Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Soluções quase automórficas e pseudo-quase automórficas para equações de evolução semilinear com domínio não-denso

Leandro Inácio Torres

Recife,
29 de agosto de 2011

Leandro Inácio Torres

Soluções quase automórficas e pseudo-quase automórficas para equações de evolução semilinear com domínio não-denso

Dissertação à apresentar ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Bruno Luis de Andrade Santos

Recife,
29 de agosto de 2011

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Torres, Leandro Inácio
Soluções quase automórficas e pseudo-quase automórficas para equações de evolução semilinear com domínio não-denso / Leandro Inácio Torres - Recife: O Autor, 2011.
37 folhas

Orientador: Bruno Luis de Andrade Santos.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2011.

Inclui bibliografia.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Equações de evolução. 3. Domínio não-denso. I. Santos, Bruno Luis de Andrade (orientador). II. Título.

515.353 CDD (22. ed.) MEI2011 – 134

À Vera Bárbara Santana Torres.

Agradecimentos

- Minha mãe e irmã, que me auxiliam social, emocional e em minha saúde;
- Estudantes e colegas que comigo passaram e buscaram soluções as situações ocorridas neste curso;
- Professores Ramón Mendoza (UFPE), Maria Eulália de Moraes Melo (UFRPE), Márcia Dantas (UFRPE), Socorro Brasileiro (UFRPE), Hebe Coutinho (UFRPE) e Arimatéia Rocha (UFRPE), incentivadores da realização do mestrado;
- Professor Fernando Souza (UFPE), indicador inicial da área de pesquisa;
- Professores Henrique Araújo (UFPE), Aron Simis (UFPE), Claudio Cuevas (UFPE), Pedro Hinojosa (UFPE),Ramón Mendoza (UFPE) e Marcos Rabelo (UFPE), professores das disciplinas cursadas;
- Professores Claudio Cuevas (UFPE) e Bruno Andrade (UFPE), idealizadores do tema da dissertação.

Resumo

O propósito desta dissertação é estudar existência e unicidade de soluções quase automórficas e pseudo-quase automórficas para equações diferenciais semilineares definidas sobre espaços de Banach utilizando métodos provindos da Análise Funcional juntamente com métodos Topológicos, ressaltando por exemplo a teoria do ponto fixo.

Palavras-Chave: Equações de evolução; Funções quase automórficas; Funções pseudo-quase automórficas; Operadores de Hille-Yosida.

Abstract

The purpose of this dissertation is to study existence and uniqueness of almost automorphic and pseudo-almost automorphic mild solutions of semilinear differential equations defined on Banach spaces, using methods from Functional Analysis with Topological methods, highlighting for example the fixed point theory.

Keywords: Evolution equations; Almost automorphic functions; Pseudo-almost automorphic functions; Hille-Yosida operators.

A tremura subia, deixava a barriga e chegava ao peito de Baleia. Do peito para trás era tudo insensibilidade e esquecimento. Mas o resto do corpo se arrepiava, espinhos de mandacaru penetravam na carne meio comida pela doença.
(...)Baleia queria dormir. Acordaria feliz, num mundo cheio de preás. E lamberia as mãos de Fabiano, um Fabiano enorme. As crianças se espojariam com ela, rolariam com ela num pátio enorme, num chiqueiro enorme. O mundo ficaria todo cheio de preás, gordos, enormes.

Graciliano Ramos

Sumário

Introdução

O objetivo desta dissertação é estudar condições suficientes para existência de soluções brandas quase automórficas e pseudo-quase automórficas para equações semilineares de primeira ordem da forma

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador de Hille-Yosida de tipo negativo e cujo domínio $D(A)$ está contido num espaço de Banach X, $f : \mathbb{R} \times X_0 \to X$ é uma função dada e $X_0 = \overline{D(A)}$. Em nossos resultados não fazemos considerações a cerca da densidade do domínio do operador A.

Existência de soluções brandas para a Equação (1) está intimamente ligada à condição do operador A ser o gerador de um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados. Porém, vide Teorema de Hille-Yosida, para que tal situação ocorra é necessário que esse operador seja densamente definido, isto é, se X_0 é um subespaço próprio de X a teoria clássica de semigrupos não pode ser imediatamente utilizada. Para contornar esse problema usaremos a teoria de espaços de extrapolação, a qual foi introduzida por Da Prato e Grisvard em [5]. Grosso modo, tal teoria consiste em construir o chamado *espaço extrapolado* associado ao operador A e considerar uma extenção desse operador para esse espaço.Por se tratar de espaços de dimensão infinita, as técnicas utilizadas neste texto provém da Análise Funcional juntamente com métodos topológicos, como por exemplo, a teoria de ponto fixo. Ressaltamos que esta última é uma ferramenta muito eficiente no tratamento de problemas não lineares.

O estudo de comportamento quase automórfico para equações diferenciais possui grande importância e tem sido objeto de pesquisa de muitos cientistas. De fato, grande parte desse interesse deve-se à imensa aplicabilidade de tais temas. O estudo de quase automorficidade remonta ao inicio dos anos 60 quando o matemático S. Bochner introduziu o conceito de funções quase automórficas. Segundo Bochner, tal classe de funções apareceram de forma natural em seus trabalhos sobre Geometria Diferencial como escalares e tensores sobre variedades com grupo de automorfismo discreto. Do ponto de vista estrutural, as funções quase automórficas receberam grande atenção por serem generalização imediata das funções quase periódicas, as quais foram introduzidas no início dos anos 20 pelo matemático H. Bohr. Nos últimos 10 anos uma importante classe de funções foi apresentada, a saber as funções pseudo-quase automórficas, apresentadas pelos matemáticos T. J. Xiao, J. Liang e J. Zhang. Tais funções são generalizações de funções quase automórficas e são construidas de forma similar às funções pseudo-quase periódicas introduzidas na última década do século 20 por C. Y. Zhang.

O seguinte diagrama ilustra nossos comentários.

$$\begin{tikzcd} AP(X) \arrow[r] \arrow[d] & AA(X) \arrow[d] \\ PAP(X) \arrow[r] & PAA(X) \end{tikzcd}$$

Nesse diagrama as setas indicam inclusões contínuas.

Esta dissertação está dividida em dois capítulos. O primeiro deles, intitulado "Preliminares", possui o objetivo de tornar o texto o mais auto contido possível. Nele algumas definições e propriedades dos elementos envolvidos neste trabalho são relembrados. Por exemplo, fazemos uma revisão das funções quase automórficas e pseudo-quase automórficas. Revisamos também alguns elementos de Análise Funcional, tais como operadores de Hille-Yosida e espaços de extrapolação. Na última seção deste capítulo enunciamos os teoremas de ponto fixo que sustentam nossos resultados de existência de soluções.

No segundo capítulo, nomeado "Automorficidade e ergodicidade para equações de evolução", exibimos condições suficientes para existência de soluções brandas quase automórficas e pseudo-quase automórficas para a Equações (1).

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Funções Quase Automórficas e Pseudo-Quase Automórficas

No decorrer desta seção fixaremos $(X, \|\cdot\|)$, $(Z, \|\cdot\|)$ e $(W, \|\cdot\|)$ como espaços de Banach. A notação $BC(\mathbb{R}, Z)$, respectivamente $BC(\mathbb{R} \times W, Z)$, representará o conjunto de todas funções contínuas e limitadas definidas em $\mathbb{R}$, respectivamente em $\mathbb{R} \times W$, e tomando valores em Z. Iniciaremos esta seção introduzindo o conceito de funções quase automórficas.

Definição 1.1.1 *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to Z$ é chamada quase automórfica se para toda sequência $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ existe uma subsequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que a função*

$$g(t) := \lim_{n\to\infty} f(t + s_n)$$

está bem definida para cada $t \in \mathbb{R}$ e

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} g(t - s_n)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

Como de praxe, representaremos o conjunto das funções quase automórficas por $AA(Z)$.

Exemplo 1.1.1 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida pela regra*

$$f(t) = sen\left(\frac{1}{2 + sen(t) + sen(\sqrt{2}t)}\right) \tag{1.1}$$

é um exemplo típico de função quase automórfica que não é quase periódica como

$$F(t) = sen(t) + sen(\sqrt{2}t).$$

A seguir lista-se as principais propriedades das funções quase automórficas utilizadas na dissertação.

Observação 1.1.1 *Se* $f \in AA(X)$*, então o conjunto* $\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *é relativamente compacto.*

Uma consequência imediata do resultado anterior é que o conjunto das funções quase automórficas está contido no conjunto das funções contínuas e limitadas.

Proposição 1.1.1 *O conjunto* $AA(Z)$ *munido da norma do supremo é um espaço de Banach.*

Demonstração: Pelas propriedades de limite segue que o conjunto das funções quase automórficas é um espaço vetorial.

Seja $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy em $AA(Z)$, com a norma do sup $||.||_\infty$. Como $AA(Z)$ é um subespaço métrico de $BC(\mathbb{R}, Z)$, $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é convergente em $BC(\mathbb{R}, Z)$, por $BC(\mathbb{R}, Z)$ ser Banach. Seja $f \in BC(\mathbb{R}, Z)$ a função tal que $(f_m)_{m\in\mathbb{N}} \to f$, então $\forall\varepsilon > 0$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||f - f_m||_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$, sempre que $m > m_0$ com $m \in \mathbb{N}$. Dado $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tem-se que, por $f_1 \in AA(Z), \exists(S_{1;n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $(S_{1;n})_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\exists g_1(t) := \lim_{n\to\infty} f_1(t + S_{1;n}), \tag{1.2}$$

estando a aplicação g_1 bem definida para cada $t \in \mathbb{R}$, a partir de $(S_{1;n})_{n\in\mathbb{N}}$, tem-se que, por $f_2 \in AA(Z), \exists(S_{2;n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (S_{1;n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $(S_{2;n})_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\exists g_2(t) := \lim_{n\to\infty} f_2(t + S_{2;n}), \tag{1.3}$$

estando a aplicação g_2 bem definida para cada $t \in \mathbb{R}$, (...) , a partir de $(S_{m;n})_{n\in\mathbb{N}}$, tem-se que, por $f_{m+1} \in AA(Z), \exists (S_{m+1;n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (S_{m;n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (...) \subseteq (S_{1;n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $(S_{m+1;n})_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\exists g_{m+1}(t) := \lim_{n\to\infty} f_{m+1}(t + S_{m+1;n}), \tag{1.4}$$

estando a aplicação g_{m+1} bem definida para cada $t \in \mathbb{R}$, (...). Definindo a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pelas igualdades $s_n = S_{n;n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e para cada $m \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq m$ tem-se a garantia de que $(s_n) \subseteq (S_{m;n})$, garantindo $\forall n \geq m$ que $f_m(t + s_n) \subseteq f_m(t + S_{m;n})$, garantindo portanto que

$$\exists g_m(t) := \lim_{n\to\infty} f_m(t + S_{m;n}) = \lim_{n\to\infty} f_m(t + s_n), \tag{1.5}$$

estando a aplicação g_m bem definida pela sequência (s_n) para cada $t \in \mathbb{R}$ em cada $m \in \mathbb{N}$. Tem-se então que $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $BC(\mathbb{R}, Z)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists n_\gamma \in \mathbb{N}$ tal que $||g_m(t) - f_m(t+s_n)|| < \varepsilon$ se $n > n_\gamma$. Como $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $AA(Z)$, $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists m_\gamma \in \mathbb{N}$ tal que $||f_{m_A} - f_{m_B}||_\infty < \varepsilon$ se $m_A, m_B > m_\gamma$. Segue então que para cada $t \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists n_\gamma \in \mathbb{N}$ e $\exists m_\gamma \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{gathered} ||g_{m_A}(t) - g_{m_B}(t)|| = ||g_{m_A}(t) - f_{m_A}(t + s_n) + f_{m_A}(t + s_n) - f_{m_B}(t + s_n) + f_{m_B}(t + s_n) - g_{m_B}(t)|| \leq \\ \leq ||g_{m_A}(t) - f_{m_A}(t + s_n)|| + ||f_{m_A}(t + s_n) - f_{m_B}(t + s_n)|| + ||f_{m_B}(t + s_n) - g_{m_B}(t)|| < \\ < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad se \quad n > n_\gamma \quad e \quad m > m_\gamma. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Portanto $\forall t \in \mathbb{R}$ as sequências $(g_m(t))_{m\in\mathbb{N}}$ são de Cauchy em Z, convergindo para um vetor de Z. Definindo a aplicação $g : \mathbb{R} \to Z$ pelos limites $g_(t) := \lim_{n\to\infty} g(t + s_n)$, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists n_\gamma \in \mathbb{N}$ e $\exists m_\gamma \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{gathered} ||f(t + s_n) - g(t)|| = ||f(t + s_n) - f_m(t + s_n) + f_m(t + s_n) - g_m(t) + g_m(t) - g(t)|| \leq \\ \leq ||f(t + s_n) - f_m(t + s_n)|| + ||f_m(t + s_n) - g_m(t)|| + ||g_m(t) - g(t)|| < \\ < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad se \quad n > n_\gamma \quad e \quad m > m_\gamma, \end{gathered} \tag{1.7}$$

assim, $g(t) = \lim_{n\to\infty} f(t+s_n), \forall t \in \mathbb{R}$ e para cada $t \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists n_\gamma \in \mathbb{N}$ e $\exists m_\gamma \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} ||g(t-s_n) - f(t)|| = ||g(t-s_n) - g_m(t-s_n) + g_m(t-s_n) - f_m(t) + f_m(t) - f(t)|| \leq \\ \leq ||g(t-s_n) - g_m(t-s_n)|| + ||g_m(t-s_n) - f_m(t)|| + ||f_m(t) - f(t)|| < \\ < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad se \quad n > n_\gamma \quad e \quad m > m_\gamma, \end{aligned} \tag{1.8}$$

concluindo que $\lim_{n\to\infty} g(t-s_n) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$. Dos últimos dois limites obtidos chega-se a conclusão de que a aplicação $f \in AA(Z)$. Portanto $AA(Z)$ é um espaço de Banach. ■

Definição 1.1.2 *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \times W \to Z$ é chamada quase automórfica se a função $f(\cdot, x) : \mathbb{R} \to Z$ é quase automórfica uniformemente para x em subconjuntos limitados de W.*

O conjunto das funções quase automórficas $f : \mathbb{R} \times W \to Z$ será representado por $AA(W, Z)$. Como veremos no próximo capítulo, é de fundamental importância, por exemplo para a teoria de existência de soluções para equações diferenciais, saber quando a composição de funções em $AA(W)$ com funções em $AA(W, Z)$ é uma função quase automórfica. Neste sentido o seguinte resultado será de grande valia.

Proposição 1.1.2 *Seja $f \in AA(W, Z)$ e suponha que existe $L > 0$ tal que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall x, y \in W.$$

Se $u \in AA(W)$ então a função $f(\cdot, u(\cdot)) \in AA(Z)$.

Demonstração: De fato, dada $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ considere $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e um conjunto limitado $K \subset W$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ e x em subconjuntos limitados de W tenhamos

(*i*) $\lim_{n\to\infty} f(t+s_n, x) = g(t, x)$;

(*ii*) $\lim_{n\to\infty} g(t-s_n, x) = f(t, x)$;

(*iii*) $\lim_{n\to\infty} u(t+s_n) = v(t)$;

(iv) $\lim_{n\to\infty} v(t-s_n) = u(t)$.

Observe que para cada $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
\|f(t+s_n, u(t+s_n)) - g(t, v(t))\| &\leq \|f(t+s_n, u(t+s_n)) - f(t+s_n, v(t))\| \\
&+ \|f(t+s_n, v(t)) - g(t, v(t))\| \\
&\leq L\|u(t+s_n) - v(t)\| + \|f(t+s_n, v(t)) - g(t, v(t))\|.
\end{aligned}$$

Pelo item (i) obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t+s_n, v(t)) - g(t, v(t))\| = 0.$$

Por outro lado, o item (iii) assegura que

$$\lim_{n\to\infty} \|u(t+s_n) - v(t)\| = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t+s_n, u(t+s_n)) - g(t, v(t))\| = 0.$$

Usando os itens (ii) e (iv) pode-se provar de modo análogo que

$$\lim_{n\to\infty} \|g(t-s_n, v(t-s_n)) - f(t, u(t))\| = 0,$$

mostrando que a função $f(\cdot, u(\cdot)) \in AA(Z)$. ■

Definição 1.1.3 *Uma função contínua e limitada $\phi : \mathbb{R} \to Z$ é chamada ergódica se possui valor médio de anulamento, isto é*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\phi(t)\| dt = 0.$$

O conjunto das funções contínuas limitadas com valor médio de anulamento é representado por $P_0(Z)$.

Exemplo 1.1.2 *A função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela regra*

$$\phi(t) = \max_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \exp\left(-(t \pm k^2)^2 \right) \right\}.$$

é um exemplo de função ergódica que não converge ao valor "0"quando $\|t\| \to \infty$.

Lema 1.1.1 *Seja $f \in BC(\mathbb{R}, Z)$. Então $f \in P_0(Z)$ se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\ med\big(M_{T,\varepsilon}(f)\big) = 0,$$

onde $med(\cdot)$ denota a medida de Lebesgue e

$$M_{T,\varepsilon}(f) := \{t \in [-T, T] : \|f(t)\| \geq \varepsilon\}.$$

Demonstração: Seja $f \in P_0(Z)$ e suponha que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\ med\big(M_{T,\varepsilon_0}(f)\big) \neq 0$. Então, dada uma sequência $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, com $T_n > n$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{2T_n} med\big(M_{T_n,\varepsilon_0}(f)\big) \geq \delta.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T_n}\int_{-T_n}^{T_n} \|f(s)\|ds &= \frac{1}{2T_n}\int_{M_{T_n,\varepsilon_0}} \|f(s)\|ds + \frac{1}{2T_n}\int_{[-T_n,T_n]\setminus M_{T_n,\varepsilon_0}} \|f(s)\|ds \\
&\geq \frac{1}{2T_n}\int_{M_{T_n,\varepsilon_0}} \|f(s)\|ds \\
&\geq \frac{1}{2T_n} med\big(M_{T_n,\varepsilon_0}(f)\big)\ \varepsilon_0 \geq \delta\ \varepsilon_0,
\end{aligned}$$

contradizendo a hipótese de que $f \in P_0(Z)$.

Reciprocamente, seja $f \in BC(\mathbb{R}; Z)$ tal que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} med\big(M_{T,\varepsilon}(f)\big) = 0.$$

Considere $M > 0$ tal que $\|f(t)\| \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $T_0 > 0$ tal que se $T > T_0$ então

$$\frac{1}{2T} med\big(M_{T,\varepsilon}(f)\big) < \frac{\varepsilon}{M+1}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|f(s)\|ds &= \frac{1}{2T}\int_{M_{T,\varepsilon}} \|f(s)\|ds + \frac{1}{2T}\int_{[-T,T]\setminus M_{T,\varepsilon}} \|f(s)\|ds \\
&\leq \frac{M}{2T} med\big(M_{T,\varepsilon}(f)\big) + \frac{1}{2T}\big[2T - med\big(M_{T,\varepsilon}(f)\big)\big]\frac{\varepsilon}{M+1} \\
&\leq \frac{M\varepsilon}{M+1} + \frac{\varepsilon}{M+1} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto $f \in P_0(Z)$. ∎

Funções ergódicas como definidas anteriormente serão extremamente importantes para nosso propósito. Um fato conhecido é que, assim como as funções quase automórficas, o conjunto das funções ergódicas munido com a norma do supremo é um espaço de Banach. Para uma demonstração de tal fato sugerimos ao leitor a referência [16].

Definição 1.1.4 *Uma função $f : \mathbb{R} \to Z$ é chamada pseudo-quase automórfica se existem $g \in AA(Z)$ e $\phi \in P_0(Z)$ tais que $f = g + \phi$.*

Exemplo 1.1.3 *Pelos exemplos 1.1.1 e 1.1.2 segue-se que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(t) = sen\left(\frac{1}{2 + sen(t) + sen(\sqrt{2}t)}\right) + \max_{k \in \mathbb{Z}} \left\{\exp\left(-(t \pm k^2)^2\right)\right\}$$

é um exemplo de função pseudo-quase automórfica.

O conjunto das funções pseudo-quase automórficas é representado por $PAA(Z)$. É importante observar que $PAA(Z) = AA(Z) \oplus P_0(Z)$ e portanto $(PAA(Z), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Dada uma função $f \in PAA(Z)$, com decomposição $f = g + \phi$, é comum chamar a função g de parte quase automórfica e a função ϕ de parte ergódica de f.

Seja $P_0(W; Z)$ o conjunto das funções contínuas e limitadas $f : \mathbb{R} \times W \to Z$ tais que

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\phi(t, x)\| dt = 0$$

uniformemente para x em subconjuntos limitados de W.

Definição 1.1.5 *Uma função $f : \mathbb{R} \times W \to Z$ é chamada pseudo-quase automórfica se existem $g \in AA(W, Z)$ e $\phi \in P_0(W, Z)$ tais que $f = g + \phi$.*

Utilizamos a notação $PAA(W, Z)$ para representar o conjunto das funções pseudo-quase automórficas $f : \mathbb{R} \times W \to Z$. Assim como no caso de funções quase automórficas podemos estabelecer um resultado de composição para essas funções.

Lema 1.1.2 *Seja $f \in PAA(W; Z)$ uma função uniformemente contínua em subconjuntos limitados de W uniformemente para $t \in \mathbb{R}$. Se $u \in PAA(W)$, então a função $t \mapsto f(t, u(t))$ pertence a $PAA(Z)$.*

Demonstração: Seja $F(t) = f(t, u(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Considere $g \in AA(W; Z)$ e $\phi \in P_0(W; Z)$ tais que $f = g + \phi$. De forma similar considere $v \in AA(W)$ e $\psi \in P_0(W)$ tais que $u = v + \psi$. Assim a função F pode ser escrita na forma

$$F(t) = g(t, v(t)) + f(t, u(t)) - g(t, v(t)) = g(t, v(t)) + f(t, u(t)) - f(t, v(t)) + \phi(t, v(t)),\ t \in \mathbb{R}.$$

Para $t \in \mathbb{R}$, sejam

$$G(t) = g(t, v(t))$$

e

$$\Phi(t) = f(t, u(t)) - f(t, v(t)) + \phi(t, v(t)).$$

Pelo Lema 1.1.2 segue-se que $G \in AA(Z)$. Resta então mostrar que $\Phi \in P_0(Z)$. Inicialmente observe que a aplicação $f(\cdot, u(\cdot)) - f(\cdot, v(\cdot))$ é um contínua e limitada. Ademais, como as aplicações u e v são limitadas, pode-se escolher um subconjunto limitado $K \subseteq W$ tal que $u(t) \in K$ e $v(t) \in K$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Como f é uniformemente contínua sobre subconjuntos limitados de W, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in K$ com $\|x - y\| \leq \delta$ implica que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| < \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} med\big(M_{T,\varepsilon}(f(t, u(t)) - f(t, v(t))\big) &\leq \frac{1}{2T} med\big(M_{T,\delta}(u(t) - v(t))\big) \\ &= \frac{1}{2T} med\big(M_{T,\delta}(\psi(t))\big), \end{aligned}$$

onde $\psi(t) = u(t) - v(t) \in P_0(W)$. Pelo Lema 1.1.1 segue-se

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} med\big(M_{T,\varepsilon}(f(t, u(t)) - f(t, v(t))\big) = 0.$$

Portanto, $f(\cdot, u(\cdot)) - f(t, v(\cdot)) \in P_0(Z)$.

Por outro lado, observe que $\phi(\cdot, v(\cdot))$ é uniformemente contínua no intervalo $[-T, T]$. Como o conjunto $Y^T = v([-T, T]) \subset W$ é compacto, podemos considerar bolas abertas $O_k (k = 1, 2, ..., m)$, centradas em $x_k \in Y^K$ e de raios δ suficientemente pequenos para que $Y^K \subset \bigcup_{k=1}^{m} O_k$ e

$$\|\phi(t, v(t)) - \phi(t, x_k)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad se\ v(t) \in O_k \quad e \quad t \in [-T, T]. \tag{1.9}$$

Considere os abertos $B_k := v^{-1}(O_k)$. Claramente $[-T,T] \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B_k$. Defina os conjuntos E_i, $i = 1, \cdots, m$, por

$$E_k = \begin{cases} B_1, & k = 1, \\ B_k \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} B_j, & 2 \leq k \leq m. \end{cases}$$

Então $E_i \bigcap E_j = \emptyset$ quando $i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq m$. Além disso,

$$\{t \in [-T,T] : \|\phi(t, v(t))\| \geq \varepsilon\} \subset \bigcup_{k=1}^{m} \{t \in E_k : \|\phi(t, v(t)) - \phi(t, x_k)\| + \|\phi(t, x_k)\| \geq \varepsilon\}$$

$$\subset \bigcup_{k=1}^{m} \Big(\{t \in E_k : \|\phi(t, v(t)) - \phi(t, x_k)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{t \in E_k : \|\phi(t, x_k)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \Big).$$

Segue-se da desigualdade (1.9) que

$$\{t \in E_k : \|\phi(t, v(t)) - \phi(t, x_k)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

são conjuntos vazios para todo $1 \leq k \leq m$. Assim

$$\frac{1}{2T} med\big(M_{T,\varepsilon}(\phi(t, v(t)))\big) \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2T} med\big(M_{T,\frac{\varepsilon}{2}}(\phi(t, x_k))\big).$$

Uma vez que $\phi \in P_0(W; Z)$ e

$$\frac{1}{2T} med\big(M_{T,\frac{\varepsilon}{2}}(\phi(t, x_k))\big) \to 0,$$

quando $T \to \infty$, obtemos que

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} med\big(M_{T,\frac{\varepsilon}{2}}(\phi(t, v(t)))\big) = 0.$$

Logo, $\Phi \in P_0(Z)$ concluindo-se que $F \in PAA(Z)$. ■

1.2 Semigrupos de Operadores Lineares e Espaços de Extrapolação

Nesta seção $(X, \|\cdot\|)$ representará um espaço de Banach. O conjunto dos operadores lineares limitados sobre X será denotado por $\mathcal{L}(X)$. Ademais, para um operador linear

$A : D(A) \subset X \to X$ usaremos as notações canônicas $\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - A)^{-1}$ é bijetivo e limitado$\}$ para representar o conjunto resolvente e $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ para o conjunto espectro do operador A. Finalmente, se $\lambda \in \rho(A)$, denota-se $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$.

Definição 1.2.1 *Uma família de operadores lineares $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo se*

(i) $T(0) = I$; *(identidade)*

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \forall\ t, s \geq 0.$

Se, além disso

(iii) $\|T(t)x - x\| \to 0$ *quando* $t \to 0^+$, $\forall\ x \in X$, *dizemos que o semigrupo é fortemente contínuo ou um C_0-semigrupo.*

Definição 1.2.2 *Se $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares, seu gerador infinitesimal é o operador $A : D(A) \subset X \to X$ definido por*

$$Ax := \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

onde

$$D(A) := \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \ \textit{existe} \right\}.$$

Exemplo 1.2.1 *Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ e defina*

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}.$$

Então $(e^{At})_{t\geq 0}$ define um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares sobre X satisfazendo

$$\|e^{At}\| \leq e^{\|A\|t}, \quad t \geq 0.$$

A idéia de semigrupo está associada a equações diferenciais lineares da forma

$$x'(t) = Ax(t),\ \ t > 0, \tag{1.10}$$

$$x(0) = x_0,$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $(T(t))_{t\geq 0}$. O semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é o operador solução desta equação, isto é, para cada $x_0 \in X$, $T(t)x_0$ é a solução de (1.10).

O seguinte resultado exalta algumas propriedades de C_0-semigrupos de operadores lineares.

Teorema 1.2.1 *Dado A o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo de operadores lineares $(T(t))_{t\geq 0}$ em X. Então*

(i) Para $x \in X$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x; \tag{1.11}$$

(ii) Para $x \in X$, $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ e

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x; \tag{1.12}$$

(iii) Para $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax; \tag{1.13}$$

(iv) Para $x \in D(A)$

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau. \tag{1.14}$$

Demonstração: (i) Segue da continuidade da aplicação $t \to T(t)x$;

(ii) Dados $x \in X$ e $h > 0$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h}\left(\int_0^t T(s+h)xds - \int_0^t T(s)xds\right) \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Fazendo $h \to 0^+$, o primeiro membro das igualdades em (1.15) converge para $A(\int_0^t T(s)xds)$ e o último membro converge para $T(t)x - x$, completando a prova;

(iii) Dado $x \in D(A)$ e $h > 0$ tem-se

$$\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)T(t)x = T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x \tag{1.16}$$

Fazendo $h \to 0^+$, o segundo membro de (1.16) converge para $T(t)Ax$. Assim $T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$. Tal convergência implica também que

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax,$$

mostrando que a derivada direita de $T(t)x$ é $T(t)Ax$. A derivada à esquerda, para $t > 0$, de $T(t)x$ existe e também é $T(t)Ax$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\right) &= \lim_{h\to 0^+} T(t-h)\left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right) \\ &+ \lim_{h\to 0^+}\left(T(t-h)Ax - T(t)Ax\right). \end{aligned}$$

como $x \in D(A)$ e $\|T(t-h)\|$ é limitada para $0 \leq h \leq t$ segue-se que o primeiro termo da soma converge para 0. Ademais, como $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo o segundo converge a 0, concluindo a prova;

(iv) Conclui-se integrando a equação (1.13) do valor s ao valor t. ∎

Uma consequência importante do teorema anterior é dada no seguinte corolário.

Corolário 1.2.1 *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de operadores lineares $(T(t))_{t\geq 0}$, então $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração: Para todo $x \in X$ e $t > 0$ define-se

$$x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds.$$

Pelo item (ii) do Teorema 1.2.1 , segue-se que $x_t \in D(A)$ para $t > 0$. Pelo item (i), temos que $x_t \to x$ quando $t \to 0^+$. Assim $\overline{D(A)} = X$. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \in D(A)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ e $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \to y$ quando $n \to \infty$. Pelo item (iv) do Teorema 1.2.1 tem-se

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_nds. \tag{1.17}$$

Dividindo (1.17) por $t > 0$ e fazendo $t \to 0^+$ tem-se que, usando (i), $x \in D(A)$ e que $Ax = y$. ■

Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Segue-se imediatamente do Corolário 1.2.1 que se $D(A)$ não é denso em X então A não gera um C_0-semigrupo de operadores lineares.

É importante observar que se $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupos de operadores lineares então existem constantes $\omega \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t},\ t \geq 0. \tag{1.18}$$

Um resultado importante na teoria de semigrupos de operadores lineares é o famoso Teorema de Hille-Yosida, o qual pode ser encontrado, por exemplo, em [8], que fornece critérios espectrais para que um operador linear fechado $A : D(A) \subset X \to X$ seja o gerador de um C_0 semigrupo de operadores lineares com uma dominação exponencial como em (1.18).

Teorema 1.2.2 (Teorema de Hille-Yosida) *Dados $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado e constantes $\omega \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$, as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) $(A, D(A))$ é o gerador de um C_0-semigrupo de operadores lineares $(T(t))_{t\geq 0}$ satisfazendo

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0. \tag{1.19}$$

(ii) A é densamente definido, $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ e

$$\sup\{(\lambda - \omega)^n ||(\lambda - A)^{-n}|| : n \in \mathbb{N}, \lambda \geq \omega\} \leq M.$$

Tal resultado motiva introduzir a seguinte classe especial de operadores lineares.

Definição 1.2.3 *Dado X um espaço de Banach e A um operador linear com domínio $D(A)$. Diz-se que $(A, D(A))$ é um operador Hille-Yosida se existem constantes $\omega \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$ tais que $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ e*

$$\sup\{(\lambda - \omega)^n ||(\lambda - A)^{-n}|| : n \in \mathbb{N}, \lambda \geq \omega\} \leq M.$$

É comum chamar o ínfimo das constantes ω de tipo do operador A. Se tal ínfimo pode ser escolhido menor do que zero, o operador A é chamado operador de Hille-Yosida de tipo negativo. Observe que nenhuma hipótese quanto a densidade de $D(A)$ foi feita na definição anterior. O caso interessante, e mais difícil, é quando $\overline{D(A)}$ é um subespaço própio de X. De fato, em tal situação a teoria usual de semigrupos não pode ser imediatamente empregada, por exemplo, para tratar de existência de soluções para equações de evolução. Porém, tal fato pode ser contornado através da introdução de espaços de Banach apropriados, os chamos *espaços de extrapolação.*

Os espaços de extrapolação tem sido usados em várias oportunidades, por exemplo para o estudo de equações integro-diferenciais de Volterra e equações diferenciais com retardo, ver [7, 8]. Para finalizarmos essa seção apresentaremos a definição e recordaremos algumas propriedades básicas dos espaços de extrapolação para operadores Hille-Yosida.

Sejam $A : D(A) \subset X \to X$ um operador de Hille-Yosida de tipo negativo ω e $X_0 = \overline{D(A)}$. Considere a resolução de A sobre X_0, isto é, considere o operador definido por $A_0 x = Ax$ com domínio

$$D(A_0) = \{x \in D(A) : Ax \in X_0\}.$$

O seguinte ressultado pode ser encontrado em [8].

Lema 1.2.1 *O operador A_0 é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T_0(t))_{t \geq 0}$ em X_0 com*

$$\|T_0(t)\| \leq M e^{\omega t},$$

para $t \geq 0$. Além disto, $\rho(A) \subseteq \rho(A_0)$ e $R(\lambda, A_0) = R(\lambda, A)|_{X_0}$, para $\lambda \in \rho(A)$.

Ora, A operador de Hille-Yosida de tipo negativo implica que $0 \in \rho(A)$, ou seja, $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Considere sobre X_0 a norma $\|x\|_{-1} = \|A_0^{-1} x\|$.

Definição 1.2.4 *O completamento topológico de* $(X_0, \|\cdot\|_{-1})$ *será denotado por* X_{-1} *e será chamado o espaço de extrapolação de* X_0 *associado com* A_0.

Vale ressaltar que
$$X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_{-1},$$
isto é, X é um espaço intermediário entre X_0 e X_{-1}. Ademais, tais inclusões são contínuas. Como
$$A_0^{-1}T_0(t) = T_0(t)A_0^{-1},$$
tem-se que
$$\|T_0(t)x\|_{-1} \leq \|T_0(t)\|_{\mathcal{L}(X_0)}\|x\|_{-1}$$
implicando que $T_0(t)$ possui uma única extensão linear limitada $T_{-1}(t)$ em X_{-1}. A família de operadores $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de operadores lineares e será chamada de *semigrupo extrapolado* associado a $(T_0(t))_{t\geq 0}$. Na sequência desse trabalho, $(A_{-1}, D(A_{-1}))$ será o gerador infinitesimal de $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$.

No seguinte lema resumimos as principais propriedades de semigrupos extrapolados e espaços de extrapolação que serão utilizadas nessa dissertação. A demonstração de tais fatos podem ser encontradas na referências [7, 10].

Lema 1.2.2 *Sobre as condições prévias, as seguintes propriedades são verificadas:*

(i) $D(A_{-1}) = X_0$ *e* $\|T_{-1}\|_{\mathcal{L}(X_{-1})} = \|T_0\|_{\mathcal{L}(X_0)}$ *para todo* $t \geq 0$;

(ii) O operador $A_{-1} : X_0 \subset X_{-1} \to X_{-1}$ *é a única extensão contínua de*
$$A_0 : D(A_0) \subset (X_0, \|\cdot\|) \to (X_{-1}, \|\cdot\|_{-1})$$
e A_{-1} *é uma isometria de* $(X_0, \|\cdot\|)$ *sobre* $(X_{-1}, \|\cdot\|_{-1})$;

(iii) Se $\lambda \in \rho(A_0)$, *então* $(\lambda - A_{-1})^{-1}$ *existe e* $(\lambda - A_{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(X_{-1})$. *Em particular,* $\lambda \in \rho(A_{-1})$ *e* $R(\lambda, A_{-1})|_{X_0} = R(\lambda, A_0)$

(iv) O espaço $X_0 = \overline{D(A)}$ *é denso em* $(X_{-1}, \|\cdot\|_{-1})$. *Assim o espaço de extrapolação é o fecho de* $(X, \|\cdot\|_{-1})$ *e* $X \hookrightarrow X_{-1}$. *Além disto,* A_{-1} *é uma extensão de* A *para* X_{-1}. *Em particular, se* $\lambda \in \rho(A)$, *então*
$$R(\lambda, A_{-1})|_X = R(\lambda, A) \text{ e } R(\lambda, A_{-1})X = D(A).$$

1.3 Teoremas de ponto fixo

Nesta seção relembra-se os teoremas da teoria de ponto fixo que utiliza-se neste trabalho. Começa-se relembrando a definição de ponto fixo.

Definição 1.3.1 *Sejam X um espaço topológico e $f : X \to X$ uma função contínua. Um ponto fixo para f é um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

Dados um espaço topológico X e uma função contínua $f : X \to X$ a existência de um ponto fixo para f pode ser devida apenas a natureza do espaço X. Por exemplo, se $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$, então segue-se do teorema do valor intermediário que toda função contínua $f : X \to X$ possui ao menos um ponto fixo. Entretanto, neste trabalho, tem-se interesse em resultados que forneçam hipóteses sobre uma função contínua $f : X \to X$ de modo que ela possua um ponto fixo. No decorrer desta subseção apresenta-se alguns de tais resultados.

Definição 1.3.2 *Sejam (X, d) e (Y, ρ) espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ para a qual existe uma constante $L > 0$ tal que*

$$\rho(f(x), f(z)) \leq Ld(x, z),$$

para todos $x, z \in X$ é chamada Lipschitziana. A constante L é chamada constante de Lipschitz de f.

Observação 1.3.1 *Observe que naturalmente uma função Lipschitziana é uniformemente contínua. Quando $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ é Lipschitziana e a constante de Lipschitz $L < 1$ dizemos que f é uma contração.*

Observação 1.3.2 *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Tem-se interesse particular na situação onde $f : I \times X \to Y$ é uma função contínua que satisfaz a condição*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|,$$

para todos $x, y \in X$, $t \in I$, onde $I = \mathbb{R}$ ou $I = [0, \infty)$, e $L : I \to [0, \infty)$ é uma função dada. Nesta situação diz-se também que f é uma função Lipschitziana.

A seguir enuncia-se o Principio da Contração de Banach. Esse resultado é um dos mais simples e aplicados teoremas de ponto fixo.

Teorema 1.3.1 (Princípio da Contração de Banach) *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma contração. Então f possui um único ponto fixo.*

Uma variação deste resultado é teorema a seguir, o qual nos permite considerar condições mais gerais nos resultados no próximo capítulo.

Teorema 1.3.2 (Princípio dos iterados) *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma função contínua. Se para algum $n \in \mathbb{N}$ o iterado f^n é uma contração, então f possui um único ponto fixo.*

1.4 Soluções Brandas para equações diferenciais não homogêneas

Seja X um espaço de Banach. Considere a equação de evolução linear

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.20}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador de Hille-Yosida de tipo negativo e $f \in BC(\mathbb{R}, X)$. Na situação onde $X_0 := \overline{D(A)} = X$, a teoria de semigrupos aplica-se de forma imediata ao estudo de existência de soluções para a Equação (1.20). Porém, se X_0 é um subespaço próprio de X segue-se que A não gera um C_0-semigrupo.

Por outro lado, como vimos na seção anterior podemos considerar uma extensão do operador A para um espaço conveniente de modo que tal extenção é o gerador de um C_0-semigrupo, o qual denominamos de semigrupo extrapolado. Nesta seção relembramos alguns resultados que relacionam existência e solução para a Equação (1.20) e semigrupos extrapolados.

Como vimos no capítulo anterior, a hipótese de $A : D(A) \subset X \to X$ ser um operador de Hille-Yosida de tipo negativo acarreta na existência de constantes $C \geq 1$ e $\omega < 0$ tais que o semigrupo extrapolado possui a seguinte limitação exponencial:

$$\|T_{-1}(t)\| \leq Ce^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

No decorrer desta seção C e ω serão as constantes dessa desigualdade.

Lema 1.4.1 *Dado $f \in BC(\mathbb{R}, X)$, as seguintes propriedades são verificadas.*

(i) $\|T_{-1} * f(t)\| \leq Ce^{\omega t} \int_{-\infty}^{t} e^{-\omega s} \|f(s)\| ds$;

(ii) O operador linear $\Gamma : BC(\mathbb{R}, X) \to BC(\mathbb{R}, X)$ *definido por* $\Gamma f(t) = T_{-1} * f(t)$ *é contínuo;*

Demonstração: (i) De fato, observe que

$$\begin{aligned}
\|T_{-1} * f(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|T_{-1}(t-s) f(s)\| ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \|T_{-1}(t-s)\| \|f(s)\| ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} Ce^{\omega(t-s)} \|f(s)\| ds \\
&= Ce^{\omega t} \int_{-\infty}^{t} e^{-\omega s} \|f(s)\| ds.
\end{aligned}$$

(ii) De fato, basta observar que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma f(t) - \Gamma g(t)\| &\leq Ce^{\omega t} \int_{-\infty}^{t} e^{-\omega s} \|f(s) - g(s)\| ds \\
&= \left(Ce^{\omega t} \int_{-\infty}^{t} e^{-\omega s} ds \right) \|f - g\|_\infty \\
&\leq \left(\frac{C}{|\omega|} \right) \|f - g\|_\infty,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Finalmente, em [7] os autores mostram que a função $x : \mathbb{R} \to X$ dada por

$$x(t) = T_{-1} * f(t) := \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s) f(s) ds, \tag{1.21}$$

é a única solução branda da Equação (1.20). Ademais,

$$T_{-1} * f(t) \in X_0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Capítulo 2

Automorficidade e ergodicidade para equações de evolução

Neste capítulo trataremos da existência e unicidade de soluções brandas quase automórficas e pseudo-quase automórficas para a equação de evolução semilinear

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador de Hille-Yosida de tipo negativo definido sobre um espaço de Banach X e $f : \mathbb{R} \times X_0 \to X$ é uma função apropriada. Fixamos a notação $X_0 = \overline{D(A)}$ e não faremos nenhuma suposição quanto a densidade de $D(A)$. Chamaremos de solução branda para Equação 2.1 uma função contínua $x : \mathbb{R} \to X_0$ que satisfaz a equação integral 1.21, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observação 2.0.1 *Como vimos no capítulo anterior, a hipótese de $A : D(A) \subset X \to X$ ser um operador de Hille-Yosida de tipo negativo acarreta na existência de constantes $C \geq 1$ e $\omega < 0$ tais que o semigrupo extrapolado possui a seguinte limitação exponencial:*

$$\|T_{-1}(t)\| \leq Ce^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

No decorrer deste capítulo C e ω serão as constantes dessa desigualdade.

2.1 Soluções quase automórficas

Iniciamos esta seção com um resultado que assegura a regularidade do semigrupo extrapolado com funções quase automórficas.

Proposição 2.1.1 *Se $f \in AA(X)$ então a função $T_{-1} * f : \mathbb{R} \to X_0$, dada pela regra*

$$\big(T_{-1} * f\big)(t) := \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)f(s)ds,$$

é uma função quase automórfica.

Demonstração: De fato, dada $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais, existem uma subsequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma função $g : \mathbb{R} \to X$ tais que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} f(t+s_n) = g(t)$ e $\lim_{n\to\infty} g(t-s_n) = f(t)$. Observe que

$$\begin{aligned} \big(T_{-1} * f\big)(t+s_n) &= \int_{-\infty}^{t+s_n} T_{-1}(t+s_n-s)f(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)f(s+s_n)ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)f_n(s)ds, \end{aligned}$$

onde $f_n(t) = f(t+s_n)$, para $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Logo, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue segue-se que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \big(T_{-1} * f\big)(t+s_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)f_n(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} \lim_{n\to\infty} [T_{-1}(t-s)f_n(s)]ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)g(s)ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Analogamente, pode-se mostrar que $\big(T_{-1} * g\big)(t-s_n)$ converge para $\big(T_{-1} * f\big)(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. ∎

Observação 2.1.1 *Uma consequência imediata do Lema 2.1.1 é a regularidade do problema linear. De fato, se $f : \mathbb{R} \to X$ uma função quase automórfica. Então o problema*

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador de Hille-Yosida de tipo negativo definido sobre um espaço de Banach X, possui uma única solução branda em $AA(X_0)$ dada por $x(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)f(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$.

No resultado a seguir usamos a regularidade da convolução do semigrupo extrapolado com funções quase automórficas para garantir a existência de uma única solução em $AA(X_0)$ para a Equação (2.1).

Teorema 2.1.1 *Seja $f \in AA(X_0, X)$ satisfazendo a condição de Lipschitz*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall x, y \in X_0.$$

Se $CL < |\omega|$, então a Equação (2.1) possui única solução branda quase automórfica.

Demonstração: Defino o operador $\Gamma : AA(X_0) \to BC(\mathbb{R}, X)$ por

$$\Gamma x(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s) f(s, x(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pelo Lema 1.1.2, segue-se que se $x \in AA(X_0)$ então a função $f(\cdot, x(\cdot)) \in AA(X_0)$. Portanto, usando o Lema 2.1.1 podemos concluir que $AA(X_0)$ é Γ-invariante, isto é, $\Gamma : AA(X_0) \to AA(X_0)$ está bem definido. Resta então mostrar que Γ possui um único ponto fixo em $AA(X_0)$. Para isto considere u e v em $AA(X_0)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| &= \| \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)[f(s,u(s)) - f(s,v(s))] ds \| \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \|T_{-1}(t-s)[f(s,u(s)) - f(s,v(s))]\| ds \\
&\leq CL \int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)} \|u(s) - v(s)\| ds \\
&\leq CL \left(\int_{0}^{\infty} e^{\omega s} ds \right) \|u - v\|_\infty \\
&\leq \frac{CL}{|\omega|} \|u - v\|_\infty .
\end{aligned}$$

Uma vez que $\dfrac{CL}{|\omega|} < 1$, segue-se que Γ é uma contração. Portanto, o resultado é consequencia do teorema do ponto fixo de Banach. ■

Exemplo 2.1.1 *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defina por*

$$g(t) = sen \left(\frac{1}{2 + sen(t) + sen(\sqrt{2}t)} \right).$$

Sejam $\alpha, \mu \in \mathbb{R}_+$ constantes e considere o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - \mu u + \alpha g u, & \mathbb{R} \times [0, \pi] \\ u = 0, & \mathbb{R} \times \{0, \pi\} \end{cases} \tag{2.2}$$

Para tratar o problema (2.2) na formulação abstrata dada pela Equação (2.1) consideramos $X = C([0,\pi]; \mathbb{R})$ e A o operador linear definido sobre X pela regra $Au = u'' - \mu u$ e com domínio

$$D(A) = \{u \in X : u'' \in X, u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Sabe-se que A é um operador de Hille-Yosida de tipo $-\mu$. Além disso,

$$X_0 = \overline{D(A)} = C_0([0,\pi]; \mathbb{R}) := \{u \in X : u(0) = u(\pi) = 0\},$$

donde segue-se que A possui domínio não denso. Finalmente, escrevendo $u(t)(s) = u(t,s)$ e considerando a função $f : \mathbb{R} \times X_0 \to X$ definida por

$$f(t, \psi)(s) = \alpha \psi(s) g(t),$$

onde $s \in [0, \pi]$, obtemos que o problema (2.2) pode ser reformulado na versão abstrata (2.1). Por outro lado, segue-se do exemplo 1.1.1 que $f \in AA(X_0, X)$. Logo, se α é suficientemente pequeno, pela função g ser limitada, o Teorema 2.2.2 assegura que o problema (2.4) possui uma única solução branda quase automórfica.

2.2 Soluções pseudo-quase automórficas

Como vimos na seção anterior, a regularidade do semigrupo extrapolado com funções quase automórficas foi fundamental para assegurar a existência de soluções brandas em $AA(X_0)$ para a Equação (2.1). Motivados por este fato iniciamos esta seção com o seguinte lema de convolução:

Proposição 2.2.1 *Seja $f \in PAA(X)$. Se $T_{-1} * f$ é a função definida na Proposição 2.1.1, então $T_{-1} * f \in PAA(X_0)$.*

Demonstração: Com efeito, sejam $g \in AA(X)$ e $\phi \in P_0(X)$ tais que $f = g + \phi$. Claramente,

$$\big(T_{-1} * f\big)(t) = \big(T_{-1} * g\big)(t) + \big(T_{-1} * \phi\big)(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ademais, segue-se do Lema 2.1.1 que $T_{-1} * g \in AP(X_0)$ e portanto resta apenas mostrar que $T_{-1} * \phi \in P_0(X_0)$. Ora, para $T > 0$ temos que

$$\int_{-T}^{T} e^{\omega t} \int_{-\infty}^{t} e^{|\omega| s} \|\phi(s)\| ds dt \leq \frac{1}{|\omega|} \int_{-\infty}^{-T} e^{|\omega|(T+s)} \|\phi(s)\| ds + \frac{1}{|\omega|} \int_{-T}^{T} \|\phi(s)\| ds.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\big(T_{-1} * \phi\big)(t)\| dt &\leq \frac{C}{2T} \int_{-T}^{T} e^{\omega t} \int_{-\infty}^{t} e^{|\omega| s} \|\phi(s)\| ds dt \\
&\leq \frac{C}{2T|\omega|} \int_{-\infty}^{-T} e^{|\omega|(T+s)} \|\phi(s)\| ds + \frac{C}{2T|\omega|} \int_{-T}^{T} \|\phi(s)\| ds \\
&\leq \frac{C}{2T|\omega|} \|\phi\|_{\infty} \int_{-\infty}^{-T} e^{|\omega|(T+s)} ds + \frac{C}{2T|\omega|} \int_{-T}^{T} \|\phi(s)\| ds \\
&= \frac{C\|\phi\|_{\infty}}{2T\omega^2} + \frac{C}{2T|\omega|} \int_{-T}^{T} \|\phi(s)\| ds.
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo $T \to \infty$ obtemos que

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\big(T_{-1} * \phi\big)(t)\| dt = 0,$$

o que completa a demonstração. ■

De posse do resultado anterior estamos em condições de estabelecer nosso primeiro resultado acerca de existência de soluções brandas pseudo-quase automórficas para a Equação (2.1).

Teorema 2.2.1 *Seja $f \in PAA(X_0, X)$. Se existe uma função limitada e integrável $L_f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ tal que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L_f(t)\|x - y\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall x, y \in X_0. \tag{2.3}$$

Então a Equação (2.1) possui uma única solução branda pseudo-quase automórfica.

Demonstração: Defina o operador $\Gamma : PAA(X_0) \to BC(\mathbb{R}, X)$ por

$$\Gamma x(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s) f(s, x(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observe que a condição de Lipschitz (2.3) e o Lema 1.1.2 asseguram que se $x \in PAA(X_0)$ então a função $f(\cdot, x(\cdot)) \in PAA(X_0)$. Consequentemente, usando o Lema 2.2.1 podemos concluir que o operador $\Gamma : PAA(X_0) \to PAA(X_0)$ está bem definido. Resta então mostrar que Γ possui um único ponto fixo em $PAA(X_0)$. Para isto considere u e v em $PAA(X_0)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| &= \left\| \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)[f(s,u(s)) - f(s,v(s))]ds \right\| \\
&\leq C \int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)} L_f(s) \|u(s) - v(s)\| ds \\
&\leq C \int_{-\infty}^{t} L_f(s) \|u(s) - v(s)\| ds \\
&\leq C \|L_f\|_{L^1} \|u - v\|_\infty .
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma^2 u(t) - \Gamma^2 v(t)\| &\leq C \int_{-\infty}^{t} L_f(s) \|\Gamma u(s) - \Gamma v(s)\| ds \\
&\leq C \int_{-\infty}^{t} L_f(s) \left(C \int_{-\infty}^{s} L_f(\tau) \|u(\tau) - v(\tau)\| d\tau \right) ds \\
&\leq \frac{C^2}{2} \left(\int_{-\infty}^{t} L_f(s) ds \right)^2 \|u - v\|_\infty \\
&\leq \frac{\left(C \|L_f\|_{L^1}\right)^2}{2} \|u - v\|_\infty .
\end{aligned}$$

Procedendo recursivamente, obtemos, para todo $n \in \mathbb{N}$, que

$$\|\Gamma^n u(t) - \Gamma^n v(t)\| \leq \frac{\left(C \|L_f\|_{L^1}\right)^n}{n!} \|u - v\|_\infty .$$

Considere n suficientemente grande tal que $\left(C\|L_f\|_{L^1}\right)^n / n! < 1$. Então segue-se que Γ^n possui um único ponto fixo em $PAA(X_0)$ e portanto, pelo princípio das contrações, segue-se que a Equação (2.1) possui uma única solução branda pseudo-quase automórfica. ■

Observe que o teorema anterior não cobre o caso onde a função f satisfaz uma condição do tipo L-Lipschitz com $L > 0$ constante. Para tal situação temos o seguinte resultado.

Teorema 2.2.2 *Seja $f \in PAA(X_0, X)$. Suponha que f verifica a condição (2.3) com L_f uma função contínua limitada. Seja $\mu(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)} L_f(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$. Se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $C\mu(t) \leq \alpha < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então a Equação (2.1) possui uma única solução branda pseudo-quase automórfica.*

Demonstração: Defina o operador Γ sobre $PAA(\mathbb{R}, X_0)$ por

$$\Gamma x(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s) f(s, x(s))ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De forma análoga à demonstração do teorema anterior segue-se que Γ está bem definido e $PAA(X_0)$ é Γ-invariante. Por outro lado, se $u, v \in PAA(X_0)$ temos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| &\leq C \int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)} L_f(s) \|u(s) - v(s)\| ds \\ &\leq C \left(\int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)} L_f(s) ds \right) \|u - v\|_{\infty} \\ &= C\mu(t) \|u - v\|_{\infty} \leq \alpha \|u - v\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Portanto, Γ é uma contração e o resultado é consequência do teorema do ponto fixo de Banach. ■

Um corolário imediato do teorema anterior é dado a seguir.

Teorema 2.2.3 *Seja $f \in PAA(X_0, X)$. Suponha que f verifica a condição de Lipschitz*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall x, y \in X_0,$$

com $L > 0$ constante. Se $CL < |\omega|$, então a Equação (2.1) possui uma única solução branda pseudo-quase automórfica.

Para finalizar esta seção consideramos um exemplo proveniente da teoria da condução do calor.

Exemplo 2.2.1 *Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definas por*

$$g(t) = \sin\left(\frac{1}{2 + \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t)} \right) \quad e \quad \phi(t) = \max_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \exp\left(-(t \pm k^2)^2 \right) \right\}.$$

Seja $\alpha > 0$ constante e considere o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + \alpha g u + \alpha \phi \sin(u), & \mathbb{R} \times [0, \pi] \\ u = 0, & \mathbb{R} \times \{0, \pi\} \end{cases} \tag{2.4}$$

Para tratar o problema (2.4) na formulação abstrata dada pela Equação (2.1) consideramos $X = C([0, \pi]; \mathbb{R})$ e A o operador linear definido sobre X pela regra $Au = u'' - u$ e com domínio

$$D(A) = \{u \in X : u'' \in X, u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Sabe-se que A é um operador de Hille-Yosida de tipo -1. Além disso,

$$X_0 = \overline{D(A)} = C_0([0, \pi]; \mathbb{R}) := \{u \in X : u(0) = u(\pi) = 0\},$$

donde segue-se que A possui domínio não denso. Finalmente, escrevendo $u(t)(s) = u(t, s)$ e considerando a função $f : \mathbb{R} \times X_0 \to X$ definida por

$$f(t, \psi)(s) = \alpha \psi(s) g(t) + \alpha \phi(t) \sin(\psi(s)),$$

onde $s \in [0, \pi]$, obtemos que o problema (2.4) pode ser reformulado na versão abstrata (2.1). Por outro lado, segue-se dos exemplos 1.1.1 e 1.1.2 que $f \in PAA(X_0, X)$. Logo, se α é suficientemente pequeno o Teorema 2.2.2 assegura que o problema (2.4) possui uma única solução branda pseudo-quase automórfica.

Bibliografia

1. B.de Andrade and C. Cuevas, Almost Automorphic and Pseudo-Almost Automorphic Solutions to Semilinear Evolution Equations with Nondense Domain, J. Inequal. Appl. 298207 (2009) 8, doi:10.1155/2009/298207;

2. B. Amir and L. Maniar, Composition of pseudo-almost periodic functions and Cauchy problems with operator of non dense domain, Ann. Math. Blaise Pascal 6(1)(1999)1-11;

3. A. N. Carvalho, Análise Funcional II. 2011, 226p. Notas de Aula disponível na Internet via http://www.icmc.usp.br/ andcarva/AnaliseFuncional-II.pdf em 12 de julho de 2011;

4. C. Cuevas and E. M. Hernández, "Pseudo-almost periodic solutions for abstract partial funtional differential equations,"Applied Mathematics Letters, vol. 22, pp. 534-538, 2009;

5. G. Da Prato and P. Grisvard, On extrapolation spaces, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 72 (6) (1982) 330-332;

6. G. Da Prato and E. Sinestrari, "Differential operators with nondense domain,"Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze, vol. 14, no. 2, pp. 285-344, 1987;

7. T. Diagana, H.R. Henriquez, and E. M. Hernández, "Almost automorphic mild solutions to some partial neutral functional-differential eqquations and applications,"Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, vol 69, no 5-6, pp. 1485-1493, 2008;

8. K. J. Engel and R. Nagel, One-parameter semigroups for linear evolution equations, Graduate Texts in Mathmatics, vol. 194, Springer-Verlag, 2001;

9. P. J. Fernandez, Medida e Integração, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976;

10. C. S. Hönig, Aplicações da Topologia à análise, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976;

11. H. Li, F. Huang and J. Li, "Composition of Pseudo-Almost Periodic Functions and Semiliear Differential Equations,"Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol 255, no. 2, pp436-446, 2001;

12. R. Nagel and E. Sinestrari, Inhomogeneous Volterra integrodifferential equations for Hille-Yosida operators, Marcel Dekker, Lect. Notes Pure Appl. Math. 150 (1994);

13. A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Applied mathematical sciences, (Springer-Verlag, New York Inc.); v44,1.Differential equations, partial; 2. Initial value problems; 3.Semigroup of operators;

14. T. J. Xiao, J. Liang, and J. Zang, "Composition of pseudo-almost automorphic and asymptotically almost automorphic funtions,"Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol 340, no. 2, pp.1493-1499, 2008;

15. T. J. Xiao, J. Liang, and J. Zang, "Pseudo-almost automorphic mild solutions to nonautonomous differential solutions and applications,"Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, vol 70, no 11, pp. 4079-7085, 2009.

16. C. Zhang, Almost Periodic Type and Ergodicity, Kluwer Academic Publishers and Science Press, 2003.