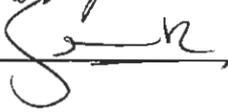
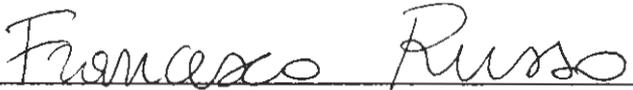


Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Ciências.

Aprovado:   
Orientador

  
  
Fernando Moraes



**UMA FÓRMULA PARA O GRUPO DE WHITEHEAD  
DE UM GRUPO CRISTALOGRÁFICO  
TRIDIMENSIONAL**

*por*  
*Almir Olimpio Alves*

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
*Cidade Universitária – Tels. (081) 3271- 8410 – Fax: (081) 3271-1833*  
RECIFE – BRASIL

Agosto - 2003



Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Secretaria de Pós-Graduação

50670-901 Cidade Universitária - Recife/PE - Fone (5581) 3271- 0839 - Fax (5581) 3271-1833  
[posgrad@dmat.ufpe.br](mailto:posgrad@dmat.ufpe.br)

ATA DE DEFESA DE TESE DE DOUTORADO REALIZADA NO DEPARTAMENTO  
DE MATEMÁTICA DO CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Aos dezoito dias do mês de agosto de dois mil e três , às dez horas, no Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, em seção pública, teve início a defesa de tese, intitulada : “ *Uma fórmula para o grupo de Whitehead de um grupo cristalográfico tridimensional* ” , do aluno **Almir Olimpio Alves** , que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Matemática. A Banca Examinadora, indicada pelo Colegiado da Pós-Graduação em Matemática e aprovada com “Ad-Referendum “ pelas Câmaras de Pesquisa e Pós-Graduação da UFPE, foi composta pelos professores Pedro Ontaneda, Francesco Russo e Marcus Vinícius Wanderley do Departamento de Matemática da UFPE, Fernando Moraes (DF-UFPE) e Jacqueline Rojas (UFPB). O professor Pedro Ontaneda em virtude da sua condição de orientador, presidiu os trabalhos e depois das formalidades de apresentação, convidou o aluno a discorrer sobre o conteúdo da tese. Concluída a explanação, o candidato foi argüido pela Banca Examinadora, que em seguida, sem a presença do aluno, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar tendo concedido a menção : **APROVADO COM DISTINÇÃO**. E para constar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Recife, 18 de agosto de 2003

Banca Examinadora

- Pedro Ontaneda

- Francesco Russo

- Marcus Vinícius Wanderley

- Fernando Moraes

- Jacqueline Rojas

# Abstract

In this work we find an explicit formula for Whitehead group of the three-dimensional crystallographic group  $\Gamma$ , in terms of the Whitehead group of virtually infinite cyclic subgroup of  $\Gamma$ . This work contain others results, in particular we give the classification modulo isomorphism of the virtually infinite cyclic subgroups of a 3-crystallographic group. Also we construct a model for universal  $(\Gamma, VC(\Gamma))$ -space which is valid for Euclidean  $n$ -space  $\mathbb{R}^n$ .

Key words: Whitehead group, Crystallographic groups and K-theory.

# Resumo

O principal resultado desse trabalho é descrever uma fórmula para o grupo de Whitehead de um grupo cristalográfico em dimensão três. Também construímos um  $(\Gamma, VC(\Gamma))$ -espaço universal  $n$ -dimensional e damos a classificação, módulo isomorfismo, dos subgrupos virtualmente cíclicos infinitos de um grupo 3-cristalográfico.

Palavras chave: Grupo de Whitehead, Grupos cristalográficos e K-teoria.

UMA FÓRMULA PARA O GRUPO DE  
WHITEHEAD DE UM GRUPO  
CRISTALOGRÁFICO TRIDIMENSIONAL

Almir Olimpio Alves

Agosto, 2003

# Conteúdo

<b>0</b>	<b>Preliminares</b>	<b>4</b>
0.1	Algumas definições e proposições em $K$ -teoria algébrica . . . . .	4
0.2	Breve caracterização dos grupos cristalográficos . . . . .	10
0.3	Uma breve contextualização da conjectura do isomorfismo de Farrell-Jones . . . . .	12
<b>1</b>	<b>Uma fórmula para o grupo de Whitehead de um grupo cristalográfico tridimensional</b>	<b>19</b>
1.1	Apresentação dos resultados . . . . .	19
1.2	Um modelo para o $(\Gamma, VC(\Gamma))$ -espaço universal . . . . .	20
1.3	Subgrupos virtualmente cíclicos infinitos em dimensão três . . . . .	26
1.4	Isotropia em dimensão três . . . . .	32
1.5	Cálculo dos Grupos $H_i(A/\Gamma, \mathcal{P}_*(\rho))$ . . . . .	38
1.6	Prova dos Resultados . . . . .	47

# Introdução

O principal resultado desse trabalho é descrever uma fórmula para o grupo de Whitehead de um grupo cristalográfico em dimensão três, isto é, explicitamente, o grupo de Whitehead de um grupo 3-cristalográfico é dado pela seguinte soma finita:

$$Wh(\Gamma) = \bigoplus_{G \in VC_\infty(\Gamma)} Wh(G),$$

onde  $G < \Gamma$ , é um subgrupo maximal virtualmente cíclico infinito do grupo 3-cristalográfico  $\Gamma$ . Tal fórmula só foi possível graças a **Conjectura do Isomorfismo para  $K$ -teoria** de Farrell-Jones [14], a qual, é verdadeira para grupos cristalográficos. Esta conjectura, diz em linhas gerais que é possível calcular os  $K$ -grupos mais baixos de um grupo  $\Gamma$  mediante o “conhecimento” dos  $K$ -grupos dos subgrupos virtualmente cíclicos de  $\Gamma$ , através de um apropriado “*Assembly map*” (para a definição de grupo virtualmente cíclico ver definição 0.2.5).

Uma consequência interessante dessa fórmula é que existem grupos 3-cristalográficos  $\Gamma$  com  $Wh(\Gamma)$  infinitamente gerados, respondendo assim a uma questão enviada por F. T. Farrell a P. Ontaneda. Damos como exemplo o grupo 3-cristalográfico  $\Gamma = Pmm \times \mathbb{Z}$ , para o qual,  $Wh(\Gamma) = Nil_1(\mathbb{Z}[D_2])$ , que é infinitamente gerado.

A maior parte desse trabalho é dedicado à construção de um  $(\Gamma, VC(\Gamma))$ -espaço universal, à determinação dos grupos de isotropia das  $n$ -células desse espaço e ao cálculo dos grupos  $E_{i,j}^2$  (termos da sequência espectral) necessários para aplicar a Conjectura do Isomorfismo de Farrell-Jones. A abordagem é bastante geométrica e isto, nos pareceu mais apropriado que uma abordagem puramente algébrica como foi feito em [24] para determinar a  $K$ -teoria mais baixa de um grupo cristalográfico em dimesão dois. Acreditamos que geometricamente chega-se aos resultados de [24]

mais rapidamente.

O trabalho contém outros resultados, em particular, damos a classificação, módulo isomorfismo, dos subgrupos virtualmente cíclicos infinitos de um grupo 3-cristalográfico. Também, a construção do  $(\Gamma, VC(\Gamma))$ -espaço universal, é válida para  $n$ -espaços Euclidianos  $\mathbb{R}^n$ , não só para  $\mathbb{R}^3$ .

Dividimos o trabalho em duas partes: No Capítulo 0 fazemos as considerações mínimas necessárias para a compreensão do Capítulo 1. Este, por sua vez, está dividido em seis seções. Na Seção 1, apresentamos os resultados obtidos. Na Seção 2, construímos um modelo para o  $(\Gamma, VC(\Gamma))$ -espaço universal. Na Seção 3, classificamos, módulo isomorfismo, os subgrupos virtualmente cíclicos infinitos de um grupo 3-cristalográfico. Na Seção 4, calculamos os grupos de isotropia das  $n$ -células do  $(\Gamma, VC(\Gamma))$ -espaço universal. Na Seção 5, calculamos os grupos  $E_{i,j}^2$  necessários para aplicar a Conjectura do Isomorfismo de Farrell-Jones [14]. Na Seção 6, provamos os resultados da Seção 1.

Meus sinceros agradecimentos ao Professor Juan-Pineda pelas informações acerca da  $K$ -teoria de alguns grupos finitos e pelo esqueleto da prova do Lema 1.6.2, ao Professor Stratos Prassidis por informações acerca da  $K$ -teoria de alguns grupos finitos, por sugestões à redação do trabalho e pela avaliação do mesmo, ao Professor Tom Farrell por ter sugerido o problema, pelo esqueleto da prova do Lema 1.5.4 e pela avaliação do trabalho, ao Professor Pedro Ontaneda o qual foi alicerce e estrutura na realização desse trabalho. Agradeço também aos Professores, funcionários e companheiros de trabalho do departamento de matemática, também à CAPES por ter financiado meus estudos.

# Capítulo 0

## Preliminares

### 0.1 Algumas definições e proposições em $K$ -teoria algébrica

Nesta seção, definimos os grupos  $K_i(R)$ , damos alguns exemplos de tais grupos e enunciamos algumas proposições em  $K$ -teoria algébrica. As referências para esta seção são essencialmente [28] e [9].

#### O grupo $K_0$

**Definição 0.1.1:** Seja  $R$  um anel. Um *módulo projetivo a esquerda* sobre  $R$  é um  $R$ -módulo  $P$  com a propriedade que qualquer homomorfismo de  $R$ -módulos sobrejetivo  $\alpha : M \rightarrow P$ , tem um inverso a direita  $\beta : P \rightarrow M$ .

**Proposição 0.1.2:** *Seja  $R$  um anel. Um  $R$ -módulo  $P$  é projetivo se e somente se  $P$  é isomorfo a um somando direto em um  $R$ -módulo livre. Este é finitamente gerado e projetivo se e somente se é isomorfo a um somando direto em  $R^n$ , para algum  $n$ .*

**Proposição 0.1.3:** *Seja  $S$  um semigrupo comutativo (não necessariamente tendo*

uma unidade). Existe um grupo abeliano  $G$  (denominado de grupo de realização de  $S$  e denotado por  $G(S)$ ), junto com um homomorfismo de semigrupos  $\varphi : S \longrightarrow G$ , tal que para qualquer grupo  $H$  e homomorfismo de semigrupos  $\phi : S \longrightarrow H$ , existe um único homomorfismo  $\omega : G \longrightarrow H$  com  $\phi = \omega\varphi$ .

**Definição 0.1.4:** Seja  $R$  um anel com unidade. Definimos  $K_0(R)$  como o grupo de realização (no sentido da Proposição 0.1.3) do semigrupo  $ProjR$  das classes de isomorfismo de módulos projetivos finitamente gerados sobre  $R$ , isto é,  $K_0(R) = G(ProjR)$ . Aqui  $ProjR$  é considerado um semigrupo com a operação “soma direta”.

**Exemplo 0.1.5:** Se  $R$  é um corpo, então, qualquer  $R$ -módulo finitamente gerado é um  $R$ -espaço vetorial finitamente gerado. O qual tem uma base e uma dimensão bem definida. Esta dimensão é invariante por isomorfismo de módulos. Assim, vemos que  $ProjR = \mathbb{N}$ , o monóide aditivo dos números naturais. Desde que o grupo de realização de  $\mathbb{N}$  é  $\mathbb{Z}$ , isto é,  $G(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$ ,  $K_0(R) = \mathbb{Z}$ , com o isomorfismo induzido pela dimensão  $ProjR \longrightarrow \mathbb{N}$ . Mais geralmente temos:

**Proposição 0.1.6:** Se  $R$  é um PID (domínio de ideais principais), todo módulo projetivo finitamente gerado sobre  $R$  é isomorfo a  $R^n$  para algum único  $n$ , denominado de posto do módulo. Consequentemente  $K_0(R) = \mathbb{Z}$ .

Para qualquer anel  $R$  com unidade, existe um único homomorfismo de anéis  $i : \mathbb{Z} \longrightarrow R$  que manda 1 na identidade de  $R$ . Pela Proposição 0.1.6,  $K_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ , então, obtemos o mapa  $i_* : \mathbb{Z} \longrightarrow K_0(R)$ , ( $K_0$  é um functor). A imagem desse mapa é um subgrupo de  $K_0(R)$  gerado pelos  $R$ -módulos livres finitamente gerados.

**Definição 0.1.7:** O  $K_0$ -grupo reduzido de  $R$ , denotado por  $\tilde{K}_0(R)$ , é definido como o quociente  $K_0(R)/i_*(\mathbb{Z})$ .

## Comentário histórico

Para muitos matemáticos, o termo  $K$ -teoria não sugere a  $K$ -teoria algébrica, mas sim a  $K$ -teoria topológica, uma teoria de cohomologia excepcional sobre espaços

de Hausdorff compactos definida usando espaços vetoriais. Se  $Vect(X)$  denota o monoíde das classes de isomorfismo de fibrados vetoriais localmente triviais sobre  $X$  com a operação soma de Whitney, o elemento zero desse monoíde é o fibrado vetorial de posto zero. A  $K$ -teoria topológica de  $X$  é definida por  $K^0(X) = G(Vect(X))$ . Se  $X$  é conexo a  $K$ -teoria topológica reduzida é definida por  $\tilde{K}^0(X) = Ker(posto : K^0(X) \rightarrow \mathbb{Z})$ .

A conexão entre fibrados vetoriais e módulos projetivos que resulta na conexão entre  $K$ -teoria topológica e algébrica é dada na seguinte proposição devido a Swan (ver [28] p. 34).

**Proposição 0.1.8:** *Seja  $X$  um espaço topológico compacto e Hausdorff. Seja  $R = C^{\mathbb{R}}(X)$  o anel das funções contínuas de  $X$  em  $\mathbb{R}$  (com multiplicação e adição pontual). Se  $E \xrightarrow{p} X$  é um fibrado vetorial localmente trivial sobre  $X$ , seja  $\Gamma(X, E) = \{s : X \rightarrow E \text{ tais que } p \circ s = 1_X\}$ , o conjunto das seções contínuas de  $p$ . Observe que  $\Gamma(X, E)$  é naturalmente um  $R$ -módulo, o qual, é projetivo e finitamente gerado. O mapa  $E \rightsquigarrow \Gamma(X, E)$  induz um isomorfismo da categoria de fibrados vetoriais localmente triviais sobre  $X$  na categoria de  $R$ -módulos projetivos finitamente gerados. Também, induz um isomorfismo  $K^0(X) \rightarrow K_0(R)$ .*

Uma aplicação de  $K_0$  à topologia resolve a seguinte questão: Quando é que um espaço  $X$  finitamente dominado é homotopicamente equivalente a algum CW-complexo finito? Esta questão foi respondida por C. T. C. Wall em uma importante série de artigos. Os trabalhos de Wall sobre o problema de finitude foram motivado em parte pelo trabalho anterior devido a Swan sobre a questão de quando um espaço finitamente dominado  $X$  com grupo fundamental  $\pi = \pi_1[X]$  e recobrimento universal  $\tilde{X}$  homotopicamente equivalente a uma esfera, pode ser homotopicamente equivalente a um CW-complexo finito. Swan, observou que pelo menos em situações particulares, uma obstrução em  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi])$  desempenha um importante papel. Wall, mostrou que a dificuldade para o problema da finitude reside no grupo  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi])$ .

A obstrução de Wall ocorre em muitos problemas em topologia geométrica, tal como a questão estudada por Siebenmann: Quando uma variedade não compacta é

homeomorfa ao interior de uma variedade compacta com fronteira?

## O grupo $K_1$ e o grupo de Whitehead

Seja  $R$  um anel com unidade. Denotaremos por  $GL(n, R)$  o grupo das  $n \times n$  matrizes invertíveis sobre  $R$ . Mergulhamos  $GL(n, R)$  em  $GL(n+1, R)$  através do homomorfismo  $a \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Denotaremos por  $GL(R)$  a união infinita (ou limite direto) dos grupos  $GL(n, R)$ . Note que  $GL(R)$  é um grupo.

Chamamos uma matriz de *elementar*, se esta tem 1's na diagonal e no máximo um elemento não zero fora da diagonal. Mais precisamente: se  $a \neq 0 \in R$  e  $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$ , definimos uma *matriz elementar*  $e_{ij}(a)$  como sendo a matriz  $n \times n$  com 1's na diagonal, com “ $a$ ” na  $(i, j)$ -posição e com 0's nas outras entradas. O subgrupo gerado por tais matrizes é denotado por  $E(n, R)$ . Veja que  $E(n, R)$  mergulha em  $E(n+1, R)$  de maneira usual. A união infinita dos  $E(n, R)$  é denotada por  $E(R)$ , e usualmente denominado de *grupo das matrizes elementares*.

**Proposição (lema de Whitehead) 0.1.9:** *Para qualquer anel  $R$ , o subgrupo comutador  $[GL(R), GL(R)]$  de  $GL(R)$ , coincide com  $E(R)$ . Em particular  $E(R)$  é normal em  $GL(R)$  e o quociente  $GL(R)/E(R)$  é o quociente maximal abeliano  $GL(R)_{ab}$  de  $GL(R)$ .*

**Definição 0.1.10:** Se  $R$  é um anel com unidade, definimos o grupo  $K_1(R)$  como sendo  $GL(R)_{ab} = GL(R)/E(R)$ , isto é,  $K_1(R)$  é o “abelianizado” de  $GL(R)$ .

**Definição 0.1.11:** Seja  $G$  um grupo e  $\mathbb{Z}[G]$  o anel integral de  $G$ . O *grupo de Whitehead* de  $G$ , denotado por  $Wh(G)$ , é definido como o quociente de  $K_1(R)$  pela imagem de  $\{\pm g; g \in G\} \subseteq GL(1, R) \subset GL(R)$  em  $K_1(R)$ .

**Exemplo 0.1.12:** Se  $R$  é um anel Euclideano, mostra-se que  $K_1(R) \cong GL(1, R)$  (ver [28]). Assim se  $G = \{1\}$  é o grupo trivial, então,  $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}$  e  $K_1(\mathbb{Z}[G]) = \{1, -1\}$ . Portanto  $Wh(G) = 0$ .

## Comentário histórico

Na década de 40, J. H. C. Whitehead deu uma interpretação geométrica do conceito de equivalência de homotopia: Seja  $X$  um espaço topológico. Diremos que  $X'$  é uma *expansão elementar* de  $X$ , se  $X'$  é obtido de  $X$  colando-se uma  $n$ -célula  $D^n$  ao longo de uma  $(n-1)$ -célula do  $\partial D^n$ . Escrevemos  $X \nearrow X'$  ou  $X' \searrow X$ . Também dizemos que  $X$  é um *colapso* de  $X'$ . Note que  $X$  é homotopicamente equivalente a  $X'$ . Dizemos que  $X$  é *simplesmente homotópico* a  $Y$  se existe uma sequência de expansões e colapsos que comece com  $X$  e termine com  $Y$ . Escrevemos  $X \frown Y$ . Certamente homotopia simples implica equivalência de homotopia.

O conceito de homotopia simples é mais geométrico que o de equivalência de homotopia, e J. H. C. Whitehead estudou o seguinte problema: Equivalência de homotopia implica homotopia simples? J. H. C. Whitehead mostrou que isto depende de  $Wh(\pi_1[X])$ .

Sejam  $(K, L)$  e  $(K', L)$  pares de CW-complexos tais que  $L$  é retrato por deformação forte de  $K, K'$ . Definimos  $(K, L) \sim (K', L)$  se  $K \frown K' \text{ rel } L$ , isto é, se existir uma sequência de operações, cada uma das quais consistindo de uma expansão ou colapso, tal que,  $K$  deforme em  $K'$  sem remover células de  $L$ . Denotamos a classe de  $(K, L)$  por  $[K, L]$ . A adição entre as classes é definida por  $[K, L] + [K', L] = [K \cup_L K', L]$ , onde  $K \cup_L K'$  é a união disjunta de  $K$  e  $K'$ , identificados pela identidade sobre  $L$ . Defina o grupo de Whitehead de  $L$  como  $Wh(L) = \{(K, L)\} / \sim$ , onde  $\sim$  é a relação acima citada.  $Wh(L)$  é um grupo abeliano com a operação acima definida.

**Proposição 0.1.13:** *Os grupos  $Wh(L)$  e  $Wh(\pi_1[L])$  são isomorfos.*

Portanto, “homotopia simples” coincide com “equivalência de homotopia” se e somente se  $Wh(\pi_1[L]) = 0$ . Por exemplo: Como  $Wh(1)=0$  (ver exemplo 0.1.12), “homotopia simples” coincide com “equivalência de homotopia” quando  $L$  é simplesmente conexo.

O grupo de Whitehead também aparece em topologia geométrica: Seja  $W$  uma variedade compacta com bordo  $M_1 \amalg M_2$ . Dizemos que  $W$  é um *cilindro homotópico* sobre  $M_1$  (ou  $M_2$ ), se  $M_1$  e  $M_2$  são retratos por deformação de  $W$ . Se  $M_1$  (ou  $M_2$  ou  $W$ ) é simplesmente conexo também chama-se *h-cobordismo*. Na década de 60 Smale provou que todo *h-cobordismo* de dimensão  $\geq 5$  é de fato difeomorfo ao cilindro  $M_1 \times [0, 1]$ . Particularmente  $M_1$  é difeomorfa a  $M_2$ . O resultado de Smale implica a conjectura de Poincaré em dimensão  $\geq 6$ . Por este trabalho Smale recebeu a medalha Fields. Quando  $M_1$  (ou  $M_2$  ou  $W$ ) não é simplesmente conexo, o teorema de Smale não vale. Para cada cilindro homotópico  $W$  sobre  $M_1$  existe um elemento em  $Wh(\pi_1[M_1])$ , chamado *torção de Whitehead* de  $W$ ,  $\tau(W)$ , tal que,  $\tau(W) = 0$  se e somente se  $W$  é um cilindro.

## **$K$ -grupos em dimensões altas**

Os grupos  $K_0$  e  $K_1$  entram na sequência exata

$$K_1(R, I) \rightarrow K_1(R) \rightarrow K_1(R/I) \rightarrow K_0(R, I) \rightarrow K_0(R) \rightarrow K_0(R/I),$$

onde  $R$  é um anel e  $I \subseteq R$  é um ideal de  $R$ . No início dos anos 70 Milnor definiu o grupo  $K_2$ . Se  $R$  é um anel e  $I \subseteq R$  é um ideal de  $R$ ,  $K_2$  entra na sequência exata

$$K_2(R, I) \rightarrow K_2(R) \rightarrow K_2(R/I) \rightarrow K_1(R, I) \rightarrow$$

$$K_1(R) \rightarrow K_1(R/I) \rightarrow K_0(R, I) \rightarrow K_0(R) \rightarrow K_0(R/I).$$

Daí, iniciou-se a procura pela definição de  $K$ -funtores altos  $K_i$ ,  $i > 2$  com a propriedade de sequência exata. No entanto, por um tempo pareceu não ser possível um esperado functor  $K_i$ ,  $i > 2$ . Esta situação mudou dramaticamente com o trabalho de Daniel Quillen ainda na década de 70, com o qual ganhou medalha Fields em 1978. Quillen teve a idéia que deveria tentar construir os  $K$ -funtores altos não um a um, mas sim, todos de uma só vez, como grupos de homotopia de um espaço topológico.

## $K$ -grupos em dimensões negativas

Uma consequência do teorema de Bass-Heller-Swam (ver [28]) é que para qualquer anel  $R$ ,

$$K_0(R[t]) = \text{Coker}(K_1(R[t]) \oplus K_1(R[t^{-1}]) \longrightarrow K_1(R[t, t^{-1}])),$$

onde  $R[t]$ ,  $R[t^{-1}]$ ,  $R[t, t^{-1}]$  são anéis de polinômios. Isto motiva a seguinte definição indutiva:

**Definição 0.1.14:** Para um anel  $R$  com unidade,  $K_{-1}(R)$  é definido como sendo o cokernel do mapa natural

$$K_0(R[t]) \oplus K_0(R[t^{-1}]) \longrightarrow K_0(R[t, t^{-1}]).$$

Definimos  $K_{-n}(R)$  como sendo o cokernel do mapa natural

$$K_{-(n-1)}(R[t]) \oplus K_{-(n-1)}(R[t^{-1}]) \longrightarrow K_{-(n-1)}(R[t, t^{-1}]).$$

Para uma interpretação geométrica dos  $K_{-i}$  (usando pseudoisotopia) ver [1].

## 0.2 Breve caracterização dos grupos cristalográficos

Daremos nessa seção uma breve caracterização dos grupos cristalográficos. Tais grupos são de interesse tanto de matemáticos quanto de físicos e químicos. De fato, foram os físicos os primeiros a classificarem os 230 grupos cristalográficos em dimensão três. As referências para esta seção são essencialmente [29], [30] e [36].

Seja  $E(n)$  o grupo dos movimentos rígidos do espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Sabemos que todo movimento rígido consiste de uma rotação  $J \in O(n)$ , seguido por uma translação  $\tau_a$  por um vetor  $a$  de  $\mathbb{R}^n$ , onde  $O(n)$  denota o grupo das matrizes ortogonais, (matrizes tais que  $J^{-1} = J^t$ ). Escrevemos um movimento rígido como

$(J, \tau_a)$ . Portanto  $E(n)$  é o grupo de Lie  $O(n) \rtimes \mathbb{R}^n$ , com a multiplicação dada por  $(J, \tau_a)(J', \tau_b) = (JJ', \tau_{Jb+a})$ . A aplicação  $(J, \tau_a) \rightarrow J$  define uma aplicação  $\pi : E(n) \rightarrow O(n)$ . Note que  $\text{Ker}(\pi)$  está formado por translações.

**Definição 0.2.1:** Um *grupo cristalográfico* de  $E(n)$  (ou grupo  $n$ -cristalográfico), é um subgrupo discreto e uniforme (isto é, cocompacto) de  $E(n)$ .

Se  $\Gamma$  é um grupo  $n$ -cristalográfico, temos a sequência exata  $1 \rightarrow H \rightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} F \rightarrow 1$ , onde  $F = \pi(\Gamma)$  é finito, e  $H = \text{Ker}(\pi)$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$ .

**Proposição 0.2.2:** Um grupo abstrato  $\Delta$  é isomorfo a um grupo  $n$ -cristalográfico se e somente se  $\Delta$  tem um subgrupo abeliano normal livre  $\Delta^*$  de posto  $n$  e índice finito o qual é abeliano maximal em  $\Delta$ .

Esta proposição caracteriza os grupos  $n$ -cristalográficos  $\Gamma$  sobre  $\mathbb{R}^n$  como extensões  $1 \rightarrow H \rightarrow \Gamma \rightarrow F \rightarrow 1$  do grupo  $H$ , isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$ , pelo grupo finito  $F < O(n)$ , onde  $H$  é normal e abeliano maximal em  $\Gamma$ . Denominamos  $H$  de *rede* de  $\Gamma$  e  $F$  de *grupo ponto* de  $\Gamma$ .

A proposição a seguir é conhecida como *restrição cristalográfica*.

**Proposição 0.2.3:** Seja  $F < O(n)$  um grupo ponto de um grupo  $n$ -cristalográfico. Seja  $\gamma \in F$  um elemento de ordem  $m$ . Então  $n \geq \phi(m)$ , onde  $\phi(m)$  denota o número de inteiros  $0 \leq d < m$ , primos de  $m$ . Assim se  $n = 2, 3$  tem-se as seguintes possibilidades:  $m = 1, 2, 3, 4, 6$ .

**Proposição 0.2.4:** Se  $F$  é o grupo ponto de um grupo 3-cristalográfico  $\Gamma$ , então  $F$  é trivial ou isomorfo a um dos seguintes grupos:  $A_4, S_4, A_4 \times \mathbb{Z}_2, S_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_i, \mathbb{Z}_i \times \mathbb{Z}_2, D_i, D_i \times \mathbb{Z}_2, i = 1, 2, 3, 4, 6$ , onde  $\mathbb{Z}_i$  denota o grupo cíclico de ordem  $i$ ,  $D_i$  o grupo diedral de ordem  $2i$ ,  $S_n$  o grupo das permutações de ordem  $n!$  e  $A_n$  denota o grupo alternado de ordem  $n!/2$  (ver [30]).

**Definição 0.2.5:** Um grupo  $G$  é *virtualmente cíclico* se este é finito ou contém um subgrupo cíclico infinito de índice finito. Ou seja, existe uma sequência exata curta de grupos  $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1$ , com  $F$  finito e  $H$  isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Denotaremos o

conjunto dos subgrupos virtualmente cíclicos de um grupo  $\Gamma$  por  $VC(\Gamma)$ .

Uma descrição geral de um grupo virtualmente cíclico infinito é dada na seguinte proposição devido a P. Scott e T. Wall, [29].

**Proposição 0.2.6:** *As condições seguintes sobre um grupo  $G$  finitamente gerado são equivalentes:*

- (1)  $G$  tem um subgrupo normal cíclico infinito de índice finito (isto é,  $0 \rightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} F \rightarrow 1$  é exata onde  $H$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}$  e  $F$  é finito).
- (2)  $G$  tem um subgrupo normal finito com quociente  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = D_\infty$ .
- (3)  $G = F *_F$  com  $F$  finito, quando o quociente é  $\mathbb{Z}$  ou  $G = A *_C B$ , com  $C$  finito e  $|A : C| = |B : C| = 2$ , quando o quociente é  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ .

**Proposição 0.2.7:** *Considere a sequência exata  $0 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1$ , onde  $G$  é um subgrupo virtualmente cíclico infinito do grupo  $n$ -cristalográfico  $\Gamma$ . Então  $G$  deixa invariante ao menos uma reta em  $\mathbb{R}^n$ .*

### 0.3 Uma breve contextualização da conjectura do isomorfismo de Farrell-Jones

A conjectura do isomorfismo de Farrell-Jones [14] diz que a  $K$ -teoria algébrica de  $\mathbb{Z}[\Gamma]$  pode ser computada, através da  $K$ -teoria algébrica dos subgrupos virtualmente cíclicos do grupo  $\Gamma$ , via um apropriado “assembly map”. Em [14] Farrell e Jones provam essa conjectura para a  $K$ -teoria algébrica baixa de grupos discretos cocompactos agindo propriamente e descontinuamente por isometrias sobre uma variedade Riemanniana simétrica, simplesmente conexa com curvatura não positiva. As referências para esta seção são essencialmente [1], [14] e [16].

**Notação :** Seja  $\Gamma$  um grupo, e seja  $X$  um  $\Gamma$ -espaço (à esquerda), i.e.  $\Gamma$  age sobre  $X$ . Se  $S < \Gamma$  é um subgrupo, então  $X^S = \{x \in X; sx = x \text{ para todo } s \in S\}$ , isto

é,  $X^S$  é o conjunto de pontos fixos por  $S$ . Se  $x \in X$ , então  $\Gamma^x$  é o subgrupo de isotropia que fixa  $x$ , isto é,  $\Gamma^x = \{g \in \Gamma; gx = x\}$ . Mais geralmente: Seja  $B \subset X$  um subespaço. Então  $\Gamma^B$  é o subgrupo de isotropia que fixa (pontualmente)  $B$ , isto é,  $\Gamma^B = \bigcap_{b \in B} \Gamma^b$ . Também,  $\Gamma^{(B)} = \{g \in \Gamma; gB = B\}$ , isto é,  $\Gamma^{(B)}$  é o subgrupo que deixa  $B$  invariante. Se  $\Gamma$  age sobre outro espaço  $Y$ ,  $X \cong_{\Gamma} Y$  significa que  $X$  é  $\Gamma$ -homeomorfo a  $Y$ .

Vamos agora descrever a “maquinaria” de Farrell-Jones para “calcular” a  $K$ -teoria do anel inteiro  $\mathbb{Z}[\Gamma]$  de um grupo  $\Gamma$ , em termos da  $K$ -teoria dos subgrupos virtualmente cíclicos de  $\Gamma$ . Esta “maquinaria” é um tanto complicada, e demanda do leitor um pouco de paciência.

### ( $V, \mathcal{C}$ )-espaço universal

**Definição 0.3.1:** Seja  $\mathcal{C}$  um conjunto (não vazio) de subgrupos de  $\Gamma$ . Então  $X$  é dito  $\mathcal{C}$ -*contrátil* se e somente se  $X^S$  é não vazio e contrátil para todo  $S \in \mathcal{C}$ . Ainda mais,  $X$  é  $\mathcal{C}$ -*livre* se e somente se  $\Gamma^x \in \mathcal{C}$  para cada  $x \in X$ .

**Definição 0.3.2:** Uma ação *celular* de  $\Gamma$  sobre um complexo celular regular  $X$ , é uma ação que satisfaz as seguintes propriedades:

- (1) Para cada  $\gamma \in \Gamma$ , o homeomorfismo  $x \rightarrow \gamma x$  mapeia célula em célula.
- (2) Para cada célula (fechada)  $\sigma$  de  $X$ ,  $\Gamma^{(\sigma)} = \Gamma^{\sigma}$ .

Neste caso, note que  $\Gamma^{\sigma} = \Gamma^x$ , para cada  $x \in \text{Int}(\sigma)$ . Consequentemente,  $\{\Gamma^{\sigma}; \sigma \text{ é uma célula de } X\} = \{\Gamma^x; x \in X\}$ .

**Definição 0.3.3:** Uma classe de subgrupos  $\mathcal{C}$  de  $\Gamma$  é dita *completa* se e somente se esta é fechada com respeito a subgrupos e conjugações.

**Definição 0.3.4:** Seja  $\Gamma$  um grupo e seja  $\mathcal{C}$  uma classe de subgrupos de  $\Gamma$ . Um  $(\Gamma, \mathcal{C})$ -*espaço universal* é um CW-complexo regular  $Z$  junto com uma ação  $\Gamma \times Z \rightarrow Z$ , que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) Para cada  $\gamma \in \Gamma$  o homeomorfismo  $Z \rightarrow Z$  dado por  $z \rightarrow \gamma(z)$  é celular. Ainda mais, para cada célula  $\sigma \in Z$ , se  $\gamma(\sigma) = \sigma$ , então,  $\gamma|_{\sigma} = \text{inclusão}$ .

(2) Para cada  $z \in Z$  temos  $\Gamma^z \in \mathcal{C}$ .

(3) Para cada  $G \in \mathcal{C}$  o conjunto de pontos fixos de  $G \times Z \rightarrow Z$  é um subcomplexo de  $Z$  não vazio e contrátil.

**Proposição 0.3.5:** *Seja  $\mathcal{C}$  uma classe completa de subgrupos de  $\Gamma$ . Então existe um  $(\Gamma, \mathcal{C})$ -espaço universal para essa classe. Ainda mais, o  $(\Gamma, \mathcal{C})$ -espaço universal é único salvo  $\Gamma$  homotopia.*

**Exemplos 0.3.6:** Seja  $\Gamma$  um grupo qualquer.

(1) Se  $\mathcal{C} = \{\text{todos os grupos de } \Gamma\}$ , então  $Z = \{\text{ponto}\}$  é um  $(\Gamma, \mathcal{C})$ -espaço universal.

(2) Se  $\mathcal{C} = \{0\} < \Gamma$  é o subgrupo trivial de  $\Gamma$ ,  $Z$  é um  $(\Gamma, \mathcal{C})$ -espaço universal, então,  $Z = B\tilde{\Gamma}$ , o recobrimento universal do espaço classificante  $B\Gamma$ , com ação  $\Gamma$ -celular isto é,  $\Gamma$  age livremente e propriamente descontinuamente sobre  $Z$ . Logo  $\pi_1(Z/\Gamma) = \Gamma$ .

## $\Omega$ -espectros

**Definição 0.3.7:** Um  $\Omega$ -espectro consiste de uma seqüência bi-infinita  $\zeta_* = \{\zeta_j : j \in \mathbb{Z}\}$  de subespaços com ponto base, junto com equivalências fracas de homotopia  $\{h_j : \zeta_j \rightarrow \Omega\zeta_{j+1}\}$ , denominado de mapa estrutura para o  $\Omega$ -espectro. Aqui  $\Omega\zeta_*$  denota o espaço dos laços de  $\zeta_*$ .

**Definição 0.3.8:** Para qualquer inteiro  $k$  o  $k$ -grupo de homotopia do  $\Omega$ -espectro  $\zeta_*$  é denotado por  $\pi_k(\zeta_*)$  e é definido como sendo o grupo de homotopia  $\pi_{k+j}(\zeta_j)$  para algum inteiro  $j$  satisfazendo  $k + j > 0$ .

**Definição 0.3.9:** Um mapa de  $\Omega$ -espectros  $r_* : \zeta_* \rightarrow \zeta'_*$ , consiste de uma coleção de mapas  $\{r_j : \zeta_j \rightarrow \zeta'_j\}$  tais que  $(\Omega r_{j+1}) \circ h_j$  é homotópico a  $h'_j \circ r_j$  para todo  $j$ . Um mapa de  $\Omega$ -espectros é dito uma *equivalência fraca* se este induz um isomorfismo sobre os grupos de homotopia do  $\Omega$ -espectro, e este é denominado de uma *equivalência*

se existe um mapa inverso de  $\Omega$ -espectro  $r'_* : \zeta'_* \rightarrow \zeta_*$  tal que cada composição de mapas  $r_j \circ r'_j, r'_j \circ r_j$  é homotópico ao mapa identidade.

## O funtor pseudoisotopia estável

Se  $X$  é uma variedade e  $i \geq 0$  um inteiro, denotamos por  $P^b(X \times \mathbb{R}^i)$  o espaço das *pseudoisotopias topológicas*  $h : X \times \mathbb{R}^i \times [0, 1] \rightarrow X \times \mathbb{R}^i \times [0, 1]$ , as quais são limitadas no fator  $\mathbb{R}^i$  e têm suporte compacto no fator  $X$ , isto é,  $h : X \times \mathbb{R}^i \times [0, 1] \rightarrow X \times \mathbb{R}^i \times [0, 1]$  é um homeomorfismo tal que  $h|_{X \times \mathbb{R}^i \times 0} = \text{inclusão}$ , e existe um número  $\alpha > 0$  tal que para todo  $(x, y, t) \in X \times \mathbb{R}^i \times [0, 1]$ , tem-se que  $|y - y'| \leq \alpha$ , onde  $h(x, y, t) = (x', y', t')$ . Note que, se  $I^q$  denota o produto cartesiano de  $[0, 1]$   $q$ -vezes, então, existe um mapa inclusão  $P^b(X \times I^q \times \mathbb{R}^i) \rightarrow P^b(X \times I^{q+1} \times \mathbb{R}^i)$ , obtido fazendo-se o produto de qualquer pseudoisotopia topológica  $h : X \times I^q \times \mathbb{R}^i \times [0, 1] \rightarrow X \times I^q \times \mathbb{R}^i \times [0, 1]$  com a identidade  $I \rightarrow I$ .

**Definição 0.3.10:** Definimos  $\mathcal{P}_i(X)$ ,  $i \geq 0$  como sendo o limite direto  $\lim_{q \rightarrow \infty} P^b(X \times I^q \times \mathbb{R}^i)$ . Para os inteiros  $i < 0$  ponha  $\mathcal{P}_i(X) = \Omega^{-i}\mathcal{P}_0(X)$ . Assim definimos  $\mathcal{P}_*(X) = \{\mathcal{P}_i(X); i \in \mathbb{Z}\}$ .

Em [19] o autor mostra que  $\mathcal{P}_i(X) \cong \Omega\mathcal{P}_{i+1}(X)$  (onde  $\cong$  denota equivalência de homotopia) e que  $\mathcal{P}_*(X)$  é um  $\Omega$ -espectro.

$\mathcal{P}_*(X)$  pode ser definido para CW-complexos localmente finitos, obtendo assim um funtor  $\mathcal{P}_* : CW \rightarrow (\Omega - \text{espectros})$ , da categoria dos CW-complexos localmente finitos a categoria de  $\Omega$ -espectros. Pode-se mostrar que  $\mathcal{P}_*(\cdot)$  é um funtor homotópico (ver [19]).

A relação entre  $\mathcal{P}_*(X)$  e  $K$ -teoria algébrica mais baixa é dada pela proposição abaixo devido a Anderson e Hsiang [1].

**Proposição 0.3.11:**

$$\pi_j(\mathcal{P}_*(X)) = \begin{cases} K_{j+2}(\mathbb{Z}[\pi_1(X)]), & \text{se } j \leq -3 \\ K_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X)]), & \text{se } j = -2 \\ Wh(\pi_1(X)), & \text{se } j = -1. \end{cases}$$

## O assembly map

**Definição 0.3.12:** Um mapa  $\rho : E \rightarrow B$  é dito uma *fibração de Serre*, se este tem a propriedade do levantamento de homotopias para pares  $(X, A)$  de CW-complexos.

**Definição 0.3.13:** Um mapa  $f : E \rightarrow X$  é uma *fibração simplicial estratificada*, se existir uma triangulação  $K$  para o espaço  $X$  tal que:

(1) Para cada simplexo  $\Delta \in K$ , o mapa  $f : f^{-1}(\Delta - \partial\Delta) \rightarrow (\Delta - \partial\Delta)$  é uma fibração de Serre.

(2) Para cada simplexo  $\Delta \in K$ , existe um colar  $c : \partial\Delta \times [0, 1] \rightarrow \Delta$ , para  $\partial\Delta$  em  $\Delta$  com  $c(\partial\Delta \times 0) = \partial\Delta$ . Ponha  $U = \text{Imagem}(c)$ . Existem também retratos por deformação  $r : U \times [0, 1] \rightarrow U$  de  $U$  em  $\partial\Delta$  e  $r' : f^{-1}(U) \times [0, 1] \rightarrow f^{-1}(U)$  de  $f^{-1}(U)$  em  $f^{-1}(\partial\Delta)$  tal que  $f(r'(p, t)) = r(f(p), t)$  e  $r(c(x, s), t) = c(x, (1 - t)s)$ , para todo  $p \in f^{-1}(U)$ ,  $x \in \partial\Delta$  e  $s, t \in [0, 1]$ .

Seja  $f : E \rightarrow X$  uma fibração simplicial estratificada e  $K$  a triangulação correspondente. Seja  $K^{(1)}$  a primeira subdivisão baricêntrica da triangulação  $K$  e seja  $\zeta_* : CW \rightarrow (\Omega\text{-espectros pontuados})$  um funtor homotópico qualquer. Para cada inteiro  $j$  defina o espaço  $\zeta_j(f)$  como sendo o espaço quociente  $(\bigcup_{\Delta \in K^{(1)}} \zeta_j(f^{-1}(\Delta)) \times \Delta) / \sim$  onde a relação  $\sim$  simplesmente identifica  $\zeta_j(f^{-1}(\Delta')) \times \Delta'$  com sua imagem em  $\zeta_j(f^{-1}(\Delta)) \times \Delta$  sob o mapa induzido pela inclusão  $\Delta' \subset \Delta$ . Note que  $X$  pode ser identificado com o subespaço  $(\bigcup_{\Delta \in K^{(1)}} I_\Delta \times \Delta) / \sim$  de  $\zeta_j(f)$ , onde  $I_\Delta$  é o ponto base do espaço  $\zeta_j(f^{-1}(\Delta))$  (por exemplo, se  $\zeta_* = \mathcal{P}_*$  o ponto base de  $\mathcal{P}_j(f^{-1}(\Delta))$ ,  $j \geq 0$  é a pseudoisotopia identidade).

**Definição 0.3.14:** O *espectro de homologia*  $\mathbb{H}_*(X, \zeta_*(f))$  para  $X$  com coeficientes (torcidos e estratificados) em  $\zeta_*(f)$  é a coleção de espaços  $\{\mathbb{H}_i(X, \zeta_*(f)), i \in \mathbb{Z}\}$  definido por  $\mathbb{H}_i(X, \zeta_*(f)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \Omega^j(\zeta_{j+i}(f)/X)$ .

O espectro de homologia  $\mathbb{H}_*(X, \zeta_*(f))$ , é um  $\Omega$ -espectro. O  $k$  grupo de homologia  $H_k(X, \zeta_*(f))$  para  $X$  com coeficientes torcidos e estratificados em  $\zeta_*(f)$  é definido como sendo o  $k$  grupo de homotopia do  $\Omega$ -espectro  $\mathbb{H}_*(X, \zeta_*(f))$ .

**Proposição 0.3.15:** *Seja  $f : E \rightarrow X$  uma fibração simplicial estratificada. Então:*

- (1) *O espectro de homologia  $\mathbb{H}_*(X, \zeta_*(f))$  é independente da triangulação  $K$ .*
- (2) *Existe uma sequência espectral com  $\mathcal{E}_{i,j}^2 = H_i(X, \pi_j \zeta_*(f))$  a qual converge para  $H_{i+j}(X, \zeta_*(f))$ . Aqui  $\pi_j \zeta_*(f)$  denota um sistema estratificado de grupos  $\{\pi_j \zeta_*(f^{-1}(x)); x \in X\}$  sobre  $X$ , onde  $\pi_j \zeta_*(f^{-1}(x))$  é o  $j$ -grupo de homotopia do  $\Omega$ -espectro  $\zeta_*(f^{-1}(x))$ .*

Os mapas inclusão  $\{f^{-1}(\Delta) \subset E; \Delta \in K^{(1)}\}$  induzem os mapas  $\zeta_j(f^{-1}(\Delta)) \rightarrow \zeta_j(E)$ , os quais, por sua vez, induzem os mapas  $\phi_j : \zeta_j(f) \rightarrow \zeta_j(E)$ . Mostra-se que  $\phi_j(X)$  é o ponto base de  $\zeta_j(E)$ . Defina  $A_j : \mathbb{H}_j(X, \zeta_*(f)) \rightarrow \zeta_j(E)$  como sendo o limite direto quando  $i \rightarrow \infty$  da composição  $\Omega^i(\zeta_{j+i}(f)/X) \xrightarrow{\Omega^i(\phi_{j+i})} \Omega^i(\zeta_{j+i}(E)) \cong \zeta_j(E)$ . A coleção de tais mapas denotados por  $A_* : \mathbb{H}_*(X, \zeta_*(f)) \rightarrow \zeta_*(E)$ , é um mapa de  $\Omega$ -espectro (ver [14]), o qual é denominado de *Assembly map*, para o funtor  $\zeta_*(\cdot)$ .

**Proposição 0.3.16:** *Se  $f : E \rightarrow X$  é uma fibração simplicial estratificada, o Assembly map  $A_* : \mathbb{H}_*(X, \zeta_*(f)) \rightarrow \zeta_*(E)$ , é independente da triangulação  $K$ .*

## A conjectura do isomorfismo de Farrell-Jones

Seja  $\Gamma$  um grupo e  $X$  um espaço tal que  $\pi_1[X] = \Gamma$ . Seja  $\tilde{X}$  o recobrimento universal de  $X$  e seja  $\Gamma \times (\tilde{X} \times A) \rightarrow (\tilde{X} \times A)$  a ação diagonal. Defina  $\rho : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{B}(X)$  como sendo o quociente da projeção canônica  $\tilde{X} \times A \rightarrow A$  sob a ação de  $\Gamma$ , e defina  $f : \mathcal{E}(X) \rightarrow X$  como sendo o quociente da projeção canônica  $\tilde{X} \times A \rightarrow \tilde{X}$  sob a ação de  $\Gamma$ .

**Proposição 0.3.17:**  *$\rho : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{B}(X)$  é uma fibração simplicial estratificada. Cada fibra  $\rho^{-1}([z])$  de  $\rho$ , é um recobrimento conexo  $X_H$  de  $X$ , onde  $X_H = \tilde{X}/H$  e  $H = \Gamma^z$ . Note que  $\pi_1(\rho^{-1}([z])) = \pi_1(X_H) = \Gamma^z$ . Mais ainda  $\rho : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{B}(X)$  é univocamente determinada salvo homotopia da fibra e homotopia de  $X$ .*

**Conjectura do isomorfismo de Farrell-Jones para o funtor  $\mathcal{P}_*(\cdot)$  0.3.18:** *Seja*

$\mathcal{P}_*(\cdot)$  o funtor pseudoisotopia. Então, para todo grupo (discreto)  $\Gamma$ , o mapa

$$\mathbb{H}_*(\mathcal{B}(X), \mathcal{P}_*(\rho)) \xrightarrow{\mathcal{P}_*(f) \circ A_*} \mathcal{P}_*(X)$$

é uma equivalência de  $\Omega$ -espectros, onde  $A_*$  é o *Assembly map* para a fibração simplicial estratificada  $\rho : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{B}(X)$ , e  $\mathcal{P}_*(f)$  é a imagem do mapa  $f : \mathcal{E}(X) \rightarrow X$  sob o funtor  $\mathcal{P}_*(\cdot)$ .

**Proposição 0.3.19:** Seja  $\Gamma$  um grupo e  $M$  uma variedade Riemanniana simétrica simplesmente conexa com curvatura seccional  $K \leq 0$ . Suponha que existe uma ação propriamente descontínua cocompacta de grupo,  $\Gamma \times M \rightarrow M$  por isometrias de  $M$ . Então a conjectura do isomorfismo de Farrell-Jones vale para  $\Gamma$ .

**Corolário 0.3.20:** A conjectura do isomorfismo de Farrell-Jones vale para grupos cristalográficos.

# Capítulo 1

## Uma fórmula para o grupo de Whitehead de um grupo cristalográfico tridimensional

### 1.1 Apresentação dos resultados

Lembre que um grupo  $\Gamma < O(n) \rtimes \mathbb{R}^n$  é  $n$ -cristalográfico se  $\Gamma$  age propriamente descontinuamente, cocompactamente e por isometrias sobre  $\mathbb{R}^n$ .

Seja  $\Gamma$  um grupo e  $G < \Gamma$ , isto é,  $G$  é um subgrupo de  $\Gamma$ .  $G$  é um subgrupo maximal finito de  $\Gamma$ , se  $G < G' < \Gamma$  com  $G'$  finito, implica  $G = G'$ . Analogamente, definimos um subgrupo maximal virtualmente cíclico infinito de  $\Gamma$ . Escreva  $F(\Gamma)$  para o conjunto das classes de conjugação dos subgrupos maximais finito de  $\Gamma$ , e  $VC_\infty(\Gamma)$  para o conjunto das classes de conjugação dos subgrupos maximais virtualmente cíclico infinito de  $\Gamma$ .

Nosso principal resultado é

**Teorema 1.1.1:** *Seja  $\Gamma$  um grupo 3-cristalográfico. Então*

$$Wh(\Gamma) = \bigoplus_{G \in VC_\infty(\Gamma)} Wh(G).$$

Ainda mais, a soma direta na fórmula acima é finita.

**Corolário 1.1.2:** *Seja  $\Gamma$  um grupo 3-cristalográfico. Então,  $Wh(\Gamma)$  é infinitamente gerado, se e somente se,  $\Gamma$  contém um subgrupo maximal virtualmente cíclico infinito  $G$  com  $Wh(G)$  infinitamente gerado.*

**Exemplo 1.1.3:** Considere o grupo 2-cristalográfico  $Pmm$ . Este grupo é gerado pelas translações  $\tau_{e_i}(p) = p + e_i$ ,  $p \in \mathbb{R}^2$ ,  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  e pelas reflexões em torno dos eixos  $x$  e  $y$ . Então  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  é um subgrupo de  $Pmm$ . Portanto  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$  é um subgrupo do grupo 3-cristalográfico  $\Gamma = Pmm \times \mathbb{Z}$ . De fato,  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$  é maximal pois  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} = \Gamma^{(\mathbb{R}e_3)}$  (ver Lema 1.5.1) e a ação de  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{R}e_3$  é cocompacta. Também, pela formula-Bass-Heller-Swan (ver [28], p. 152)  $Wh(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}) = 2 Nil_1(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2])$ , o qual é infinitamente gerado (ver Lema 1.6.2). Portanto o Corolário 1.1.2 implica que  $Wh(Pmm \times \mathbb{Z})$  é infinitamente gerado.

**Corolário 1.1.4:** *Seja  $\Gamma$  um grupo 2-cristalográfico. Então*

$$2 Nil_1(\mathbb{Z}[\Gamma]) = 2 \left( \bigoplus_{F \in F(\Gamma)} Nil_1(\mathbb{Z}[F]) \right).$$

## 1.2 Um modelo para o $(\Gamma, VC(\Gamma))$ -espaço universal

Nesta seção construiremos um modelo para o  $(\Gamma, VC(\Gamma))$ -espaço universal, onde  $\Gamma$  é um grupo cristalográfico e  $VC(\Gamma)$  é o conjunto dos subgrupos virtualmente cíclicos de  $\Gamma$ .

Seja  $\Gamma$  um grupo n-cristalográfico. Então,  $\Gamma$  entra na sequência exata curta de

grupos  $0 \rightarrow T \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{p} F \rightarrow 1$  com  $T$  isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$  e  $F$  um subgrupo finito de  $O(n)$ . Os elementos em  $T$  são translações. Para  $h \in \mathbb{R}^n$  escrevemos  $\tau_h(x) = x + h$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Seja  $H = \{h; \tau_h \in T\}$ . Então  $H < \mathbb{R}^n$  é um subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}^n$ .

Note que para  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma x = (p\gamma)x + b$ ,  $p\gamma \in O(n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  (não necessariamente em  $H$ ). Note também que se  $h \in H$  e  $\gamma \in \Gamma$ ,  $(p\gamma)h \in H$ . De fato:  $\gamma x = Jx + b$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , onde  $J = p\gamma \in O(n)$ . Então  $\gamma^{-1}x = J^{-1}x - J^{-1}b$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Temos que  $\gamma\tau_h\gamma^{-1} \in \Gamma$  (pois  $\Gamma$  é um grupo). Mas  $(\gamma\tau_h\gamma^{-1})x = x + Jh$ . Assim  $\gamma\tau_h\gamma^{-1} = \tau_{Jh} \in T$ , que implica  $(\gamma p)h = Jh \in H$ .

Defina  $C^n := \mathbb{R}^n / \sim$ , onde  $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$ . Portanto,  $C^n$  é homeomorfo a  $C(\mathbb{R}P^{n-1})$ , o cone aberto sobre o espaço projetivo real  $\mathbb{R}P^{n-1}$ . O vértice de  $C^n$  é o ponto  $[0] \in C^n$ . Um subconjunto da forma  $\{[\lambda x], \lambda \in \mathbb{R}\}$ ,  $x \neq 0$  é denominado um *raio* de  $C^n$ .

Note que todo elemento  $[x] \in C^n$  tem uma “norma” bem definida  $\|[x]\| = \|x\| = \|-x\|$ , que satisfaz  $\|[\lambda x]\| = |\lambda| \|x\|$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Note também que  $\Gamma$  age sobre  $C^n$  via  $p$ :  $\gamma[x] = [(p\gamma)x]$ . Consequentemente  $\Gamma$  age sobre  $C^n \times \mathbb{R}^n$ :  $\gamma([x], y) = (\gamma[x], \gamma y) = ((p\gamma)x, \gamma y)$ .

Para cada  $h \in H < \mathbb{R}^n$ ,  $h \neq 0$ , escreva  $l_h = \mathbb{R}h = \{th, t \in \mathbb{R}\}$  e  $\mathcal{L}_h = \{l, \text{reta em } \mathbb{R}^n; l \parallel l_h\}$ . Note que  $\mathcal{L}_h$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^{n-1}$  (considerando  $\mathcal{L}_h$  com a topologia quociente). Escreva também  $\mathcal{L} = \bigcup_{h \in H} \mathcal{L}_h$ . Observe que  $\Gamma$  age sobre  $\mathcal{L}$ , pois, se  $l \parallel l_h$ , então  $\gamma l \parallel l_{(p\gamma)h}$ ,  $h \in H$ ,  $\gamma \in \Gamma$ .

Escreva  $\Lambda = \{\mathcal{L}_h, h \in H\}$ . Observe que  $\Gamma$  age sobre  $\Lambda$ :  $\gamma\mathcal{L}_h = \mathcal{L}_{(p\gamma)h}$  (esta bem definida pois,  $l \parallel l_h$ ,  $h \in H$ , então  $\gamma l \parallel l_{(p\gamma)h}$ ,  $h \in H$ ,  $\gamma \in \Gamma$ ). Em particular, se  $\gamma$  é uma translação então  $\gamma\mathcal{L}_h = \mathcal{L}_h$ , para todo  $h \in H$ . Desde que  $p\gamma \in F$  e  $F$  é finito, temos que as órbitas  $\Gamma\mathcal{L}_h$  de  $\mathcal{L}_h$  são finitas, para todo  $h \in H$ . Enumeremos essas órbitas:  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots$  então:

(1) Cada  $\Lambda_k$  é finita.

$$(2) \Gamma \Lambda_k = \Lambda_k.$$

$$(3) \bigcup_k \Lambda_k = \Lambda.$$

Para cada  $l \in \mathcal{L}$  defina  $c(l) \in C^n$ , a *altura* de  $l$ , da seguinte maneira: Se  $l \in \mathcal{L}$ , então  $l \parallel l_h$  para algum  $h \in H$  logo existe  $k$  tal que  $\mathcal{L}_h \in \Lambda_k$ . Defina  $c(l) = [\frac{kh}{\|h\|}] \in C^n$ . Note que  $c(l)$  esta bem (e unicamente) definida. Note também que  $\gamma c(l) = c(\gamma l)$  e que  $c$  é constante sobre cada  $\mathcal{L}_h$ .

Para  $l \in \mathcal{L}$ , escreva  $\bar{l} = \{c(l)\} \times l \subset C^n \times \mathbb{R}^n$ . Pensamos  $\bar{l}$  como a reta  $l \subset \mathbb{R}^n$  levantada na altura  $c(l) \in C^n$ . Defina  $\bar{\mathcal{L}} = \{\bar{l}, l \in \mathcal{L}\}$ , e  $\bar{\mathcal{L}}_h = \{\bar{l}, l \in \mathcal{L}_h\}$ . Note que  $\bar{\mathcal{L}} = \bigcup_{h \in H} \bar{\mathcal{L}}_h$ . Então  $\bar{\mathcal{L}}$  é um conjunto de “retas” disjuntas em  $C^n \times \mathbb{R}^n$ . Isto é, se  $\bar{l}_1, \bar{l}_2 \in \bar{\mathcal{L}}$ , ou  $\bar{l}_1 \cap \bar{l}_2 = \emptyset$  ou  $\bar{l}_1 = \bar{l}_2$ .

Finalmente, defina  $A = C^n \times \mathbb{R}^n / \cong$ , onde  $x \cong y \Leftrightarrow x = y$  ou  $x, y \in \bar{l}$ , para algum  $\bar{l} \in \bar{\mathcal{L}}$ , isto é,  $A$  é obtido de  $C^n \times \mathbb{R}^n$  identificando cada reta em  $\bar{\mathcal{L}}$  com um ponto.

Seja  $Y = \bigcup_{\bar{l} \in \bar{\mathcal{L}}} \bar{l} \subset C^n \times \mathbb{R}^n$ . Então  $\Gamma Y = Y$  e  $\Gamma((C^n \times \mathbb{R}^n) - Y) = (C^n \times \mathbb{R}^n) - Y$ . Assim a ação de  $\Gamma$  sobre  $C^n \times \mathbb{R}^n$  induz uma ação de  $\Gamma$  sobre  $A$ . Seja  $\pi : C^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow A$  o mapa de colapso, e escreva  $Z = \pi Y$ . Então  $\Gamma Z = Z$  e  $\Gamma(A - Z) = A - Z$ . Note que  $(C^n \times \mathbb{R}^n) - Y \cong_{\Gamma} A - Z$ . Desde que  $\bar{\mathcal{L}} = \bigcup_{h \in H} \bar{\mathcal{L}}_h$ , então  $Y = \bigcup_{h \in H} (\bigcup_{\bar{l} \in \bar{\mathcal{L}}_h} \bar{l})$ . Consequentemente  $Z = \pi Y = \bigcup_{h \in H} \pi Y_h = \bigcup_{h \in H} Z_h$ , onde  $Y_h = \bigcup_{\bar{l} \in \bar{\mathcal{L}}_h} \bar{l}$  e  $Z_h = \pi Y_h$ .

## A ação de $\Gamma$ sobre $Z$

Desde que as componentes conexas de  $Z$  são os  $Z_h$ , temos que: ou  $\gamma Z_h = Z_h$  ou  $\gamma Z_h \cap Z_h = \emptyset$ , para  $\gamma \in \Gamma$ . Considere  $\Gamma^{(Z_h)} = \{\gamma \in \Gamma; \gamma Z_h = Z_h\}$ . Note que  $\Gamma^{(Z_h)} = \Gamma^{(\bar{\mathcal{L}}_h)} = \Gamma^{(\mathcal{L}_h)}$ . Nós queremos estudar a ação de  $\Gamma^{(Z_h)}$  sobre  $Z_h$ , ou equivalentemente, a ação de  $\Gamma^{(\mathcal{L}_h)}$  sobre  $\mathcal{L}_h$ . Para isto precisamos de um homeomorfismo explícito entre  $\mathcal{L}_h$  e  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Defina  $\alpha_h := (l_h)^\perp \subset \mathbb{R}^n$ , isto é,  $\alpha_h$  é o  $(n-1)$ -espaço ortogonal a reta gerada por  $h$ . Então para todo  $l \in \mathcal{L}_h$ , definimos  $p_l$  como o único ponto tal que  $\{p_l\} := l \cap \alpha_h$ . Escreva  $\varphi(l) = p_l$ . É fácil verificar que  $\varphi$  é um homeomorfismo

entre  $\mathcal{L}_h$  e  $\alpha_h \cong \mathbb{R}^{n-1}$ . Seja  $\gamma \in \Gamma$ . Então existe  $J \in O(n), a \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\gamma x = Jx + a$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Escrevemos  $\gamma = (J, a)$ . Então  $\gamma \in \Gamma^{(\mathcal{L}_h)}$ , se e somente se,  $Jh = \pm h$ . Isto implica que  $Jl_h = l_h$  e  $J\alpha_h = \alpha_h$ . Assim,  $J|_{\alpha_h} : \alpha_h \rightarrow \alpha_h$  e  $J|_{\alpha_h} \in O(\alpha_h)$  ( $\alpha_h$  com o produto escalar de  $\mathbb{R}^n$ ). Escreva  $a = a_0 + \lambda h$ , com  $a_0 \in \alpha_h$ , isto é,  $a_0 = Proj_{\alpha_h} a$ . Defina  $\bar{\gamma} : \alpha_h \rightarrow \alpha_h$ , por  $\bar{\gamma} := \varphi\gamma\varphi^{-1}$ . Portanto temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_h & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{L}_h \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \alpha_h & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & \alpha_h \end{array}$$

Um simples cálculo mostra que  $\bar{\gamma} = (J|_{\alpha_h}, a_0)$ , assim  $\Gamma^{(\mathcal{L}_h)}$  age por isometrias sobre  $\mathcal{L}_h$ , onde consideramos  $\mathcal{L}_h$  como um espaço vetorial com produto escalar obtido identificando  $\mathcal{L}_h$  com  $\alpha_h \subset \mathbb{R}^n$ . Ainda mais, esta ação é cristalográfica, isto é, propriamente descontínua e cocompacta (ver [14]).

## A triangulação de $A$

$C^n$  e  $\mathbb{R}^n$  são  $\Gamma$ -espaços PL, portanto  $C^n \times \mathbb{R}^n$  é um  $\Gamma$ -espaço PL. Seja  $\mathcal{T}_C$  uma triangulação  $\Gamma$ -equivariante de  $C^n$  e  $\mathcal{T}_R$  uma triangulação  $\Gamma$ -equivariante de  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $\tilde{\mathcal{T}}$  a estrutura celular sobre  $C^n \times \mathbb{R}^n$  com células produto  $\sigma_C \times \sigma_R, \sigma_C \in \mathcal{T}_C, \sigma_R \in \mathcal{T}_R$ . Então,  $\tilde{\mathcal{T}}$  é  $\Gamma$ -equivariante. Podemos supor que cada  $Y_h$  é um subcomplexo de  $C^n \times \mathbb{R}^n$  (pois sua projeção em  $C^n$  é um ponto). Portanto  $\tilde{\mathcal{T}}$  induz uma triangulação  $\Gamma$ -equivariante  $\mathcal{T}$  sobre  $A$  com as seguintes propriedades:

- (1) Cada  $Z_h$  é um subcomplexo de  $A$ .
- (2) Se  $\sigma$  é uma  $k$ -célula aberta em  $A - Z \cong_{\Gamma} (C^n \times \mathbb{R}^n) - Y$ , então  $\sigma = \sigma_C^i \times \sigma_R^j$ ,  $k = i + j$ .
- (3) A ação de  $\Gamma$  é regular:  $\gamma\sigma = \sigma \Rightarrow \gamma x = x$ , para todo  $x \in \sigma$ .

Dizemos que uma 1-célula  $\sigma_C^1$  em  $C^n$  é uma *célula raio*, se  $\sigma_C^1$  esta contida num

raio de  $C^n$ .

**Teorema 1.2.1:**  $\Gamma \times A \longrightarrow A$  é um  $(\Gamma, VC(\Gamma))$ -espaço universal.

**Prova:** Devemos verificar as seguintes propriedades:

(1)  $A$  pode ser equipado com uma triangulação  $K$  tal que  $\Gamma \times A \longrightarrow A$  é uma ação simplicial. Ainda mais, se para  $\gamma \in \Gamma$  e  $\Delta \in K$  tivermos que  $\gamma(\Delta) = \Delta$ , então  $\gamma|_{\Delta} = \text{inclusão}$ .

(2) Para qualquer  $p \in A$  temos que  $\Gamma^p \in VC(\Gamma)$ .

(3) Para cada subgrupo  $G \in VC(\Gamma)$  temos que  $A^G$  é um subcomplexo não vazio contrátil de  $K$ .

Para verificar (1), note que  $A/\Gamma$  é um espaço  $C^\infty$ -estratificado e pode portanto ser triangulado. Agora defina  $K$ , triangulação para  $A$ , como um levantamento da triangulação para  $A/\Gamma$ .

Para verificar (2), primeiro note que se  $p \in A - Z$  então  $\Gamma^p$  é um grupo finito. Por outro lado, se  $p \in Z$ , então,  $p \in Z_h$ , para algum  $h \in H$ . Assim,  $\Gamma^p = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(q + \mathbb{R}h) = q + \mathbb{R}h\}$ , onde  $\pi^{-1}(p) = q + \mathbb{R}h$ . Portanto  $\Gamma^p$  age propriamente descontinuamente e cocompactamente sobre a reta  $q + \mathbb{R}h$  por isometrias; conseqüentemente,  $\Gamma^p \in VC(\Gamma)$ .

Finalmente verifiquemos (3). Primeiro considere o caso onde  $G \in VC(\Gamma)$  contém um elemento  $g \in G$  de ordem infinita, isto é,  $G$  contém translações. Então  $A^G \cap ((C^n \times \mathbb{R}^n) - Y) = \emptyset$ . Assim  $A^G \subset Z$ . Ainda mais  $A^G \subset Z_h$ , onde  $h \in H$  é tal que  $\tau_h \in G$ . Seja  $l = a + \mathbb{R}h$  a reta tal que  $Gl = l$ , isto é,  $G < \Gamma^{(l)}$ . Também  $[l] \in Z_h \subset Z \subset A$ . Desde que  $Gl = l$ , temos que  $G[l] = [l]$ , isto é  $[l] \in A^G$ . Segue que  $A^G \neq \emptyset$ .

Note que  $G < \Gamma^{(Z_h)}$ , e  $A^G \subset Z_h$  é precisamente o conjunto de pontos fixos de ação de  $G$  sobre  $Z_h$ . Sabemos que a ação de  $\Gamma^{(Z_h)}$  sobre  $Z_h$  é linear (de fato, é cristalográfica). Assim  $A^G = \bigcap_{g \in G} A^{\{g\}}$ , e cada  $A^{\{g\}}$  é um espaço vetorial. Portanto

$A^G$  é contrátil.

Considere agora o caso onde  $F \in VC(\Gamma)$  é finito. Se  $F$  é um grupo finito, então, existe  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Fy_0 = y_0$ . Portanto  $([0], y_0) \in A^F$ .

Agora provemos que  $A^F$  é contrátil. Desde que  $\pi : C^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow A$  é um mapa celular, é suficiente provar que  $B = \pi^{-1}(A^F)$  é contrátil. Sem perda de generalidade, podemos supor que  $y_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ , isto é,  $F0 = 0$ . Então, todo  $f \in F$  é linear. Seja  $\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_1 \oplus E_2$  uma decomposição ortogonal tal que:

(1)  $F|_{E_0} = 1_{E_0}$ .

(2)  $E_1 = \{y \in \mathbb{R}^n; fy = \pm y \text{ para todo } f \in F \text{ e existe } f \in F \text{ tal que } fy = -y\}$ .

(3)  $E_2 = (E_0 \oplus E_1)^\perp$ .

Seja  $PE_i \subset \mathbb{R}P^{n-1}$  a projetivização de  $E_i \subset \mathbb{R}^n$  e  $C(PE_i) \subset C(\mathbb{R}P^{n-1}) = C^n$  o cone de  $PE_i$ .

**Afirmção 1:**  $B = \{[C(PE_0) \cup C(PE_1)] \times E_0\} \cup \{\bigcup_{l \in \mathcal{L}, Fl=l} \bar{l}\}$ .

**Prova:** Considere  $B_1 = B \cap [(C^n \times \mathbb{R}^n) - Y]$  e  $B_2 = B \cap Y$ . Então  $B = B_1 \amalg B_2$ . Note que, se  $([x], y) \in [C(PE_0) \cup C(PE_1)] \times E_0$ , temos  $Fy = y$  e  $Fx = \pm x$ . Assim  $([x], y) \in B_1$ . Note também que  $B_2 = B \cap Y = \bigcup_{l \in \mathcal{L}, Fl=l} \bar{l}$ . Portanto

$$\{[C(PE_0) \cup C(PE_1)] \times E_0\} \cup \left\{ \bigcup_{l \in \mathcal{L}, Fl=l} \bar{l} \right\} \subset B.$$

Reciprocamente, se  $([x], y) \in B_1$ , então  $Fy = y$  e  $Fx = \pm x$ . Assim  $y \in E_0$  e  $x \in E_0$  ou  $E_1$ . Logo  $[x] \in C(PE_0) \cup C(PE_1)$ . Portanto  $([x], y) \in [C(PE_0) \cup C(PE_1)] \times E_0$ . Isto prova a afirmação .

**Afirmção 2:** Se  $Fl = l$ , então  $l \cap E_0 \neq \emptyset$ . Ainda mais, ou  $l \subset E_0$  ou  $l \subset E_1 + y$ ,  $\{y\} = l \cap E_0$ .

**Prova:** Desde que  $Fl = l$  e  $F$  é finito, existe  $a \in l$ , tal que  $Fa = a$ . Assim  $a \in E_0$ , e segue que  $l \cap E_0 \neq \emptyset$ .

Suponha que  $l \not\subset E_0$ . Sabemos que  $l \parallel l_h$ , para algum  $h \in H$ . Então,  $y + h \in l$ , onde  $\{y\} = l \cap E_0$ . Desde que  $fy = y$  para todo  $f \in F$ , temos que  $F(y + h) = y \pm h$ . Como existe um  $f \in F$  tal que  $f(y + h) = y - h$ , segue que  $fh = -h$  para algum  $f \in F$ . Assim  $h \in E_1$ . Portanto,  $l \subset E_1 + y$ . Isto prova a afirmação .

Se  $l \subset E_0$ ,  $l \parallel l_h = \mathbb{R}h$ ,  $h \in E_0$ . Então  $c(l) \in C(PE_0)$ . Assim, se  $a \in l$  temos  $(c(l), a) \in C(PE_0) \times E_0$ . Logo  $\bar{l} \subset C(PE_0) \times E_0$ . De outra forma, se  $l \subset E_1 + y$ ,  $l \parallel l_h$ ,  $h \in E_1$ . Assim  $c(l) \in C(PE_1)$ . Se  $a \in l$ , então  $(c(l), a) \in [C(PE_0) \cup C(PE_1)] \times E_0$  se e somente se  $a \in E_0$ , isto é,  $a = y$ . Portanto,  $\bar{l} \cap [C(PE_0) \cup C(PE_1)] \times E_0 = \{ponto\}$ . Agora considere o mapa celular  $B \rightarrow B / \sim$ , onde  $\sim$  colapsa cada reta  $\bar{l}$ , a um ponto  $p_l$ , onde  $l$  é tal que  $l \subset E_1 + y$ ,  $\{y\} = l \cap E_0$ . Mas, para cada  $l$ , temos  $\bar{l} \cap [C(PE_0) \cup C(PE_1)] \times E_0 = \{ponto\}$ . Assim  $[B / \sim] \cong_{top} [C(PE_0) \cup C(PE_1)] \times E_0$ . Desde que  $[C(PE_0) \cup C(PE_1)] \times E_0$  é contrátil e  $B \rightarrow B / \sim$  é um mapa celular, temos que  $B$  é contrátil. Também, porque  $\pi$  é um mapa celular temos que  $A^F$  é contrátil. Isto prova a propriedade (3). Portanto  $\Gamma \times A \rightarrow A$  é um  $(\Gamma, VC(\Gamma))$ -espaço universal. Isto prova o teorema.

### 1.3 Subgrupos virtualmente cíclicos infinitos em dimensão três

Nesta seção calcularemos, módulo isomorfismo, os subgrupos virtualmente cíclicos infinitos de um grupo 3-cristalográfico.

Seja  $G$  um subgrupo virtualmente cíclico infinito do grupo 3-cristalográfico  $\Gamma$ . Lembre-se que  $G$  deixa invariante uma reta  $l$  em  $\mathbb{R}^3$ , isto é,  $G < \Gamma^{(l)}$  (ver Proposição 0.2.7), e  $G$  age cocompactamente sobre  $l$ . Assim temos duas possibilidades:

- (1)  $G$  age por translações e por reflexões sobre  $l$ , isto é,  $G$  tem uma ação diedral sobre  $l$ .
- (2)  $G$  age apenas por translações sobre  $l$ .

No primeiro caso temos a sobrejeção  $G \rightarrow D_\infty$ , e no segundo caso temos a sobrejeção  $G \rightarrow \mathbb{Z}$ . Em qualquer caso, temos

$$0 \rightarrow F \hookrightarrow G \xrightarrow{\rho} H \rightarrow 0,$$

onde  $H$  é isomorfo a  $D_\infty$  ou  $\mathbb{Z}$ ,  $\rho(g) = g|_l : l \rightarrow l$ , e  $F$ , é o subgrupo de todos elementos  $g \in G$ , que fixam  $l$  pontualmente, isto é,  $g|_l = 1_l$ . Assim,  $F$  age sobre um plano  $\alpha$  ortogonal a  $l$  (escolha qualquer plano ortogonal a  $l$ ). Pela restrição cristalográfica (ver Proposição 0.2.3), segue que  $F$  é trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}_i$  ou  $D_i$ ,  $i = 2, 3, 4, 6$ . Analisemos os dois casos separadamente.

$$H \cong D_\infty$$

Então,  $G$  tem uma ação diedral sobre  $l$ . Escreva  $D_\infty = \mathbb{Z}_2^a * \mathbb{Z}_2^b$ , onde  $a$  e  $b$  são reflexões em torno dos pontos  $p_a, p_b \in l$ ,  $p_a \neq p_b$  respectivamente. Assim  $G = G^a *_F G^b$ , onde  $G^a = \rho^{-1}(\mathbb{Z}_2^a)$ ,  $G^b = \rho^{-1}(\mathbb{Z}_2^b)$  e  $F \hookrightarrow G^a$ ,  $F \hookrightarrow G^b$  são inclusões (ver [29], p. 178).

**Lema 1.3.1:** *Sejam  $F$  e  $G$  como acima. Então*

- (1)  $F$  tem índice dois em  $G^a$  e em  $G^b$ , isto é,  $|G^a/F| = |G^b/F| = 2$ .
- (2)  $G^a$  e  $G^b$  são as isotropias de  $p_a$  e  $p_b$  respectivamente, isto é,  $G^a = G^{\{p_a\}}$  e  $G^b = G^{\{p_b\}}$ .

**Prova de (1):** Ver Proposição 0.2.6 (3).

**Prova de (2):** Seja  $\tilde{a} \in G$ , tal que  $\rho(\tilde{a}) = a$ . Se  $g \in G^a$ , então  $g = f$  ou  $g = \tilde{a}f$ , para algum  $f \in F$ . Desde que  $\tilde{a}, f \in G^{\{p_a\}}$ , segue que  $g \in G^{\{p_a\}}$ . Reciprocamente, se  $g \in G^{\{p_a\}}$ ,  $gp_a = p_a$ . Portanto  $\rho(g)(p_a) = p_a$ . Assim  $\rho(g)$  é a identidade ou  $a \in D_\infty$ . Isto prova  $G^a = G^{\{p_a\}}$ . A prova de  $G^b = G^{\{p_b\}}$  é análoga.

**Teorema 1.3.2:** *Seja  $G$  um subgrupo de um grupo 3-cristalográfico. Suponha que  $G$  tem uma ação diedral sobre uma reta  $l$ . Então,  $G$  é isomorfo a  $G^a *_F G^b$ , onde*

as possibilidades para  $(F, G^a, G^b)$  são mostradas na tabela abaixo.

$F$	$G^a$	$G^b$
<i>trivial</i>	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4$
	$D_2$	$\mathbb{Z}_4$
	$D_2$	$D_2$
$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_6$
	$D_3$	$\mathbb{Z}_6$
	$D_3$	$D_3$
$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$
	$D_4$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$
	$D_4$	$D_4$
$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$
	$D_6$	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$
	$D_6$	$D_6$
$D_2$	$D_2 \times \mathbb{Z}_2$	$D_2 \times \mathbb{Z}_2$
	$D_4$	$D_2 \times \mathbb{Z}_2$
	$D_4$	$D_4$
$D_3$	$D_3 \times \mathbb{Z}_2$	$D_3 \times \mathbb{Z}_2$
$D_4$	$D_4 \times \mathbb{Z}_2$	$D_4 \times \mathbb{Z}_2$
$D_6$	$D_6 \times \mathbb{Z}_2$	$D_6 \times \mathbb{Z}_2$

**Observação :** Na tabela acima não damos as inclusões  $F \hookrightarrow G^a$  ou  $F \hookrightarrow G^b$  pois não é difícil mostrar que se  $i_1 : F \rightarrow G^a$ ,  $i_2 : F \rightarrow G^a$  são um a um, então existe  $\varphi \in \text{Aut}(G^a)$  tal que  $i_2 = \varphi \circ i_1$ . Analogamente para  $G^b$ . Portanto a classe de isomorfismo  $G^a *_F G^b$  não depende em particular das inclusões.

**Prova:** Suponha que  $G$  age cocompactamente sobre a reta  $l$ . Pela discussão acima,  $0 \rightarrow F \hookrightarrow G \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z}_2^a * \mathbb{Z}_2^b \rightarrow 0$  e  $G = G^a *_F G^b$ , onde:

- (1)  $F$  é trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}_i$ ,  $D_i$ ,  $i = 2, 3, 4, 6$ .
- (2)  $F$  tem índice dois em  $G^a$  e  $G^b$ .
- (3)  $F = \{g \in G; g|_l = 1_l\}$ ,  $G^a = G^{\{p_a\}}$  e  $G^b = G^{\{p_b\}}$  para algum  $p_a, p_b \in l$ ,  $p_a \neq p_b$ .

Desde que  $G^a, G^b$  fixam um ponto em  $\mathbb{R}^3$ ,  $G^a, G^b$  são isomorfos a um dos seguintes grupos  $\mathbb{Z}_i, \mathbb{Z}_i \times \mathbb{Z}_2, D_i, D_i \times \mathbb{Z}_2, A_4, A_4 \times \mathbb{Z}_2, S_4, S_4 \times \mathbb{Z}_2, i = 2, 3, 4, 6$ . Por (1) e (2) temos as seguintes possibilidades, mostradas na tabela abaixo:

$F$	$G^a$	$G^b$
<i>trivial</i>	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4$
	$D_2$	$\mathbb{Z}_4$
	$D_2$	$D_2$
$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_6$
	$D_3$	$\mathbb{Z}_6$
	$D_3$	$D_3$
$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$
	$D_4$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$
	$D_4$	$D_4$
$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$
	$D_6$	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$
	$D_6$	$D_6$
$D_2$	$D_2 \times \mathbb{Z}_2$	$D_2 \times \mathbb{Z}_2$
	$D_4$	$D_2 \times \mathbb{Z}_2$
	$D_4$	$D_4$
	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$	$D_2 \times \mathbb{Z}_2$
	$D_4$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$
	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$
$D_3$	$D_3 \times \mathbb{Z}_2$	$D_3 \times \mathbb{Z}_2$
$D_4$	$D_4 \times \mathbb{Z}_2$	$D_4 \times \mathbb{Z}_2$
$D_6$	$D_6 \times \mathbb{Z}_2$	$D_6 \times \mathbb{Z}_2$

O grupo  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$  age por isometria sobre  $\mathbb{R}^3$  de uma única maneira (módulo conjugação). Isto é, o fator  $\mathbb{Z}_4$  fixa uma reta  $\tilde{l}$  pontualmente e age sobre um plano  $\tilde{\alpha}$  ortogonal a  $\tilde{l}$ , por rotações. O fator  $\mathbb{Z}_2$  age trivialmente sobre  $\tilde{\alpha}$  e por reflexão sobre  $\tilde{l}$ . Note que a única reta em  $\mathbb{R}^3$  fixada (como conjunto) por  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$  é  $\tilde{l}$ . Se  $F = D_2$  e  $G^a$  ou  $G^b = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ , então  $\mathbb{Z}_2$  age trivialmente sobre  $\alpha$  e por reflexões sobre a reta  $l$ . Também  $\mathbb{Z}_4$  age trivialmente sobre  $l$  e por rotações sobre  $\alpha$ . Mas, por (3) acima, devemos ter  $D_2 \cong \mathbb{Z}_4$ , o que é uma contradição. Portanto, os grupos

$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) *_{D_2} (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2)$ ,  $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) *_{D_2} D_4$  e  $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) *_{D_2} (D_2 \times \mathbb{Z}_2)$  não ocorrem geometricamente como subgrupos virtualmente cíclicos infinitos de um grupo 3-cristalográfico  $\Gamma$ . Isto prova o teorema.

$$H \cong \mathbb{Z}$$

Então,  $G$  age apenas por translações sobre  $l$  e entra na sequência

$$0 \rightarrow F \hookrightarrow G \xrightarrow{\rho} H \rightarrow 0,$$

com  $F$  trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}_i$  ou  $D_i$ ,  $i = 2, 3, 4, 6$ . Assim  $G = F *_F \cong F \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$  para algum automorfismo  $\varphi : F \rightarrow F$  (ver [29], p. 178).

Dar uma ação de  $\mathbb{Z}$  sobre  $F$ , significa dar um automorfismo  $\varphi$  de  $F$ . Como a classificação dos grupos  $F *_F \cong F \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$  é modulo isomorfismo,  $\varphi$  deve ser um automorfismo externo, isto é,  $\varphi \in \text{Out}(F)$ . Ainda mais, se  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são conjugados em  $\text{Out}(F)$ ,  $F \rtimes_{\varphi_1} \mathbb{Z}$  e  $F \rtimes_{\varphi_2} \mathbb{Z}$  são isomorfos. Um cálculo direto mostra que:

- (1)  $\text{Out}(F)$  é trivial, para  $F$  isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$  ou  $D_3$ .
- (2)  $\text{Out}(F) \cong \mathbb{Z}_2$ , para  $F$  isomorfo a  $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, D_4$  ou  $D_6$ .
- (3)  $\text{Out}(D_2) \cong D_3$ .

Note que  $D_3$  tem apenas três classes de conjugação :  $[1], [\varphi], [\phi]$ , onde  $\varphi : D_2 \rightarrow D_2$  tem ordem 2 e  $\phi : D_2 \rightarrow D_2$  tem ordem 3.

Quando é que um grupo da forma  $F \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ , com  $F$  trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}_i$  ou  $D_i$ ,  $i = 2, 3, 4, 6$ , ocorre como subgrupo virtualmente cíclico infinito de um grupo 3-cristalográfico?

Para simplificar a notação, assuma que  $l$  é o eixo-z. Segue que  $\alpha = l^{\perp} \cong \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ . Assuma também que todo  $g \in G$  é da forma  $g = (J, ne_3)$ ,  $J \in O(2) \subset O(3)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$  (isto significa  $gx = Jx + ne_3$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ ) e a ação de  $G$  sobre  $l = \mathbb{R}e_3$  é gerada por  $\tau_{e_3}$ , onde  $\tau_{e_3}$  denota translação por  $e_3$ .

Como  $\rho$  é sobre, existe  $J \in O(2) \subset O(3)$  tal que  $(J, e_3) \in G$ . Então a ação de  $H \cong \mathbb{Z}$  sobre  $F$  é gerada por conjugação por  $g_0 = (J, e_3)$ , isto é,  $g_0^{-1}fg_0 = J^{-1}fJ = \varphi f$ . Assim  $F \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$  ocorre geometricamente se existir um  $J \in O(2)$  tal que  $J^{-1}fJ = \varphi f$  para todo  $f \in F$ .

**Teorema 1.3.3:** *Seja  $G$  um subgrupo de um grupo 3-cristalográfico. Suponha que  $G$  age cocompactamente, descontinuamente e por translações sobre uma reta  $l$ . Então  $G$  é isomorfo a um dos seguintes grupos, mostrados na tabela abaixo:*

$F$	$F *_F$
<i>trivial</i>	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}$
	$\mathbb{Z}_3 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}$
	$\mathbb{Z}_4 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}$
	$\mathbb{Z}_6 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$
$D_2$	$D_2 \times \mathbb{Z}$
	$D_2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$
$D_3$	$D_3 \times \mathbb{Z}$
$D_4$	$D_4 \times \mathbb{Z}$
	$D_4 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$
$D_6$	$D_6 \times \mathbb{Z}$
	$D_6 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$

onde  $\varphi \neq 1 \in \text{Out}(F)$ , e para  $F = D_2$ ,  $\varphi$  tem ordem 2.

**Prova:** Pela discussão acima, devemos determinar um automorfismo  $\varphi : F \rightarrow F$  e  $J \in O(2)$  tal que  $J^{-1}fJ = \varphi f$ , para todo  $f \in F$ .

Se  $F$  é o grupo trivial, então  $G = \mathbb{Z}$

Se  $F = \mathbb{Z}_i$ ,  $i = 3, 4, 6$ , então  $\text{Out}(\mathbb{Z}_i) = \text{Aut}(\mathbb{Z}_i) = \{1_F, \varphi\}$ , onde  $\mathbb{Z}_i = \langle t; t^i = 1 \rangle$  e  $\varphi : \mathbb{Z}_i \rightarrow \mathbb{Z}_i$ , definido por  $\varphi(t) \rightarrow t^{i-1}$ . Portanto, geometri-

amente, obtemos os grupos  $\mathbb{Z}_i \rtimes_{1_{\mathbb{Z}_i}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_i \times \mathbb{Z}$ ,  $i = 2, 3, 4, 6$  tomando  $J = 1_{\mathbb{R}^2}$ . Também obtemos  $\mathbb{Z}_i \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ , tomando  $J(x, y) = (x, -y)$ , se  $i = 3$ , e  $J(x, y) = (y, x)$ , se  $i = 4, 6$ .

Se  $F = D_2 = \{1, r_x, r_y, -1\}$ , onde  $r_x, r_y$  denota as reflexões em torno dos eixos  $x, y$  respectivamente, e  $(-1)$  denota a rotação por  $\pi$ , então,

$$\text{Out}(D_2) = \text{Aut}(D_2) \cong D_3 = \langle \varphi, \phi; \phi^3 = 1, \varphi^2 = 1, (\varphi\phi)^2 = 1 \rangle.$$

Desde que existem três classes de conjugações em  $D_3$ ,  $[1], [\varphi]$  e  $[\phi]$ , existem no máximo (módulo isomorfismo) três possibilidades:  $D_2 \rtimes_{1_{D_2}} \mathbb{Z}$ ,  $D_2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ , e  $D_2 \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}$ . Mas, não existe  $J \in O(2)$  tal que  $J^{-1}(-1)J \neq (-1)$ . Assim o grupo  $D_2 \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}$ , não ocorre geometricamente. Portanto, existem apenas duas possibilidades:  $D_2 \rtimes_{1_{D_2}} \mathbb{Z} = D_2 \times \mathbb{Z}$  e  $D_2 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ , os quais, obtemos geometricamente tomando  $J = 1_{\mathbb{R}^2}$  e  $J(x, y) = (y, x)$  respectivamente.

Se  $F$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$  ou  $D_3$ , então  $\text{Out}(F) = 1$  e obtemos os grupos  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$  e  $D_3 \times \mathbb{Z}$  respectivamente.

Se  $F$  é isomorfo a  $D_4$  ou  $D_6$ , então  $F = \langle s, t; t^i = 1, s^2 = 1, (st)^2 = 1 \rangle$ ,  $i = 4, 6$ , e temos  $\text{Out}(D_4) \cong \text{Out}(D_6) \cong \{1, \varphi\}$ , onde  $\varphi(s) = s$  e  $\varphi(t) = t^{i-1}$ ,  $i = 4, 6$ . Portanto, existem duas possibilidades:  $D_i \rtimes_{1_{D_i}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_i \times \mathbb{Z}$  e  $D_i \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}$ ,  $i = 4, 6$ , e podemos mostrar que eles ocorrem geometricamente tomando  $J = 1_{\mathbb{R}^2}$  e  $J(x, y) = (y, x)$  respectivamente. Isto prova o teorema.

## 1.4 Isotropia em dimensão três

Nesta seção calcularemos os possíveis grupos de isotropia  $\Gamma^{\sigma} = \{\gamma \in \Gamma; \gamma\sigma = \sigma\}$ , para  $\sigma$  uma célula aberta no  $(\Gamma, VC(\Gamma))$ -espaço universal  $A$ . Usaremos também os seguintes fatos sobre um grupo 3-cristalográfico  $\Gamma$  e um subgrupo finito  $F$  de  $\Gamma$ .

(a) Se  $\gamma \in \Gamma$  tem ordem finita, então  $1 \leq |\gamma| \leq 6$ . Isto é devido a restrição cristalográfica (ver Proposição 0.2.3).

(b) Se  $F$  é finito, então  $F$  é trivial ou isomorfo a um dos seguintes grupos:  $\mathbb{Z}_i, D_i, \mathbb{Z}_i \times \mathbb{Z}_2, D_i \times \mathbb{Z}_2, A_4, S_4, A_4 \times \mathbb{Z}_2, S_4 \times \mathbb{Z}_2$ ,  $i = 2, 3, 4, 6$  (ver Proposição 0.2.4).

(c) Se  $F$  é isomorfo a um dos grupos  $A_4, S_4, A_4 \times \mathbb{Z}_2, S_4 \times \mathbb{Z}_2$ , então  $Fl \neq l$  para toda reta em  $\mathbb{R}^3$ , isto é,  $F$  não deixa nenhuma reta invariante. Em particular  $(\mathbb{R}^3)^F = \{x \in \mathbb{R}^3; \gamma x = x, \text{ para todo } \gamma \in F\} = \{\text{ponto}\}$  (ver [30], p. 48).

(d) Se  $F$  fixa um ponto  $x_0$  e deixa invariante uma reta  $l$  que contém  $x_0$  (ou equivalentemente, um plano  $\alpha$  que contém  $x_0$ ). Então, por (b) e (c) acima, segue que  $F$  é trivial ou isomorfo a um dos grupos  $\mathbb{Z}_i, D_i, \mathbb{Z}_i \times \mathbb{Z}_2, D_i \times \mathbb{Z}_2$ ,  $i = 2, 3, 4, 6$ .

Nós vamos precisar do seguinte lema.

**Lema 1.4.1:** *Seja  $G$  um subgrupo virtualmente cíclico infinito de um grupo 3-cristalográfico  $\Gamma$ . Se  $G$  deixa invariante duas retas diferentes, então  $G$  é trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}, D_\infty, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$  ou  $D_\infty \times \mathbb{Z}_2$ .*

**Prova:** Suponha que  $\mathcal{L}^G \supset \{l, \tilde{l}\}$ , com  $l \neq \tilde{l}$ , e  $G$  agindo cocompactamente sobre  $l$ . Assim  $l \parallel \tilde{l}$  (se  $l, \tilde{l}$  não estão contidas num plano,  $G$  é trivial). Portanto  $G$  deixa invariante o plano  $\alpha$  que contém  $l, \tilde{l}$ . Ainda mais,  $G$  deixa invariante toda reta em  $\alpha$  que é paralela a  $l$ . Note também, que se  $g \in G$  age trivialmente sobre  $l$ , então,  $g$  age trivialmente sobre  $\alpha$ . Seja  $\beta$  o plano que contém  $l$  e é ortogonal ao plano  $\alpha$ . Então  $G$  deixa invariante  $\beta$ . Note que, se  $g \in G$  age trivialmente sobre  $\beta$ , então  $g$  age trivialmente sobre  $\mathbb{R}^3$ , isto é,  $g$  é a identidade. Assim  $G$  é um virtualmente cíclico infinito agindo apenas sobre  $\mathbb{R}^2$ . Portanto  $G$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}, D_\infty, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, D_\infty \times \mathbb{Z}_2$  (ver [24]).

## Isotropia de 0-células

Seja  $\sigma^0$  uma 0-célula em  $A$  e  $\gamma \in \Gamma$ . Temos dois casos:

**Primeiro caso:**  $\sigma^0 \subset A - Z$ .

Lembre-se que  $A - Z$  é  $\Gamma$ -homeomorfo a  $(C^3 \times \mathbb{R}^3) - Y$ . Então  $\sigma^0 = \sigma_C^0 \times \sigma_R^0$ .

Se  $\gamma\sigma^0 = \sigma^0$ , temos que  $\gamma\sigma_C^0 = \sigma_C^0$  e  $\gamma\sigma_R^0 = \sigma_R^0$ . Como  $\gamma$  fixa o ponto  $\sigma_R^0$  em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\gamma$  é uma rotação. Assim temos duas possibilidades:

(1) Se  $\sigma_C^0$  não é o vértice  $[0]$  de  $C^3$  (o vértice não determina nenhuma direção),  $\gamma$  fixa uma direção em  $\mathbb{R}^3$ , a direção determinada por  $\sigma_C^0 \neq [0]$ . Portanto,  $\gamma$  deixa invariante uma reta  $l$  em  $\mathbb{R}^3$  (a reta que passa por  $\sigma_R^0$  e tem direção determinada por  $\sigma_C^0$ ). Por (d) acima, segue que  $\Gamma^{\sigma^0}$  é trivial ou isomorfo a um dos grupos  $D_i, \mathbb{Z}_i, D_i \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_i \times \mathbb{Z}_2, i = 2, 3, 4, 6$ .

(2) Se  $\sigma_C^0$  é o vértice  $[0]$  de  $C^3$ ,  $\sigma_C^0$  não determina nenhuma direção em  $\mathbb{R}^3$ . Neste caso a única coisa que podemos dizer é que  $\gamma$  fixa um ponto em  $\mathbb{R}^3$ . Portanto, por (b),  $\Gamma^{\sigma^0}$  é trivial ou isomorfo a um dos grupos  $D_i, \mathbb{Z}_i, A_4, S_4, D_i \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_i \times \mathbb{Z}_2, A_4 \times \mathbb{Z}_2, S_4 \times \mathbb{Z}_2, i = 2, 3, 4, 6$ .

**Segundo caso:**  $\sigma^0 \subset Z$ .

Lembre-se que  $Z = \bigcup_{h \in H} Z_h$ . Então  $\sigma^0 \subset Z_h$  para algum  $h \in H$ . Se  $\gamma\sigma^0 = \sigma^0$ ,  $\gamma$  fixa um ponto em  $Z_h$ . Lembre-se também que um ponto em  $Z_h$  é obtido colapsando uma reta em  $C^3 \times \mathbb{R}^3$ . Seja  $l$  a reta que colapsa em  $\sigma^0$ . Então  $\Gamma^{\sigma^0} = \Gamma^{(l)}$ .

## Isotropia de 1-células

Seja  $\sigma^1$  uma 1-célula aberta em  $A$ , e  $\gamma \in \Gamma$ . Temos dois casos:

**Primeiro caso:**  $\sigma^1 \subset A - Z$ .

Temos duas possibilidades:  $\sigma^1 = \sigma_C^0 \times \sigma_R^1$  ou  $\sigma^1 = \sigma_C^1 \times \sigma_R^0$ .

(1) Suponha  $\sigma^1 = \sigma_C^0 \times \sigma_R^1$ . Se  $\gamma\sigma^1 = \sigma^1$ , então  $\gamma\sigma_R^1 = \sigma_R^1$ . Assim  $\gamma$  fixa uma reta pontualmente. Portanto,  $\gamma$  deixa invariante qualquer plano ortogonal a esta reta e age por rotação sobre esses planos. Por (d) acima, temos que  $\Gamma^{\sigma^1}$  é trivial ou isomorfo a um dos grupos  $D_i, \mathbb{Z}_i, i = 2, 3, 4, 6$ .

(2) Suponha  $\sigma^1 = \sigma_C^1 \times \sigma_R^0$ . Assim se  $\gamma\sigma^1 = \sigma^1$ , então  $\gamma\sigma_R^0 = \sigma_R^0$  e  $\gamma\sigma_C^1 = \sigma_C^1$ .

Portanto,  $\gamma$  fixa um ponto em  $\mathbb{R}^3$  e no máximo, uma direção em  $\mathbb{R}^3$  (a direção determinada por um ponto em  $\sigma_C^1$ , diferente do vértice  $[0]$ ). Por (d) acima  $\Gamma^{\sigma^1}$  é trivial ou isomorfo a um dos grupos  $D_i, \mathbb{Z}_i, D_i \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_i \times \mathbb{Z}_2, i = 2, 3, 4, 6$ .

**Segundo caso:**  $\sigma^1 \subset Z$ .

Desde que  $Z = \bigcup_{h \in H} Z_h$ ,  $\sigma^1 \subset Z_h$  para algum  $h \in H$ . Então, se  $\gamma\sigma^1 = \sigma^1$ ,  $\gamma$  fixa pontualmente uma reta em  $Z_h$ . Assim,  $\Gamma^{\sigma^1}$  fixa no mínimo dois pontos em  $Z_h$ . Portanto  $\Gamma^{\sigma^1}$  deixa invariante, no mínimo, duas retas em  $\mathbb{R}^3$ . Então, o Lema 1.4.1 implica que  $\Gamma^{\sigma^1}$  é trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}, D_\infty, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, D_\infty \times \mathbb{Z}_2$ .

## Isotropia de 2-células

Seja  $\sigma^2$  uma 2-célula em  $A$  e  $\gamma \in \Gamma$ . Temos dois casos:

**Primeiro caso:**  $\sigma^2 \subset A - Z$ .

Temos três possibilidades:  $\sigma^2 = \sigma_C^0 \times \sigma_R^2$ ,  $\sigma^2 = \sigma_C^2 \times \sigma_R^0$  ou  $\sigma^2 = \sigma_C^1 \times \sigma_R^1$ .

(1) Suponha  $\sigma^2 = \sigma_C^0 \times \sigma_R^2$ . Se  $\gamma\sigma^2 = \sigma^2$ , então  $\gamma\sigma_R^2 = \sigma_R^2$ , e segue que  $\gamma$  fixa um plano em  $\mathbb{R}^3$  pontualmente. Assim,  $\Gamma^{\sigma^2}$  é trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ .

(2) Suponha  $\sigma^2 = \sigma_C^2 \times \sigma_R^0$ . Assim se  $\gamma\sigma^2 = \sigma^2$ , então  $\gamma\sigma_C^2 = \sigma_C^2$  e  $\gamma\sigma_R^0 = \sigma_R^0$ . Logo,  $\gamma$  fixa infinitas direções em  $\mathbb{R}^3$ , e fixa um ponto em  $\mathbb{R}^3$ . Então  $\gamma$  deixa invariante no mínimo um plano em  $\mathbb{R}^3$  e age sobre este (no máximo) por rotação por  $\pi$ . Também,  $\gamma$  age (no máximo) por reflexão sobre a reta ortogonal a este plano. Portanto,  $\Gamma^{\sigma^2}$  é trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$  ou  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

(3) Suponha  $\sigma^2 = \sigma_C^1 \times \sigma_R^1$ . Assim se  $\gamma\sigma^2 = \sigma^2$ , então  $\gamma\sigma_R^1 = \sigma_R^1$ . Logo,  $\gamma$  fixa uma reta em  $\mathbb{R}^3$  pontualmente. Então  $\gamma$  age (por rotação) sobre o plano ortogonal a esta reta (se  $\sigma_C^1$  determina a mesma direção que  $\sigma_R^1$ ). Portanto,  $\Gamma^{\sigma^2}$  é trivial ou isomorfo a um dos grupos  $D_i$  ou  $\mathbb{Z}_i, i = 2, 3, 4, 6$ .

Note que, se  $\Gamma^{\sigma^2}$  é isomorfo a  $D_i$  ou  $\mathbb{Z}_i$ ,  $i = 2, 3, 4, 6$ , então  $\sigma_C^1$  é uma célula raio, e a direção que  $\sigma_C^1$  determina é exatamente a direção de  $\sigma_R^1$ . Neste caso, dizemos que  $\sigma^2 = \sigma_C^1 \times \sigma_R^1$  é uma *2-célula especial*.

**Segundo caso:**  $\sigma^2 \subset Z$ .

Desde que  $Z = \bigcup_{h \in H} Z_h$ , então  $\sigma^2 \subset Z_h$  para algum  $h \in H$ . Se  $\gamma\sigma^2 = \sigma^2$ ,  $\gamma$  fixa  $Z_h$  pontualmente. Então  $\gamma$  deixa invariante toda reta paralela a  $h$ . Desde que  $\Gamma^{\sigma^2}$  age cocompactamente sobre  $l_h$ , segue que  $\Gamma^{\sigma^2}$  age apenas sobre  $l_h$ . Portanto  $\Gamma^{\sigma^2}$  é trivial ou isomorfo a  $D_\infty$  ou  $\mathbb{Z}$ .

## Isotropia de 3-células

Seja  $\sigma^3$  uma 3-célula aberta em  $A$  e  $\gamma \in \Gamma$ . Como  $Z = \bigcup_{h \in H} Z_h$  e  $Z_h \cong \mathbb{R}^2$ , temos que  $\sigma^3 \subset A - Z$ . Assim, existem quatro possibilidades:  $\sigma^3 = \sigma_C^0 \times \sigma_R^3$ ,  $\sigma^3 = \sigma_C^1 \times \sigma_R^2$ ,  $\sigma^3 = \sigma_C^2 \times \sigma_R^1$  ou  $\sigma^3 = \sigma_C^3 \times \sigma_R^0$ .

(1) Suponha  $\sigma^3 = \sigma_C^0 \times \sigma_R^3$ . Se  $\gamma\sigma^3 = \sigma^3$ , então  $\gamma\sigma_R^3 = \sigma_R^3$ . Assim  $\gamma$  fixa todo  $\mathbb{R}^3$  pontualmente. Portanto,  $\Gamma^{\sigma^3}$  é trivial.

(2) Suponha  $\sigma^3 = \sigma_C^1 \times \sigma_R^2$ . Se  $\gamma\sigma^3 = \sigma^3$ , então  $\gamma\sigma_R^2 = \sigma_R^2$  e  $\gamma\sigma_C^1 = \sigma_C^1$ . Assim  $\gamma$  fixa pontualmente um plano  $\alpha$  e fixa uma direção em  $\mathbb{R}^3$ . Então  $\gamma$  age trivialmente ou por reflexão sobre a reta ortogonal a  $\alpha$ . Portanto,  $\Gamma^{\sigma^3}$  é trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ .

(3) Suponha  $\sigma^3 = \sigma_C^2 \times \sigma_R^1$ . Se  $\gamma\sigma^3 = \sigma^3$ , então  $\gamma\sigma_R^1 = \sigma_R^1$  e  $\gamma\sigma_C^2 = \sigma_C^2$ . Assim  $\gamma$  fixa uma reta pontualmente e fixa infinitas direções em  $\mathbb{R}^3$ . Logo,  $\gamma$  deixa invariante no mínimo um plano em  $\mathbb{R}^3$  (um plano ortogonal a reta fixada por  $\gamma$ ) e age sobre este (no máximo) por rotação por  $\pi$ . Portanto,  $\Gamma^{\sigma^3}$  é trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ .

(4) Suponha  $\sigma^3 = \sigma_C^3 \times \sigma_R^0$ . Se  $\gamma\sigma^3 = \sigma^3$ , então  $\gamma\sigma_R^0 = \sigma_R^0$  e  $\gamma\sigma_C^3 = \sigma_C^3$ . Assim  $\gamma$  fixa um ponto e fixa toda direção em  $\mathbb{R}^3$ . Portanto,  $\Gamma^{\sigma^3}$  é trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ .

## Isotropia de 4-células

Seja  $\sigma^4$  uma 4-célula aberta em  $A$  e  $\gamma \in \Gamma$ . Desde que  $Z = \bigcup_{h \in H} Z_h$  e  $Z_h \cong \mathbb{R}^2$ , temos  $\sigma^4 \subset A - Z$ . Assim, existem três possibilidades:  $\sigma^4 = \sigma_C^1 \times \sigma_R^3$ ,  $\sigma^4 = \sigma_C^2 \times \sigma_R^2$  ou  $\sigma^4 = \sigma_C^3 \times \sigma_R^1$ .

- (1) Suponha  $\sigma^4 = \sigma_C^1 \times \sigma_R^3$ . Se  $\gamma\sigma^4 = \sigma^4$ , então  $\gamma\sigma_R^3 = \sigma_R^3$ . Assim  $\gamma$  fixa todo  $\mathbb{R}^3$  pontualmente. Portanto,  $\Gamma^{\sigma^4}$  é trivial.
- (2) Suponha  $\sigma^4 = \sigma_C^2 \times \sigma_R^2$ . Se  $\gamma\sigma^4 = \sigma^4$ , então  $\gamma\sigma_R^2 = \sigma_R^2$  e  $\gamma\sigma_C^2 = \sigma_C^2$ . Assim  $\gamma$  fixa um plano pontualmente. Portanto,  $\Gamma^{\sigma^4}$  é trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ .
- (3) Suponha  $\sigma^4 = \sigma_C^3 \times \sigma_R^1$ . Se  $\gamma\sigma^4 = \sigma^4$ , então  $\gamma\sigma_R^1 = \sigma_R^1$  e  $\gamma\sigma_C^3 = \sigma_C^3$ . Assim  $\gamma$  fixa uma reta pontualmente e todas as direções em  $\mathbb{R}^3$ . Portanto,  $\Gamma^{\sigma^4}$  é trivial.

## Isotropia de 5-células

Seja  $\sigma^5$  uma 5-célula aberta em  $A$  e  $\gamma \in \Gamma$ . Desde que  $Z = \bigcup_{h \in H} Z_h$  e  $Z_h \cong \mathbb{R}^2$ , temos  $\sigma^5 \subset A - Z$ . Assim, existem duas possibilidades:  $\sigma^5 = \sigma_C^2 \times \sigma_R^3$  ou  $\sigma^5 = \sigma_C^3 \times \sigma_R^2$ .

- (1) Suponha  $\sigma^5 = \sigma_C^2 \times \sigma_R^3$ . Se  $\gamma\sigma^5 = \sigma^5$ , então  $\gamma\sigma_R^3 = \sigma_R^3$ . Assim  $\gamma$  fixa todo  $\mathbb{R}^3$  pontualmente. Portanto,  $\Gamma^{\sigma^5}$  é trivial.
- (2) Suponha  $\sigma^5 = \sigma_C^3 \times \sigma_R^2$ . Se  $\gamma\sigma^5 = \sigma^5$ , então  $\gamma\sigma_R^2 = \sigma_R^2$  e  $\gamma\sigma_C^3 = \sigma_C^3$ . Assim  $\gamma$  fixa um plano pontualmente e todas as direções em  $\mathbb{R}^3$ . Portanto,  $\Gamma^{\sigma^5}$  é trivial.

## Isotropia de 6-células

Seja  $\sigma^6$  uma 6-célula aberta em  $A$  e  $\gamma \in \Gamma$ . Como  $Z = \bigcup_{h \in H} Z_h$  e  $Z_h \cong \mathbb{R}^2$ , temos  $\sigma^6 \subset A - Z$ . Assim  $\sigma^6 = \sigma_C^3 \times \sigma_R^3$ . Se  $\gamma\sigma^6 = \sigma^6$ , então  $\gamma\sigma_R^3 = \sigma_R^3$ . Portanto,

$\Gamma^{\sigma^6}$  é trivial.

## 1.5 Cálculo dos Grupos $H_i(A/\Gamma, \mathcal{P}_*(\rho))$

Lembre que uma célula  $\sigma$  em  $A/\Gamma$  corresponde a uma órbita  $\Gamma\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{\sigma} \in A$ . Sabemos que existe uma sequência espectral com  $\mathcal{E}_{p,q}^2 = H_p(A/\Gamma, \pi_q(\mathcal{P}_*(\rho)))$  (ver Proposição 0.3.15), a qual, converge para  $H_{p+q}(A/\Gamma, \mathcal{P}_*(\rho))$ . Estamos interessados no caso  $p+q = -1$ . Pela Proposição 0.3.11, por [8] e por [15],  $\pi_q(\mathcal{P}_*(\rho)) = 0$ , if  $q+2 \leq -2$ . Assim  $H_p(A/\Gamma, \pi_q(\mathcal{P}_*(\rho))) = 0$  if  $q+2 \leq -2$ . Portanto, os possíveis termos diferentes de zero na sequência espectral com  $p+q = -1$  são:  $\mathcal{E}_{0,-1}^2 = H_0(A/\Gamma, \pi_{-1}(\mathcal{P}_*(\rho)))$ ,  $\mathcal{E}_{1,-2}^2 = H_1(A/\Gamma, \pi_{-2}(\mathcal{P}_*(\rho)))$  e  $\mathcal{E}_{2,-3}^2 = H_2(A/\Gamma, \pi_{-3}(\mathcal{P}_*(\rho)))$ .

### Cálculo do termo $\mathcal{E}_{0,-1}^2$

Sejam  $\sigma_i^0$  e  $\sigma_j^1$  0-células e 1-células em  $A$ , respectivamente. Considere a cadeia celular associada  $\dots \leftarrow C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \leftarrow \dots$ , para  $\mathcal{E}_{0,-1}^2$ , onde  $C_0 = \bigoplus_i Wh(\Gamma^{\sigma_i^0})$ ,  $C_1 = \bigoplus_j Wh(\Gamma^{\sigma_j^1})$ . Pelos cálculos da Seção 4 (isotropia de 1-células),  $\Gamma^{\sigma^1}$  é trivial ou isomorfo a um dos grupos  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, D_\infty, D_\infty \times \mathbb{Z}_2, D_i, \mathbb{Z}_i, \mathbb{Z}_i \times \mathbb{Z}_2, D_i \times \mathbb{Z}_2, i = 2, 3, 4, 6$ . Em [35], Whitehead mostra que  $Wh(F) = 0$  se  $F$  é trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}_i, i = 2, 3, 4$ . Em [8], Carter mostra que  $Wh(\mathbb{Z}_6) = 0$ . Em [3], Bass mostra que  $Wh(\mathbb{Z}) = Wh(D_\infty) = 0$ . Em [24], Pearson mostra que  $Wh(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2) = Wh(D_\infty \times \mathbb{Z}_2) = 0$ . Em [2], Bass mostra que  $Wh(F) = \mathbb{Z}^{r-q} + SK_1(\mathbb{Z}[F])$ , onde  $F$  é um grupo finito,  $r$  é o número de representações reais irredutíveis de  $F$  e  $q$  é o número de representações racionais irredutíveis. Por [23], Teoremas 14.1 e 14.2,  $SK_1(\mathbb{Z}[F]) = 0$ , se  $F$  é isomorfo  $D_i, D_i \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2, i = 2, 3, 4, 6$ . Um cálculo direto mostra que  $r = q$  para tais grupos. Assim  $Wh(\Gamma^{\sigma^1}) = 0$ , então  $C_1 = \bigoplus_j Wh(\Gamma^{\sigma_j^1}) = 0$ . Portanto,

$$\mathcal{E}_{0,-1}^2 = H_0(A/\Gamma, \pi_{-1}(\mathcal{P}_*(\rho))) = \bigoplus_i Wh(\Gamma^{\sigma_i^0}).$$

Os seguintes lemas mostram que o termo  $\mathcal{E}_{0,-1}^2$  pode ser escrito em termos dos grupos de Whitehead dos subgrupos maximais virtualmente cíclicos infinitos de  $\Gamma$ .

**Lema 1.5.1:** *Seja  $l \in \mathcal{L}$  e suponha que  $\Gamma^{(l)}$  é um subgrupo virtualmente cíclico infinito de  $\Gamma$ . Se  $\mathcal{L}^{\Gamma^{(l)}} = \{l\}$ , então  $\Gamma^{(l)}$  é um subgrupo maximal virtualmente cíclico infinito de  $\Gamma$ .*

**Prova:** Suponha que  $G$  é virtualmente cíclico infinito e que  $\Gamma^{(l)} < G$ . Desde que  $G$  deixa invariante no mínimo uma reta  $\tilde{l}$ , temos  $\Gamma^{(l)} < G < \Gamma^{(\tilde{l})}$ , então  $\tilde{l} \in \mathcal{L}^{\Gamma^{(l)}} = \{l\}$ . Assim  $l = \tilde{l}$ . Isto prova o lema.

**Lema 1.5.2:** *Seja  $\sigma^0 \in A$  e suponha que  $\Gamma^{\sigma^0}$  é um subgrupo virtualmente cíclico de  $\Gamma$ . Se  $\Gamma^{\sigma^0}$  fixa apenas  $\sigma^0$ , então  $\Gamma^{\sigma^0}$  é um subgrupo maximal finito de  $\Gamma$ .*

**Prova:** Suponha que  $F$  é um subgrupo finito de  $\Gamma$  e que  $\Gamma^{\sigma^0} < F$ . Como  $F$  é finito, este fixa no mínimo um ponto  $\tilde{\sigma}^0$  em  $A$ . Então  $\Gamma^{\sigma^0} < F < \Gamma^{\tilde{\sigma}^0}$ . Assim  $\sigma^0 = \tilde{\sigma}^0$ . Isto prova o lema.

**Lema 1.5.3:** *Seja  $G$  um subgrupo virtualmente cíclico infinito de  $\Gamma$ . Se  $Wh(G) \neq 0$ , então  $\mathcal{L}^G = \{l\}$ , ou equivalentemente,  $G = \Gamma^l$ , para alguma reta  $l$ .*

**Prova:** Se  $\mathcal{L}^G \supset \{l, \tilde{l}\}$ ,  $l \neq \tilde{l}$ , pelo Lema 1.4.1,  $G$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}, D_\infty, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$  ou  $D_\infty \times \mathbb{Z}_2$ . Segue que  $Wh(G) = 0$ . Isto prova o lema.

Observe que  $\Gamma^z$ ,  $z \in Z$ , é um grupo virtualmente cíclico infinito (pois um ponto em  $Z$  é obtido por colapso de uma reta em  $C^3 \times \mathbb{R}^3$ ). Assim se  $Wh(\Gamma^z) \neq 0$ ,  $\Gamma^z$  é maximal virtualmente cíclico infinito. Logo, podemos escrever

$$\mathcal{E}_{0,-1}^2 = \left[ \bigoplus_{F \in F(\Gamma)} Wh(F) \right] \oplus \left[ \bigoplus_{G \in VC_\infty(\Gamma)} Wh(G) \right],$$

onde as somas são feitas tomando-se um representante  $F, G$  para cada elemento em  $F(\Gamma), VC_\infty(\Gamma)$  respectivamente.

Os grupos  $A_4, S_4, A_4 \times \mathbb{Z}_2, S_4 \times \mathbb{Z}_2$ , agem sobre  $\mathbb{R}^3$  fixando apenas um ponto (ver 1.4 (d)). Assim, pelo Lema 1.5.2, esses grupos são maximais. Por [23], Teorema

14.1, segue que  $Wh(S_4) = Wh(S_4 \times \mathbb{Z}_2) = 0$ . Por [23], Teorema 14.6, segue que  $SK_1(\mathbb{Z}[A_4]) = 0$ . Por [2],  $Wh(A_4) = \mathbb{Z}^{r-q} \oplus SK_1(\mathbb{Z}[A_4])$ . Um cálculo direto mostra que  $r = q$ . Portanto,  $Wh(A_4) = 0$ .

**Lema 1.5.4:** *Se  $F = A_4 \times \mathbb{Z}_2$ , então  $Wh(F) = 0$ .*

**Prova:** Lembre que  $Wh(F) = \mathbb{Z}^y \oplus SK_1(\mathbb{Z}[F])$  (ver [2]). Desde que os subgrupos elementares de  $A_4 \times \mathbb{Z}_2$  são cíclicos ou soma de subgrupos cíclicos de ordem 2, por [23], Exemplos 1 e 2 página 14, Teorema 5.3 e página 7, temos que  $SK_1(\mathbb{Z}[F]) = 0$ . Agora o posto da parte livre de torção de  $Wh(F)$  é  $y = r - q$ , onde  $r$  é o número de classes conjugadas de conjuntos  $\{g, g^{-1}\}$ , onde  $g$  está em  $F$  e  $q$  é o número de classes conjugadas de subgrupos cíclicos de  $F$  (ver [22]). Os subgrupos cíclicos (módulo conjugação) de  $A_4 \times \mathbb{Z}_2$  são: O subgrupo trivial, três subgrupos isomorfos a  $\mathbb{Z}_2$ , um subgrupo isomorfo a  $\mathbb{Z}_3$  e um subgrupo isomorfo a  $\mathbb{Z}_6$ , num total de seis subgrupos cíclicos. Por outro lado, em  $A_4$  há exatamente três elementos de ordem 2 todos conjugados e oito elementos de ordem 3. Sejam  $a, b \in A_4$  com  $a^3 = b^3 = 1$  e  $a, b$  não triviais. Um cálculo direto mostra que  $a = b^2$  ou  $a$  e  $b$  são conjugados. Logo, há seis classes conjugadas de conjuntos  $\{g, g^{-1}\}$  em  $A_4 \times \mathbb{Z}_2$ . Portanto,  $r = q$  e  $Wh(A_4 \times \mathbb{Z}_2) = 0$ .

Em vista de  $Wh(F) = 0$ , se  $F$  é um subgrupo finito de um grupo 3-cristalográfico  $\Gamma$ , podemos escrever

$$\mathcal{E}_{0,-1}^2 = \bigoplus_{G \in VC_\infty(\Gamma)} Wh(G).$$

### Cálculo do termo $\mathcal{E}_{2,-3}^2$

Considere a cadeia celular associada  $\dots \leftarrow C_1 \xleftarrow{\partial} C_2 \leftarrow \dots$ , para  $\mathcal{E}_{2,-3}^2$ , onde  $C_1 = \bigoplus_j K_{-1}(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma_j^1}])$  e  $C_2 = \bigoplus_i K_{-1}(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma_i^2}])$ . Pela Seção 4 (isotropia de 2-células),  $\Gamma^{\sigma_i^2}$  é trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}_i, D_i, \mathbb{Z}$  ou  $D_\infty$ . Temos por [3], que  $K_{-1}(\mathbb{Z}[G]) = 0$ , se  $G$  é isomorfo a  $D_2, \mathbb{Z}, D_\infty$  ou  $\mathbb{Z}_i, i = 2, 3, 4$ , e que,  $K_{-1}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_6]) = \mathbb{Z}$ . Por [24] temos

que  $K_{-1}(\mathbb{Z}[G]) = 0$ , se  $G$  é isomorfo a  $D_3$  ou  $D_4$  e que,  $K_{-1}(\mathbb{Z}[D_6]) = \mathbb{Z}$ . Assim, é suficiente estudar o caso no qual  $\sigma^2$  é uma 2-célula especial. isto é,  $\sigma^2 = \sigma_C^1 \times \sigma_R^1$ , onde  $\sigma_C^1$  é uma célula raio que determina a mesma direção que  $\sigma_R^1$ .

No que segue, a barra denota o “fêcho” do conjunto.

**Lema 1.5.5:** *Seja  $\sigma^2 = \sigma_C^1 \times \sigma_R^1$ ,  $\tilde{\sigma}^2 = \tilde{\sigma}_C^1 \times \tilde{\sigma}_R^1$  2-células especiais. Se  $\overline{\sigma^2} \cap \overline{\tilde{\sigma}^2}$  é uma 1-célula da forma  $\overline{\sigma_C^0 \times \sigma_R^1}$ , então  $\sigma_R^1 = \tilde{\sigma}_R^1$ , e  $\sigma_C^1, \tilde{\sigma}_C^1$  estão num mesmo raio de  $C^3$ .*

**Prova:** Desde que  $\overline{\sigma^2} \cap \overline{\tilde{\sigma}^2} = \overline{\sigma_C^0 \times \sigma_R^1}$  temos  $\sigma_R^1 = \tilde{\sigma}_R^1$ . Assim  $\sigma_C^1$  e  $\tilde{\sigma}_C^1$  determina a mesma direção que  $\sigma_R^1 = \tilde{\sigma}_R^1$ . Portanto  $\sigma_C^1$  e  $\tilde{\sigma}_C^1$  estão num mesmo raio. Isto prova o lema.

Segue do lema acima que a única 2-célula especial que contém uma célula da forma  $[0] \times \sigma_R^1$  é a 2-célula especial  $\sigma_C^1 \times \sigma_R^1$ , onde  $\sigma_C^1$  é uma célula raio que contém o ponto  $[0]$  do cone e determina a mesma direção que  $\sigma_R^1$ . Provaremos que  $\partial : C_2 \rightarrow C_1$  é injetiva. Então, segue que  $\mathcal{E}_{2,-3}^2 = 0$ .

Fixe  $\sigma_R^1$  (fechada) e enumere todas células raio  $\sigma_C^1$  (fechadas) que determinam a mesma direção que  $\sigma_R^1$ . Então, temos a família de 2-células  $\{\sigma_i^2 = (\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^1\}$ . Note que  $\cup_i (\sigma_C^1)_i$  é um raio  $r \cong [0, \infty)$ , determinado pela direção de  $\sigma_R^1$ . Denote por  $l$  a reta que contém  $\sigma_R^1$ . Após reindexação das células, podemos identificar cada  $(\sigma_C^1)_i$  com o intervalo  $[i, i + 1]$ . Portanto,  $\sigma_i^2 = [i, i + 1] \times \sigma_R^1$ .

Da definição da relação  $\cong$  sobre  $C^3 \times \mathbb{R}^3$  (Seção 2), colapsamos no máximo uma célula da forma  $\{n\} \times \sigma_R^1$  a um ponto, onde  $n > 0$  depende de  $\sigma_R^1$ . De fato, se  $l$  é paralelo a  $l_h \in \mathcal{L}_h \in \Lambda_n$ , para algum  $h \in H$ , então  $c(l) = [\frac{nh}{\|h\|}]$ . Assim  $\{n\} \times \sigma_R^1$  colapsa num ponto. Portanto,  $n$  depende de  $\sigma_R^1$ . Escrevemos  $n = n(\sigma_R^1)$ . Então, ou  $\cup_i \sigma_i^2 = [0, \infty) \times \sigma_R^1$ , ou  $\cup_i \sigma_i^2$  é obtido de  $[0, \infty) \times \sigma_R^1$  colapsando  $\{n\} \times \sigma_R^1$  num ponto  $\{n\}$ , ( se  $l \parallel l_h$ , para algum  $h$ ), onde  $n = n(\sigma_R^1) > 0$ .

O lema seguinte implica que  $\mathcal{E}_{2,-3}^2 = 0$ .

**Lema 1.5.6:**  $\partial : C_2 \rightarrow C_1$  é injetivo.

**Prova:** Seja  $\sum_k m_k \sigma_k^2 \in C_2$ . Como  $m_k \in K_{-1}(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma_k^2}])$ , podemos supor que  $\sigma_k^2$  é uma 2-célula especial (fechada), ou seja, é da forma  $\sigma_C^1 \times \sigma_R^1$ , com  $\sigma_C^1$  uma célula raio que determina a mesma direção que  $\sigma_R^1$  (nos outros casos  $K_{-1}(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma_k^2}]) = 0$ ). Assim podemos escrever

$$\sum_k m_k \sigma_k^2 = \sum_{\sigma_R^1} \left( \sum_i n_i ((\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^1) \right).$$

Provaremos que  $m_k = 0$ , para todo  $k$ , provando que para cada  $\sigma_R^1$ , todos  $n_i$  são zero.

Fixe um  $\sigma_R^1$ . Como antes, identifique  $(\sigma_C^1)_i$  com  $[i, i+1]$ , e note que  $\Gamma^{[i, i+1] \times \sigma_R^1} = \Gamma^{\{i+1\} \times \sigma_R^1} = \Gamma^{\sigma_R^1}$ , para todo  $i+1 \neq n(\sigma_R^1)$ , pois  $(\sigma_C^1)_i = [i, i+1]$  é uma célula raio tendo a mesma direção que  $\sigma_R^1$ . Assim  $n_i \in K_{-1}(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma_R^1}])$  e os mapas bordo no âmbito de coeficientes são justamente a identidade:

$$\begin{array}{ccc} K_{-1}(\mathbb{Z}[\Gamma^{[i, i+1] \times \sigma_R^1}]) & \xrightarrow{\partial} & K_{-1}(\mathbb{Z}[\Gamma^{\{i+1\} \times \sigma_R^1}]) \\ \parallel & & \parallel \\ K_{-1}(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma_R^1}]) & \xrightarrow{id} & K_{-1}(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma_R^1}]). \end{array}$$

Desde que todos  $\sigma_k^2$  são 2-células especiais, o Lema 1.5.5 implica que, para  $i \geq 0$  e  $i+1 \neq n(\sigma_R^1)$ ,  $[i, i+1] \times \sigma_R^1$  e  $[i+1, i+2] \times \sigma_R^1$  são as únicas 2-células na família  $\{\sigma_k^2\}$  cujos bordos contém  $\{i+1\} \times \sigma_R^1$ . Assim, se

$$\partial \left( \sum_i n_i ((\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^1) \right) = 0,$$

temos que  $n_i = n_{i+1}$ . Mas  $[0, 1] \times \sigma_R^1$  é a única 2-célula da família  $\{[i, i+1] \times \sigma_R^1\}$  cujo bordo contém  $[0] \times \sigma_R^1$ . Então  $n_0 = 0$ . Portanto  $n_i = 0$ ,  $i < n(\sigma_R^1)$ . De outra forma, se  $n_{i_0} \neq 0$ ,  $i_0 > n(\sigma_R^1)$  teríamos  $n_i \neq 0$  para todo  $i > i_0$ , o que mostra que, a soma  $\sum_i n_i (([i, i+1] \times \sigma_R^1))$  é infinita. Assim  $n_i = 0$  para todo  $i$ . Isto prova o lema.

## Cálculo do termo $\mathcal{E}_{1,-2}^2$

Considere a cadeia celular associada  $\dots \leftarrow C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \leftarrow \dots$ , para  $\mathcal{E}_{1,-2}^2$ , onde  $C_0 = \bigoplus_j \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma_j^0}])$  e  $C_1 = \bigoplus_i \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma_i^1}])$ . Pela Seção 3 (isotropia de 1-células),  $\Gamma^{\sigma_i^1}$  é trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}, D_\infty, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, D_\infty \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_i, D_i, \mathbb{Z}_i \times \mathbb{Z}_2, D_i \times \mathbb{Z}_2, i = 2, 3, 4, 6$ . Por [27], [28],  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[F]) = 0$ , para  $F$  isomorfo a  $D_i$  ou  $\mathbb{Z}_i, i = 2, 3, 4$ . Por [27],  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_6]) = 0$ . Por [3],  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[F]) = 0$ , se  $F$  é isomorfo a  $D_\infty$  ou  $\mathbb{Z}$ . Por [24],  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[F]) = 0$ , se  $F$  é isomorfo a  $D_\infty \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ , ou  $D_6$ .  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[F])$  não se anula para  $F$  isomorfo a  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2, D_2 \times \mathbb{Z}_2, D_4 \times \mathbb{Z}_2$  ou  $D_6 \times \mathbb{Z}_2$  (ver [3] e [4]). Assim, é suficiente estudar o caso  $\sigma^1 \subset A - Z \cong_\Gamma (C^3 \times \mathbb{R}^3) - Y$ , no qual  $\sigma^1 = \sigma_C^1 \times \sigma_R^0$ , onde  $\sigma_C^1$  é uma célula raio e  $\sigma_R^0$  é uma 0-célula (nos outros casos  $\tilde{K}_0$  se anula).

No seguinte lema consideramos  $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ , e escrevemos  $D_\infty = \mathbb{Z}_2^a * \mathbb{Z}_2^b$  para distinguir os dois fatores como em 1.3.

Sejam  $i^a : \mathbb{Z}_2^a \hookrightarrow \mathbb{Z}_2^a * \mathbb{Z}_2^b, i^b : \mathbb{Z}_2^b \hookrightarrow \mathbb{Z}_2^a * \mathbb{Z}_2^b$  as inclusões. Seja  $\beta : \mathbb{Z}_2^a * \mathbb{Z}_2^b \rightarrow \mathbb{Z}_2^a$  um homomorfismo, tal que  $\beta(a) = a$  e  $\beta(b) = 0$ . Então,  $\beta \circ i^a = 1_{\mathbb{Z}_2^a}$  e  $\beta \circ i^b = 0$ . Seja  $F$  um grupo finito. Defina os homomorfismos de grupos

$$\alpha^a : \mathbb{Z}_2^a \times F \rightarrow (\mathbb{Z}_2^a * \mathbb{Z}_2^b) \times F, \alpha^b : \mathbb{Z}_2^b \times F \rightarrow (\mathbb{Z}_2^a * \mathbb{Z}_2^b) \times F \text{ por: } \alpha^a = i^a \times 1_F,$$

$$\alpha^b = i^b \times 1_F. \text{ Sejam } \alpha_*^a : \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2^a \times F]) \longrightarrow \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[(\mathbb{Z}_2^a * \mathbb{Z}_2^b) \times F]),$$

$$\alpha_*^b : \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2^b \times F]) \longrightarrow \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[(\mathbb{Z}_2^a * \mathbb{Z}_2^b) \times F]) \text{ os homomorfismos induzidos pelo funtor } \tilde{K}_0.$$

**Lema 1.5.7:** *Seja  $F$  um grupo com  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[F]) = 0$ . Então  $\alpha_*^a$  e  $\alpha_*^b$  são injetivos. Ainda mais  $Im(\alpha_*^a) \cap Im(\alpha_*^b) = \{0\}$ .*

**Prova:** Considere o seguinte diagrama de grupos e homomorfismos

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}_2^a \times F & \xrightarrow{\alpha^a} & (\mathbb{Z}_2^a * \mathbb{Z}_2^b) \times F & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{Z}_2^a \times F \\ & & \uparrow \alpha^b & & \\ & & \mathbb{Z}_2^b \times F & & \end{array}$$

Aqui  $\gamma = \beta \times 1_F$ . Note que  $\gamma \circ \alpha^a = 1_{\mathbb{Z}_2^a \times F}$ , e  $\gamma \circ \alpha^b = 0$ . Aplicando o funtor  $\tilde{K}_0$ , temos

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2^a \times F]) & \xrightarrow{\alpha_*^a} & \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2^a * \mathbb{Z}_2^b \times F]) & \xrightarrow{\gamma_*} & \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2^a \times F]). \\ & & \uparrow \alpha_*^b & & \\ & & \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2^b \times F]) & & \end{array}$$

Então  $\gamma_* \circ \alpha_*^a = 1$ . Assim  $\alpha_*^a$  é injetivo. Analogamente  $\alpha_*^b$  é injetivo. Se  $x \in \text{Im}(\alpha_*^a) \cap \text{Im}(\alpha_*^b)$ , então  $x = \alpha_*^a y$  e  $x = \alpha_*^b z$ . Assim  $\gamma_* x = \gamma_* \circ \alpha_*^a y = y$  e  $\gamma_* x = \gamma_* \circ \alpha_*^b z = 0$ . Portanto  $x = 0$ . Isto prova o lema.

**Lema 1.5.8:** *Considere  $\sigma_C^1 \times \sigma_R^0$ ,  $\tilde{\sigma}_C^1 \times \tilde{\sigma}_R^0$ , onde  $\sigma_C^1, \tilde{\sigma}_C^1$  são células raio. Suponha  $\overline{(\sigma_C^1 \times \sigma_R^0)} \cap \overline{(\tilde{\sigma}_C^1 \times \tilde{\sigma}_R^0)} \neq \emptyset$ .*

(a) *Se  $\sigma_R^0 = \tilde{\sigma}_R^0$ , então, ou  $\sigma_C^1$  e  $\tilde{\sigma}_C^1$  estão no mesmo raio (isto é, determina mesma direção em  $\mathbb{R}^3$ ) ou  $\overline{\sigma_C^1} \cap \overline{\tilde{\sigma}_C^1} = [0]$ .*

(b) *Se  $\sigma_R^0 \neq \tilde{\sigma}_R^0$ , então,  $\overline{\sigma_C^1} \cap \overline{\tilde{\sigma}_C^1} \neq \emptyset$ , com  $\sigma_C^1, \tilde{\sigma}_C^1$  no mesmo raio e a reta  $l$  que contém  $\sigma_R^0$  e  $\tilde{\sigma}_R^0$  tem a direção determinada por  $\sigma_C^1$ . Ainda mais  $l \in \mathcal{L}$  e  $\overline{(\sigma_C^1 \times \sigma_R^0)} \cap \overline{(\tilde{\sigma}_C^1 \times \tilde{\sigma}_R^0)} = [\bar{l}]$ .*

**Prova (a):** Se  $\sigma_R^0 = \tilde{\sigma}_R^0$ , então  $\sigma_C^1$  e  $\tilde{\sigma}_C^1$  estão num mesmo cone baseado em  $\sigma_R^0 = \tilde{\sigma}_R^0$ . Assim  $\overline{(\sigma_C^1 \times \sigma_R^0)} \cap \overline{(\tilde{\sigma}_C^1 \times \tilde{\sigma}_R^0)} \neq \emptyset$ , implica ou  $\sigma_C^1 \times \sigma_R^0 = \tilde{\sigma}_C^1 \times \tilde{\sigma}_R^0$  ou  $\overline{(\sigma_C^1 \times \sigma_R^0)} \cap \overline{(\tilde{\sigma}_C^1 \times \tilde{\sigma}_R^0)} = \sigma_C^0 \times \sigma_R^0$ . Se  $\sigma_C^0 = [0]$ , então  $\overline{\sigma_C^1} \cap \overline{\tilde{\sigma}_C^1} = [0]$ . Doutra forma  $\sigma_C^1$  e  $\tilde{\sigma}_C^1$  estão num mesmo raio, pois  $\overline{\sigma_C^1} \cap \overline{\tilde{\sigma}_C^1} = \sigma_C^0$  e  $\sigma_C^1, \tilde{\sigma}_C^1$  são células raio.

**Prova (b):** Se  $\sigma_R^0 \neq \tilde{\sigma}_R^0$ , considere a reta  $l$  que contém  $\sigma_R^0$  e  $\tilde{\sigma}_R^0$ . Lembre-se que só colapsamos retas que estão em  $\mathcal{L}$ . Lembre-se também que a altura na qual dá-se o colapso depende apenas da direção da reta, e que, se dois raios estão identificados num ponto, esses raios determinam uma mesma direção. Assim se  $\overline{(\sigma_C^1 \times \sigma_R^0)} \cap \overline{(\tilde{\sigma}_C^1 \times \tilde{\sigma}_R^0)} \neq \emptyset$  com  $\sigma_R^0 \neq \tilde{\sigma}_R^0$ , temos que  $l \in \mathcal{L}$ . Ainda mais  $\overline{(\sigma_C^1 \times \sigma_R^0)} \cap \overline{(\tilde{\sigma}_C^1 \times \tilde{\sigma}_R^0)} = [\bar{l}]$  e  $\overline{\sigma_C^1} \cap \overline{\tilde{\sigma}_C^1} \neq \emptyset$ . Isto prova o lema.

O seguinte lema implica que  $\mathcal{E}_{1,-2}^2 = 0$ .

**Lema 1.5.9:**  $\partial_1 : C_1 \longrightarrow C_2$  é injetiva.

**Prova:** Seja  $\sum_k m_k \sigma_k^1 \in C_1$ . Desde que  $m_k \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma_k^1}])$ , podemos supor que  $\sigma_k^1$  é da forma  $\sigma_C^1 \times \sigma_R^0$ , com  $\sigma_C^1$  uma célula raio (nos outros casos  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma_k^1}]) = 0$ ). Assim podemos escrever

$$\sum_k m_k \sigma_k^1 = \sum_{\sigma_R^0} \left( \sum_i n_i ((\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0) \right).$$

Aqui, assumiremos que  $\cup_i \overline{(\sigma_C^1)_i}$  é um raio e que os  $(\sigma_C^1)_i$  estão enumerados de tal maneira que  $(\sigma_C^0)_i := \overline{(\sigma_C^1)_i} \cap \overline{(\sigma_C^1)_{i+1}} \neq \emptyset$ . Então todos os  $\Gamma^{(\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0}$  são iguais, para todo  $i$ . Nós provaremos que  $m_k = 0$ , para todo  $k$ , provando que para cada  $\sigma_R^0$ , todos os  $n_i$  são zero.

Suponha existir uma 0-célula  $\sigma_R^0$ , para a qual exista um  $n_i$  com  $n_i \neq 0$ . Desde que  $n_i \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma^{(\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0}])$ , então  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma^{(\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0}]) \neq 0$ . Assim  $\Gamma^{(\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0}$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_2 \times D_2, \mathbb{Z}_2 \times D_4$  ou  $\mathbb{Z}_2 \times D_6$ , isto é,  $\Gamma^{(\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0}$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}_2 \times F$ , com  $F$  isomorfo a  $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, D_2, D_4$  ou  $D_6$ .

Seja  $l$  a reta com direção determinada pelos  $(\sigma_C^1)_i$  (lembre-se que  $\cup_i \overline{(\sigma_C^1)_i}$  é um raio) que contém  $\sigma_R^0$ . Seja  $\alpha$  o plano ortogonal a  $l$ . Seja  $G = \Gamma^{(l)}$ . Note que  $\Gamma^{(\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0} = G^{\sigma_R^0}$ , para todo  $i$ . Ainda mais  $G^{\sigma_R^0}$  age por reflexões sobre  $l$  (se a ação fosse trivial,  $G^{\sigma_R^0} = \Gamma^{(\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0}$  seria isomorfo a  $\mathbb{Z}_i, D_i, i = 2, 3, 4, 6$ ). Também para  $\Gamma^{(\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0} \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ , o fator  $\mathbb{Z}_2$  age por reflexão sobre  $l$ , e  $F$  age sobre o plano  $\alpha$ . Note que  $F = G^l$ . Assim temos dois casos:  $l/G$  não é compacto ou  $l/G$  é compacto.

**Primeiro caso:**  $l/G$  não é compacto.

Então  $G$  contém translações. Assim  $G = G^{\sigma_R^0} = \Gamma^{(\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0} \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ , o qual é finito. Portanto  $l \notin \mathcal{L}$ . Desde que  $r = \cup_i \overline{(\sigma_C^1)_i}$  é o raio determinado por  $l$ , temos que  $(r \times \sigma_R^0) \cap Z = \emptyset$  (nós apenas colapsamos retas  $\bar{l}$  com  $l \in \mathcal{L}$ ). Assim  $\Gamma^{(\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0} = \Gamma^{(\sigma_C^0)_{i+1} \times \sigma_R^0}$ , e os mapas bordo, no âmbito de coeficientes  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma^{(\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0}]) \rightarrow \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma^{(\sigma_C^0)_{i+1} \times \sigma_R^0}])$  são justamente a identidade.

Agora lembre que estamos assumindo  $n_i \neq 0 \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G])$ . Desde que  $G = G^{\sigma_R^0}$ , então  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma(\sigma_C^1) \times \sigma_R^0])$  é trivial, para  $\sigma_R^0 \neq \tilde{\sigma}_R^0 \in l$ . Assim, o Lema 1.5.8 implica que as únicas 1-células  $\bar{\sigma}^1$  (módulo  $\Gamma$ ) em  $\sum_{\sigma_R^0} (\sum_i n_i ((\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0))$  que contém  $(\sigma_C^0)_{i+1} \times \sigma_R^0$ , com  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma^1}]) \neq 0$  são  $(\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0$  e  $(\sigma_C^1)_{i+1} \times \sigma_R^0$ . Segue que  $n_{i+1} \neq 0 \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G])$ . De maneira análoga prova-se que  $n_j \neq 0 \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G])$  para todo  $j \geq i$  o que é uma contradição, pois a soma acima é finita.

**Segundo caso:**  $l/G$  é compacto.

Então  $G$  contém translações. Desde que  $G$  age por reflexões sobre  $l$ , temos que a ação de  $G$  sobre  $l$  é uma ação diedral. Então  $G = G^{\sigma_R^0} *_F G^{\tilde{\sigma}_R^0}$  onde  $F = G^l$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, D_2, D_4$  ou  $D_6$ , e  $\tilde{\sigma}_R^0 \in l$ ,  $\tilde{\sigma}_R^0 \neq \sigma_R^0$ . Como  $G$  contém translações,  $l \in \mathcal{L}$ . Assim  $l \in \mathcal{L}_m$  para algum  $m$ . Desde que  $r = \cup_i (\overline{\sigma_C^1})_i$  é um raio determinado por  $l$ , temos que  $(r \times \sigma_R^0) \cap Z = (r \times \tilde{\sigma}_R^0) \cap Z = (r \times \sigma_R^0) \cap (r \times \tilde{\sigma}_R^0) = \{[\bar{l}]\} = [\{m\} \times \sigma_R^0] = [\{m\} \times \tilde{\sigma}_R^0]$  ( $\bar{l}$  é colapsado num ponto). Escreva  $\sigma^0 = \{[\bar{l}]\}$ , para esta 0-célula. Note que  $G = \Gamma^{(l)} = \Gamma(\{m\} \times \sigma_R^0) = \Gamma^{\{ponto\}}$  e que  $\Gamma(\sigma_C^1) \times \sigma_R^0 = \Gamma(\sigma_C^0)_{i+1} \times \sigma_R^0 = G^{\sigma_R^0}$  para todo  $i$  com  $i+1 \neq m$ . Então os mapas bordo, no âmbito de coeficientes  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma(\sigma_C^1) \times \sigma_R^0]) \rightarrow \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma(\sigma_C^0)_{i+1} \times \sigma_R^0])$  são justamente a identidade se  $i+1 \neq m$ , isto é, para  $i+1 \neq m$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma(\sigma_C^1) \times \sigma_R^0]) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma(\sigma_C^0)_{i+1} \times \sigma_R^0]) \\ \parallel & & \parallel \\ \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G^{\sigma_R^0}]) & \xrightarrow{id} & \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G^{\sigma_R^0}]). \end{array}$$

Para  $i+1 = m$ , temos

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma(\sigma_C^1) \times \sigma_R^0]) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma^0}]) \\ \parallel & & \parallel \\ \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G^{\sigma_R^0}]) & \xrightarrow{\alpha_*} & \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G]), \end{array}$$

é induzido pela inclusão  $\alpha : G^{\sigma^0} \rightarrow G = G^{\sigma_R^0} *_F G^{\tilde{\sigma}_R^0}$ . Pelo Lema 1.5.7,  $\alpha_*$  é injetivo. Analogamente,  $\tilde{\alpha}_*$  é injetivo, onde  $\tilde{\alpha} : G^{\tilde{\sigma}_R^0} \rightarrow G = G^{\sigma_R^0} *_F G^{\tilde{\sigma}_R^0}$  é a inclusão.

**Afirmção :**  $Im(\alpha_*) \cap Im(\tilde{\alpha}_*) = \{0\}$ .

**Prova:** Note que  $|G^{\sigma_R^0}/F| = |G^{\tilde{\sigma}_R^0}/F| = 2$ . Se  $G^{\sigma_R^0} \cong G^{\tilde{\sigma}_R^0} \cong \mathbb{Z}_2 \times F$ , a afirmação

segue pelo Lema 1.5.7 ( $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[F]) = 0$  para  $F$  isomorfo a  $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, D_2, D_4$  ou  $D_6$ ). Nos outros casos temos  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G^{\tilde{\sigma}_R^0}]) = 0$ . Isto prova a afirmação .

Agora, lembre que estamos assumindo  $n_i \neq 0 \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma(\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0]) = \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G^{\tilde{\sigma}_R^0}])$ . Se  $i + 1 \neq m$ , Lema 1.5.8, implica que as únicas 1-células  $\overline{\sigma^1}$  (módulo  $\Gamma$ ) na soma

$$\sum_k m_k \sigma_k^1 = \sum_{\sigma_R^0} \left( \sum_i n_i ((\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0) \right)$$

que contém  $(\sigma_C^0)_{i+1} \times \sigma_R^0$ , com  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma^1}]) \neq 0$  são  $\overline{(\sigma_C^1)_i \times \sigma_R^0}$  e  $\overline{(\sigma_C^1)_{i+1} \times \sigma_R^0}$ . Assim  $n_i = n_{i+1}$  para  $i + 1 \neq m$ . No outro caso ( $i + 1 = m$ ), Lema 1.5.8, implica que as únicas 1-células  $\overline{\sigma^1}$  que contém  $\sigma^0$  com  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma^1}]) \neq 0$  são  $\overline{(\sigma_C^1)_{m-1} \times \sigma_R^0}$ ,  $\overline{(\sigma_C^1)_{m-1} \times \tilde{\sigma}_R^0}$ ,  $\overline{(\sigma_C^1)_m \times \sigma_R^0}$  e  $\overline{(\sigma_C^1)_m \times \tilde{\sigma}_R^0}$ . Pela afirmação acima  $n_{m-1} = n_m$  temos,  $0 \neq n_i = n_{i+1}$ , para todo  $i$ , o que é uma contradição pois a soma acima é finita. Isto prova o lema.

## 1.6 Prova dos Resultados

Aqui provamos os resultados apresentados na Seção 1 deste capítulo.

Para provar o Corolário 1.1.2, precisamos do seguinte lema:

**Lema 1.6.1:** *Seja  $\Gamma$  um grupo 3-cristalográfico. Então, o subconjunto  $\{G < \Gamma; G \in VC_\infty, Wh(G) \neq 0\}$  é finito.*

**Prova:** Se  $G \in VC_\infty$ , com  $Wh(G) \neq 0$ , então  $G$  deixa invariante uma única reta em  $\mathbb{R}^3$  (ver Lema 1.5.3). Seja  $l_G$  a reta invariante por  $G$ .

**Afirmação 1:**  *$l_G$  está contida no 1-esqueleto da triangulação  $\mathcal{T}_R$  de  $\mathbb{R}^3$ .*

**Prova da Afirmação 1:** Desde que  $G \in VC_\infty$ , temos a sequência  $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ , com  $H$  isomorfo a  $\mathbb{Z}$  ou  $D_\infty$  e  $F$  um subgrupo finito de  $\Gamma$ . Lembre-se que  $F$  fixa  $l_G$  pontualmente. Lembre-se também, que a ação de  $\Gamma$  sobre  $\mathbb{R}^3$  é celular.

Assim:

Se  $\sigma^3$  é uma 3-célula aberta de  $\mathcal{T}_R$  e  $l_G \cap \sigma^3 \neq \emptyset$ , então,  $\gamma\sigma^3 = \sigma^3$  para todo  $\gamma \in F$ , logo,  $F$  fixa pontualmente  $\mathbb{R}^3$  e segue que  $F$  é o grupo trivial. Portanto,  $G$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}$  ou  $D_\infty$  e  $Wh(G) = 0$ .

Se  $\sigma^2$  é uma 2-célula aberta de  $\mathcal{T}_R$  e  $l_G \cap \sigma^2 \neq \emptyset$ , temos que  $\gamma\sigma^2 = \sigma^2$  para todo  $\gamma \in F$ , logo,  $F$  fixa pontualmente um plano  $\alpha$  em  $\mathbb{R}^3$  e pode agir por reflexão em  $\alpha^\perp$ . Portanto  $F$  é trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ . Pelos Teoremas 1.3.2 e 1.3.3, segue que  $G$  é isomorfo a um dos seguintes grupos:  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ ,  $D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_2$ ,  $D_2 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_4$  ou  $\mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_4$ . Considere o grupo  $G = G_1 *_{\mathbb{Z}_2} G_2$ , onde  $G_i$ ,  $i = 1, 2$  são finitos. Por [33], obtemos a sequência exata

$$Wh(\mathbb{Z}_2) \rightarrow Wh(G_1) \oplus Wh(G_2) \rightarrow Wh(G) \rightarrow \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]).$$

Desde que  $Wh(\mathbb{Z}_2)$ ,  $Wh(\mathbb{Z}_4)$ ,  $Wh(D_2)$  e  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2])$  são triviais, pela sequência acima temos que  $Wh(D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_2)$ ,  $Wh(D_2 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_4)$  e  $Wh(\mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_4)$  são triviais. Por [24],  $Wh(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2)$  também é trivial. Isto prova a afirmação .

**Afirmção 2:** *Sejam  $\Gamma^{(l_1)}$  e  $\Gamma^{(l_2)}$  os grupos de isotropia das retas  $l_1$  e  $l_2$  respectivamente, os quais são conjugados e fixam apenas  $l_1$  e  $l_2$ . Então existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma l_1 = l_2$ . Reciprocamente, se  $\gamma l_1 = l_2$ , então  $\Gamma^{(l_1)}$  é conjugado de  $\Gamma^{(l_2)}$ .*

**Prova da Afirmção 2:** Se  $\gamma \in \Gamma$  é tal que  $\gamma\Gamma^{(l_1)}\gamma^{-1} = \Gamma^{(l_2)}$  e  $g_1 \in \Gamma^{(l_1)}$ ,  $g_2 \in \Gamma^{(l_2)}$  com  $g_2 = \gamma g_1 \gamma^{-1}$ , temos :  $g_2(\gamma l_1) = (\gamma g_1 \gamma^{-1})(\gamma l_1) = \gamma g_1 l_1 = \gamma l_1$ . Assim  $\Gamma^{(l_2)}$  fixa a reta  $\gamma l_1$ . Como  $\Gamma^{(l_2)}$  fixa uma única reta por hipótese, segue que  $\gamma l_1 = l_2$ . Reciprocamente, se  $g_1 \in \Gamma^{(l_1)}$ , então  $\gamma g_1 \gamma^{-1} l_2 = \gamma g_1 l_1 = \gamma l_1 = l_2$ . Logo  $\Gamma^{(l_1)}$  é conjugado de  $\Gamma^{(l_2)}$ . Isto prova a afirmação

Lembre-se que a ação de  $\Gamma$  sobre  $\mathbb{R}^3$  é cocompacta. Assim existe um compacto  $D \subset \mathbb{R}^3$ , denominado de domínio fundamental da ação , tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}^3$  existem  $x_D \in D$  e  $\gamma \in \Gamma$  com  $\gamma x_D = x$ . Portanto, se  $l$  é uma reta de  $\mathbb{R}^3$ , existem uma reta  $l_D$  e  $\gamma \in \Gamma$  com  $l_D \cap D \neq \emptyset$ , tal que,  $\gamma l_D = l$ . Desde que  $D$  é compacto,  $D$  intercepta só um número finito de 1-células da triangulação  $\mathcal{T}_R$ . Pelas afirmações 1 e 2, segue que existe, módulo conjugação , finitos grupos  $G \in VC_\infty$  com  $Wh(G) \neq 0$ .

Isto prova o lema.

**Prova do Corolário 1.1.2:** Segue do Teorema 1.1.1 e do Lema 1.6.1.

**Lema 1.6.2:** *Seja  $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , então  $Nil_1(\mathbb{Z}[G]) \neq 0$ .*

**Prova:** Considere o quadrado cartesiano com todas as aplicações sobrejetivas:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[G] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2] & \longrightarrow & F_2[\mathbb{Z}_2]. \end{array}$$

onde  $F_2$  denota o corpo com dois elementos. Por [17],  $Nil_1(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]) = 0$ . Portanto, a sequência de Mayer-Vietoris deste quadrado produz um epimorfismo

$$Nil_2(F_2[\mathbb{Z}_2]) \longrightarrow Nil_1(\mathbb{Z}[G]) \longrightarrow 0.$$

Como  $Nil_2(F_2[\mathbb{Z}_2])$  não é trivial (isto segue das técnicas de van der Kallen [29]), temos que  $Nil_1(\mathbb{Z}[G]) \neq 0$ . Lembre-se que se  $Nil_1(\mathbb{Z}[G]) \neq 0$ , então  $Nil_1(\mathbb{Z}[G])$  é infinitamente gerado (ver [12]). Isto prova o lema.

Para provar Corolário 1.1.4 precisamos do seguinte lema:

**Lema 1.6.3:** *Seja  $\Gamma$  um grupo  $n$ -cristalográfico e  $G$  um subgrupo maximal virtualmente cíclico infinito de  $\Gamma \times \mathbb{Z}$ . Então (no mínimo) uma das afirmações segue:*

(1)  *$G$  é isomorfo a um subgrupo maximal virtualmente cíclico infinito de  $\Gamma$ .*

(2)  *$G = F \times \mathbb{Z}$ ,  $F < \Gamma$ ,  $F$  um maximal finito.*

**Prova:** Seja  $\pi : \Gamma \times \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma$  a projeção. Então  $Ker(\pi) = \mathbb{Z}$ . Temos duas possibilidades:  $\pi(G)$  finito ou  $\pi(G)$  infinito.

**Afirmação :** *Se  $\pi(G)$  é infinito então  $\pi(G) \cong G$ .*

**Prova da Afirmação :** De fato, se  $\pi|_G$  não é um a um então temos a sequência exata  $0 \rightarrow Ker(\pi|_G) \rightarrow G \rightarrow \pi(G) \rightarrow 0$  com  $Ker(\pi|_G)$  e  $\pi(G)$  infinitos. Isto é impossível desde que  $G$  é virtualmente cíclico. Isto prova a afirmação.

Suponha  $\pi(G)$  finito. Escreva  $F = \pi(G)$ . Então  $G < F \times \mathbb{Z}$ . Mas  $G$  é maximal, portanto  $G = F \times \mathbb{Z}$ . Certamente,  $F$  deve ser maximal. Isto prova o lema.

Usaremos na prova do Corolário 1.1.4 os seguintes fatos:

- (1)  $F(\Gamma \times \mathbb{Z}) = F(\Gamma)$ .
- (2)  $Wh(G) = 0$ , se  $G$  é um subgrupo finito ou virtualmente cíclico infinito de um grupo 2-cristalográfico (ver [24]).
- (3) Se  $F$  é maximal finito em  $\Gamma$ , então  $F \times \mathbb{Z}$  é maximal virtualmente cíclico infinito em  $\Gamma \times \mathbb{Z}$ .

**Prova do Corolário 1.1.4:** Seja  $\Gamma$  um grupo 2-cristalográfico. A fórmula-Bass-Heller-Swan (ver [28], p. 152) implica que  $Wh(\Gamma \times \mathbb{Z}) = Wh(\Gamma) \oplus \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma]) \oplus 2Nil_1(\mathbb{Z}[\Gamma])$ . Mas  $Wh(\Gamma), \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma])$  se anulam se  $\Gamma$  é um grupo 2-cristalográfico (ver [24]). Assim  $Wh(\Gamma \times \mathbb{Z}) = 2Nil_1(\mathbb{Z}[\Gamma])$ . Também, pelo Teorema 1.1.1 e pelo Lema 1.6.3,

$$Wh(\Gamma \times \mathbb{Z}) = \bigoplus_{G \in VC_\infty(\Gamma \times \mathbb{Z})} Wh(G) = \bigoplus_{F \in F(\Gamma)} Wh(F \times \mathbb{Z}) = \bigoplus_{F \in F(\Gamma)} 2Nil_1(\mathbb{Z}[F]) = 2 \left( \bigoplus_{F \in F(\Gamma)} Nil_1(\mathbb{Z}[F]) \right).$$

Isto prova o corolário.

**Lema 1.6.4:** *Os termos  $\mathcal{E}_{p,q}^\infty$  anulam-se para  $p + q = -1$  com exceção de*

$$\mathcal{E}_{0,-1}^\infty = \bigoplus_{G \in VC_\infty(\Gamma)} Wh(G).$$

**Prova:** Para calcular o termo  $\mathcal{E}_{0,-1}^\infty$  precisamos dos termos  $\mathcal{E}_{2,-2}^2$  e  $\mathcal{E}_{3,-3}^2$ . Lembre que se  $\sigma^2$  é uma 2-célula em  $A$ , pela Seção 4 (isotropia de 2-células)  $\Gamma^{\sigma^2}$  é trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}, D_\infty, D_i, \mathbb{Z}_i, i = 2, 3, 4, 6$ . Então,  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma^2}]) = 0$ . Assim  $\mathcal{E}_{2,-2}^2 = 0$ . Lembre também, que se  $\sigma^3$  é uma 3-célula em  $A$ ,  $\Gamma^{\sigma^3}$  é trivial ou isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ . Então,  $K_{-1}(\mathbb{Z}[\Gamma^{\sigma^3}]) = 0$ . Assim  $\mathcal{E}_{3,-3}^2 = 0$ . Portanto,  $\mathcal{E}_{0,-1}^2 = \mathcal{E}_{0,-1}^3 = \dots = \mathcal{E}_{0,-1}^\infty = \bigoplus_{G \in VC_\infty(\Gamma)} Wh(G)$ . Na Seção 5 provamos que  $\mathcal{E}_{1,-2}^2$  e

$\mathcal{E}_{2,-3}^2$  se anulam. Assim  $\mathcal{E}_{1,-2}^\infty$  e  $\mathcal{E}_{2,-3}^\infty$  se anulam. Isto prova o lema.

**Prova do Teorema 1.1.1:** Lembre-se que nossa sequência espectral, para  $p + q = -1$ , converge para  $H_{-1}(A/\Gamma, \mathcal{P}_*(\rho)) := \pi_{-1}(\mathbb{H}(A/\Gamma, \mathcal{P}_*(\rho)))$ , onde  $\mathcal{P}_*$  é o funtor pseudoisotopia estável (ver 0.3.10). Desde que  $\mathcal{E}_{p,q}^\infty = 0$ , se  $p + q = -1$ ,  $q \neq -1$  e  $\mathcal{E}_{0,-1}^\infty = \bigoplus_{G \in VC_\infty(\Gamma)} Wh(G)$ , temos pela Proposição 0.3.11 e pelo Corolário 0.3.20 que

$$Wh(\Gamma) = Wh(\pi_1(X)) = \pi_{-1}(\mathcal{P}_*(X)) = \bigoplus_{G \in VC_\infty(\Gamma)} Wh(G),$$

onde  $X$  é um espaço tal que  $\pi_1(X) = \Gamma$ .

# Bibliografia

- [1] Anderson, R. & Hsiang, W. -c.: *The functor  $K_{-i}$  and pseudoisotopies of polyhedra*, Ann. of Math. (2) 105, 201-233, (1977).
- [2] Bass, H.: *The Dirichlet unit theorem and Whitehead group of finite groups*, Topology 4, 391-410, (1996).
- [3] Bass, H.: *Algebraic K-theory*, W. A. Benjamin, New York, (1968).
- [4] Bass, H.: *Grothendieck groups and Picard groups of Abelian group rigs*, Ann. of Math. (2) 86, 16-73, (1967).
- [5] Berkove, E., Farrell, F. T., Juan-Pineda, D. & Pearson, K.: *The Farrell-Jones isomorphism conjecture for finite co-volume hiperbolic actions and the algebraic K-theory of Bianchi groups*, Trans. AMS 352, no 12, 5689-5706, (2000).
- [6] Berkove, E., Juan-Pineda, D. & Pearson, K.: *The algebraic K-theory of Fuchsian groups*, Comment. Math. Helv. 76, no 2, 339-352, (2001).
- [7] Brown, K. S.: *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Math. 87, Springer-Verlag, New York, (1982).
- [8] Carter, D.: *Lower K-theory of finite groups*, Comm. Algebra 8(20), 1927-1937, (1980).
- [9] Cohen, M. M.: *A course in simple-homotopy theory*, Springer-Verlag, (1973).
- [10] Connolly, F. & Koźniewski, T.: *Rigidity and crystallographic groups*, I, Invent. 45, 25-48, (1990).

- [11] Curtis, C. W. & Reiner, I.: *Methods of representation theory II*, Wiley, (1987).
- [12] Farrell, F. T.: *The nonfiniteness of Nil*, Proc. Amer. Math. Soc. 65, no 2, 215-216, (1977).
- [13] Farrell, F. T. & Hsiang, W. -c.: *The topological Euclidean space-form problem*, Invent. 45, 181-192, (1978).
- [14] Farrell, F. T. & Jones, L. E.: *Isomorphism conjecture in algebraic K-theory*, J. of the AMS 6, 249-298, (1993).
- [15] Farrell, F. T. & Jones, L. E.: *The lower algebraic K-theory for virtually infinite cyclic groups*, K-theory 9, 13-30, (1995).
- [16] Farrell, F. T. & Jones, L. E.: *Stable pseudoisotopy spaces of non-positively curved manifolds*, J. Diff. Geom. 34, 769-834, (1991).
- [17] Harmon, D. S.: *NK<sub>1</sub> of finite groups*, American Mathematical Society 100, no. 2, (1987)
- [18] Hatcher, A.: *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, (2002).
- [19] Hatcher, A.: *Concordance spaces, higher simple homotopy theory, and applications*, Proc. Sympos. Pure Math. 32, AMS, Providence, RI, 2-21 (1978).
- [20] Lück, W. & Stamm, R.: *Computations of K and L-theory of cocompact planar groups*, K-Theory 21, no 3, 249-292, (2000).
- [21] Mac Lane, S.: *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Math. 5, New York, (1971).
- [22] Milnor: *Whitehead torsion*, Bull. AMS 72, 358-426, (1966)
- [23] Oliver, R.: *Whitehead groups of finite groups*, LMS Lecture Notes Series 132, Cambridge University Press, (1989).

- [24] Pearson, K.: *Algebraic K-theory of two-dimensional crystallographic groups*, K-theory 14, 265-280, (1998).
- [25] Quinn, F.: *Ends of maps. II*, Invent. Math. 68, 353-424, (1982).
- [26] Quinn, F.: *Algebraic K-theory for poly (finite or cyclic) groups*, Bull. AMS 12, 221-226 (1985).
- [27] Reiner: *Class Groups and Picard Groups of Groups Rings and Orders*, CBMS Notes 26, AMS, Providence, (1976).
- [28] Rosenberg, J.: *Algebraic K-theory and its applications*, Graduate Texts in Math. 147, New York, (1994).
- [29] Scott, P. & Wall, T.: *Topological methods in group theory*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 36, (1979).
- [30] Schwarzenberger, R. L. E.: *N-dimensional crystallography*, Research Notes in Mathematics 41, (1980).
- [31] Tsapogas, G.: *On the K-theory of crystallographic groups*, Trans. AMS 347(8), 2781-2794, (1985).
- [32] Upadhyay, S.: *Controlled algebraic K-theory of integral groups ring of  $SL(3, \mathbb{Z})$* , K-theory 10, no. 4, 413-418, (1996).
- [33] Waldhausen, F.: *Algebraic K-theory of generalized free products I, II*, Ann. of Math. 108, 135-256, (1978).
- [34] van der Kallen, W.: *Le  $K_2$  des nombres duaux*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 273, A1204-A1207, (1971).
- [35] Whitehead, J. H. C.: *Simple homotopy types*, Amer. J. Math. 72 (1950).
- [36] Wolf, J. A.: *Spaces of constant curvature*, Publish or Perish, 5th edn., (1984).