

Configurações Centrais de Dziobek em Problemas Restritos e Bifurcações

Alan Almeida Santos

Fevereiro de 2003

Conteúdo

1	Propriedades de configurações centrais	8
1.1	Configurações centrais	8
1.2	Configurações de Dziobek	10
2	Configurações de Dziobek no problema de $n+1$ corpos com massas iguais	14
2.1	Breve histórico	14
2.2	Simetria das configurações de Dziobek	15
2.3	Cálculo das Configurações	18
2.3.1	Problema restrito dos quatro corpos (Resultado de Lindow)	18
2.3.2	Problema restrito dos cinco corpos em dimensão 3	21
3	Bifurcação de configurações centrais num problema de 5 corpos no espaço	26
3.1	Introdução	26
3.2	Definições básicas e resultados sobre grupos de simetria	27
3.3	Redução de Liapunov-Schmidt sem simetria	32

3.4	Redução de Liapunov-Schmidt com simetria	34
3.5	Bifurcações da configuração tetraedral	35
3.6	Cálculos de bifurcação	41
3.6.1	Simetria tipo eixo	41
3.6.2	Simetria tipo plano	42
4	Simetrias de configurações centrais no problema de 5 corpos no espaço	44
4.1	Introdução	44
4.2	Simetria de configurações centrais não-convexas num problema de cinco corpos.	45

Introdução

No problema dos n corpos, as configurações centrais compõem condições iniciais no espaço de configuração para soluções homogêneas. Em sua essência, o problema de determinar tais configurações é algébrico, visto que, elas são as soluções de um sistema de equações algébricas não linear no qual as massas dos corpos são os parâmetros. Hipóteses simplificadoras tais como, massas iguais, massas nulas e simetrias podem ser consideradas a fim de obter sucesso no cálculo das configurações centrais. Uma etapa chave na abordagem do problema é a escolha de um sistema de coordenadas “econômico”.

Variações do problema dos n corpos em que algumas massas são tomadas nulas, os chamados problemas restritos, têm efeito prático notável, uma vez que, elas modelam o movimento de partículas (cometas, satélites artificiais,...) sob a ação gravitacional de outros corpos com massa consideravelmente maior. Além disso, as informações obtidas com massas nulas podem ser úteis em casos onde massas relativamente pequenas são admitidas.

Configurações centrais em problemas restritos têm sido pouco exploradas. Tudo indica que a primeira abordagem do tema foi executada por M. Lindow em 1924 quando o mesmo determinou os 10 pontos de equilíbrio do problema de 3+1 corpos com massas iguais numa configuração lagrangeana. Mais tarde, P. Pedersen em 1944, resolve uma espécie de problema inverso no qual as massas são as incógnitas e as posições de equilíbrio do corpo de massa nula são parâmetros. No entanto, a análise é feita em casos especiais em que a simetria é admitida de antemão. Por fim, recursos numéricos foram utilizados

para descrever a dependência do pontos de libração com o centro de massa do sistema. Seguiram-se os trabalhos de Carles Simó (1977) e R. F. Arenstorf (1982) que estudaram de forma analítica e numérica o caso de $3 + 1$ corpos com massas distintas.

Em nosso estudo, focamos a atenção nas configurações centrais de n corpos em dimensão $n - 2$. Também conhecidas como configurações de Dziobek, elas possuem uma peculiaridade, devida à combinação da dimensão com o número de corpos, que permite eliminar certas indeterminações que surgem nas equações, provenientes do anulamento de uma das massas. Outrossim, a hipótese *n corpos em dimensão $n - 2$* possibilita reduzir o número de variáveis e de equações do problema através de certas relações de dependência linear. As coordenadas baricêntricas (áreas ou volumes orientados) surgem naturalmente.

No primeiro capítulo, nós investigamos o caso restrito de $n + 1$ corpos com massas iguais para $n = 3$ e $n = 4$. Na formulação do problema, considera-se que a configuração de $n + 1$ corpos depende continuamente da massa infinitesimal e que a mesma tende a uma configuração bem definida quando a massa tende a zero. O anulamento puro e simples da massa provoca anulamento das coordenadas baricêntricas. Procedemos então uma normalização, de modo que, as novas coordenadas tenham limite bem definido. Com isso, foi possível enunciar um resultado geral de simetria e em seguida reproduzir os resultados de Lindow no plano e também, obter todas as configurações do caso tridimensional, este último em aberto.

Numa segunda fase, nós consideramos o potencial da família homogênea onde o expoente das distâncias mútuas é negativo e arbitrário. Generalizamos o resultado de D. Schmidt [12] sobre bifurcações de uma configuração tetraedral não-convexa de 5 corpos. Além disso, usando técnicas de bifurcação com simetria detectamos a presença de 3 novas famílias de soluções com simetria tipo planar provando assim a existência de pelo menos 7 famílias de configurações centrais como perturbações do tetraedro regular. A utilização dos grupos de simetria da equação que define configurações centrais permitiu simplificar os cálculos formais de bifurcação.

E finalmente, conseguimos uma extensão de um resultado de simetria, devido a Alain Albouy e Jaume Llibre [5], para configurações espaciais do problema de $1+4$ corpos. Nós

provamos a persistência das simetrias das configurações quando a massa central é superior a um determinado limite finito.

As demonstrações dos teoremas estão sustentadas, basicamente, nas técnicas desenvolvidas por Alain Albouy e Alain Chenciner [4]. Nosso propósito inicial é extrair o máximo de informação que essas técnicas podem fornecer. Pretendemos ainda num próximo trabalho estudar o caso planar para cinco corpos a fim de testar a serventia de tais técnicas em situações outras que não a de Dziobek. Encontra-se também em aberto o problema da simetria das configurações centrais não-convexas de cinco corpos com massas iguais no espaço. Sobre este último, fizemos várias tentativas utilizando as mesmas técnicas, porém sem êxito. Explicar a razão do insucesso dessas técnicas em casos particulares constitui um interessante problema de pesquisa em configurações centrais.

Janeiro de 2003
Alan Almeida Santos

Agradecimentos

Aos professores Aron Simis, Israel Vainsencher, Pedro Ontaneda e Ramon Mendoza do departamento de matemática da UFPe por responderem aos meus questionamentos matemáticos via e-mail.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Aos velhos amigos Almir, Ademakson, Natanael e Custódio e aos novos Gastão, Steve e Alessandro pelas discussões matemáticas saudáveis e pelas alegrias que tive durante minha permanência no Recife.

À secretária do dmat Tânia pela atenção especial a mim dispensada.

Ao Prof. Alain Albouy (IMCCE - Paris) pela excelente orientação neste trabalho de doutoramento. Ao Prof. Claudio Vidal (UFPe) pelas propostas de pesquisa e discussão das soluções expostas nesta tese. Aos Prof. Eduardo Shirlippe (UFPe) e Cesar Castilho (UFPe) pelas críticas incisivas e responsáveis pela redação final.

E de forma especial, quero agradecer ao prof. Hildeberto Cabral, pelo incentivo e ensinamentos matemáticos e pedagógicos que me foram passados ao longo de minha pós-graduação no departamento de matemática da UFPe.

*à minha esposa, ao meu filho
e à minha terra, Sergipe.*

Capítulo 1

Propriedades de configurações centrais

1.1 Configurações centrais

O problema dos n corpos consiste em descrever a evolução no tempo de n massas pontuais $m_1, \dots, m_n$ que interagem segundo a lei de Newton da gravitação universal. Se $q_1, \dots, q_n$ são as posições das massas num tempo t , então o movimento é dado pelo sistema de equações

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = - \sum_{j \neq i} m_j \|q_i - q_j\|^{2a} (q_i - q_j) \quad (1.1)$$

O expoente a exerce uma função importante sobre a dinâmica do problema mas não sobre questões de estática. Vamos apenas impor a condição $a < 0$.

As configurações centrais do problema de n corpos são condições iniciais no espaço de configuração que dão origem a movimentos homográficos, isto é, movimentos onde a configuração em cada instante é semelhante à configuração num instante inicial. Mais precisamente, seja q_G o centro de massa do sistema

Definição 1.1.1 *Uma configuração $(q_1, \dots, q_n)$ é central se existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\sum_{j \neq i} m_j \|q_i - q_j\|^{2a} (q_i - q_j) = \lambda (q_i - q_G) \quad (1.2)$$

para todo i .

Se $(q_1, \dots, q_n)$ é uma configuração com coeficiente λ então $(\tau q_1, \dots, \tau q_n)$, para $\tau > 0$, também é uma configuração central com coeficiente $\tau^{2a}\lambda$. Portanto, as soluções do sistema (1.2), com λ fixado, determinam uma classe de configurações centrais módulo homotetias.

Vamos chamar $s_{ij} = \|q_i - q_j\|^2$ e substituir $q_G = M^{-1} \sum m_j q_j$ onde $M = \sum m_i$. Fazendo as contas, as equações (1.2) tomam a forma

$$\sum_{j \neq i} m_j \left(s_{ij}^a - \frac{\lambda}{M} \right) (q_i - q_j) = 0 \quad (1.3)$$

Definimos as variáveis S_{ij} por

$$S_{ij} = -s_{ij}^a + \frac{\lambda}{M}$$

Vamos focar nossa atenção na determinação de configurações centrais de n massas pontuais em dimensão $n - 2$, as chamadas configurações de Dziobek, em que massas nulas são introduzidas. Como Albouy notou em [6] há duas maneiras de se referir ao caso de massas nulas. A primeira, que foi chamada de maneira “ingênua”, consiste em fazer na equação (1.1) $m_1 = \dots = m_p = 0$. O sistema resultante definirá o movimento das partículas infinitesimais mas sem o caráter hamiltoniano. A definição **(1.1.1)** ainda é compatível com o estudo da equação (1.1).

A segunda forma é introduzir números positivos $\mu_1, \dots, \mu_p$, um parâmetro ε e fazer $m_1 = \varepsilon\mu_1, \dots, m_p = \varepsilon\mu_p$. A diferença entre as duas formas é significativa no estudo de configurações centrais como mostra o exemplo de uma partícula unitária e duas infinitesimais sobre um plano. Com a maneira ingênua, qualquer configuração onde as partículas infinitesimais situam-se sobre o mesmo círculo centrado na partícula unitária é uma configuração central. Mas pela outra, tomando limite de configurações centrais com massas positivas, essa restrição é necessária, mas não suficiente. Ocorrem três situações distintas: ou as partículas coincidem no limite, ou situam-se em pontos opostos sobre o círculo ou formam um triângulo equilátero com a massa unitária.

A essa altura vale ressaltar uma importante estimativa (1.4) devida a Moeckel e de-

monstrada em [6]: definindo as quantidades

$$\Sigma_{ij} = (m_i + m_j)S_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i,j} m_k (S_{ik} + S_{jk})$$

temos que se $q_1, \dots, q_n$ é uma configuração central com massas $m_1, \dots, m_n$ então $\Sigma_{ij} \leq 0$. Tomando a média aritmética das quantidades Σ_{ij} obtemos

$$\bar{\Sigma} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} \Sigma_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{i < j} (m_i + m_j) S_{ij} \leq 0 \quad (1.4)$$

1.2 Configurações de Dziobek

Definição 1.2.1 *Uma configuração de Dziobek é uma configuração $(q_1, \dots, q_n)$ tal que existe $\Delta \in \mathbb{R}^n$ não nulo satisfazendo*

$$\sum_{j=1}^n \Delta_j = 0 \quad e \quad \sum_{j=1}^n \Delta_j q_j = 0 \quad (1.5)$$

e tal que para algum $\eta \in \mathbb{R}$ e para algum $\lambda \in \mathbb{R}$

$$-s_{ij}^a + \frac{\lambda}{M} = \eta d_i d_j, \quad \text{com } d_i = \Delta_i / m_i \quad (1.6)$$

Tal configuração é central com multiplicador λ e, devido a (1.5), para qualquer i , o número de vetores linearmente independentes em $\{q_j - q_i\}_{j \neq i}$ é no máximo $n - 2$.

Lema 1.2.2 *Se a configuração tiver dimensão $n - 2$ então, a menos de múltiplos, existe um único $\Delta \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo (1.5).*

Demonstração: Com efeito, seja $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum \xi_j = 0$ e $\sum \xi_j q_j = 0$. A dimensão da configuração é $n - 2$ se, e somente se, para cada $1 \leq i \leq n$ existe um k tal que os $n - 2$ vetores $\{q_j - q_i\}_{j \neq i,k}$ são linearmente independentes. Nesse caso, $\xi_k \neq 0$. Reescrevemos (1.5) na forma

$$\Delta_k (q_k - q_i) = - \sum_{j \neq k} \Delta_j (q_j - q_i) \quad e \quad \xi_k (q_k - q_i) = - \sum_{j \neq k} \xi_j (q_j - q_i)$$

Multiplicando a primeira por ξ_k e a segunda por Δ_k e levando em conta a independência linear dos vetores à direita, temos que

$$\xi_k \Delta_j = \Delta_k \xi_j \text{ para todo } j \neq k, i$$

Chamando $\frac{\Delta_k}{\xi_k} = \mu$, resulta que $\Delta_j = \mu \xi_j$ para todo $1 \leq j \leq n$. ■

Proposição 1.2.3 *Toda configuração central de dimensão exatamente $n-2$ é de Dziobek.*

Demonstração: Pelo lema, a menos de múltiplos, existe um único $\Delta \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz (1.5). Colocando a i -ésima equação de (1.3) na forma

$$\sum_{j=1}^n m_j S_{ij} q_j = 0 \text{ onde } m_i S_{ii} = - \sum_{j \neq i} m_j S_{ij}$$

vemos que existe μ_i tal que $m_j S_{ij} = \mu_i \Delta_j$ para todo $j \neq i$. Tomando a j -ésima equação, por simetria, decorre que $m_i S_{ij} = \mu_j \Delta_i$. Assim, $\mu_i d_j = \mu_j d_i$ de forma que existe um $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_i = \mu d_i$. ■

Proposição 1.2.4 *Se $(q_1, \dots, q_n)$ é uma configuração de Dziobek com massas $m_i > 0$ então $\eta > 0$.*

Demonstração: Observe que

$$0 = \sum \Delta_i \sum d_j = \sum_{i < j} (\Delta_i d_j + \Delta_j d_i) + \sum_{i=1}^n \Delta_i d_i = \frac{1}{\eta} \sum_{i < j} (m_i + m_j) S_{ij} + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i^2}{m_i}$$

e por (1.4) temos

$$0 \geq \bar{\Sigma} = \frac{-\eta}{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i^2}{m_i}$$

donde segue o resultado. ■

A constante η pode então, ser normalizada.

Proposição 1.2.5 *A estimativa de Moeckel para uma configuração de Dziobek equivale a $(\Delta_i - \Delta_j)(d_i - d_j) \geq 0$*

Demonstração: A mera substituição $S_{ij} = \eta d_i d_j$ na expressão de Σ_{ij} fornece

$$\Sigma_{ij} = \frac{-\eta}{2}(\Delta_i - \Delta_j)(d_i - d_j) \quad \blacksquare$$

Definição 1.2.6 *Uma configuração de Dziobek é dita convexa se pelo menos dois Δ_i são positivos e pelo menos dois Δ_i são negativos. A configuração é dita não-convexa se $n - 1$ dos Δ_i são de mesmo sinal.*

Geometricamente, uma configuração de Dziobek convexa de dimensão $n - 2$ é tal que nenhum dos pontos q_i situa-se no fecho convexo dos demais. Ao contrário, numa configuração não-convexa um dos pontos está no interior do fecho convexo dos outros. Uma propriedade dessa definição é dada na seguinte

Proposição 1.2.7 *Se $n > 3$ então não existe configuração de Dziobek tal que $n - 2$ dos Δ_i sejam de um sinal dado e um dos outros seja nulo.*

Demonstração: Suponha que $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 > 0$ e todos os outros Δ_i são negativos. Chamando $s_o = \left(\frac{\lambda}{M}\right)^{1/a}$ temos que $s_{1i} = s_o$ para todo $i > 1$. Ou seja, todos os pontos exceto q_1 estão sobre uma hipersfera centrada em q_1 . A configuração formada pelos outros $n - 1$ pontos é portanto convexa o que contradiz a distribuição dos sinais dos Δ_i 's. $\blacksquare$

Proposição 1.2.8 *Se $(q_1, \dots, q_n)$ é uma configuração de Dziobek então a quantidade*

$$\Delta_1 \|q_1 - q\|^2 + \dots + \Delta_n \|q_n - q\|^2$$

independe da escolha do ponto q .

Demonstração: A derivada da expressão em relação ao ponto q é

$$-2 \sum_{i=1}^n \Delta_i (q_i - q) = 0$$

devido às relações (1.5). $\blacksquare$

Fazendo $t_i = \sum_k \Delta_k \|q_k - q_i\|^2$ obtemos as equações

$$t_i = t_j, \quad i \neq j \quad (1.7)$$

que juntamente com a condição $\sum \Delta_j = 0$ são equivalentes a (1.5). Com efeito, substituindo $\|q_k - q_j\|^2 = \langle q_k - q_j, q_k - q_j \rangle$ em (1.7) obtemos

$$\sum_{k=1}^n \langle \Delta_k (q_k - q_j), q_i - q_j \rangle = 0$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Fixando j , a equação acima diz que o vetor $\sum \Delta_k (q_k - q_j)$ é ortogonal a todos os geradores do espaço linear ao qual pertence. Logo, $\sum \Delta_k (q_k - q_j) = 0$ donde (1.5) é satisfeita.

Essas equações fornecem condições necessárias para configurações de Dziobek em forma de determinantes

$$Q_{ijk} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_i & t_j & t_k \\ \Delta_i & \Delta_j & \Delta_k \end{vmatrix} = 0 \quad (1.8)$$

invariantes por transformações do tipo $s_{ij} \mapsto \xi s_{ij} + \eta$ com $\xi > 0$ e $\eta \in \mathbb{R}$.

Observação 1.2.9 *Feito $\eta = 1$ e λ fixado, as configurações de Dziobek de n corpos ficam, portanto, caracterizadas por $n + \frac{n(n-1)}{2}$ variáveis $(\Delta_1, \dots, \Delta_n), (\dots, s_{ij}, \dots)$ soluções do sistema composto das equações (1.6), (1.7) e $\sum \Delta_j = 0$.*

Vamos definir a função φ pela regra

$$S_{ij} = \varphi(s_{ij}) = -s_{ij}^a + \frac{\lambda}{M} \quad (1.9)$$

As propriedades $\varphi' > 0$ e $\varphi'' < 0$ serão de suma importância para os resultados que seguem.

Capítulo 2

Configurações de Dziobek no problema de $n + 1$ corpos com massas iguais

2.1 Breve histórico

O problema restrito dos quatro corpos, ao que parece, foi considerado pela primeira vez em 1924 por M. Lindow. Em seu trabalho, Lindow determinou os pontos de libração num caso especial onde 3 massas iguais movem-se numa configuração lagrangeana e a quarta massa nula orbita no mesmo plano do triângulo. Obtém-se um total de 10 equilíbrios para a massa nula. Mais tarde em 1944, P. Pedersen [8] tenta determinar os pontos de libração para um comportamento arbitrário das massas. Em sua estratégia, uma espécie de problema inverso, os valores ou a região no triângulo mássico das 3 massas finitas são calculados em função das coordenadas dos supostos pontos de libração. O cálculo das configurações centrais desse problema foi feito com a utilização de métodos numéricos.

Vamos mostrar como as técnicas expostas em [2] e [5] podem ser utilizadas para reproduzir o resultado de Lindow e, de uma forma mais abrangente, estenderemos os resultados de simetria das configurações centrais para o problema restrito de $n + 1$ corpos com massas iguais em dimensão $n - 1$, as chamadas configurações de Dziobek. Daremos um argumento

segundo o qual é possível evitar as singularidades do problema devidas ao anulamento de uma das massas do sistema. Também provamos que todas as configurações centrais do referido problema apresentam simetria tipo eixo ou plano.

A busca de simetrias é importante uma vez que elas reduzem o número de variáveis das equações que definem as configurações centrais.

2.2 Simetria das configurações de Dziobek

Considere o sistema de equações que define uma configuração central de $n + 1$ corpos

$$\sum_{j \neq i} m_j S_{ij}(q_j - q_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n \quad (2.1)$$

O potencial newtoniano é caracterizado pelo expoente $a = -3/2$. O problema das configurações de Dziobek no caso restrito será posto da seguinte forma

Formulação do problema: *No problema restrito de $n + 1$ corpos, uma configuração central $q(m_0, m_1, \dots, m_n)$ em dimensão $n - 1$ depende continuamente do parâmetro m_0 e admite-se que a configuração tende a um limite bem definido, sem colisões, quando $m_0 \rightarrow 0$.*

Supondo ainda, que a configuração limite formada pelos n corpos $m_1, \dots, m_n$ seja $n - 1$ dimensional, para cada $i = 1, \dots, n$ os vetores $q_j - q_i$ ($0 \neq j \neq i$) devem ser linearmente independentes. Nessas condições, as n últimas relações lineares em (2.1) obrigam

$$\lim_{m_0 \rightarrow 0} S_{ij} = 0 \quad \text{para todo } i \neq j \text{ não-nulos}$$

donde por (1.6) tem-se que

$$\tilde{s}_{ij} = \lim_{m_0 \rightarrow 0} s_{ij} = s_o = \left(\frac{\lambda}{M} \right)^{1/a} \quad \text{para todo } i \neq j \text{ não-nulos.}$$

Ou seja, os n corpos de massas finitas formam um simplexo regular de n corpos em dimensão $n - 1$. Para $n = 3$ isso corresponde à configuração de Lagrange. Para $n = 4$, à configuração de R. Lehmann-Filhés, um tetraedro regular.

Se dividirmos as n últimas equações de (2.1) por m_0 obtemos

$$\begin{aligned}
m_2\theta_{12}(q_2 - q_1) + m_3\theta_{13}(q_3 - q_1) + \dots + m_n\theta_{1n}(q_n - q_1) &= -S_{01}(q_0 - q_1) \\
m_1\theta_{12}(q_1 - q_2) + m_3\theta_{23}(q_3 - q_2) + \dots + m_n\theta_{2n}(q_n - q_2) &= -S_{02}(q_0 - q_2) \\
\vdots & \quad \quad \quad \ddots & \quad \quad \quad \vdots \\
m_1\theta_{1n}(q_1 - q_n) + m_2\theta_{2n}(q_2 - q_n) + \dots + m_{n-1}\theta_{n-1,n}(q_{n-1} - q_n) &= -S_{0n}(q_0 - q_n)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

onde fizemos $\theta_{ij} = S_{ij}/m_0$.

Proposição 2.2.1 *Sob as condições acima, $\lim_{m_0 \rightarrow 0} \theta_{ij}$ existe e é finito.*

Demonstração: Com efeito, fixe $i \neq 0$ e tome j variável com $0 \neq j \neq i$. Na definição do problema, a configuração limite é $n - 1$ dimensional. Pela continuidade em relação a m_0 , os $n - 1$ vetores $q_j - q_i$ permanecem linearmente independentes para valores de m_0 suficientemente próximos de zero. Dessa forma, as coordenadas do vetor $-S_{0i}(q_0 - q_i)$ em relação à base $\{q_j - q_i\}$ estão bem determinadas para todo m_0 suficientemente próximo de zero pelo sistema (2.2) e uma vez que, por definição, $q_0 - q_i$ tem limite bem definido suas coordenadas também o tem e portanto, para todo $i \neq 0 \neq j$

$$\lim_{m_0 \rightarrow 0} \theta_{ij} = \tilde{\theta}_{ij}$$

existe e é finito. Além disso, os limites $\tilde{\theta}_{ij}$ verificam o sistema (2.2). ■

De acordo com a observação (1.2.9), seja $\Delta \in \mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo as equações (1.5) e

$$m_i m_j S_{ij} = \Delta_i \Delta_j \tag{2.3}$$

No que segue, vamos admitir que as variáveis Δ_i e s_{ij} dependem continuamente do parâmetro m_0 .

Fazendo $m_0 \rightarrow 0$ teremos $\Delta_j \rightarrow 0$ para todo j . Com efeito, para $i \neq 0 \neq j$, $S_{ij} \rightarrow 0$ e portanto $\Delta_i \Delta_j \rightarrow 0$. Por outro lado, a hipótese de que S_{0j} tem limite bem definido e a equação (2.3) com $i = 0$ implicam em

$$\lim_{m_0 \rightarrow 0} \Delta_0 \Delta_j = 0$$

Multiplicando a equação $\sum \Delta_k = 0$ por cada Δ_j , vê-se, que Δ_j tende a zero.

Afim de contornar esse problema, utilizamos novas coordenadas para o vetor Δ de forma que, passamos a escrever

$$\Delta = (\sqrt{m_0}\delta_0, \sqrt{m_0}\delta_1, \dots, \sqrt{m_0}\delta_n) \quad (2.4)$$

Proposição 2.2.2 *Com a normalização (2.4), $\lim_{m_0 \rightarrow 0} \delta_i$ existe e é finito.*

Demonstração: Reescrevendo (2.3) com as novas coordenadas de Δ , obtemos

$$m_i m_j \frac{S_{ij}}{m_0} = \delta_i \delta_j \quad \text{e} \quad m_i S_{0i} = \delta_0 \delta_i \quad \text{com } i \neq 0 \neq j$$

De acordo com a proposição (2.2.1) e a formulação do problema, respectivamente, tem-se a existência dos dois limites finitos

$$m_i m_j \tilde{\theta}_{ij} = \lim_{m_0 \rightarrow 0} \delta_i \delta_j \quad \text{e} \quad m_i \tilde{S}_{0i} = \lim_{m_0 \rightarrow 0} \delta_0 \delta_i, \quad i \neq 0 \neq j$$

Multiplicamos a equação $\sum \delta_k = 0$ por δ_i obtemos

$$\delta_i^2 = - \sum_{k \neq i} \delta_i \delta_k$$

donde $\tilde{\Delta}_i = \lim \delta_i$ existe e é finito para todo $i = 0, \dots, n$. E uma vez que, a dimensão da configuração $(q_1, \dots, q_n)$ é $n - 1$, de acordo com as relações (1.5), $\tilde{\Delta}_0 \neq 0$. ■

Observando que o vetor $\tilde{\Delta}$ e as variáveis $\tilde{s}_{ij}$ realizam as equações (1.7), eles devem satisfazer também as equações determinantis (1.8). Recordando que a configuração limite tem

$$\tilde{s}_{ij} = s_o \quad (i \neq 0 \neq j)$$

os determinantes Q_{ijk} , para i, j, k não nulos, tomam a forma

$$Q_{ijk} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tilde{s}_{0i} & \tilde{s}_{0j} & \tilde{s}_{0k} \\ m_i \tilde{S}_{0i} & m_j \tilde{S}_{0j} & m_k \tilde{S}_{0k} \end{vmatrix}$$

onde fizemos $\tilde{\Delta}_0 \tilde{\Delta}_i = m_i \tilde{S}_{0i}$.

Mas, por (1.9), $S_{ij} = \varphi(s_{ij})$ onde φ é crescente e côncava. Assim, se numa configuração $\tilde{\Delta}$ do problema de $n + 1$ corpos com massas iguais $m_1 = \dots = m_n$ tivermos

$$\tilde{\Delta}_i < \tilde{\Delta}_j < \tilde{\Delta}_k$$

então $\tilde{S}_{0i} < \tilde{S}_{0j} < \tilde{S}_{0k}$ e portanto, devido à concavidade da função φ , $Q_{ijk} \neq 0$ ou seja, a configuração não é central. Temos então o

Teorema 2.2.3 *Toda configuração central do problema de $n+1$ corpos com massas iguais em dimensão $n - 1$ possui um plano de simetria.*

Demonstração: Com efeito, pelo exposto acima devemos ter

$$\tilde{\Delta}_i = \tilde{\Delta}_j \quad \text{ou} \quad \tilde{\Delta}_i = \tilde{\Delta}_k \quad \text{ou} \quad \tilde{\Delta}_j = \tilde{\Delta}_k$$

para cada tripla de índices $1 \leq i < j < k \leq n$. Sendo φ uma bijeção contínua a configuração limite apresenta $\tilde{s}_{0i} = \tilde{s}_{0j}$ ou $\tilde{s}_{0i} = \tilde{s}_{0k}$ ou $\tilde{s}_{0j} = \tilde{s}_{0k}$

Observação 2.2.4 *Se $n = 3$ a configuração possui um eixo de simetria apenas. Se $n = 4$ a configuração possui um eixo de simetria ($\tilde{\Delta}_1 = \tilde{\Delta}_2 = \tilde{\Delta}_3$) ou dois planos de simetria ($\tilde{\Delta}_1 = \tilde{\Delta}_2$ e $\tilde{\Delta}_3 = \tilde{\Delta}_4$). De forma geral, a configuração admite, no máximo, dois valores distintos para as coordenadas Δ_i com $i \neq 0$.*

2.3 Cálculo das Configurações

A seguir, faremos o cálculo de todas as configurações centrais nos problemas restritos com massas iguais de 3+1 corpos no plano e 4+1 corpos no espaço para o potencial newtoniano ($a = -3/2$).

2.3.1 Problema restrito dos quatro corpos (Resultado de Lindow)

Vamos supor $\Delta_1 = \Delta_2$ e fazer $\Delta_3 = r\Delta_1$. De $\sum \Delta_i = 0$ vem que $\Delta_0 = -(2 + r)\Delta_1$. Além disso, $s_{01} = s_{02}$.

As equações $t_0 = t_1 = t_2 = t_3$ implicam em

$$(s_{01} - s_{03})(2 + r) = r - 1 \quad \text{e} \quad (4 + r)s_{01} + rs_{03} = r + 1 \quad (2.5)$$

Resolvendo o sistema para s_{01} e s_{03} tem-se

$$s_{01} = \frac{r^2 + r + 1}{(2 + r)^2} \quad \text{e} \quad s_{03} = \frac{3}{(2 + r)^2}$$

Por outro lado, as relações $\Delta_0 \Delta_i = S_{0i} = -s_{0i}^a + 1$ dizem que

$$s_{01}^{-3/2} = 1 + (2 + r)\Delta_1^2$$

$$s_{03}^{-3/2} = 1 + (2 + r)r\Delta_1^2$$

Chamando $\rho = (2 + r)\Delta_1^2$ ficamos com

$$\frac{1}{s_{01}^3} = (1 + \rho)^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{s_{03}^3} = (1 + \rho r)^2 \quad (2.6)$$

Com (2.5) e (2.6) temos um sistema de quatro equações e quatro variáveis sujeito às restrições $\rho + 1 > 0$ e $r\rho + 1 > 0$. Para eliminar ρ de (2.6) multiplicamos a primeira equação por r^2 e subtraímos a segunda obtendo, após a substituição de s_{01} e s_{03} , a seguinte equação

$$\frac{r^2(2 + r)^6}{(r^2 + r + 1)^3} - \frac{(2 + r)^6}{27} = (r - 1)(r + 1 + 2r\rho)$$

Note que $r = 1$ é raiz da função no lado esquerdo da equação.

Observação 2.3.1 *O caso $r = 1$ corresponde à situação onde a massa nula está no baricentro do triângulo ($\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$).*

Restringindo $r \neq 1$ temos

$$\rho = \frac{K - r - 1}{2r} \quad \text{onde} \quad K = \frac{(2 + r)^6}{r - 1} \left[\frac{r^2}{(r^2 + r + 1)^3} - \frac{1}{27} \right]$$

Inserindo ρ na primeira das equações (2.6) temos que r é solução da equação

$$4r^2(2 + r)^6 - (K + r - 1)^2(r^2 + r + 1)^3 = 0$$

cujas raízes reais são as mesmas da equação polinômial

$$\begin{aligned}
& r^{22} + 32r^{21} + 492r^{20} + 4850r^{19} + 34414r^{18} + 186966r^{17} + 807123r^{16} + 2832072r^{15} \\
& + 8178633r^{14} + 19515898r^{13} + 38346449r^{12} + 61333620r^{11} + 78105155r^{10} \\
& + 75960226r^9 + 51510123r^8 + 17702646r^7 - 5829747r^6 - 11099196r^5 - 6097493r^4 \\
& - 1454626r^3 - 43302r^2 + 29156r + 1369 = 0
\end{aligned}$$

Utilizando o algoritmo de Sturm (MAPLE) encontramos 8 raízes reais das quais 5 são descartadas por não satisfazerem as restrições $\rho > -1$ e $r\rho > -1$. Os possíveis valores para r são

$$r_2 = 0.121808901 \dots \quad r_3 = -0.8548698758 \dots \quad r_4 = -4.874066483 \dots$$

Com isso determinamos as seguintes soluções do problema

$r_1 :$	$s_{01} = s_{02} = s_{03} = \frac{1}{3}$	$\Delta_1 = -\sqrt{\sqrt{3} - \frac{1}{3}}$ $\Delta_0 = +3\sqrt{\sqrt{3} - \frac{1}{3}}$
$r_2 :$	$s_{01} = 0.2524717627$ $s_{03} = 0.6663596952$	$\Delta_1 = -1.801065875$ $\Delta_3 = -0.219385855$ $\Delta_0 = +3.821517607$
$r_3 :$	$s_{01} = 0.6679762561$ $s_{03} = 2.2877658650$	$\Delta_1 = -0.8522371548$ $\Delta_3 = +0.7285518709$ $\Delta_0 = +0.9759224387$
$r_4 :$	$s_{01} = 2.4070019650$ $s_{03} = 0.3631847754$	$\Delta_1 = +0.504743893$ $\Delta_3 = -2.460155289$ $\Delta_0 = +1.450667505$

Para cada eixo de simetria do triângulo Lagrangeano temos 4 pontos de equilíbrio para a massa nula. Observando que o baricentro é comum aos três eixos contamos um total de $9+1=10$ configurações centrais para o problema de $3+1$ corpos com massas iguais no plano, sendo 7 não-convexas e 3 convexas.

2.3.2 Problema restrito dos cinco corpos em dimensão 3

Os determinantes Q_{ijk} serão nulos se, e somente se, a menos da enumeração dos corpos, tivermos

$$\Delta_1 = \Delta_2 \text{ e } \Delta_3 = \Delta_4 \quad (\text{I})$$

ou

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 \quad (\text{II})$$

Simetria I: Temos $s_{01} = s_{02}$ e $s_{03} = s_{04}$. Seguindo a estratégia em [5], vamos fazer $\Delta_1 = \delta(1+r)$ e $\Delta_3 = \delta(-1+r)$ de modo que

$$\Delta_0 = -4\delta r$$

As equações $t_0 = t_1 = t_3$ fornecem o sistema

$$\text{I.1} \quad \begin{cases} (s_{01} - s_{03})r = -\frac{1}{2} \\ -(1+3r)s_{01} + (1-r)s_{03} = \frac{1-3r}{2} \end{cases}$$

As equações $S_{ij} = -s_{ij}^a + 1$ neste problema ficam

$$\text{I.2} \quad \begin{cases} \frac{1}{s_{01}^{3/2}} = 1 + \rho(1+r) \\ \frac{1}{s_{03}^{3/2}} = 1 + \rho(-1+r) \end{cases}$$

onde fizemos $\rho = 4\delta^2 r$. As configurações centrais são as soluções do sistema acima de 4 equações e 4 incógnitas $(r, \rho, s_{01}, s_{03})$ sujeitas às restrições

$$r \neq 0 \quad 1 + \rho(-1+r) > 0 \quad 1 + \rho(1+r) > 0$$

A primeira é devida ao posto da configuração ser 3 e as outras duas se devem ao fato de que $s_{ij}^a > 0$.

Resolvendo I.1 para s_{01} e s_{03} obtemos

$$s_{01} = \frac{3r^2 - 2r + 1}{8r^2} \quad \text{e} \quad s_{03} = \frac{3r^2 + 2r + 1}{8r^2}$$

Devemos evitar o expoente fracionário elevando as equações I.2 ao quadrado

$$\frac{1}{s_{01}^3} = (1 + \rho(1+r))^2$$

$$\frac{1}{s_{03}^3} = (1 + \rho(-1 + r))^2 \quad \text{I.2'}$$

Para extrair uma expressão de ρ em função de r multiplicamos a primeira por $(1 - r)^2$ e a segunda por $(1 + r)^2$. Em seguida subtraímos a primeira da segunda e substituímos $s_{01}(r)$ e $s_{03}(r)$ para obter

$$(r^2 - 1)\rho = K - r$$

onde

$$K = \frac{1024r^7(7r^4 - 2r^2 - 1)}{(3r^2 - 2r + 1)^3(3r^2 + 2r + 1)^3}$$

Se $r = \pm 1$ teríamos, por exemplo, em I.2' $s_{01} = 1$ e em I.1 $s_{01} = 3/4$. Contradição! Assumimos então $r \neq \pm 1$ e assim ρ tem uma expressão bem definida em função de r . Agora inserimos ρ na primeira das equações I.2' e, fazendo as devidas simplificações, a equação final é equivalente à equação polinomial

$$10077696r^{26} - 531441r^{24} - 53208556r^{22} + 29718094r^{20} + 11588260r^{18} - 2955215r^{16} \\ - 524376r^{14} + 189444r^{12} + 34408r^{10} + 4577r^8 - 188r^6 - 114r^4 - 12r^2 - 1 = 0$$

Fazendo uso do algoritmo de Sturm (MAPLE) encontramos 6 raízes reais $\pm r_1, \pm r_2, \pm r_3$ sendo que r_2 fere as restrições $1 + \rho(1 + r) > 0$ e $1 + \rho(-1 + r) > 0$. Os valores possíveis para r são

$$r_1 = \pm 0.3872384014 \quad r_3 = \pm 1.370862272$$

Além disso, as equações de s_{01} e s_{03} apresentam simetria frente a transformação $r \mapsto -r$. Temos então, a menos de uma troca de índices apenas duas configurações centrais com simetria do tipo I

$r_1 :$	$s_{01} = 0.562994176$	$\Delta_0 = +1.235570806$
	$s_{03} = 1.854188433$	$\Delta_1 = -1.106573666$
		$\Delta_3 = +0.488788263$
$r_3 :$	$s_{01} = 0.2591484536$	$\Delta_0 = +3.9011371610$
	$s_{03} = 0.6238823954$	$\Delta_1 = -1.6867228570$
		$\Delta_3 = -0.2638457233$

Simetria II: Temos $s_{01} = s_{02} = s_{03}$. Vamos fazer $\Delta_4 = r\Delta_1$ de modo que $\Delta_0 = -(3 + r)\Delta_1$. As equações $t_0 = t_1 = t_4$ implicam no sistema

$$\text{II.1} \quad \begin{cases} (-s_{01} + s_{04})(3 + r) = 1 - r \\ (6 + r)s_{01} + rs_{04} = 2 + r \end{cases}$$

Ao passo que as relações $\Delta_0\Delta_i = -s_{0i}^{-3/2} + 1$ equivalem a

$$\text{II.2} \quad \{ s_{01}^{-3} = (1 + \rho)^2 \quad \text{e} \quad s_{04}^{-3} = (1 + \rho r)^2$$

onde fizemos $\rho = (3 + r)\Delta_1^2$. As restrições sobre as incógnitas r e ρ são $r \neq -3$ (posto da configuração) e $1 + \rho > 0$ e $1 + r\rho > 0$.

Resolvemos o sistema II.1 para s_{01} e s_{04} e obtemos

$$s_{01} = \frac{r^2 + 2r + 3}{(3 + r)^2} \quad s_{04} = \frac{6}{(3 + r)^2}$$

Agora, multiplicamos a primeira das equações II.2 por r^2 e subtraímos a segunda obtendo

$$\frac{r^2}{s_{01}^3} - \frac{1}{s_{04}^3} = (r - 1)(r + 1 + 2r\rho)$$

A solução $r = 1$ corresponde à situação em que o corpo de massa nula está no bari-centro do tetraedro. Considerando portanto $r \neq 1$ e substituindo s_{01} e s_{04} temos ρ em função de r dado pela expressão

$$\rho = \frac{K - r - 1}{2r} \quad \text{onde } K = -\frac{1}{216} \frac{(r - 1)(r^4 + 8r^3 + 36r^2 + 108r + 27)(3 + r)^6}{(r^2 + 2r + 3)^3}$$

a qual inserida na primeira equação em II.2 fornece uma nova equação em r que é equivalente ao polinômio

$$\begin{aligned} &191850201 + 2564734266r + 7570731339r^2 + 2940246540r^3 - 23860106577r^4 - 56617690230r^5 \\ &- 64508407371r^6 - 42550400304r^7 - 13108660758r^8 + 4393493460r^9 + 8201201886r^{10} \\ &+ 5687558856r^{11} + 2676120174r^{12} + 957915396r^{13} + 272281338r^{14} + 62542800r^{15} \\ &+ 11647341r^{16} + 1744434r^{17} + 206119r^{18} + 18572r^{19} + 1203r^{20} + 50r^{21} + r^{22} = 0 \end{aligned}$$

Novamente, com o auxílio do algoritmo de Sturm (Maple) determinamos 8 raízes reais dentre elas 5 são descartadas por não satisfazerem as restrições $\rho > -1$ e $r\rho > -1$. Os possíveis valores para r são

$$r_2 = -7.494424564.. \quad r_3 = -1.332058078.. \quad r_4 = 0.4692200276..$$

Tais valores fornecem as seguintes configurações centrais com simetria II

$r_1 :$	$s_{01} = s_{02} = s_{03} = s_{04} = \frac{3}{8}$	$\Delta_1 = -\frac{1}{6}\sqrt{16\sqrt{6}-9}$ $\Delta_0 = +\frac{2}{3}\sqrt{16\sqrt{6}-9}$
$r_2 :$	$s_{01} = 2.187023453$ $s_{04} = 0.297031877$	$\Delta_1 = +0.392051847$ $\Delta_4 = -2.938202992$ $\Delta_0 = +1.762047451$
$r_3 :$	$s_{01} = 0.758533292$ $s_{04} = 2.156698328$	$\Delta_1 = -0.5549600183$ $\Delta_4 = +0.7392389753$ $\Delta_0 = +0.9256410797$
$r_4 :$	$s_{01} = 0.3455287919$ $s_{04} = 0.4985257098$	$\Delta_1 = -1.0634589110$ $\Delta_4 = -0.4989962196$ $\Delta_0 = +3.6893729530$

As configurações com simetria do tipo I são aquelas em que a massa nula está sobre as 3 retas que unem pontos médios de arestas opostas no tetraedro. Em cada uma dessas retas de simetria temos quatro configurações perfazendo um total 12 configurações centrais com simetria tipo plano. Nas configurações centrais do tipo II a massa nula está situada nos eixos de simetria do tetraedro que passam por um vértice e cruzam a face oposta perpendicularmente. São 4 eixos e 4 posições de equilíbrio sobre cada um, sendo que, o baricentro do tetraedro é comum aos 4 eixos. Temos, portanto, $4 \cdot 3 + 1 = 13$ configurações centrais com simetria tipo eixo. Podemos então enunciar o

Teorema 2.3.2 *O problema restrito espacial de 4+1 corpos com massas iguais possui 25 configurações centrais dentre as quais 15 são não-convexas.*

A importância maior deste trabalho reside na nova abordagem de problemas restritos utilizando as técnicas algébricas expostas em [1]. Se compararmos com os resultados de Lindow e Pedersen, ganhamos aqui em generalidade, pois o resultado de simetria é válido para dimensões maiores, e no uso econômico de instrumentos numéricos, os quais são aplicados como último recurso para calcular as raízes reais de um polinômio de grau elevado, depois da existência das raízes ser provada por algoritmos rigorosos.

Capítulo 3

Bifurcação de configurações centrais num problema de 5 corpos no espaço

3.1 Introdução

Nossa pesquisa se concentra na determinação de configurações centrais de n corpos em dimensão $n - 2$, mais especificamente para $n = 4$ e 5 . Em [1] e [2] há uma série de resultados acerca dessa questão tais como existência de simetrias para massas iguais e o cálculo algébrico das respectivas configurações. Dentre as situações estudadas por Albouy, uma permaneceu parcialmente em aberto:

“Toda configuração central de cinco massas iguais no espaço é simétrica”.

Provou-se o teorema para as configurações centrais convexas mas, utilizando a mesma metodologia do simplexo, (ver [1]) não foi possível demonstrar o teorema para as não-convexas. O fato de que um método tão eficaz na determinação de simetrias não funcione numa situação tão *suigeneris* nos leva a pensar que ou o método do simplexo pode ser melhorado e aplicado numa forma alternativa ou que, de fato, haja configurações centrais não-convexas sem simetrias.

A questão investigada nesta seção versa sobre bifurcações sofridas por uma configuração central quando da variação de um parâmetro (massa) do sistema. Estudaremos

o caso de 4 corpos de massa unitária nos vértices de um tetraedro regular e um corpo de massa variável situado no baricentro do poliedro. Tal configuração é central independente do valor da quinta massa (m). Mas é possível que para um determinado valor de m ocorra bifurcação dessa configuração originando outras configurações centrais do problema de 5 corpos. Tarefa semelhante foi executada em [12] onde trabalhando com o potencial de Newton e executando uma análise de bifurcação, determinou-se apenas 4 bifurcações que apresentavam simetria tipo eixo.

Nossa primeira intenção era verificar se configurações centrais sem simetrias ocorriam como bifurcações da solução tetraedral utilizando potenciais mais gerais que o newtoniano. Uma resposta positiva acusaria que o método do simplexo não é capaz de demonstrar o teorema citado acima uma vez que, a prova da simetria das configurações centrais com massas iguais usa somente as propriedades $\varphi' > 0$ e $\varphi'' < 0$ da família homogênea, à qual, o potencial de Newton pertence. No entanto, em vez de soluções sem simetria, encontramos que, além das soluções de [12], novas soluções com simetria planar ocorrem como bifurcações definidas numa vizinhança à esquerda de um determinado valor m_c . Na demonstração desse resultado, vamos trabalhar com as equações (1.6) e (1.7) que definem as configurações de Dziobek e aplicar a redução de Liapunov-Schmidt usando a simetria das equações.

3.2 Definições básicas e resultados sobre grupos de simetria

Seja Γ um grupo de Lie e $\mathbb{V}$ um espaço vetorial real de dimensão finita.

Definição 3.2.1 *Uma ação linear de Γ sobre $\mathbb{V}$ é uma aplicação contínua*

$$\begin{aligned}\Gamma \times \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{V} \\ (\gamma, v) &\mapsto \gamma \cdot v\end{aligned}$$

tal que

i) se $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ então $\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot v) = (\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot v$

ii) para cada $\gamma \in \Gamma$ a aplicação $\rho_\gamma : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ definida por $\rho_\gamma(v) = \gamma \cdot v$ é linear.

A aplicação $\rho : \Gamma \rightarrow GL(\mathbb{V})$ é chamada uma *representação de Γ sobre $\mathbb{V}$* .

Exemplo 3.2.2 A ação de S_n (grupo das permutações de n elementos) sobre $\mathbb{R}^n$ dada por

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

é linear e ρ_σ é dado por uma matriz elementar resultante da permutação segundo σ das linhas da matriz identidade I_n . Isto é, por exemplo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \rho_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

No que segue, a ação de Γ sobre $\mathbb{V}$ é linear.

Definição 3.2.3 se Σ é um subgrupo de Γ definimos

$$\text{Fix}(\Sigma) = \{v \in \mathbb{V} / \sigma v = v \text{ para todo } \sigma \in \Sigma\}$$

Definição 3.2.4 O subgrupo de isotropia (ou grupo de simetrias) de $v \in \mathbb{V}$ é o conjunto

$$\Sigma_v = \{\gamma \in \Gamma : \gamma v = v\} \quad (3.1)$$

Definição 3.2.5 Um subespaço $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ é Γ -invariante se $\gamma w \in \mathbb{W}$ para todo $w \in \mathbb{W}$ e $\gamma \in \Gamma$.

A demonstração do seguinte resultado leva em conta integração invariante de Haar sobre grupos de Lie compactos e será omitida.

Proposição 3.2.6 Seja Γ compacto agindo linearmente sobre $\mathbb{V}$. Então existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ sobre $\mathbb{V}$ tal que para todo $\gamma \in \Gamma$ a matriz ρ_γ é ortogonal.

Exemplo 3.2.7 Se $\Gamma = S_n$ então $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma = \langle \cdot, \cdot \rangle$ produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$.

Proposição 3.2.8 *Suponha que Γ é compacto e seja $\mathbb{W}$ subespaço Γ -invariante. Então existe um subespaço Γ -invariante $\mathbb{U}$ tal que*

$$\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{U}$$

Demonstração: Seja $\mathbb{U} = \mathbb{W}^\perp$ onde a ortogonalidade é tomado com relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$. Temos que $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{U}$ e, se $\gamma \in \Gamma$ e $u \in \mathbb{U}$ então

$$\langle \gamma u, w \rangle_\Gamma = \langle \gamma u, \gamma \gamma^{-1} w \rangle_\Gamma = \langle u, \gamma^{-1} w \rangle_\Gamma = 0$$

para todo $w \in \mathbb{W}$. Ou seja, $\mathbb{U}$ é Γ -invariante. ■

Definição 3.2.9 *A ação de Γ sobre $\mathbb{V}$ é irredutível se os únicos subespaços Γ -invariantes são $\{0\}$ e $\mathbb{V}$. Um subespaço $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ é Γ -irredutível se $\mathbb{W}$ é Γ -invariante e a ação de Γ sobre $\mathbb{W}$ é irredutível.*

Exemplo 3.2.10 *(trivial) a ação de $\mathcal{O}(2)$ sobre $\mathbb{R}^2$ é irredutível.*

Definição 3.2.11 *Uma aplicação $g : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ é Γ -equivariante se $g(\gamma v) = \gamma g(v)$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v \in \mathbb{V}$.*

Exemplo 3.2.12 *Se $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um operador linear S_n -equivariante então em relação à base canônica ele é dado por uma matriz do tipo*

$$A = \begin{pmatrix} x & y & \dots & y \\ y & x & \dots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \dots & x \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (3.2)$$

Com efeito, se $(\sigma A)_{ij} = b_{ij}$ e $(A\sigma)_{ij} = c_{ij}$ então

$$b_{ij} = a_{\sigma(i)j} \quad e \quad c_{ij} = a_{i\sigma^{-1}(j)}$$

Assim, a equação $A = \sigma A \sigma^{-1}$ implica em $a_{ij} = a_{\sigma(i)\sigma(j)}$. Variando os índices sobre $\{1, \dots, n\}$ e as permutações sobre S_n vê-se que A tem a estrutura (3.2). Por indução sobre n prova-se que o determinante de uma tal matriz é $(x + (n-1)y)(x-y)^{n-1}$.

Definição 3.2.13 Uma representação de um grupo Γ sobre $\mathbb{V}$ é absolutamente irredutível se os únicos operadores lineares de $\mathbb{V}$ que comutam com Γ são os múltiplos da identidade.

Exemplo 3.2.14 Ação de S_4 sobre $\mathbb{R}^3$: o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido pela equação linear $\sum x_i = 0$ é S_4 -invariante. Considere a seguinte base ortogonal $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, (1, 1, 1, 1)\}$ onde

$$u_1 = (-1, 1, -1, 1) \quad u_2 = (-1, -1, 1, 1) \quad u_3 = (1, -1, -1, 1)$$

Em relação à essa base, a ação de S_4 sobre $\{x : \sum x_i = 0\}$ é dada pela multiplicação das coordenadas $[x]_{\mathcal{B}}$ com matrizes 3×3 do tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{etc.} \dots$$

isto é, matrizes cujas linhas são permutações das linhas da identidade 3×3 e que possuem duas entradas negativas ou três positivas. Tal ação é absolutamente irredutível. Com efeito, as matrizes que comutam com $\sigma \in S_3 \subset S_4$ são do tipo

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Exigindo que esta matriz comute com, por exemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in S_4$$

encontramos $b = -b$.

Lema 3.2.15 Se a ação de Γ sobre $\mathbb{V}$ é absolutamente irredutível então ela é irredutível.

Demonstração: Supondo que a ação de Γ não é irredutível, existe um subespaço próprio Γ -invariante $\mathbb{W} \neq \{0\}$. Seja $\mathbb{W}^\perp$ seu complemento invariante de acordo com a proposição (3.2.8). Facilmente verifica-se que a projeção $\pi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ comuta com Γ e não é múltiplo da identidade. Ou seja, a ação não é absolutamente irredutível. ■

Lema 3.2.16 *Seja $g : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ uma aplicação de classe C^1 e equivariante. Então para todo subgrupo $\Sigma \subset \Gamma$ tem-se*

$$g(\text{Fix}(\Sigma)) \subseteq \text{Fix}(\Sigma)$$

Proposição 3.2.17 *Se $x \in \text{Fix}(\Gamma)$ e g é Γ -equivariante então*

- a) $Dg(x)$ é uma transformação linear Γ -equivariante*
- b) $\ker\{Dg(x)\}$ é subespaço Γ -invariante*
- c) $\text{Im}\{Dg(x)\}$ é subespaço Γ -invariante*

Demonstração: Derivando a identidade $g(\gamma v) = \gamma g(v)$ em relação a v no ponto x e usando que $x \in \text{Fix}(\Gamma)$ obtemos a). Se $u \in \ker\{Dg(x)\}$ então $Dg(x) \cdot \gamma u = \gamma Dg(x)u = \gamma 0 = 0$ (ação linear) donde $\gamma u \in \ker\{Dg(x)\}$. Finalmente, se $w = Dg(x)v \in \text{Im}\{Dg(x)\}$ então $\gamma w = Dg(x)\gamma v \in \text{Im}\{Dg(x)\}$ provando c). ■

Suponha que a ação de Γ sobre $\mathbb{V}$ é absolutamente irreduzível e seja $g : \mathbb{V} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}$ uma aplicação Γ -equivariante com $g(0, \epsilon) = 0$ e $D_v g(0, 0) = 0$. Pela proposição **(3.2.17a)** a matriz $D_v g(0, \epsilon) = c(\epsilon) \cdot \text{Id}$. Seja Σ um subgrupo de isotropia com $\dim((\text{Fix}(\Sigma))) = 1$. Segue do lema **(3.2.16)** que a restrição do domínio de $g(v, \epsilon)$ a $\text{Fix}(\Sigma)$ define um problema unidimensional

$$\begin{aligned} g : \text{Fix}(\Sigma) \times \mathbb{R} &\rightarrow \text{Fix}(\Sigma) \\ (tv_0, \epsilon) &\mapsto h(t, \epsilon)v_0 \end{aligned}$$

onde $h(0, 0) = 0$. Pela equivariância de g o vetor $g(0, \epsilon) \in \text{Fix}(\Gamma)$ e portanto $h(0, \epsilon) = 0$ para todo ϵ . A fórmula de Taylor fornece

$$g(tv_0, \epsilon) = k(t, \epsilon)tv_0 \tag{3.3}$$

Derivando (3.3) em relação a t tem-se

$$dg(0, \epsilon)v_0 = k(0, \epsilon)v_0$$

donde $c(\epsilon) = k(0, \epsilon)$. Se $c'(0) \neq 0$ então pelo teorema das funções implícitas existe uma única solução $(t, \epsilon(t))$ do problema $g(tv_0, \epsilon) = 0$. Além disso, o subgrupo de isotropia de tv_0 é exatamente Σ .

Observação 3.2.18 *Esse resultado de teoria de bifurcação é citado em [17] como “lema do ramo equivariante”. Mais adiante, faremos uma aplicação ao problema tetraedral de cinco corpos para garantir a existência de novas configurações centrais.*

3.3 Redução de Liapunov-Schmidt sem simetria

Seja $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação C^1 e considere o problema dado pelo sistema de equações

$$\Phi(v, \epsilon) = 0 \quad (3.4)$$

Assumindo que $\Phi(0, 0) = 0$ nosso interesse é descrever o conjunto solução de (3.4), na forma $(v(\epsilon), \epsilon)$ numa vizinhança de $(0, 0)$. Seja $n - k = \text{posto}(D_v\Phi(0, 0))$ onde a notação $D_v\Phi$ significa a (matriz da) derivada de Φ em relação à variável $v \in \mathbb{R}^n$. Se $k = 0$ então pelo teorema das funções implícitas existe uma única solução $v = v(\epsilon)$ de (3.4).

Suponha $k > 0$ e denotemos $L = D_v\Phi(0, 0)$. Podemos efetuar a decomposição do $\mathbb{R}^n$ de saída e de chegada através das respectivas somas diretas

$$\mathbb{R}^n = \ker\{L\} \oplus M \quad (3.5)$$

$$\mathbb{R}^n = N \oplus \text{Im}\{L\} \quad (3.6)$$

Sejam $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Im}\{L\}$ e $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \ker\{L\}$ as respectivas projeções. O sistema (3.4) é, agora, equivalente ao par de equações definidas sobre $\ker\{L\} \times M \times \mathbb{R}$

$$P\Phi(u + w, \epsilon) = 0 \quad (3.7)$$

$$(\text{Id} - P)\Phi(u + w, \epsilon) = 0 \quad (3.8)$$

onde fizemos $v = u + w$ com $u = Qv$ e $w = (\text{Id} - Q)v$. A derivada da expressão (3.7) com respeito a w é aplicação linear

$$PD_v\Phi(u + w, \epsilon) : M \rightarrow \text{Im}L$$

que no ponto $(0, 0, 0)$ se reduz a $L : M \rightarrow \text{Im}L$. Esta, por sua vez, é inversível. Pelo teorema das funções implícitas, existe uma vizinhança $\Omega \subset \ker\{L\} \times \mathbb{R}$ de $(0, 0)$ e uma

única função $w = W(u, \epsilon)$ de classe C^1 definida sobre Ω satisfazendo a condição $W(0, 0) = 0$ e a equação (3.7).

Observação 3.3.1 *Derivando a identidade $P\Phi(u + W(u, \epsilon), \epsilon) = 0$ com respeito a u no ponto $(0, 0) \in \Omega$ temos, para todo $\vec{u} \in \ker\{L\}$*

$$0 = P \cdot L \cdot (I + D_u W(0, 0))\vec{u} = L \cdot (I + D_u W(0, 0))\vec{u} = L \cdot D_u W(0, 0)\vec{u}$$

Uma vez que L é não-singular sobre M , resta que $D_u W(0, 0) = 0$ sobre $\ker\{L\}$.

Devido à unicidade da função W temos agora que, numa certa vizinhança suficientemente pequena de $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, (v, ϵ) é solução de (3.4) se, e somente se, $(u, \epsilon) \in \Omega$ é solução da *equação de bifurcação*

$$\phi(u, \epsilon) = (\text{Id} - P)\Phi(u + W(u, \epsilon), \epsilon) = 0 \quad (3.9)$$

Se $\{u_1, \dots, u_k\}$ e $\{u_1^*, \dots, u_k^*\}$ são bases de $\ker\{L\}$ e N , respectivamente, então definindo $g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ por

$$g_i(x_1, \dots, x_k, \epsilon) = \langle u_i^*, \phi(x_1 u_1 + \dots x_k u_k, \epsilon) \rangle \quad (3.10)$$

e lembrando que $\phi(u, \epsilon) \in N$, temos que

$$g(x, \epsilon) = 0 \text{ se, e somente se, } \phi(x_1 u_1 + \dots x_k u_k, \epsilon) = 0.$$

Dessa maneira, o problema fica reduzido ao estudo de um sistema com k equações a k variáveis e um parâmetro.

Observação 3.3.2 *A derivada $D_x g(0, 0) = 0$. Com efeito, derivando (3.10) em relação a x obtemos*

$$D_{x_j} g_i(x, \epsilon) = \langle u_i^*, (Id - P)D_v \Phi(u + W(u, \epsilon), \epsilon) \cdot (u_j + D_u W(u, \epsilon) \cdot u_j) \rangle$$

Segundo a observação (3.3.1), no ponto $(0, 0)$ a expressão acima se anula, para qualquer $i, j \in \{1, \dots, k\}$.

3.4 Redução de Liapunov-Schmidt com simetria

Vamos agora admitir que Γ é um grupo de Lie compacto e Φ é Γ -equivariante, isto é

$$\Phi(\gamma v, \epsilon) = \gamma \Phi(v, \epsilon) \quad (3.11)$$

É fácil ver que $D_\epsilon \Phi(0, 0) \in \text{Fix}(\Gamma)$. Além disso, pelas proposições (3.2.8) e (3.2.17) as decomposições (3.5) e (3.6) podem ser feitas tomando: $M = \ker\{L\}^\perp$ e $N = \text{Im}\{L\}^\perp$. Nessas condições podemos demonstrar a

Proposição 3.4.1 *A função $W(u, \epsilon)$ obtida no processo de redução é Γ -equivariante.*

Demonstração: Inicialmente afirmamos que $P : N \oplus \text{Im}\{L\} \rightarrow \text{Im}\{L\}$ comuta com Γ . Com efeito, $\gamma \cdot P(v) = \gamma \cdot P(u + w) = \gamma w = P(\gamma(w)) = P(\gamma u + \gamma w) = P(\gamma v)$ onde as passagens são justificadas no fato de que N e $\text{Im}\{L\}$ são subespaços invariantes.

Agora, definindo a função

$$W_\gamma(u, \epsilon) = \gamma^{-1} W(\gamma u, \epsilon)$$

e inserindo-a na expressão (3.7) obtemos

$$P\Phi(u + W_\gamma(u, \epsilon), \epsilon) = P\Phi(\gamma^{-1}(\gamma u + W(\gamma u, \epsilon)), \epsilon) = \gamma^{-1} \cdot P\Phi(\gamma u + W(\gamma u, \epsilon), \epsilon) = 0$$

Ou seja, $W_\gamma(u, \epsilon)$ resolve a equação (3.7) Pela unicidade da solução W temos que $W(\gamma u, \epsilon) = \gamma W(u, \epsilon)$. ■

Corolário 3.4.2 *A aplicação (3.9) $\phi : \ker\{L\} \times \mathbb{R} \rightarrow N$ que define o problema de bifurcação é Γ -equivariante.*

Demonstração: Pela proposição acima, pela linearidade de γ e pela equivariância de P segue que

$$\begin{aligned} \phi(\gamma u, \epsilon) &= (I - P)\Phi(\gamma u + W(\gamma u, \epsilon), \epsilon) = (I - P)\Phi(\gamma u + \gamma W(u, \epsilon), \epsilon) \\ &= \gamma(I - P)\Phi(u + W(u, \epsilon), \epsilon) = \gamma\phi(u, \epsilon). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Por um processo indicado em [16] é possível fazer uma *escolha consistente* de bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}^*$ para $\ker\{L\}$ e $\text{Im}\{L\}^\perp$, respectivamente, de modo que para todo $\gamma \in \Gamma$ agindo sobre esses dois subespaços tenhamos

$$\gamma \cdot u_j = \sum a_{ij}(\gamma) u_i$$

$$\gamma \cdot u_j^* = \sum a_{ij}(\gamma) u_i^*$$

Em relação à essas bases, a equação de bifurcação satisfaz

$$g(A(\gamma)x, \epsilon) = A(\gamma)g(x, \epsilon) \quad (3.12)$$

Para verificar a propriedade (3.12), note que $g(x, \epsilon) = [\mathcal{S}] \cdot [\phi(u, \epsilon)]_{\mathcal{B}^*}$ onde $[\mathcal{S}]_{ij} = \langle u_i^*, u_j^* \rangle$ e $[\phi]_{\mathcal{B}^*}$ significa coordenadas de ϕ na base $\mathcal{B}^*$. Usamos então a equivariância de ϕ e o fato de que γ é ortogonal para obter

$$g(A(\gamma)x, \epsilon) = [\mathcal{S}] \cdot [\phi(\gamma u, \epsilon)] = [\mathcal{S}] \cdot A(\gamma) \cdot [\phi(u, \epsilon)] = A(\gamma) \cdot [\mathcal{S}] \cdot [\phi(u, \epsilon)] = A(\gamma)g(x, \epsilon)$$

3.5 Bifurcações da configuração tetraedral

Considere a configuração de cinco corpos dada por um tetraedro regular contendo 4 massas unitárias nos vértices e uma massa variável m localizada no baricentro. Tal configuração de Dziobek é classificada como *não-convexa* por conter um corpo no fecho convexo dos demais. Nós a indicaremos pelo vetor $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo (1.5).

Em coordenadas distâncias mútuas, $s_{ij} = \|q_i - q_j\|^2$, a configuração é dada por

$$\begin{cases} s_{ij} = s, & \text{se } i \neq 0 \neq j \\ s_{0j} = s', & \text{se } j \in \{1, 2, 3, 4\} \end{cases} \quad (3.13)$$

De acordo com a definição (1.2.1) devemos ter

$$\Delta_i \Delta_j = m_i m_j \varphi(s_{ij})$$

onde φ é a função em (1.9).

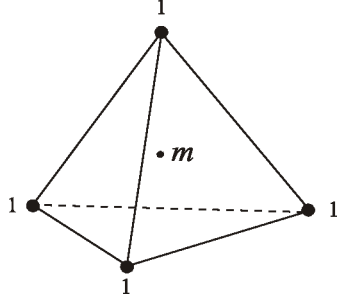


Figura 3.1: família tetraedro regular

É bom ter em mente que φ é uma bijeção crescente e que portanto as coordenadas Δ_i da configuração tetraedral devem satisfazer

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \delta \quad \text{e} \quad \Delta_0 = -4\delta \quad (3.14)$$

Substituindo (3.13) e (3.14) nas expressões das variáveis t_i encontramos

$$\begin{cases} t_0 = -s'\Delta_0 \\ t_i = s'\Delta_0 + 3s\Delta_1, \quad \text{se } i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

De acordo com as equações (1.7), para que a configuração seja central devemos ter

$$\frac{s'}{s} = \frac{3}{8}$$

Observação 3.5.1 *A fração 3/8 também pode ser obtida utilizando a geometria da configuração tetraedral.*

A função inversa de φ é dada pela regra

$$s_{ij} = \psi \left(\frac{\Delta_i \Delta_j}{m_i m_j} \right) = \left(-\frac{\Delta_i \Delta_j}{m_i m_j} + \frac{\lambda}{4 + m} \right)^{\frac{1}{a}}$$

Com isso, a relação s'/s para o vetor $\Delta = \delta(-4, 1, 1, 1, 1)$ fica

$$\frac{\psi \left(\frac{-4\delta^2}{m} \right)}{\psi(\delta^2)} = \frac{3}{8}$$

cuja solução em δ é

$$\delta = \pm \sqrt{\frac{\lambda(\beta - 1)m}{(4 + m)(\beta m + 4)}} \quad \text{onde} \quad \beta = \left(\frac{3}{8}\right)^a$$

O sinal de δ depende da orientação do espaço. Adotaremos o sinal $+$ para $\delta(m)$ (volume orientado negativo do tetraedro). Para efeito de cálculo, tomaremos $\lambda = 1$ e o expoente $a \in (-\infty, -1)$.

O resultado é que $\bar{\Delta}(m) = \delta(m)(-4, 1, 1, 1, 1)$ representa uma família de soluções das equações (1.6) e (1.7), que são funções do valor da massa central m . Substituindo $\Delta_0 = -\sum \Delta_i$ e chamando $x_i = \Delta_i$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) podemos reescrever aquelas equações numa forma mais interessante

$$f_k(x_1, x_2, x_3, x_4, m) = 0 \quad k \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (3.15)$$

onde

$$f_k(x_1, x_2, x_3, x_4, m) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^4 x_j \left\{ \psi\left(\frac{x_0 x_j}{m}\right) - \psi(x_k x_j) \right\} + (x_k - x_0) \psi\left(\frac{x_0 x_k}{m}\right)$$

Definindo a aplicação $F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^4$ por $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ temos a

Proposição 3.5.2 *A aplicação F é S_4 -equivariante.*

Demonstração: Seja $\sigma \in S_4$. Calculando a expressão de $f_k(\sigma \cdot x, m)$ encontramos

$$\begin{aligned} f_k(\sigma \cdot x, m) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^4 x_{\sigma(j)} \left\{ \psi\left(\frac{x_0 x_{\sigma(j)}}{m}\right) - \psi(x_{\sigma(k)} x_{\sigma(j)}) \right\} + (x_{\sigma(k)} - x_0) \psi\left(\frac{x_0 x_{\sigma(k)}}{m}\right) \\ &= f_{\sigma(k)}(x_1, x_2, x_3, x_4, m) \end{aligned}$$

donde $F(\sigma \cdot x, m) = \sigma \cdot F(x, m)$. ■

A solução $\bar{x}(m) = (\delta(m), \dots, \delta(m)) \in \text{Fix}(S_4)$. Pela proposição **(3.2.17a)** a matriz jacobiana $D_x F(\bar{x}(m), m)$ tem a estrutura indicada em (3.2). Se $\eta_1 = D_{x_1} f_1(\bar{x}, m)$ e $\eta_2 = D_{x_1} f_2(\bar{x}, m)$ então seu determinante é o produto $(\eta_1 + 3\eta_2)(\eta_1 - \eta_2)^3$. Após um breve

cálculo obtém-se

$$(\eta_1 + 3\eta_2) = \frac{6(\beta - 1)(4 + m\beta)}{a\beta(4 + m)} \psi(\delta(m)^2) \quad (3.16)$$

$$\eta_1 - \eta_2 = \frac{m\beta(a - 2 + 2\beta) + 6(\beta - 1) + 4a\beta}{a\beta(4 + m)} \psi(\delta(m)^2) \quad (3.17)$$

O primeiro é não-nulo para todo $a < -1$ e $m > 0$. O segundo fator é nulo apenas quando

$$m = m_c = \frac{6 - 6\beta - 4a\beta}{(a - 2 + 2\beta)\beta} \quad (3.18)$$

As derivadas das expressões $\iota(a) = 6 - 6\beta - 4a\beta$ e $\kappa(a) = a - 2 + 2\beta$ com respeito a a são

$$\iota'(a) = \beta(6 \ln \frac{8}{3} - 4 + 4a \ln \frac{8}{3}) \quad \text{e} \quad \kappa'(a) = 1 - 2 \left(\frac{8}{3}\right)^{-a} \ln \frac{8}{3}$$

que são claramente negativas para $a \leq -1$. Sendo $\iota(-1) = 2/3 > 0$ e $\kappa(-1) = 7/3 > 0$ temos que $m_c > 0$ para todo $a \leq -1$.

Observação 3.5.3 *Para o caso newtoniano ($a = -3/2$) o valor de m_c é*

$$\frac{10368 + 1701\sqrt{6}}{54952}$$

encontrado em [12].

Para $m = m_c$ temos

$$\bar{\delta} = \delta(m_c) = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(3 - 3\beta - 2a\beta)(a - 2 + 2\beta)}{(4\beta - 3)(\beta - 1)(1 - 2a)}}$$

Vamos fazer $m = m_c + \epsilon$ e $L = D_x F(\bar{x}(0), 0)$. As equações (3.15) têm um ponto crítico em $(\bar{x}(0), 0)$ onde o posto(L) = 1. Devido à estrutura da matriz (3.2) é fácil ver que

$$\ker\{L\} = \{x \in \mathbb{R}^4 : \sum x_i = 0\} \quad \text{e} \quad \text{Im}\{L\} = \{\kappa(1, 1, 1, 1) : \kappa \in \mathbb{R}\}$$

Uma vez que o produto interno da proposição (3.2.6) é o canônico de $\mathbb{R}^4$, temos $\ker\{L\} = \text{Im}\{L\}^\perp$ e portanto qualquer base de $\ker\{L\}$ é uma escolha consistente. Vamos trabalhar com a base $\mathcal{B}$ do exemplo (3.2.14).

Observação 3.5.4 *Qualquer base de $\ker\{L\}$ serviria aos nossos propósitos. A escolha da base $\mathcal{B}$ se justifica pela simplicidade da representação de S_4 sobre $\ker\{L\}$.*

Se $x = u + w \in \mathbb{R}^4 = \ker\{L\} \oplus \text{Im}\{L\}$ então

$$x = \sum_{i=1}^3 y_i u_i + y_4(1, 1, 1, 1) \quad \text{com} \quad y_4 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i \quad \text{e} \quad y_i = \frac{1}{4} \langle u_i, x \rangle \quad (3.19)$$

Substituindo as coordenadas x_i por y_i no sistema dado pelas equações (3.15) obtemos uma nova equação denotada por $G(y, \epsilon) = 0$. A solução correspondente ao tetraedro é $\bar{y}(\epsilon) = (0, 0, 0, \delta(\epsilon))$ e os subespaços invariantes são $\ker\{L\} = \mathbb{R}^3 \times \{0\}$ e $\text{Im}\{L\} = \{0\} \times \mathbb{R}$ onde agora $L = D_y G(\bar{y}(0), 0)$. A decomposição da equação $G(y, \epsilon) = 0$ fornece

$$PG(y, \epsilon) = \langle (1, 1, 1, 1), G(y, \epsilon) \rangle \cdot (1, 1, 1, 1) = 0$$

$$(\text{Id} - P)G(y, \epsilon) = \sum_{i=1}^3 \langle u_i, G(y, \epsilon) \rangle u_i = 0$$

De acordo com o processo de redução, existe uma única solução de $PG(y, \epsilon) = 0$ na forma $y_4 = W(y_1, y_2, y_3, \epsilon)$ definida numa vizinhança de $(0, 0)$. Inserimos essa solução na segunda equação para obter o problema de bifurcação S_4 -equivariante $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ posto na forma

$$g_i(y_1, y_2, y_3, \epsilon) = \langle u_i, G(y_1, y_2, y_3, W(y_1, y_2, y_3, \epsilon), \epsilon) \rangle = 0 \quad (3.20)$$

com $g(0, \epsilon) = 0$, $Dg(0, 0) = 0$.

Observação 3.5.5 *Decorre da proposição (3.4.1) que a função W é invariante por S_4 , isto é, $W(\sigma y, \epsilon) = W(y, \epsilon)$. Assim*

$$D_y W(0, \epsilon) \in \text{Fix}(S_4) = \{0\}.$$

A ação de S_4 sobre $\mathbb{R}^3$ é absolutamente irredutível. A matriz jacobiana $D_y g(0, \epsilon)$ no ponto $(0, \epsilon)$ é portanto, um múltiplo da identidade. Derivando (g_1, g_2, g_3) com relação a y obtemos o produto de matrizes

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_2 & \eta_2 \\ \eta_2 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_2 \\ \eta_2 & \eta_2 & \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_2 & \eta_2 & \eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que resulta em $4(\eta_1 - \eta_2) \cdot \text{Id}_{3 \times 3}$. A função $c(m) = 4(\eta_1 - \eta_2)$ é dada pela expressão (3.17). Sua derivada com respeito a m no ponto $m = mc$ vale

$$\frac{2\beta(a-2+2\beta)^2}{a(\beta-1)(4\beta-3)} \left(\frac{1}{2} \frac{(a-2+2\beta)}{(\beta-1)(1-2a)} \right)^{\frac{1}{a}} \quad (3.21)$$

que não se anula para $a < -1$.

As hipóteses do “lema do ramo equivariante” estão plenamente verificadas. Assim, para cada subgrupo de isotropia $\Sigma \subset S_4$ com $\dim \text{Fix}(\Sigma) = 1$, existe uma única solução do problema $g(y, \epsilon)$ cujo grupo de simetria é exatamente Σ . Podemos agora enunciar o

Teorema 3.5.6 *Se $\Delta(m)$ é a configuração central de 5 corpos com 4 massas unitárias nos vértices e uma massa variável m no baricentro de um tetraedro regular então existe $m_c > 0$, função do expoente a , tal que a configuração central é não-degenerada para todo $m \neq m_c$. Ainda, definidas para valores de m suficientemente próximos de m_c existem, pelo menos, 7 outras famílias de configurações centrais dentre as quais 4 apresentam simetria tipo eixo e 3 apresentam simetria tipo plano.*

Demonstração: Na ação de S_4 sobre $\mathbb{R}^3$ contamos sete subgrupos de isotropia cujos subespaços fixos são unidimensionais, a saber

$$\Sigma_{(1,1,1)} \quad \Sigma_{(-1,-1,1)} \quad \Sigma_{(-1,1,-1)} \quad \Sigma_{(1,-1,-1)} \quad (3.22)$$

responsáveis pela soluções com simetria tipo eixo e

$$\Sigma_{(1,0,0)} \quad \Sigma_{(0,1,0)} \quad \Sigma_{(0,0,1)} \quad (3.23)$$

responsáveis pelas soluções com simetria tipo plano. ■

A relação entre as soluções de $g(y, \epsilon) = 0$ e de $F(x, \epsilon) = 0$ é explicitada abaixo

- Simetria tipo eixo:

$$\begin{aligned} (y, y, y) \in \text{Fix}(\Sigma_{(1,1,1)}) &\implies (x, x, x, z) \\ (-y, -y, y) \in \text{Fix}(\Sigma_{(-1,-1,1)}) &\implies (z, x, x, x) \end{aligned}$$

$$(-y, y, -y) \in \text{Fix}(\Sigma_{(-1,1,-1)}) \implies (x, x, z, x)$$

$$(y, -y, -y) \in \text{Fix}(\Sigma_{(1,-1,-1)}) \implies (x, z, x, x)$$

- Simetria tipo plano:

$$(y, 0, 0) \in \text{Fix}(\Sigma_{(1,0,0)}) \implies (r, s, r, s)$$

$$(0, y, 0) \in \text{Fix}(\Sigma_{(0,1,0)}) \implies (r, r, s, s)$$

$$(0, 0, y) \in \text{Fix}(\Sigma_{(0,0,1)}) \implies (s, r, r, s)$$

3.6 Cálculos de bifurcação

3.6.1 Simetria tipo eixo

Os cálculos da solução formal até a primeira ordem são feitos impondo que

$$y_i = a_i \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.24)$$

seja solução do sistema (3.20). Expandindo as funções g_i em série de potências e substituindo (3.24) obtém-se

$$g_1(y(\epsilon), \epsilon) = (p \cdot a_1 + q \cdot a_2 a_3) \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.25)$$

$$g_2(y(\epsilon), \epsilon) = (p \cdot a_2 + q \cdot a_1 a_3) \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.26)$$

$$g_3(y(\epsilon), \epsilon) = (p \cdot a_3 + q \cdot a_2 a_1) \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.27)$$

As soluções não triviais para a_1 , a_2 e a_3 são (r, r, r) , $(-r, -r, r)$, $(-r, r, -r)$ e $(r, -r, -r)$ onde $r = -\frac{p}{q}$ tem a seguinte expressão

$$r = \frac{1}{24} \frac{a\beta}{\xi(a)} \sqrt{\frac{(6 - 6\beta - 4a\beta)(a - 2 + 2\beta)^5(4\beta - 3)}{(\beta - 1)^3(1 - 2a)}} \quad (3.28)$$

com

$$\xi(a) = a^3 - 8a^2\beta^2 + 10a^2\beta - 5a^2 - 8a\beta^2 + 9a\beta - a + 8\beta - 4\beta^2 - 4$$

3.6.2 Simetria tipo plano

Escrevendo as soluções como potências de ϵ é possível calcular apenas as soluções com simetria tipo eixo. Se lembrarmos que na demonstração do “lema do ramo equivariante” o parâmetro ϵ era função da variável t , não se pode esperar que as soluções tipo planar apareçam como expansão em ϵ com ordem superior a 1. A proposta é tomar soluções em séries de $(-\epsilon)^{1/2}$ com $\epsilon < 0$, isto é, definir as soluções com simetria planar no domínio $m < m_c$. Seja então $(y(\epsilon), 0, 0)$ com

$$y = b(-\epsilon)^{1/2} + \mathcal{O}((-\epsilon)^{1/2})^2 \quad (3.29)$$

uma solução do problema $g(y_1, y_2, y_3, \epsilon) = 0$.

Observação 3.6.1 *As outras soluções são $(0, y(\epsilon), 0)$ e $(0, 0, y(\epsilon))$*

As equações $g_2 = g_3 = 0$ são trivialmente satisfeitas. No entanto, g_1 deve agora ser expandida até a terceira ordem. Inserindo (3.29) nessa expansão obtemos

$$g(y(\epsilon), \epsilon) = y \cdot ((p - b_1^2 \tilde{q})\epsilon + \dots) \quad (3.30)$$

donde

$$b = \sqrt{\frac{p}{\tilde{q}}} = \sqrt{-\frac{3}{8} \frac{a^2 \beta (6 - 6\beta - 4a\beta)(a - 2 + 2\beta)^3 (4\beta - 3)}{(1 - 2a)(\beta - 1)\zeta(a)}} \quad (3.31)$$

com

$$\begin{aligned} \zeta(a) = & 96 + 36a - 432a\beta + 32a^5\beta^4 - 30a^3 + 120a^2 - 408a^2\beta - 12a^5\beta + \\ & 48a^5\beta^2 - 80a^4\beta^4 + 8a^3\beta^4 + 324a^2\beta^4 + 324a\beta^4 + 1080a\beta^2 + 96a^3\beta^2 - 384\beta^3 + \\ & 780a^2\beta^2 + 27a^4 - 6a^5 - 1008a\beta^3 - 32a^3\beta^3 - 42a^3\beta - 816a^2\beta^3 + 96a^4\beta^3 - \\ & 18a^4\beta + 96\beta^4 + 576\beta^2 - 24a^4\beta^2 - 64a^5\beta^3 - 384\beta \end{aligned}$$

Observação 3.6.2 *Exceto para $\zeta(a)$, pode-se afirmar que todas as expressões no radical em (3.31) são positivas no domínio $(-\infty, -1)$. Para o caso de Newton o sinal de $\zeta(-3/2)$*

é negativo e portanto o coeficiente b está definido num intervalo em torno de $a = -3/2$. Neste ponto o valor numérico de b é

$$b = \sqrt{\frac{233984395358902989}{1615016079497386205} - \frac{1151037003340971009}{25840257271958179280}}\sqrt{6} \approx 0.189128 \dots$$

Cálculos numéricos simples mostram que o intervalo sobre o qual a função $\zeta(a)$ tem sinal negativo é razoavelmente “grande”.

As soluções (3.29) têm a liberdade de poder prolongar-se sobre o intervalo $(0, m_c)$. Porém, uma análise mais aprofundada se faz necessária para avaliar o real domínio dessas famílias de configurações centrais.

Capítulo 4

Simetrias de configurações centrais no problema de 5 corpos no espaço

4.1 Introdução

Em seu artigo [5] com J. Llibre, A. Albouy conseguiu provar que no problema restrito de 1+4 corpos no espaço toda configuração central é simétrica. Entendemos por configurações centrais de 1+4 corpos configurações sem colisões que são um limite de configurações centrais de cinco corpos quando uma das massas tende ao infinito. No capítulo II, com o método do simplexo devidamente adequado à situação, obtivemos o mesmo resultado de simetria no problema restrito de 4+1 corpos. Em e-mails trocados com o professor Albouy, recebemos a seguinte sugestão:

“No meu artigo com Llibre (o numero 6 da habilitation), tem o resultado de simetria para, digamos, 4 massas equais e uma massa central grande (=infinita). Sera que este resultado pode ser estendido ao caso de uma massa central finita, mesmo se for arbitrariamente grande (nem precisaria dar um valor)?”

Uma resposta negativa nos daria também um forte sinal de que o método do simplexo não é útil para evidenciar simetrias de configurações centrais não-convexas de 5 corpos com massas iguais. No entanto, conseguimos mostrar que a resposta à questão levantada

por Albouy é positiva.

4.2 Simetria de configurações centrais não-convexas num problema de cinco corpos.

Teorema 4.2.1 *Considere o problema de 5 corpos numa configuração tridimensional com quatro massas iguais a m e uma quinta massa unitária localizada no fecho convexo daquelas. Se $0 \leq m < \frac{1}{16}$ então toda configuração central desse problema é simétrica.*

Demonstração: Novamente, usaremos a teoria das configurações de Dziobek e a estratégia de mostrar incompatibilidade entre as equações determinantis $Q_{ijk} = 0$ e a ausência de simetria das configurações através do método do simplexo. Vamos adotar $m_1 = 1$ como sendo a massa central unitária e $m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m$ como sendo os corpos em torno de m_1 . Partindo das informações do capítulo I, indicaremos a configuração dos cinco corpos pelo vetor $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5) \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo (1.5). Tendo em vista que a configuração é não-convexa e que

$$s_{ij} = \psi \left(\frac{\Delta_i \Delta_j}{m_i m_j} \right)$$

onde $\psi = \varphi^{-1}$ é uma bijeção, a ausência total de simetria é caracterizada pelas desigualdades

$$\Delta_1 < 0 < \frac{\Delta_2}{m} < \frac{\Delta_3}{m} < \frac{\Delta_4}{m} < \frac{\Delta_5}{m}$$

que por sua vez implicam em

$$\underbrace{S_{15}}_{S_1} < \underbrace{S_{14}}_{S_2} < \underbrace{S_{13}}_{S_3} < \underbrace{S_{12}}_{S_4} < 0 < \underbrace{S_{23}}_{S_5} < \underbrace{S_{24}}_{S_6} < \underbrace{S_{25}}_{S_7} < \underbrace{S_{34}}_{S_8} < \underbrace{S_{35}}_{S_9} < \underbrace{S_{45}}_{S_{10}} \quad (4.1)$$

ou

$$\underbrace{S_{15}}_{S_1} < \underbrace{S_{14}}_{S_2} < \underbrace{S_{13}}_{S_3} < \underbrace{S_{12}}_{S_4} < 0 < \underbrace{S_{23}}_{S_5} < \underbrace{S_{24}}_{S_6} < \underbrace{S_{34}}_{S_7} < \underbrace{S_{25}}_{S_8} < \underbrace{S_{35}}_{S_9} < \underbrace{S_{45}}_{S_{10}} \quad (4.2)$$

onde $S_{ij} = \varphi(s_{ij}) = \frac{\Delta_i \Delta_j}{m_i m_j}$.

Os dez números S_l definem o espaço das 10-uplas $(\dots, s_l, \dots)$ de números reais para os quais existe uma função crescente e convexa ψ tal que $s_l = \psi(S_l)$. Assim, se $(\dots, s_{ij}, \dots)$ é uma configuração central do problema então ela pertence a este espaço. Além disso, sobre esse espaço temos as formas lineares dadas pelos determinantes

$$Q_{ijk} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_i & t_j & t_k \\ \Delta_i & \Delta_j & \Delta_k \end{vmatrix}$$

as quais são nulas sobre configurações centrais ($t_i = t_j$ para todo i, j) e invariantes pela identificação $s \sim \xi s + \eta$, $\xi > 0$ e $\eta \in \mathbb{R}$. Fazendo a equivalência entre s e $\xi s + \eta$ obtemos um espaço afim $\mathcal{H}$ de dimensão 8 no qual a configuração central $(\dots, s_{ij}, \dots)$ está situada no interior do simplexo dado pelos 9 vértices

$$\begin{aligned} A_1 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) & B_2 &= (S_8, S_8, S_8, S_8, S_8, S_8, S_8, S_8, S_9, S_{10}) \\ B_3 &= (S_7, S_7, S_7, S_7, S_7, S_7, S_7, S_7, S_8, S_9, S_{10}) & B_4 &= (S_6, S_6, S_6, S_6, S_6, S_6, S_6, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}) \\ &\vdots & &\vdots \\ B_8 &= (S_2, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}) & B_9 &= (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}) \end{aligned}$$

Observação 4.2.2 *os números S_l que compõem os vértices do simplexo são os listados nas desigualdades (4.1) e (4.2). Perceba que tanto as formas lineares Q_{ijk} como o simplexo são construídos em função dos cinco números Δ_i . Cabe agora mostrar que, para uma determinada faixa de valores de m , ao menos um hiperplano de $\mathcal{H}$, definido por $Q_{ijk} = 0$, não tem interseção com o interior do simplexo e assim concluímos que as configurações contidas aí não correspondem a configurações centrais.*

Uma vez que a 1-forma Q_{123} não depende de s_{45} , podemos descartar a variável S_{10} nas coordenadas dos vértices. Desse modo, ficamos com um simplexo de dimensão 7 com 8 vértices

$$\begin{aligned} A_1 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) & B_2 &= (S_7, S_7, S_7, S_7, S_7, S_7, S_7, S_8, S_9) \\ B_3 &= (S_6, S_6, S_6, S_6, S_6, S_6, S_7, S_8, S_9) & B_4 &= (S_5, S_5, S_5, S_5, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ B_7 = (S_2, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9,) & B_8 = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9) \end{array}$$

Tomando a ordenação (4.1), na qual $S_7 = S_{25}$ e $S_8 = S_{34}$, avaliamos o sinal da 1-forma Q_{123} sobre os vértices acima:

$$\begin{aligned} Q_{123}(A_1) &= -\Delta_5(\Delta_2 - \Delta_1) \\ Q_{123}(B_2) &= -\frac{(2\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5)[\Delta_4(\Delta_3\Delta_4 - \Delta_2\Delta_5) + \Delta_5^2(\Delta_3 - \Delta_2)]}{m} \\ Q_{123}(B_3) &= -\frac{(\Delta_3 - \Delta_2)(\Delta_4\Delta_5\Delta_2 + \Delta_4^2\Delta_2 - \Delta_4^2\Delta_1 - \Delta_5^2\Delta_1)}{m} \\ Q_{123}(B_4) &= -\frac{(\Delta_3 - \Delta_2)(\Delta_2\Delta_3\Delta_4 + \Delta_2\Delta_3\Delta_5 - \Delta_4^2\Delta_1 - \Delta_5^2\Delta_1)}{m} \\ Q_{123}(B_5) &= -\frac{(\Delta_3 - \Delta_2)[mR_5 + P]}{m} & Q_{123}(B_6) &= -\frac{(\Delta_3 - \Delta_2)[mR_6 + P]}{m} \\ Q_{123}(B_7) &= -\frac{(\Delta_3 - \Delta_2)[mR_7 + P]}{m} & Q_{123}(B_8) &= -\frac{(\Delta_3 - \Delta_2)[mR_8 + P]}{m} \end{aligned}$$

onde

$$P = (\Delta_5^2 - \Delta_2\Delta_3)(\Delta_2 + \Delta_3) + (\Delta_4^2 - \Delta_2\Delta_3)(\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5) + \Delta_5^2(\Delta_4 + \Delta_5) > 0$$

$$R_5 = -2\Delta_2(\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5)^2 < 0$$

$$R_6 = -\Delta_1(\Delta_1^2 - \Delta_2^2 - \Delta_3^2 - \Delta_3\Delta_4 - \Delta_3\Delta_5) > 0$$

$$R_7 = -\Delta_1(\Delta_1^2 - \Delta_2^2 - \Delta_3^2 - \Delta_4\Delta_5 - \Delta_4^2) > 0$$

$$R_8 = -\Delta_1(\Delta_1^2 - \Delta_2^2 - \Delta_3^2 - \Delta_4^2 - \Delta_5^2) > 0$$

Sob as condições: $\sum \Delta_i = 0$, $\Delta_1 < 0 < \Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_4 < \Delta_5$ e $\Delta_2\Delta_5 < \Delta_3\Delta_4$ verifica-se que a forma linear Q_{123} é negativa, independentemente do valor de m , sobre todos os vértices, exceto, possivelmente, em B_5 , pois $P > 0$ e $R_5 < 0$.

Considere a seguinte função $f: \mathbb{R}^4 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(a, b, c, d) = \frac{d^2(c + d)}{2a(a + b + c + d)^2}$$

Sobre o domínio $0 < a \leq b \leq c \leq d$ temos a minoração

$$f(a, b, c, d) \geq \frac{d^2 2c}{2a(4d)^2} \geq \frac{1}{16} = f(1, 1, 1, 1) = f_0$$

Assim, se $0 < m < f_0$ teremos

$$mR_5 + P = -R_5 \left(-m - \frac{P}{R_5} \right) > -R_5 (-f_0 + f(\Delta_2, \dots, \Delta_5)) > 0$$

donde $Q_{123}(B_5) < 0$.

Os cálculos mostram que se $0 < m < f_0$ então o hiperplano $Q_{123} = 0$ não tem interseção com o simplexo de configurações assimétricas do tipo (4.1).

Tomamos, agora, a ordenação (4.2), na qual, $S_7 = S_{34}$ e $S_8 = S_{25}$. Avaliando o sinal da 1-forma Q_{123} sobre os vértices obtemos

$$\begin{aligned} Q_{123}(A_1) &= -\Delta_5(\Delta_2 - \Delta_1) & Q_{123}(B_2) &= -\frac{\Delta_5(\Delta_3 - \Delta_2)(-\Delta_1\Delta_5 + \Delta_3\Delta_4)}{m} \\ Q_{123}(B_3) &= -\frac{(\Delta_3 - \Delta_2)(\Delta_2\Delta_4\Delta_5 + \Delta_2\Delta_4^2 - \Delta_4^2\Delta_1 - \Delta_5^2\Delta_1)}{m} \\ Q_{123}(B_4) &= -\frac{(\Delta_3 - \Delta_2)(\Delta_2\Delta_3\Delta_4 + \Delta_2\Delta_3\Delta_5 - \Delta_4^2\Delta_1 - \Delta_5^2\Delta_1)}{m} \\ Q_{123}(B_5) &= -\frac{(\Delta_3 - \Delta_2)[mR_5 + P]}{m} & Q_{123}(B_6) &= -\frac{(\Delta_3 - \Delta_2)[mR_6 + P]}{m} \\ Q_{123}(B_7) &= -\frac{(\Delta_3 - \Delta_2)[mR_7 + P]}{m} & Q_{123}(B_8) &= -\frac{(\Delta_3 - \Delta_2)[mR_8 + P]}{m} \end{aligned}$$

De igual maneira verifica-se que se $0 < m < f_0$ tem-se $Q_{123}(A_1) < 0$ e $Q_{123}(B_i) < 0$ para todo i .

Assim, de acordo com os resultados acima, configurações centrais de Dziobek com $\Delta_1 < 0 < \Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_4 < \Delta_5$ não são possíveis quando $0 < m < f_0$. Nesse caso, para que Δ seja configuração de Dziobek é necessário, mas não suficiente, que $\Delta_2 = \Delta_3$. A configuração possui um plano de simetria. ■

Seguindo [5] podemos ainda considerar configurações não convexas com $\Delta_1 < 0 < \Delta_2 = \Delta_3 < \Delta_4 < \Delta_5$ o que implica em

$$S_{15} < S_{14} < S_{13} < 0 < S_{33} < S_{34} < S_{35} < S_{45}$$

O simplexo é então definido pelos vértices

	s_{15}	s_{14}	s_{13}	s_{12}	s_{23}	s_{24}	s_{34}	s_{35}	s_{45}
$A_1 :$	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$B_2 :$	S_{34}	S_{34}	S_{34}	S_{34}	S_{34}	S_{34}	S_{34}	S_{35}	S_{45}
$B_3 :$	S_{33}	S_{33}	S_{33}	S_{33}	S_{33}	S_{34}	S_{34}	S_{35}	S_{45}
$B_4 :$	S_{13}	S_{13}	S_{13}	S_{13}	S_{33}	S_{34}	S_{34}	S_{35}	S_{45}
$B_5 :$	S_{14}	S_{14}	S_{13}	S_{13}	S_{33}	S_{34}	S_{34}	S_{35}	S_{45}
$B_6 :$	S_{15}	S_{14}	S_{13}	S_{13}	S_{33}	S_{34}	S_{34}	S_{35}	S_{45}

Fazendo $\Delta_2 = \Delta_3$ em Q_{134} e avaliando o sinal dessa 1-forma sobre o 6 vértices acima obtemos

$$\begin{aligned}
Q_{134}(A_1) &= \Delta_5(\Delta_1 - \Delta_3) & Q_{134}(B_2) &= \frac{\Delta_5(\Delta_4 - \Delta_3)(\Delta_1\Delta_5 - \Delta_3\Delta_4)}{m} \\
Q_{134}(B_3) &= \frac{(\Delta_3 - \Delta_4)(6\Delta_3^3 + 3\Delta_5\Delta_3^2 + 2\Delta_3(\Delta_5^2 - \Delta_4^2) + \Delta_5\Delta_4(\Delta_5 - \Delta_3) + \Delta_5^3)}{m} \\
Q_{134}(B_4) &= \frac{(\Delta_3 - \Delta_4)[mT_4 + J]}{m} & Q_{134}(B_5) &= \frac{(\Delta_3 - \Delta_4)[mT_5 + J]}{m} \\
Q_{134}(B_6) &= \frac{(\Delta_3 - \Delta_4)[mT_6 + J]}{m}
\end{aligned}$$

onde

$$J = \Delta_5\Delta_4(\Delta_5 - \Delta_3) + (\Delta_5^3 - \Delta_4\Delta_3^2) + 2\Delta_3(\Delta_5^2 - \Delta_4^2) + \Delta_3^2(\Delta_5 - \Delta_4) + 2\Delta_3^3 > 2\Delta_3^3$$

$$T_4 = -2\Delta_3(2\Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5)^2$$

$$T_5 = -\Delta_1(\Delta_1^2 - 2\Delta_3^2 - \Delta_4^2 - \Delta_5\Delta_4) > 0$$

$$T_6 = -\Delta_1(\Delta_1^2 - 2\Delta_3^2 - \Delta_4^2 - \Delta_5^2) > 0$$

Com exceção de B_4 , o sinal de Q_{134} é negativo em todos os vértices. Como antes, considere a função $g: \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(a, b, c) = \frac{bc(c-a) + 2a^3}{2a(2a+b+c)^2}$$

Sobre o domínio $0 < a \leq b \leq c$ temos duas minorações, a saber

$$g(a, b, c) \geq \frac{bc^2}{4a(2a+b+c)^2} \geq \frac{1}{64} \quad \text{se } a < \frac{c}{2}$$

$$g(a, b, c) \geq \frac{2\frac{c^3}{8}}{2a(2a+b+c)^2} \geq \frac{1}{128} = g_0 \quad \text{se } a \geq \frac{c}{2}$$

Assim, restringindo $0 < m < g_0$ teremos

$$mT_4 + J = -T_4 \left(-m - \frac{J}{T_4} \right) > -T_4 (-g_0 + g(\Delta_3, \Delta_4, \Delta_5)) > 0$$

donde $Q_{134}(B_4) < 0$.

Esses últimos cálculos mostram que uma configuração não-convexa satisfazendo $0 < \Delta_3 < \Delta_4$ não pode ser central. Acrescentando isto ao resultado anterior temos a

Proposição 4.2.3 *Sob as condições do teorema 4.2.1, se $0 \leq m < 1/128$ então as configurações centrais possuem um eixo de simetria.*

Observação 4.2.4 *Note que $1/128$ não é um valor otimizado que garanta a simetria da configuração. Devemos lembrar também que m é a razão entre as massas periféricas e a massa central.*

Bibliografia

- [1] Albouy, A., *Recherches sur le problème des configurations centrales*, Notes Scientifiques et Techniques du Bureau des Longitudes, 1997.
- [2] Albouy, A., *Symétrie des configurations centrales de quatre corps*, C.R.Acad. Sci. Paris, 320, (1995) pp. 217-220
- [3] Albouy, A., *The symmetric central configurations of four equal masses*, Contemporary Math. 198, (1996) pp. 131-135
- [4] Albouy, A., Chenciner, A., *Le problème des N corps et les distances mutuelles*, Inventiones Math., 131 (1998) pp. 151-184
- [5] Albouy, A., Libre J., *Spatial central configurations for the $1+4$ body problem*, Proceedings of an International Conference dedicated to D. Saari, Contemporary Mathematics 292 (2002) pp 1-16
- [6] Albouy, A. *On a paper of Moeckel on Central Configurations*, to appear in Regular and Chaotic Dynamics (2003)
- [7] Long, Y., Sun, S. *Four-Body central configurations with some equal masses*, Arch. Rational Mech. Anal., 162, (2002) pp. 25-44
- [8] Pedersen, P., *Librationen im restringierten Vierkörperproblem*, Dan. Mat. Fys Medd, 21, (1944) 6.
- [9] Meyer, Kenneth R., Schmidt, Dieter S. *Bifurcations of relative equilibria in the 4- and 5-body problem*, Ergodic Theory & Dynamics Systems, 8*, (1988) pp. 215-225

- [10] Arenstorf, R.F., *Central configurations of four bodies with one inferior mass*, Celestial Mechanics, 28, (1982) pp. 9-15
- [11] Simó, C., *Relative equilibrium solutions in the four body problem*, Celestial Mechanics, 18, (1978) pp. 165-184
- [12] Schmidt, D.S., *Central configurations in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$* , Contemporary Mathematics, 81, (1988)
- [13] Hirsch, N. M., Smale, S., *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, New York - San Francisco - London (1974).
- [14] Brouwer, D., Clemence, G. M., *Methods of celestial mechanics*, Academic Press, New York - London (1971).
- [15] Chow, Shui-Nee, Hale, Jack K., *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York (1982)
- [16] Golubitsky, Martin, Schaeffer, David G. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. I, Springer-Verlag, New York (1985)
- [17] Golubitsky, M., Stewart I., Schaeffer D. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. II, Springer-Verlag, New York (1988)