\mathcal{F}$ , a dimensão da fibra  $\mathcal{L}_p^\perp \cap \mathbb{C}T_p^*(\mathcal{F})$  é constante.*
- iii. *Quando  $p$  varia em  $\mathcal{F}$ , a dimensão da fibra  $\mathcal{L}_p \cap \mathbb{C}T_p(\mathcal{F})$  é constante.*

**Definição 1.2.3** *Diremos que  $\mathcal{L} \cap \mathbb{C}T(\mathcal{F})$  é uma Estrutura Tangencial de  $\mathcal{F}$  induzida de  $\mathcal{L}$  quando quaisquer das condições (ii), (iii) da proposição 1.2.2 é satisfeita.*

**Definição 1.2.4** *Seja a Estrutura Tubular  $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}T(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$  gerada pelos campos vetoriais  $L_1, \dots, L_n$ , definidos em (1.1.1). Seja  $\mathcal{F} = \mathbb{R}^m \times F \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  uma subvariedade tubular fechada de classe  $C^k, k \geq 2$ , munida da Estrutura Tangencial  $\mathcal{L} \cap \mathbb{C}T(\mathcal{F})$ . Dizemos que uma função  $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ , de classe  $C^k$ , definida sobre a subvariedade  $\mathcal{F}$ , é uma  $C^k$ -Solução Tangencial de  $\mathcal{L} \cap \mathbb{C}T(\mathcal{F})$  se para toda seção local  $L$  de  $\mathcal{L} \cap \mathbb{C}T(\mathcal{F})$  temos  $Lu = 0$ . Denotaremos o conjunto destas soluções por  $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}^k(\mathcal{F})$ .*

A seguinte proposição prova que uma  $C^k$ -Solução Tangencial de uma Estrutura Tubular, que é definida sobre uma subvariedade tubular fechada  $\mathbb{R}^m \times F$ , pode ser assumida como uma Solução  $(k-1)$ -Jato.

**Proposição 1.2.5** *Seja a Estrutura Tubular  $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}T(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$  gerada pelos campos vetoriais  $L_1, \dots, L_n$ , definidos em (1.1.1). Seja  $\mathcal{F} = \mathbb{R}^m \times F \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  uma subvariedade tubular fechada de classe  $C^k, k \geq 2$ , munida da Estrutura Tangencial  $\mathcal{L} \cap \mathbb{C}T(\mathcal{F})$ . Então, para cada Solução Tangencial  $u_o \in \mathcal{Z}_{\mathcal{L}}^k(\mathcal{F})$ , existe uma Solução  $(k-1)$ -Jato  $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{k-1}(\mathcal{F})$  tal que  $u_0 = u$  sobre  $\mathcal{F}$ .*

**Demonstração** .Podemos assumir, depois de uma mudança de coordenadas de classe  $C^k$  numa vizinhança aberta  $W \subset \mathbb{R}^n$  de um ponto  $t \in F$ , que o conjunto  $W \cap F$  está determinada pelas equações  $t_{d+1} = \dots = t_n = 0$ , onde  $d$  é a dimensão da subvariedade  $F$ . Sobre a vizinhança aberta  $\mathbb{R}^m \times W$  de  $\mathbb{R}^m \times \{t\}$  está definida uma base de seções da estrutura tubo  $\mathcal{L}$  :

$$L_\iota = \frac{\partial}{\partial t_\iota} - i \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial t_\iota} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \iota = 1, \dots, n,$$

Pelas condições da proposição, podemos escrever

$$L_\iota u_0 = 0, \quad \iota = 1, \dots, d, \quad \text{sobre } \mathbb{R}^m \times W \cap F.$$

Sejam as coordenadas  $t = (t', t'') = (t_1, \dots, t_d, t_{d+1}, \dots, t_n)$  da vizinhança  $W$ . Seja a função  $u_1 \in C^k(\mathbb{R}^m \times W; \mathbb{C})$  definida por  $u_1(x, t) = u_0(x, t', 0)$ . Logo, a função  $u_2 \in C^{k-1}(\mathbb{R}^m \times W; \mathbb{C})$ , definida por

$$u_2(x, t) = u_1(x, t) - \sum_{\iota=d+1}^n L_\iota u_1(x, t', 0) t_\iota,$$

que coincide com a função  $u_0$  sobre  $\mathbb{R}^m \times W \cap F$ , satisfaz

$$L_\iota u_2(x, t) = 0, \quad \iota = 1, \dots, n, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^m \times W \cap F.$$

Assim, por meio de uma partição da unidade, subordinada a uma cobertura enumerável de abertos  $\{W_j \subset \mathbb{R}^n : F \cap W_j \neq \emptyset\}$  da subvariedade fechada  $F$ , podemos encontrar finalmente uma Solução  $(k-1)$ -Jato global  $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{k-1}(\mathbb{R}^m \times F)$  que é igual a  $u_0$  sobre  $\mathcal{F} = \mathbb{R}^m \times F$  ■

### 1.3 $(\Phi, \kappa)$ –Envoltória Convexa.

No próximo capítulo estenderemos uma Solução  $k$ -Jato,  $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^k(\overline{V} \times K)$ , onde  $V \subset \mathbb{R}^m$  é um subconjunto aberto e  $K \subset \mathbb{R}^n$  é um subconjunto compacto e conexo, como uma solução diferenciável da Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$  definida sobre o interior do conjunto  $\mathbb{R}^m \times \widehat{K}_\kappa$ , onde  $\widehat{K}_\kappa$  é a  $(\Phi, \kappa)$ –Envoltória Convexa de  $K$  relativa a um subconjunto aberto e conexo  $\mathbb{R}^n \supset W \supset K$ . Para definir esta envoltória precisaremos das seguintes notações . Com o símbolo  $\mathbb{S}^{m-1}$  denotaremos a esfera  $(m-1)$ –dimensional com centro na origem e raio 1 e com a variável  $\theta$  denotaremos um elemento qualquer de  $\mathbb{S}^{m-1}$ . Com o símbolo  $\mathbb{S}_{t,\kappa,\theta}^{m-1}$  denotaremos a esfera  $(m-1)$ –dimensional com centro  $\Phi(t) - \frac{\theta}{2\kappa}$  e raio  $\frac{1}{2\kappa}$ . O produto interno Euclideano dos vetores  $x, y \in \mathbb{R}^m$ , denotaremos por  $x \cdot y$ ; e a norma Euclideana do vetor  $x \in \mathbb{R}^m$  denotaremos por  $|x|$ . Dado um subconjunto aberto e conexo  $W \subset \mathbb{R}^n$ , para cada  $\kappa \in \mathbb{Z}^+$ , para cada  $\theta \in \mathbb{S}^{m-1}$ , e para cada  $t \in W$  denotaremos por  $\mathcal{W}_{t,\theta,\kappa}$  a componente fechada e conexa que contém o ponto  $t$  do conjunto

$$\left\{ s \in \overline{W} : \theta \cdot [\Phi(t) - \Phi(s)] - \kappa |\Phi(t) - \Phi(s)|^2 = 0 \right\} = \left\{ s \in \overline{W} : \left| \Phi(s) - \left( \Phi(t) - \frac{\theta}{2\kappa} \right) \right|^2 = \frac{1}{4\kappa^2} \right\}$$

Da igualdade de conjuntos acima observamos também que podemos definir  $\mathcal{W}_{t,\theta,\kappa}$  como a componente fechada e conexa que contém o ponto  $t$  do conjunto

$$\Phi^{-1} \left( \mathbb{S}_{t,\kappa,\theta}^{m-1} \right) \cap \overline{W} \quad (1.3.11)$$

Com estas notações dadas acima podemos definir a  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa como segue :

**Definição 1.3.1** *Seja a Estrutura Tubular  $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}T(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$  gerada pelos campos vectoriais complexos  $L_1, \dots, L_n$ , definidos na equação (1.1.1). Seja o subconjunto compacto e conexo  $K$  contido num conjunto aberto e conexo  $W \subset \mathbb{R}^n$ . Definiremos a  $(\Phi, \kappa)$ -**Envoltória Convexa** de  $K$  relativa a  $W$ , denotaremos por  $\widehat{K}_\kappa$ , como a componente conexa que contém  $K$  do conjunto*

$$\left\{ t \in W : \mathcal{W}_{t,\theta,\kappa} \cap K \neq \emptyset, \quad \forall \theta \in \mathbb{S}^{n-1} \right\}. \quad (1.3.12)$$

**Observação 1.3.2** *Pode-se observar da definição de  $\mathcal{W}_{t,\theta,\kappa}$ , dada em (1.3.11), que se  $\Phi(K)$  está contida num hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  então  $\widehat{K}_\kappa = K$  relativa a qualquer aberto  $K \subset W \subset \mathbb{R}^n$ .*

No corolário 1.3.5 daremos uma caracterização geométrica da  $(\Phi, \kappa)$ –Envoltória Convexa, usando a definição seguinte:

**Definição 1.3.3** Dado um subconjunto qualquer  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$ , definiremos a **Envoltória Convexa Fechada** de  $\mathcal{X}$ , denotaremos por  $\widehat{\mathcal{X}}$ , como o fecho do conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i y_i, \text{ onde } \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \text{ e } y_i \in \mathcal{X}\}$$

Na seguinte proposição 1.3.4, demonstraremos que podemos definir de outro modo a Envoltória Convexa de qualquer compacto  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$ .

**Proposição 1.3.4** Dado um compacto qualquer  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$ . Então

$$\widehat{\mathcal{K}} = \{x \in \mathbb{R}^m : x \cdot \theta \leq \max_{y \in \mathcal{K}} \{y \cdot \theta\} \quad \forall \theta \in \mathbb{S}^{m-1}\}. \quad (1.3.13)$$

**Demonstração .** Seja o subconjunto convexo e fechado definido por

$$\mathcal{K}^\# = \{x \in \mathbb{R}^m : x \cdot \theta \leq \max_{y \in \mathcal{K}} \{y \cdot \theta\}, \quad \forall \theta \in \mathbb{S}^{m-1}\}.$$

Como  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^\#$ , temos  $\widehat{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K}^\#$ . Falta demonstrar que  $\mathcal{K}^\# \subset \widehat{\mathcal{K}}$ . Suponhamos que existe  $x' \in \mathcal{K}^\#$  tal que  $x' \notin \widehat{\mathcal{K}}$ . Como  $\widehat{\mathcal{K}} \subset \mathbb{R}^m$  é um subconjunto compacto e convexo, existe um hiperplano que separa  $x'$  e  $\widehat{\mathcal{K}}$ . Isto é, existe  $\theta' \in \mathbb{S}^{m-1}$  e um  $\epsilon_0 > 0$  tal que

$$y \cdot \theta' \leq \epsilon_0 + x' \cdot \theta', \quad \forall y \in \widehat{\mathcal{K}}$$

Como  $\mathcal{K} \subset \widehat{\mathcal{K}}$ , chegamos a uma contradição com a definição de  $\mathcal{K}^\#$ . Logo, podemos escrever  $\mathcal{K}^\# \subset \widehat{\mathcal{K}}$  ■

Esta proposição nos dá como corolário uma caracterização geométrica da  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa :

**Corolário 1.3.5** Seja a Estrutura Tubular  $\mathcal{L} \subset \mathcal{CT}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$  gerada pelos campos vectoriais complexos  $L_1, \dots, L_n$ , definidos na equação (1.1.1). Seja o subconjunto  $W \subset \mathbb{R}^n$  aberto e conexo. Seja  $K$  o subconjunto compacto e conexo com sua  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa relativa a  $W$ , denotada por  $\widehat{K}_\kappa$ . Então ,

$$\Phi(\widehat{K}_\kappa) \subset \widehat{\Phi(K)}$$

**Demonstração .** Seja qualquer  $t \in \widehat{K}_\kappa$ . Então para qualquer  $\theta \in \mathbb{S}^{m-1}$  existe  $s_\theta \in K$  tal que  $-\theta \cdot \Phi(s_\theta) \geq -\theta \cdot \Phi(t)$ . Isto implica  $\Phi(t) \cdot \theta \leq \max_{y \in \Phi(K)} y \cdot \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{S}^{m-1}$ . Logo,  $\Phi(t) \in \widehat{\Phi(K)}$  ■

**Observação 1.3.6** *A partir do corolário 1.3.5, podemos dizer que se o aberto  $W$  contém a componente fechada de  $\Phi^{-1}(\widehat{\Phi(K)})$  que contém o compacto  $K$ , então a  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa  $\widehat{K}_\kappa$  relativa a  $W$  é igual à  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa relativa a todo o espaço  $\mathbb{R}^n$ .*

Para ilustrar esta definição da  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa daremos um exemplo trivial sobre uma Estrutura Tubular Elíptica qualquer, definida sobre o espaço produto  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ . Observamos que este primeiro exemplo nos mostra um  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa com interior não vazio.

**Exemplo 1.3.7** *Seja a Estrutura Tubular  $\mathcal{L} \subset \text{CT}(\mathbb{R}^4)$  associada a uma aplicação sobrejetora de classe  $C^\infty$ ,  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Seja a circunferência unitária  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ . Seja o subconjunto compacto  $K = \Phi^{-1}(\mathbb{S}^1)$ . Verifica-se facilmente que a envoltória convexa fechada de  $\mathbb{S}^1$  é o disco*

$$D = \{\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2 : \tau_1^2 + \tau_2^2 \leq 1\}$$

*Denotaremos a  $(\Phi, \frac{1}{4})$ -Envoltória Convexa de  $K$  relativa a todo o espaço  $\mathbb{R}^2$  por  $\widehat{K}_{\frac{1}{4}}$ . Afirmamos que a componente fechada e conexa da imagem inversa de  $D$ , abusando notações denotaremos por  $\Phi^{-1}(D)$ , que contém o compacto  $K$  é igual a  $\widehat{K}_{\frac{1}{4}}$ .*

De fato, para provar nossa afirmação mostraremos que para cada ponto  $t \in \Phi^{-1}(D)$  e cada  $\theta \in \mathbb{S}^1$  existe uma curva conexa  $\gamma \subset \mathcal{W}_{t, \theta, \frac{1}{4}}$  que liga  $t$  a algum ponto  $t_\theta \in K$ . Denotaremos o produto interno Euclidiano de  $\mathbb{R}^2$  por  $\langle, \rangle$ . Das seguintes equivalências,

$$\langle \theta, [\Phi(t) - \Phi(s)] \rangle > -\frac{1}{4}|\Phi(t) - \Phi(s)|^2 = 0 \Leftrightarrow \langle \theta - \frac{1}{4}[\Phi(t) - \Phi(s)], \frac{1}{4}[\Phi(t) - \Phi(s)] \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle 4\theta - [\Phi(t) - \Phi(s)], [\Phi(t) - \Phi(s)] \rangle = 0, \quad \theta \in \mathbb{S}^1,$$

podemos dizer que  $\gamma \subset \mathcal{W}_{t, \theta, \frac{1}{4}}$  se

$$\langle 4\theta - [\Phi(t) - \Phi(s)], [\Phi(t) - \Phi(s)] \rangle = 0, \quad \forall s \in \gamma.$$

A curva diferenciável  $\Phi(\gamma)$  denotamos por  $\gamma_1$  e observamos que mostrar a existência de  $\gamma$  é equivalente mostrar a existência de  $\gamma_1 \subset D$  que liga o ponto  $\Phi(t) \in D$  a algum ponto de  $\tau_\theta \in \mathbb{S}^1$  tal que

$$\langle 4\theta - [\Phi(t) - \tau], [\Phi(t) - \tau] \rangle = 0, \quad \forall \tau \in \gamma_1. \quad (1.3.14)$$

Por outro lado, denotamos uma segunda curva diferenciável fechada conexa  $\gamma_2$  definida por

$$\gamma_2 = \{\Phi(t) + \langle 4\theta, \hat{\theta} \rangle \hat{\theta} : \hat{\theta} \in \mathbb{S}^1\}$$

e observamos três fatos. O **primeiro fato** :  $\Phi(t) \in \gamma_2 \cap D$  e  $\Phi(t) + 4\theta \in \gamma_2$ . Para ver isso, é suficiente tomar um  $\hat{\theta} \in \mathbb{S}^1$  ortogonal a  $\theta$  e tomar outro  $\hat{\theta} = \theta$ . O **segundo fato**:  $\gamma_2$  não está contida no disco  $D$ . Para ver isso, é suficiente observar que a distância dos pontos  $\Phi(t) + 4\theta \in \gamma_2$  ao ponto  $\Phi(t) \in D$  é igual a 4. O **terceiro fato** : a curva  $\gamma_2$  satisfaz a equação (1.3.14). Isto é,

$$\langle 4\theta - [\Phi(t) - \tau], [\Phi(t) - \tau] \rangle = 0, \quad \forall \tau \in \gamma_2.$$

Para verificar isto, é suficiente notar que

$$\begin{aligned} \langle 4\theta + \langle 4\theta, \hat{\theta} \rangle \hat{\theta}, \langle -4\theta, \hat{\theta} \rangle \hat{\theta} \rangle &= [\langle 4\theta, \hat{\theta} \rangle]^2 - [\langle 4\theta, \hat{\theta} \rangle]^2 \\ &= 0, \quad \forall \hat{\theta} \in \mathbb{S}^1 \end{aligned}$$

Do primeiro e do segundo fato podemos afirmar que existe uma curva conexa  $\gamma_1 \subset \gamma_2 \cap D$  que liga o ponto  $\Phi(t)$  a um ponto  $\tau_\theta \in \gamma_2 \cap \mathbb{S}^1$ . Ver figura 1.1 .

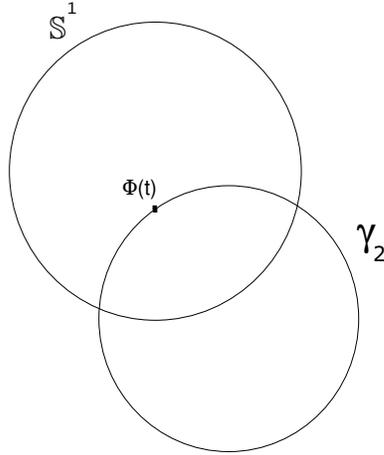


Figura 1.1: A curva  $\gamma_2$  que passa pelo ponto  $\Phi(t)$  corta a circunferência  $\mathbb{S}^1$ .

Do terceiro fato, podemos afirmar que  $\gamma_1$  satisfaz (1.3.14). Logo,  $\Phi^{-1}(D) \subset \widehat{K}_{\frac{1}{4}}$ . E, pelo corolário 1.3.5, podemos escrever  $\Phi^{-1}(D) = \widehat{K}_{\frac{1}{4}}$ . Assim terminamos provando nossa afirmação  $\diamond$

Agora, vejamos outro exemplo onde  $\Phi(\widehat{K}_\kappa) \neq \widehat{\Phi(K)}$ . Mas, este segundo exemplo também nos mostra uma  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa com interior não vazio.

**Exemplo 1.3.8** *Seja a Estrutura Tubular  $\mathcal{L} \subset \text{CT}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  associada a aplicação identidade,  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \Phi = \text{Id}$ . Isto é, a Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$  é a conhecida Estrutura Cauchy-Riemann sobre  $\mathbb{C}^3$ . Seja o subconjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^3$  definido por*

$$K = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t_3 = t_1^2 + t_2^2 \leq 4\}.$$

*Seja a esfera  $\mathbf{S}$  de raio 2 e centro  $(0, 0, 4)$  definido por*

$$\mathbf{S} = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 : t_1^2 + t_2^2 + (t_3 - 4)^2 = 4\}$$

*Podemos verificar facilmente que a envoltória convexa fechada de  $K$ , denotada por  $\widehat{K}$  (definição 1.3.3), é o conjunto definido por :*

$$\widehat{K} = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t_1^2 + t_2^2 \leq t_3 \leq 4\}$$

*Isto é,  $\widehat{K}$  é a região fechada limitada pelo plano,  $t^3 = 4$  e o parabolóide  $t^3 = t_1^2 + t_2^2$ . A partir da figura 1.2, tendo em mente a definição de  $\mathcal{W}_{t, \theta, \kappa}$  dada em (1.3.11), induzimos claramente que a  $(\Phi, \frac{1}{4})$ -Envoltória Convexa  $\widehat{K}_{\frac{1}{4}}$ , relativa a  $\mathbb{R}^3$ , é a região fechada limitada pela esfera  $\mathbf{S}$  e o parabolóide  $t^3 = t_1^2 + t_2^2$ . Para cada ponto  $t = (t_1, t_2, t_3)$  que está dentro da esfera  $\mathbf{S}$  existe um subconjunto,  $\mathcal{V}_t \subset \mathbb{S}^3$ , aberto não vazio tal que*

$$\mathbb{S}_{t, \theta, \frac{1}{4}}^3 \cap K = \emptyset, \quad \forall \theta \in \mathcal{V}_t.$$

*Pois a partir  $t_3 > 2$  podemos introduzir uma esfera de raio 2 dentro do parabolóide sem cortar o parabolóide. Neste exemplo observamos que se  $\kappa \rightarrow 0$  então  $\widehat{K}_\kappa \rightarrow \widehat{K}$ .*

Agora daremos um exemplo de difícil verificação .Pois, sua verificação consiste, em essência, encontrar raízes reais de uma família à 5-parâmetros de polinômios de grau 4.

**Exemplo 1.3.9** *Seja a Estrutura Tubular  $\mathcal{L} \subset \text{CT}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2)$  associada à aplicação analítica,  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \Phi(t) = (t_1, t_2, t_1^2 - t_2^2)$ . Seja qualquer aberto  $W \subset \mathbb{R}^2$  que contém o disco unitário  $D = \{t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : t_1^2 + t_2^2 \leq 1\}$ . O compacto  $K \subset \mathbb{R}^2$  é a circunferência unitária  $\mathbb{S}^1 \subset W$ . Então, o  $(\Phi, \frac{1}{4})$ -Envoltória Convexa,  $\widehat{K}_{\frac{1}{4}}$ , relativa ao aberto  $W$  é igual a  $\widehat{K}$ . Isto é*

$$\widehat{K}_{\frac{1}{4}} = \widehat{K} = D.$$

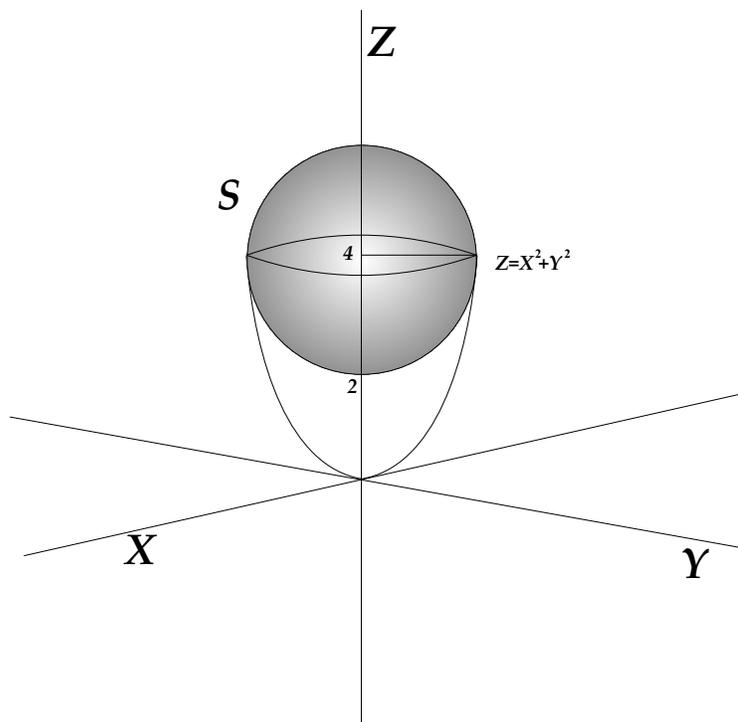


Figura 1.2: A esfera  $S$  de raio 2 e centro  $(0, 0, 4)$  dentro do parabolóide  $Z = X^2 + Y^2$ .

## Capítulo 2

# O Teorema de Extensão do Tubo de Bochner Truncado

Apresentaremos uma versão semi-local do Teorema de Extensão Tubular de Bochner para as estruturas tubulares analíticas, definidas sobre  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . Para a apresentação, consideraremos a Estrutura Tubular Analítica  $\mathcal{L} \subset \mathcal{CT}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$  associada, como no capítulo anterior, com a aplicação analítica  $Z : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ ,  $Z(x, t) = x + i\Phi(t) = (Z_1, \dots, Z_m)$ , onde

$$Z_j(x, t) = x_j + i\phi_j(t), \quad j = 1, \dots, m;$$

Além disso, a Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$  é gerada pelos campos vetoriais

$$L_\iota = \frac{\partial}{\partial t_\iota} - i \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial t_\iota} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \iota = 1, \dots, n.$$

### 2.1 Dados assumidos neste capítulo.

Neste capítulo consideraremos somente subconjuntos compactos  $K \subset \mathbb{R}^n$  na categoria de subconjuntos uniformemente convexos retificáveis de  $\mathbb{R}^n$  que definimos agora :

**Definição 2.1.1** Dizemos que um conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  é uniformemente convexo retificável se existe para cada par  $p, q \in K$  um caminho retificável  $\gamma \subset K$  ligando  $p, q$  tal que seu comprimento  $|\gamma| \leq C_0(K)$ , onde a constante  $C_0(K)$  depende unicamente do compacto  $K$ .

Exemplos de conjuntos conexos fechados com a propriedade acima são os conjuntos fechados semi-analíticos [22] e subconjuntos compactos de  $C^k$ -subvariedades de  $\mathbb{R}^n$  com  $k \geq 2$ . Seja o aberto tubular limitado  $U = V \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , onde o compacto  $K \subset W$  é **uniformemente convexo retificável**. Consideramos os seguintes números reais

$$\mathbf{D} = \sup_{x,y \in V} |x - y| \quad ; \quad \mathbf{d} = \sup_{s,t \in \overline{W}} |\Phi(s) - \Phi(t)| \quad (2.1.1)$$

Sejam os abertos não vazios,  $V_R \subset V_0 \subset V$ , tais que  $V_R = \{x \in V_0 : \text{dist}(x, \partial V_0) \geq R\}$ , onde o número real positivo  $R > 0$  satisfaz o seguinte **dado assumido**:

$$\frac{\mathbf{d}}{R^2 - \mathbf{d}^2} < \frac{1}{\mathbf{d} + \sqrt{2\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2}} \quad (2.1.2)$$

Um exemplo da existência de números reais  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $R$ , que satisfazem o **dado assumido**, pode ser  $\mathbf{D} = \sqrt{14}\mathbf{d}$ ;  $R = \sqrt{7}\mathbf{d}$ .

## 2.2 Preliminares do Teorema de Extensão do Tubo de Bochner Truncado.

### 2.2.1 Notações .

Fixamos uma função real  $\chi \in C_c^\infty(V; \mathbb{R})$ , onde  $\chi \equiv 1$  em  $V_0$  e  $\chi \equiv 0$  em  $V \setminus V_0$ . Com  $\gamma$  denotaremos o caminho contido em  $\mathbb{R}^n$  que liga um ponto fixo  $t_0 \in K$  a um ponto qualquer  $t \in \mathbb{R}^n$ . Seja a função  $G_\epsilon(\xi) = \exp(-\epsilon 4^{-1} \xi^2)$ , onde  $\xi \in \mathbb{R}^m$ ,  $\xi^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_m^2$ , que é a transformada Fourier-Laplace da função holomorfa  $E_\epsilon(z) = (\epsilon\pi)^{-\frac{m}{2}} \exp(-\epsilon^{-1} z^2)$ , onde  $z \in \mathbb{C}^m$ ,  $z^2 = z_1^2 + \dots + z_m^2$ . Precisaremos das seguintes notações técnicas,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m \quad ; \quad |\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n \quad ; \quad \partial_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m} \quad ; \quad L^\beta = L_1^{\beta_1} \dots L_n^{\beta_n} \quad ;$$

$\partial_t^\beta = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial t_n}\right)^{\beta_n}$ , onde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$  e  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ . De qualquer função  $\mathbf{u} \in C^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  obtemos a seguinte 1-forma diferencial

$$d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](x, t) = \sum_{i=1}^n L_i \mathbf{u}(x, t) dt_i, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n.$$

No caso de uma solução  $k$ -Jato  $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^k(\overline{V} \times K)$  com sua extensão  $\overline{u} \in C^k(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  temos que a 1-forma diferencial  $d_{\mathcal{L}}[\overline{u}]$  com coeficientes de classe  $C^{k-1}$  se anula sobre  $\overline{V} \times K$ . Por

comodidade usaremos a seguinte notação para a  $(m + 1)$ -forma diferencial :

$$dx \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](x, t) = \sum_{\iota=1}^n L_{\iota} \mathbf{u}(x, t) dx \wedge dt_{\iota}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n. \quad (2.2.3)$$

## 2.2.2 Construção de uma coleção de funções $\{v_{\epsilon} : \epsilon > 0\}$ : definição e propriedades.

Neste parágrafo, para cada  $\mathbf{u} \in C^k(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  definiremos uma correspondente coleção de funções  $\{v_{\epsilon}\} \subset C^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Para isto, precisaremos da seguinte proposição .Logo, demonstraremos algumas propriedades básicas desta coleção  $\{v_{\epsilon}\}$  de utilidade para nosso trabalho.

**Proposição 2.2.1** *Seja qualquer função  $\mathbf{u} \in C^k(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Seja qualquer  $\alpha \in \mathbb{N}^m$ , onde  $|\alpha| \leq k - 1$ . Então , para cada  $z \in \mathbb{C}^m$  e cada  $\epsilon > 0$ , temos*

$$\sum_{\iota=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial s_{\iota}} \right) \left[ \int_{\mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(z - Z(y, s)) [\partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}](y, s) dy \right] ds_{\iota} = \int_{\mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(z - Z(y, s)) dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}](y, s) \quad (2.2.4)$$

Em outras palavras, o segundo membro da equação (2.2.4) é uma 1-forma diferencial exata em relação a variável  $s \in \mathbb{R}^n$ .

**Demonstração .** Fixamos as variáveis  $z \in \mathbb{C}^m$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^m$ ,  $|\alpha| \leq k - 1$ , e  $\epsilon > 0$ . Observamos que a função  $\chi \mathbf{u}$  tem suporte compacto em relação a variável  $y \in \mathbb{R}^m$ . Verificamos a equação (2.2.4) com os seguintes cálculos.

$$\begin{aligned} & \sum_{\iota=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial s_{\iota}} \right) \left[ \int_{\mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(z - Z(y, s)) [\partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}](y, s) dy \right] ds_{\iota} \\ &= \sum_{\iota=1}^n \left[ \int_{\mathbb{R}^m} \left( \frac{\partial}{\partial s_{\iota}} \right) [E_{\epsilon}(z - Z) [\partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}]] dy \right] ds_{\iota} \\ &= \sum_{\iota=1}^n \int_{\mathbb{R}^m} L_{\iota} [E_{\epsilon}(z - Z) [\partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}]] dy \wedge ds_{\iota} + i \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi_j(s)}{\partial s_{\iota}} \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \right) [E_{\epsilon}(z - Z) [\partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}]] dy \wedge ds_{\iota}. \\ &= \sum_{\iota=1}^n \int_{\mathbb{R}^m} L_{\iota} [E_{\epsilon}(z - Z) [\partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}]] dy \wedge ds_{\iota} + i \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi_j(s)}{\partial s_{\iota}} \left[ \int_{\mathbb{R}^m} \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \right) [E_{\epsilon}(z - Z) [\partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}]] dy \right] \wedge ds_{\iota}. \end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Stokes, o último membro da última igualdade anula-se.E, observando que  $L_{\iota} E_{\epsilon}(z - Z(y, s)) = 0$ ,  $\iota = 1, \dots, n$ , segue-se

$$\sum_{\iota=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial s_{\iota}} \right) \left[ \int_{\mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(z - Z(y, s)) [\partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}](y, s) dy \right] ds_{\iota} = \sum_{\iota=1}^n \int_{\mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(z - Z) L_{\iota} [\partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}] dy \wedge ds_{\iota}.$$

Conforme a notação dada em (2.2.3), conseguimos

$$\begin{aligned} \sum_{\iota=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial s_{\iota}} \right) \left[ \int_{\mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(z - Z(y, s)) [\partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}](y, s) dy \right] ds_{\iota} &= \int_{\mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(z - Z) \sum_{\iota=1}^n L_{\iota} [\partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}] dy \wedge ds_{\iota} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(z - Z) dy \wedge d_{\mathcal{L}} [\partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}](y, s) \end{aligned}$$

Com estas últimas igualdades terminamos a demonstração ■

Agora podemos definir a coleção de funções de classe  $C^{\infty}$ ,  $v_{\epsilon} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , associada a uma função dada  $\mathbf{u} \in C^k(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ , como segue

$$v_{\epsilon}(x, t) = \int_{\gamma \times \mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(Z(x, t) - Z(y, s)) dy \wedge d_{\mathcal{L}} [\chi \mathbf{u}](y, s), \quad (2.2.5)$$

onde  $\gamma \subset \mathbb{R}^n$  é qualquer curva retificável que liga os pontos  $t$  a um ponto fixo  $t_0$ . Pela proposição 2.2.1, a função  $v_{\epsilon}$  é bem definida e independente da escolha de  $\gamma$ . A seguir, demonstraremos algumas propriedades básicas da função  $v_{\epsilon}$ .

**Proposição 2.2.2 (1-propriedade)** *Para cada  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^n$ , onde  $|\alpha| + |\beta| \leq k - 1$ , para cada  $(x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  e para cada  $\epsilon > 0$ , podemos formular o seguinte:*

$$L_t^{\beta} \partial_x^{\alpha} v_{\epsilon}(x, t) = \begin{cases} \int_{\gamma \times \mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(Z(x, t) - Z(y, s)) dy \wedge d_{\mathcal{L}} [\partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}](y, s), & \text{se } |\beta| = 0 \\ \int_{\mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(x - y) [L^{\beta} \partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}](y, t) dy, & \text{se } |\beta| \neq 0 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

**Demonstração** .Conforme a notação dada em (2.2.3) podemos escrever.

$$\begin{aligned} L^{\beta} \partial_x^{\alpha} v_{\epsilon}(x, t) &= L^{\beta} \partial_x^{\alpha} \int_{\gamma} \int_{\mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(Z(x, t) - Z(y, s)) \sum_{\iota=1}^n L_{\iota} [\chi \mathbf{u}](y, s) dy \wedge ds_{\iota} \\ &= \sum_{\iota=1}^n L^{\beta} \int_{\gamma} \int_{\mathbb{R}^m} \partial_x^{\alpha} [E_{\epsilon}(Z(x, t) - Z(y, s))] L_{\iota} [\chi \mathbf{u}](y, s) dy \wedge ds_{\iota} \\ &= \sum_{\iota=1}^n L^{\beta} \int_{\gamma} \int_{\mathbb{R}^m} -\partial_y^{\alpha} [E_{\epsilon}(Z(x, t) - Z(y, s))] L_{\iota} [\chi \mathbf{u}](y, s) dy \wedge ds_{\iota} \end{aligned}$$

Como  $\partial_x^{\alpha} L^{\beta} = L^{\beta} \partial_x^{\alpha}$  e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} L^{\beta} \partial_x^{\alpha} v_{\epsilon}(x, t) &= \sum_{\iota=1}^n L^{\beta} \int_{\gamma} \int_{\mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(Z(x, t) - Z(y, s)) L_{\iota} [\partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}](y, s) dy \wedge ds_{\iota} \\ &= L^{\beta} \int_{\gamma \times \mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(Z(x, t) - Z(y, s)) dy \wedge d_{\mathcal{L}} [\partial_y^{\alpha} \chi \mathbf{u}](y, s) \end{aligned}$$

Se  $|\beta| = 0$ , está demonstrado o primeiro caso na equação (2.2.6) . Para  $|\beta| \neq 0$ , é suficiente provar o caso particular  $|\beta| = 1$ . Pois, usando este caso particular um número finito de vezes demonstraremos o caso geral. Pela proposição 2.2.1 e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
& L_\iota \int_{\gamma \times \Gamma_s} E_\epsilon(Z(x, t) - Z(y, s)) \wedge dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\partial_y^\alpha \chi \mathbf{u}](y, s) = \\
&= L_\iota \left[ \int_{\mathbb{R}^m} E_\epsilon(Z(x, t) - Z(y, t)) [\partial_y^\alpha \chi \mathbf{u}](y, t) dy - \int_{\mathbb{R}^m} E_\epsilon(Z(x, t) - Z(y, t_0)) [\partial_y^\alpha \chi \mathbf{u}](y, t_0) dy \right] \\
&= L_\iota \left[ \int_{\mathbb{R}^m} E_\epsilon(x - y) [\partial_y^\alpha \chi \mathbf{u}](y, t) dy \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} E_\epsilon(x - y) \frac{\partial}{\partial t_\iota} [\partial_y^\alpha \chi \mathbf{u}](y, t) dy - \int_{\mathbb{R}^m} i \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial t_\iota} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} E_\epsilon(x - y) \right] [\partial_y^\alpha \chi \mathbf{u}](y, t) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} E_\epsilon(x - y) \frac{\partial}{\partial t_\iota} [\partial_y^\alpha \chi \mathbf{u}](y, t) dy + \int_{\mathbb{R}^m} i \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial t_\iota} \left[ \frac{\partial}{\partial y_j} E_\epsilon(x - y) \right] [\partial_y^\alpha \chi \mathbf{u}](y, t) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} E_\epsilon(x - y) \frac{\partial}{\partial t_\iota} [\partial_y^\alpha \chi \mathbf{u}](y, t) dy - i \int_{\mathbb{R}^m} E_\epsilon(x - y) \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial t_\iota} \frac{\partial}{\partial y_j} [\partial_y^\alpha \chi \mathbf{u}](y, t) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} E_\epsilon(x - y) [L_\iota \partial_y^\alpha \chi \mathbf{u}](y, t) dy
\end{aligned}$$

Com esta última igualdade podemos concluir a demonstração ■

Nas duas proposições seguintes, usaremos a anterior proposição 2.2.2(1-propriedade) para estudar a  $C^k$ -convergência uniforme, sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , da coleção de funções  $\{v_\epsilon\}$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Proposição 2.2.3 (2-propriedade)** *Seja  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^n$ , onde  $|\alpha| + |\beta| \leq k - 1$  e  $|\beta| \neq 0$ . Então, as funções  $\{L^\beta \partial_x^\alpha v_\epsilon\}$  convergem uniformemente a  $L^\beta \partial_x^\alpha (\chi \mathbf{u})$ , sobre qualquer subconjunto compacto  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .*

**Demonstração .** Se  $|\beta| \neq 0$ , pela proposição 2.2.2, podemos escrever

$$L^\beta \partial_x^\alpha v_\epsilon(x, t) = \int_{\mathbb{R}^m} E_\epsilon(x - y) [L^\beta \partial_y^\alpha \chi \mathbf{u}](y, t) dy$$

Logo, como a função  $L^\beta \partial_x^\alpha (\chi \mathbf{u})$  é uniformemente contínua sobre qualquer subconjunto compacto  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  e pelas propriedades conhecidas de  $E_\epsilon$ , podemos afirmar que a coleção de funções  $\{L^\beta \partial_x^\alpha v_\epsilon\}$  converge uniformemente a  $L^\beta \partial_x^\alpha (\chi \mathbf{u})$ , sobre  $\mathcal{K}$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$  ■

A seguinte proposição pode ser considerada em essência como uma *Generalização* do Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves sobre subconjuntos fechados do tipo  $\bar{V}_R \times K$ .

**Proposição 2.2.4 (3-propriedade)** *Seja a Estrutura Tubular  $\mathcal{L} \subset \text{CT}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ . Seja  $\alpha \in \mathbb{N}^m$ , onde  $|\alpha| \leq k - 1$ . Se a função  $\mathbf{u} \in C^k(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  representa a uma Solução  $k$ -Jato  $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^k(\bar{V} \times K)$ , i.e.  $\mathbf{u} = \bar{u}$ , então as correspondentes funções  $\{\partial_x^\alpha v_\epsilon\}$  convergem uniformemente a 0 sobre  $\bar{V}_R \times K$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .*

**Demonstração .** Sejam quaisquer  $(x, t) \in \bar{V}_R \times K$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^m$ , onde  $|\alpha| \leq k - 1$ . Pela proposição 2.2.2, podemos escrever

$$\partial_x^\alpha v_\epsilon(x, t) = \int_{\gamma \times \mathbb{R}^m} E_\epsilon(Z(x, t) - Z(y, s)) dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\partial_y^\alpha \chi \bar{u}](y, s) \quad (2.2.7)$$

A proposição 2.2.1, e como o compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  é **uniformemente convexo retificável**, nos permite assumir a curva  $\gamma \subset K$ , que liga os pontos  $t_0$  e  $t$ , de comprimento menor que uma constante,  $|\gamma| < C_0(K)$ . Observamos que a constante  $C_0(K)$  depende somente do compacto  $K$ . A 1-forma diferencial  $d_{\mathcal{L}}[\partial_y^\alpha \chi \bar{u}]$  expressaremos como a soma de duas 1-formas diferenciais ,

$$d_{\mathcal{L}}[\partial_y^\alpha \chi \bar{u}] = \chi \partial_y^\alpha d_{\mathcal{L}}[\bar{u}] + \omega, \quad (2.2.8)$$

onde  $\omega(y, s) \equiv 0$ , se  $y \in V_0$  ou  $y \in \mathbb{R}^m \setminus V$ . A partir das equações (2.2.7) e (2.2.8), segue que

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha v_\epsilon(x, t) &= \int_{\gamma \times \mathbb{R}^m} E_\epsilon(Z(x, t) - Z(y, s)) dy \wedge \chi \partial_y^\alpha d_{\mathcal{L}}[\bar{u}](y, s) + \\ &\int_{\gamma \times \mathbb{R}^m} E_\epsilon(Z(x, t) - Z(y, s)) dy \wedge \omega(y, s) \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Denotaremos as duas integrais em (2.2.9) por  $I_\epsilon^\alpha(x, t)$  e  $II_\epsilon^\alpha(x, t)$  respectivamente,

$$\begin{aligned} I_\epsilon^\alpha(x, t) &= \int_{\gamma \times \mathbb{R}^m} E_\epsilon(Z(x, t) - Z(y, s)) dy \wedge \chi \partial_y^\alpha d_{\mathcal{L}}[\bar{u}](y, s); \\ II_\epsilon^\alpha(x, t) &= \int_{\gamma \times \mathbb{R}^m} E_\epsilon(Z(x, t) - Z(y, s)) dy \wedge \omega(y, s). \end{aligned}$$

Como  $\gamma \subset K$ , então segue-se

$$I_\epsilon^\alpha(x, t) = 0, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \forall (x, t) \in \bar{V}_R \times K. \quad (2.2.10)$$

Para demonstrar esta proposição resta mostrar que  $II_\epsilon^\alpha \rightarrow 0$ , uniformemente sobre  $\overline{V}_R \times K$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Pela definição da função  $E_\epsilon$  e como o suporte da 1-forma diferenciável está contida no conjunto  $V \subset \mathbb{R}^m$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} II_\epsilon^\alpha(x, t) &= (\epsilon\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \int_\gamma e^{\frac{-(x-y+i(\Phi(t)-\Phi(s)))^2}{\epsilon}} dy \wedge \omega(y, s) \\ &= (\epsilon\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_V \int_\gamma e^{\frac{-(x-y+i(\Phi(t)-\Phi(s)))^2}{\epsilon}} dy \wedge \omega(y, s) \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Entretanto, notamos que o valor absoluto da exponencial na equação (2.2.11) é

$$e^{\frac{-|x-y|^2 + |\Phi(t)-\Phi(s)|^2}{\epsilon}}$$

Pela condição da 1-forma  $\omega$ , para estimar a integral  $II_\epsilon^\alpha$  é suficiente estimar esta exponencial quando  $(x, t) \in \overline{V}_R \times K$  e  $(y, s) \in [V \setminus V_0] \times K$ . Neste caso, considerando o dado assumido deste capítulo (2.1.2), obtemos

$$-|x-y|^2 + |\Phi(t)-\Phi(s)|^2 \leq -R^2 + \mathbf{d}^2 < -\mathbf{d}^2$$

Logo, se  $(x, t) \in \overline{V}_R \times K$  e  $(y, s) \in [V \setminus V_0] \times K$ , resulta

$$\left| e^{\frac{-(x-y+i(\Phi(t)-\Phi(s)))^2}{\epsilon}} \right| \leq e^{\frac{-\mathbf{d}^2}{\epsilon}} \quad (2.2.12)$$

Por outro lado, como o comprimento da curva  $\gamma \subset K$  é limitada por  $C_0(K)$ , podemos escrever

$$\left| \int_\gamma \omega(y, s) \right| \leq M(V, K, k), \quad \forall (y, t) \in V \times K, \quad (2.2.13)$$

onde  $M(V, K, k)$  é uma constante que depende do aberto  $V$ , do compacto  $K$  e do inteiro positivo  $k > 0$ . Então, pelas equações (2.2.11), (2.2.12) e (2.2.13), obtemos

$$|II_\epsilon^\alpha(x, t)| \leq M(V, K, k) (\epsilon\pi)^{-\frac{m}{2}} e^{\frac{-\mathbf{d}^2}{\epsilon}} \left( \int_V dy \right), \quad \forall (x, t) \in \overline{V}_R \times K. \quad (2.2.14)$$

Com a equação (2.2.14), mostramos  $II_\epsilon^\alpha \rightarrow 0$ , uniformemente sobre  $\overline{V}_R \times K$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$  ■

**Observação 2.2.5** *É importante notar que para a demonstração da proposição 2.2.4 precisamos somente da relação  $R^2 > \mathbf{d}^2$ , que é uma consequência direta do dado assumido neste capítulo (2.1.2).*

O seguinte corolário nos mostra porque a proposição 2.2.4 é em essência uma *Generalização* do Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves sobre subconjuntos fechados do tipo  $\overline{V}_R \times K$ .

**Corolário 2.2.6** *Seja  $t_0 \in K$  o ponto fixado arbitrariamente. Então, para qualquer Solução  $k$ -Jato  $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^k(\bar{V} \times K)$ , existe o seguinte limite com convergência uniforme sobre  $\bar{V}_R \times K$*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(Z(x, t) - Z(y, t_0))[\chi u](y, t_0) dy = u(x, t), \quad (x, t) \in \bar{V}_R \times K. \quad (2.2.15)$$

**Demonstração.** As proposições (2.2.1)-(2.2.4) e a definição da função  $v_{\epsilon}$  garantem a existência do seguinte limite com convergência uniforme sobre  $\bar{V}_R \times K$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(Z(x, t) - Z(y, t_0))[\chi u](y, t_0) dy - \int_{\mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(x - y)[\chi u](y, t) dy \right] = 0$$

Logo, como a função  $\chi u$  é uniformemente contínua sobre  $\bar{V} \times K$ ,  $\chi u \equiv u$  sobre  $V_R \times K$ , e pelas propriedades conhecidas de  $E_{\epsilon}$ , podemos afirmar que existe o seguinte limite com convergência uniforme sobre  $\bar{V}_R \times K$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} E_{\epsilon}(Z(x, t) - Z(y, t_0))[\chi u](y, t_0) dy = u(x, t), \quad (x, t) \in \bar{V}_R \times K$$

Assim terminamos a demonstração ■

As duas proposições anteriores (2-propriedade e 3-propriedade) nos motivam a perguntar se a coleção  $\{\partial_x^{\alpha} v_{\epsilon}\}$ , correspondente a uma Solução  $k$ -Jato, é uniformemente convergente sobre qualquer subconjunto compacto  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Em geral, a resposta é negativa. Pois, caso contrário, podemos demonstrar que toda Solução  $k$ -Jato pode ser estendida como uma solução diferenciável definida globalmente sobre  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . Seguindo os resultados de Joaquim Tavares [36], somente conseguimos provar a convergência uniforme da coleção de funções  $\{\partial_x^{\alpha} v_{\epsilon}\}$ , ao menos sobre subconjuntos compactos convexos de  $\bar{V}_R \times \hat{K}_{\kappa}$ , correspondente a uma Solução  $k$ -Jato,  $k > m + 3$ . Apresentaremos este fato no seguinte teorema, que consideramos como a 4-propriedade, cuja longa demonstração daremos na seção 2.4.

**Teorema 2.2.7 (4-propriedade)** *Seja a Estrutura Tubular Analítica  $\mathcal{L} \subset \text{CT}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ . Sejam o tubo aberto limitado  $V \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  e o subconjunto compacto  $K \subset W$  uniformemente convexo retificável. Consideramos os seguintes números reais*

$$D = \sup_{x,y \in V} |x - y| \quad ; \quad d = \sup_{s,t \in \overline{W}} |\Phi(s) - \Phi(t)|,$$

e fixamos os abertos não vazios,  $V_R \subset V_0 \subset V$ , tais que  $V_R = \{x \in V_0 : \text{dist}(x, \partial V_0) \geq R\}$ , onde o número real positivo  $R > 0$  satisfaz o seguinte dado assumido neste capítulo (2.1.2):

$$\frac{d}{R^2 - d^2} < \frac{1}{d + \sqrt{2d^2 + D^2}}$$

Sejam a Solução  $k$ -Jato  $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^k(\overline{V} \times K)$  e sua correspondente coleção de funções de classe  $C^\infty$   $\{L^\beta \partial_x^\alpha v_\epsilon : |\alpha| + |\beta| \leq k\}$ . Seja  $\widehat{K}_\kappa$  a  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa de  $K$  relativa a  $W$ . Assumimos os inteiros positivos  $k, \nu \in \mathbb{Z}_+$  tais que  $k > 2 + 2\nu$ ,  $2\nu > m$ .

Então, se fixamos qualquer número real positivo  $\frac{d}{R^2 - d^2} < \kappa < \frac{1}{d + \sqrt{2d^2 + D^2}}$  e quaisquer  $\alpha, \beta$ , onde  $|\alpha| + |\beta| \leq k - 2 - 2\nu$ , podemos afirmar que a coleção de funções  $\{L^\beta \partial_x^\alpha v_\epsilon\}$  converge uniformemente sobre qualquer subconjunto compacto convexo  $\Xi \subset \overline{V}_R \times \widehat{K}_\kappa$  a  $L^\beta \partial_x^\alpha v$ ; onde a função  $v \in C^{k-2\nu-2}(V_R \times \text{int}[\widehat{K}_\kappa]; \mathbb{C})$  tem derivadas parciais  $L^\beta \partial_x^\alpha v$  contínuas sobre qualquer subconjunto compacto convexo  $\Xi$ , e tem a representação integral seguinte

$$v(x, t) = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_\theta \times \mathbb{R}^m} \frac{\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \zeta_\kappa)}{(1 + \zeta_\kappa^2)^\nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[(1 - \Delta_y)^\nu \chi \bar{u}] \wedge d\zeta_\kappa$$

onde  $\theta := \frac{\xi}{|\xi|}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^m$ ;  $\zeta_\kappa := \xi + i\kappa|\xi|[Z(x, t) - Z(y, s)]$ ; o símbolo  $\Delta_y$  denota o operador de Laplace sobre  $\mathbb{R}^m$ ; o símbolo  $\gamma_\theta$  denota uma curva diferenciável por partes, dependente de  $\theta$ , que liga o ponto  $t \in \widehat{K}_\kappa$  ao ponto fixo  $t_0 \in K$ ; e o símbolo  $dy \wedge d_{\mathcal{L}}[(1 - \Delta_y)^\nu \chi \bar{u}] \wedge d\zeta_\kappa$  denota a  $(2m + 1)$ -forma diferencial

$$\left[ \prod_{\iota=1}^m (1 + i\kappa\xi_\iota |\xi|^{-1} [x_\iota + i\phi_\iota(t) - y_\iota - i\phi_\iota(s)]) \right] \left[ \sum_{\iota=1}^n L_\iota [(1 - \Delta_y)^\nu \chi \bar{u}](y, s) dy \wedge ds_\iota \wedge d\xi \right].$$

Além disso, se  $p \in \Xi \cap [\overline{V}_R \times K]$  então

$$\lim_{\Xi \ni q \rightarrow p} \partial_x^\alpha v(q) = 0, \quad \forall |\alpha| \leq k - 2\nu - 2. \quad (2.2.16)$$

## 2.3 Teorema de Extensão do Tubo de Bochner Truncado.

### 2.3.1 Extensão de uma Solução $k$ -Jato de uma Estrutura Tubular Analítica $\mathcal{L}$ .

Registramos a seguinte afirmação como o Teorema de Extensão do Tubo de Bochner Truncado. É uma versão semi-local do Teorema de Extensão Tubular de Bochner.

**Teorema 2.3.1** *Seja a Estrutura Tubular Analítica  $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}T(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ . Sejam o tubo aberto limitado  $V \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  e o subconjunto compacto  $K \subset W$  uniformemente convexo retificável. Consideramos os seguintes números reais*

$$D = \sup_{x,y \in V} |x - y| \quad ; \quad d = \sup_{s,t \in \bar{\Omega}} |\Phi(s) - \Phi(t)|,$$

e fixamos os abertos não vazios,  $V_R \subset V_0 \subset V$ , tais que  $V_R = \{x \in V_0 : \text{dist}(x, \partial V_0) \geq R\}$ , onde o número real positivo  $R > 0$  satisfaz o seguinte dado assumido neste capítulo (2.1.2):

$$\frac{d}{R^2 - d^2} < \frac{1}{d + \sqrt{2d^2 + D^2}}$$

Seja  $\widehat{K}_\kappa$  a  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa de  $K$  relativa a  $W$ . Assumimos os inteiros  $k, \nu \in \mathbb{Z}_+$  tais que  $k > 2 + 2\nu$ ,  $2\nu > m$ .

Então, para qualquer número real positivo  $\frac{d}{R^2 - d^2} < \kappa < \frac{1}{d + \sqrt{2d^2 + D^2}}$ , podemos definir uma aplicação

$$\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^k(\bar{V} \times K) \ni u \longmapsto \widehat{u} \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{k-2\nu-2}(V_R \times \text{int}[\widehat{K}_\kappa]),$$

onde a função  $\widehat{u}$ , com derivadas parciais  $\partial_t^\beta \partial_x^\alpha \widehat{u}$  contínuas sobre qualquer subconjunto compacto  $\Xi = \Xi_1 \times \Xi_2 \subset \bar{V}_R \times \widehat{K}_\kappa$ , onde  $\Xi_1 \subseteq \bar{V}_R$  é um subconjunto compacto convexo e  $\Xi_2 \subset \widehat{K}_\kappa$  é um subconjunto compacto e convexo, estende a Solução  $k$ -Jato  $u$  no seguinte sentido:

$$\lim_{\Xi \ni q \rightarrow p} \partial_x^\alpha \widehat{u}(q) = \partial_x^\alpha u(p), \quad \text{se } p \in \Xi \cap [\bar{V}_R \times K], \quad \forall |\alpha| \leq k - 2\nu - 2. \quad (2.3.17)$$

Além disso, Se  $\lambda$  é uma curva diferenciável fechada e conexa, de comprimento finito, com um extremo  $\tau \in K$ , tal que  $\lambda - \{\tau\} \subset \text{int}[\widehat{K}_\kappa]$  então, para quaisquer  $u_1, u_2 \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{k-2\nu-2}(\bar{V} \times \lambda)$  com a condição  $u_1 = u_2 = u$  sobre o subconjunto fechado  $\bar{V} \times \{\tau\}$ , temos

$$u_1 = u_2 \quad \text{sobre } \bar{V}_R \times \lambda \quad (2.3.18)$$

**Demonstração .** Considerando o fato que os campos vetoriais  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, L_1, \dots, L_n$  geram o fibrado tangente complexificado  $\mathbb{C}T(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ , podemos expressar o teorema 2.2.7 como segue. Existe a aplicação

$$\mathcal{H}^k(\overline{V} \times K) \ni u \mapsto \hat{u} = \bar{u} - v \in C^{k-2\nu-2}(V_R \times \text{int}[\widehat{K}_\kappa]; \mathbb{C}),$$

onde a função  $\hat{u}$  e suas derivadas parciais  $\partial_t^\beta \partial_x^\alpha \hat{u}$  são contínuas sobre qualquer subconjunto compacto convexo  $\Xi \subset \overline{V}_R \times \widehat{K}$  e estende  $u$  no seguinte sentido :

$$\begin{aligned} \lim_{\Xi \ni q \rightarrow p} \partial_x^\alpha \hat{u}(q) &= \partial_x^\alpha \bar{u}(p) - \lim_{\Xi \ni q \rightarrow p} \partial_x^\alpha v(q) \\ &= \partial_x^\alpha u(p), \text{ se } p \in \Xi \cap [\overline{V}_R \times K], \quad \forall |\alpha| \leq k - 2\nu - 2. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

A seguir, usando a proposição 2.2.3 (2-propriedade), mostraremos que a função diferenciável  $\hat{u}$  pertence ao conjunto  $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{k-2\nu-2}(V_R \times \text{int}[\widehat{K}_\kappa])$  .

$$\begin{aligned} L_\iota \hat{u}(x, t) &= L_\iota \bar{u}(x, t) - L_\iota v(x, t) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} L_\iota v_\epsilon(x, t) - L_\iota v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in V_R \times \text{int}[\widehat{K}_\kappa], \quad \iota = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

A equação (2.3.18) é uma consequência imediata do corolário 2.2.6. Com todos os argumentos dados acima concluímos a demonstração ■

**Observação 2.3.2** *Na demonstração do teorema 2.3.1, notamos que  $\hat{u}$  tem uma representação integral, consequência imediata da representação integral de  $v$  dada no teorema 2.2.7.*

Por sua vez este teorema implica o seguinte corolário 2.3.4. Para o enunciado deste corolário, precisaremos da seguinte definição

**Definição 2.3.3** *Seja a Estrutura Tubo Analítica  $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}T(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$  . Seja a subvariedade fechada conexa  $N \subset \mathbb{R}^n$ . Seja  $\widehat{\Phi(N)}$  a envoltória convexa fechada  $\Phi(N)$ . Seja  $\widehat{\Phi(K)}$  a envoltória convexa fechada  $\Phi(K)$ , onde  $K \subset N$  é um subconjunto compacto qualquer. Denotaremos com o símbolo  $N^\Delta$  a componente conexa da imagem inversa  $\Phi^{-1}[\widehat{\Phi(N)}]$  que contém a subvariedade  $N$ . Denotaremos por  $K^\Delta$  a componente conexa de  $\Phi^{-1}[\widehat{\Phi(K)}]$  que contém o subconjunto compacto  $K \subset N$ . Dizemos que uma família enumerável de subconjuntos compactos uniformemente convexos retificáveis  $\{K_\iota \subset N : \iota = 1, 2, \dots, \infty\}$  satisfaz a  $\Delta$ -propriedade se*

- i.  $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_l \subset \dots \subset N$ ;  $\bigcup_{l=1}^{\infty} K_l = N$ ;  $\bigcup_{l=1}^{\infty} K_l^{\Delta} = N^{\Delta}$ ;
- ii. Cada  $K_l^{\Delta}$  é um subconjunto compacto.
- iii. Existe uma seqüência de números reais positivos  $\{\kappa_l \in \mathbb{R} : l = 1, 2, \dots, \infty\}$  tal que  $\kappa_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$ ;  
 $\widehat{K}_{\kappa_l} \subset \widehat{K}_{\kappa_{l+1}}$ ; e  $\text{int}[N^{\Delta}] = \bigcup_{l=1}^{\infty} \text{int}[\widehat{K}_{\kappa_l}]$ , onde cada símbolo  $\widehat{K}_{\kappa_l}$  denota a  $(\Phi, \kappa_l)$ -Envoltória Convexa do compacto  $K_l$ , em relação a  $\mathbb{R}^n$ , com interior não vazio, isto é,  $\text{int}[\widehat{K}_{\kappa_l}] \neq \emptyset$ .

**Corolário 2.3.4** *Seja a Estrutura Tubular Analítica  $\mathcal{L} \subset \text{CT}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ . Seja a subvariedade fechada conexa  $N \subset \mathbb{R}^n$ . Seja a família enumerável de subconjuntos compactos uniformemente convexos retificáveis  $\{K_l \subset N : l = 1, 2, \dots, \infty\}$  que satisfaz a  $\Delta$ -propriedade. Assumimos os inteiros positivos  $k, \nu \in \mathbb{Z}_+$  tais que  $k > 3 + 2\nu, 2\nu > m$ .*

Então, para cada Solução Tangencial  $u \in \mathcal{Z}_{\mathcal{L}}^k(\mathbb{R}^m \times N)$  existe uma única solução diferenciável  $\widehat{u} \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{k-2\nu-3}(\mathbb{R}^m \times \text{int}[N^{\Delta}])$ , onde a função  $\widehat{u}$  e suas derivadas parciais  $\partial_t^{\beta} \partial_x^{\alpha} \widehat{u}$  são contínuas sobre qualquer subconjunto compacto convexo  $\Xi \subset \mathbb{R}^m \times \widehat{K}_{\kappa_l}$ , para algum  $l = 1, \dots, \infty$ ; e estende a Solução Tangencial  $u$  no seguinte sentido:

$$\lim_{\substack{\Xi \\ \ni q \rightarrow p}} \partial_x^{\alpha} \widehat{u}(q) = \partial_x^{\alpha} u(p), \text{ se } p \in \Xi \cap [\mathbb{R}^m \times N], \forall |\alpha| \leq k - 2\nu - 3. \quad (2.3.20)$$

**Demonstração .** Para esta demonstração, consideramos o corolário 1.2.5, e o corolário 1.3.5. Como o espaço  $\mathbb{R}^m$  é de diâmetro ilimitado, para cada um dos subconjuntos compactos  $K_l$ , podemos escolher os correspondentes abertos limitados, de acordo à seção 2.1,

$$K_l \subset K_l^{\Delta} \subset W_l \subset \mathbb{R}^n; \quad V_{R_l} \subset V_{0,l} \subset V_l \subset \mathbb{R}^m$$

tal que :

1. Os subconjuntos abertos  $V_{R_l}, R_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$ , são bolas abertas de raio  $R_l$ , de centro 0, e

$$\overline{V}_l \subset V_{R_{l+1}} \text{ e } \bigcup_{l=1}^{\infty} V_{R_l} = \mathbb{R}^m \quad (2.3.21)$$

2. O dado assumido neste capítulo,

$$\frac{\mathbf{d}_l}{R_l^2 - \mathbf{d}_l^2} < \frac{1}{\mathbf{d}_l + \sqrt{2\mathbf{d}_l^2 + \mathbf{D}_l^2}} \quad (2.3.22)$$

de modo que

$$\frac{\mathbf{d}_l}{R_l^2 - \mathbf{d}_l^2} < \kappa_l < \frac{1}{\mathbf{d}_l + \sqrt{2\mathbf{d}_l^2 + \mathbf{D}_l^2}}, \quad l = 1, \dots, \infty. \quad (2.3.23)$$

Por outro lado, aplicando o teorema 2.3.1 sobre cada subconjunto fechado  $\overline{V}_\iota \times K_\iota$ , obtemos uma solução diferenciável  $\widehat{u}_\iota \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{k-2\nu-3}(V_{R_\iota} \times \text{int}[\widehat{K}_{\kappa_\iota}])$  com a condição dada em (2.3.17).

Além disso, a função  $\widehat{u}_\iota$  com derivadas parciais  $\partial_t^\beta \partial_x^\alpha \widehat{u}_\iota$  são contínuas sobre qualquer subconjunto compacto convexo  $\Xi_\iota = \overline{V}_{R_\iota} \times \Xi_{2,\iota} \subset V_{R_\iota} \times \widehat{K}_{\kappa_\iota}$ , onde  $\Xi_{2,\iota} \subset \widehat{K}_{\kappa_\iota}$  é um subconjunto compacto convexo, estende a Solução Tangencial  $u$  no seguinte sentido:

$$\lim_{\substack{\Xi_\iota \\ \ni q \rightarrow p}} \partial_x^\alpha \widehat{u}(q) = \partial_x^\alpha u(p), \quad \text{se } p \in \Xi_\iota \cap [\overline{V}_{R_\iota} \times N], \quad \forall |\alpha| \leq k - 2\nu - 3. \quad (2.3.24)$$

Logo, se  $\lambda$  é uma curva diferenciável fechada e conexa, de comprimento finito, com extremo  $\tau \in K_\iota$ , tal que  $\lambda - \{\tau\} \subset \text{int}[\widehat{K}_{\kappa_\iota}]$  então podemos assumir que

$$\widehat{u}_{\iota+1} = \widehat{u}_{\iota+2}, \quad \text{sobre } V_{R_\iota} \times \lambda$$

Isto, implica

$$\widehat{u}_{\iota+1}(x, t) = \widehat{u}_{\iota+2}(x, t), \quad \forall (x, t) \in \overline{V}_{R_\iota} \times \text{int}[\widehat{K}_{\kappa_\iota}]. \quad (2.3.25)$$

Assim, a equação (2.3.25) nos permite provar a existência de  $\widehat{u} \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{k-2\nu-3}(\mathbb{R}^m \times \text{int}[N^\Delta])$ . Também, a unicidade é uma consequência da equação (2.3.25). Com estes argumentos terminamos a demonstração ■

**Observação 2.3.5** *Se  $n = m$  e a aplicação  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a identidade, i.e.  $\Phi = \text{Id}$ , o corolário 2.3.4 é um resultado parcial de Bogges [11] para CR-Soluções Tangenciais  $u$  de classe  $C^k$ ,  $k > 3 + m$ . Mas, nossa extensão é ao menos de classe  $C^{k-3-2\nu}$  enquanto a outra extensão é não-tangencial.*

### 2.3.2 Extensão de uma Solução Distribuição de Sobolev de uma Estrutura Tubular Analítica $\mathcal{L}$ .

Nesta seção, consideraremos o aberto tubular,  $U = V \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , limitado e simplesmente conexo, onde o subconjunto fechado  $\overline{W}$  é uniformemente convexo retificável. Assumimos o aberto tubular limitado  $V \times \Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , onde o aberto  $\Omega$  contém a componente conexa de  $\Phi^{-1}[\widehat{\Phi(\overline{W})}]$ , que, por sua vez, contém  $\overline{W}$ . Como na seção 2.1, consideramos os seguintes números reais

$$\mathbf{D} = \sup_{x, y \in V} |x - y| \quad ; \quad \mathbf{d} = \sup_{s, t \in \overline{\Omega}} |\Phi(s) - \Phi(t)|, \quad (2.3.26)$$

e fixamos os abertos não vazios ,  $V_R \subset V_0 \subset V$ , tais que  $V_R = \{x \in V_0 : \text{dist}(x, \partial V_0) \geq R\}$ , onde o número real positivo  $R > 0$  satisfaz o seguinte dado assumido neste capítulo (2.1.2):

$$\frac{\mathbf{d}}{R^2 - \mathbf{d}^2} < \frac{1}{\mathbf{d} + \sqrt{2\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2}} \quad (2.3.27)$$

O inconveniente do teorema 2.3.1 é a necessidade de ao menos  $m + 4$  derivadas da Solução  $k$ -Jato  $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^k(\overline{V} \times \overline{W})$  para estende-la como uma solução diferenciável  $\hat{u}$  da Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$ , definida em  $V_R \times \text{int}[\widehat{\overline{W}}_\kappa]$ . Como o aberto tubular limitado  $U$  é simplesmente conexo, o seguinte teorema 2.3.8 supera este inconveniente. Para demonstrar este teorema faremos uso dos operadores diferenciais de segunda ordem, introduzidos na seção II.4 de [40], definidos por

$$\Delta_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2 \quad ; \quad \Delta_{\mathcal{L},\varrho} := L_1^2 + \cdots + L_n^2 + \varrho^2 \Delta_x, \quad \varrho > 0. \quad (2.3.28)$$

E, assumiremos  $\rho$  suficientemente grande para considerar o operador diferencial  $\Delta_{\mathcal{L},\varrho}$  elíptico. Lembramos que, usando a notação  $d_{\mathcal{L}}$ , a derivada exterior agindo sobre uma  $C^1$ -função  $\mathbf{u}$  podemos expressar como

$$d\mathbf{u} = d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}] + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} dZ_i = \sum_{j=1}^n L_j \mathbf{u} dt_j + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} dZ_i.$$

Denotaremos o Espaço de Sobolev de ordem  $s \in \mathbb{R}$  definido sobre  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  por  $H^s(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Como referência mencionamos o conhecido *lema de Sobolev* : seja  $k \in \mathbb{N}$ ; se  $s > \frac{m+n}{2} + k$  então  $H^s(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \subset C^k(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Denotaremos por  $H^s(\overline{V} \times \overline{W}; \mathbb{C})$  o espaço quociente

$$H^s(\overline{V} \times \overline{W}; \mathbb{C}) = H^s(\mathbb{R}^{m+n}; \mathbb{C})/N^s(V \times W; \mathbb{C}),$$

onde  $N^s(V \times W; \mathbb{C}) = \{f \in H^s(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : f = 0 \text{ em } V \times W\}$ . Isto é, se  $f, g \in H^s(\overline{V} \times \overline{W}; \mathbb{C})$  então ,

$$f = g \Leftrightarrow \langle f, v \rangle = \langle g, v \rangle, \quad \forall v \in C_0^\infty(V \times W; \mathbb{C}).$$

Este espaço quociente é chamado o Espaço das Distribuições de Sobolev de ordem  $s \in \mathbb{R}$  sobre o aberto  $V \times W$ . Aplicando o lema de Sobolev, concluímos que se  $s > \frac{m+n}{2} + k$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ , então  $H^s(\overline{V} \times \overline{W}; \mathbb{C}) \subset \mathcal{J}^k(\overline{V} \times \overline{W}; \mathbb{C})$ . Com o símbolo  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}^s(\overline{V} \times \overline{W})$  denotaremos o espaço das soluções da estrutura tubo  $\mathcal{L}$  que são elementos de  $H^s(\overline{V} \times \overline{W}; \mathbb{C})$ . Observamos que se  $s > \frac{m+n}{2} + k$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ , então  $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}^s(\overline{V} \times \overline{W}) \subset \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^k(\overline{V} \times \overline{W})$ . Para a demonstração do seguinte teorema precisaremos dos lemas a seguir.

**Lema 2.3.6** *Seja a Estrutura Tubular Analítica  $\mathcal{L} \subset \text{CT}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ . Seja o subconjunto aberto  $U = V \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  tal que  $Z(V \times W) \subset \mathcal{O}$ , onde  $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}^m$  é um subconjunto aberto. De qualquer função  $f : \mathcal{O} \times W \rightarrow \mathbb{C}$ , holomorfa em relação a variável  $z \in \mathcal{O}$  e de classe  $C^1$ , obtemos a seguinte identidade*

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_\iota} f\right](Z(x, t), t) = L_\iota[f(Z(x, t), t)], \quad \iota = 1, \dots, n. \quad (2.3.29)$$

**Demonstração .** Verificamos este lema com o seguinte cálculo.

$$\begin{aligned} L_\iota[f(Z(x, t), t)] &= df|_{(Z(x, t), t)}[L_\iota|_{(x, t)}] \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial Z}\right](Z(x, t), t)dZ[L_\iota] + \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial t_j}\right](Z(x, t), t)dt_j[L_\iota] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t_\iota} f\right](Z(x, t), t), \quad \iota = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Assim terminamos a verificação ■

**Lema 2.3.7** *Seja  $\mathbb{P} = P(x, t, -i\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i\frac{\partial}{\partial x_m}, -i\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, -i\frac{\partial}{\partial x_n})$  um operador diferencial elíptico homogêneo, de ordem  $\mu \in \mathbb{N}$ , de coeficientes analíticos, definido sobre  $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Seja  $U = V \times W \subset \mathbb{R}^N$  um aberto com fecho compacto. Então, para cada  $s \in \mathbb{R}$ , o operador diferencial*

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : H^s(\bar{U}) &\longrightarrow H^{s-\mu}(\bar{U}) \\ g &\rightarrow \mathbb{P}g \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

é sobrejetor.

**Demonstração .** Na realidade, este lema é um caso particular do Teorema 13.52, demonstrado em [25]. Pois, o operador  $\mathbb{P}$  tem **constant strength** ( Definição 13.1.1 , dada em [25]). Para garantir o anterior, mostraremos que existem constantes positivas  $C_0, C_1$ , dependentes do aberto  $U$ , tal que

$$C_0|\xi|^\mu \leq |P(x, t, \xi)| \leq C_1|\xi|^\mu, \quad \forall (x, t) \in \bar{U}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

De fato, como  $\mathbb{P}$  é elíptico, o ínfimo  $\inf_{(x, t, \xi) \in \bar{U} \times \mathbb{S}^N} |P(x, t, \xi)|$ , onde  $\mathbb{S}^N$  é a esfera unitária N-dimensional, é positivo. Logo, como  $\mathbb{P}$  é homogêneo encontraremos uma constante  $C_0 > 0$  tal que

$$C_0|\xi|^{2\nu} \leq |P(x, \xi)|, \quad \forall (x, t) \in \bar{U}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

A existência da outra constante é óbvia, pois os coeficientes de  $\mathbb{P}$  são analíticos sobre  $\mathbb{R}^N$  ■

**Teorema 2.3.8** *Seja a Estrutura Tubular Analítica  $\mathcal{L} \subset \text{CT}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ . Seja o aberto tubular limitado e simplesmente conexo,  $U = V \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . Então, para qualquer Solução Distribuição de Sobolev  $u \in \mathcal{B}_{\mathcal{L}}^s(\overline{V} \times \overline{W})$ , para qualquer inteiro positivo  $\mu \geq 1$ , e para qualquer inteiro positivo  $\nu > \frac{m+n}{4} + \frac{\mu+1-s}{2}$  existe uma função diferenciável  $u_1 \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^\mu(\overline{V} \times \overline{W})$  tal que  $\Delta_{\mathcal{L}}^\nu u_1 = u$ .*

**Demonstração** .Esta demonstração segue em geral os mesmos passos da demonstração do teorema II.5.1 em [40].Mas, este teorema 2.3.8 é um resultado global.Pelas condições deste teorema, podemos assumir que existe  $r > 0$  tal que  $\nu \geq \frac{m+n}{4} + \frac{\mu-s+r}{2}$ . Pelo lema de Sobolev, temos  $H^{\mu+r+\frac{m+n}{2}}(\overline{U}; \mathbb{C}) \subset \mathcal{J}^\mu(\overline{U}; \mathbb{C})$ . Por outro lado, como o inteiro positivo  $\nu \geq \frac{m+n}{4} + \frac{\mu+r-s}{2}$ , temos  $H^s(\overline{U}; \mathbb{C}) \subset H^{\mu+r+\frac{m+n}{2}-2\nu}(\overline{U}; \mathbb{C})$ . Portanto,  $u \in H^{\mu+r+\frac{m+n}{2}-2\nu}(\overline{U}; \mathbb{C}) \cap \mathcal{B}_{\mathcal{L}}^s(\overline{U})$ .

Lembramos que assumimos  $\rho$  suficientemente grande para considerar o operador diferencial  $\Delta_{\mathcal{L},\rho}$  elíptico. Observamos que  ${}^\perp \Delta_{\mathcal{L},\rho} = \Delta_{\mathcal{L},\rho}$ . Assim, podemos dizer que o operador diferencial  $\Delta_{\mathcal{L},\rho}^\nu$  é elíptico com coeficientes analíticos e  ${}^\perp \Delta_{\mathcal{L},\rho}^\nu = \Delta_{\mathcal{L},\rho}^\nu$ . O lema 2.4.73 afirma que o operador diferencial

$$\Delta_{\mathcal{L},\rho}^\nu : H^{\mu+r+\frac{m+n}{2}}(\overline{U}; \mathbb{C}) \longrightarrow H^{\mu+r+\frac{m+n}{2}-2\nu}(\overline{U}; \mathbb{C})$$

é sobrejetor. Então, podemos dizer que existe uma  $v \in C^\mu(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  tal que

$$\Delta_{\mathcal{L},\rho}^\nu v = u \quad \text{sobre } U. \quad (2.3.31)$$

Como cada  $L_j$  comuta com  $\Delta_{\mathcal{L},\rho}$ , segue-se da equação (2.3.31)

$$\Delta_{\mathcal{L},\rho}^\nu L_j v = 0, \quad \text{sobre } U \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.3.32)$$

Antes de continuar a demonstração, denotaremos a subvariedade

$$\Sigma' = \{(Z(x, t), t) = (x + i\Phi(t), t) : (x, t) \in \overline{V} \times \overline{W}\} \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n.$$

Aplicando a proposição II.4.2 de [40] na equação (2.3.32), encontraremos funções holomorfas  $g_j(z, t)$  definidas numa vizinhança aberta conexa  $\mathcal{O}$  de  $\Sigma'$  tal que

$$L_j v(x, t) = g_j(Z(x, t), t), \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.3.33)$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que  $\mathcal{O}$  é um tubo contendo  $\Sigma'$  como definido em [21]. Como  $L_k, L_j v = L_j L_k v$  para todo  $k, j = 1, \dots, n$ , tendo em mente o lema 2.3.6, podemos realizar os seguintes cálculos :

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial g_j}{\partial t_k} \right] (Z(x, t), t) &= L_k g_j(Z(x, t), t) \\
&= L_j L_k v(x, t) \\
&= L_k L_j v(x, t) \\
&= L_j g_k(Z(x, t), t) \\
&= \left[ \frac{\partial g_k}{\partial t_j} \right] (Z(x, t), t), \quad \forall j, k = 1, \dots, n,
\end{aligned} \tag{2.3.34}$$

sobre  $V \times W$ . Como  $\Sigma'$  contém subvariedades maximais reais em  $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ , podemos afirmar que a relação em (2.3.34) é válida sobre  $\mathcal{O}$ . Seja o mergulho analítico  $V \times W \xrightarrow{\mathcal{Z}} \mathcal{O}$  definida por  $\mathcal{Z}(x, t) = (Z(x, t), t)$ . Então o *< pull back >*  $\mathcal{Z}^*(\varpi)$  da  $(m+1)$ -forma diferencial

$$\varpi(z, t) = \sum_{j=1}^n g_j(z, t) dt_j \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m$$

é uma forma diferencial exata sobre  $V \times W$ . De fato, pois sobre o aberto  $U = V \times W$  temos

$$\begin{aligned}
d(v \wedge dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m) &= d_{\mathcal{L}}(v) \wedge dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \\
&= \sum_{j=1}^n g_j(Z(x, t), t) dt_j \wedge dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_m \\
&= \mathcal{Z}^*(\varpi)
\end{aligned} \tag{2.3.35}$$

Agora podemos aplicar o teorema 5.1 (b) em [21] para obter uma  $m$ -forma diferencial holomorfa

$$\tilde{w} = \tilde{w}_0 + \tilde{w}_1 = w_0 dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m + \sum_{j=1}^n \sum_{\iota=1}^m w_{j,\iota} dt_j \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_\iota} \wedge \dots \wedge dz_m \tag{2.3.36}$$

tal que  $d\tilde{w} = \varpi$ . Pode-se verificar que os coeficientes  $w_{j,\iota}$  dependem holomorficamente das variáveis  $z \in \mathbb{C}^m \cap \mathcal{O}$  somente, calculando  $d\tilde{w}$  e comparando coeficientes com a  $(m+1)$ -forma diferencial dada em (2.3.35). Portanto,

$$\begin{aligned}
d\tilde{w}_1 &= \sum_{\iota=1}^m \sum_{j=1}^n (-1)^{\iota+1} \frac{\partial w_{j,\iota}}{\partial z_\iota} dt_j \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m \\
&= d \left[ \sum_{\iota=1}^m \sum_{j=1}^n (-1)^{\iota+1} t_j \frac{\partial w_{j,\iota}}{\partial z_\iota} \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m \right].
\end{aligned} \tag{2.3.37}$$

Denotaremos por  $h$  a função holomorfa definida sobre  $\mathcal{O}$  por

$$h = w_0 + \sum_{\iota=1}^m \sum_{j=1}^n (-1)^{\iota+1} t_j \frac{\partial w_{j,\iota}}{\partial z_\iota}.$$

Pelas equações (2.3.36)-(2.3.37) podemos dizer que a m-forma  $\tilde{h} = h \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m$  satisfaz  $d\tilde{h} = \varpi$ . Logo, o  $\langle \text{pull back} \rangle$   $Z^*(\tilde{h}) = h(Z(x, t), t) \wedge dZ_1 \wedge \cdots \wedge dZ_m$  satisfaz

$$d[h(Z(x, t), t) \wedge dZ_1 \wedge \cdots \wedge dZ_m] = Z^*(\varpi) \quad (2.3.38)$$

Das equações (2.3.35)-(2.3.38) obtemos

$$d_{\mathcal{L}}(v - h(Z(x, t), t)) \wedge dZ_1 \wedge \cdots \wedge dZ_m = 0$$

sobre  $U = V \times W$ . Então a função  $h_1(x, t) = v - h(Z(x, t), t)$  é uma solução de classe  $C^\mu$  da Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$  sobre o aberto  $U$ . E, por continuidade, podemos assumir que a função  $h_1$  é uma Solução  $\mu$ -Jato da Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$  sobre o fechado  $\bar{U}$ . Isto é,  $h_1 \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^\mu(\bar{U})$ .

Denotaremos os operadores diferenciais

$$\Delta_t = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial t_n}\right)^2; \quad \Delta_z = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial z_m}\right)^2,$$

onde  $(z, t) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ . Pelo lema 2.3.6, da equação (2.3.32) segue-se para cada  $j = 1, \dots, n$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_j}(\Delta_t + \varrho^2 \Delta_z)^\nu h\right](Z(x, t), t) = [\Delta_{\mathcal{L}, \varrho}^\nu L_j(v - h_1)](x, t) = 0 \quad (2.3.39)$$

sobre  $(x, t) \in U$ . Como  $\Sigma'$  contém subvariedades maximais reais podemos escrever

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_j}(\Delta_t + \varrho^2 \Delta_z)^\nu h\right](z, t) = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.3.40)$$

sobre  $(z, t) \in \mathcal{O}$ . Logo, a função holomorfa  $\widehat{\Psi}(z) = [(\Delta_t + \varrho^2 \Delta_z)^\nu h](z, t)$  depende somente da variável  $z \in \mathbb{C}^m \cap \mathcal{O}$ . Então, segue-se

$$\begin{aligned} u &= \Delta_{\mathcal{L}, \varrho}^\nu v \\ &= \Delta_{\mathcal{L}, \varrho}^\nu (h_1 + h(Z(x, t), t)) \\ &= \varrho^{2\nu} \Delta_x^\nu h_1 + \widehat{\Psi} \circ Z \end{aligned}$$

Aplicando um resultado em [30] podemos encontrar uma solução holomorfa de  $\Delta_z^\nu \Psi = \widehat{\Psi}$  definida sobre  $\mathbb{C}^m \cap \mathcal{O}$ . Assim finalmente conseguimos

$$u = \Delta_x^\nu (\Psi \circ Z + \varrho^{2\nu} h_1)$$

onde  $\Psi \circ Z + \varrho^{2\nu} h_1 = u_1 \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^\mu(\overline{V} \times \overline{W})$  ■

Agora, podemos estender a validade do Teorema de extensão do Tubo de Bochner truncado. Com o símbolo  $\widehat{W}_\kappa$ , denotaremos a  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa de  $\overline{W}$  em relação a  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.3.9** *Seja a Estrutura Tubular Analítica  $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}T(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ . Seja o aberto tubular,  $U = V \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , limitado e simplesmente convexo, onde o subconjunto fechado  $\overline{W}$  é uniformemente convexo retificável. Seja o aberto tubular  $V \times \Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , onde o aberto limitado  $\Omega$  contém a componente conexa de  $\Phi^{-1}[\widehat{\Phi(\overline{W})}]$ , que, por sua vez, contém  $\overline{W}$ . Consideramos os seguintes números reais*

$$D = \sup_{x, y \in V} |x - y| \quad ; \quad d = \sup_{s, t \in \overline{\Omega}} |\Phi(s) - \Phi(t)|,$$

e fixamos os abertos não vazios,  $V_R \subset V_0 \subset V$ , tais que  $V_R = \{x \in V_0 : \text{dist}(x, \partial V_0) \geq R\}$ , onde o número real positivo  $R > 0$  satisfaz o seguinte dado assumido neste capítulo (2.1.2):

$$\frac{d}{R^2 - d^2} < \frac{1}{d + \sqrt{2d^2 + D^2}}$$

Seja a Solução Distribuição de Sobolev  $u \in \mathcal{B}_{\mathcal{L}}^s(\overline{V} \times \overline{W})$ . Se fixamos qualquer número real positivo  $\frac{d}{R^2 - d^2} < \kappa < \frac{1}{d + \sqrt{2d^2 + D^2}}$ , podemos afirmar que existe uma solução distribuição de  $\mathcal{L}$ ,  $\hat{u}$ , definida sobre  $V_R \times \text{int}[\widehat{W}_\kappa]$ , que é igual a  $u$  sobre  $V_R \times W$ . A solução distribuição  $\hat{u}$ , restringida a qualquer subconjunto compacto convexo  $\Xi \subset V_R \times \text{int}[\widehat{W}_\kappa]$ , pode ser assumida como uma Solução Distribuição de Sobolev de ordem igual ao máximo inteiro

$$m < \begin{cases} s - \frac{3m+n}{2} - 4, & \text{se } m \text{ é ímpar} \\ s - \frac{3m+n}{2} - 5, & \text{se } m \text{ é par} \end{cases}$$

Além disso, se  $s \geq 1$ , podemos assumir que  $\hat{u} \in C^s(V_R \times \text{int}[\widehat{W}_\kappa]; \mathbb{C})$ .

**Demonstração** . Como  $u \in \mathcal{B}_{\mathcal{L}}^s(\overline{V} \times \overline{W})$ , pelo teorema 2.3.8, podemos afirmar que para qualquer inteiro positivo  $\mu \geq 1$ , e para qualquer inteiro positivo

$$\nu > \begin{cases} \frac{m+n}{4} + \frac{\mu+m+4-s}{2}, & \text{se } m \text{ é ímpar} \\ \frac{m+n}{4} + \frac{\mu+m+5-s}{2}, & \text{se } m \text{ é par} \end{cases},$$

existe uma solução da estrutura tubo  $\mathcal{L}$ ,

$$u_1 \in \begin{cases} \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{\mu+m+3}(\overline{V} \times \overline{W}), & \text{se } m \text{ é ímpar} \\ \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{\mu+m+4}(\overline{V} \times \overline{W}), & \text{se } m \text{ é par} \end{cases},$$

tal que  $\Delta_x^\nu u_1 = u$ . Como  $W \subset \mathbb{R}^n$  é aberto temos que  $W \subset \text{int}[\widehat{W}_\kappa]$ . Pelo teorema 2.3.1, existe uma solução da Estrutura Tubular Analítica  $\mathcal{L}$ ,  $u_2 \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^\mu(V_R \times \text{int}[\widehat{W}_\kappa])$ , que é igual a  $u_1$  sobre  $V_R \times W$ . Logo, encontraremos uma solução distribuição da Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$ ,  $\widehat{u} = \Delta_x^\nu u_2$ , definida sobre  $V_R \times \text{int}[\widehat{W}_\kappa]$ , que é igual a  $u$  sobre o aberto  $V_R \times W$ .

Por outro lado, observamos que a solução distribuição  $\widehat{u}$ , restringida a qualquer subconjunto compacto convexo  $\Xi \subset V_R \times \text{int}[\widehat{W}_\kappa]$ , pode ser assumida, escolhendo adequados inteiros  $\mu, \nu$ , , como uma solução distribuição de Sobolev de ordem igual ao máximo inteiro

$$\mu - 2\nu = m < \begin{cases} s - \frac{3m+n}{2} - 4, & \text{se } m \text{ é ímpar} \\ s - \frac{3m+n}{2} - 5, & \text{se } m \text{ é par} \end{cases}$$

Se  $m \geq 1$ , podemos assumir que  $\widehat{u} \in C^m(V_R \times \text{int}[\widehat{W}_\kappa]; \mathbb{C})$  ■

## 2.4 Demonstração do Teorema 2.2.7.

Para cada par  $(x, t), (y, s) \in \overline{V} \times \overline{W}$  considere a família 1-parâmetro de subvariedades reais  $\Gamma_\kappa \subset \mathbb{C}^m$  definidas por:

$$\Gamma_\kappa = \{\zeta_\kappa \in \mathbb{C}^m : \zeta_\kappa := \zeta_\kappa(x, t, y, s, \xi) = \xi + i\kappa|\xi|[Z(x, t) - Z(y, s)], \xi \in \mathbb{R}^m\}. \quad (2.4.41)$$

O elemento de volume de  $\Gamma_\kappa$  é dado por:

$$d\zeta_\kappa := d\zeta_{\kappa,1} \wedge \dots \wedge d\zeta_{\kappa,m} = \prod_{l=1}^m (1 + i\kappa\xi_l |\xi|^{-1} [x_l + i\phi_l(t) - y_l - i\phi_l(s)]) d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n. \quad (2.4.42)$$

Para simplificar notações , introduziremos as seguintes funções auxiliares:

$$\Upsilon_\kappa^0 := \Upsilon_\kappa^0(x, t, y, s, \xi) = \prod_{l=1}^m (1 + i\kappa\xi_l |\xi|^{-1} [x_l + i\phi_l(t) - y_l - i\phi_l(s)]); \quad (2.4.43)$$

$$\Upsilon_{\nu,\kappa}^1 := \Upsilon_{\nu,\kappa}^1(x, t, y, s, \xi) = (1 + \zeta_\kappa^2)^{-\nu} = (1 + \zeta_{\kappa,1}^2 + \dots + \zeta_{\kappa,m}^2)^{-\nu}, \nu \in \mathbb{Z}_+; \quad (2.4.44)$$

$$\Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} := \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu}(x, t, y, s, \xi) = \Upsilon_{\nu, \kappa}^1 \Upsilon_{\kappa}^0 G_{\epsilon}(\zeta_{\kappa}). \quad (2.4.45)$$

Observar que estas funções auxiliares são soluções da Estrutura Tubular  $\mathcal{L}$  em relação às variáveis  $(x, t)$  ou em relação às variáveis  $(y, s)$ .

Com o símbolo  $dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}]$  denotaremos a  $(m+1)$ -forma diferencial

$$dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](x, t) := \sum_{\iota=1}^n L_{\iota} \mathbf{u}(x, t) dy \wedge ds_{\iota}. \quad (2.4.46)$$

E, com o símbolo  $dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}] \wedge d\zeta_{\kappa}$  denotaremos a  $(2m+1)$ -forma diferencial

$$\begin{aligned} & dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}] \wedge d\zeta_{\kappa} := dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}] \wedge d\zeta_{\kappa,1} \wedge \dots \wedge d\zeta_{\kappa,m} := \\ & \left[ \prod_{\iota=1}^m (1 + i\kappa\xi_{\iota}|\xi|^{-1}[x_{\iota} + i\phi_{\iota}(t) - y_{\iota} - i\phi_{\iota}(s)]) \right] \left[ \sum_{\iota=1}^n L_{\iota} \mathbf{u}(y, s) dy \wedge ds_{\iota} \wedge d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n \right] \\ & = \Upsilon_{\kappa}^0(x, t, y, s, \xi) \left[ \sum_{\iota=1}^n L_{\iota} \mathbf{u}(y, s) dy \wedge ds_{\iota} \wedge d\xi \right]. \end{aligned} \quad (2.4.47)$$

A demonstração do teorema 2.2.7 segue-se das aplicações do teorema de Ascoli-Arzelá e do teorema de Convergência Dominada de Lebesgue. Portanto, visto que os campos vectoriais  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ ,  $L_1, \dots, L_n$  geram o fibrado tangente complexificado  $CT(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ , precisamos estimar as funções  $\{L^{\beta} \partial_x^{\alpha} v_{\epsilon}\}$ . A estimativa da função  $L^{\beta} \partial_x^{\alpha} v_{\epsilon}$ ,  $|\beta| \neq 0$ , é uma consequência direta da proposição 2.2.3. Para estimar a função  $\partial_x^{\alpha} v_{\epsilon}$  mudamos sua representação integral dada em (2.2.6). O dado assumido deste capítulo nos fornece os seguintes lemas técnicos que permitem mudar a representação integral de  $\partial_x^{\alpha} v_{\epsilon}$  por outra equivalente e estimar sobre essa nova representação.

**Lema 2.4.1** *Se assumimos o dado deste capítulo,  $\frac{d}{R^2 - d^2} < \frac{1}{d + \sqrt{2d^2 + D^2}}$ , podemos afirmar que para cada número real positivo  $\frac{d}{R^2 - d^2} < \kappa < \frac{1}{d + \sqrt{2d^2 + D^2}}$  existe um número real positivo  $0 < \delta < 1$  tal que*

$$1 - \delta^2 > 2d\kappa + \kappa^2(d^2 + D^2) \quad (2.4.48)$$

$$1 - \delta^2 < -d + \kappa(R^2 - d^2) \quad (2.4.49)$$

**Demonstração.** É imediato verificar que todo número real positivo  $\frac{d}{R^2 - d^2} < \kappa < \frac{1}{d + \sqrt{2d^2 + D^2}}$  satisfaz a desigualdade

$$0 < -d + \kappa(R^2 - d^2). \quad (2.4.50)$$

Agora, provaremos que todo número real positivo  $\frac{\mathbf{d}}{R^2 - \mathbf{d}^2} < \kappa < \frac{1}{\mathbf{d} + \sqrt{2\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2}}$  satisfaz a desigualdade  $2\mathbf{d}\kappa + \kappa^2(\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2) < 1$ . Seja o polinômio de segundo grau  $P(x) = 2\mathbf{d}x + (\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2)x^2 - 1$ . Com um simples cálculo verificamos que

$$P(x) < 0, \quad \text{se } 0 < x < \frac{-\mathbf{d} + \sqrt{2\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2}}{\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2} \quad (2.4.51)$$

Mas,  $\frac{-\mathbf{d} + \sqrt{2\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2}}{\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2} = \frac{1}{\mathbf{d} + \sqrt{2\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2}}$ . Logo, todo número real positivo  $\frac{\mathbf{d}}{R^2 - \mathbf{d}^2} < \kappa < \frac{1}{\mathbf{d} + \sqrt{2\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2}}$  satisfaz

$$P(\kappa) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\mathbf{d}\kappa + \kappa^2(\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2) < 1 \quad (2.4.52)$$

Por outro lado, para cada número real positivo que satisfaz as desigualdades (2.4.50)-(2.4.52), podemos encontrar um  $0 < \delta < 1$  tal que

$$1 - \delta^2 < -\mathbf{d} + \kappa(R^2 - \mathbf{d}^2) \quad ; \quad 1 - \delta^2 > 2\mathbf{d}\kappa + \kappa^2(\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2)$$

Assim terminamos a demonstração ■

**Lema 2.4.2** *Sejam as variáveis  $\epsilon > 0$ ,  $\nu \in \mathbb{Z}_+$  fixadas arbitrariamente. Se assumimos o dado deste capítulo,  $\frac{\mathbf{d}}{R^2 - \mathbf{d}^2} < \frac{1}{\mathbf{d} + \sqrt{2\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2}}$ , podemos afirmar que para cada número real positivo  $\frac{\mathbf{d}}{R^2 - \mathbf{d}^2} < \kappa < \frac{1}{\mathbf{d} + \sqrt{2\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2}}$  existe um número real positivo  $0 < \delta < 1$  que garante a validade das seguintes afirmações :*

- a. *Existe uma constante  $M > 0$ , dependente do subconjunto fechado limitado  $\bar{V} \times \bar{W}$ , tal que para quaisquer  $(x, t), (y, s) \in \bar{V} \times \bar{W}$  temos*

$$|\Psi_{\epsilon, \kappa, \nu}(x, t, y, s, \xi)| \leq M(1 + \delta^2 \xi^2)^{-\nu} G_\epsilon(\delta \xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad (2.4.53)$$

$$|\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa) \cdot \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu}(x, t, y, s, \xi)| \leq M \exp\left(-\frac{M}{2}|\xi|\right), \quad |\xi| > \frac{6M}{\delta^2 \epsilon}. \quad (2.4.54)$$

- b. *Fixando as variáveis  $(x, t), (y, s) \in \bar{V} \times \bar{W}$ , podemos escrever*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} d\xi = \\ \int_{\mathbb{R}^m} (1 + \xi^2)^{-\nu} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\xi) G_\epsilon(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.4.55)$$

c. Seja a função de classe  $C^1$   $\mathbf{u} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$  com suporte compacto, em relação a primeira variável  $x$ , contida em  $V \subset \mathbb{R}^m$ . Fixando a variável  $\xi \in \mathbb{R}^m$ , podemos escrever

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial s_i} \right) \left[ \int_{\mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa) [\Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} \mathbf{u}](y, s) dy \right] ds_i = \int_{\mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y, s) \quad (2.4.56)$$

Em outras palavras, o segundo membro da equação (2.4.56) é uma 1-forma diferencial exata em relação a variável  $s \in \mathbb{R}^n$ .

**Demonstração .** Esta demonstração é técnica e extensa. Está dividida numa seqüência de itens. O primeiro item é um sub-lemma que nos permite estimar todas as funções auxiliares. Logo, usando este sub-lemma, demonstraremos os itens a-b-c por separado.

**Sub-lemma** Para cada número real positivo  $\frac{d}{R^2 - d^2} < \kappa < \frac{1}{d + \sqrt{2d^2 + D^2}}$ , existe um número real positivo  $0 < \delta < 1$  tal que para quaisquer  $(x, t), (y, s) \in \overline{V} \times \overline{W}$  são válidas as seguintes estimativas :

$$|G_\epsilon(\zeta_\kappa)| = |G_\epsilon(\xi + i\kappa|\xi|[Z(x, t) - Z(y, s)])| \leq G_\epsilon(\delta\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m. \quad (2.4.57)$$

$$|1 + \zeta_\kappa^\nu|^\nu = |1 + (\xi + i\kappa|\xi|[Z(x, t) - Z(y, t)])^2|^\nu \geq (1 + \delta^2\xi^2)^\nu, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m. \quad (2.4.58)$$

$$| \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \zeta_\kappa) | \leq \exp([d + \kappa d^2]|\xi|), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m. \quad (2.4.59)$$

**Demonstração do sub-lemma** Seja qualquer par  $(x, t), (y, s) \in \overline{V} \times \overline{W}$ . A desigualdade ( 2.4.48) implica as duas primeiras estimativas. Começamos demonstrando a estimativa dada em (2.4.57) : conforme com a definição de  $G_\epsilon$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} & |G_\epsilon(\xi + i\kappa|\xi|[Z(x, t) - Z(y, s)])| \\ & \leq \exp(-\epsilon 4^{-1} (\xi^2 + \kappa^2 \xi^2 [|\Phi(t) - \Phi(s)|^2 - |x - y|^2] - 2\kappa|\xi|[\xi\Phi(t) - \xi\Phi(s)])) \\ & \leq \exp(\epsilon 4^{-1} (-\xi^2 + \kappa^2 \xi^2 D^2 + 2\kappa|\xi|[\xi\Phi(t) - \xi\Phi(s)])) \\ & \leq \exp(\epsilon 4^{-1} (-\xi^2 + \xi^2 \kappa^2 D^2 + \xi^2 2\kappa \mathbf{d})) \\ & \leq \exp(-\epsilon 4^{-1} \xi^2 (1 - \kappa^2 D^2 - 2\kappa \mathbf{d})) \end{aligned}$$

Como os números reais,  $0 < \delta < 1$ ,  $\frac{\mathbf{d}}{R^2 - \mathbf{d}^2} < \kappa < \frac{1}{\mathbf{d} + \sqrt{2\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2}}$ , satisfazem a desigualdade (2.4.48), podemos escrever

$$\begin{aligned} |G_\epsilon(\xi + i\kappa|\xi|[Z(x, t) - Z(y, s)])| &\leq \exp(-\epsilon 4^{-1} \delta^2 \xi^2) \\ &= G_\epsilon(\delta\xi) \end{aligned}$$

A estimativa dada em (2.4.58) segue-se dos seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} &|1 + (\xi + i\kappa|\xi|[Z(x, t) - Z(y, t)])^2|^\nu \geq |1 + \Re((\xi + i\kappa|\xi|[Z(x, t) - Z(y, t)])^2)|^\nu \geq \\ &\geq (1 + \xi^2 - \kappa^2 \xi^2 |\Phi(t) - \Phi(s)|^2 - \kappa^2 \xi^2 |x - y|^2 - 2\kappa \xi^2 |\Phi(t) - \Phi(s)|)^\nu \\ &\geq (1 + \xi^2 [1 - \kappa^2 [\mathbf{D}^2 + \mathbf{d}^2] - 2\mathbf{d}\kappa])^\nu \\ &\geq (1 + \delta^2 \xi^2)^\nu \end{aligned}$$

Sem usar a desigualdade (2.4.48) demonstraremos a estimativa dada em (2.4.59):

$$\begin{aligned} &|\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \zeta_\kappa)| \\ &= |\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)][\xi + i\kappa|\xi|[Z(x, t) - Z(y, s)])]| \\ &= |\exp(i(x - y)\xi - (\Phi(t) - \Phi(s))\xi - \kappa|\xi|[Z(x, t) - Z(y, s)]^2)| \\ &\leq |\exp(-(\Phi(t) - \Phi(s))\xi - \kappa|\xi|[Z(x, t) - Z(y, s)]^2)| \\ &= |\exp(-(\Phi(t) - \Phi(s))\xi - \kappa|\xi|[(x - y) + i(\Phi(t) - \Phi(s))]^2)| \\ &\leq |\exp(-(\Phi(t) - \Phi(s))\xi - \kappa|\xi||x - y|^2 + \kappa|\xi||\Phi(t) - \Phi(s)|^2)| \\ &\leq |\exp(-(\Phi(t) - \Phi(s))\xi + \kappa|\xi||\Phi(t) - \Phi(s)|^2)| \\ &\leq |\exp(\mathbf{d}|\xi| + \kappa|\xi|\mathbf{d}^2)| \end{aligned}$$

Assim concluímos a demonstração do sub-lemma  $\diamond$

**Demonstração do item a. do Lema 2.4.2.** Começamos pela prova da estimativa dada em (2.4.53). Por simples inspeção, podemos conferir que existe uma constante  $M > 0$  que depende do subconjunto fechado  $\overline{V} \times \overline{W}$  tal que

$$|\Upsilon_\kappa^0(x, t, y, s, \xi)| \leq M, \quad \forall (x, s), (y, s) \in \overline{V} \times \overline{W}; \forall \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Agora podemos estimar  $|\Psi_{\epsilon, \kappa, \nu}|$  como segue. Pelo Sub-lemma podemos escrever

$$\begin{aligned} |\Psi_{\epsilon, \kappa, \nu}(x, t, y, s, \xi)| &\leq |\Upsilon_{\kappa, \nu}^1| |\Upsilon_\kappa^0| G_\epsilon(\zeta_\kappa) \\ &\leq M(1 + \delta^2 \xi^2)^{-\nu} G_\epsilon(\delta\xi) \end{aligned} \tag{2.4.60}$$

para quaisquer  $(x, t), (y, s) \in \overline{V} \times \overline{W}; \xi \in \mathbb{R}^m$ . Com esta última desigualdade terminamos provando a estimativa dada em (2.4.53) .

A seguir, provamos a estimativa dada em (2.4.54). Para isto, assumimos o número real  $M_1 = \max\{M, \mathbf{d} + \mathbf{d}^2\}$ . Observar que  $M_1$  também depende do subconjunto fechado limitado  $\overline{V} \times \overline{W}$ . Pelas estimativas dadas no Sub-**lema** e na desigualdade (2.4.60), obtemos

$$\begin{aligned} |\exp(i[z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa)\Psi_{\epsilon, \kappa, \nu}| &\leq M \exp([\mathbf{d} + \kappa\mathbf{d}^2]|\xi|)(1 + \delta^2\xi^2)^{-\nu}.G_\epsilon(\delta\xi) \\ &\leq M \exp([\mathbf{d} + \kappa\mathbf{d}^2]|\xi|).G_\epsilon(\delta\xi) \\ &\leq M_1 \exp(M_1|\xi|).G_\epsilon(\delta\xi) \\ &\leq M_1 \exp(-\frac{M_1}{2}|\xi|), \text{ se } |\xi| > \frac{6M_1}{\delta^2\epsilon}, \end{aligned}$$

para quaisquer  $(x, t), (y, s) \in \overline{V} \times \overline{W}$ . Assim, terminamos provando a estimativa dada em (2.4.54) .Para o enunciado do item a. do lema 2.4.2 podemos considerar sem perder generalidade  $M_1 = M$ .Assim terminamos a demonstração do item a.  $\diamond$

**Demonstração do item b. do Lema 2.4.2.** Provaremos que para qualquer par de elementos fixados  $(x, t), (y, s) \in \overline{V} \times \overline{W}$  podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)].\zeta_\kappa).\Psi_{\epsilon, \kappa, \nu}d\xi = \int_{\mathbb{R}^m} (1 + \xi^2)^{-\nu} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)].\xi).G_\epsilon(\xi)d\xi$$

De fato, considere a função holomorfa

$$\mathbf{H}_{\nu, \epsilon}(\zeta) = (1 + \zeta^2)^{-\nu} \exp([Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta)G_\epsilon(\zeta),$$

definida no aberto

$$\mathcal{O} = \{\zeta \in \mathbb{C}^m : |1 + \zeta^2|^\nu > 1\}.$$

Observamos que  $\mathbb{R}^m \subset \mathcal{O}$ . O número real positivo assumido  $0 < \kappa < 1$  garante que  $\Gamma_\kappa \subset \mathcal{O}$ . Isto segue-se do Sub-**lema** ( ver a desigualdade (2.4.58) ) . Se verifica que  $\Gamma_\kappa \cup \mathbb{R}^m$  é o bordo de uma subvariedade fechada  $F_\kappa \subset \mathcal{O}$ , de dimensão  $m + 1$  e não compacta, definida por

$$F_\kappa = \{ \widehat{\zeta}_\kappa := \xi + i\kappa\varrho|\xi|[Z(x, t) - Z(y, s)] \in \mathbb{C}^m : \xi \in \mathbb{R}^m ; 0 \leq \varrho \leq 1 \}. \quad (2.4.61)$$

Seja  $W$  a  $m$ -forma diferencial sobre  $F_\kappa$  definida por

$$W := \mathbf{H}_{\nu, \epsilon}(\widehat{\zeta}_\kappa)d\widehat{\zeta}_{1, \kappa} \wedge d\widehat{\zeta}_{2, \kappa} \wedge \cdots \wedge d\widehat{\zeta}_{m, \kappa}; \quad (2.4.62)$$

onde

$$\begin{aligned} d\widehat{\zeta}_{\iota,\kappa} &= (1 + i\kappa|\xi|^{-1}\xi_\iota[x_\iota + i\phi_\iota(t) - y_\iota - i\phi_\iota(s)])d\xi_\iota + \\ &\quad i\kappa|\xi|[x_\iota + i\phi_\iota(t) - y_\iota - i\phi_\iota(s)]d\rho, \quad \iota = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.4.63)$$

Como  $\mathbf{H}_{\nu,\epsilon}$  é holomorfa sobre o aberto  $\mathcal{O}$  então a m-forma diferencial  $\widehat{W}$  é fechada sobre  $F_\kappa$ . Em condições gerais não poderíamos aplicar o teorema de Stokes a esta m-forma sobre a subvariedade fechada não -compacta  $F_\kappa \subset \mathcal{O}$ . Mas,  $\mathbf{H}_{\nu,\epsilon}$  tem decaimento exponencial ao infinito sobre  $\mathcal{O}$ . Isto, segue-se das seguintes estimativas. Como o subconjunto fechado  $\overline{V} \times \overline{W}$  é limitado, existe  $M_0 > 0$  tal que

$$|Z(x, t) - Z(y, s)| \leq M_0, \quad \forall (x, t), (y, s) \in \overline{V} \times \overline{W}. \quad (2.4.64)$$

Por outro lado, se  $|\zeta| > \frac{6M_0}{\epsilon}$ ,  $\zeta \in \mathcal{O}$ , podemos escrever

$$\frac{\epsilon}{4}|\zeta|^2 \geq \frac{6}{4}M_0|\zeta| = \frac{3}{2}M_0|\zeta| \quad (2.4.65)$$

Logo, pelas desigualdades em (2.4.64) e (2.4.65), obtemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{H}_{\nu,\epsilon}(\zeta)| &\leq \exp(M_0|\zeta|)G_\epsilon(\zeta) \\ &\leq \exp(M_0|\zeta|)\exp(-\epsilon 4^{-1}|\zeta|^2) \\ &\leq \exp(M_0|\zeta|)\exp(-\frac{3}{2}M_0|\zeta|) \\ &\leq \exp(-\frac{M_0}{2}|\zeta|) \end{aligned} \quad (2.4.66)$$

A última estimativa (2.4.66) mostra o decaimento exponencial de  $\mathbf{H}_{\nu,\epsilon}$ . Assim, com todas as condições dadas acima podemos aplicar o teorema de Stokes como segue :

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{H}_{\epsilon,\nu}(\xi)d\xi - \int_{\Gamma_\kappa} \mathbf{H}_{\epsilon,\nu}(\zeta_\kappa)d\zeta_{\kappa,1} \wedge \dots \wedge d\zeta_{\kappa,m} = \int_{F_\kappa} d \left[ \mathbf{H}_{\nu,\epsilon}(\widehat{\zeta}_\kappa)d\widehat{\zeta}_\kappa \right] = 0$$

Isto implica

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{H}_{\epsilon,\nu}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{H}_{\epsilon,\nu}(\zeta_\kappa)d\zeta_{\kappa,1} \wedge \dots \wedge d\zeta_{\kappa,m} \quad (2.4.67)$$

Agora podemos, a partir de (2.4.67), provar o item b. do lema 2.4.2 como segue :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa)\Psi_{\epsilon,\kappa,\nu}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa)\Upsilon_{\nu,\kappa}^1 \Upsilon_\kappa^0 G_\epsilon(\zeta_\kappa)d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^m} \Upsilon_{\nu, \kappa}^1 \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa) G_\epsilon(\zeta_\epsilon) \Upsilon_\kappa^0 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} (1 + \zeta_\kappa^2)^{-\nu} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa) G_\epsilon(\zeta_\epsilon) d\zeta_{\kappa, 1} \wedge \cdots \wedge d\zeta_{\kappa, m} \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{H}_{\epsilon, \nu}(\zeta_\kappa) d\zeta_{\kappa, 1} \wedge \cdots \wedge d\zeta_{\kappa, m} \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{H}_{\epsilon, \nu}(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} (1 + \xi^2)^{-\nu} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\xi) G_\epsilon(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

Assim acabamos a prova da igualdade dada em (2.4.55). Portanto, terminamos a demonstração do item b.  $\diamond$

**Demonstração do item c. do Lema 2.4.2.** Ao integrar por partes nos seguintes cálculos, consideramos o fato de que o suporte de  $\Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} \mathbf{u}$  é compacto em relação a variável  $y$ .

$$\begin{aligned}
&\sum_{\iota=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial s_\iota} \right) \left[ \int_{\mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa) [\Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} \mathbf{u}](y, s) dy \right] ds_\iota \\
&= \sum_{\iota=1}^n \left[ \int_{\mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa) \sum_{\tau=1}^m \zeta_{\kappa, \tau} \frac{\partial \phi_\tau(s)}{\partial s_\iota} [\Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} \mathbf{u}](y, s) dy ds_\iota \right] \\
&+ \sum_{\iota=1}^n \left[ \int_{\mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa) \sum_{\tau=1}^m i\kappa |\xi| [Z_\tau(x, t) - Z_\tau(y, s)] \frac{\partial \phi_\tau(s)}{\partial s_\iota} [\Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} \mathbf{u}](y, s) dy ds_\iota \right] \\
&+ \sum_{\iota=1}^n \left[ \int_{\mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa) \left[ \frac{\partial \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} \mathbf{u}}{\partial s_\iota} \right](y, s) dy ds_\iota \right] \\
&= \sum_{\iota=1}^n \left[ \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{\tau=1}^m \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa) \left[ \zeta_{\kappa, \tau} + i\kappa |\xi| [Z_\tau(x, t) - Z_\tau(y, s)] \right] \frac{\partial \phi_\tau(s)}{\partial s_\iota} \right. \\
&\quad \left. [\Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} \mathbf{u}](y, s) dy ds_\iota \right] \\
&+ \sum_{\iota=1}^n \left[ \int_{\mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa) \left[ \frac{\partial \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} \mathbf{u}}{\partial s_\iota} \right](y, s) dy ds_\iota \right] \\
&= \sum_{\iota=1}^n \left[ \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{\tau=1}^m i \frac{\partial}{\partial y_\tau} [\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa)] \frac{\partial \phi_\tau(s)}{\partial s_\iota} [\Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} \mathbf{u}](y, s) dy ds_\iota \right] \\
&+ \sum_{\iota=1}^n \left[ \int_{\mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa) \left[ \frac{\partial \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} \mathbf{u}}{\partial s_\iota} \right](y, s) dy ds_\iota \right]
\end{aligned}$$

Integrando por partes, em relação a variável  $y \in \mathbb{R}^m$ .

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\iota=1}^n \left[ \int_{\mathbb{R}^m} [\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa)] (-i) \sum_{\tau=1}^m \frac{\partial \phi_\tau(s)}{\partial s_\iota} \left[ \frac{\partial \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} \mathbf{u}}{\partial y_\tau} \right] (y, s) dy ds_\iota \right] \\
&+ \sum_{\iota=1}^n \left[ \int_{\mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa) \left[ \frac{\partial \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} \mathbf{u}}{\partial s_\iota} \right] (y, s) dy ds_\iota \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} [\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa)] \left[ \sum_{\iota=1}^n [L_\iota \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} \mathbf{u}] (y, s) \right] dy ds_\iota \quad (2.4.68)
\end{aligned}$$

Usando a notação dada em (2.4.46) podemos escrever :

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^m} [\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa)] dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} \mathbf{u}] (y, s) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} [\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa)] dy \wedge [\mathbf{u} d_{\mathcal{L}}[\Psi_{\epsilon, \kappa, \nu}] + \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}]] (y, s) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} [\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)]\zeta_\kappa)] \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}] (y, s)
\end{aligned}$$

Com esta última igualdade terminamos a demonstração do último item do Lema 2.4.2 ■

**Primeira parte da demonstração do Teorema 2.2.7 - Nova Representação Integral da função  $\partial_x^\alpha v_\epsilon$  :** Lembramos que estamos usando a notação dada em (2.4.46). Fixamos qualquer  $\alpha \in \mathbb{N}^m$ , onde  $|\alpha| \leq k - 2\nu - 1$ . Depois veremos que precisaremos reduzir a variação de  $|\alpha|$  ainda mais. Seja  $\widehat{K}_\kappa$  o  $(\Phi, \kappa)$ -Envoltória Convexa de  $K$  relativa a  $W$ . Seja qualquer  $(x, t) \in \overline{V}_R \times \widehat{K}_\kappa$ ; portanto, poderemos assumir que a curva diferenciável por partes  $\gamma$ , que liga o ponto  $t$  e o ponto fixo  $t_0 \in K$ , está contido em  $\overline{W}$ . Isto é,  $\gamma \subset \overline{W}$ . Fixaremos quaisquer números reais positivos do lema 2.4.1  $0 < \delta < 1$ ,  $\frac{\mathbf{d}}{R^2 - \mathbf{d}^2} < \kappa < \frac{1}{\mathbf{d} + \sqrt{2\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2}}$ . Denotaremos com  $\Delta$  o conhecido operador de Laplace definido em  $\mathbb{R}^m$ . Isto é,

$$\Delta = \sum_{\iota=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_\iota^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

Nosso primeiro passo é mudar a representação integral da função  $\partial_x^\alpha v_\epsilon$  dada na equação (2.2.6) como segue.

$$\begin{aligned}
&\partial_x^\alpha v_\epsilon(x, t) \\
&= (\epsilon\pi)^{\frac{m}{2}} \int_{\gamma \times \mathbb{R}^m} \exp(-\epsilon^1 [Z(x, t) - Z(y, s)]^2) dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\partial_y^\alpha \chi \bar{u}] (y, s) \\
&= (2\pi)^{-m} \int_{\gamma \times \mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \xi) G_\epsilon(\xi) d\xi \wedge dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\partial_y^\alpha \chi \bar{u}] (y, s) \quad (2.4.69)
\end{aligned}$$

Integrando por partes na equação (2.4.69) em relação à variável  $y$ , e como  $\Delta L_t = L_t \Delta$ , obtemos :

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-m} \int_{\gamma \times \mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} (1 - \xi^2)^{-\nu} \left[ (1 - \Delta_y)^\nu [\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)].\xi)] \right] G_\epsilon(\xi) d\xi \wedge \\
&\quad dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\partial_y^\alpha \chi \bar{u}](y, s) \\
&= (2\pi)^{-m} \int_{\gamma \times \mathbb{R}^m} (1 - \Delta_y)^\nu \left[ \int_{\mathbb{R}^m} (1 + \xi^2)^{-\nu} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)].\xi) G_\epsilon(\xi) d\xi \right] \wedge \\
&\quad dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\partial_y^\alpha \chi \bar{u}](y, s)
\end{aligned}$$

Como fixamos  $\alpha \in \mathbb{N}^m$ , onde  $|\alpha| \leq k - 2\nu - 1$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-m} \int_{\gamma \times \mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} (1 + \xi^2)^{-\nu} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)].\xi) G_\epsilon(\xi) d\xi \wedge \\
&\quad dy \wedge d_{\mathcal{L}}[(1 - \Delta_y)^\nu \partial_y^\alpha \chi \bar{u}](y, s) \tag{2.4.70}
\end{aligned}$$

Para simplificar, denotaremos com o símbolo  $\mathbf{u}$  a função  $(1 - \Delta)^\nu \partial_x^\alpha \chi \bar{u}$ . Isto é,

$$\mathbf{u} := (1 - \Delta)^\nu \partial_x^\alpha \chi \bar{u} \tag{2.4.71}$$

Observamos que a função  $\mathbf{u}$  tem de suporte compacto contido em  $V$ , em relação à variável  $y$ . Logo, a equação (2.4.70) é igual a

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-m} \int_{\gamma \times \mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} (1 + \xi^2)^{-\nu} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)].\xi) G_\epsilon(\xi) d\xi \wedge dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y, s) \\
&= (2\pi)^{-m} \int_{\gamma \times V} \int_{\mathbb{R}^m} (1 + \xi^2)^{-\nu} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)].\xi) G_\epsilon(\xi) d\xi \wedge dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y, s) \tag{2.4.72}
\end{aligned}$$

Pelo item b. do lema 2.4.2, segue-se

$$= (2\pi)^{-m} \int_{\gamma \times V} \int_{\mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)].\zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} d\xi \wedge dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y, s) \tag{2.4.73}$$

Fixando  $\epsilon > 0$ , de acordo com o item a. do lema 2.4.2, o integrando na equação (2.4.73) tem decaimento exponencial ao infinito em relação a  $\xi$ , uniformemente sobre  $\bar{V} \times \bar{W}$ . Visto que

$V \times \gamma \subset V \times \overline{W}$ , podemos aplicar o teorema de Fubini nesta equação . Assim, obtemos uma outra representação integral de  $\partial_x^\alpha v_\epsilon$  :

$$\begin{aligned} &= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma \times V} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)].\zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y, s) \wedge d\xi \\ &= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma} \left[ \int_{\mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)].\zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y, s) \right] \wedge d\xi \end{aligned} \quad (2.4.74)$$

Para cada número real positivo  $\frac{\mathbf{d}}{R^2 - \mathbf{d}^2} < \kappa < \frac{1}{\mathbf{d} + \sqrt{2\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}^2}}$  , para cada  $\theta = \frac{\xi}{|\xi|}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^m$  , e para cada  $t \in W$  denotamos por  $\mathcal{W}_{t, \theta, \kappa}$  a componente fechada que contém o ponto  $t$  do conjunto :

$$\{s \in \overline{W} : \theta[\Phi(t) - \Phi(s)] - \kappa[\Phi(t) - \Phi(s)]^2 = 0\} \quad (2.4.75)$$

Lembramos que se  $t \in \widehat{K}_\kappa$  temos  $\mathcal{W}_{t, \theta, \kappa} \cap K \neq \emptyset$  para quase todo  $\theta$ . Pelo item c. do lema 2.4.2, a representação de  $\partial_x^\alpha v_\epsilon(x, t)$ ,  $t \in \widehat{K}_\kappa$ , na equação (2.4.74), tem a vantagem de poder escolher qualquer curva conveniente  $\gamma_\theta$ , para quase todo  $\theta$ , como a união de duas curvas uniformemente retificáveis denotadas por  $\gamma_{0, \theta}, \gamma_{1, \theta}$ . A curva  $\gamma_{0, \theta}$  contida em  $K$  liga o ponto fixo  $t_0$  à algum ponto  $t_\theta \in \mathcal{W}_{t, \theta, \kappa} \cap K$ . Visto que  $K$  é uniformemente retificável, podemos assumir que os comprimentos das curvas  $\gamma_{0, \theta}$  são limitados por uma constante  $C_0(K)$ , subordinada ao compacto  $K$  somente. O outro caminho  $\gamma_{1, \theta}$  que liga  $t_\theta$  e  $t$  está contido em  $\mathcal{W}_{t, \theta, \kappa}$ . O conjunto  $\overline{W}$  é um compacto que contém  $\widehat{K}_\kappa$  e a aplicação

$$F_\Phi : S^{m-1} \times \overline{W} \times \overline{W} \rightarrow \overline{W} \times S^{m-1} \times \mathbb{R} \quad (2.4.76)$$

definida como

$$F_\Phi(t, \theta, s) = (t, \theta, \theta[\Phi(t) - \Phi(s)] - \kappa[\Phi(t) - \Phi(s)]^2)$$

é analítica. Então , as fibras de  $\mathcal{W}_{t, \theta, \kappa} \subseteq F_\Phi^{-1}(t, \theta, 0)$ ,  $t \in \widehat{K}_\kappa$ , são uniformemente retificáveis. Portanto, podemos assumir os comprimentos das curvas  $\gamma_{1, \theta}$  limitadas por uma constante  $C_1(\overline{W})$ , independente de  $\theta \in S^{m-1}$  (Ver §8 Maximal Distance Along the Fiber in [22]). Logo, se  $t \in \widehat{K}_\kappa$  obtemos nossa procurada Nova Representação Integral de  $\partial_x^\alpha v_\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha v_\epsilon(x, t) &= \\ &= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\gamma_{0, \theta} \times \mathbb{R}^m} + \int_{\gamma_{1, \theta} \times \mathbb{R}^m} \right) \\ &\quad \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)].\zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y, s) \wedge d\xi \end{aligned} \quad (2.4.77)$$

Denotamos as duas integrais em (2.4.77) com os símbolos  $I_{0,\epsilon}^\alpha(x,t)$  e  $I_{1,\epsilon}^\alpha(x,t)$ . Isto é,

$$\begin{aligned} I_{0,\epsilon}^\alpha(x,t) &= \\ (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{0,\theta} \times \mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x,t) - Z(y,s)] \cdot \zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon,\kappa,\nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y,s) \wedge d\xi; \end{aligned} \quad (2.4.78)$$

$$\begin{aligned} I_{1,\epsilon}^\alpha(x,t) &= \\ (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{1,\theta} \times \mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x,t) - Z(y,s)] \cdot \zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon,\kappa,\nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y,s) \wedge d\xi \\ &= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{1,\theta} \times V} \exp(i[Z(x,t) - Z(y,s)] \cdot \zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon,\kappa,\nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y,s) \wedge d\xi \end{aligned} \quad (2.4.79)$$

**Segunda Parte da demonstração do Teorema 2.2.7 – Estimativas sobre a Nova Representação Integral da função  $\partial_x^\alpha v_\epsilon$**  : Para continuar a demonstração do teorema 2.2.7 precisaremos de dois lemas dedicados a estimar as integrais  $I_{0,\epsilon}^\alpha$ ,  $I_{1,\epsilon}^\alpha$  com ajuda do lema 2.4.2.

**Lema 2.4.3** *Existe uma constante  $M(\overline{V}, \overline{W}, K, k, \nu) > 0$ , que depende do subconjunto fechado limitado  $\overline{V} \times \overline{W}$ , do compacto  $K \subset W$  e dos inteiros  $k, \nu \in \mathbb{Z}_+$ , tal que*

$$|I_{0,\epsilon}^\alpha(x,t)| \leq M(\overline{V}, \overline{W}, K, k, \nu), \quad (x,t) \in \overline{V}_R \times \widehat{K}_\kappa, \quad |\alpha| \leq k - 2\nu - 1 \quad (2.4.80)$$

Além disso, para qualquer  $(x,t) \in \overline{V}_R \times \widehat{K}$  e para qualquer  $\alpha \in \mathbb{N}^m$ , onde  $|\alpha| \leq k - 2\nu - 1$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_{0,\epsilon}^\alpha(x,t) &= \\ &= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{0,\theta} \times \mathbb{R}^m} \frac{\exp(i[Z(x,t) - Z(y,s)] \cdot \zeta_\kappa)}{(1 + \zeta_\kappa^2)^\nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y,s) \wedge d\zeta_\kappa. \end{aligned} \quad (2.4.81)$$

**Demonstração .** Seja qualquer  $(x,t) \in \overline{V}_R \times \widehat{K}_\kappa$ . Fixamos qualquer  $\alpha \in \mathbb{N}^m$ , onde  $|\alpha| \leq k - 2\nu - 1$ . Lembramos que as curvas retificáveis  $\gamma_{0,\theta} \subset K$ , que liga os pontos  $t_0$  e  $t_\theta$  são de comprimento menor que uma constante. Ou seja,  $|\gamma_{0,\theta}| < C_0(K)$ . Observamos que a constante  $C_0(K)$  depende do compacto  $K$ . A 1-forma diferencial  $d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}]$  expressamos como a soma de duas 1-forma diferenciais ,

$$d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}] = \chi \partial_x^\alpha (1 - \Delta)^\nu d_{\mathcal{L}}[\overline{u}] + \omega, \quad (2.4.82)$$

onde  $\omega(y,s) \equiv 0$ , se  $y \in V_0$  ou  $y \in \mathbb{R}^m \setminus V$ . Para simplificar a notação denotaremos

$$\omega_0 := \chi \partial_x^\alpha (1 - \Delta)^\nu d_{\mathcal{L}}[\overline{u}] \quad (2.4.83)$$

Com estas notações , podemos escrever

$$\begin{aligned} I_{0,\epsilon}^\alpha(x,t) &= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{0,\theta} \times \mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x,t) - Z(y,s)].\zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon,\kappa,\nu} dy \wedge \omega_0(y,s) \wedge d\xi + \\ & (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{0,\theta} \times \mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x,t) - Z(y,s)].\zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon,\kappa,\nu} dy \wedge \omega(y,s) \wedge d\xi \end{aligned} \quad (2.4.84)$$

Denotaremos as duas integrais em (2.4.84) por  $J_\epsilon^1(x,t)$  e  $J_\epsilon^2(x,t)$  respectivamente :

$$J_\epsilon^1(x,t) = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{0,\theta} \times \mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x,t) - Z(y,s)].\zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon,\kappa,\nu} dy \wedge \omega_0(y,s) \wedge d\xi \quad (2.4.85)$$

$$J_\epsilon^2(x,t) = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{0,\theta} \times \mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x,t) - Z(y,s)].\zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon,\kappa,\nu} dy \wedge \omega(y,s) \wedge d\xi \quad (2.4.86)$$

Como  $\gamma_{0,\theta} \subset K$  e  $u \in \mathcal{H}_L^k(\overline{V} \times K)$ , segue-se

$$J_\epsilon^1(x,t) = 0, \forall \epsilon > 0, \forall (x,t) \in \overline{V}_R \times \widehat{K}_\kappa. \quad (2.4.87)$$

Pela condição da 1-forma  $\omega$ , podemos escrever

$$J_\epsilon^2(x,t) = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{0,\theta} \times [V \setminus V_0]} \exp(i[Z(x,t) - Z(y,s)].\zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon,\kappa,\nu} dy \wedge \omega(y,s) \wedge d\xi \quad (2.4.88)$$

Por outro lado, se  $(x,t) \in \overline{V}_R \times \widehat{K}_\kappa$  e  $(y,s) \in [V \setminus V_0] \times K$  obtemos

$$\begin{aligned} |\exp(i[Z(x,t) - Z(y,s)].\zeta_\kappa)| &= |\exp(-[\Phi(t) - \Phi(s)]\xi - \kappa|\xi|[(x-y)^2 - (\Phi(t) - \Phi(s))^2])| \\ &\leq \exp(|\xi|[\mathbf{d} - \kappa R^2 + \kappa \mathbf{d}^2]) \\ &\leq \exp(|\xi|[\mathbf{d} - \kappa(R^2 - \mathbf{d}^2)]) \\ &\leq \exp(|\xi|[\delta^2 - 1]) \leq 1 \end{aligned}$$

Logo, pelo item a. do lema 2.4.2, existe uma constante  $M = M(\overline{V}, \overline{W}) > 0$  que depende do subconjunto fechado  $\overline{V} \times \overline{W}$  tal que

$$\begin{aligned} |\exp(i[Z(x,t) - Z(y,s)].\zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon,\kappa,\nu}| &\leq M(\overline{V}, \overline{W})(1 + \delta^2 \xi^2)^{-\nu} G_\epsilon(\delta \xi) \\ &\leq M(\overline{V}, \overline{W})(1 + \delta^2 \xi^2)^{-\nu}, \end{aligned} \quad (2.4.89)$$

se  $(x,t) \in \overline{V}_R \times \widehat{K}_\kappa$  e  $(y,s) \in [V \setminus V_0] \times K$ .

Sendo  $\nu > \frac{m}{2}$ , a estimativa (2.4.89) implica

$$\begin{aligned}
|J_\epsilon^2(x, t)| &\leq M \int_{\mathbb{R}^m} (1 + \delta^2 \xi^2)^{-\nu} \mathbf{D}^m |\gamma_{0, \theta}| \sup_{(y, s) \in V \times W} |\omega(y, s)| d\xi \\
&\leq M(\overline{V}, \overline{W}) C_0(K) \sup_{(y, s) \in V \times W} |\omega(y, s)| \int_{\mathbb{R}^m} (1 + \delta^2 \xi^2)^{-\nu} d\xi \\
&\leq M_0(\overline{V}, \overline{W}, K, k, \nu) \int_{\mathbb{R}^m} (1 + \delta^2 \xi^2)^{-\nu} d\xi \\
&\leq M(\overline{V}, \overline{W}, K, k, \nu)
\end{aligned} \tag{2.4.90}$$

onde  $M(\overline{V}, \overline{W}, K, k, \nu)$  é uma constante que depende de  $\overline{V} \times \overline{W}, K, k, \nu$ . Com as equações (2.4.84), (2.4.85), (2.4.86), (2.4.87) e a desigualdade (2.4.90), conseguimos provar a desigualdade (2.4.80). Como o inteiro  $\nu > \frac{m}{2}$ , a estimativa (2.4.89) nos permite aplicar o teorema da Convergência Dominada de Lebesgue na equação (2.4.88) como segue.

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_{0, \epsilon}^\alpha(x, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_\epsilon^2(x, t) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{0, \theta} \times [V \setminus V_0]} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} dy \wedge \omega(y, s) \wedge d\xi \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{0, \theta} \times [V \setminus V_0]} \Upsilon_{\kappa, \nu}^1 \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \zeta_\kappa) G_\epsilon(\zeta_\kappa) \Upsilon_\kappa^0 dy \wedge \omega(y, s) \wedge d\xi
\end{aligned}$$

Usando uma notação análoga à dada em (2.4.47) podemos escrever :

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{0, \theta} \times [V \setminus V_0]} \frac{\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \zeta_\kappa)}{(1 + \zeta_\kappa^2)^\nu} G_\epsilon(\zeta_\kappa) dy \wedge \omega(y, s) \wedge d\zeta_\kappa \\
&= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{0, \theta} \times [V \setminus V_0]} \frac{\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \zeta_\kappa)}{(1 + \zeta_\kappa^2)^\nu} dy \wedge \omega(y, s) \wedge d\zeta_\kappa \\
&= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{0, \theta} \times \mathbb{R}^m} \frac{\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \zeta_\kappa)}{(1 + \zeta_\kappa^2)^\nu} dy \wedge \omega(y, s) \wedge d\zeta_\kappa
\end{aligned} \tag{2.4.91}$$

Para continuar a demonstração lembramos dois fatos. O primeiro fato :

$$\omega(y, s) + \chi(1 - \Delta_y)^\nu \partial_y^\alpha d_{\mathcal{L}}[\overline{u}](y, s) = d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y, s) = d_{\mathcal{L}}[(1 - \Delta_y)^\nu \partial_y^\alpha \chi \overline{u}](y, s);$$

O segundo fato: como  $\gamma_{0, \theta} \subset K$  temos

$$(2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{0, \theta} \times \mathbb{R}^m} \frac{\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \zeta_\kappa)}{(1 + \zeta_\kappa^2)^\nu} dy \wedge \chi(1 - \Delta_y)^\nu \partial_y^\alpha d_{\mathcal{L}}[\overline{u}](y, s) \wedge d\zeta_\kappa = 0$$

Considerando estes fatos obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_{0,\epsilon}^\alpha(x,t) &= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{0,\theta} \times \mathbb{R}^m} \frac{\exp(i[Z(x,t) - Z(y,s)] \cdot \zeta_\kappa)}{(1 + \zeta_\kappa^2)^\nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[(1 - \Delta_y)^\nu \partial_y^\alpha \chi \bar{u}](y,s) \wedge d\zeta_\kappa \\
&= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{0,\theta} \times \mathbb{R}^m} \frac{\exp(i[Z(x,t) - Z(y,s)] \cdot \zeta_\kappa)}{(1 + \zeta_\kappa^2)^\nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y,s) \wedge d\zeta_\kappa
\end{aligned}$$

As igualdades acima provam a validade de (2.4.81) ■

**Lema 2.4.4** *Existe uma constante  $M(\bar{V}, \bar{W}, K, k, \nu) > 0$ , que depende do subconjunto fechado limitado  $\bar{V} \times \bar{W}$ , do compacto  $K \subset W$  e dos inteiros  $k, \nu \in \mathbb{Z}_+$ , tal que*

$$|I_{1,\epsilon}^\alpha(x,t)| \leq M(\bar{V}, \bar{W}, K, k, \nu), \quad (x,t) \in \bar{V}_R \times \hat{K}_\kappa, \quad |\alpha| \leq k - 2\nu - 1. \quad (2.4.92)$$

Além disso, se  $(x,t) \in \bar{V}_R \times \hat{K}_\kappa$  e para qualquer  $\alpha \in \mathbb{N}^m$ , onde  $|\alpha| \leq k - 2\nu - 1$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_{1,\epsilon}^\alpha(x,t) = \\
&= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{1,\theta} \times \mathbb{R}^m} \frac{\exp(i[Z(x,t) - Z(y,s)] \cdot \zeta_\kappa)}{(1 + \zeta_\kappa^2)^\nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y,s) \wedge d\zeta_\kappa. \quad (2.4.93)
\end{aligned}$$

**Demonstração .** Fixamos qualquer  $\alpha \in \mathbb{N}^m$ , onde  $|\alpha| \leq k - 2\nu - 1$ . Para qualquer  $(x,t) \in \bar{V}_R \times \hat{K}_\kappa$ , denotamos o domínio de integração da integral dada em (2.4.79) com o símbolo  $D_{(x,t)}$ . Isto é,

$$D_{(x,t)} := \left\{ (\xi, s, y) \in \mathbb{R}^m \times \bar{W} \times \bar{V} : s \in \gamma_{1,\theta}, \theta = \frac{\xi}{|\xi|} \right\}, \quad (2.4.94)$$

onde o caminho retificável  $\gamma_{1,\theta}$  que liga  $t_\theta$  e  $t$  está contido em  $\mathcal{W}_{t,\theta,\kappa}$  e seu comprimento é limitado por uma constante que depende de  $\bar{W}$ . Isto é,  $|\gamma_{1,\theta}| \leq C_1(\bar{W})$ . Se o trio  $(\xi, s, y) \in D_{(x,t)}$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
|\exp(i[Z(x,t) - Z(y,s)] \cdot \zeta_\kappa)| &= |\exp(-[\Phi(t) - \Phi(s)]\xi - \kappa|\xi|[(x-y)^2 - (\Phi(t) - \Phi(s))^2])| \\
&\leq |\exp(-[\Phi(t) - \Phi(s)]\xi + \kappa|\xi|(\Phi(t) - \Phi(s))^2)| \\
&\leq |\exp(-|\xi|[\Phi(t) - \Phi(s)]\theta - \kappa(\Phi(t) - \Phi(s))^2)| \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Logo, pelo item a. do lema 2.4.2, existe uma constante  $M(\bar{V}, \bar{W})$  que depende do subconjunto fechado  $\bar{V} \times \bar{W}$  tal que

$$\begin{aligned}
|\exp(i[Z(x,t) - Z(y,s)] \cdot \zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon,\kappa,\nu}| &\leq M(\bar{V}, \bar{W})(1 + \delta^2 \xi^2)^{-\nu} G_\epsilon(\delta \xi) \\
&\leq M(\bar{V}, \bar{W})(1 + \delta^2 \xi^2)^{-\nu}, \quad (2.4.95)
\end{aligned}$$

se  $(x, t) \in \bar{V}_R \times \widehat{K}_\kappa$  e  $(\xi, s, y) \in D_{(x,t)}$ . Sendo  $\nu > \frac{m}{2}$ , a estimativa (2.4.95) implica

$$\begin{aligned}
|I_{1,\epsilon}^\alpha(x, t)| &\leq \mathbf{D}^m \sup_{\bar{V} \times \bar{W}} |d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}]| \int_{\mathbb{R}^m} M(\bar{V}, \bar{W})(1 + \delta^2 \xi^2)^{-\nu} |\gamma_{1,\theta}| d\xi \\
&\leq C_1(\bar{W}) \mathbf{D}^m \sup_{\bar{V} \times \bar{W}} |d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}]| \int_{\mathbb{R}^m} M(\bar{V}, \bar{W})(1 + \delta^2 \xi^2)^{-\nu} d\xi \\
&\leq M(\bar{V}, \bar{W}, K, k, \nu)
\end{aligned} \tag{2.4.96}$$

Com a estimativa (2.4.96) acabamos provando (2.4.92). Como o inteiro  $\nu > \frac{m}{2}$ , a desigualdade (2.4.95) nos permite aplicar o teorema da Convergência Dominada de Lebesgue na equação (2.4.79) como segue.

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_{1,\epsilon}^\alpha(x, t) = \\
&\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{1,\theta} \times \mathbb{R}^m} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon,\kappa,\nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y, s) \wedge d\xi \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{1,\theta} \times V} \exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \zeta_\kappa) \Psi_{\epsilon,\kappa,\nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y, s) \wedge d\xi \\
&= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{1,\theta} \times V} \frac{\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \zeta_\kappa)}{(1 + \zeta_\kappa^2)^\nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y, s) \wedge d\zeta_\kappa \\
&= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{1,\theta} \times \mathbb{R}^m} \frac{\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \zeta_\kappa)}{(1 + \zeta_\kappa^2)^\nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}](y, s) \wedge d\zeta_\kappa
\end{aligned}$$

Com a última igualdade terminamos provando o limite (2.4.93) ■

**Última parte da demonstração do teorema 2.2.7.** Com os dois lemas anteriores 2.4.3-2.4.4 prosseguimos a demonstração do teorema 2.2.7. Das desigualdades (2.4.80)-(2.4.92), segue-se

$$|\partial_x^\alpha v_\epsilon(x, t)| \leq M(\bar{V}, \bar{W}, K, k, \nu), \forall (x, t) \in \bar{V}_R \times \widehat{K}_\kappa, \forall |\alpha| < k - 2\nu - 1. \tag{2.4.97}$$

Pela proposição 2.2.3, sem perder a generalidade podemos assumir que

$$|L^\beta \partial_x^\alpha v_\epsilon(x, t)| \leq M(\bar{V}, \bar{W}, K, k, \nu), \forall (x, t) \in \bar{V}_R \times \widehat{K}_\kappa, \forall |\alpha| + |\beta| < k - 1. \tag{2.4.98}$$

Visto que os campos vetoriais  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, L_1, \dots, L_n$  geram o fibrado tangente complexificado  $\mathbb{C}T(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ , podemos considerar as desigualdades dadas em (2.4.97), (2.4.98) para aplicar o teorema Ascoli-Arzelá sobre subconjuntos compactos convexos  $\Xi \subset \bar{V}_R \times \widehat{K}_\kappa$ . Mas, pela equicontinuidade requerida no teorema de Ascoli-Arzelá, precisamos reduzir em uma ordem de

derivação obtendo uma função  $v \in C^{k-2\nu-2}(V_R \times \text{int} [\widehat{K}_\kappa]; \mathbb{C})$ , tal que, fixando quaisquer variáveis  $\alpha, \beta$ , onde  $|\alpha| + |\beta| \leq k - 2\nu - 2$ , a coleção de funções  $\{L^\beta \partial_x^\alpha v_\epsilon\}$  converge uniformemente, sobre cada subconjunto compacto convexo de  $\Xi \subset \overline{V}_R \times \widehat{K}_\kappa$ , à função  $L^\beta \partial_x^\alpha v$ , que é contínua sobre qualquer subconjunto compacto convexo  $\Xi \subset \overline{V}_R \times \widehat{K}_\kappa$ . Isto, conforme a proposição 2.2.4, implica

$$\lim_{\Xi \ni q \rightarrow p} \partial_x^\alpha v(q) = 0, \quad \text{se } p \in \Xi \cap [\overline{V}_R \times K], \quad |\alpha| \leq k - 2\nu - 2$$

As equações (2.4.81), (2.4.93), nos permite representar  $v(x, t)$  como segue

$$\begin{aligned} v(x, t) &= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{0,\theta} \times \mathbb{R}^m} \frac{\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \zeta_\kappa)}{(1 + \zeta_\kappa^2)^\nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[(1 - \Delta_y)^\nu \chi \bar{u}](y, s) \wedge d\zeta_\kappa. \\ + (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{1,\theta} \times \mathbb{R}^m} \frac{\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \zeta_\kappa)}{(1 + \zeta_\kappa^2)^\nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[(1 - \Delta_y)^\nu \chi \bar{u}](y, s) \wedge d\zeta_\kappa \\ = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\gamma_{1,\theta} \times \mathbb{R}^m} \frac{\exp(i[Z(x, t) - Z(y, s)] \cdot \zeta_\kappa)}{(1 + \zeta_\kappa^2)^\nu} dy \wedge d_{\mathcal{L}}[(1 - \Delta_y)^\nu \chi \bar{u}](y, s) \wedge d\zeta_\kappa \quad (2.4.99) \end{aligned}$$

Assim acabamos a demonstração do teorema 2.2.7 ■

# Simbologia

- As variáveis

$$x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m), \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m; t = (t_1, \dots, t_n), s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n;$$

$$z = (z_1, \dots, z_m), \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathbb{C}^m; \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m; \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n;$$

$$\text{onde } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m; |\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n.$$

- Os subconjuntos dos espaços  $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m$

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, n \geq 2; U = V \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; K \subset W \dots\dots\dots 10, 22, 22$$

$$V_R \subset V_0 \subset V \dots\dots\dots 22$$

$$\Gamma_\kappa = \{\zeta_\kappa \in \mathbb{C}^m : \zeta_\kappa := \zeta_\kappa(x, t, y, s, \xi) = \xi + i\kappa|\xi|[Z(x, t) - Z(y, s)], \xi \in \mathbb{R}^m\} \dots\dots\dots 40$$

$$\mathbb{S}^{m-1}; \mathbb{S}_{t, \kappa, \theta}^{m-1}; \mathcal{W}_{t, \theta, \kappa}; \widehat{K}_\kappa \dots\dots\dots 15, 15, 15, 15$$

$$\widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\Phi(K)} \dots\dots\dots 16, 16$$

- Os espaços fibrados

$$\mathbb{C}T(\mathbb{R}^N), \mathbb{C}T^*(\mathbb{R}^N) \dots\dots\dots 10, 10$$

$$\mathcal{L} \subset \mathbb{C}T(\mathbb{R}^N), \mathcal{L}^\perp \subset \mathbb{C}^*T(\mathbb{R}^N) \dots\dots\dots 10, 11$$

- As funções especiais

$\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m, \Phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$	10
$Z_j(x, t) = x_j + i\phi_j(t), j = 1, \dots, n$	11
$Z(x, t) = x + i\Phi(t) = (Z_1, \dots, Z_m)$	21
$\chi \in C_c^\infty(V; \mathbb{R})$	22
$G_\epsilon(\xi) = \exp(-\epsilon 4^{-1} \xi^2)$	22
$E_\epsilon(z) = (\epsilon\pi)^{-\frac{m}{2}} \exp(-\epsilon^{-1} z^2)$	22
$\Upsilon_\kappa^0 := \Upsilon_\kappa^0(x, t, y, s, \xi) = \prod_{l=1}^m (1 + i\kappa\xi_l  \xi ^{-1} [x_l + i\phi_l(t) - y_l - i\phi_l(s)])$	40
$\Upsilon_{\nu, \kappa}^1 := \Upsilon_{\nu, \kappa}^1(x, t, y, s, \xi) = (1 + \zeta_\kappa^2)^{-\nu} = (1 + \zeta_{\kappa, 1}^2 + \dots + \zeta_{\kappa, m}^2)^{-\nu}, \nu \in \mathbb{Z}_+$	40
$\Psi_{\epsilon, \kappa, \nu} := \Psi_{\epsilon, \kappa, \nu}(x, t, y, s, \xi) = \Upsilon_{\nu, \kappa}^1 \Upsilon_\kappa^0 G_\epsilon(\zeta_\kappa)$	40
$v_\epsilon(x, t)$	24

- Os espaços de funções

$\mathcal{H}_L^k(\overline{V} \times F); \mathcal{H}_L^k(V \times W); \mathcal{Z}_L^k(\mathcal{F})$	13, 13, 13
---	------------

- Os números reais constantes

$C_0(K); R; C_1(\overline{W})$	21, 22, 50
$\mathbf{D} = \sup_{x, y \in V}  x - y ; \mathbf{d} = \sup_{s, t \in \overline{W}}  \Phi(s) - \Phi(t) $	22, 22

- Os campos vetoriais, as formas diferenciais e os operadores diferenciais

$$L_\iota = \frac{\partial}{\partial t_\iota} - i \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial t_\iota} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \iota = 1, \dots, n. \dots\dots\dots 10$$

$$\text{o conjunto } \{L_1, \dots, L_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\} \text{ é uma base de } \mathbb{C}T(\mathbb{R}^N) \dots\dots\dots 11$$

$$\text{o conjunto } \{dZ_1, \dots, dZ_m, dt_1, \dots, dt_n\} \text{ é uma base de } \mathbb{C}T^*(\mathbb{R}^N) \dots\dots\dots 11$$

$$d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}] := \sum_{\iota=1}^n L_\iota \mathbf{u} dt_\iota, \quad \mathbf{u} \in C^k(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}) \dots\dots\dots 12$$

$$dx \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}] = \sum_{\iota=1}^n L_\iota \mathbf{u} dx \wedge dt_\iota \dots\dots\dots 23$$

$$d\zeta_\kappa := d\zeta_{\kappa,1} \wedge \dots \wedge d\zeta_{\kappa,m} = \prod_{\iota=1}^m (1 + i\kappa\xi_\iota |\xi|^{-1} [x_\iota + i\phi_\iota(t) - y_\iota - i\phi_\iota(s)]) d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n \dots\dots\dots 40$$

$$dy \wedge d_{\mathcal{L}}[\mathbf{u}] \wedge d\zeta_\kappa := \Upsilon_\kappa^0(x, t, y, s, \xi) \left[ \sum_{\iota=1}^n L_\iota \mathbf{u}(y, s) dy \wedge ds_\iota \wedge d\xi \right] \dots\dots\dots 40$$

$$\partial_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m}; \quad L^\beta = L^{\beta_1} \dots L^{\beta_n} \dots\dots\dots 22, \quad 22$$

$$\partial_t^\beta = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial t_n}\right)^{\beta_n} \dots\dots\dots 22$$

# Bibliografia

- [1] ANDRONIKOF, E. - *Valeurs au bord de fonctions holomorphes se recollant loin du réel - Fonctions de plusieurs variables complexes, II (Sém. François Norget 1974-1975). Lectures Notes in Math.***482**.180-189 (1975).
- [2] ABRAHAM,R. and ROBBIN,J. - *Transversal mappings and Flows - W.A.Benjamin,Inc.New York,Amsterdam.*1967.
- [3] BOIVIN,A. and DWILEWICZ,R. - *Extension and Approximation of CR functions on tube manifolds - Trans. Amer. Math.Soc.***350**.1945-1956(1998).
- [4] BAOUENDI,M.S. and TREVES,F. - *A property of the functions and distributions annihilated by locally Integrable system of complex vetor fields - Ann. Math.***113**.387-421(1981).
- [5] BAOUENDI,M.S. and TREVES,F. - *A local constancy principle for the solutions of certain overdetermined systems of first order linear partial differential equations - Math.Analysis and Aplications, Part A.Advances in Math.Supplementary Studies* **7A**.245-262(1981).
- [6] BAOUENDI,M.S. and TREVES,F. - *A microlocal version of Bochner's tube theorem - Indiana Univ. Math.J.***885**-895(1982).
- [7] BAOUENDI,M.S. and TREVES,F. - *About the holomorphic extension of CR funtions on real hypersurface in complex space - Duke Math.J.***51**.77-107(1984).
- [8] BAOUENDI,M.S.; EBENFELT,P. and ROTHSCILD,L. - *Real submanifolds in complex space and their mappings - Princeton Mathematical. Series 47. Princeton University Press.* Princeton, N.J.1999.

- [9] BOCHNER,L. - *Analitic and meromorphic continuation by means of Green's formula* - **Ann.Math.****44.**652-673(1943).
- [10] BOCHNER,L. - *Partial differential equations and analytic continuation* - **Proc.Natl.Acad.Sci.USA.****38.**227-230(1952).
- [11] BOGGESE,A. - *The holomorphic extension of  $C^k$  CR functions on tube submanifolds* - **Annales Polonici Mathematici LXX.** 35-42(1998).
- [12] BOGGESE,A. - *The Holomorphic extension of  $H_p$ -CR functions on tube submanifold* - **Proc. Am. Math. Soc.****127-5.**1427-1435(1999).
- [13] BOGGESE,A. - *CR Extension of  $L_p$ -CR function on a quadric submanifold of  $\mathbb{C}^n$ .* - **Pacific Journal of Mathematics.** **201-1.1-18**(2001).
- [14] CORDARO,P. and HOUNIE,J. - *On local solvability of a underdetermined systems of vector fields* - **Amer. J. Math.****112.**243-270(1990)
- [15] EHRENPREIS,L. - *A new prof of the Hartog's theorem* - **Bull. of the Amer. Math. Soc.****67.**507-509(1961).
- [16] EPSTEIN,H. - *Generalization of the "wedge of the edge "theorem* - **J. Mathematical Phys.** **Vol. 1.**2178-2190(1960).
- [17] EPSTEIN,H. - *Particle symmetry and axiomatic field theory* - **Gordon & Breach.New York.****Vol.1.1-333**(1966).
- [18] STEIN,E. - *Singular integrals and differentiability properties of functions* - **Princeton University Press.**1970.
- [19] STEIN,E. and G.,W. - *Introduction to Fourier analysis on Euclidean Spaces* - **Princeton Univ. Press.**1971.
- [20] FICHERA,G. - *Caratterizzazione della traccia, sulla frontiera di un campo de una funzione analitica di piu variabili complesse* - **Atti Accad.Naz.Lincei Rend.Cl.Fis.Mat.Nat.Ser.****822.**706-715(1957)

- [21] FORSTNERIČ, F., LØW, E. and ØVRELID, N. - *Solving the  $d$  and  $\bar{\partial}$ -equations in thin tubes and applications to mappings* - **Michigan Math. J.** **492**. 369-416(2001)
- [22] HARDT, R.M. - *Some Analytic Bounds for Subanalytic Sets* - **Progress in Mathematics**. **27**. 250-267(1983).
- [23] HARVEY, R. and LAWSON, B. - *On boundaries of complex analytic varieties. I* - **Ann. of Math.** **102**. 233-290(1975)
- [24] HÖRMANDER, L. - *The analysis of linear partial differential operators I* - **Springer-Verlag**. 1990.
- [25] HÖRMANDER, L. - *The analysis of linear partial differential operators II* - **Springer-Verlag**. 1990.
- [26] HÖRMANDER, L. - *An introduction to complex analysis in several variables* - **North-Holland, Amsterdam-London**. 1973.
- [27] HOUNIE, J. and TAVARES, J. - *The Hartogs property for tube structures* - **Indagationes Mathematicae**. **1**. 51-61(1990).
- [28] KAZLOW, M. - *CR functions and tube manifolds* - **Trans. Amer. Math. Soc.** **255**. 153-171(1979).
- [29] KOMATSU, H. - *A local version of the Bochner's tube theorem* - **J. Fac. Sci. Tokio Sect. IA Math.** **19**. 201-214(1972).
- [30] MALGRANGE, B. - *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution* - **Ann. Inst. Fourier Grenoble**. **6**. 271-355 (1955-1956).
- [31] MENDOZA, G. and TREVES, F. - *Local solvability in a class of overdetermined system of linear PDE* - **Duke Math. Journal**. **63**. 355-357(1991).
- [32] SEVERI, F. - *Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biharmoniche* - **Atti. Accad. Naz. Lincei VI Ser.** **8.13**. 785-804(1931).
- [33] SKAWARCZYŃSKI, M. - *Bochner's tube theorem* - **Wiadom. Mat.** **36**. 13-21(2000).

- [34] STRUPA,D. - *The first eighty years of Hartogs's theorem*, - **Geometry Seminars.1987-1988.Univ.Stud.Bologna.127-209(1988).**
- [35] SUSSMANN,H. - *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions* - **Transactions of the American Mathematical Society 180.171-188(1973).**
- [36] TAVARES,J. - *Extensions of jets on Tubes structures*. - **Matemática Contemporânea.SBM.19.187-202(2000).**
- [37] TRÉPEAU, J.M. - *Sur le prolongement holomorphe des fonctions C-R définies sur une hypersurface réelle de classe  $C^2$  dans  $\mathbb{C}^n$*  - **Invent.Math.83.583-592(1986).**
- [38] TREVES,F. - *Approximation and representation of functions and distributions annihilated by a system of complex vector fields* - **Centre de Mathématiques, École Polytechnique Palaiseau.France.1981.**
- [39] TREVES,F. - *Study of a model in the theory of complexes of pseudodifferential operators* - **Annals of Mathematics.104.243-269(1976).**
- [40] TREVES,F. - *Hypo-analytic structures*, - **Princeton Mathematical.Series 40. Princeton University Press. Princeton, N.J.1992.**
- [41] YE,Z.F. - *The envelope of holomorphy of a truncated tube* - **Proc. Amer. Math. Soc. 111.157-159(1991).**