Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de soluções periódicas com período diferenciável no problema dos N+1 vórtices na esfera com um vórtice no pólo norte.

por

Gersonilo Oliveira da Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Hildeberto Eulálio Cabral

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Recife - PE
Março/2006

Catalogação na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc L. Salvador, CRB 4-572

Silva, Gersonilo Oliveira da.
Existência de soluções periódicas com período diferenciável no problema dos N+1 vórtices na esfera com um vórtice no pólo norte / Gersonilo Oliveira da Silva. - Recife: O Autor, 2006.
v, 49 f.

Orientador: Hildeberto Eulálio Cabral.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2006.

Inclui bibliografia.

1.Mecânica celeste. 2.Teoremas de existência. I.Cabral, Hildeberto Eulálio (orientador). II.Título.

521 (22.ed.) MEI 2011-017

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado: ______________________________

Hildeberto Eulálio Cabral, DMAT-UFPE
Orientador

____

Eduardo Shirlippe Góes Leandro, DMAT-UFPE

____

Vicente Francisco Sousa Neto, DM -UNICAP

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS NO PROBLEMA DOS N+1 VÓRTICES NA ESFERA

Por

Gersonilo Oliveira da Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Março - 2006

Agradecimentos

Antes de todos Deus.

Tenho muitos a quem agradecer, de certo o primeiro deve ser o professor Hildeberto Eulálio, que foi sem dúvidas o principal responsável pela elaboração e realização deste trabalho. Também devo agradecer a meus amigos, em especial a Henrique Vitório, Flávio Leal, Humberto Viglioni e Frederico Elihimas que vivenciaram de perto e com influência minha formação e minha dedicação a este trabalho. De forma pessoal agradeço a meus amigos que são bem mais que irmãos, Luiz Carlos e Ronnie Camilo que me apoiaram em todos os momentos, dando-me condições de concluir e continuar meu mestrado e minha vida. A meus pais e familiares. Ao Departamento de Matemática da UFPE pela estrutura dedicada a minha formação e a CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

Será apresentado neste trabalho um estudo acerca da existência de soluções periódicas com períodos diferenciáveis do sistema não linear no problema dos N+1 vórtices na esfera com um vórtice no pólo norte, garantidas pelo Teorema do Centro devido a Liapunov. É feita uma análise para garantir que as hipóteses do Teorema são satisfeitas pelos autovalores da matriz da parte linear do sistema. Usamos resultados obtidos por Hildeberto Cabral, Meyer e Schmidt no artigo *Stability and Bifurcations the N+1 vortex problem on the sphere*, para os autovalores da matriz de estabilidade do sistema associado ao problema dos N+1 vortices na esfera com um vórtice no pólo norte. Mostraremos que existem conjuntos abertos nos quais o quociente dos autovalores por um fixado é não inteiro. Mostrando que além de ser estável o problema ainda tem propriedades periódicas de forma diferenciável.

Palavras Chave: Existência, Mecânica Celeste

Abstract

In this work we present one study above exist of periodics solutions of the no-linear system in the N+1 vortex problem with vortex at the north pole, with diferencial period, garanted for the Theorem of the center by Liapunov. Is make one analises for garanted with the hipoteses of the Theorem are satisfied for the eigenvalues of the matrix of the part linear of the system. We used result obtained by Hildeberto Cabral, Meyer e Schmidt in the paper *Stability and Bifurcations the N+1 vortex problem on the sphere*, for the eigenvalues of the stability matrix of the system associate N+1 vortex problem in the sphere with vortex north pole. Show will with exist open sets where the rate of the others eigenvalues by one fixed not is entire. Showing with over there of to be stable the problem have periodic solution of form diferencial.

Kaywords: Existence, Celestial Mechanics

Dedicatória

A todos e tudo que de alguma forma possibilitaram a inspiração necessária.

Conteúdo

Introdução

O problema dos N+1 vórtices na esfera teve suas equações derivadas por V.A.Bogomolov em 1977. Em 1883, G. Kirchhoff derivou as equações de movimento para o problema dos N+1 vórtices na linguagem de Mecânica Hamiltoniana. No entanto o interesse na teoria dos vórtices vem de antes, já em 1882 J.J.Thomson discutiu o problema de vórtices num fluido ideal com o intuito de entender a estrutura do átomo. Faremos uma análise do problema dos N+1 vórtices numa vizinhança do equilíbrio relativo definido pela configuraçao em que N vórtices de intensidade igual a um estao nos vértices de um polígono regular numa dada latitude e o (N+1)-ésimo vórtice, de intensidade κ, está no pólo norte. Começamos apresentando noções preliminares no capítulo 1, para uso nos capítulos 3 e 4. No capítulo 2, enunciamos um resultado devido a Liapunov, que garante a existência de soluções periódicas, bifurcando-se de um equilíbrio (o Teorema do Centro). No capítulo 3, trataremos do problema dos N+1 vórtices no contexto apresentado em [4], de onde tiramos resultados obtidos sobre a estabilidade desta configuração. No capítulo 4, faremos uma análise dos autovalores com expressões conhecidas e fazemos algumas consideraçoes sobre os demais cuja expressão não é conhecida, na tentativa de obter as informaçoes necessárias para usar o Teorema do Centro e poder garantir em alguma região a existência de soluções periódicas.

Capítulo 1

Sistemas Hamiltonianos

1.1 *Teoria Fundamental*

Começamos por introduzir conceitos e definições que serão usados no decorrer do texto. O primeiro conceito é de Sistemas Hamiltonianos.

1.1.1 *Sistemas Hamiltonianos*

Seja o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}) \tag{1.1}$$

onde $f(\mathbf{z})$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^{2n}$. Dizemos que este é um ***Sistema Hamiltoniano*** se ele puder ser escrito na forma

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, ..., n) \tag{1.2}$$

onde a função $H = H(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n)$ é chamada a ***função Hamiltoniana do sistema***. Dizemos ainda que as variáveis x_i são *conjugadas* das variáveis y_i, e estas *conjugadas* daquelas. Dizemos também que n é o número de graus de liberdade do sistema.

Exemplo 1

Consideremos o sistema formado por N partículas materiais no espaço de massas $m_1, ..., m_N$, cujos vetores-posição designaremos por $\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_N}$, movendo-se sob a ação de um campo de forças derivado de um potencial $U = U(\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_N})$. As equações Newtonianas do movimento são

$$m_k \ddot{\mathbf{x}}_\mathbf{k} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x_k}}. \qquad (k = 1, ..., N)$$

Introduzindo os momentos lineares, $\mathbf{y_k} = m_k \dot{\mathbf{x}}_k$ estas equações podem ser escritas na forma de um sistema de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{k} = \frac{1}{m_k}\mathbf{y_k} \qquad \dot{\mathbf{y}}_\mathbf{k} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x_k}}. \qquad (k = 1, ..., N)$$

Considerando a função H das variáveis $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_N)$, $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_N)$ definida por

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}m_i} ||\mathbf{y_i}||^\mathbf{2} + U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

resulta que este sistema assume a forma

$$\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{k} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y_k}} \qquad \dot{\mathbf{y}}_\mathbf{k} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x_k}} \qquad (k = 1, ..., N)$$

que é um sistema da forma (1.2) com $n = 3N$.

Forma Matricial

Fazendo $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)^T$ e $\mathbf{z} = (\mathbf{x} \;\; \mathbf{y})^\mathbf{T}$ podemos reescrever o sistema Hamiltoniano (**??**) como

$$\dot{\mathbf{z}} = J \nabla H(\mathbf{z}) \qquad (1.3)$$

com I representando a matriz identidade $n \times n$ e J, a seguinte *matriz simplética*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Definição 1.1 *Seja $\dot{x} = f(x)$, onde $f : W \to \mathbb{R}^n$, com $W \subset \mathbb{R}^n$. Uma integral primeira,Ψ, é uma função que é não constante em W, porém $\Psi(x(t))$ é constante para toda solução $x(t)$ do sistema.*

Teorema 1.2 *H é uma integral do sistema (**??**)*

Prova. Temos que H é uma função real não constante. Assim precisamos mostrar apenas que $H(\mathbf{z}(\mathbf{t}))$ é uma função constante se $\mathbf{z}(\mathbf{t})$ for solução do sistema (**??**). De fato,

$$\frac{dH}{dt}(\mathbf{z}(\mathbf{t})) = DH(\mathbf{z}(t)).(\frac{d\mathbf{z}}{dt}) =< \nabla H(\mathbf{z}(t)), \frac{d\mathbf{z}}{dt} >=< \nabla H(\mathbf{z}(t)), J\nabla H(\mathbf{z}(t)) >= 0$$

visto que J é uma matriz anti-simétrica, e assim concluímos a demonstraçao. ■

Coordenadas Canônicas

Das transformações de variáveis, as que têm uma importância relevante no presente contexto são aquelas que preservam a estrutura hamiltoniana do sistema. Seja $\mathbf{z} = \phi(\varsigma)$ a nova variável provinda da variável $\mathbf{z}$ pela transformação ϕ. Diremos que ϕ preserva a estrutura hamiltoniana se o novo sistema tiver a forma

$$\dot{\varsigma} = J\nabla H^*(\varsigma)$$

para alguma função $H^* = H^*(\xi_1, ..., \xi_n, \eta_1, ..., \eta_n)$. Temos,

$$D\phi(\varsigma).\dot{\varsigma} = \dot{\mathbf{z}} = J\nabla H(\mathbf{z})$$

Fazendo $\tilde{H}(\varsigma) = H(\phi(\varsigma)) = H(\mathbf{z})$ temos pela regra da cadeia

$$D\tilde{H}(\varsigma).\mathbf{v} = DH(\mathbf{z})(D\phi(\varsigma).\mathbf{v})$$

e assim, para todo $\mathbf{v}$

$$< \nabla\tilde{H}(\varsigma), \mathbf{v} >= D\tilde{H}(\varsigma).\mathbf{v} = DH(\mathbf{z}).(D\phi(\varsigma).\mathbf{v}) =$$

$$=< \nabla H(\mathbf{z}), D\phi(\varsigma).\mathbf{v} >=< D\phi(\varsigma)^T\nabla H(\mathbf{z}), \mathbf{v} > .$$

Portanto, $\nabla\tilde{H}(\varsigma) = D\phi(\varsigma)^T\nabla H(\mathbf{z})$, donde $\nabla H(\mathbf{z}) = [D\phi(\varsigma)^T]^{-1}\nabla\tilde{H}(\varsigma)$. Deste modo encontramos que

$$\dot{\varsigma} = D\phi(\varsigma)^{-1}J[D\phi(\varsigma)^T]^{-1}\nabla\tilde{H}(\varsigma)$$

Assim , se $D\phi(\varsigma)^{-1}J[D\phi(\varsigma)^T]^{-1} = \frac{1}{\mu}J$, então $\dot{\varsigma} = \frac{1}{\mu}J\nabla\tilde{H}(\varsigma) = J\nabla(\frac{1}{\mu}\tilde{H}(\varsigma))$

Diremos que ϕ é uma transformação μ-simplética se a matriz $D\phi(\varsigma)$ for μ-simplética, para todo ς, isto é,

$$D\phi(\varsigma)^T JD\phi(\varsigma) = \mu J$$

Teorema 1.3 *Se $\mathbf{z} = \phi(\varsigma)$ é uma transformação μ-simplética, então todo sistema Hamiltoniano (1.3) é levado noutro*

$$\dot{\varsigma} = J\nabla\mathcal{H}(\varsigma)$$

onde $\mathcal{H}(\varsigma) = \frac{1}{\mu}H(\phi(\varsigma))$.

Quando $\mu = 1$, dizemos que $\mathbf{z} = \phi(\varsigma)$ é simplética e que a transformação ϕ define uma mudança de variáveis canônicas.

Seja $\mathbf{x} = (\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_n})$ e $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$. Dada uma função $W(x, \eta)$ com Hessiano não nulo, isto é, $detW_{x\eta} \neq 0$, as equações

$$y = W_x(x, \eta), \quad \xi = W_\eta(x, \eta)$$

define implicitamente uma mudança de coordenadas

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta) \tag{1.4}$$

a qual é simplética. Para uma demonstração ver [5]. A função W é chamada uma *função geradora* da transformação (**??**).

1.1.2 *Estabilidade*

Seja z_0 uma posição de equilíbrio do sistema (1.1), isto é, um ponto do domínio da equação tal que $f(z_0) = 0$.

Definição 1.4 *Dizemos que z_0 é um **equilíbrio estável no sentido de Liapunov**, se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\phi(t)$ é uma solução do sistema com $||\phi(0) - z_0|| < \delta$, então $\phi(t)$ é definida para todo o tempo e $||\phi(t) - z_0|| < \epsilon$, para todo t.*

Definição 1.5 *Dizemos que um equilíbrio é instável se não for estável.*

Teorema 1.6 (Dirichlet) *Se existe integral definida positiva (ou negativa) em torno do equilíbrio, então este é estável.*

Supondo $z_0 = 0$ e $f(z_0) = 0$ temos que o sistema (1.1) pode ser reescrito na forma

$$\dot{z} = Az + g(z)$$

onde $g(z)$ é uma função diferenciável. Neste contexto enunciamos os seguintes resultados devido a Liapunov. Para sua demonstração indicamos a referência [12]

Teorema 1.7 *Se $Re(\lambda) < 0$ para todo λ autovalor de A, então o equilíbrio é estável.*

Teorema 1.8 *Se existir um autovalor λ de A com $Re(\lambda_A) > 0$, então o equilíbrio é instável.*

Definição 1.9 *O equilíbrio é linearmente estável se a origem z=0 é um equilíbrio estável do sistema linear $\dot{z} = Az$.*

Outro resultado obtido por Liapunov permite garantir a estabilidade do equilíbrio desde que conheçamos uma função que é monótona não-crescente. A fim de enuciarmos este resultado precisamos da seguinte definição

Definição 1.10 *Seja z_0 um equilíbrio do sistema (1.1). Uma **função de Liapunov** para z_0 é uma função $V : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável definida em um aberto U contendo z_0, satisfazendo às seguintes condições:*

(a) $V(z_0) = 0$ *e* $V(z) > 0\ \forall\ z \neq z_0$

(b) $\dot{V} \leq 0$ *em* U, *onde* $\dot{V} = DV(z) \cdot f(z)$

O critério de Liapunov para o sistema é o seguinte:

Teorema 1.11 (Liapunov) *Seja z_0 um equilíbrio do sistema (1.1). Se existe uma função de Liapunov para z_0, então z_0 é estável.*

Prova. Seja $V : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de Liapunov para z_0. Dado $B = \{z \in \mathbb{R}^n; |z - z_0| \leq \delta\}$ tal que $B \subset U$. Temos, por (a), que os valores de V em $U - \{z_0\}$ são positivos, assim se tomarmos $m = minV|_{\partial B}$ obteremos um número real positivo. A função V é diferenciável em U, logo contínua. Portanto se tomarmos $\epsilon = m$ existirá um δ_m, tal que para $|z - z_0| < \delta_m \Rightarrow |V(z) - V(z_0)| < m$, donde, por (a), se tomarmos $U_1 = \{z \in \mathbb{R}^n : |z - z_0| < \delta_m\}$, teremos $V(z) < m \ \forall z \in U_1$. Como V decresce ao longo das órbitas do sistema, temos que z(t) permanece no interior de B para todo t e $z \in U_1$. Portanto, z_0 é estável. ■

Exemplo 2 *Consideremos o sistema*

$$\dot{x} = -x + 2x(x+y)^2 \ , \ \dot{y} = -y^3 + 2y^3(x+y)^2 \ , \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

A origem (0,0) é um equilíbrio isolado. Consideremos a função $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Temos

$$V(0,0) = 0 \text{ e } V(x,y) > 0 \text{ para todo } (x,y) \neq (0,0).$$

Ainda $\dot{V}(x,y) = x\dot{x} + y\dot{y} = [2(x+y)^2 - 1](x^2 + y^4)$, donde $\dot{V}(x,y) < 0$ em uma vizinhança de (0,0) (exceto em (0,0)). Em virtude do teorema de Liapunov, (0,0) é estável,de fato, é assintoticamente estável, ver [6].

Estabilidade em Sistemas Hamiltonianos

Continuamos esta seção com uma definição que servirá para introduzir os demais conceitos relacionados com a estabilidade de um sistema Hamiltoniano.

Seja o sistema Hamiltoniano (1.3), e seja z_0 equilíbrio deste sistema. Suponhamos que $z_0 = 0$ e que $\nabla H(0) = 0$.

Então,

$$H(z) = H(0) + \nabla H(0)z + \frac{1}{2}z^T D^2 H(0)z + f(z)$$

onde $f(z) = \mathcal{O}(|z|^3)$. Assim o sistema (1.3) pode ser reescrito na forma

$$\dot{z} = JD^2H(0)z + F(z)$$

onde $F = J\nabla f_0$. Fazendo $D^2H(0) = G$, obtemos

$$\dot{z} = JGz + F(z).$$

Lema 1.1 *O polimônio característico de JG é par.*

Prova. Observando inicialmente que a matriz simplética canônica satisfaz as seguintes propriedades; $J^2 = -I, J^T = -J$ e que a Hessiana é simétrica, ou seja, $G^T = G$, obtemos a sequência de identidades;

$$(\lambda I - JG)^T = (\lambda I)^T - (JG)^T = \lambda I - G^T J^T = \lambda I + GJ = J(-\lambda I - JG)J$$

onde esta última sentença é facilmente obtida pelo uso das duas propriedades da matriz J citadas acima. E desta forma temos o Lema, visto que o determinante de uma matriz é igual ao de sua transposta. ∎

Assim, se λ é autovalor de JG, então $-\lambda$ também é. Logo, se existe um autovalor λ de JG com $Re\lambda \neq 0$, existirá um com parte real positiva. Assim, pelo Teorema de Liapunov (1.7) temos imediatamente o seguinte

Teorema 1.12 *Se existe λ, autovalor da matriz A, com $Re(\lambda) \neq 0$, então o equilíbrio é instável.*

Se $z = 0$ é estável, então todo autovalor de JG é imaginário puro.

Suponhamos todos imaginários puros. Se a forma quadrática $z^T D^2H(0)z$ é definida positiva ou negativa, o Teorema de Dirichlet garante que $z = 0$ é estável, pois H é integral do sistema.

Assim o estudo da estabilidade só é não trivial quando todos os autovalores são imaginários puros e a parte quadrática é indefinida. Veremos o conceito de forma normal.

1.2 *A Forma Normal*

Seja o sistema Hamiltoniano

$$\dot{z} = J\nabla H(z)$$

com um equilíbrio em $z_0 = 0$. Então, $\nabla H(0) = 0$, e temos que

$$\dot{z} = JGz + ...$$

onde $G = D^2H(0)$. Procuramos uma mudança de variáveis canônica $z = \varphi(\zeta)$ numa vizinhança da origem , de tal forma que o novo Hamiltoniano esteja na forma $\Gamma(\zeta) = \Gamma_2(\zeta) + \Gamma_3(\zeta) + ...$, onde $\Gamma_k(\zeta)$ é um polinômio homogêneo de grau k nas coordenadas $\varsigma_1, ..., \varsigma_{2n}$ de ς.

Corolário 1.13 *Podemos sempre tomar coordenadas canônicas lineares de modo que os autovalores de JG sejam ordenados numa sequência da forma*

$$\lambda_1, ..., \lambda_n, -\lambda_1, ..., -\lambda_n \tag{1.5}$$

Prova. Seja $P(x)$ o polinômio característico da matriz JG. Pelo Lema (1.1), $P(x)$ é um polinômio par, logo se $P(\lambda) = 0$, também $P(-\lambda) = 0$. Donde resulta que teremos n pares de autovalores $\pm\lambda_1, ..., \pm\lambda_n$. E pelo fato de que se duas matrizes diferirem por multiplicação de uma matriz diagonal, então elas terão os mesmos autovalores, podemos usar matrizes elementares diagonais para transformar a matriz JG diagonalizada sob a base de seus autovetores, numa matriz cujas entradas na diagonal respeitam a ordem $\lambda_1, ..., \lambda_n, -\lambda_1, ..., -\lambda_n$. Como estas transformações elementares são troca de linhas e colunas, suas transpostas irão reverter o processo, trocando colunas e linhas, e assim, se denotarmos por A a matriz destas transformações, temos $A^TJA = J$, donde estas transformações são simpléticas. Temos assim concluído a demonstração. ■

Supomos a partir de agora que $Re(\lambda_j) = 0$ para $j = 1, ..., n$, pois queremos estudar a estabilidade do equilíbrio $z_0 = 0$ e já vimos que se algum dos autovalores tem parte real diferente de zero, o equilíbrio é instável.

Teorema 1.14 *Sejam* $\lambda_1, ..., \lambda_n, -\lambda_1, ..., -\lambda_n$ *os autovalores da matriz* JG *e suponha* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *distintos. Então, existe uma matriz simplética* D *tal que a transformação canônica linear* $z = Dw$ *leva o sistema* $\dot{z} = JGz$ *no sistema* $\dot{w} = JH^*w$ *com o Hamiltoniano* H^* *dado por*

$$H^*(u, v) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k v_k$$

onde $w = (u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n)$

Prova. Como $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, então JG é diagonalizável, logo, existe uma matriz C invertível tal que

$$C^{-1}JGC = L \tag{1.6}$$

onde $L = \text{diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n, -\lambda_1, ..., -\lambda_n]$. De (**??**) encontramos que $C^T GJ = -LC^T$, pois $J^T = -J$ e $G^T = G$. Como $J^2 = -I$ $(J^{-1} = -J)$, encontramos que $C^T JJGJ = LC^T$ e então $J^{-1}C^T JJGJ = -JLC^T = LJC^T$. Portanto, temos

$$(J^{-1}C^T J).JG.(J^{-1}C^T J)^{-1} = L$$

Desta forma obtemos P $= (J^{-1}C^T J)^{-1}$ matriz que diagonaliza JG, e como os autoespaços são unidimensionais, existe B diagonal tal que $C = PB$ onde

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

Mas $JB = C^T JC$, pois como $P = (J^{-1}C^T J)^{-1}$ e $P = CB^{-1}$, temos que $CB^{-1} = J^{-1}(C^{-1})^T J$, donde $B^{-1} = C^{-1}J^{-1}(C^{-1})^T J$ e assim $JB = C^T JC$, logo, JB é antisimétrica. Da antisimetria de JB, concluimos que $B_1 = B_2$.

Seja

$$Q = \begin{pmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

e seja $D = CQ$. Um cálculo mostra que $Q^T JBQ = J$, logo, $D^T JD = Q^T C^T JCQ = Q^T JBQ = J$, logo, a matriz D é simplética. Como Q é uma matriz diagonal, D também diagonaliza JG, isto é $D^{-1}JGD = L$. Assim a transformação $z = Dw$ é canônica e leva o Hamiltoniano $\dot{z} = JGz$ em $\dot{w} = Lw$. Portanto, se $w = (u, v)$, temos

$$\dot{u_k} = \lambda_k u_k \ , \ \dot{v_k} = -\lambda_k v_k \qquad \text{(k =1, ..., n)}$$

Destas equações vemos que o novo Hamiltoniano é dado por

$$H^*(u,v) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k v_k$$

■

Obs.: Fazendo a mudança linear de coordenadas

$$u_j = \frac{1}{\sqrt{2i}}(\xi_j - i\eta_j)$$
$$v_j = \frac{1}{\sqrt{2i}}(\xi_j + i\eta_j)$$

que é simplética, obtemos para o Hamiltoniano o polinômio real

$$\Gamma_2(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\sum_k \alpha_k(\xi_k^2 + \eta_k^2)$$

onde $\alpha_k = -i\lambda_k$.

Seja agora um Hamiltoniano já na forma

$$H(x,y) = \frac{1}{2}\sum \alpha_k(x_k^2 + y_k^2) + H_3(x,y) + H_4(x,y) + ... \qquad (1.7)$$

Para obter uma mudança de coordenadas simplética que simplifique os demais termos do Hamiltoniano, vamos introduzir a noção de **forma normal**.

Uma mudança simplética real da forma

$$x = \xi + x(\xi,\eta)$$

$$y = \eta + y(\xi,\eta)$$

leva a um outro Hamiltoniano da forma

$$H^*(\xi,\eta) = \sum \alpha_k(\xi_k^2 + \eta_k^2) + H_3(\xi,\eta) + ... \qquad (1.8)$$

onde $H_j(\xi,\eta)$ são polinômios homogêneos de grau j em $\xi_1, ..., \xi_n, \eta_1, ..., \eta_n$.

Considere a mudança simplética de variáveis complexas, $\xi_1, ..., \xi_n, \eta_1, ..., \eta_n$ para as variáveis complexas $\zeta_1, ..., \zeta_n, \bar{\zeta}_1, ..., \bar{\zeta}_n$ definida por

$$\bar{\zeta}_j = \frac{1}{\sqrt{2i}}(\xi_j - i\eta_j) \quad \zeta_j = \frac{1}{\sqrt{2i}}(\xi_j + i\eta_j). \qquad (j = 1, ..., n)$$

Note que se ξ_j, η_j são reais, então $\bar{\zeta}_j$ é o conjugado complexo de ζ_j.

Expressemos o Hamiltoniano H^* nas variáveis $\zeta_j, \bar{\zeta}_j$, obtendo

$$\tilde{H}(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{k,l} \gamma_{kl} \zeta^k \bar{\zeta}^l \tag{1.9}$$

onde $k = (k_1, ..., k_n)$, $l = (l_1, ..., l_n)$ com k_j, l_j inteiros não negativos e

$$\gamma_{kl} \zeta^k \bar{\zeta}^l = \gamma_{k_1,...,k_n,l_1,...,l_n} \zeta_1^{k_1} \bar{\zeta}_1^{l_1} \zeta_2^{k_2} \bar{\zeta}_2^{l_2} \cdots \zeta_n^{k_n} \bar{\zeta}_n^{l_n}$$

Note que o termo quadrático

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2i} \alpha_j \zeta_j \bar{\zeta}_j \tag{1.10}$$

é função apenas dos produtos $\zeta_1 \bar{\zeta}_1, ..., \zeta_n \bar{\zeta}_n$.

Para todo $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$, seja

$$< k, \alpha >= k_1 \alpha_1 + ... + k_n \alpha_n$$

e considere o $\mathbb{Z}$- módulo

$$M_\alpha = \{k \in \mathbb{Z}^n; < k, \alpha >= 0\}$$

Note que se $k = l = (1, 1, ..., 1)$, então $k - l = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{Z}$.

Por (**??**), vemos que para o termo quadrático do Hamiltoniano (**??**) temos $k - l \in \mathbb{Z}$. Dizemos que o Hamiltoniano H^* é a **forma normal** de H em (**??**) se $\tilde{H}$ em (**??**) só contém termos para os quais $k - l \in \mathbb{Z}$, isto é , se

$$\gamma_{kl} = 0 \quad para \quad k - l \notin \mathbb{Z}$$

PS.: Se $\alpha_1, ..., \alpha_n$ são linearmente independentes sobre os racionais, então $M_\alpha = \{0\}$ e a forma normal só contém termos produtos $\zeta\bar{\zeta}$, j=1,..,n , logo, o Hamiltoniano é uma série nas variáveis

$$\eta_1^2 + \xi_1^2, ..., \eta_n^2 + \xi_n^2$$

Esta é a chamada **forma normal de Birkhoff**. Dizemos que o sistema Hamiltoniano apresenta **ressonância** quando os autovalores λ_1,... ,λ_n são linearmente dependentes sobre os racionais. No caso de ressonância entre os autovalores, temos $M_\alpha \neq \{0\}$ e o Hamiltoniano simplificado H^* é chamado a **forma normal de Gustavson**.

Temos o seguinte resultado acerca da forma normal

Teorema 1.15 *Existe uma transformação canônica formal* $x = x(\xi, \eta)$ $y = y(\xi, \eta)$, *que leva o Hamiltoniano* $H(x, y) = \frac{1}{2} \sum \alpha_k (x_k^2 + y_k^2) + H_3(x, y) + H_4(x, y) + \ldots$ *na forma normal* $\Gamma(\xi, \eta)$

Prova. Por indução. Os termos quadráticos já estão normalizados. Tomemos a transformação canônica definida implicitamente, por

$$y = W_x \qquad \xi = W_\eta$$

com $W(x, \eta) = \sum_k x_k \eta_k + W_3(x, \eta) + \ldots$ onde os W_j são polinômios homogêneos de grau j em x e η. Sob a correspondente mudança de variáveis

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

o novo Hamiltoniano é dado por $\Gamma(\xi, \eta) = H(x, y)$. Portanto, temos a identidade em x, η,

$$H(x, W_x) = \Gamma(W_\eta, \eta) \tag{1.11}$$

Suponhamos que $W_3, \ldots, W_{s-1}$ e $\Gamma_3, \ldots, \Gamma_{s-1}$ da função geradora e do novo Hamiltoniano já são conhecidos e comparemos os termos de grau s na identidade (**??**) isto é, na identidade

$$\frac{1}{2} \sum_k \alpha_k \{x_k^2 + (\eta + W_{3,x_k} + \ldots)^2\} + H_3(x, \eta + W_{3,x} + \ldots) + \ldots =$$

$$\frac{1}{2} \sum_k \alpha_k \{(x_k + W_{3,\eta_k} + \ldots)^2 + \eta_k^2\} + \Gamma_3(x + W_{3,\eta} + \ldots, \eta) + \ldots.$$

A comparação dos termos de grau s nos dá

$$\sum_k \alpha_k \eta_k W_{s,x_k} + C_1(H_3, \ldots, H_{s-1}, W_3, \ldots W_{s-1}) + H_s(x, \eta) =$$

$$\sum_k \alpha_k x_k W_{s,\eta_k} + C_2(\Gamma_3, \ldots, \Gamma_{s-1}, W_3, \ldots, W_{s-1}) + \Gamma_s(x, \eta).$$

onde por hipótese de indução as funções $C_1(H_3, \ldots, H_{s-1}, W_3, \ldots W_{s-1})$ e $C_2(\Gamma_3, \ldots, \Gamma_{s-1}, W_3, \ldots, W_{s-1})$ são conhecidas.

Reescrevamos esta igualdade na forma

$$\sum \alpha_k (x_k W_{s,\eta_k} - \eta_k W_{s,x_k}) + \Gamma_s(x, \eta) = C_{s-1}(x, \eta) + H_s(x, \eta),$$

onde $C_{s-1}(x,\eta) = C_1(H_3,...,H_{s-1},W_3,...,W_{s-1}) - C_2(\Gamma_3,...,\Gamma_{s-1},W_3,...,W_{s-1})$

Introduzindo o operador diferencial

$$D = \sum_k \alpha_k (x_k \frac{\partial}{\partial \eta_k} - \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k}),$$

temos

$$\Gamma_s(x,\eta) + DW_s(x,\eta) =$$

$$C_{s-1}(H_3,...,H_s - 1,\Gamma_3,...,\Gamma_s - 1,W_3,...,W_s - 1) + H_s(x,\eta)$$

Agora, fazendo $\zeta_j = x_j + i\eta_j$, $\bar{\zeta}_j = x_j - i\eta_j$ temos que

$$\frac{\partial}{\eta_j}(\zeta^k \bar{\zeta}^l) = \frac{ik_j \zeta^k \bar{\zeta}^l}{\zeta_j} - \frac{il_j \zeta^k \bar{\zeta}^l}{\bar{\zeta}_j}$$

$$\frac{\partial}{x_j}(\zeta^k \bar{\zeta}^l) = \frac{k_j \zeta^k \bar{\zeta}^l}{\zeta_j} + \frac{l_j \zeta^k \bar{\zeta}^l}{\bar{\zeta}_j}$$

donde

$$D(\zeta^k \bar{\zeta}^l) = \sum_j \alpha_j \Big[\frac{ik_j \zeta^k \bar{\zeta}^l}{\zeta_j}(x_j + i\eta_j) - \frac{il_j \zeta^k \bar{\zeta}^l}{\bar{\zeta}_j}(x_j - i\eta_j)\Big] = \Big(\sum_j \alpha_j i(k_j - l_j)\Big)\zeta^k \bar{\zeta}^l,$$

e, portanto,

$$D(\zeta^k \bar{\zeta}^l) = i < k - l, \alpha > \zeta^k \bar{\zeta}^l$$

Assim, expressando a identidade que define Γ_s por meio do operador D em termos de ζ, $\bar{\zeta}$ veremos que se $k - l \in M_\alpha$, o coeficiente $\gamma_{s,kl}$ de Γ_s é igual ao correspondente em $C_{s-1} + H_s$, enquanto que se $k - l \notin M_\alpha$ então, por definição da forma normal, temos $\gamma_{s,kl} = 0$ e o coeficiente de $W_{s,kl}$ de W_s é o corresponente coeficiente do lado direito da identidade dividido por $i < k - l, \alpha >$. Portanto temos determinado os polinômios homogêneos Γ_s e W_s, concluindo a demonstração. ∎

Exemplo 3 *Obter a forma normal até o quarto grau, do Hamiltoniano*

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + x_1^2 x_2 + \lambda x_2^3$$

Temos que para ressonância 1:1, ou seja, $\frac{\alpha_k}{\alpha_1} = 1 \ \forall \ k$, o M_α é gerado por (1,-1). Assim em grau 3, $k - l \notin M_\alpha \ \forall \ k, l$, donde $\Gamma_3 = 0$. Vemos que neste Hamiltoniano temos ressonância 1:1. Em grau 3, $C_2 = 0$ e em grau 4, temos $C_3 = \frac{1}{2}\sum \alpha_k(W^2_{3,x_k} - W^2_{3,\eta_k}) + Q$, onde Q consiste dos termos de quarto grau em

$$H_3(x, \eta + W_3(x,\eta)) - \Gamma_3(x, \eta + W_3(x,\eta))$$

Mas pela ressonância 1:1 temos que $Q = 0$, já que H_3 só depende de x. Donde para calcular C_3 precisamos calcular W_3. Temos

$$H_3(x,\eta) = x_1^2 x_2 + \lambda x_2^3.$$

Tomando $\zeta_k = x_k + i\eta_k$ e $\bar{\zeta}_k = x_k - i\eta_k$, obtemos

$$H_3(\zeta,\bar{\zeta}) = \frac{1}{8}[(\zeta_1 + \bar{\zeta}_1)^2(\zeta_2 + \bar{\zeta}_2) + \lambda(\zeta_2 + \bar{\zeta}_2)^3]$$

Temos que o coeficiente $W_{3,kl}$ de W_3 será o coeficiente $H_{3,kl}$ de H_3 dividido por $i < k-l, \alpha >$, ou seja, $iW_{3,kl} = \dfrac{H_{3,kl}}{< k-l, \alpha >}$. Expandindo a expressão de H_3 acima em ζ e $\bar{\zeta}$ obtemos

$$H_3(\zeta,\bar{\zeta}) = \frac{1}{8}[\zeta_1^2\zeta_2 + 2\zeta_1\bar{\zeta}_1\zeta_2 + \bar{\zeta}_1^2\zeta_2 + \zeta_1^2\bar{\zeta}_2 + 2\zeta_1\bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_1^2\zeta_2 + \lambda(\zeta_2^3 + 3\zeta_2^2\bar{\zeta}_2 + 3\zeta_2\bar{\zeta}_2^2 + \bar{\zeta}_2^3)]$$

Calculamos então os coeficientes de $W_{3,kl}$;

$$\begin{array}{ccccccc}
\zeta_1^2\zeta_2 & k=(2,1) & l=(0,0) & \alpha=(1,1) & \Rightarrow & <k-l,\alpha>=3 \\
\zeta_1\bar{\zeta}_1\zeta_2 & k=(1,1) & l=(1,0) & \vdots & \Rightarrow & <k-l,\alpha>=1 \\
\bar{\zeta}_1^2\zeta_2 & k=(0,1) & l=(2,0) & \vdots & \Rightarrow & <k-l,\alpha>=-1 \\
\zeta_1^2\bar{\zeta}_2 & k=(2,0) & l=(0,1) & \vdots & \Rightarrow & <k-l,\alpha>=1 \\
\zeta_1\bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_2 & k=(1,0) & l=(1,1) & \vdots & \Rightarrow & <k-l,\alpha>=-1 \\
\bar{\zeta}_1^2\zeta_2 & k=(0,1) & l=(2,0) & \vdots & \Rightarrow & <k-l,\alpha>=-1 \\
\zeta_2^3 & k=(0,3) & l=(0,0) & \vdots & \Rightarrow & <k-l,\alpha>=3 \\
\zeta_2^2\bar{\zeta}_2 & k=(0,2) & l=(0,1) & \vdots & \Rightarrow & <k-l,\alpha>=1 \\
\zeta_2\bar{\zeta}_2^2 & k=(0,1) & l=(0,2) & \vdots & \Rightarrow & <k-l,\alpha>=-1 \\
\bar{\zeta}_2^3 & k=(0,0) & l=(0,3) & \vdots & \Rightarrow & <k-l,\alpha>=-3
\end{array}$$

Temos então que

$$iW_{3,kl} = \frac{1}{8}[\frac{1}{3}\zeta_1^2\zeta_2 + 2\zeta_1\bar{\zeta}_1\zeta_2 - \bar{\zeta}_1^2\zeta_2 + \zeta_1^2\bar{\zeta}_2 - 2\zeta_1\bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_1^2\zeta_2 + \lambda(\frac{1}{3}\zeta_2^3 + 3\zeta_2^2\bar{\zeta}_2 - 3\zeta_2\bar{\zeta}_2^2 - \frac{1}{3}\bar{\zeta}_2^3)]$$

E então calculamos $C = \sum_{k=1}^{2}(W^2_{3,\zeta_k} + W^2_{3,\bar{\zeta}_k})$, pelo fato de em Γ_4 só aparecerem certos termos, temos que a expressão de Γ até quarta ordem será;

$$\Gamma^{(4)} = \frac{1}{2}(|\zeta_1|^2 + |\zeta_1|^2) + \frac{1}{8}[-\frac{2}{3}|\zeta_1|^4 - (6\lambda + \frac{2}{3})|\zeta_1|^2|\zeta_1|^2 - \frac{15}{2}\lambda^2|\zeta_2|^4 + (\frac{1}{2}\lambda - 1)Re(\zeta_1\bar{\zeta}_2)^2]$$

Capítulo 2

O Teorema do Centro

2.1 *Preliminares*

Dada uma equação diferencial

$$\dot{x} = f(x) = Ax + ... \tag{2.1}$$

com um equilíbrio $x^* = 0$, é possível que o sistema linear $\dot{x} = Ax$ tenha soluções periódicas sem que isto ocorra para o sistema completo, não-linear. Este fato é ilustrado em [5], com exemplos.

Para sistemas Hamiltonianos, um Teorema de Liapunov assegura que sob uma hipótese adicional sobre os autovalores da parte linear, uma solução periódica do sistema linear garante a existência de soluções periódicas do sistema não-linear.

Dado o sistema Hamiltoniano

$$\dot{z} = J\nabla H \tag{2.2}$$

com um equilíbrio na origem, temos que a expansão da função Hamiltoniana em série de Taylor no equilíbrio será

$$H(z) = H(0) + \frac{1}{2}z^T G z + ... \tag{2.3}$$

onde $G = D^2H(0)$ é a matriz Hessiana de H em $z^* = 0$. Assim, o sistema de equações pode ser escrito na forma;

$$\dot{z} = JGz + ... \tag{2.4}$$

Partamos para uma análise do sistema escrito nesta forma. Recordemos do capítulo 1 que o polinômio característico da matriz JG é par e que os autovalores de JG podem ser ordenados da seguinte forma $\lambda_1, ..., \lambda_n, -\lambda_1, ..., -\lambda_n$.

O Teorema do Centro, devido a Liapunov, é o seguinte

Teorema 2.1 *Suponhamos que para os autovalores da parte linear, JG, do sistema Hamiltoniano diferenciável*

$$\dot{z} = JGz + ...,$$

tenhamos λ_1 *imaginário puro e* $\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \notin \mathbb{Z}$, *para* $j = 2, ..., n$, *então existe uma família de soluções periódicas,* $z_\rho(t)$, *do sistema não-linear, com período diferenciável* $\tau(\rho)$, *próximo ao período* $\frac{2\pi}{|\lambda_1|}$ *das soluções do sistema linear, correspondentes ao autovalor* λ_1.

Na próxima seção provaremos o Teorema do Centro num contexto mais geral, em que o sistema não é, necessariamente, Hamiltoniano. Apresentaremos a demonstração dada em [11].

2.2 *O Teorema do Centro*

Antes de enunciarmos o Teorema do Centro, devemos como preliminar enunciar e demonstrar um lema.

Seja uma equação diferencial

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.5}$$

onde $f : W \to \mathbb{R}^n$ é analítica no aberto $W \subset \mathbb{R}^n$.

Seja $x_0 \in W$ um equilíbrio desta equação e suponha que a mesma admite uma integral primeira $\psi(x)$.

Lema 2.1 *Se o vetor $\nabla\psi(x_0)$ não é nulo, então ele é um autovetor de $Df(x_0)^T$ com autovalor 0.*

Prova. Podemos supor que $x_0 = 0$ [1], de modo que

$$f(x) = Ax + ... \text{ e } \nabla\psi(x) = \nabla\psi(0) + ...$$

onde $A = Df(0)$.

Então

$$D\psi(x) \cdot f(x) = \nabla\psi(x)^T f(x) = \nabla\psi(0)^T Ax + O(|x|^2).$$

Como ψ é uma integral primeira, temos que $D\psi(x) \cdot f(x) = 0$ para todo $x \in W$, donde, segue-se que $\nabla\psi(0)^T A = 0$, e portanto, $A^T\nabla\psi(0) = 0$ ■

Teorema 2.2 *Seja x_0 um equilíbrio da equação (**??**) e suponha que o imaginário puro $i\alpha$ é um autovalor simples de $Df(x_0)$. Suponha que $\frac{\lambda}{i\alpha} \notin \mathbb{Z}$, para todos os autovalores de $A = Df(x_0)$ diferentes de $\pm i\alpha$. Suponha, ainda, que existe uma integral primeira $\psi(x)$ da equação **??** tal que*

$$D^2\psi(x_0) \cdot (v, v) \neq 0$$

onde v é a parte imaginária de um autovetor de $i\alpha$. Então, existe uma família uni-paramétrica de soluções periódicas, $x(t, \mu)$, tal que $x(t_0, \mu) = x_0$, com período $\tau(\mu)$ e $\lim_{\mu \to 0} \tau(\mu) = \frac{2\pi}{\alpha}$

Prova. Para $\epsilon \neq 0$, sob a mudança de coordenadas

$$x = x_0 + \epsilon\xi = \epsilon\xi \tag{2.6}$$

obtemos,

$$\epsilon\dot{\xi} = Ax + O(|x^2|) = \epsilon A\xi + O(|\epsilon^2|)$$

---

[1] Seja $\tilde{x}(t)$ solução de **??**, então se tomarmos a mudança $x(t) = z(t) + \tilde{x}(t)$, vemos que $x(t)$ é solução de **??** se, e somente se, z(t) for solução do sistema $\dot{z} = g(z, t) = f(z + \tilde{x}, t) - f(\tilde{x}, t)$, e desta forma concluimos que o equilíbrio $x = x_0$ pode ser trocado por $z_0 = 0$.

,donde

$$\dot{\xi} = A\xi + O(\epsilon) \tag{2.7}$$

Esta equação está definida também para $\epsilon = 0$ e é analítica, mesmo quando $\epsilon = 0$. O fluxo de (**??**) é dado por $\varphi(t, \xi, \epsilon) = e^{tA}\xi + O(\epsilon)$.

Seja $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$ um autovetor de A associado a $i\alpha$ e consideremos a solução $\xi^*(t) = Im(e^{i\alpha t}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}))$ da equação linear $\dot{\xi} = A\xi$, isto é

$$\xi^*(t) = sin(\alpha t)\mathbf{u} + cos(\alpha t)\mathbf{v} \tag{2.8}$$

Observemos que $\xi^*(t)$ é uma solução periódica do sistema não perturbado (**??**), que seu período é $\tau^* = \frac{2\pi}{\alpha}$ e que a condição inicial é $\xi^*(0) = \mathbf{v}$.

Vamos mostrar que existe uma família de soluções periódicas de (**??**), $\xi_\epsilon(t, \mu)$, dependendo de um parâmetro real μ tal que $\xi_\epsilon(t, 0) = \xi^*(t)$ e que o período $\tau_\epsilon(\mu)$ satisfaz a condição $\tau_\epsilon(0) = \frac{2\pi}{\alpha}$. Como para cada $\epsilon \neq 0$, a transformação em (**??**) representa, a menos de uma translação, apenas uma escala diferente do espaço original dos x, segue-se que a solução $x_\epsilon(t, \mu) = x_0 + \epsilon\xi(t, \mu)$ efetivamente independe de ϵ e assim obtemos uma família uni-paramétrica $x(t, \mu)$ de soluções periódicas de **??** com período $\tau(\mu) = \tau_\epsilon(\mu)$.

Para garantir a existência da solução periódica $\xi_\epsilon(t, \mu)$ consideremos, a equação de periodicidade

$$h(\tau, \xi, \epsilon) = \varphi(\tau, \xi, \epsilon) - \xi = 0. \tag{2.9}$$

Observemos que

$$h(\tau^*, \xi^*, 0) = 0$$ [2]

Agora,

$$D_\xi h(\tau^*, \xi^*, \epsilon) = e^{\tau^* A} - I$$

não é invertível, uma vez que $e^{\pm i\alpha} = 1$. Assim, não podemos garantir a existência de $\xi = \xi(\epsilon, \tau)$ de forma a obter soluções periódicas $\varphi(t, \xi(\epsilon, \tau), \epsilon)$ com período fixo τ.

Mas veremos que é possível obter soluções periódicas com o périodo variável. Consideremos uma base de Jordan para A da forma

[2] pela expressão do fluxo, temos $\varphi(\tau^*, \xi^*, 0) = e^{\tau^* A}\xi^* = \xi^*$.

$$\beta = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_3, ..., \mathbf{v}_n\}$$

de modo que tenhamos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & & & \\ -\alpha & 0 & & & \\ & & J_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_p \end{pmatrix}$$

com $J_1, ..., J_p$ blocos elementares de Jordan. Então a matriz $M(t) = e^{tA} - I$ é dada por[3]

$$M(t) = \begin{pmatrix} cos(\alpha t) - 1 & sin(\alpha t) & & & \\ -sin(\alpha t) & cos(\alpha t) - 1 & & & \\ & & e^{tJ_1} - I & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e^{tJ_p} - I \end{pmatrix}.$$

Por outro lado

$$\tfrac{\partial h}{\partial \tau}(\tau^*, \xi^*, 0) = \tfrac{\partial}{\partial t}\varphi(\tau^*, \xi^*, 0) = A\xi^* = \alpha u.$$

Agora, se o bloco J_k está associado ao autovalor λ_k e tem tamanho n_k, então $e^{tJ_k} - I = diag[e^{t\lambda_k} - 1, ..., e^{t\lambda_k} - 1]$ e portanto

$$\Delta_k(t) = det(e^{tJ_k} - I) = (e^{t\lambda_k} - 1)^{n_k}$$

Como $\tau^*\lambda_k = 2\pi i \frac{\lambda_k}{i\alpha}$ e, por hipótese, $\frac{\lambda_k}{i\alpha}$ não é inteiro, segue-se que $\Delta_k(\tau^*) \neq 0$. Logo, a matriz obtida de $M(\tau^*)$, substituindo-se a primeira coluna por $(\alpha, 0, ..., 0)^T$ e suprimindo-se a segunda linha e a segunda coluna, é invertível.

Assim, fazendo-se $\xi_2 = \xi_2^* + \mu$ da equação (**??**) podemos, pelo Teorema das Funções Implícitas, tomar $\tau = \tau(\epsilon, \mu)$ e $\xi_i = \xi_i(\epsilon, \mu)$ para $i \neq 2$, como funções analíticas numa vizinhança de (0,0) tais que

[3]Pois exp $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha t) & sin(\alpha t) \\ -sin(\alpha t) & cos(\alpha t) \end{pmatrix}.$

$$\tau(0,0) = \tau^* \text{ e } \xi_i(0,0) = \xi_i^*$$

Fazendo

$$\xi(\epsilon,\mu) = (\xi_1(\epsilon,\mu), \xi_2^* + \mu, \xi_3(\epsilon,\mu), ..., \xi_n(\epsilon,\mu))$$

as $n-1$ equações

$$\varphi_i(\tau(\epsilon,\mu), \xi(\epsilon,\mu), \epsilon) - \xi_i(\epsilon,\mu) = 0, \quad i \neq 2 \tag{2.10}$$

estão automaticamente satisfeitas para (ϵ,μ) numa vizinhança de (0,0).

Agora, $\Psi(\xi,\epsilon) = \psi(x_0 + \epsilon\xi)$ é uma integral primeira do sistema (**??**) e, por conseguinte,

$$\Psi(\varphi(\tau(\epsilon,\mu), \xi(\epsilon,\mu), \epsilon), \epsilon) - \Psi(\xi(\epsilon,\mu), \epsilon) = 0$$

donde

$$\nabla_\epsilon \Psi(\bar{\xi}(\epsilon,\mu), \epsilon)[\varphi(\tau(\epsilon,\mu), \xi(\epsilon,\mu), \epsilon) - \xi(\epsilon,\mu)] = 0 \tag{2.11}$$

onde $\bar{\xi}(\epsilon,\mu)$ é um ponto no segmento de reta que une o ponto $\varphi(\tau(\epsilon,\mu), \xi(\epsilon,\mu), \epsilon)$ ao ponto $\xi(\epsilon,\mu)$. Por (**??**), temos que

$$\varphi(\tau(\epsilon,\mu), \xi(\epsilon,\mu), \epsilon) - \xi(\epsilon,\mu) = (\varphi_2(\tau(\epsilon,\mu), \xi(\epsilon,\mu), \epsilon) - \xi_2)\mathbf{v}$$

a equação (**??**) se reduz a

$$[\varphi_2(\tau(\epsilon,\mu), \xi(\epsilon,\mu), \epsilon) - \xi_2]\nabla_\xi \Psi(\bar{\xi}(\epsilon,\mu), \epsilon).\mathbf{v} = 0 \tag{2.12}$$

Mas, pelo lema, $D\psi(x_0) = 0$, uma vez que a condição de não-ressonância $\frac{\lambda}{i\alpha} \notin \mathbb{Z}$ garante que $Df(x_0)$ não tem autovalores nulos. Logo,

$$\Psi(\xi,\epsilon) = \psi(x_0) + \tfrac{1}{2}\epsilon^2 D^2\psi(x_0)(\xi,\xi) + O(\epsilon^3)$$

donde

$$\nabla_\xi \Psi(\xi,\epsilon).\mathbf{v} = \epsilon^2 D^2\psi(x_0).(\xi,\mathbf{v}) + O(\epsilon^3)$$

ora

$$\bar{\xi}(\epsilon,\mu) = s\xi(\epsilon,\mu) + (1-s)\varphi(\tau(\epsilon,\mu), \xi(\epsilon,\mu), \epsilon) = \xi^* + O(|\epsilon| + |\mu|)$$

de modo que

$$\nabla_{\xi}\Psi(\bar{\xi}(\epsilon,\mu),\epsilon).\mathbf{v} = \epsilon^2[D^2\psi(x_0).(\mathbf{v},\mathbf{v}) + O(|\epsilon| + |\mu|)]$$

Como, por hipótese, $D^2\psi(x_0).(\mathbf{v},\mathbf{v}) \neq 0$ segue-se, por continuidade, que para ϵ e μ suficientemente pequenos, a expressão entre os colchetes é diferente de zero. Resulta, então, de (**??**) que para tais valores de ϵ e μ, a segunda equação do sistema de periodicidade (**??**)

$$\varphi_2(\tau(\epsilon,\mu),\xi(\epsilon,\mu),\epsilon) - \xi_2(\epsilon,\mu) = 0$$

também é satisfeita e isto estabelece a existência da solução periódica $\xi_\epsilon(t,\mu) = \varphi(t,\xi(\epsilon,\mu),\epsilon)$ com período $\tau(\epsilon,\mu)$, concluindo a demonstração do teorema. $\blacksquare$

Capítulo 3

O problema dos N+1 vórtices na esfera com um vórtice no pólo norte

O Problema a ser considerado é o movimento de N vórtices pontuais numa esfera de raio 1. Seja Γ_j a intensidade $x_j(t)$ a posição do j-ésimo vórtice. A equação de movimento do vórtice x_j sob a influência dos outros é;

$$\dot{x}_j = \sum_{i \neq j}^{N} \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{x_i \times x_j}{|x_j - x_i|^2}, \tag{3.1}$$

onde $|x_j - x_i|$ é a distância cordal entre os dois vórtices. Evitamos escrever o fator 2π fazendo $\kappa_j = \frac{\Gamma_j}{2\pi}$ e referimos a este também, como a intensidade do vórtice.

A posição de um vórtice na esfera pode também ser dada em coordenadas cilíndricas, isto é, pela distância de um vórtice ao plano equatorial z e pela sua longitude ϕ. Quando nenhum dos vórtices de mesma intensidade está nos pólos da esfera as equações de movimento podem ser dadas por uma função Hamiltoniana nessas coordenadas. Um vórtice adicional, de diferente intensidade, colocado no pólo norte destroi a natureza Hamiltoniana do sistema de equações diferenciais. Todavia, a função obtida é ainda uma integral do movimento.

Consideremos n vórtices, situados nos vértices de um polígono regular. A Hessiana de tal configuração tem o seguinte formato (ver [4])

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Uma matriz desta forma é conhecida como uma matriz circulante. Seja $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ e ponhamos

$$y_1 = a_0 + \omega a_1 + ... + a_{n-1}\omega^{n-1}$$

temos que y_1 satisfaz o sistema

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & = & a_0 & +a_1\omega & +\dots & +a_{n-1}\omega^{n-1} \\ \omega y_1 & = & a_{n-1} & +a_0\omega & +\dots & +a_{n-2}\omega^{n-1} \\ \omega^2 y_1 & = & a_{n-2} & +a_{n-1}\omega & +\dots & +a_{n-3}\omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega^{n-1} y_1 & = & a_1 & +a_2\omega & +\dots & +a_0\omega^{n-1} \end{array}$$

logo $(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$ é um autovetor de A associado ao autovalor y_1. Donde seguindo este processo, encontramos a matriz cujas colunas são os autovetores de A;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

e o j-ésimo autovalor é

$$y_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk} \tag{3.2}$$

Como a Hessiana é uma matriz real simétrica, seus autovalores são reais, pelo teorema espectral da Algebra linear. No presente contexto esta informação sai do fato de $a_k = a_{n-k}$ para $k = 1, ..., n-1$, e

$$\omega^{n-j} = \bar{\omega}^j \quad (pois \quad \omega^n = 1 \quad e \quad \omega^{-1} = \bar{\omega}),$$

pois,

$$y_1 = a_0 + a_1(\omega + \bar{\omega}) + a_2(\omega^2 + \bar{\omega}^2) + \cdots,$$

logo, y_1 é real. Mesma coisa para os demais.

Agora, se $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$ é um autovetor de A associado a y_1, então da equação

$$A\mathbf{u} + iA\mathbf{v} = y\mathbf{u} + iy\mathbf{v},$$

vemos que a parte real e a parte imaginária sao também autovalores associados a y.

Tomando a base de autovetores ordenado na forma $\mathbf{u_0}, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}$ segue-se que o conjunto de autovetores é dado pela seguinte matriz;

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}} & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{cos\frac{2\pi}{n}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} & \frac{cos\frac{4\pi}{n}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} & \cdots & \frac{sen\frac{4\pi}{n}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} & \frac{sen\frac{2\pi}{n}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{cos\frac{4\pi}{n}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} & \frac{cos\frac{8\pi}{n}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} & \cdots & \frac{sen\frac{8\pi}{n}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} & \frac{sen\frac{4\pi}{n}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{cos\frac{(n-1)\pi}{n}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} & \frac{cos\frac{2(n-1)\pi}{n}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} & \cdots & \frac{sen\frac{2(n-1)\pi}{n}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} & \frac{sen\frac{(n-1)\pi}{n}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

A matriz foi feita ortogonal por divisão dos vetores coluna por $\sqrt{n}$ ou $\sqrt{n/2}$ respectivamente.

3.1 *Um anel de vórtices numa latitude fixada.*

Discutiremos um anel de n vórtices de intensidade unitária para uma dada latitude fixada. Este caso pode ser tratado completamente dentro da teoria de Mecânica Hamiltoniana.

Os n vórtices em uma esfera de raio 1, podem ser localizados por coordenadas cilíndricas (z_j, φ_j), $j = 0, 1, ..., n-1$, onde z_j é a distância relativa ao plano equatorial, e φ_j é a longitude. Nestas coordenadas o movimento dos n vórtices de intensidade unitária é dado pelo Hamiltoniano (ver [4])

$$H_1(z,\varphi) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n-1} ln[1 - z_i z_j - \sqrt{1-z_i^2}\sqrt{1-z_j^2}cos(\varphi_i - \varphi_j)] \tag{3.4}$$

Nesta notação; os $z_j's$ são coordenadas de posição e os $\varphi_j's$ são as correspondentes coordenadas de momento, com as equações diferenciais dadas por;

$$\dot{z}_j = \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_j} \qquad \dot{\varphi}_j = -\frac{\partial H_1}{\partial z_j} \quad (j = 0, 1, ..., n-1) \tag{3.5}$$

Estas coordenadas têm singularidades na proximadamente dos pólos. Soluções estacionárias do sistema só podem ser encontradas bos o ponto de vista de um sistema de coordenadas rotacional. Portanto, introduzimos um sistema coordenado que rotaciona uniformemente com velocidade angular ω em torno do eixo polar. Nós usaremos a mesma notação para as novas coordenadas, porém, o Hamiltoniano terá que ser trocado por;

$$H = H_1 - \omega\sum_{i=0}^{n-1} z_i. \tag{3.6}$$

Coloquemos n vórtices de intensidade unitária numa latitude fixada z com $-1 < z < 1$ e nos vértices de um polígono regular, isto é, $z_j = z$ e $\varphi_j = \frac{2\pi j}{n}$ para $j = 0, 1, ..., n-1$. Então esta configuração será estacionária neste sistema rotacional se [1]

$$\omega = -\frac{(n-1)z}{2(1-z^2)}. \tag{3.7}$$

Encontramos com a ajuda das fórmulas

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{sen^2\frac{j\pi}{n}} = \frac{n^2-1}{3} \quad , \quad \sum_{j=1}^{n-1}\frac{sen^2\frac{kj\pi}{n}}{sen^2\frac{j\pi}{n}} = k(n-k)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} sen^2(\frac{2j\pi}{n}) = \begin{cases} 0, & se \quad n = 2 \\ \frac{n}{2}, & se \quad n > 2. \end{cases} \quad e \quad \sum_{j=0}^{n-1} cos^2(\frac{2j\pi}{n}) = \begin{cases} 2, & se \quad n = 2 \\ \frac{n}{2}, & se \quad n > 2. \end{cases} \tag{3.8}$$

[1] z é solução estacionária se $\nabla H(z) = 0$, assim calculando $\nabla H = (\frac{\partial H}{\partial z_1}, \frac{\partial H}{\partial z_2}, ..., \frac{\partial H}{\partial z_{n-1}}, \frac{\partial H}{\partial \varphi_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial \varphi_{n-1}})$ onde $\frac{\partial H}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=i+1}^{n-1}\frac{-z_j + z_i cos(\varphi_i - \varphi_j)\frac{\sqrt{1-z_j^2}}{\sqrt{1-z_i^2}}}{1 - z_i z_j - \sqrt{1-z_i^2}\sqrt{1-z_j^2}cos(\varphi_i - \varphi_j)} - \omega$, onde na expressão quando o i ou o j $\neq$ k o termo é nulo, e $\frac{\partial H}{\partial \varphi_k} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=i+1}^{n-1}\frac{-\sqrt{1-z_i^2}\sqrt{1-z_j^2}sen(\varphi_i - \varphi_j)}{1 - z_i z_j - \sqrt{1-z_i^2}\sqrt{1-z_j^2}cos(\varphi_i - \varphi_j)}$, então $\nabla H(z) = 0 \Rightarrow \omega = -\frac{(n-1)z}{2(1-z^2)}$.

que

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{-1}{4(1-z^2)^2 sen^2 \frac{(j-i)\pi}{n}} \quad , \text{para} \quad i \neq j$$

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial z_i^2} = \frac{(n-1)(n-5-6z^2)}{12(1-z^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} = \frac{1}{4 sen^2 \frac{(j-i)\pi}{n}} \quad , \text{para} \quad i \neq j$$

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi_i^2} = -\frac{n^2-1}{12}$$

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial z_i \partial \varphi_j} = 0$$

Em forma de blocos a matriz Hessiana consiste de duas matrizes circulantes. Os blocos laterais a diagonal são zero. Seja z o representante para o vetor da latitude. Os autovalores da matriz circulante $\frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2}$ avaliada no equilíbrio podem ser computados com a ajuda de (**??**) e eles são[2]

$$\lambda_k = \frac{-(n-1)(1+z^2) + k(n-k)}{2(1-z^2)^2}$$

com $k = 0, 1, ..., n-1$.

Similarmente com φ representando o vetor das longitudes nós computamos os autovalores de $\frac{\partial^2 H_1}{\partial \varphi^2}$ e encontramos que estes são dados por[3]

---

[2]Temos que $\lambda_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}$, e que $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Pela simetria da Hessiana observamos que precisaremos apenas da parte real do fator ω^{jk}, donde, usando as fórmulas (**??**)

$$\lambda_k = \frac{(n-1)(n-5-6z^2)}{12(1-z^2)^2} + \sum_{j=1}^{n-1} -\frac{1-2sen^2 jk\pi/n}{4(1-z^2)^2 sen^2 j\pi/n} =$$
$$\frac{(n-1)(n-5-6z^2)}{12(1-z^2)^2} + \sum_{j=1}^{n-1} -\frac{1}{4(1-z^2)^2 sen^2 j\pi/n} + 2\sum_{j=1}^{n-1} \frac{sen^2 jk\pi/n}{4(1-z^2)^2 sen^2 j\pi/n} =$$
$$\frac{(n-1)(n-5-6z^2)}{12(1-z^2)^2} + \Big(-\frac{n^2-1}{3}\frac{1}{4(1-z^2)^2}\Big) + \frac{k(n-k)}{2(1-z^2)^2}$$

seguindo o resultado da soma deste três termos.

[3]Assim como λ_k, o autovalor σ_k é real, portanto da mesma forma encontramos sua expressão

$$\sigma_k = -\frac{k(n-k)}{2}$$

com $k = 0, 1, ..., n-1$.

Vemos destas expressões que qualquer um destes autovalores são repetidos, pois, $\lambda_k = \lambda_{n-k}$ e $\sigma_k = \sigma_{n-k}$ para $k = 1, ..., \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Em [4] é feita a análise acerca da estabilidade desta configuração.

3.1.1 *Anel com um vórtice no pólo norte*

Se um vórtice aproxima-se do pólo norte na esfera nós não podemos usar coordenadas cilíndricas, pois o pólo é uma singuralidade, e nós temos que usar coordenadas cartesianas para este vórtice. Usaremos (x_n, y_n, z_n) para denotar a posição deste (n+1) - vórtice de intensidade κ próximo do pólo norte.

O sistema de equações diferenciais é agora

$$\dot{\varphi}_k = -\frac{\partial H}{\partial z_k} \qquad \dot{z}_k = \frac{\partial H}{\partial \varphi_k} \qquad (k = 0, 1..., n-1)$$

$$\kappa \dot{x}_n = -z_n \frac{\partial H}{\partial y_n} \quad \kappa \dot{y}_n = z_n \frac{\partial H}{\partial x_n}$$

(ver [10]) sendo a função H dada agora por $H = H_1 + H_2$ com H_1 definida em (**??**) H_2 dada por

$$H_2 = \frac{\kappa}{2} \sum_{j=0}^{n-1} ln[1 - z_j z_n - \sqrt{1 - z_j^2}(x_n cos\varphi_j + y_n sen\varphi_j)].$$

Assim o sistema não é mais Hamiltoniano, porém H ainda é uma integral de movimento. Se o problema for considerado em um sistema coordenado rotacional uniforme, então H será da forma

$$H = H_1 + H_2 - \omega(\sum_{j=0}^{n-1} z_j + \kappa z_n) \qquad (3.9)$$

usando a parte real de ω^{jk},

$$\sigma_k = -\frac{n^2-1}{12} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{4sen^2 j\pi/n} \omega^{jk} = -\frac{n^2-1}{12} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{4sen^2 j\pi/n} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{2sen^2 jk\pi/n}{4sen^2 j\pi/n} = -\frac{k(n-k)}{2}$$

Um anel poligonal de n vórtices unitários na latitude z e um vórtice de intensidade κ no pólo norte (isto é, $x_n = 0, y_n = 0$) está em equilíbrio se $\nabla H = 0$. Assim encontramos que [4]

$$\omega = -\frac{(n-1)z}{2(1-z^2)} - \frac{\kappa}{2(1-z)}$$

Nós estendemos os vetores z e φ por $\tilde{z} = (z_0, z_1, ..., z_{n-1}, y_n)$ e $\tilde{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{n-1}, x_n)$. Seguimos computando a Hessiana de H. Os novos termos provindos de H_2, são;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_i \partial z_j} &= 0 && \text{para } i \neq j \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_i^2} &= \frac{-\kappa}{2(1-z)^2} && \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} &= 0 && \text{para } \quad 0 \leq i, j \leq n-1 \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi_j \partial x_n} &= \frac{\kappa r sen \frac{2j\pi}{n}}{2(1-z)} && \text{para } 0 \leq j \leq n-1 \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi_j \partial y_n} &= -\frac{\kappa r cos \frac{2j\pi}{n}}{2(1-z)} && \text{para } 0 \leq j \leq n-1 \quad . \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_j \partial x_n} &= -\frac{\kappa cos \frac{2j\pi}{n}}{2r(1-z)} && \text{para } 0 \leq j \leq n-1 \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_j \partial y_n} &= -\frac{\kappa sen \frac{2j\pi}{n}}{2r(1-z)} && \text{para } 0 \leq j \leq n-1 \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial x_n^2} &= \frac{\partial^2 H_2}{\partial y_n^2} = \frac{\kappa n}{4} && \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial x_n \partial y_n} &= 0 &&
\end{aligned}$$

---

[4] Como $H = H_1 + H_2 - \omega(\sum_{i=0}^{n-1} z_i - \kappa z_n)$, então $\nabla H = \nabla H_1 + \nabla H_2 - \nabla(\omega \sum_{i=0}^{n-1} z_i - \kappa z_n)$ donde para a função H_1 temos o mesmo resultado obtido anteriormente, tendo apenas o acrescimo dado pela função H_2 e o fator de rotação. Como estamos interessados nas coordenadas do pólo, temos que $z_n = 1$ e assim $\frac{\partial H_2}{\partial z_i} = \frac{\kappa}{2} \frac{-1}{1-z}$ e portanto seguindo o resultado.

Nas fórmulas acima foi usado $r = \sqrt{1-z^2}$. Em (??) o último termo de H contribuirá para as derivadas de segunda ordem uma vez que $z_n = \sqrt{1-x_n^2-y_n^2}$ e portanto

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x_n^2} = \frac{\partial^2 z_n}{\partial y_n^2} = -1$$

quando $x_n = 0 = y_n$.

Para a função H_1, temos que os autovalores são mantidos com o uso da matriz de transformação T em (??). Se denotarmos os vetores das novas variáveis por ζ e ϕ respectivamente então a transformação completa será;

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z \\ \vdots \\ z \end{pmatrix} + T\zeta \qquad \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\pi}{n} \\ \vdots \\ \frac{2(n-1)\pi}{n} \end{pmatrix} + T\phi$$

A transformação é simplética. Nas novas variáveis a origem é um equilíbrio e os termos quadráticos do Hamiltoniano transformado na forma normal é

$$H = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \zeta_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \phi_k^2 + ...$$

Afim de usar a forma normal de D^2H_1 nós temos que transformar o novo termo do mesmo modo. Para este própósito nós estendemos a matriz T em (??) de modo natural; esta transformação em forma de blocos é;

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} T & 0 & 0 & 0 \\ 0^t & 1 & 0^t & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 \\ 0^t & 0 & 0^t & 1 \end{pmatrix}$$

onde 0 representa uma matriz $n \times n$, um vetor n-dimensional ou mesmo um escalar, conforme o caso. O índice superior t denota transposta. Para D^2H_2, podemos ignorar os termos da diagonal por um momento. Sem eles a Hessiana de H_2 fica, em forma de blocos,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & u_{\varphi x} & 0 & u_{\varphi y} \\ u_{\varphi x}^t & 0 & u_{zx}^t & 0 \\ 0 & u_{zx} & 0 & u_{zy} \\ u_{\varphi y}^t & 0 & u_{zy}^t & 0 \end{pmatrix}$$

onde $u_{\varphi x}$ é o vetor coluna formado por $\frac{\partial^2 H_2}{\partial \varphi_j \partial x_n}$ com $j = 0, 1, ..., n-1$; similarmente para os outros vetores.

Como

$$\tilde{T}^t = \begin{pmatrix} T^t & 0 & 0 & 0 \\ 0^t & 1 & 0^t & 0 \\ 0 & 0 & T^t & 0 \\ 0^t & 0 & 0^t & 1 \end{pmatrix}$$

temos então que

$$\tilde{T}^t C \tilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & T^t u_{\varphi x} & 0 & T^t u_{\varphi y} \\ u_{\varphi x}^t T & 0 & u_{zx}^t T & 0 \\ 0 & T^t u_{zx} & 0 & T^t u_{zy} \\ u_{\varphi y}^t T & 0 & u_{zy}^t T & 0 \end{pmatrix}$$

vemos que temos que encontrar o produto $T^t u_{\varphi x}$ e outros mais. Usando as expressões das derivadas parciais de segunda ordem da funçao H_2, vistas anteriormente, temos que

$$u_{\varphi x} = \Big(0, \frac{\kappa\sqrt{1-z^2}sen\frac{2\pi}{n}}{2(1-z)}, \frac{\kappa\sqrt{1-z^2}sen\frac{4\pi}{n}}{2(1-z)}, ..., \frac{\kappa\sqrt{1-z^2}sen\frac{2(n-1)\pi}{n}}{2(1-z)}\Big);$$

observamos que este vetor é perpendicular às colunas da matriz T em (**??**), exceto a última, e portanto será perpendicular às linhas de T^t, a menos da última linha e isto dá o único valor não nulo na posição $n-1$ obtido pela multiplicação, chamaremos este valor de α. O valor $-\alpha$ ocorre na posição 1 em $T^t u_{\varphi y}$. Um valor não nulo denotado por β ocorre na posição 1 de $T^t u_{zx}$ e na posição $n-1$ de $T^t u_{zy}$. Os dois valores não nulos são [5]

$$\alpha = \frac{\kappa r\sqrt{n/2}}{2(1-z)}, \quad \beta = \frac{-\kappa\sqrt{n/2}}{2r(1-z)}.$$

[5] Observamos que a expressão de $u_{\varphi x}$ é formada por uma coluna na matriz T, temos que suas colunas são ortogonais, e portanto que o único valor não nulo do produto $T^t u_{\varphi x}$ será $\frac{\kappa r}{2(1-z)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{sen(2k\pi/n)}{\sqrt{n/2}}$ assim obtemos que $\alpha = \frac{\kappa r\sqrt{n/2}}{2(1-z)}$ usando a fórmula em (**??**). De modo análogo obtemos β usando a soma em cossenos.

Combinando tudo, a Hessiana de H em (??) avaliada na solução estacionária e dado em acordo com o vetor (φ, x_n, z, y_n) é

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{n-1} & \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \sigma_n & 0 & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta & 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \beta \\ 0 & -\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Esta matriz foi construida a partir da soma das matrizes Hessianas de H_1 e H_2 com o acréscimo do fator de rotação. Assim, a primeira submatriz $(n-1)\times(n-1)$ tem na diagonal os mesmo termos que a Hessiana de H_1, já que H_2 não depende de φ, e os termos na diagonal da segunda submatriz $(n-1)\times(n-1)$ são simplesmente a soma das diagonais das matrizes Hessianas de H_1 e H_2, em função da variável z. Os fatores da diagonal acrescidos por influência de z_n são formados pela simples soma da Hessiana de H_2 com o fator de rotação. Os demais fatores vêem dos resultados obtidos pela transformação T.

Os termos ao longo da diagonal têm os seguintes valores:

$$\sigma_k = -\frac{k(n-k)}{2} \qquad \text{para } k = 0, ..., n-1$$

$$\lambda_k = \frac{-(n-1)(1+z^2) + k(n-k) - \kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \qquad \text{para } k = 0, ..., n-1$$

$$\sigma_n = \lambda_n = -\frac{\kappa n}{4} + \kappa\omega$$

Visto que parte da matriz G já está na forma diagonal, alguns autovalores podem ser vistos facilmente, estes são

$$\sigma_0 = 0$$

$$\lambda_0 = -\frac{(n-1)(1+z^2)+\kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2}$$

$$\sigma_k = -\frac{k(n-k)}{2} \qquad \text{para } k = 2, ..., n-2$$

$$\lambda_k = \frac{-(n-1)(1+z^2)+k(n-k)-\kappa(1+z)^2}{2(1-z^2)^2} \qquad \text{para } k = 2, ..., n-2$$

Restando encontrar seis autovalores. No entanto temos que $\sigma_1 = \sigma_{n-1}$, $\lambda_1 = \lambda n - 1$ e $\lambda_n = \sigma_n$. Como os seis autovalores vêem das duas submatrizes

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & -\alpha \\ 0 & \lambda_{n-1} & \beta \\ -\alpha & \beta & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \sigma_{n-1} & \alpha & 0 \\ \alpha & \sigma_n & \beta \\ 0 & \beta & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

encontramos que

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & -\alpha \\ 0 & \lambda_{n-1} & \beta \\ -\alpha & \beta & \lambda_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{n-1} & \alpha & 0 \\ \alpha & \sigma_n & \beta \\ 0 & \beta & \lambda_1 \end{vmatrix}$$

Assim obtemos que elas têm o mesmo conjunto de autovalores reais. Portanto a análise pode ser reduzida a uma dessas matrizes. Em [4] é feita tal análise. Encontrar a expressão destes autovalores é difícil. No entanto é possível determinar regiões onde certamente estes e os demais autovalores sejam negativos e portanto pelo Teorema (1.7) devido a Liapunov, nestas regiões a origem será estável. Por esta análise é obtido o seguinte resultado.

Teorema 3.1 *Um anel de n vórtices com a latitude z e uma força de vorticidade κ no pólo norte da esfera é estável nas seguintes regiões*

$$
\begin{array}{llll}
 & \textit{Caso} \quad n = 3: & & \\
\textit{para} & -1 < z \leq (2-\sqrt{13})/3 & \textit{onde} & g_3(z) < \kappa < 0 \quad \textit{ou} \quad g_2(z) < \kappa, \\
\textit{para} & (2-\sqrt{13})/3 \leq z < -1/3 & \textit{onde} & 0 < \kappa < g_3(z) \quad \textit{ou} \quad g_2(z) < \kappa, \\
\textit{para} & 1 - /3 \leq z \leq 0 & \textit{onde} & 0 < \kappa < g_2(z) \quad \textit{ou} \quad g_3(z) < \kappa, \\
\textit{para} & 0 \leq z \leq 1/3 & \textit{onde} & 0 < \kappa, \\
\textit{para} & 1/3 < z < 1 & \textit{onde} & 0 < \kappa < g_3(z).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
 & \textit{Caso} \quad n = 4,5 \quad \textit{ou} \quad 6: & & \\
\textit{para} & -1 < z \leq -\alpha_n & \textit{onde} & g_0(z) < \kappa < 0 \quad \textit{ou} \quad g_2(z) < \kappa, \\
\textit{para} & -\alpha_n \leq z \leq \beta_n & \textit{onde} & g_2(z) < \kappa, \\
\textit{para} & \beta_n \leq z \leq \gamma_n & \textit{onde} & g_0(z) < \kappa, \\
\textit{para} & \gamma_n < z \leq \alpha_n & \textit{onde} & g_0(z) < \kappa < g_3(z), \\
\textit{para} & \alpha_n \leq z < 1 & \textit{onde} & 0 < \kappa < g_3(z).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
 & \textit{Caso} \quad n \geq 7: & & \\
\textit{para} & -1 < z \leq \gamma_n & \textit{onde} & g_0(z) < \kappa, \\
\textit{para} & \gamma_n < z < 1 & \textit{onde} & g_0(z) < \kappa < g_3(z).
\end{array}
$$

onde

$$g_1 = -\frac{(n-1)z^2}{(1+z)^2}$$

$$g_2 = -\frac{(n-1)z}{1+z}$$

$$g_3 = -\frac{(n-1)z(2z-n-2nz+nz^2)}{(2-n+nz)(1+z)^2}$$

$$g_0 = \begin{cases} \dfrac{((n-2)/2)^2-(n-1)z^2}{(1+z)^2} & n \textit{ par} \\ \dfrac{(n-1)(n-3)/4-(n-1)z^2}{(1+z)^2} & n \textit{ ímpar} \end{cases}$$

$$\alpha_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \alpha_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha_6 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\beta_4 = -\frac{1}{3}, \quad \beta_5 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_6 = -\frac{4}{5}$$

$$\gamma_n = \frac{n-2}{n} \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \quad n \geq 3.$$

Pelo teorema (1.7), temos que onde a configuração for estável os autovalores da matriz G em (**??**), que são reais, será negativo, logo seu produto será positivo, resultado que será fundamental em nossa análise futura. Assim destas regiões devemos encontrar um aberto para ser usado no estudo do capítulo 4. Tomando $z = 0$, usaremos a função $g_0(z)$ para definir o valor de κ, tomaremos $\kappa = g_0(0) + 1$, temos então que a bola de centro $(0, g_0(0) + 1)$ e raio $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(0, g_0(0) + 1)$ esteja contida em todas as regiões de estabilidade dadas no teorema (3.1), servirá para ser o nosso aberto. Os valores de κ variam da seguinte forma

$$\kappa = \begin{cases} \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + 1 & \text{n par} \\ \frac{(n-1)(n-3)}{4} + 1 & \text{n ímpar} \end{cases}$$

Para estes valores teremos assegurado que os autovalores são todos imaginários puros, visto que a formação das regiões de estabilidade são determinadas pela curva $g_0(z)$, e portanto as bolas de centro $(0, \kappa)$ serão nosso aberto base, isto é, onde verificaremos as condições do Teorema do Centro.

Capítulo 4

Existência de Soluções Periódicas

4.1 *Soluções Periódicas*

Estamos interessados em investigar a existência de soluções periódicas para o problema descrito no capítulo 3. Para tal vamos usar o Teorema do Centro de Liapunov na formulação não-hamiltoniana dada em [11]. Portanto, devemos averiguar se, de fato, os autovalores apresentados satisfazem as hipóteses deste Teorema. Faremos isto em duas etapas. Primeiro examinaremos os autovalores explicitados no capítulo 3, numa abordagem direta com suas expressões. Em seguida partiremos para uma análise indireta a respeito dos autovalores não conhecidos decidindo assim, sobre a existência de tais soluções.

Relembremos a seguinte definição.

Definição 4.1 *Seja $\dot{z} = f(z)$, dizemos que $z(t)$,solução deste sistema, é periódica se existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $z(t+T) = z(t)$ para todo t. Diremos que o menor dos T positivos que satisfaça esta igualdade é o período fundamental da solução.*

A fim de verificar as hipóteses, faz-se necessário conhecer os autovalores da matriz da parte linear do sistema em questão, isto é, da matriz JG, onde

$$\kappa\dot{z} = JGz + ...,$$

Com G dada em (??). Observamos que esta matriz pode ser representada por uma matriz em blocos da forma

$$\mathrm{G} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

$$\text{onde A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{n-1} & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \sigma_n \end{bmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{e C} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Assim a matriz JG tem a forma

$$\mathrm{JG} = \begin{bmatrix} B^T & C \\ -A & -B \end{bmatrix}$$

O polinômio característico desta matriz é $P(\mu) = |JG - \mu I|$. No entanto, temos que

$$|JG - \mu I| = \begin{vmatrix} B^T - \mu I & C \\ -A & -B - \mu I \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -A & -B - \mu I \\ B^T - \mu I & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B + \mu I \\ B^T - \mu I & C \end{vmatrix}$$
$$= [1] \; |CA - C(B + \mu I)C^{-1}(B^T - \mu I)|$$

---

[1] Reescrevendo a matriz

$$\begin{pmatrix} A & B + \mu I \\ B^T - \mu I & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B + \mu I \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - (B + \mu I)C^{-1}(B^T - \mu I) & 0 \\ C^{-1}(B^T - \mu I) & I \end{pmatrix}$$

obtemos a igualdade facilmente. Para tal encontramos a restrição; $\lambda_n \lambda_{n-1} - \beta^2 \neq 0$ a fim de que a matriz C seja invertível.

Encontramos então que

$$|JG - \mu I| = \begin{vmatrix} \mu^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & c \\ 0 & 0 & \lambda_2\sigma_2 + \mu^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-2}\sigma_{n-2} + \mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 & e & f \\ 0 & g & 0 & \dots & 0 & h & i \end{vmatrix}$$

onde

$$a = \lambda_1\sigma_1 + \mu^2 - \frac{\alpha^2\lambda_1\lambda_{n-1}}{\lambda_n\lambda_{n-1} - \beta^2}, \quad b = \frac{\mu\alpha\beta\lambda_1}{\lambda_n\lambda_{n-1} - \beta^2}, \quad c = -\mu(\beta + \frac{\lambda_1\lambda_{n-1}\alpha}{\lambda_n\lambda_{n-1} - \beta^2})$$

$$d = \frac{\mu\beta^2}{\lambda_1}, \quad e = \mu^2 + \alpha\beta + \lambda_{n-1}\sigma_{n-1}, \quad f = \lambda_{n-1}\alpha + \sigma_n\beta - \frac{\beta^3}{\lambda_1}$$
$$g = \mu(\frac{\lambda_n\beta}{\lambda_1} + \alpha), \quad h = \beta\sigma_{n-1} + \alpha\lambda_n, \quad i = \mu^2 - \frac{\lambda_n\beta^2}{\lambda_1} + \alpha\beta + \sigma_n\lambda_n$$

Alternando a segunda e a $(n-2)$-ésima linhas e em seguida a segunda e a (n-2)-ésima colunas, conseguimos obter o seguinte resultado

$$|JG - \mu I| = \mu^2(\prod_{j=2}^{n-2} \lambda_j\sigma_j + \mu^2)Q \tag{4.1}$$

onde $Q = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Os autovalores de JG são raízes do polinômio $P(\mu) = |JG - \mu I|$. Por **??** encontramos que eles são dados por $\mu = 0$ com multiplicidade 2,

$$\mu_j = \pm i\sqrt{\lambda_j\sigma_j} \qquad (j = 2, ..., n-2)$$

e mais três das raízes da equação $Q = 0$, as quais não conhecemos explicitamente.

4.1.1 *Análise para os autovalores conhecidos*

Descartamos o autovalor nulo, pelo fato dele aparecer devido a invariância por rotações. Estaremos interessados em investigar a existência de soluções periódicas no espaço das órbitas.

Para usar o Teorema de Liapunov, devemos garantir que fixado um autovalor imaginário puro, o quociente dos demais por este, exceto o seu simétrico, seja não inteiro. Por esta razão, iremos restringir nossa análise para $B_\epsilon(0, g_0(0)+1)$, onde de fato cada μ_j é imaginário puro. Para $j = 2, ..., n-2$ temos que a expressão do autovalor μ_j de JG é dada por

$$\mu_j = i\sqrt{\frac{j(n-j)[(n-1)(1+z^2) - j(n-j) + \kappa(1+z)^2]}{4(1-z^2)^2}}$$

Se pensarmos nesta expressão como uma função na variável j, podemos decidir de fato a respeito destes quocientes. Neste contexto, pensamos j uma variável real e denotemos o numerador do radicando por

$$f(j) = -j(n-j)[j(n-j) - P_n(z)]$$

onde $P_n(z) = (n-1)(1+z^2) + \kappa(1+z)^2$.

$P_n(z)$ sendo independente de j, podemos fazer nossa análise apenas na variável j.

Fazendo a mudança de variável $y = j - \dfrac{n}{2}$, obtemos

$$g(y) = f(j) = -\Big(y + \frac{n}{2}\Big)\Big(\frac{n}{2} - y\Big)\Big[\Big(y + \frac{n}{2}\Big)\Big(\frac{n}{2} - y\Big) - P_n(z)\Big]$$

e claramente observamos que $g(y) = g(-y)$, logo $g(y)$ é uma função par. Este comportamento nos dá a informação de que a expressão de μ_j é simétrica em relação ao valor $\dfrac{n}{2}$, isto é, para valores de j equidistantes de $\dfrac{n}{2}$ obtemos os mesmos valores para $f(j)$, e assim para os índices dos autovalores com esta simetria teríamos o mesmo valor para os autovalores, isto é, $\mu_{n-j} = \mu_j$.

Desta forma temos o seguinte resultado; para n ímpar, $j = \frac{n}{2}$ não será um número inteiro, e assim para este valor de j não teremos um autovalor, logo todos os autovalores se distribirão simetricamente em relação a $\frac{n}{2}$ e desta forma não poderemos usar o

Teorema de Liapunov, pois para qualquer autovalor fixado, o quociente dele por seu simétrico seria um inteiro. No entanto para n par, temos que $j = \dfrac{n}{2}$ é um número inteiro, e associado a ele teremos um autovalor. Este terá módulo máximo, já que a expressão do numerador do radicando de μ_j como função de j é uma quádrica, portanto pelo fato de g ser uma função par, o que ocorrer a direita de $\frac{n}{2}$ ocorrerá a esquerda, assim os μ_j com $j \neq \frac{n}{2}$ terão módulo menor que o módulo de $\mu_{\frac{n}{2}}$. Donde $|\frac{\mu_j}{\mu_{\frac{n}{2}}}| < 1$ e portanto não poderá ser inteiro. Assim podemos usar o Teorema do Centro para garantir a existência de soluções periódicas com as propriedades lá citadas.

4.1.2 *Análise para os autovalores não conhecidos*

De acordo com a análise feita na seção 4.1, precisamos confirmar que os autovalores provindos de Q, quocientados por $\mu_{\frac{n}{2}}$ resulte num valor não inteiro, para κ e z variando em $B_\epsilon(0, g_0(0) + 1)$.

Expandindo Q, encontramos uma expressão simplificada para o polinômio característico

$$|Q| = p(\mu) = \mu^6 + A\mu^4 + B\mu^2 + C$$

onde A , B e C são funções em κ e z. Fazendo $\mu^2 = x$, obtemos

$$p(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C.$$

A luz do Teorema de Rouche (enunciado). Encaminhamo-nos a mostrar que os autovalores de Q têm módulo menor que $\mu_{\frac{n}{2}}$. Visto que se tomarmos a função $g(x) = x^3$ restrita a curva $\gamma = \{x \in \mathbb{C} : |x| = |\mu_{\frac{n}{2}}|^2\}$ e $p(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Caso seja verificado que $|p(x) - g(x)| \leq |g(x)|$ em γ, então teremos mostrado que $p(x)$ e $g(x)$ têm o mesmo número de zeros na região delimitada por γ e assim os autovalores que são os zeros de $p(x)$ teriam módulo menor que $\mu_{\frac{n}{2}}$ e portanto

$$\frac{|\mu_i|}{|\mu_{\frac{n}{2}}|} < 1$$

e por conseguinte teríamos mostrado que o quociente é não inteiro. E assim pela análise feita em 4.1 e por esta análise que teriamos feito aqui, obteríamos o seguinte resultado

Teorema 4.2 *Um anel de n vórtices unitários com latitude z e uma força de vorticidade κ para o vórtice no pólo norte da esfera, possue soluções periódicas com as propriedades dadas no teorema 2.2, para valores de z e κ variando no conjunto $B_\epsilon(0, g_0(0) + 1)$.*

Bibliografia

[1] Otávio de Oliveira. *A Forma Normal para Sistemas Hamiltonianos*, Tese de Mestrado, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco. 1978.

[2] R. Bellman. *Introduction to Matrix Analysis.* McGraw Hill. 1960.

[3] H. E. Cabral and D. S. Schmidt. *Stability of Relative Equilibria in the Problem of N+1 Vortices.* SIAM J.Math.Anal. vol. 3, nº 2, pp 231-250. 1999.

[4] H. E. Cabral, K. R. Meyer and D. S. Schmidt. *Stability and bifurcations for the N+1 vortex problem on the sphere.* Regular and Chaotic Dynamics, V. 8, nº 3, pp 259-282. 2003.

[5] H. E. Cabral. *Notas Sobre Sistemas Hamiltonianos.* Programa de verão, Departamento de Matemática, UFPE. 1995

[6] Sotomayor Tello, Jorge Manuel. *Lições de equações diferenciais ordinárias.* Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. 1979.

[7] Meyer, K. R. and Hall, G. R.. *Introduction to Hamiltonian Dynamical System and the N- Body Problem.* Springer - Verlag. 1992.

[8] Moser, J. and Siegel, C. Lectures on Celestial Mechanics. Springer - Verlag, Berlin, 1971.

[9] Edmundo Mansilla. *Estabilidade de sistemas hamiltonianos com três graus de liberdade e o problema dos três corpos.* Tese de Doutorado. Departamento de Matemática. Universidade Federal de Pernambuco. 1999.

[10] S. Boatto, H.E.Cabral. Non-linear stability of relative equilibria of vortices on a non-rotating sphere. SIAM J. Appl. Math. 2003

[11] H.E.Cabral. Tese apresentada ao concurso de professor titular ao departamento da Universidade Federal de Pernambuco.

[12] Smale-Hirsch, Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, New York, 1974.