

Dinâmica do Problema do Fio Circular Homogêneo

Carlinda Azevêdo

Departamento de Matemática - UFPE

Dinâmica do Problema do Fio Circular Homogêneo

Carlinda Azevêdo

Departamento de Matemática- UFPE

Resumo da Tese

Em linhas gerais, este trabalho consiste em estudar o movimento de uma partícula, de massa infinitesimal, submetida unicamente à força de atração gravitacional induzida por um fio circular homogêneo fixo, contido no espaço tri-dimensional.

Iniciamos este trabalho apresentando a formulação do problema e um estudo preliminar do potencial. Fazemos o estudo das simetrias e dos conjuntos invariantes. No capítulo 2, verificamos que todas as singularidades do problema do fio circular são devidas à colisão.

No capítulo 3, verificamos que o potencial ou o gradiente da função potencial V , pode ser visto como uma aproximação de outros potenciais, ou do gradiente de outros potenciais de mais fácil manipulação. E, no capítulo 4, provamos a existência de soluções periódicas de problemas perturbados próximas a soluções circulares de problemas não perturbados.

No capítulo 5, apresentamos o estudo da dinâmica do problema do fio circular homogêneo. Inicialmente estudamos a dinâmica da partícula restrita aos conjuntos invariantes. No estudo da dinâmica restrita ao eixo z verificamos a existência de soluções limitadas, as soluções periódicas, e soluções ilimitadas, as que escapam para o infinito. Além disso, observamos que a origem é ponto de equilíbrio estável do sistema restrito e que todas as soluções deste problema estão definidas em todo o tempo. No estudo no plano horizontal verificamos a existência de soluções circulares passando por qualquer ponto no exterior do fio circular e a não existência de soluções circulares no interior do fio. Fazemos um estudo sobre a existência de soluções circulares no exterior do fio circular para um certo momento angular fixado. No interior do fio circular, provamos que as soluções ou colidem ou convergem para a origem (a menos da solução de equilíbrio). Verificamos que todas as soluções não radiais descrevem uma curva cujo traço tem uma forma particular. No exterior do fio circular, fazemos também uma análise da dinâmica, a partir do retrato de fase. Por fim, apresentamos a região de Hill do problema e o estudo da solução de equilíbrio restritos a este plano. No estudo no plano vertical provamos a existência de soluções periódicas longe do fio circular e soluções periódicas próximas ao fio circular, intersectando a região planar interior ao fio circular, com um raio qualquer. Além disso, verificamos a existência de soluções em forma de oito, passando pela origem. Provamos também a existência de certas soluções periódicas no espaço tri-dimensional, perto do fio circular. e apresentamos a análise da solução de equilíbrio do problema.

Conteúdo

Introdução	3
1 Formulação do Problema e um Estudo Preliminar	7
1.1 Formulação do problema	7
1.2 Estudo preliminar do potencial	11
1.2.1 Expressões equivalentes do potencial	11
1.2.2 Simetrias do potencial	16
1.2.3 Propriedades do potencial	19
2 O Problema do Fio Circular como Perturbação de Outros Problemas Gravitacionais	21
2.1 O potencial como perturbação do problema de Kepler	21
2.2 O gradiente do potencial próximo ao fio circular	23
3 Singularidades	33
4 Soluções Periódicas de Perturbações Contínuas com Simetrias	39
4.1 Perturbações do problema de Kepler	45
4.2 Outras perturbações	50

5	Estudo da Dinâmica do Problema do Fio Circular	59
5.1	Dinâmica no eixo z	59
5.2	Dinâmica no plano horizontal (plano- (x, y))	61
5.2.1	Considerações gerais	62
5.2.2	A função potencial efetivo U_{ff} e as soluções circulares	63
5.2.3	Mais resultados sobre a dinâmica no plano horizontal	69
5.2.4	Região de Hill no plano horizontal	80
5.2.5	Solução de equilíbrio (no plano horizontal)	82
5.3	Dinâmica no(s) plano(s) vertical(is)	83
5.3.1	Soluções periódicas longe do fio circular	84
5.3.2	Soluções periódicas perto do fio circular	86
5.3.3	Soluções em forma de oito	90
5.4	Soluções periódicas perto do fio circular no caso geral	107
5.4.1	Redução do problema tri-dimensional a um problema planar	111
5.5	Solução de equilíbrio	117
A	O potencial devido a Gauss	118
B	Prova do Lema 4.2.1	127

Introdução

Em linhas gerais, este trabalho consiste em estudar o movimento de uma partícula, de massa infinitesimal, submetida unicamente à força de atração gravitacional induzida por um fio circular homogêneo fixo, contido no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . A este problema chamaremos de **problema do fio circular homogêneo**.

Foi surpreendente perceber, através de nossas pesquisas bibliográficas, que muito pouco se sabia sobre este problema. De fato, com relação ao estudo da dinâmica deste problema, nada tinha sido feito, e tudo o que pudemos encontrar foram diferentes formas de expressar o potencial. Por exemplo, uma expressão analítica para o potencial é dada em termos da integral elíptica completa de primeira espécie (ver [Mc]). Uma outra expressão, devida à Gauss, mostra que o valor do potencial em um ponto é dado pelo inverso da média aritmético-geométrica das distâncias máxima e mínima do ponto ao fio circular (ver [Po]).

Nos vimos assim, diante de um problema rico e belo pelas suas simetrias, no entanto, e para a nossa alegria, nada explorado. Desta forma, todo o trabalho apresentado nesta dissertação, a menos das expressões do potencial, é um trabalho novo na literatura, e representa todo o estudo (analítico) existente sobre a dinâmica do problema do fio circular homogêneo.

Iniciamos este trabalho, no capítulo 1, apresentando a formulação do problema e um estudo preliminar do potencial, onde mostramos algumas das expressões conhecidas equivalentes do potencial do fio circular homogêneo, bem como algumas de suas propriedades. Fazemos também neste capítulo, o estudo das simetrias do problema e o estudo dos conjuntos invariantes.

No capítulo 2, continuando o estudo do potencial V , induzido pelo fio circular, veri-

ficamos que o potencial ou o gradiente da função potencial V , pode ser visto como uma aproximação de outros potenciais gravitacionais, ou do gradiente de outros potenciais gravitacionais de mais fácil manipulação.

No capítulo 3, estudamos um tema de bastante relevância no problema de n -corpos, o estudo das singularidades das soluções. Verificamos que todas as singularidades do problema do fio circular homogêneo são devidas à colisão.

No capítulo 4, motivados pelos resultados do capítulo 2, fizemos um estudo sobre perturbações contínuas com simetrias, no plano. Provamos a existência de soluções periódicas de problemas perturbados próximas a soluções circulares de problemas não perturbados. Os problemas não perturbados a que nós nos referimos, são da forma $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|^{\alpha+2}}\mathbf{r}$, $\kappa > 0$, com $0 \leq \alpha \leq 1$. Em particular, se $\alpha = 1$ recaímos no problema de Kepler. Estes resultados são fundamentais para o estudo de existência de soluções periódicas no problema do fio circular homogêneo. Vale ressaltar que os resultados deste capítulo são de natureza geral, isto é, podem ser aplicados a diversos problemas com simetria, não apenas ao problema do fio circular.

Para $\alpha = 1$, um resultado análogo ao provado neste capítulo aparece em Vidal [V1]. Nosso resultado é mais geral em certos aspectos. Por exemplo, nosso sistema não precisa possuir integrais primeiras. O resultado de [V1] é mais geral no sentido de exigir menos simetria.

O método usado em [V1] é o método da continuação de Poincaré. Por outro lado, usando métodos de Cálculo de Variações, podem ser obtidos alguns resultados relacionados, mas estes métodos funcionam bem para $\alpha \geq 2$ (força forte), ver [B1], [AB]. Para $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, assumindo mais hipóteses, os métodos de Cálculo de Variações podem ser estendidos e usados para provar a existência de soluções periódicas em problemas perturbados, mas estas perturbações têm uma forma bastante restritiva, além de assumir o domínio com forma muito particular (ver [B2], [AC1], [AC2]).

Para $\alpha = 0$, não conseguimos encontrar na literatura resultados relacionados ao nosso, usando Cálculo de Variações. O único resultado que conseguimos encontrar para o caso $\alpha = 0$, foi em [V2]. Os métodos usados em [V2] são uma extensão dos usados em [V1]. Ressaltamos que o caso $\alpha = 0$ é justamente um dos casos que precisamos usar no capítulo 5. Neste caso, os resultados de [V2] não são suficientes, pois precisamos de outro tipo

de simetria e que as perturbações sejam só contínuas. É interessante notar também que o método usado para a prova dos resultados do capítulo 4 é geométrica e é totalmente diferente ao usado em [V1], [V2] (continuação analítica de Poincaré), ou em [B1], [B2], [AB], [AC1], [AC2] (Cálculo de Variações). Acreditamos que este é um método novo na literatura.

Finalmente, no capítulo 5, apresentamos o estudo da dinâmica do problema do fio circular homogêneo, isto é, estudamos o movimento de uma partícula, de massa infinitesimal, no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , submetida unicamente à força de atração gravitacional induzida por um fio circular homogêneo, contido no plano- (x, y) e com centro na origem. Neste estudo damos ênfase ao estudo da existência de soluções periódicas. A complexidade em se fazer um estudo completo analítico radica na dificuldade de manipular a expressão do potencial e no fato deste problema possuir três graus de liberdade. Buscamos assim, inicialmente obter informações sobre a dinâmica da partícula restrita aos conjuntos invariantes, ou seja, estudamos subproblemas do caso geral. Estes conjuntos invariantes são o eixo z (um grau de liberdade), o plano- (x, y) que contém o fio circular, a que chamamos de plano horizontal (dois graus de liberdade), e os planos que contêm o eixo z , planos aos quais denominamos planos verticais (dois graus de liberdade).

O estudo da dinâmica restrita ao eixo z está completo. Verificamos a existência de soluções limitadas, as soluções periódicas, e soluções ilimitadas, as que escapam para o infinito. Além disso, observamos que a origem é ponto de equilíbrio estável do sistema restrito e que todas as soluções deste problema estão definidas em todo o tempo (as soluções não possuem singularidades).

No estudo da dinâmica no plano horizontal verificamos a existência de soluções circulares passando por qualquer ponto no exterior do fio circular e a não existência de soluções circulares no interior do fio. Em seguida, fazemos um estudo sobre a existência de soluções circulares no exterior do fio circular para um certo momento angular fixado. Em outras palavras, procuramos conhecer para que valores do momento angular o sistema teria soluções circulares associadas.

Determinamos por completo, a dinâmica no interior do fio. Provamos que, no interior do fio circular, as soluções ou colidem ou convergem para a origem (a menos da solução de equilíbrio). Verificamos que todas as soluções não radiais descrevem uma curva cujo traço tem uma forma particular.

No exterior do fio circular, fazemos também uma análise da dinâmica, a partir do retrato de fase. Por fim, apresentamos a região de Hill do problema restrito ao plano horizontal e o estudo da solução de equilíbrio restrito a este plano.

Pela dificuldade de estudar a dinâmica no plano vertical, devida à expressão do potencial, buscamos estudar o problema restrito a este plano como aproximação de outros problemas, e, usando os resultados dos capítulos 1,3 e 4, obtemos os resultados descritos a seguir. No estudo da dinâmica no plano vertical, estudamos o problema considerando fios circulares com raios muito pequenos, de modo que o sistema resultante fosse uma perturbação simétrica do problema de Kepler. Sob esta abordagem, provamos a existência de soluções periódicas longe do fio circular. Em seguida, consideramos fios circulares com raios muito grandes, de modo que o sistema resultante, restrito ao plano vertical, fosse uma perturbação simétrica do problema do fio infinito, e sob esta abordagem, verificamos a existência de soluções periódicas suficientemente próximas ao fio circular, intersectando a região no plano horizontal interior ao fio circular. Finalmente, verificamos a existência de soluções periódicas em forma da figura do oito, contidas neste plano e passando pela origem. Os métodos usados nesta verificação aplicam-se ao problema de Euler simétrico, para mais detalhes ver observação 5.3.12 e final da seção 5.3.3.

Também, no capítulo 5, provamos a existência de certas soluções periódicas no espaço tri-dimensional, perto do fio circular. Por fim, apresentamos a análise da solução de equilíbrio do problema do fio circular.

Quero apresentar aqui os meus sinceros agradecimentos ao Prof. Hildeberto Cabral por ter proposto este belo problema, pelas nossas discussões em torno deste e pelas sugestões sobre a apresentação do texto. Ao Prof. Claudio Vidal por ter revisado o texto, avaliado o trabalho e pelas sugestões sobre a apresentação do mesmo. Ao Mário Sansuke por ter me presenteado com as belas figuras contidas neste trabalho. Ao Prof. Pedro Ontaneda por ter participado de maneira efetiva na pesquisa deste trabalho, tornando possível a realização do mesmo. Agradeço também a todos que participaram dos seminários. Aos professores, funcionários e colegas deste departamento. Ao CNPq por ter financiado meus estudos. E finalmente, o meu muito obrigada à minha família.

Capítulo 1

Formulação do Problema e um Estudo Preliminar

Neste trabalho estudamos o movimento de uma partícula, de massa infinitesimal, submetida unicamente à força de atração gravitacional induzida por um fio circular homogêneo fixo, contido no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . A este problema chamaremos de **problema do fio circular homogêneo**.

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira seção, apresentamos a formulação do problema, e na segunda seção, fazemos um estudo preliminar do potencial do fio circular homogêneo.

1.1 Formulação do problema

Seja \mathcal{C} um fio circular homogêneo contido no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Consideremos uma partícula P , de massa infinitesimal, movendo-se neste espaço, submetida unicamente à força de atração gravitacional induzida pelo fio circular \mathcal{C} . Denotaremos por $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ a posição da partícula P e por $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ a sua velocidade.

De acordo com a lei de atração Newtoniana, o movimento desta partícula no espaço obedece ao sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}), \quad (1.1.1)$$

onde os dois pontos denotam a segunda derivada com respeito ao tempo, e V a energia potencial Newtoniana, induzida pelo fio circular \mathcal{C} , cuja expressão é dada por

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{C}} \frac{\lambda \, du}{\|\mathbf{r} - u\|}, \quad (1.1.2)$$

sendo λ a densidade constante do fio circular. A massa do fio é dada por $M = \int_{\mathcal{C}} \lambda \, du = 2\pi\lambda\rho$, onde ρ é o raio do fio circular, desde que estamos considerando a constante gravitacional $G = 1$.

Note que, como a aplicação $\mathbf{r} \mapsto \frac{1}{\|\mathbf{r}-u\|}$ é analítica, para $\mathbf{r} \neq u$, então o potencial $V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{C}} \frac{\lambda \, du}{\|\mathbf{r}-u\|}$ também é analítico, para todo $\mathbf{r} \notin \mathcal{C}$.

Para nossa análise vamos considerar o fio circular \mathcal{C} contido no plano- (x, y) e centrado na origem, desta forma, o potencial V em (1.1.2) assume a forma

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= - \int_0^{2\pi} \frac{\lambda \rho \, d\theta}{\|\mathbf{r} - \rho e^{i\theta}\|} = -\lambda\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(x - \rho \cos\theta)^2 + (y - \rho \sen\theta)^2 + z^2}} \\ &= -\lambda\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2x\rho \cos\theta - 2y\rho \sen\theta}}, \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

onde $e^{i\theta} = (\cos\theta, \sen\theta, 0)$.

Assim, o sistema (1.1.1) é equivalente a:

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{x} &= -\lambda\rho \int_0^{2\pi} \frac{(x - \rho \cos\theta) \, d\theta}{\{x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2x\rho \cos\theta - 2y\rho \sen\theta\}^{3/2}} \\ \ddot{y} &= -\lambda\rho \int_0^{2\pi} \frac{(y - \rho \sen\theta) \, d\theta}{\{x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2x\rho \cos\theta - 2y\rho \sen\theta\}^{3/2}} \\ \ddot{z} &= -\lambda\rho z \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\{x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2x\rho \cos\theta - 2y\rho \sen\theta\}^{3/2}} \end{aligned} \right. \quad (1.1.4)$$

Observação 1.1.1 Olhando o potencial V como função das variáveis x, y, z e ρ , temos que ela é analítica no conjunto $\{(x, y, z, \rho) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 \neq \rho^2 \text{ ou } z \neq 0\}$, e também a função

$$(x, y, z, \rho) \mapsto - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(x - \rho \cos\theta)^2 + (y - \rho \sin\theta)^2 + z^2}}$$

é analítica em x, y, z e ρ , neste mesmo conjunto. Note que ρ pode tomar valores negativos ou zero.

Algumas outras expressões equivalentes de V serão apresentadas na próxima seção.

Observação 1.1.2 Observando o sistema (1.1.4), verificamos que a origem é um equilíbrio do sistema, o qual é instável. Para provar esta última afirmação basta analisar a parte linear A do sistema de primeira ordem, associado ao sistema (1.1.4). Desde que os autovalores (λ) de A se relacionam com os autovalores (σ) da matriz $HessV(0, 0, 0)$, pela relação $\lambda = \pm\sqrt{\sigma}$, e como, em nosso caso, temos $\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{\pi\lambda}{\rho^2}$, $\sigma_3 = \frac{2\pi\lambda}{\rho^2}$, segue-se a instabilidade.

De fato, a origem é o único equilíbrio do sistema, para a verificação deste fato precisamos das informações adicionais, por isto esta prova será apresentada no final deste trabalho.

As equações de movimento (1.1.1) podem ser escritas como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, com três graus de liberdade, na forma canônica

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{r}}, \\ \dot{\mathbf{r}} = H_{\mathbf{p}}, \end{cases} \quad (1.1.5)$$

com Hamiltoniano

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 + V(\mathbf{r}), \quad (1.1.6)$$

onde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ é a posição da partícula, $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}}$ é a sua velocidade, e V é a energia potencial Newtoniana, induzida pelo fio circular. Em (1.1.5), $H_{\mathbf{r}}$ e $H_{\mathbf{p}}$, indicam as derivadas parciais de H em relação a \mathbf{r} e \mathbf{p} , respectivamente.

O espaço de fase de (1.1.5) é dado por

$$\mathcal{M} = \{ (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) ; \mathbf{r} \notin \mathcal{C} \} = (\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}) \times \mathbb{R}^3.$$

Chamamos $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}$ de espaço das configurações.

Note que $(H_{\mathbf{p}}, -H_{\mathbf{r}})$ é um campo vetorial analítico sobre \mathcal{M} .

A Teoria de Equações Diferenciais Ordinárias nos garante o seguinte:

Teorema 1.1.3 *Dado $(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}) \times \mathbb{R}^3$, existe uma única solução $\mathbf{r}(t)$ de (1.1.1) definida em um intervalo máximo $a < t < b$, contendo $t = 0$, com condições iniciais $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{\mathbf{r}}_0$. Além disso, como V é analítica, todas as componentes de $\mathbf{r}(t)$ são funções analíticas de t e das coordenadas de \mathbf{r}_0 e $\dot{\mathbf{r}}_0$.*

Desde que a função Hamiltoniana (1.1.6) é autônoma, segue-se que ela é uma integral primeira para o movimento, isto é, $H(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$ é constante, para $\mathbf{r}(t)$ solução de (1.1.1). Logo, para cada $h \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\Sigma_h = \{ (\mathbf{r}, \mathbf{p}) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}) \times \mathbb{R}^3 ; H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = h \} \subset \mathcal{M}$$

é invariante pelo fluxo definido pelo campo $(H_{\mathbf{p}}, -H_{\mathbf{r}})$.

Note que, se $h \in \mathbb{R}$ é um valor regular para a função hamiltoniana H , temos que o conjunto definido acima é uma subvariedade diferenciável de \mathcal{M} , de dimensão 5. Note também que, como a energia cinética $\frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2$ é não negativa, segue-se de (1.1.6) que, sobre Σ_h , temos $V(\mathbf{r}) \leq h$.

Ao conjunto $\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C} ; V(\mathbf{r}) \leq h \}$ chamamos de *região de Hill* correspondente a energia h . Como este conjunto coincide com a projeção de Σ_h sobre o espaço de configurações $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}$, temos que se $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$ é uma curva solução de (1.1.5) sobre Σ_h , então $\mathbf{r}(t)$ deve estar na correspondente região de Hill, para todo o tempo t em que estiver definida.

Note que, como $V(\mathbf{r}) < 0$, se tomamos $h \geq 0$, a região de Hill correspondente é todo o espaço $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}$.

Comentário

O sistema (1.1.5) é um sistema reversível, isto é, se $(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$ é uma solução de (1.1.5), então também o será $(\mathbf{r}(-t), \mathbf{p}(-t))$.

1.2 Estudo preliminar do potencial

Nesta seção, apresentamos algumas expressões equivalentes do potencial do fio circular homogêneo, bem como algumas propriedades do potencial. Também fazemos o estudo das simetrias do potencial e dos espaços invariantes.

1.2.1 Expressões equivalentes do potencial

Consideremos um fio circular homogêneo \mathcal{C} (fixado), contido no plano- (x, y) e centrado na origem O do sistema, conforme mostra a figura 1.2.1.

Estamos denotando por ρ o raio do fio circular, e por $P = (x, y, z)$ uma partícula no espaço (fora do fio). D e d denotam as distâncias máxima e mínima da partícula P ao fio circular, respectivamente (veja figura 1.2.1).

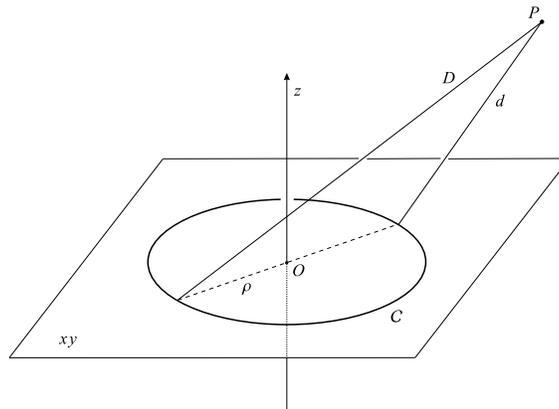


Figura 1.2.1: Fio circular com centro na origem

Temos as seguintes expressões para as distâncias,

$$D^2 = (\sqrt{x^2 + y^2} + \rho)^2 + z^2 \quad \text{e} \quad d^2 = (\sqrt{x^2 + y^2} - \rho)^2 + z^2. \quad (1.2.7)$$

Vejamos agora algumas expressões equivalentes para o potencial (1.1.2) induzido pelo fio circular \mathcal{C} .

Primeira Expressão

A energia potencial (1.1.2) pode ser escrita na forma

$$V(P) = -\lambda\rho \int_0^{2\pi} \frac{dw}{\sqrt{z^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos w}}, \quad (1.2.8)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Para mostrar isto, seja A o ponto do fio circular mais próximo de $P = (x, y, z)$ e sejam Q um ponto qualquer do fio e Δ a distância de P a Q . Se o ângulo QOA é representado por w (veja figura 1.2.2), a expressão usual para o potencial é dada por:

$$V(P) = -\int_0^{2\pi} \frac{\lambda\rho dw}{\Delta}, \quad \Delta = \|\overline{QP}\| = \|P - Q\|$$

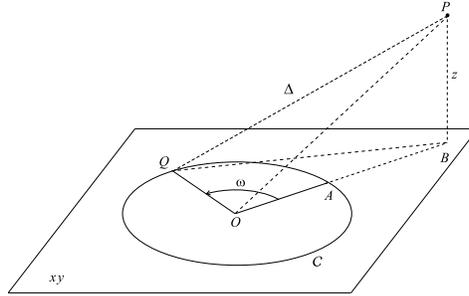


Figura 1.2.2: Fio circular homogêneo

Pela lei dos cossenos, $\overline{QB}^2 = (x^2 + y^2) + \rho^2 - 2\rho(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\cos w$, segue que $\Delta^2 = \overline{QP}^2 = \overline{QB}^2 + \overline{PB}^2$. Assim

$$\Delta^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2\rho(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\cos w,$$

logo

$$V(P) = -\lambda\rho \int_0^{2\pi} \frac{dw}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2\rho(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\cos w}}, \quad (1.2.9)$$

e tomando $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ obtemos então a expressão desejada.

Comentário

Usando esta expressão de V , o sistema (1.1.1) torna-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = -\lambda\rho \int_0^{2\pi} \frac{x\left(1 + \frac{\rho \cos w}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dw}{\{x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2\rho(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cos w\}^{3/2}} \\ \ddot{y} = -\lambda\rho \int_0^{2\pi} \frac{y\left(1 + \frac{\rho \cos w}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dw}{\{x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2\rho(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cos w\}^{3/2}} \\ \ddot{z} = -\lambda\rho z \int_0^{2\pi} \frac{dw}{\{x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 - 2\rho(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cos w\}^{3/2}} \end{array} \right. \quad (1.2.10)$$

Segunda Expressão

Se $M = 2\pi\lambda\rho$ é a massa do fio circular, podemos também re-escrever o potencial na forma

$$V(P) = -\frac{2}{\pi}M \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{D^2 \cos^2 \theta + d^2 \sin^2 \theta}}, \quad (1.2.11)$$

onde d e D são as funções de $P = (x, y, z)$ definidas em (1.2.7).

Esta igualdade é obtida da seguinte maneira. Utilizando as identidades $\cos^2 \frac{w}{2} + \sin^2 \frac{w}{2} = 1$ e $\cos w = \cos^2 \frac{w}{2} - \sin^2 \frac{w}{2}$, podemos re-escrever Δ^2 acima, na forma

$$\Delta^2 = d^2 \cos^2 \frac{w}{2} + D^2 \sin^2 \frac{w}{2},$$

e, por conseguinte, a expressão (1.2.9) vem a ser

$$V(P) = -\lambda\rho \int_0^{2\pi} \frac{dw}{\sqrt{d^2 \cos^2 \frac{w}{2} + D^2 \sin^2 \frac{w}{2}}}. \quad (1.2.12)$$

Pela mudança de variável $\psi = \frac{w}{2}$ em (1.2.12), e observando que a integral obtida de 0 a $\frac{\pi}{2}$ é igual a integral de $\frac{\pi}{2}$ a π , temos

$$V(P) = -4\lambda\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{d^2 \cos^2 \psi + D^2 \sin^2 \psi}}.$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$T(d, D) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{d^2 \cos^2 \psi + D^2 \sin^2 \psi}}, \quad (1.2.13)$$

logo temos $V(P) = -4\lambda\rho T(d, D)$, onde d e D são as funções definidas em (1.2.7).

Note que, pela mudança de variável $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$, T é simétrica em relação a d e D , isto é,

$$T(d, D) = T(D, d). \quad (1.2.14)$$

Assim, $V(P) = -\frac{2}{\pi} M T(D, d)$, onde $M = 2\pi\lambda\rho$ é a massa do fio circular, e obtemos a expressão desejada.

Os cálculos da primeira e segunda expressões do potencial podem ser encontrados em [Po], pags. 32-39, [Mc], pags. 195-200. Uma outra forma similar de obter a expressão (1.2.11) pode ser vista em [Ke], pags. 58-62.

Comentário

Usando a expressão (1.2.11) de V , o sistema (1.1.1) torna-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = -\frac{2}{\pi} M \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \left(1 + \frac{\rho \cos 2\theta}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) d\theta}{\{D^2 \cos^2 \theta + d^2 \sin^2 \theta\}^{3/2}} \\ \ddot{y} = -\frac{2}{\pi} M \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y \left(1 + \frac{\rho \cos 2\theta}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) d\theta}{\{D^2 \cos^2 \theta + d^2 \sin^2 \theta\}^{3/2}} \\ \ddot{z} = -\frac{2}{\pi} M \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z d\theta}{\{D^2 \cos^2 \theta + d^2 \sin^2 \theta\}^{3/2}} \end{array} \right.$$

Observações 1.2.1

1) É importante ressaltar que a igualdade $V(P) = -\frac{2}{\pi}MT(D, d)$, onde d e D são as distâncias mínima e máxima de P ao fio circular, respectivamente, é independente das coordenadas usadas.

2) A expressão (1.2.11) pode ser escrita na forma

$$V(P) = -\frac{2M}{\pi D}K(k),$$

onde $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\text{sen}^2\theta}}$ é a integral elíptica completa de primeira espécie, e o módulo k é dado por $k^2 = \frac{\sqrt{D^2-d^2}}{D}$.

Sabemos que

$$\frac{2}{\pi}K(k) = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right] \quad (1.2.15)$$

(ver [Mc], pag. 197, [H], pag. 26).

Terceira Expressão

Antes de enunciarmos a terceira expressão, vamos lembrar a definição da média aritmético-geométrica.

Sejam m, n , $m > n$, dois números positivos. Então $m > \frac{m+n}{2} > \sqrt{mn} > n$.

Chamando $m_1 = \frac{m+n}{2}$ e $n_1 = \sqrt{mn}$, e construindo as seqüências $\{m_i\}$, $\{n_i\}$ com

$$m_{i+1} = \frac{m_i + n_i}{2}, \quad n_{i+1} = \sqrt{m_i n_i}$$

temos $m > m_1 > m_2 > \dots > n_2 > n_1 > n$.

Tomando o limite quando i tende para infinito, mostra-se que as seqüências convergem para um mesmo limite $\sigma(m, n)$. Este limite foi chamado por Gauss ([H], pag. 78), de média *aritmético-geométrica* de m e n . Note que se $m = n$, então $\sigma(m, m) = m$.

Passemos, finalmente, à terceira expressão,

O potencial V de nosso problema é dado por

$$V(P) = -\frac{M}{\sigma(D, d)}, \quad (1.2.16)$$

onde $\sigma(D, d)$ é a média aritmético-geométrica de $D > 0$ e $d > 0$, e d, D são as funções de $P = (x, y, z)$ definidas em (1.2.7).

Como a prova de (1.2.16) envolve vários cálculos, apresentamo-la no apêndice A.

Segundo nossa revisão bibliográfica, as expressões (1.2.8), (1.2.11) e (1.2.16) foram inicialmente mencionadas por Poincaré em 1899 ([Po]), e depois nos livros [Ke], [Mc]. Outra forma de expressar o potencial do fio circular usa polinômios de Legendre (ver [StiSch], pags. 100-103, [Ke], pags. 255-256).

Comentário

Usando a primeira ou segunda expressão do potencial V , facilmente obtemos a expressão do seu gradiente ∇V . Porém, quando escrevemos o potencial de um ponto como o inverso da média aritmético-geométrica das distâncias máxima e mínima do ponto ao fio circular, não é claro como é a expressão do gradiente. Fizemos esta análise e obtivemos uma expressão para o gradiente do potencial ∇V neste caso. Estes cálculos aparecem no apêndice A.

1.2.2 Simetrias do potencial

Nesta seção, estudaremos as simetrias do problema do fio circular homogêneo.

Como antes, estamos considerando o fio circular \mathcal{C} , contido no plano- (x, y) e centrado na origem. No decorrer deste trabalho, chamaremos de **plano horizontal** ao plano- (x, y) que contém o fio circular, e de **plano vertical** a um plano que contém o eixo z .

Antes, lembremos a seguinte definição:

Definição 1.2.1 Se N é um aberto em \mathbb{R}^n , $\psi : N \rightarrow N$ é uma aplicação linear e $V : N \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que V é ψ -invariante (ou que ψ é uma simetria de V) se

$$V(r) = V(\psi(r)), \quad \text{para todo } r \in N.$$

Se X é um campo de vetores sobre N , dizemos que X é ψ -invariante (ou que ψ é uma simetria de X) se

$$\psi X(r) = X(\psi(r)), \quad \text{para todo } r \in N.$$

Estudamos agora as simetrias do problema do fio circular homogêneo. As provas dos resultados seguintes são standard, e, em poucas palavras, devem-se ao fato de que o fio circular homogêneo, com centro na origem, é invariante por todas as simetrias abaixo mencionadas.

Proposição 1.2.2 A função potencial V é invariante por:

- (i) Rotações em torno do eixo z .
- (ii) Reflexão em relação ao plano $-(x, y)$ (plano horizontal).
- (iii) Reflexão em relação a um plano contendo o eixo z (plano vertical).

Prova: É evidente de (1.2.11) e das expressões das distâncias D e d em (1.2.7) que V é invariante pelas transformações mencionadas em (i), (ii) e (iii). ■

Corolário 1.2.3 O campo gradiente ∇V de V é invariante por:

- (i) Rotações em torno do eixo z .
- (ii) Reflexão em relação ao plano $-(x, y)$ (plano horizontal).
- (iii) Reflexão em relação a um plano contendo o eixo z (plano vertical).

Prova: (i) Pela proposição anterior $V(\mathbf{r}) = V(g_\theta \mathbf{r})$, onde g_θ representa a rotação em torno do eixo z , pelo ângulo θ . Diferenciando temos

$$dV(\mathbf{r})\xi = dV(g_\theta \mathbf{r})dg_\theta(\mathbf{r})\xi$$

$$\text{logo} \quad \langle \nabla V(\mathbf{r}), \xi \rangle = \langle \nabla V(g_\theta \mathbf{r}), dg_\theta(\mathbf{r})\xi \rangle = \langle (dg_\theta(\mathbf{r}))^T \nabla V(g_\theta \mathbf{r}), \xi \rangle, \quad \text{para todo } \xi.$$

Como $g_\theta = dg_\theta(\mathbf{r})$ e $g_\theta^T g_\theta = I$, concluímos que g_θ é uma simetria de $\nabla V(\mathbf{r})$. De modo análogo, verificamos (ii) e (iii), concluindo assim a prova do corolário. ■

Corolário 1.2.4 *Se $\mathbf{r}(t)$ é uma solução da equação diferencial (1.1.1), então $\psi\mathbf{r}(t)$ também é solução de (1.1.1), onde ψ é:*

(i) *uma rotação em torno do eixo z , ou*

(ii) *a reflexão em relação ao plano- (x, y) (plano horizontal), ou*

(iii) *a reflexão em relação a um plano contendo o eixo z (plano vertical)*

Prova: Seja $\alpha(t)$ uma solução de (1.1.1) e seja $\gamma(t) = g_\theta\alpha(t)$, onde g_θ é a rotação em torno do eixo z pelo ângulo θ . Temos, usando o corolário anterior,

$$\ddot{\gamma}(t) = g_\theta \ddot{\alpha}(t) = g_\theta(-\nabla V(\alpha(t))) = -\nabla V(g_\theta\alpha(t)) = -\nabla V(\gamma(t)).$$

Analogamente, provamos para as transformações em (ii) e (iii). ■

Corolário 1.2.5 *O eixo z , o plano horizontal e os planos verticais são espaços invariantes, isto é, uma solução de (1.1.1) que começa num destes espaços com velocidade inicial contida nele, permanece neste espaço para todo o tempo em que a solução estiver definida.*

Prova: Seja $\alpha(t)$ uma solução da equação $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r})$, com condições iniciais $p_0 = (0, 0, z)$ e $v_0 = (0, 0, \dot{z})$. Pelo corolário 1.2.4 $g_\theta\alpha(t)$ é uma solução de (1.1.1), para todo θ , onde g_θ é uma rotação por um ângulo θ em torno do eixo z . Como $g_\theta p_0 = p_0$ e $g_\theta v_0 = v_0$, temos que $g_\theta\alpha(t) = \alpha(t)$ para todo θ , ou seja, esta solução tem as mesmas condições iniciais que $\alpha(t)$, logo, por unicidade das soluções $g_\theta\alpha(t) = \alpha(t)$. Ora, os pontos fixos de g_θ são os pontos do eixo z , logo, $\alpha(t)$ é um ponto deste eixo, para todo t . Isto prova que o eixo dos z é um espaço invariante.

De modo análogo, verificamos que os planos verticais e o plano horizontal são espaços invariantes. ■

Observações: 1) Este resultado nos permite o estudo da dinâmica nestes subespaços invariantes. De fato, no capítulo 5, ao estudar a dinâmica do problema, começamos estudando a dinâmica nestes casos particulares.

2) O corolário 1.2.5 também pode ser verificado diretamente do sistema de equações. Por exemplo, segue diretamente do campo associado ao sistema (1.1.4), que o eixo z e o plano- (x, y) são conjuntos invariantes. Para verificar que os planos verticais são conjuntos invariantes, considere o campo associado ao sistema (1.2.10).

1.2.3 Propriedades do potencial

Nesta seção, veremos algumas propriedades do potencial em relação à massa e ao raio do fio circular. Para isto, precisamos explicitar a dependência do potencial em relação a estas variáveis. Escrevemos $V(\mathbf{r}, \rho, M)$ para denotar o potencial induzido pelo fio circular, contido no plano $-(x, y)$ e centrado na origem, com raio ρ e massa M , e $\nabla V(\mathbf{r}, \rho, M)$ para denotar o gradiente (em relação a \mathbf{r}) de $V(\mathbf{r}, \rho, M)$.

Os resultados desta seção serão usados no capítulo 5.

Lema 1.2.6 *Para o potencial V do problema do fio circular temos as seguintes identidades:*

$$(i) V(\mathbf{r}, \rho, cM) = cV(\mathbf{r}, \rho, M), \text{ para cada } c \in \mathbb{R}$$

$$(ii) V(c\mathbf{r}, c\rho, M) = \frac{1}{c}V(\mathbf{r}, \rho, M), \text{ para cada } c > 0$$

$$(iii) \nabla V(c\mathbf{r}, c\rho, M) = \frac{1}{c^2}\nabla V(\mathbf{r}, \rho, M), \text{ para cada } c > 0$$

$$(vi) \nabla V(\mathbf{r}, \rho, cM) = c\nabla V(\mathbf{r}, \rho, M), \text{ para cada } c \in \mathbb{R}$$

Prova: Segue direto da definição, uma vez que $V(\mathbf{r}, \rho, M) = -\frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\|\mathbf{r} - \rho e^{i\theta}\|}$, onde $e^{i\theta} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$. ■

Corolário 1.2.7 *Sejam ρ, ζ, M, N números positivos.*

Se $\mathbf{r}(t)$ é uma solução do problema $\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\nabla V(\mathbf{r}, \rho, M)$, então $\mathbf{s}(t) = \frac{\zeta}{\rho} \mathbf{r} \left(\sqrt{\frac{N\rho^3}{M\zeta^3}} t \right)$ é uma solução do problema $\ddot{\mathbf{s}}(t) = -\nabla V(\mathbf{s}, \zeta, N)$.

Prova: Defina $\mathbf{s}(t) = \beta \mathbf{r}(\sigma t)$, com β, σ constantes. Derivando $\mathbf{s}(t)$ duas vezes e aplicando o lema anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{s}}(t) &= \beta \sigma^2 \ddot{\mathbf{r}}(\sigma t) = -\beta \sigma^2 \nabla V(\mathbf{r}(\sigma t), \rho, M) = -\beta \sigma^2 \nabla V\left(\frac{1}{\beta} \mathbf{s}(t), \rho, M\right) = \\ &= -\beta^3 \sigma^2 \nabla V(\mathbf{s}(t), \beta \rho, M) = -\nabla V(\mathbf{s}(t), \beta \rho, \beta^3 \sigma^2 M) \end{aligned}$$

Assim, tomando $\sigma = \sqrt{\frac{N\rho^3}{M\zeta^3}}$ e $\beta = \frac{\zeta}{\rho}$, temos que $\mathbf{s}(t)$ satisfaz $\ddot{\mathbf{s}}(t) = -\nabla V(\mathbf{s}, \zeta, N)$, como queríamos mostrar. ■

Observação 1.2.8 1) O lema 1.2.6 e o corolário 1.2.7 implicam que para estudar o problema do fio circular homogêneo, basta estudar o caso de raio e massa unitários.

2) Note que se $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{s}(t)$ são como acima, elas têm as mesmas propriedades qualitativas (periódica, solução de equilíbrio, etc.). Em particular, se $\mathbf{r}(t)$ é periódica de período T , então $\mathbf{s}(t)$ é periódica de período $\frac{T\sqrt{M\zeta^3}}{\sqrt{N\rho^3}}$.

O seguinte resultado é geral e o enunciamos devido ao fato de que o utilizaremos no capítulo 5.

Lema 1.2.9 *Seja $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^1 .*

Se $\mathbf{r}(t)$ é solução do problema $\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\nabla V(\mathbf{r})$, então $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{q}$ é uma solução do problema $\ddot{\mathbf{s}}(t) = -\nabla W(\mathbf{s})$, onde $W : \Omega + \mathbf{q} \rightarrow \mathbb{R}$, $W(\mathbf{s}) = V(\mathbf{s} - \mathbf{q})$.

Aqui $\Omega + \mathbf{q} = \{ \mathbf{u} + \mathbf{q}; \mathbf{u} \in \Omega \}$.

Prova: Segue por substituição direta. ■

Observação 1.2.10 Neste caso também temos que se $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{s}(t)$ são como no lema 1.2.9, elas têm as mesmas propriedades qualitativas (periódica, solução de equilíbrio, etc.). Em particular, se $\mathbf{r}(t)$ é periódica, então $\mathbf{s}(t)$ é periódica com mesmo período. Note também que o traço de $\mathbf{s}(t)$ é o transladado de $\mathbf{r}(t)$ (ou vice-versa).

Capítulo 2

O Problema do Fio Circular como Perturbação de Outros Problemas Gravitacionais

Neste capítulo, verificamos que o potencial ou o gradiente da função potencial V , induzido pelo fio circular homogêneo, pode ser visto como uma aproximação de outros potenciais ou como uma aproximação do gradiente de outros potenciais. Estes resultados serão usados no capítulo 5 para o estudo da dinâmica do problema do fio circular, mais precisamente para o estudo de soluções periódicas deste problema.

2.1 O potencial como perturbação do problema de Kepler

Mostraremos nesta seção que o potencial do fio circular, de raio ϵ pequeno, pode ser escrito como uma perturbação do potencial do problema de Kepler.

Fixe $M > 0$. Denotamos por \mathcal{C}_ϵ o fio circular, contido no plano- (x, y) , centrado na origem, com raio ϵ e massa M . Denotamos também por

$$V(\mathbf{r}, \epsilon) = -\frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(x - \epsilon \cos\theta)^2 + (y - \epsilon \sin\theta)^2 + z^2}} = -\frac{2}{\pi} M \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{D^2 \cos^2\theta + d^2 \sin^2\theta}},$$

onde $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $D^2 = (\sqrt{x^2 + y^2} + \epsilon)^2 + z^2$ e $d^2 = (\sqrt{x^2 + y^2} - \epsilon)^2 + z^2$, o potencial gravitacional induzido por \mathcal{C}_ϵ . Note que o domínio de $V(\mathbf{r}, \epsilon)$ é $\{(\mathbf{r}, \epsilon); \mathbf{r} \notin \mathcal{C}_\epsilon\}$ e que $V(\mathbf{r}, \epsilon)$ é analítica neste domínio. Note também que faz sentido permitir valores negativos de ϵ . Neste caso o domínio de $V(\mathbf{r}, \epsilon)$ é $\{(x, y, z, \epsilon); x^2 + y^2 \neq \epsilon^2 \text{ ou } z \neq 0\}$ (ver observação 1.1.1), e observamos que V é par, isto é, $V(\mathbf{r}, \epsilon) = V(\mathbf{r}, -\epsilon)$. De fato,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}, -\epsilon) &= -\frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(x+\epsilon \cos\theta)^2 + (y+\epsilon \sin\theta)^2 + z^2}} \\ &= -\frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(-x-\epsilon \cos\theta)^2 + (-y-\epsilon \sin\theta)^2 + z^2}} \\ &= V(-\mathbf{r}, \epsilon) \\ &= V(\mathbf{r}, \epsilon) \end{aligned}$$

onde a última igualdade é devida à simetria de V , ou segue diretamente da expressão (1.2.9).

Podemos agora enunciar a seguinte proposição:

Proposição 2.1.1 *O potencial do problema do fio circular homogêneo, de raio ϵ , $V(\mathbf{r}, \epsilon)$, definido em (1.2.11), é uma perturbação, de ordem 2 em ϵ , do potencial de Kepler, isto é,*

$$V(\mathbf{r}, \epsilon) = -\frac{M}{\|\mathbf{r}\|} + \epsilon^2 f(\mathbf{r}, \epsilon),$$

e f é analítica em $\{(\mathbf{r}, \epsilon) = (x, y, z, \epsilon) \in \mathbb{R}^4; 0 \neq x^2 + y^2 \neq \epsilon^2 \text{ ou } z \neq 0\}$.

Prova: Por (1.2.11), temos que

$$V(\mathbf{r}, \epsilon) = -\frac{2}{\pi} M \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{D^2 \cos^2\theta + d^2 \sin^2\theta}},$$

onde $D^2 = (\sqrt{x^2 + y^2} + \epsilon)^2 + z^2$, $d^2 = (\sqrt{x^2 + y^2} - \epsilon)^2 + z^2$, $\mathbf{r} \notin \mathcal{C}_\epsilon$. Note que $V(\mathbf{r}, 0) = -\frac{M}{\|\mathbf{r}\|}$, $\mathbf{r} \neq 0$.

Como $V(\mathbf{r}, \epsilon)$ é analítica em $\Omega = \{(x, y, z, \epsilon); x^2 + y^2 \neq \epsilon^2 \text{ ou } z \neq 0\}$, temos que a função $V(\mathbf{r}, \epsilon) + \frac{M}{\|\mathbf{r}\|}$ é analítica em $\{(\mathbf{r}, \epsilon) = (x, y, z, \epsilon) \in \mathbb{R}^4; 0 \neq x^2 + y^2 \neq \epsilon^2 \text{ ou } z \neq 0\}$.

0}. Definimos $f(\mathbf{r}, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} \left(V(\mathbf{r}, \epsilon) + \frac{M}{\|\mathbf{r}\|} \right)$, logo f é analítica em $\{(\mathbf{r}, \epsilon) = (x, y, z, \epsilon) \in \mathbb{R}^4; 0 \neq x^2 + y^2 \neq \epsilon^2 \text{ ou } z \neq 0, \epsilon \neq 0\}$. Vamos mostrar que f estende-se para uma função analítica definida em $\{(\mathbf{r}, \epsilon) = (x, y, z, \epsilon) \in \mathbb{R}^4; 0 \neq x^2 + y^2 \neq \epsilon^2 \text{ ou } z \neq 0\}$.

Sendo $V(\mathbf{r}, \epsilon)$ uma função analítica em Ω , podemos fazer o seu desenvolvimento em série de potências. Pelo comentário acima V é par em ϵ , e segue que suas derivadas em ϵ de ordem ímpar são funções ímpares, isto é, $V^{(2n-1)}(\mathbf{r}, \epsilon) = -V^{(2n-1)}(\mathbf{r}, -\epsilon)$, o que implica que $V^{(2n-1)}(\mathbf{r}, 0) = 0$. Sendo assim, desenvolvendo V em potências e rearrumando, obtemos, para ϵ próximo de 0,

$$V(\mathbf{r}, \epsilon) - V(\mathbf{r}, 0) = \epsilon^2 \tilde{f}(\mathbf{r}, \epsilon),$$

com \tilde{f} analítica.

Assim, para ϵ próximo de 0, $f(\mathbf{r}, \epsilon) = \tilde{f}(\mathbf{r}, \epsilon)$. Logo f pode ser estendida analiticamente. Isto prova a proposição. ■

Como $M = 2\pi\epsilon\lambda$ e, nesta seção, M está fixo, temos que a densidade λ depende de ϵ , mais especificamente, $\lambda = \frac{M}{2\pi\epsilon}$. Assim, se $\epsilon \rightarrow 0$, então $\lambda \rightarrow +\infty$.

2.2 O gradiente do potencial próximo ao fio circular

Nosso objetivo nesta seção é verificar que, em um plano vertical, o gradiente do potencial ∇V próximo ao fio circular pode ser estudado como uma aproximação do potencial induzido por um fio infinito (fio reto de comprimento infinito, de densidade constante e massa infinita) ortogonal ao plano (veja figura 2.2.1).

Lembre que o potencial do fio infinito é dado por $2\lambda \ln r$, onde r é a distância de um ponto P ao fio infinito e λ a densidade constante do fio. Note que, se P está no plano vertical, a distância r de P ao fio infinito é igual à distância de P a O , onde O é a interseção do fio infinito com o plano vertical (ver [Ke], pags. 62-63).

Vejamos antes uns preliminares.

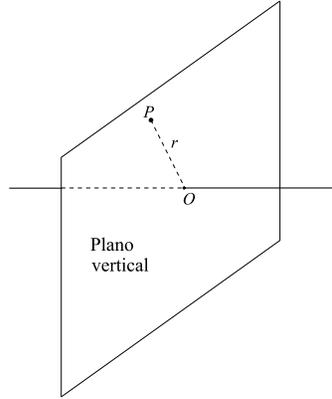


Figura 2.2.1: Fio infinito

Seja $V(x, y, z; \rho)$ o potencial do fio circular homogêneo, contido no plano- (x, y) , centrado na origem, de densidade constante λ e com raio ρ . Por (1.2.11), temos que

$$V(x, y, z; \rho) = -4\lambda\rho T(D, d) = -4\lambda\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{D^2 \cos^2 \theta + d^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}, \quad (2.2.1)$$

T como definida em (1.2.13).

$$\text{Defina } f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + t \operatorname{sen}^2 \theta}}, \quad 0 < t \leq 1.$$

$$\text{Logo } V(x, y, z; \rho) = -\frac{4\lambda\rho}{D} f\left(\frac{d^2}{D^2}\right).$$

Observações 2.2.0

$$1) f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + t \operatorname{sen}^2 \theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (1-t) \operatorname{sen}^2 \theta}} = K(\sqrt{1-t})$$

onde, como foi dito antes, K é a integral elíptica completa de primeira espécie.

$$2) f(t) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right)^2 (1-t)^n \right)$$

Esta série pode ser obtida da série de potências (1.2.15) de K .

$$3) T(d, D) = \frac{f\left(\frac{d^2}{D^2}\right)}{D}, \quad d \leq D, \quad D \neq 0.$$

$$4) T(d, D) = \frac{\pi}{2\sigma(d, D)}, \text{ onde } \sigma(d, D) \text{ é a média aritmético-geométrica de } d \text{ e } D.$$

Por 3) e 4) temos

$$f\left(\frac{d^2}{D^2}\right) = \frac{\pi D}{2\sigma(d, D)}, \quad d \leq D. \quad (2.2.2)$$

Fazendo $D = 1$, temos que $f(d^2) = \frac{\pi}{2\sigma(d, 1)}$, $d \leq 1$.

Lema 2.2.1 (i) f é decrescente e f' é crescente.

$$(ii) \sigma(d, 1) \geq \sqrt{d}$$

$$(iii) f(t) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt[4]{t}} \quad (t \leq 1)$$

$$(iv) |f'(t)| \leq \frac{1}{2} \frac{f(t)}{t}$$

$$(v) |f'(t)| \leq \frac{\pi}{4} \frac{1}{t^{5/4}}$$

Prova: (i)

$$f'(t) = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}^2 \theta d\theta}{(\cos^2 \theta + t \text{sen}^2 \theta)^{3/2}} < 0, \quad \text{o que implica que } f \text{ é decrescente.}$$

$$f''(t) = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}^4 \theta d\theta}{(\cos^2 \theta + t \text{sen}^2 \theta)^{5/2}} > 0, \quad \text{o que implica que } f' \text{ é crescente.}$$

Note que em geral $f^{(n)}(t) < 0$, se n é ímpar, e $f^{(n)}(t) > 0$, se n é par.

(ii) Por definição de σ , temos que $\sigma(d, 1) \geq$ (média geométrica de d e 1) $= \sqrt{d}$.

(iii) Por (2.2.2), tomando $D = 1$, $d^2 = t$, e aplicando (ii), obtemos (iii).

(iv)

$$\begin{aligned} |f'(t)| &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta d\theta}{(\cos^2 \theta + t \operatorname{sen}^2 \theta)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} \frac{1}{(\cos^2 \theta + t \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2}} \frac{t \operatorname{sen}^2 \theta}{(\cos^2 \theta + t \operatorname{sen}^2 \theta)} d\theta \leq \frac{1}{2} \frac{f(t)}{t}, \end{aligned}$$

pois $\frac{t \operatorname{sen}^2 \theta}{(\cos^2 \theta + t \operatorname{sen}^2 \theta)} < 1$, $t > 0$.

A prova de (v) segue direto de (iii) e (iv). ■

Com isto, concluímos nossos preliminares.

Estamos interessados em estudar o potencial próximo ao fio circular. Para este estudo consideremos o fio circular de densidade constante λ , contido no plano- (x, y) e passando pela origem, com raio $\frac{c}{2}$ e centro $(\frac{c}{2}, 0, 0)$, conforme à figura 2.2.2. Observe que o plano- (x, z) é um conjunto invariante. Denotaremos o potencial deste fio circular transladado, e restrito ao plano- (x, y) , por $W(x, z; \frac{c}{2})$.

O potencial é escrito na forma

$$W\left(x, z; \frac{c}{2}\right) = -4\lambda \frac{c}{2} T(D, d) \quad (\text{ver (2.2.1) e observação 1.2.1, (1)}). \quad (2.2.3)$$

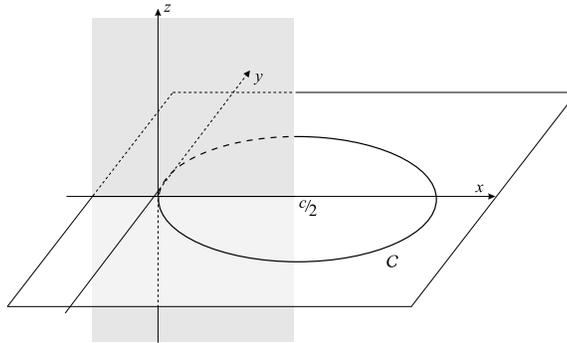


Figura 2.2.2: Fio circular centrado em $(c/2, 0, 0)$

Restrito à faixa $\{(x, 0, z); x \leq \frac{c}{2}, z \in \mathbb{R}\}$, e chamando $z = y$, observe que, neste caso, $D^2 = (c - x)^2 + y^2$ e $d^2 = x^2 + y^2$. Assim, por observação 2.2.0, (3),

$$W\left(x, y; \frac{c}{2}\right) = -4\lambda \frac{c}{2} f\left(\frac{x^2 + y^2}{(c-x)^2 + y^2}\right) / \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

Note que $W\left(x, y; \frac{c}{2}\right) = V\left((x, 0, y) - \left(\frac{c}{2}, 0, 0\right); \frac{c}{2}\right)$, onde V é o potencial do fio circular contido no plano- (x, y) , centrado na origem, de densidade constante λ e com raio $\frac{c}{2}$. Isto é, W é obtido de V por uma translação. Observe que quando c tende para o infinito, a massa $M = 2\pi\lambda\frac{c}{2}$ também tende para o infinito.

Lema 2.2.2 *Numa vizinhança da origem*

$$\nabla W\left(x, y; \frac{c}{2}\right) = 2\lambda c \frac{f(t)}{D^3} (x - c, y) - 4\lambda \frac{c^2}{D^5} f'(t) [c(x, y) + (y^2 - x^2, -2xy)],$$

onde $t = \frac{x^2 + y^2}{(c-x)^2 + y^2}$ e $D = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$.

Prova: Segue direto do cálculo do gradiente $\nabla W = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}\right)$. ■

Observação: Se $z = x + iy$, então $z^2 = (x^2 - y^2, 2xy)$, assim, em números complexos, a igualdade do lema acima escreve-se

$$\begin{aligned} \nabla W\left(z; \frac{c}{2}\right) &= 2\lambda \frac{c}{|z-c|^3} f\left(\frac{|z|^2}{|z-c|^2}\right) (z - c) - 4\lambda \frac{c^2}{|z-c|^5} f'\left(\frac{|z|^2}{|z-c|^2}\right) (cz - z^2) = \\ &= -2\lambda \frac{c^2}{|z-c|^3} f\left(\frac{|z|^2}{|z-c|^2}\right) + \left[2\lambda \frac{c}{|z-c|^3} f\left(\frac{|z|^2}{|z-c|^2}\right) - 4\lambda \frac{c^3}{|z-c|^5} f'\left(\frac{|z|^2}{|z-c|^2}\right)\right] z + 4\lambda \frac{c^2}{|z-c|^5} f'\left(\frac{|z|^2}{|z-c|^2}\right) z^2 \\ &= -2\lambda \frac{c}{|z-c|^3} \left\{ f\left(\frac{|z|^2}{|z-c|^2}\right) + z \left(\frac{2c}{|z-c|^2}\right) f'\left(\frac{|z|^2}{|z-c|^2}\right) \right\} (z - c) \end{aligned}$$

(Note que o vetor gradiente tem suas componentes nas direções z , z^2 e na direção real $(1, 0)$)

Para simplificar a notação, de agora em diante, nesta seção, escreveremos

$$E(x, y; \epsilon) = \nabla W \left(x, y; \frac{1}{2} \right).$$

Note que o domínio de E é $\{(x, y, \epsilon); x < \frac{1}{2\epsilon}, \epsilon > 0\}$.

Definição 2.2.3 Dizemos que $h(x, y; \epsilon)$ é C_* -limitada se,

1) Para todo $C \subset \mathbb{R}^2$ compacto com $(0, 0) \notin C$, existe ϵ_0 tal que $h(x, y; \epsilon)$ está definida para $(x, y) \in C$, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

2) Existe K_C tal que $|h(x, y; \epsilon)| \leq K_C$, para todo $\epsilon \leq \epsilon_0$ e para todo $(x, y) \in C$.

Lema 2.2.4

$$(i) E(x, y; \epsilon) = \epsilon^{\frac{3}{2}} h_1(x, y; \epsilon)(x, y) + \sqrt{\epsilon} h_2(x, y; \epsilon)(1, 0) + \\ + \epsilon^2 f'(t) h_3(x, y; \epsilon)(x, y) \sqrt{\epsilon} h_4(x, y; \epsilon)(x^2 - y^2, 2xy),$$

onde $h_i(x, y; \epsilon)$ é C^∞ e é C_* -limitada, para $i = 1, 2, 3, 4$.

$$(ii) E(x, y; \epsilon) = -4\lambda\epsilon^2 f'(t)(x, y) + \sqrt{\epsilon} U(x, y; \epsilon), \text{ onde } U \text{ é } C_*\text{-limitada.}$$

Prova: (i) Do lema anterior, parte (i), temos:

$$\nabla W \left(x, y; \frac{1}{2} \right) = 2\lambda \frac{1}{\epsilon} \frac{f(t)}{D^3} (x, y) - 2\lambda \frac{1}{\epsilon^2} \frac{f(t)}{D^3} (1, 0) - 4\lambda \frac{1}{\epsilon^3} \frac{f'(t)}{D^5} (x, y) + 4\lambda \frac{1}{\epsilon^2} \frac{f'(t)}{D^5} (x^2 - y^2, 2xy) \\ = \epsilon^{\frac{3}{2}} h_1(x, y; \epsilon)(x, y) + \sqrt{\epsilon} h_2(x, y; \epsilon)(1, 0) + \\ + \epsilon^2 f'(t) h_3(x, y; \epsilon)(x, y) + \sqrt{\epsilon} h_4(x, y; \epsilon)(x^2 - y^2, 2xy)$$

$$\text{com } h_1(x, y; \epsilon) = \frac{2\lambda f(t)}{\epsilon} \frac{1}{D^3} \frac{1}{\epsilon^{3/2}}, \quad h_2(x, y; \epsilon) = -\frac{2\lambda f(t)}{\sqrt{\epsilon}} \frac{1}{D^3} \frac{1}{\epsilon^2}, \quad h_3(x, y; \epsilon) = -\frac{4\lambda}{\epsilon^3} \frac{1}{D^5} \frac{1}{\epsilon^2} \text{ e} \\ h_4(x, y; \epsilon) = \frac{4\lambda f'(t)}{\epsilon^2} \frac{1}{D^5} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, \text{ que são funções } C^\infty.$$

Vejamos que $h_i(x, y; \epsilon)$ é C_* -limitada, para $i = 1, 2, 3, 4$.

Dado $C \subset \mathbb{R}^2$ compacto, $(0, 0) \notin C$, existem constantes C_1, C_2 , tais que

$$0 < C_1 \leq \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq C_2, \text{ para todo } (x, y) \in C. \quad (2.2.4)$$

Para $\epsilon_0 < \frac{1}{C_2}$, temos $C_2 < \frac{1}{\epsilon_0}$, o que implica que

$$C \subset \{(x, y); x < \frac{1}{\epsilon}, y \in \mathbb{R}\}, \text{ para todo } \epsilon \leq \epsilon_0,$$

e $h_i(x, y; \epsilon)$ está definida em C , para $\epsilon \leq \epsilon_0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Majorando $h_1(x, y; \epsilon)$:

$$|h_1(x, y; \epsilon)| = \left| \frac{2\lambda f(t)}{\epsilon} \frac{1}{D^3 \epsilon^{3/2}} \right| = \frac{2\lambda\sqrt{\epsilon} f(t)}{((1 - \epsilon x)^2 + \epsilon^2 y^2)^{3/2}}$$

Como $\sqrt{(1 - \epsilon x)^2 + \epsilon^2 y^2} = \|(1, 0) - \epsilon(x, y)\| \leq \|(1, 0)\| + \epsilon\|(x, y)\| = 1 + \epsilon\|(x, y)\|$
e $\|(1, 0) - \epsilon(x, y)\| \geq \|(1, 0)\| - \epsilon\|(x, y)\| = 1 - \epsilon\|(x, y)\|$, usando (2.2.4) obtemos

$$1 - \epsilon C_2 \leq \sqrt{(1 - \epsilon x)^2 + \epsilon^2 y^2} \leq 1 + \epsilon C_2 \quad (2.2.5)$$

Logo, usando o lema 2.2.1, parte (iii), (2.2.4) e (2.2.5) temos, para todo ϵ , com $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ e $C_2 \epsilon_0 < 1$,

$$\begin{aligned} |h_1(x, y; \epsilon)| &\leq \frac{2\lambda\sqrt{\epsilon} f(t)}{(1 - \epsilon C_2)^3} \leq \frac{\pi\lambda\sqrt{\epsilon}}{(1 - \epsilon C_2)^3 \sqrt[4]{t}} \\ &= \frac{\pi\lambda\sqrt{\epsilon} [(1 - \epsilon x)^2 + \epsilon^2 y^2]^{1/4}}{(1 - \epsilon C_2)^3 \sqrt{\epsilon} (x^2 + y^2)^{1/4}} \leq \frac{\pi\lambda(1 + \epsilon C_2)^{1/2}}{(1 - \epsilon C_2)^3 C_1^{1/2}} \\ &\leq \frac{\pi\lambda(1 + \epsilon_0 C_2)^{1/2}}{(1 - \epsilon_0 C_2)^3 C_1^{1/2}} = K_1(C, \epsilon_0). \end{aligned}$$

Isto prova que $h_1(x, y; \epsilon)$ é C_* -limitada.

Como $|h_2(x, y; \epsilon)| = |h_1(x, y; \epsilon)|$, segue que $h_2(x, y; \epsilon)$ também é C_* -limitada.

Agora, aplicando (2.2.5), temos

$$|h_3(x, y; \epsilon)| = \frac{4\lambda}{D^5 \epsilon^5} = \frac{4\lambda}{((1 - \epsilon x)^2 + \epsilon^2 y^2)^{5/2}} \leq \frac{4\lambda}{(1 - \epsilon C_2)^5} \leq \frac{4\lambda}{(1 - \epsilon_0 C_2)^5} = K_3(C, \epsilon_0),$$

logo $h_3(x, y; \epsilon)$ é C_* -limitada.

Finalmente, usando o lema 2.2.1, parte (v) e (2.2.5), temos

$$\begin{aligned} |h_4(x, y; \epsilon)| &= \left| \frac{4\lambda f'(t)}{\epsilon^2} \frac{1}{D^5} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right| = \frac{4\lambda}{\epsilon^{5/2}} \frac{|f'(t)|}{\left[\frac{(1-\epsilon x)^2 + \epsilon^2 y^2}{\epsilon^2} \right]^{5/2}} = \frac{4\lambda \epsilon^{5/2} |f'(t)|}{((1-\epsilon x)^2 + \epsilon^2 y^2)^{5/2}} \\ &\leq \frac{\lambda\pi}{(x^2 + y^2)^{5/4}} \frac{1}{((1-\epsilon x)^2 + \epsilon^2 y^2)^{5/4}} \leq \frac{\lambda\pi}{C_1^{5/2}} \frac{1}{(1-\epsilon C_2)^{5/2}} \leq \frac{\lambda\pi}{C_1^{5/2}} \frac{1}{(1-\epsilon_0 C_2)^{5/2}} = K_4(C, \epsilon_0), \end{aligned}$$

portanto $h_4(x, y; \epsilon)$ é C_* -limitada.

Prova de (ii):

Escrevendo $h_3(x, y; \epsilon)$ na forma $h_3(x, y; \epsilon) = -\frac{4\lambda}{((1-\epsilon x)^2 + \epsilon^2 y^2)^{5/2}} = -4\lambda + 4\lambda(1 - \bar{h}(x, y; \epsilon))$, onde $\bar{h}(x, y; \epsilon) = ((1-\epsilon x)^2 + \epsilon^2 y^2)^{-5/2}$ e substituindo na expressão de $E(x, y; \epsilon)$ da parte (i), obtemos, após um rearranjo conveniente dos termos,

$$E(x, y; \epsilon) = -4\lambda \epsilon^2 f'(t)(x, y) + \epsilon^{1/2} U(x, y; \epsilon)$$

onde

$$\begin{aligned} U(x, y; \epsilon) &= \epsilon h_1(x, y; \epsilon)(x, y) + h_2(x, y; \epsilon)(1, 0) + \\ &+ 4\lambda \epsilon^2 f'(t) \epsilon^{-1/2} (1 - \bar{h}(x, y; \epsilon))(x, y) + h_4(x, y; \epsilon)(x^2 - y^2, 2xy). \end{aligned}$$

A parcela $4\lambda \epsilon^2 f'(t) \epsilon^{-1/2} (1 - \bar{h}(x, y; \epsilon))(x, y)$ de U é C_* -limitada, pois pelo lema 2.2.1, parte (v),

$$4\lambda \epsilon^{5/2} |f'(t)| \|(x, y)\| \leq \lambda\pi \frac{((1-x\epsilon)^2 + \epsilon^2 y^2)^{5/4}}{(x^2 + y^2)^{5/4}} C_2 \leq \lambda\pi \frac{(1 + \epsilon_0 C_2)^{5/2}}{C_1^{5/2}} C_2$$

e por cálculo direto também verificamos que $(1 - \bar{h}(x, y; \epsilon))\epsilon^{-1}$ é C_* -limitada. Como já vimos que todas as outras parcelas também são C_* -limitadas, segue-se que U é C_* -limitada.

■

Lema 2.2.5 $\lim_{t \rightarrow 0} t f'(t) = -\frac{1}{2}$

Prova: Temos a seguinte expressão em série de potência da integral elíptica $K(k)$ (ver [Mc], pag. 203)

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} = \left[1 + \frac{k_1^2}{4} + \frac{9}{64}k_1^4 + \dots \right] \ln \frac{4}{k_1} - \left[\frac{k_1^2}{4} + \frac{21}{128}k_1^4 + \dots \right],$$

onde $k_1^2 = 1 - k^2$.

Como $f(t) = K(\sqrt{1-t})$, tomando $k_1^2 = t$, temos

$$f(t) = \left[1 + \frac{t}{4} + \frac{9}{64}t^2 + \dots \right] \ln \frac{4}{\sqrt{t}} - \left[\frac{t}{4} + \frac{21}{128}t^2 + \dots \right], \quad (2.2.6)$$

donde

$$f'(t) = \left[\frac{1}{4} + \frac{18}{64}t + \dots \right] \ln \frac{4}{\sqrt{t}} - \left[\frac{1}{4} + \frac{42}{128}t + \dots \right] + \left[1 + \frac{t}{4} + \frac{9}{64}t^2 + \dots \right] \left(-\frac{1}{2t} \right)$$

e daí se vê que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f'(t)t = -\frac{1}{2},$$

como queríamos provar. ■

Lema 2.2.6 $E(x, y; \epsilon) = h(x, y; \epsilon) \left(\frac{(x,y)}{x^2+y^2} \right) + \sqrt{\epsilon} U(x, y; \epsilon)$ com h satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) Se $(x_n, y_n, \epsilon_n) \rightarrow (x, y, 0) \neq (0, 0, 0)$, com $\epsilon_n \neq 0$, $(x_n, y_n) \notin \mathcal{C}_{\epsilon_n}$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n, y_n; \epsilon_n) = 2\lambda$$

(ii) $h(x, y; \epsilon)$ é C^∞ em $\{(x, y, \epsilon); x < \frac{1}{2\epsilon}, \epsilon > 0\}$

Prova: Pelo lema anterior:

$$\begin{aligned} E(x, y; \epsilon) &= -4\lambda\epsilon^2 f'(t)(x, y) + \sqrt{\epsilon} U(x, y; \epsilon) \\ &= -4\lambda\epsilon^2 f'(t)t [((1/\epsilon) - x)^2 + y^2] \left(\frac{(x,y)}{x^2+y^2} \right) + \sqrt{\epsilon} U(x, y; \epsilon). \end{aligned}$$

Defina $h(x, y; \epsilon) = -4\lambda\epsilon^2 f'(t)t [((1/\epsilon) - x)^2 + y^2]$. Como $t_n = \frac{x_n^2 + y_n^2}{(x_n - \frac{2}{\epsilon_n})^2 + y_n^2} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow +\infty$, temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n f'(t_n) = -\frac{1}{2}$.

Assim, $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n, y_n; \epsilon_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -4\lambda f'(t_n)t_n((1 - \epsilon_n x_n)^2 + (\epsilon_n y_n)^2) = 2\lambda$.

Por definição de h , h é C^∞ . ■

Pelo lema anterior, podemos definir $E(x, y; 0) := 2\lambda \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Assim, $E(x, y; \epsilon)$ está definida em $A = \{(x, y; \epsilon); x^2 + y^2 \neq 0, x\epsilon < \frac{1}{2}\}$, e para cada ϵ fixo, E é analítica.

Podemos, finalmente, provar o principal resultado desta seção:

Lema 2.2.7 E é contínua em A .

Prova: Sabemos que E é contínua em (x, y, ϵ) , com $\epsilon \neq 0$. Seja $\{(x_n, y_n, \epsilon_n)\}$ seqüência em A , com $(x_n, y_n, \epsilon_n) \rightarrow (x, y, 0)$, $(x, y) \neq (0, 0)$, $\epsilon_n \neq 0$.

Logo $C = \{(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, y)\}$ é compacto e $(0, 0) \notin C$. Como U é C_* -limitada, existe n_0 e $K_C > 0$, tal que $|U((x_n, y_n, \epsilon_n))| < K_C$, para $n \geq n_0$.

Logo, (do lema 2.2.6, segue-se que)

$$\begin{aligned} \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} E((x_n, y_n, \epsilon_n) - h(x_n, y_n; \epsilon_n) \frac{(x_n, y_n)}{x_n^2 + y_n^2} \right| &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| E((x_n, y_n, \epsilon_n) - h(x_n, y_n; \epsilon_n) \frac{(x_n, y_n)}{x_n^2 + y_n^2} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\epsilon_n} |U(x_n, y_n, \epsilon_n)| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} K_C \sqrt{\epsilon_n} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \lim_{n \rightarrow +\infty} E((x_n, y_n, \epsilon_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n, y_n; \epsilon_n) \frac{(x_n, y_n)}{x_n^2 + y_n^2} = 2\lambda \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}. \quad \blacksquare$$

Note que $E(x, y; 0) = 2\lambda \nabla \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ e lembre que $2\lambda \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \lambda \ln(x^2 + y^2)$ é o potencial do fio infinito (de densidade constante λ e massa infinita) ortogonal ao plano- (x, y) , com interseção na origem do plano. Assim, o problema do fio circular com raio grande $\frac{\epsilon}{2}$ (o fio circular passando pela origem, com centro em $(\frac{\epsilon}{2}, 0, 0)$) pode ser considerado como uma perturbação do problema do fio infinito.

Capítulo 3

Singularidades

Neste capítulo, fazemos o estudo das singularidades de uma solução do problema do fio circular homogêneo.

Dizemos que uma solução $\mathbf{r}(t)$ do problema do fio circular, definida no intervalo maximal (a, b) , tem singularidade em b (respectivamente, em a), se $b < +\infty$ (respectivamente, se $a > -\infty$).

Nosso objetivo é mostrar que, neste problema, todas as singularidades são devidas à colisão. Para obter este resultado, provamos inicialmente a seguinte proposição que é de natureza geral:

Proposição 3.0.8 *Seja $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Seja $\mathbf{r}(t)$, $t \in (a, b)$, uma solução de $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r})$ tal que existem:*

1) $v_0, v_1 \in \mathbb{R}$, $v_0 < v_1$, com $\text{dist}(V^{-1}(v_0), V^{-1}(v_1)) > 0$,

2) $t_1 < s_1 < t_2 < s_2 \dots$, $t_i, s_i \in (a, b)$, $i \in \mathbb{N}$, satisfazendo

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}(t_i)) &= v_0 \\ V(\mathbf{r}(s_i)) &= v_1. \end{aligned}$$

Então $b = +\infty$.

Prova: Como V é contínua, para cada intervalo $[t_i, s_i]$, podemos escolher, para cada i ,

um intervalo $[t_i^*, s_i^*] \subseteq [t_i, s_i]$ tal que

$$v_0 = V(\mathbf{r}(t_i^*)) \leq V(\mathbf{r}(t)) \leq V(\mathbf{r}(s_i^*)) = v_1, \text{ para todo } t \in [t_i^*, s_i^*]. \quad (3.0.1)$$

Como a energia total $E = E(\mathbf{r}(t)) = V(\mathbf{r}(t)) + \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2$ é constante, temos que $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{2(E - V)}$, com $V = V(\mathbf{r}(t))$ e E constante. Logo, por (3.0.1), temos $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| \leq \sqrt{2(E - v_0)}$, para $t \in [t_i^*, s_i^*]$.

Como o comprimento da curva $\mathbf{r}(t)$ entre $[t_i^*, s_i^*]$ é maior que $d = \text{dist}(V^{-1}(v_0), V^{-1}(v_1)) > 0$, temos

$$d \leq \int_{t_i^*}^{s_i^*} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt \leq \int_{t_i^*}^{s_i^*} \sqrt{2(E - v_0)} dt = (s_i^* - t_i^*) \sqrt{2(E - v_0)} \leq (s_i - t_i) \sqrt{2(E - v_0)}.$$

Assim, $\frac{d}{\sqrt{2(E - v_0)}} \leq (s_i - t_i)$, para todo i .

Como temos uma quantidade enumerável infinita de intervalos (t_i, s_i) disjuntos, com $0 < \frac{d}{\sqrt{2(E - v_0)}} \leq (s_i - t_i)$ para todo i , somando em i concluímos que $b = +\infty$. ■

É intuitivo ver que as singularidades de uma solução devem estar relacionadas com as singularidades do potencial V . De fato, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.0.9 *Seja \mathcal{C} um fio circular em \mathbb{R}^3 com densidade constante λ , e V o potencial Newtoniano induzido pelo fio circular \mathcal{C} . Seja $\mathbf{r}(t)$ uma solução de $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r})$, com intervalo de definição maximal (a, b) . Se $b < +\infty$, então $\lim_{t \rightarrow b^-} \text{dist}(\mathbf{r}(t), \mathcal{C}) = 0$. Também, se $a > -\infty$, então $\lim_{t \rightarrow a^+} \text{dist}(\mathbf{r}(t), \mathcal{C}) = 0$.*

Para provar este teorema usamos os seguintes lemas:

Lema 3.0.10 *$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mathbf{r}_n) = 0$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{r}_n\| = +\infty$.*

Prova: Suponhamos primeiro que $\|\mathbf{r}_n\| \rightarrow +\infty$.

Para todo $u \in \mathcal{C}$, \mathcal{C} fio circular centrado na origem e com raio ρ , temos $\|u\| = \rho$. Assim, para $\|\mathbf{r}\| > \rho$, e $u \in \mathcal{C}$, temos

$$\|\mathbf{r} - u\| \geq \|\mathbf{r}\| - \|u\| = \|\mathbf{r}\| - \rho \geq \|\mathbf{r}\| - \rho,$$

logo

$$0 \leq -V(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\lambda}{\|\mathbf{r} - u\|} du \leq \int_{\mathcal{C}} \frac{\lambda}{\|\mathbf{r}\| - \rho} du = \frac{M}{\|\mathbf{r}\| - \rho},$$

onde $M = \int_{\mathcal{C}} \lambda du$ é a massa do fio circular \mathcal{C} .

Segue-se que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mathbf{r}_n) = 0$.

Suponhamos agora que $V(\mathbf{r}_n) \rightarrow 0$. Como $\|u\| = \rho$, para $u \in \mathcal{C}$, temos $\frac{1}{\|\mathbf{r}-u\|} \geq \frac{1}{\|\mathbf{r}\|+\rho}$ donde,

$$0 \leq \frac{M}{\|\mathbf{r}\| + \rho} = \int_{\mathcal{C}} \frac{\lambda}{\|\mathbf{r}\| + \rho} du \leq \int_{\mathcal{C}} \frac{\lambda}{\|\mathbf{r} - u\|} du = -V(\mathbf{r}).$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{r}_n\| = +\infty$, como queríamos provar. ■

Lema 3.0.11 $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mathbf{r}_n) = -\infty$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(\mathbf{r}_n, \mathcal{C}) = 0$.

Prova: Suponhamos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\mathbf{r}_n) = -\infty$.

Como $0 < \text{dist}(\mathbf{r}_n, \mathcal{C}) \leq \|\mathbf{r}_n - u\|$, para todo $u \in \mathcal{C}$, temos

$$0 < -V(\mathbf{r}_n) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\lambda}{\|\mathbf{r}_n - u\|} du \leq \int_{\mathcal{C}} \frac{\lambda}{\text{dist}(\mathbf{r}_n, \mathcal{C})} du = M \frac{1}{\text{dist}(\mathbf{r}_n, \mathcal{C})}.$$

Segue-se disto que $\text{dist}(\mathbf{r}_n, \mathcal{C}) \rightarrow 0$.

Reciprocamente, suponhamos que $\text{dist}(\mathbf{r}_n, \mathcal{C}) \rightarrow 0$. Como $d(\mathbf{r}_n) = \text{dist}(\mathbf{r}_n, \mathcal{C})$, temos que $D(\mathbf{r}_n) \rightarrow 2\rho$, onde ρ é o raio do fio circular e d e D são como definidas na seção 1.2.1. Segue de (2.2.1) e de (2.2.6) que $V(\mathbf{r}_n) = \frac{1}{D(\mathbf{r}_n)} f\left(\frac{d^2(\mathbf{r}_n)}{D^2(\mathbf{r}_n)}\right) \rightarrow +\infty$. ■

Passemos agora à prova do teorema 3.0.9:

Prova do teorema 3.0.9: Primeiro observemos que $V^{-1}(c)$ é compacto, para todo $c < 0$. De fato, o conjunto $V^{-1}(c)$ é fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}$ por continuidade, e o lema 3.0.11 mostra que ele é fechado em \mathbb{R}^3 . Também, o lema 3.0.10 mostra que $V^{-1}(c)$ é limitado.

Agora, seja $\mathbf{r}(t)$, $t \in (a, b)$, $b < +\infty$, uma solução maximal de $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r})$. Então, $\lim_{t \rightarrow b^-} V(\mathbf{r}(t))$ existe (sendo finito ou infinito), do contrário, pela continuidade de V

poderíamos escolher duas seqüências $(t_n), (s_n)$ tais que $t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < \dots$, $t_i, s_i \in (a, b)$, com $V(\mathbf{r}(t_i)) = v_0, V(\mathbf{r}(s_i)) = v_1, v_0 < v_1$. Como $V^{-1}(v_0)$ e $V^{-1}(v_1)$ são compactos, disjuntos e não vazios, temos que $\text{dist}(V^{-1}(v_0), V^{-1}(v_1)) > 0$. Logo, pela proposição 3.0.8, temos que $b = +\infty$, contradição.

Como $\text{Imagem } V \subset (-\infty, 0)$, segue-se que $\lim_{t \rightarrow b^-} V(\mathbf{r}(t))$ ou é 0, ou é um número $v^* \neq 0$, ou é igual a $-\infty$.

Provaremos que as duas primeiras possibilidades não podem ocorrer, de modo que $\lim_{t \rightarrow b^-} V(\mathbf{r}(t)) = -\infty$, e portanto, pelo lema 3.0.11, teríamos que $\lim_{t \rightarrow b^-} \text{dist}(\mathbf{r}(t), \mathcal{C}) = 0$, o que prova o teorema.

Se $\lim_{t \rightarrow b^-} V(\mathbf{r}(t)) = 0$, então existe t_0 tal que para todo $t > t_0$, $v_0 < V(\mathbf{r}(t)) < 0$, com $v_0 = V(\mathbf{r}(t_0))$. Pelo lema 3.0.10, temos que $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow b^-$. Além disso,

$$E = V(\mathbf{r}(t)) + \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2, \quad t \in (t_0, b), \quad E \text{ constante},$$

logo $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| < \sqrt{2(E - v_0)}$, para todo $t \in (t_0, b)$, ou seja, a velocidade é limitada neste intervalo.

Temos também que

$$\int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt \geq \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)\| \geq \text{dist}(\mathbf{r}(t), V^{-1}(v_0)) =: d_t.$$

Assim, $d_t \leq (t - t_0) \sqrt{2(E - v_0)}$, logo,

$$t_0 + \frac{d_t}{\sqrt{2(E - v_0)}} \leq t, \quad \text{para todo } t \in (t_0, b).$$

Como $V^{-1}(v_0)$ é compacto, existe $r > 0$ tal que $V^{-1}(v_0) \subset B(0, r)$ e como $\|\mathbf{r}(t)\| \rightarrow +\infty$, dado $n > 0$, existe t_n tal que para todo $t, b > t \geq t_n$, $\mathbf{r}(t) \notin B(0, n)$. Isto implica que, $d_t = \text{dist}(\mathbf{r}(t), V^{-1}(v_0)) > n - r$, para todo $b > t \geq t_n$. Em particular, $d_{t_n} \geq n - r$, e para $b > t_n > t_0$, temos $b \geq t_n \geq t_0 + \frac{n-r}{\sqrt{2(E-v_0)}}$.

Assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(t_0 + \frac{n-r}{\sqrt{2(E-v_0)}} \right) = +\infty$, e concluímos que $b = +\infty$, contradição.

Suponhamos, finalmente, que $\lim_{t \rightarrow b^-} V(\mathbf{r}(t)) = v^*$, com $v^* \in (-\infty, 0)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe t_ε tal que para todo $t > t_\varepsilon$, $V(\mathbf{r}(t)) \in (v^* - \varepsilon, v^* + \varepsilon)$. Sejam $v_0 = v^* - \varepsilon$, $v_1 = v^* + \varepsilon$; podemos supor $0 < \varepsilon < |v^*|$, assim $v_1 < 0$. Claramente o conjunto $V^{-1}([v_0, v_1])$ é não-vazio e como V é contínua, ele é fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}$. Além disso, pelo lema 3.0.11, ele é fechado em \mathbb{R}^3 , e pelo lema 3.0.10 ele é limitado, já que $v_1 < 0$.

Assim, $V^{-1}([v_0, v_1])$ é compacto e $\mathbf{r}(t) \in V^{-1}([v_0, v_1])$, para todo $t > t_\varepsilon$.

Por outro lado, da equação da energia, temos $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 = 2(E - V(\mathbf{r}(t)))$, e portanto, para todo $t > t_\varepsilon$, temos $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| \leq \sqrt{2(E - v_0)} = c_2$.

Segue-se que a solução maximal $(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$, $t \in (a, b)$ do sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\nabla V(\mathbf{r}) \end{cases}$$

está contida no compacto $V^{-1}([v_0, v_1]) \times \overline{B(0, c_2)}$, para todo t , $t_\varepsilon < t < b$. Por um teorema da Teoria Fundamental das Equações Diferenciais Ordinárias (ver [S]), resulta que $b = +\infty$, uma contradição.

Analogamente, tomando $t \rightarrow a^+$, $a > -\infty$, o mesmo resultado vale, bastando tomar a solução $r(-t)$ em $(-b, -a)$. Isto conclui a prova do teorema. ■

A pergunta natural que surge é: Se $\lim_{t \rightarrow b^-} \text{dist}(\mathbf{r}(t), \mathcal{C}) = 0$, $b < +\infty$, $\mathbf{r}(t)$ deve aproximar-se a um ponto bem definido sobre \mathcal{C} ?

Em princípio, $\mathbf{r}(t)$ poderia aproximar-se do fio, sem tender a nenhum ponto específico do mesmo. Se $\mathbf{r}(t)$ aproxima-se de um ponto $\mathbf{r}^* \in \mathcal{C}$ quando $t \rightarrow b$ (a partícula tem uma posição limite no tempo b), isto significa que a partícula deve colidir com o fio circular \mathcal{C} , quando $t \rightarrow b = t^*$.

Definição 3.0.12 *Suponhamos que $\mathbf{r}(t)$, solução do problema do fio circular, tem uma singularidade em t^* . Esta singularidade é chamada uma singularidade de colisão, se existe $\mathbf{r}^* \in \mathcal{C}$ tal que $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}^*$, quando $t \rightarrow t^*$. Em caso contrário, a singularidade é chamada singularidade sem colisão.*

Podemos agora provar o resultado principal deste capítulo.

Teorema 3.0.13 *No problema do fio circular homogêneo todas as singularidades são de colisão.*

Prova: Sem perda de generalidade, seja $\mathbf{r}(t)$, $t \in (a, b)$, $b < +\infty$, uma solução maximal do sistema de equações $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r})$. Pelo teorema 3.0.9, temos que $\lim_{t \rightarrow b^-} \text{dist}(\mathbf{r}(t), \mathcal{C}) = 0$. Para provar que $\lim_{t \rightarrow b^-} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}^* \in \mathcal{C}$, escrevemos este sistema em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) em $(\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eixo } z\})$. Obtemos

$$\ddot{r} = \frac{K^2}{r^3} - \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

com $\dot{\theta} = \frac{K}{r(t)^2}$, onde K é constante e $U(r, z) = V(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$.

Como o fio, em coordenadas cilíndricas, é dado por $\mathcal{C} = \{(\rho, \varphi, 0), \varphi \in \mathbb{R}\}$, temos que, mostrar que $\lim_{t \rightarrow b^-} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}^* \in \mathcal{C}$ é equivalente a mostrar que $\lim_{t \rightarrow b^-} r(t) = \rho$, $\lim_{t \rightarrow b^-} z(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow b^-} \theta(t) = \theta_0$, para algum θ_0 . Os dois primeiros limites seguem do fato que $\lim_{t \rightarrow b^-} \text{dist}(\mathbf{r}(t), \mathcal{C}) = 0$. Vamos agora provar que $\lim_{t \rightarrow b^-} \theta(t) = \theta_0$:

Se $K = 0$, $\theta(t)$ é constante, e não temos nada a provar.

Suponhamos então $K > 0$. Logo $\theta(t)$ é crescente e, assim, para provar que o limite de $\theta(t)$ existe, basta provar que $\theta(t)$ é limitada superiormente, para t numa vizinhança de b .

Como $r(t) \rightarrow \rho$, existe t_0 tal que, para $t > t_0$, $r(t) > \frac{\rho}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \int_{t_0}^t \frac{K}{r(s)^2} ds + \theta(t_0) \leq \int_{t_0}^t \frac{4K}{\rho^2} ds + \theta(t_0) \\ &\leq \frac{4K(b - t_0)}{\rho^2} + \theta(t_0) < +\infty \end{aligned}$$

para todo $t \in (t_0, b)$.

Portanto, o limite de $\theta(t)$, quando $t \rightarrow b^-$, existe e a demonstração do teorema está concluída. ■

Capítulo 4

Soluções Periódicas de Perturbações Contínuas com Simetrias

Neste capítulo, provaremos a existência de soluções periódicas de problemas perturbados próximas a soluções circulares de problemas não perturbados. O estudo feito aqui é planar e os problemas não perturbados a que nós nos referimos, são da forma $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|^{\alpha+2}}\mathbf{r}$, $\kappa > 0$, com $0 \leq \alpha \leq 1$. Em particular, se $\alpha = 1$ temos o problema de Kepler. Os resultados deste capítulo são fundamentais para o estudo de existência de soluções periódicas do problema do fio circular homogêneo, apresentado no próximo capítulo.

É interessante notar que tudo o que consideramos para obter os resultados a seguir, são perturbações contínuas, com alguma simetria (ou algumas simetrias). Para resultados relacionados na literatura veja comentários na introdução.

Iniciamos este capítulo, apresentando dois lemas que mostram que para encontrar soluções periódicas de problemas com simetrias, basta construir só um pedaço das soluções com certas propriedades.

Lema 4.0.14 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, com $\varphi\Omega = \Omega$, onde $\varphi(x, y) = (x, -y)$. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, invariante por φ , isto é, $f(\varphi\mathbf{p}) = \varphi f(\mathbf{p})$, $\mathbf{p} \in \Omega$. Se $\mathbf{r} : [0, \tau] \rightarrow \Omega$, $\tau > 0$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, é solução do problema*

$$\ddot{\mathbf{r}} = f(\mathbf{r}) \tag{4.0.1}$$

tal que $\mathbf{r}(0), \mathbf{r}(\tau) \in \{\text{eixo } x\}$ (isto é, $y(0) = y(\tau) = 0$) e $\dot{\mathbf{r}}(0), \dot{\mathbf{r}}(\tau)$ são verticais (isto é, $\dot{x}(0) = \dot{x}(\tau) = 0$), então a extensão $\bar{\mathbf{r}}$ de \mathbf{r} , definida por:

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}(t - 2n\tau), & t \in [2n\tau, (2n + 1)\tau], \quad n \in \mathbb{Z} \\ \varphi\mathbf{r}(2n\tau - t), & t \in [(2n - 1)\tau, 2n\tau], \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

é solução periódica, de período 2τ , do problema (4.0.1). Mais ainda, o traço de $\bar{\mathbf{r}}$ é simétrico em relação ao eixo x .

Prova: Como $\mathbf{r}(t)$, $t \in [0, \tau]$ é solução de (4.0.1), então, desde que o sistema (4.0.1) é autônomo, $\mathbf{r}(t - a)$ e $\mathbf{r}(a + \tau - t)$, $t \in [a, a + \tau]$ também são soluções de (4.0.1), para todo $a \in \mathbb{R}$. Como f é invariante por φ , $\varphi\mathbf{r}(a - t)$, $t \in [a - \tau, a]$ também é solução de (4.0.1). Assim, cada parte na definição de $\bar{\mathbf{r}}$ é solução de (4.0.1).

Um cálculo direto mostra que estas partes, e suas primeiras derivadas coincidem nos extremos dos intervalos de definição. Desta forma, $\bar{\mathbf{r}}$ está bem definida e é solução de (4.0.1). Mais ainda, verifica-se diretamente que $\bar{\mathbf{r}}(0) = \bar{\mathbf{r}}(2\tau)$ e $\dot{\bar{\mathbf{r}}}(0) = \dot{\bar{\mathbf{r}}}(2\tau)$, e que o traço de $\bar{\mathbf{r}}$ é simétrico em relação ao eixo x (veja figura abaixo). ■

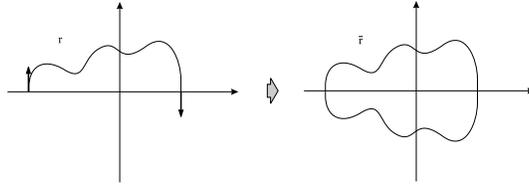


Figura 4.0.1: Solução simétrica em relação ao eixo x

Analogamente temos:

Lema 4.0.15 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, com $\varphi_i\Omega = \Omega$, $i = 1, 2$, onde $\varphi_1(x, y) = (-x, y)$ e $\varphi_2(x, y) = (x, -y)$. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, invariante por φ_1 e φ_2 . Se $\mathbf{r} : [0, \tau] \rightarrow \Omega$, $\tau > 0$, é solução do problema*

$$\ddot{\mathbf{r}} = f(\mathbf{r}) \tag{4.0.2}$$

tal que $\mathbf{r}(0) \in \{\text{eixo } x\}$, $\mathbf{r}(\tau) \in \{\text{eixo } y\}$, $\dot{\mathbf{r}}(0)$ é vertical e $\dot{\mathbf{r}}(\tau)$ é horizontal, então a extensão $\bar{\mathbf{r}}$ de \mathbf{r} , definida por:

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}(t - 4n\tau), & t \in [4n\tau, (4n + 1)\tau] \\ \varphi_1 \mathbf{r}(4(n + 2)\tau - t), & t \in [(4n + 1)\tau, (4n + 2)\tau] \\ \varphi_2 \varphi_1 \mathbf{r}(t - (4n + 2)\tau), & t \in [(4n + 2)\tau, (4n + 3)\tau] \\ \varphi_2 \mathbf{r}(4n\tau - t), & t \in [(4n - 1)\tau, (4n)\tau], \end{cases}$$

com $n \in \mathbb{Z}$, é solução periódica de período 4τ do problema (4.0.2). Mais ainda, o traço de $\bar{\mathbf{r}}$ é simétrico em relação aos eixos x e y .

Prova: Análoga à prova anterior (veja figura abaixo). ■

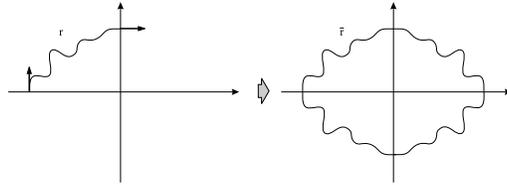


Figura 4.0.2: Solução simétrica em relação aos eixos x e y

Definição 4.0.16 Seja I um intervalo qualquer, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e H^{n-1} uma hipersuperfície de \mathbb{R}^n . Dizemos que α intersecta transversalmente H^{n-1} se $\alpha(\partial I) \cap H^{n-1} = \emptyset$, $\alpha(I) \cap \partial H^{n-1} = \emptyset$, e para todo t tal que $\alpha(t) \in H^{n-1}$ temos $\dot{\alpha}(t) \notin T_{\alpha(t)} H^{n-1}$. Além disso, dizemos que α intersecta transversalmente H^{n-1} em um único ponto, se α intersecta transversalmente H^{n-1} e existe único t tal que $\alpha(t) \in H^{n-1}$.

A seguinte proposição mostra que a propriedade “ α intersecta transversalmente em um único ponto” é aberta na topologia C^1 .

Proposição 4.0.17 Seja E um segmento fechado de uma reta em \mathbb{R}^2 e seja $\alpha : [0, \bar{t}] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\bar{t} > 0$, de classe C^1 , tal que α intersecta transversalmente E em um único ponto.

Então, existe $\epsilon > 0$ tal que, se $\beta : [0, \bar{t}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe C^1 e $\|\alpha - \beta\| < \epsilon$, $\|\dot{\alpha} - \dot{\beta}\| < \epsilon$, então β intersecta E transversalmente em um único ponto.

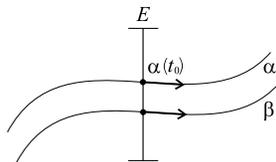


Figura 4.0.3: E fechado, α e β transversais

Prova: Consideremos E contido no eixo y .

Seja $\pi_1(x, y) = x$ e seja $\alpha(t_0)$ o único ponto de intersecção transversal de α com E . A condição $\alpha(t_0) \in E$ equivale a $\pi_1(\alpha(t_0)) = 0$, e a condição $\dot{\alpha}(t_0) \notin E$ equivale a $\pi_1(\dot{\alpha}(t_0)) \neq 0$. Suponhamos $\pi_1(\dot{\alpha}(t_0)) > 0$.

Como $\dot{\alpha}$ é contínua, existe um intervalo $[a, b] \subset (0, \bar{t})$, $t_0 \in (a, b)$, tal que $\pi_1(\dot{\alpha}(t)) > 0$, para todo $t \in [a, b]$. Também podemos supor que $\text{diam}(\alpha[a, b]) < \frac{1}{3} \text{dist}(\alpha(t_0), \partial E) = \gamma$. Assim, a função $\pi_1\alpha(t)$ é crescente em $[a, b]$, logo $\pi_1\alpha(a) < 0$ e $\pi_1\alpha(b) > 0$, pois $\pi_1\alpha(t_0) = 0$.

Sejam $\varepsilon_1 = \min\{\text{dist}(\alpha(t), E); t \in [0, \bar{t}] \setminus (a, b)\}$, $\varepsilon_2 = \min\{\pi_1\dot{\alpha}(t); t \in [a, b]\}$ e considere $\epsilon = \frac{1}{2} \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma\}$. (Note que $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ e γ são positivos.)

Seja $\beta : [0, \bar{t}] \rightarrow \mathbb{R}^2$, de classe C^1 , tal que $\|\alpha - \beta\| < \epsilon$, $\|\dot{\alpha} - \dot{\beta}\| < \epsilon$. Temos as seguintes afirmações:

Afirmação 1: $\beta(t) \notin E$, $t \in [0, \bar{t}] \setminus (a, b)$.

De fato, para todo $x \in E$, temos $\text{dist}(x, \beta) \geq \text{dist}(x, \alpha) - \text{dist}(\alpha, \beta) \geq \text{dist}(E, \alpha) - \text{dist}(\alpha, \beta)$, e como $t \in [0, \bar{t}] \setminus (a, b)$, obtemos $\text{dist}(x, \beta) \geq \varepsilon_1 - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\varepsilon_1}{2}$. Como isto vale para todo $x \in E$, temos $\text{dist}(E, \beta) \geq \frac{\varepsilon_1}{2} > 0$.

Afirmação 2: Existe um único $t_1 \in (a, b)$ tal que $\beta(t_1) \in E$. Além disso, $\beta(t_1)$ é um ponto interior de E e $\dot{\beta}(t_1) \notin E$.

Com efeito, primeiro verificamos que $\pi_1\beta(t)$ é crescente em $[a, b]$ e que $\pi_1\beta(a) < 0$ e $\pi_1\beta(b) > 0$. De fato, como $|\dot{\alpha}(t) - \dot{\beta}(t)| < \frac{\varepsilon_2}{2}$, temos que $|\pi_1\dot{\alpha}(t) - \pi_1\dot{\beta}(t)| < \frac{\varepsilon_2}{2}$, logo

$$\pi_1\dot{\beta}(t) > \pi_1\dot{\alpha}(t) - \frac{\varepsilon_2}{2} > 0, \quad \text{para } t \in [a, b].$$

Também $|\beta(t) - \alpha(t)| < \frac{\varepsilon_1}{2}$, logo $|\pi_1\beta(t) - \pi_1\alpha(t)| < \frac{\varepsilon_1}{2}$, donde, para $t = a$, temos

$$\pi_1\beta(a) < \pi_1\alpha(a) + \frac{\varepsilon_1}{2} < \pi_1\alpha(a) + \frac{|\pi_1\alpha(a)|}{2} < 0.$$

De modo análogo, verificamos que $\pi_1\beta(b) > 0$.

Temos então que existe um único $t_1 \in (a, b)$, com $\pi_1\beta(t_1) = 0$, ou seja, $\beta(t_1) \in \{eixo y\}$, não necessariamente em E . Por outro lado,

$$|\beta(t_1) - \alpha(t_0)| \leq |\beta(t_1) - \alpha(t_1)| + |\alpha(t_1) - \alpha(t_0)| \leq \epsilon + \gamma \leq 2\gamma = \frac{2}{3}dist(\alpha(t_0), \partial E).$$

Isto é, existe um único $t_1 \in (a, b)$ com $\beta(t_1) \in \overset{\circ}{E}$. Além disto, como $\pi_1\dot{\beta}(t_1) \neq 0$, temos que $\dot{\beta}(t_1) \notin E$, concluindo assim a prova da afirmação 2.

Das afirmações 1 e 2, concluímos que existe um único $t_1 \in [0, \bar{t}]$ com $\beta(t_1) \in E$. Além disso, $\beta(t_1) \in \overset{\circ}{E}$, $\dot{\beta}(t_1) \notin E$ e $t_1 \in (0, \bar{t})$, provando assim a proposição. ■

Observações:

1) A condição de E ser fechado é fundamental (veja figura 4.0.4, onde α intersecta transversalmente E em um único ponto e β está perto de α , mas β intersecta E em dois pontos).

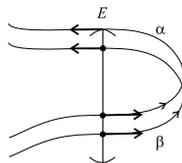


Figura 4.0.4: E aberto

2) A teoria de transversalidade nos garante a transversalidade das curvas, mas não garante unicidade, e esta é a importância da proposição, que garante a unicidade da intersecção.

Para provar os principais resultados deste capítulo, precisamos também da proposição 4.0.18 a seguir. Antes, introduziremos a seguinte notação:

Seja $U \times U_{\mu_0} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ aberto, onde $\mu_0 \in U_{\mu_0}$, e seja $g : U \times U_{\mu_0} \rightarrow \mathbb{R}^2$ contínua e de classe C^1 em $\mathbf{r} \in U$, para cada μ fixo.

Para cada $\mu \in U_{\mu_0}$, considere a equação diferencial ordinária

$$\ddot{\mathbf{r}} = g(\mathbf{r}, \mu) \quad (4.0.3)$$

Denotamos por $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu)$ uma solução de (4.0.3), com condições iniciais $\mathbf{r}(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu) = \mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{r}}(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu) = \mathbf{v}$. Sejam $\mathbf{x}_0 \in U$, $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^2$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ fixos. Escrevemos $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, \mu_0)$.

Nesta situação temos a seguinte proposição:

Proposição 4.0.18 *Seja $[0, \bar{t}]$, $\bar{t} > 0$, um intervalo de tempo no qual $\mathbf{r}_0(t)$ intersecta transversalmente um segmento fechado E de \mathbb{R}^2 , em um único ponto.*

Então, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, \mu_0, \bar{t})$) tal que para $\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu$ satisfazendo $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\| < \delta$, $|\mu - \mu_0| < \delta$, a solução $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu)$ do problema perturbado (4.0.3) está definida em $[0, \bar{t}]$ e, restrita ao intervalo $[0, \bar{t}]$, intersecta transversalmente o segmento E , em um único ponto. Além disso, a função $0 < t(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu) < \bar{t}$, definida por $\mathbf{r}(t(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu), \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu) \in E$, é contínua.

Prova: Tomando $\alpha = \mathbf{r}_0$ na proposição 4.0.17, seja $\epsilon > 0$ obtida desta proposição.

Da teoria das equações diferenciais ordinárias, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, \mu_0, \bar{t})$) tal que, se $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu)$ satisfaz:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta, \quad \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\| < \delta, \quad |\mu - \mu_0| < \delta, \quad (4.0.4)$$

então, a solução $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu)$ do problema (4.0.3) está definida em $I := [0, \bar{t}]$ e satisfaz: (ver [S], pag. 34)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| &= \sup_{t \in I} \|\mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu) - \mathbf{r}_0(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, \mu_0)\| < \epsilon, \\ \|\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_0\| &= \sup_{t \in I} \|\dot{\mathbf{r}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu) - \dot{\mathbf{r}}_0(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, \mu_0)\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Pela proposição 4.0.17, temos que $\mathbf{r}([0, \bar{t}])$ intersecta E transversalmente em um único ponto e também, por esta mesma proposição, temos que a função $t(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu)$ está bem

definida para $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu)$ satisfazendo (4.0.4). Escrevemos $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu) = \mathbf{u}$. Desde que t é limitada, para provar sua continuidade, é suficiente mostrar que, se $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}$ e $t(\mathbf{u}_n) \rightarrow b$, então $b = t(\mathbf{u})$.

De fato, por definição de t , temos que $\mathbf{r}(t(\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_n) \in E$. Pela continuidade de \mathbf{r} segue que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{r}(t(\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_n) = \mathbf{r}(b, \mathbf{u})$, logo $\mathbf{r}(b, \mathbf{u}) \in E$ pois E é fechado em \mathbb{R}^2 . Mas $\mathbf{r}(t(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \in E$ e, pela proposição 4.0.17, $t(\mathbf{u})$ é único. Isto implica que $b = t(\mathbf{u})$, concluindo assim a prova desta proposição. ■

4.1 Perturbações do problema de Kepler

Nesta seção, provamos a existência de soluções periódicas de problemas perturbados com simetrias, próximas a uma solução circular do problema de Kepler (o problema não perturbado).

Como antes, $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu)$ denota uma solução do problema $\ddot{\mathbf{r}} = g(\mathbf{r}, \mu)$, com condições iniciais $\mathbf{r}(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu) = \mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{r}}(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu) = \mathbf{v}$.

Considere o problema de Kepler no plano— (x, z) dado por $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$, $\kappa > 0$.

Teorema 4.1.1 *Sejam C um círculo com centro na origem $(0, 0)$ de \mathbb{R}^2 e raio arbitrário, $\mathbf{x}_0 \in C \cap \{\text{eixo } x\}$ e U uma vizinhança aberta do círculo da forma $C \subset U \subset (\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$.*

Sejam $a > 0$ e $g : U \times (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ contínua, tal que

(i) $g(\mathbf{r}, 0) = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$

(ii) $g(\mathbf{r}, \mu)$ é C^1 na variável $\mathbf{r} \in U$, para cada μ .

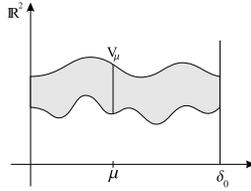
(iii) para todo μ fixo, g é invariante (como campo de vetores) pelas reflexões

$$\varphi_1(x, z) = (-x, z), \quad \varphi_2(x, z) = (x, -z)$$

Então, existe δ_0 , $0 < \delta_0 < a$, com a seguinte propriedade. Para cada $\mu \in (-\delta_0, \delta_0)$, existe uma velocidade \mathbf{v}_μ , tal que a solução $\mathbf{r}_{\mathbf{v}_\mu, \mu}(t) := \mathbf{r}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_\mu, \mu)$ do problema $\ddot{\mathbf{r}} = g(\mathbf{r}, \mu)$, é periódica. Mais ainda, podemos escolher $\delta_0 > 0$ tal que estas soluções tenham como traço uma curva fechada simples, simétrica em relação aos eixos x e z , que enlaça a origem.

Observações 4.1.2:

- 1) Uma curva fechada simples S , no plano \mathbb{R}^2 , enlaça um ponto $p \notin S$, se p pertence à componente conexa limitada de $\mathbb{R}^2 \setminus S$.
- 2) δ_0 do teorema 4.1.1 depende somente de g , U e do raio de C .
- 3) Seja \mathbf{v}_0 tal que $\mathbf{r}_{\mathbf{v}_0,0}$ é solução circular, cujo traço é C . Dado $\eta > 0$, da prova do teorema verifica-se que as velocidades \mathbf{v}_μ do enunciado podem ser tomadas tais que $\|\mathbf{v}_\mu - \mathbf{v}_0\| < \eta$.
- 4) Da prova do teorema (ou do fato que as soluções $\mathbf{r}_{\mathbf{v}_\mu,\mu}$ são simétricas) segue que \mathbf{v}_μ é vertical, isto é, $\mathbf{v}_\mu = (0, v_\mu)$ ou, equivalentemente, ortogonal ao eixo x .
- 5) Em geral, não podemos garantir que $\mu \mapsto \mathbf{v}_\mu$ seja contínua, mas, é possível provar uma propriedade da aplicação $\mu \mapsto \mathbf{v}_\mu$, um tanto mais fraca que continuidade, dada por: existe uma correspondência $\mu \mapsto \mathcal{V}_\mu \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{V}_\mu \neq \emptyset$, tal que $\mathbf{r}_{\mathbf{v},\mu}$ é periódica, para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_\mu$. Mais ainda, o conjunto $\mathcal{V} = \cup_{\mu \in [0, \delta_0]} \mathcal{V}_\mu = \{(\mathbf{v}, \mu); \mathbf{v} \in \mathcal{V}_\mu\}$ é conexo e compacto. Veja figura.



No caso especial em que $\mu \mapsto \mathbf{v}_\mu$ é contínua, podemos tomar $\mathcal{V}_\mu = \{\mathbf{v}_\mu\}$, e o conjunto \mathcal{V} seria o gráfico de $\mu \mapsto \mathbf{v}_\mu$, $\mu \in [0, \delta_0]$, que é certamente conexo e compacto.

Fazemos então a seguinte adição ao enunciado do teorema acima:

Addendum (ao teorema 4.1.1) *Seja a velocidade \mathbf{v}_0 tal que $\mathbf{r}_{\mathbf{v}_0,0}$ é a solução circular do problema de Kepler $\ddot{\mathbf{r}} = g(\mathbf{r}, 0) = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$, $\kappa > 0$, cujo traço é C .*

Então, podemos escolher $\delta_0 > 0$ no teorema 4.1.1, tal que existe conjunto conexo, compacto $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

- 1) $\mathcal{V}_\mu := \mathcal{V} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{\mu\}) \neq \emptyset$, para todo $\mu \in [0, \delta_0]$.
- 2) $\mathbf{r}_{\mathbf{v},\mu}$ é periódica, para $(\mathbf{v}, \mu) \in \mathcal{V}$.

Mais ainda, o traço de $\mathbf{r}_{\mathbf{v},\mu}$ é uma curva fechada simples, simétrica em relação aos eixos x e z , que enlaça a origem.

Prova do Teorema 4.1.1: Primeiro, lembre que todo círculo com centro na origem é o traço de uma única solução periódica do problema de Kepler. Esta solução tem velocidade angular w constante, com $w = \sqrt{\kappa a^{-3/2}}$, onde κ é a constante de Kepler e a é o raio da solução circular.

Seja $\mathbf{r}_0(t)$ a solução circular do problema de Kepler no plano (x, z) , que tem como traço o círculo C . Suponha, sem perda de generalidade, que $\mathbf{r}_0(0) = \mathbf{x}_0$ e que $\dot{\mathbf{r}}_0(0) = \mathbf{v}_0$ tem o mesmo sentido do eixo z , isto é, $\mathbf{v}_0 = (0, v_0)$, $v_0 > 0$.

Escolha $\bar{t} > 0$ tal que $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, 0)$, restrito ao intervalo $[0, \bar{t}]$, intersecta (transversalmente) o eixo z em um único ponto (veja figura abaixo).

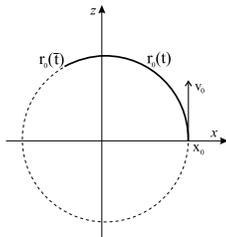


Figura 4.1.5: $\mathbf{r}_0(t)$, $t \in [0, \bar{t}]$, intersecta transversalmente o eixo z em um único ponto

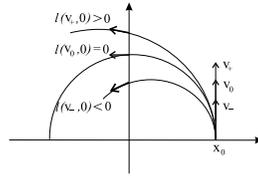
Considere δ , $0 < \delta < 1$, δ suficientemente pequeno (como na proposição 4.0.18, com \bar{t} como acima e $E = \text{eixo } z$), e defina $V_\delta := \{ \sigma \mathbf{v}_0; \sigma \in (1 - \delta, 1 + \delta) \} \subset \mathbb{R}^2$. Definimos $l : V_\delta \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $l(\mathbf{v}, \mu) = \dot{z}(t(\mathbf{v}, \mu), \mathbf{x}_0, \mathbf{v}, \mu)$, onde $\dot{z}(t(\mathbf{v}, \mu), \mathbf{x}_0, \mathbf{v}, \mu)$ é a segunda coordenada do vetor velocidade $\dot{\mathbf{r}}(t(\mathbf{v}, \mu), \mathbf{x}_0, \mathbf{v}, \mu) = (\dot{\mathbf{x}}(t(\mathbf{v}, \mu), \mathbf{x}_0, \mathbf{v}, \mu), \dot{z}(t(\mathbf{v}, \mu), \mathbf{x}_0, \mathbf{v}, \mu))$ e $t(\mathbf{v}, \mu)$ é o tempo em que a solução intersecta o eixo z . Aqui $t(\mathbf{v}, \mu) := t(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}, \mu)$ como na proposição 4.0.18 (foi para isto que escolhemos \bar{t} e quisemos δ suficientemente pequeno). Note que, como $\delta < 1$, $\mathbf{v} \in V_\delta$ tem o mesmo sentido de \mathbf{v}_0 .

Observe que $l(\mathbf{v}, \mu) = 0$ se, e somente se, $\mathbf{r}_{\mathbf{v},\mu}$, restrita a $[0, \bar{t}]$, intersecta o eixo z ortogonalmente (e em um único ponto).

Afirmção 4.1.2 Seja $\eta > 0$. Então existe δ_0 , $0 < \delta_0 < \delta$, e $\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_- \in V_\delta$ tais que,

$\|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_-\| < \eta$, $\|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_+\| < \eta$, $\|\mathbf{v}_-\| < \|\mathbf{v}_0\| < \|\mathbf{v}_+\|$, e para todo $\mu \in (-\delta_0, \delta_0)$, temos $l(\mathbf{v}_+, \mu) > 0$ e $l(\mathbf{v}_-, \mu) < 0$.

Prova da afirmação: Para $\mu = 0$ recaímos no problema de Kepler. Logo existem \mathbf{v}_+ e \mathbf{v}_- pertencentes a V_δ , tais que $\|\mathbf{v}_-\| < \|\mathbf{v}_0\| < \|\mathbf{v}_+\|$ e $\|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_-\| < \eta$, $\|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_+\| < \eta$, com $l(\mathbf{v}_+, 0) > 0$ e $l(\mathbf{v}_-, 0) < 0$, (veja figura abaixo).



Como l é contínua, para $\epsilon = \frac{1}{2} \min\{l(\mathbf{v}_+, 0), |l(\mathbf{v}_-, 0)|\} > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que $0 < \delta_0 < \delta$ e $|l(\mathbf{v}_-, 0) - l(\mathbf{v}_-, \mu)| < \epsilon$, $|l(\mathbf{v}_+, 0) - l(\mathbf{v}_+, \mu)| < \epsilon$, para $\mu \in (-\delta_0, \delta_0)$. Segue que $l(\mathbf{v}_+, \mu) > 0$, $l(\mathbf{v}_-, \mu) < 0$, para $\mu \in (-\delta_0, \delta_0)$. Isto prova a afirmação.

Pela afirmação acima (escolher qualquer η positivo) e pelo teorema do Valor Intermediário, existe $\delta_0 > 0$ tal que, para cada μ , $\mu \in (-\delta_0, \delta_0)$, existe $\mathbf{v}_\mu \in V_\delta$ satisfazendo $l(\mathbf{v}_\mu, \mu) = 0$. Portanto, para cada μ , a solução do problema perturbado $\mathbf{r}_\mu(t) := \mathbf{r}_{\mathbf{v}_\mu, \mu}(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_\mu, \mu)$, intersecta ortogonalmente o eixo z no instante $t = t(\mathbf{v}_\mu, \mu)$.

Finalmente, o lema 4.0.15 implica que $\mathbf{r}_\mu(t)$ pode ser estendida a uma solução periódica, com período $4t(\mathbf{v}_\mu, \mu)$, cujo traço é simétrico em relação aos eixos x e z .

Para mostrar que podemos escolher δ_0 , tal que o traço de $\mathbf{r}_\mu(t)$, $\mu \in (-\delta_0, \delta_0)$, é uma curva fechada simples, seja $\tilde{\mathbf{r}}_\mu(t)$ a aplicação $\mathbf{r}_\mu(t)$ considerada como uma aplicação com domínio $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; \|z\| = 1\}$ (isto é, $\tilde{\mathbf{r}}_\mu(e^{i\theta}) = \mathbf{r}_\mu(\frac{\tau_\mu}{2\pi}\theta)$, $\tau_\mu = 4t(\mathbf{v}_\mu, \mu)$). Note que $\tilde{\mathbf{r}}_\mu$ e \mathbf{r}_μ têm o mesmo traço.

Da dependência contínua das soluções em relação às condições iniciais, e do fato de que $t(\mathbf{v}, \mu)$ é contínua, verifica-se facilmente que, escolhendo δ_0 suficientemente pequeno e η da afirmação anterior, também suficientemente pequeno, temos que $\tilde{\mathbf{r}}_\mu$, $\mu \in (-\delta_0, \delta_0)$, está perto de $\tilde{\mathbf{r}}_0$ na topologia C^1 do espaço de aplicações C^1 , de S^1 em \mathbb{R}^2 .

Como $\tilde{\mathbf{r}}_0$ é um mergulho e o espaço dos mergulhos é aberto na topologia C^1 , obtemos

que podemos escolher δ_0 suficientemente pequeno (e η suficientemente pequeno), tal que $\tilde{\mathbf{r}}_\mu$, $\mu \in (-\delta_0, \delta_0)$, é também um mergulho, o que implica que o traço de $\tilde{\mathbf{r}}_\mu$ é homeomorfo a S^1 , isto é, é uma curva fechada simples em \mathbb{R}^2 .

Para mostrar que podemos escolher δ_0 suficientemente pequeno, tal que o traço de $\mathbf{r}_\mu(t)$, $\mu \in (-\delta_0, \delta_0)$, enlaça a origem, lembre primeiro que o traço de \mathbf{r}_0 enlaça a origem. Isto significa que $(0, 0)$ está na componente limitada de $\mathbb{R}^2 - (\text{traço } \mathbf{r}_0) = \mathbb{R}^2 - C$. Equivalentemente, $\tilde{\mathbf{r}}_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ não é homotopicamente trivial. Escolhendo δ_0 suficientemente pequeno (e η na afirmação, suficientemente pequeno), temos que $\tilde{\mathbf{r}}_\mu$, $\mu \in (-\delta_0, \delta_0)$, está perto de $\tilde{\mathbf{r}}_0$. Portanto $\tilde{\mathbf{r}}_\mu : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ é homotópica a $\tilde{\mathbf{r}}_0$ em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Logo $\tilde{\mathbf{r}}_\mu$ também não é homotopicamente trivial. Segue que o traço de \mathbf{r}_μ enlaça a origem, $\mu \in (-\delta_0, \delta_0)$. ■

Para a prova do addendum usaremos o seguinte lema, cuja prova apresentamos no apêndice B .

Lema 4.1.3 *Sejam $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$ intervalos fechados e $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que*

$$\begin{cases} f(x, c) < 0, & x \in [a, b] \\ f(x, d) > 0, & x \in [a, b]. \end{cases}$$

Então, existe $\mathcal{W} \subset f^{-1}(0)$ compacto, conexo, tal que $\mathcal{W}_x := \mathcal{W} \cap (\{x\} \times [c, d]) \neq \emptyset$, para todo $x \in [a, b]$.

Prova do Addendum: Continuamos usando a notação da prova do teorema.

Lembre que as soluções $\mathbf{r}_\mu(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_\mu, \mu)$ são tais que $l(\mathbf{v}_\mu, \mu) = 0$. Mais ainda, se $l(\mathbf{v}, \mu) = 0$, então (\mathbf{v}, μ) determina uma solução periódica $\mathbf{r}_{\mathbf{v}, \mu}$ de $\ddot{\mathbf{r}} = g(\mathbf{r}, \mu)$.

Lembre também que para $l : V_\delta \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, pela afirmação anterior, existem \mathbf{v}_+ , \mathbf{v}_- , $\delta_0 > 0$, tais que $l(\mathbf{v}_+, \mu) > 0$, $l(\mathbf{v}_-, \mu) < 0$, para $\mu \in (-\delta_0, \delta_0)$.

Como $\mathbf{v}_+ \in V_\delta$, podemos escrever $\mathbf{v}_+ = (1 + \epsilon_+) \mathbf{v}_0$, $\epsilon_+ > 0$ (pois $\|\mathbf{v}_0\| < \|\mathbf{v}_+\|$ e \mathbf{v}_+ e \mathbf{v}_0 têm o mesmo sentido). Analogamente, $\mathbf{v}_- = (1 + \epsilon_-) \mathbf{v}_0$, $\epsilon_- < 0$ (pois $\|\mathbf{v}_-\| < \|\mathbf{v}_0\|$ e \mathbf{v}_- e \mathbf{v}_0 têm o mesmo sentido).

Seja $f : [\epsilon_-, \epsilon_+] \times [0, \delta_0/2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(s, \mu) = l((1+s)\mathbf{v}_0, \mu)$. Como $f(\epsilon_+, \mu) > 0$, $f(\epsilon_-, \mu) < 0$, $\mu \in [0, \delta_0/2]$, o lema acima garante que existe um conjunto conexo, compacto $\mathcal{W} \subset f^{-1}(0)$, tal que

$$\mathcal{W}_\mu := \mathcal{W} \cap ([\epsilon_-, \epsilon_+] \times \{\mu\}) \neq \emptyset,$$

para $\mu \in [0, \delta_0/2]$. Portanto, para $(\mathbf{v}, \mu) \in \mathcal{V} := \left\{ \left((1+s)\mathbf{v}_0, \mu \right); (s, \mu) \in \mathcal{W} \right\}$, temos que $l(\mathbf{v}, \mu) = 0$ e \mathcal{V} satisfaz as condições do addendum ao teorema. ■

Observação 4.1.4 Para a prova da existência de soluções periódicas em forma da figura do oito, apresentada no capítulo 5, precisamos também que as soluções $\mathbf{r}_{\mathbf{v}_\mu, \mu}$ dadas no teorema 4.1.1 acima, satisfaçam também a seguinte propriedade: $\mathbf{r}_{\mathbf{v}_\mu, \mu}$ intersecta o eixo x em exatamente dois pontos, segue que estes pontos são \mathbf{x}_0 e $-\mathbf{x}_0$. Para verificar que as soluções $\mathbf{r}_{\mathbf{v}_\mu, \mu}$ satisfazem esta propriedade, basta aplicar a proposição 4.0.17 às soluções $\tilde{\mathbf{r}}_\mu(e^{i\theta}) = \mathbf{r}_\mu\left(\frac{\tau\mu}{2\pi}\theta\right)$ duas vezes (veja final da prova do teorema 4.1.1): uma vez para $\{e^{i\theta}; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ e outra vez para $\{e^{i\theta}; \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\}$.

4.2 Outras perturbações

Nesta seção, dada uma solução circular do problema não perturbado no plano- (x, z) , $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|^{\alpha+2}}\mathbf{r}$, com $0 \leq \alpha < 1$ e $\kappa > 0$, provamos a existência de soluções periódicas de problemas perturbados simétricos em relação ao eixo x .

Antes de enunciar e provar o resultado principal desta seção, vamos lembrar alguns fatos gerais sobre o problema de Força Central, (ver [G], pags. 70-81, [L], pags. 30-35, [Arn], pags. 33-41).

Seja $U : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $U \in C^\infty$. Consideremos o problema planar

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r}), \tag{4.2.5}$$

onde $\mathbf{r} = (x, z)$ e $U(\mathbf{r}) = U(r)$, $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + z^2}$. Usando coordenadas polares (r, φ) , o

Hamiltoniano e o momento angular escrevem-se na forma:

$$\begin{cases} H(r, \dot{r}) &= \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{K^2}{2r^2} + U(r) \\ K &= r^2\dot{\varphi} \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Seja $r(t)$ uma solução deste problema.

Observações 4.2.0

1) As seguintes afirmações são equivalentes: $\begin{cases} i) \dot{r}(t_0) = 0 \\ ii) \mathbf{r}(t_0) \perp \dot{\mathbf{r}}(t_0) \end{cases}$

2) Suponhamos que existem $t_1 < t_2$ tais que, $\dot{r}(t_1) = \dot{r}(t_2) = 0$ e $r(t_1) \neq r(t_2)$, tal que $\dot{r}(t) \neq 0$, $t \in (t_1, t_2)$. Então temos duas possibilidades:

a) $\dot{r}(t) > 0$, para todo $t \in (t_1, t_2)$, segue que $\begin{cases} r(t_1) = r_{min} \\ r(t_2) = r_{max} \end{cases}$

b) $\dot{r}(t) < 0$, para todo $t \in (t_1, t_2)$, segue que $\begin{cases} r(t_1) = r_{max} \\ r(t_2) = r_{min} \end{cases}$

Certamente, se $\dot{r}(t) \equiv 0$, para todo t , então $r_{max} = r_{min} = r(t)$, para todo t , e a solução $\mathbf{r}(t)$ é circular.

Os pontos onde $r = r_{min}$ são chamados **pericentros**, e os pontos onde $r = r_{max}$ são chamados **apocentros**.

Assim, se a órbita $\mathbf{r}(t)$ não é circular e possui ao menos um pericentro e um apocentro, a órbita descreve uma curva que vai de um apocentro a um pericentro sucessivamente (ou vice-versa), (veja figura abaixo). Além disso, $\mathbf{r}(t)$ está definida para todo t e o movimento ocorre no interior de um anel definido pelas circunferências de raios r_{min} e r_{max} . Conseqüentemente, se conhecemos $r(t)$, entre um pericentro e um apocentro (ou vice-versa), conhecemos toda a função $r(t)$. A prova destes fatos usa a simetria do problema e é similar à prova dos lemas 4.0.14 e 4.0.15 (ver [Arn], [G]).

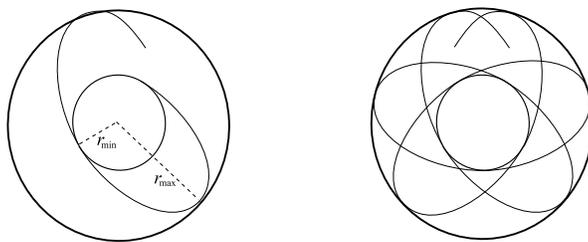


Figura 4.2.6: Órbita de $\mathbf{r}(t)$

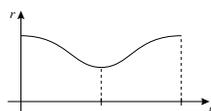


Figura 4.2.7: Função periódica r

Note que, se $\mathbf{r}(t)$ possui apocentro e pericentro, então $|\dot{\varphi}(t)| = \frac{|K|}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|} \geq \frac{|K|}{r_{max}} > 0$. Assim, como $\mathbf{r}(t)$ está definido para todo t , $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi(t)| = +\infty$, isto é, $\mathbf{r}(t)$ “dá infinitas voltas” ao redor da origem.

3) O ângulo entre um pericentro e um apocentro sucessivos é dado por

$$\Phi = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{K/r^2 dr}{\sqrt{2(E - U_{ff}(r))}},$$

onde $U_{ff} = \frac{K^2}{2r^2} + U(r)$ é o potencial efetivo e K o momento angular.

Pela simetria do potencial, podemos observar que Φ não depende de quais r_{max}, r_{min} sucessivos tomamos (veja figura 4.2.6).

Seja $\{\mathbf{r}_n(t)\}$ uma sucessão de soluções que se aproximam a uma solução circular $\mathbf{r}_0(t)$, de raio r_0 . Suponha que $\mathbf{r}_n(t)$ possui apocentro e pericentro. Então $\Phi_n \rightarrow \pi \sqrt{\frac{U'(r_0)}{3U'(r_0) + r_0 U''(r_0)}}$, onde Φ_n é o ângulo entre um pericentro e apocentro sucessivos de \mathbf{r}_n , (ver [Arn]). Aqui, $\{\mathbf{r}_n(t)\}$ aproxima $\mathbf{r}_0(t)$, significa que $(\mathbf{r}_n(0), \dot{\mathbf{r}}_n(0)) \rightarrow (\mathbf{r}_0(0), \dot{\mathbf{r}}_0(0))$.

4) Se consideramos (4.2.5) da forma

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|^{\alpha+2}} \mathbf{r}, \quad \text{onde } \mathbf{r} = (x, z), \quad \kappa > 0, \quad \text{com } 0 \leq \alpha < 1,$$

o potencial U do problema é dado por:

$$U(r) = \begin{cases} -\frac{\gamma}{r^\alpha}, & \text{com } \alpha\gamma = \kappa, & 0 < \alpha < 1, \\ \kappa \ln r, & & \alpha = 0. \end{cases} \quad (4.2.7)$$

Observe que se $\mathbf{r}_0(t)$ é uma solução circular de um problema central atrativo, com potencial U , temos que, para $\mathbf{r}_0(0) = \mathbf{x}_0$ e $\dot{\mathbf{r}}_0(0) = \mathbf{v}_0$,

$$\|\mathbf{v}_0\| = \sqrt{pU'(p)}, \quad \text{com } p = \|\mathbf{x}_0\|.$$

Para U como em (4.2.7), se $0 < \alpha < 1$, $\|\mathbf{v}_0\| = \frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{\sqrt{p^\alpha}}$ e se $\alpha = 0$, $\|\mathbf{v}_0\| = \sqrt{\kappa}$. Observe que, neste último caso, $\|\mathbf{v}_0\|$ é independente de \mathbf{x}_0 .

Apresentamos a seguir o principal resultado desta seção.

Teorema 4.2.1 *Sejam C um círculo com centro na origem $(0,0)$ de \mathbb{R}^2 e raio arbitrário, $\mathbf{x}_0 \in C \cap \{\text{eixo } x\}$ e U uma vizinhança aberta do círculo da forma $C \subset U \subset (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$.*

Sejam $a > 0$ e $g : U \times (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ contínua, tal que

(i) $g(\mathbf{r}, 0) = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|^{\alpha+2}}\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} = (x, z)$, $\kappa > 0$, e $0 \leq \alpha < 1$

(ii) $g(\mathbf{r}, \mu)$ é C^1 na variável \mathbf{r} , para cada μ .

(iii) para todo μ fixo, g é invariante (como campo de vetores) pela reflexão

$$\varphi(x, z) = (x, -z)$$

Então, existe δ_0 , $0 < \delta_0 < a$, com a seguinte propriedade. Para cada $\mu \in (-\delta_0, \delta_0)$, existe uma velocidade \mathbf{v}_μ , tal que a solução $\mathbf{r}_{\mathbf{v}_\mu, \mu}(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_\mu, \mu)$ do problema $\ddot{\mathbf{r}} = g(\mathbf{r}, \mu)$, é periódica. Mais ainda, podemos escolher $\delta_0 > 0$ tal que estas soluções tenham como traço uma curva fechada simples, simétrica em relação ao eixo x , que enlaça a origem.

As observações 4.1.2 feitas após o enunciado do teorema 4.1.1, valem também neste caso, e também fazemos uma adição ao teorema:

Addendum (ao teorema 4.2.1) *Seja a velocidade \mathbf{v}_0 tal que $\mathbf{r}_{\mathbf{v}_0, 0}$ é a solução circular do problema $\ddot{\mathbf{r}} = g(\mathbf{r}, 0) = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|^{\alpha+2}}\mathbf{r}$, $0 \leq \alpha < 1$, $\kappa > 0$.*

Então, podemos escolher $\delta_0 > 0$ no teorema 4.2.1, tal que existe conjunto conexo, compacto $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

1) $\mathcal{V}_\mu := \mathcal{V} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{\mu\}) \neq \emptyset$, para todo $\mu \in [0, \delta_0]$.

2) $\mathbf{r}_{\mathbf{v}, \mu}$ é periódica, para $(\mathbf{v}, \mu) \in \mathcal{V}$.

Mais ainda, o traço de $\mathbf{r}_{\mathbf{v}, \mu}$ é uma curva fechada simples, simétrica em relação aos eixos x e z , que enlaça a origem.

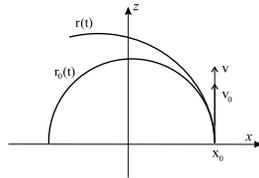
A prova do teorema 4.2.1) é similar à prova do teorema anterior (perturbação do problema de Kepler), precisamos apenas estudar o comportamento das soluções próximas à solução circular do problema não perturbado (que no caso de Kepler já conhecíamos (elipses)).

Seja $\mathbf{r}_0(t)$ a solução circular do problema planar não perturbado

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|^{\alpha+2}}\mathbf{r}, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad \kappa > 0 \quad (4.2.8)$$

que tem como traço a curva C . Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\mathbf{r}_0(0) = \mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{r}}_0(0) = \mathbf{v}_0$, \mathbf{v}_0 com o mesmo sentido do eixo z e \mathbf{x}_0 no eixo positivo do x .

Seja $\mathbf{r}(t)$ uma solução de (4.2.8), com mesma posição inicial \mathbf{x}_0 e com velocidade inicial \mathbf{v} próxima de \mathbf{v}_0 (\mathbf{v} com mesma direção e sentido de \mathbf{v}_0 e $\|\mathbf{v}\|$ próxima de $\|\mathbf{v}_0\|$).



Escrevemos $v = \|\mathbf{v}\|$ e $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$. Como $\dot{\mathbf{r}}(0)$ é ortogonal a $\mathbf{r}(0)$, temos $\dot{r}(0) = 0$ (ver observação 1, de 4.2.0) e $r(0)$ é um máximo ou mínimo de $r(t)$, logo um apocentro ou pericentro da solução $\mathbf{r}(t)$.

Lema 4.2.2 *Na situação acima, para v suficientemente próximo de v_0 , $\mathbf{r}(t)$ possui pericentro e apocentro. Mais ainda, se $v > v_0$, $r(0)$ é um mínimo de $r(t)$, e se $v < v_0$, $r(0)$ é um máximo de $r(t)$, onde $r(t) = \|\mathbf{r}(t)\|$.*

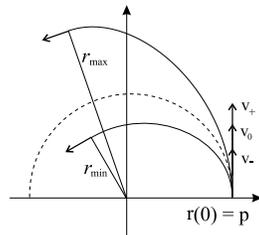


Figura 4.2.8:

Prova: Seja $v(t) = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|$ e U como em (4.2.7). Como $\dot{r}(0) = 0$, temos $v(0) = \sqrt{\dot{r}^2(0) + r^2(0)\dot{\varphi}^2(0)} = r(0)\dot{\varphi}(0)$. Isto implica que, por (4.2.6),

$$K = r(0)v(0) = pv(0), \text{ onde } r(0) = \|\mathbf{r}(0)\| = p. \quad (4.2.9)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}v(t)^2 + U(r(t)) \\ &= \frac{1}{2}v^2(0) + U(r(0)) = \frac{1}{2}v^2(0) + U(p). \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Quando $\dot{r} = 0$, temos por (4.2.6) e (4.2.9), $H(r, \dot{r}) = \frac{p^2 v^2(0)}{2r^2} + U(r)$ e igualando com (4.2.10), temos então:

$$\frac{1}{2}v^2(0) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right) = U(r) - U(p)$$

Assim, para $r \neq p$, $\dot{r}(t) = 0$ se, e somente se, $r = r(t)$ satisfaz

$$\|\mathbf{v}\| = v(0) = \sqrt{\frac{2r^2(U(r) - U(p))}{r^2 - p^2}} \quad (4.2.11)$$

temos $v(0)$ em função de r , mas queremos r em função de $v(0)$, isto é, queremos resolver esta equação para r em função de $v(0)$. Para evitar confusão, vamos escrever $v(0)(r) = u(r)$.

Defina

$$\begin{cases} u(r) &= \sqrt{\frac{2r^2(U(r) - U(p))}{r^2 - p^2}} \\ u(p) &= \sqrt{pU'(p)} \end{cases}$$

Note que $u(p) = \|\mathbf{v}_0\|$, (ver observação 4, de 4.2.0), u é de classe C^1 e $u'(p) = \frac{1}{4} \frac{3U' + pU''}{\sqrt{pU'}}$.

Para $\alpha = 0$, $u'(p) = \frac{1}{2p\sqrt{\kappa}} > 0$ e para $0 < \alpha < 1$, $u'(p) = \frac{1}{4} \frac{\alpha(2-\alpha)}{\sqrt{p^{\alpha+2}\alpha h}} > 0$. Pelo teorema da função inversa, existe $r = r(u)$, inversa da função u , definida numa vizinhança de $\|\mathbf{v}_0\|$. Assim, dado $\|\mathbf{v}\|$ próximo de $\|\mathbf{v}_0\|$, existe único $r(u) = r$, $r \neq p$, com r próximo de p , tal que $r(u)$ satisfaz (4.2.10), lembre que $u = v(0) = \|\mathbf{v}\|$.

Além disso, como $u'(p) > 0$, a função u e sua inversa são crescentes, logo se $\|\mathbf{v}\| < \|\mathbf{v}_0\|$, então $r(u) < p$ é um mínimo (e $r = p$ é máximo), e se $\|\mathbf{v}\| > \|\mathbf{v}_0\|$, então $r(u) > p$ é um máximo (e $r = p$ é mínimo), concluindo assim a prova da afirmação. ■

Como antes, $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu)$ denota uma solução de um problema $\ddot{\mathbf{r}} = g(\mathbf{r}, \mu)$, com condições iniciais $\mathbf{r}(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu) = \mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{r}}(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mu) = \mathbf{v}$.

Agora estamos prontos para provar o teorema.

Prova do teorema 4.2.1: Fixe α , $0 < \alpha \leq 1$. Seja $\mathbf{r}_0(t)$ a solução circular do problema de Kepler no plano $-(x, z)$, que tem como traço o círculo C . Suponha, sem perda de generalidade, que $\mathbf{r}_0(0) = \mathbf{x}_0$ e que $\dot{\mathbf{r}}_0(0) = \mathbf{v}_0$ tem o mesmo sentido do eixo z , isto é, $\mathbf{v}_0 = (0, v_0)$, $v_0 > 0$.

Seja $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}, 0)$ uma solução do problema não perturbado $\ddot{\mathbf{r}} = g(\mathbf{r}, 0) = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|^{\alpha+2}}\mathbf{r}$. Pelo lema 4.2.2, para $v = \|\mathbf{v}\|$ suficientemente próximo de $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$, $\mathbf{r}(t)$ possui pericentro e apocentro. Seja $\Phi(v)$ o ângulo formado entre um pericentro e um apocentro sucessivos descritos pela curva solução $\mathbf{r}(t)$. Como $0 \leq \alpha < 1$, temos que $\frac{\pi}{2} < \lim_{v \rightarrow v_0} \Phi(v) = \frac{\pi}{\sqrt{2-\alpha}} < \pi$ (ver observação 3, de 4.2.0).

Lembremos que $\dot{r}(0) = 0$. Considere $t_1 > 0$ o tempo mínimo onde $\dot{r} = 0$. Se $\|\mathbf{v}\| < \|\mathbf{v}_0\|$, com \mathbf{v} suficientemente próximo de \mathbf{v}_0 , então, pelo lema 4.2.2, $r(0)$ é um máximo e $r(t_1)$ é um mínimo, e assim $r(0)$ é o apocentro e $r(t_1)$ é o pericentro.

Observemos o esboço do gráfico das funções $\varphi = \varphi(t)$ e $r = r(t)$, neste caso (ver observação 3, de 4.2.0):

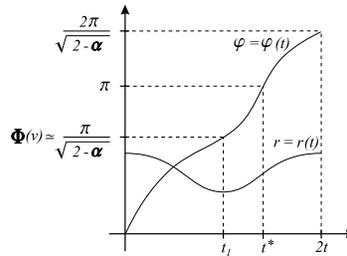
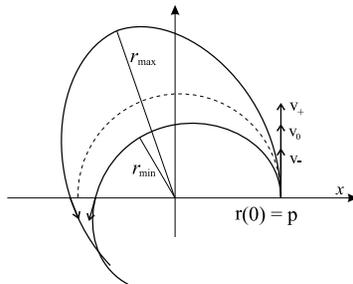


Figura 4.2.9: Esboço gráfico de r e φ

Seja t^* o tempo em que $\varphi(t^*) = \pi$ (t^* existe pois $\mathbf{r}(t)$ “dá infinitas voltas”, veja observação 2, de 4.2.0). Pelo gráfico acima, $\dot{r}(t^*) > 0$, e desde que $\dot{r} = \frac{x\dot{x} + z\dot{z}}{\sqrt{x^2 + z^2}}$, a curva solução $\mathbf{r}(t)$ intersecta o eixo x negativo com vetor velocidade $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{z})$ tal que $\dot{x}(t^*) < 0$.

Analogamente, se $\|\mathbf{v}\| > \|\mathbf{v}_0\|$, com \mathbf{v} suficientemente próximo de \mathbf{v}_0 , a curva solução

$\mathbf{r}(t)$ intersecta o eixo x negativo com vetor velocidade $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{z})$ tal que $\dot{x}(t^*) > 0$ (veja figura).



Procederemos agora de modo similar à parte final da prova do teorema da perturbação de Kepler.

Escolha $\bar{t} > 0$ tal que $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, 0)$, restrito ao intervalo $[0, \bar{t}]$, intersecta (transversalmente) o eixo x negativo em um único ponto.

Seja $\delta > 0$, δ suficientemente pequeno (como na proposição 4.0.18, com \bar{t} como acima e $E = \{(x, 0); x \leq 0\}$), e defina $V_\delta = \{\sigma \mathbf{v}_0; \sigma \in (1 - \delta, 1 + \delta)\} \subset \mathbb{R}^2$. Definindo a função $\tilde{l}: V_\delta \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{l}(\mathbf{v}, \mu) = \dot{x}(t(\mathbf{v}, \mu), \mathbf{x}_0, \mathbf{v}, \mu)$, onde $\dot{x}(t(\mathbf{v}, \mu), \mathbf{x}_0, \mathbf{v}, \mu)$ é a primeira coordenada do vetor velocidade $\dot{\mathbf{r}}(t(\mathbf{v}, \mu), \mathbf{x}_0, \mathbf{v}, \mu) = (\dot{x}(t(\mathbf{v}, \mu), \mathbf{x}_0, \mathbf{v}, \mu), \dot{z}(t(\mathbf{v}, \mu), \mathbf{x}_0, \mathbf{v}, \mu))$ e $t(\mathbf{v}, \mu) > 0$ é o tempo mínimo em que a solução intersecta o eixo x negativo. Aqui $t(\mathbf{v}, \mu) := t(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}, \mu)$ como na proposição 4.0.18 (foi para isto que escolhemos \bar{t} e quisemos δ suficientemente pequeno).

Com uma análise similar à prova da afirmação, verificamos que existe δ_0 , $0 < \delta_0 < \delta$, e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_\delta$, tais que, para todo $\mu \in (-\delta_0, \delta_0)$, temos $\tilde{l}(\mathbf{v}_1, \mu) > 0$ e $\tilde{l}(\mathbf{v}_2, \mu) < 0$.

Por este resultado (e teorema do Valor Intermediário), existe $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $\mu \in (-\delta_0, \delta_0)$, existe $\mathbf{v}_\mu \in V_\delta$ tal que $\tilde{l}(\mathbf{v}_\mu, \mu) = 0$. Portanto, para cada $\mu \in (-\delta_0, \delta_0)$, a solução do problema perturbado $\mathbf{r}_\mu(t) := \mathbf{r}_{\mathbf{v}_\mu, \mu}(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_\mu, \mu)$, intersecta ortogonalmente o eixo x no instante $t = t(\mathbf{v}_\mu, \mu)$.

Finalmente, o lema 4.0.14 implica que $\mathbf{r}_\mu(t)$ pode ser estendida a uma solução periódica, com período $2t(\mathbf{v}_\mu, \mu)$, cujo traço é simétrico em relação ao eixo x . O restante da prova é exatamente igual que no teorema 4.1.1. ■

A prova do addendum ao teorema 4.2.1 é igual à prova do addendum ao teorema 4.1.1.

Observação 4.2.3 Para a prova da existência de soluções periódicas em forma da figura do oito, apresentada no capítulo 5, precisamos também que as soluções $\mathbf{r}_{\mathbf{v},\mu}$ dadas no teorema 4.2.1 acima, satisfaçam também a seguinte propriedade: $\mathbf{r}_{\mathbf{v},\mu}$ intersecta o eixo x em exatamente dois pontos, um destes pontos é $\mathbf{x}_0 = (x_0, 0)$ e o outro é $(x'_0, 0)$, e podemos tomar $x_0 > 0$ e $x'_0 < 0$. Para verificar que as soluções $\mathbf{r}_{\mathbf{v},\mu}$ satisfazem esta propriedade, basta aplicar a proposição 4.0.17 às soluções $\tilde{\mathbf{r}}_\mu(e^{i\theta}) = \mathbf{r}_\mu(\frac{\tau\mu}{2\pi}\theta)$ duas vezes (veja final da prova do teorema 4.1.1): uma vez para $\{e^{i\theta}; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ e outra vez para $\{e^{i\theta}; \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\}$.

Observação 4.2.4 Para o estudo da dinâmica do problema do fio circular, usaremos este resultado apenas no caso $\alpha = 0$, e chamamos o problema (4.2.8), neste caso, de problema do fio infinito.

Capítulo 5

Estudo da Dinâmica do Problema do Fio Circular

Neste capítulo estudamos a dinâmica do problema do fio circular homogêneo, isto é, estudamos o movimento de uma partícula, de massa infinitesimal, no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , submetida unicamente à força de atração gravitacional induzida por um fio circular homogêneo, contido no plano- (x, y) e com centro na origem.

Buscamos inicialmente obter informações sobre a dinâmica da partícula restrita aos espaços invariantes. São eles, o eixo z , o plano- (x, y) que contém o fio circular, a que chamamos de plano horizontal, e qualquer plano que contenha o eixo z , planos aos quais denominamos planos verticais. Neste estudo damos ênfase ao estudo de soluções periódicas.

Provamos em seguida a existência de certas soluções periódicas no espaço tri-dimensional perto do fio circular. Finalmente, apresentamos a análise da solução de equilíbrio do problema.

5.1 Dinâmica no eixo z

Seja \mathcal{C} um fio circular homogêneo (fixado), contido no plano- (x, y) e centrado na origem do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Como antes, estamos denotando por ρ o raio do fio circular, e por M a sua massa. Consideremos uma partícula P , de massa infinitesimal, movendo-se ao longo do eixo z , submetida unicamente à força de atração gravitacional induzida pelo

fio circular \mathcal{C} . O potencial neste problema unidimensional é bem simples, e por (1.2.8), a expressão do potencial restrito ao eixo z é dada por:

$$V(z) := V(0, 0, z) = -\frac{M}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

Assim, restrito a este conjunto, o sistema (1.1.1) se escreve como:

$$\ddot{z} = -\frac{Mz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5.1.1)$$

cuja função Hamiltoniana associada é

$$H(z, \dot{z}) = \frac{1}{2}\dot{z}^2 - M(z^2 + \rho^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Pelo teorema 3.0.9, as soluções de (5.1.1) estão definidas para todo o tempo.

Pelo estudo das curvas de nível, $H = h$, para $h \geq -\frac{M}{\rho}$ (veja figura 6.1.1), observamos que existem soluções limitadas, as soluções periódicas ($-\frac{M}{\rho} < h < 0$), e soluções ilimitadas, as que escapam para o infinito ($h \geq 0$).

Para $h = 0$, temos órbitas parabólicas, que saem e chegam ao infinito com velocidade zero; $h > 0$, temos órbitas hiperbólicas, que saem e chegam ao infinito com velocidade positiva.

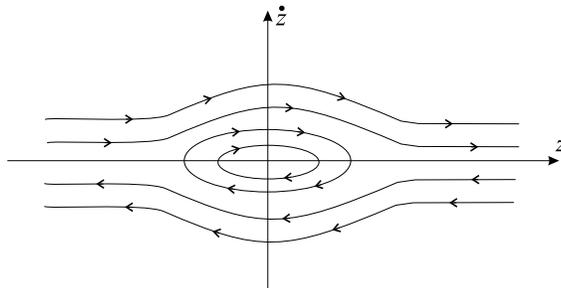


Figura 5.1.1: Retrato de fase

Observamos também, pela figura acima, que a origem $z = \dot{z} = 0$ é o ponto de equilíbrio estável do sistema, com energia $h = -\frac{M}{\rho}$.

Note que, neste problema, a região de Hill para h , com $-\frac{M}{\rho} < h < 0$, é um segmento de reta da forma $[-a, a]$, $a \in \mathbb{R}$.

Comentário

A equação (5.1.1), cujas soluções descrevem o movimento da partícula P ao longo do eixo z , sob a atração gravitacional do fio circular homogêneo \mathcal{C} , é idêntica aquela do "problema circular de Sitnikov", cujas soluções descrevem a dinâmica de uma partícula no eixo z , de massa infinitesimal, sujeita a ação devida aos primários de massa $m_1 = m_2$, movendo-se no plano- (x, y) numa órbita circular em torno da origem. Para mais detalhes ver [BLO], [M].

5.2 Dinâmica no plano horizontal (plano- (x, y))

Nesta seção, estudamos a dinâmica de uma partícula, de massa infinitesimal, atraída pelo fio circular homogêneo, com seu movimento restrito ao plano- (x, y) , o plano que contém o fio circular. Como dissemos anteriormente, a este plano chamaremos de plano horizontal.

Pelo estudo do sinal do gradiente da função do potencial V , verificamos a existência de soluções circulares passando por qualquer ponto no exterior do fio circular e a não existência de soluções circulares no interior do fio. Em seguida, fazemos um estudo sobre a existência de soluções circulares no exterior do fio circular a partir de um certo momento angular fixado, isto é, procuramos conhecer para que valores do momento angular o sistema tem soluções circulares associadas.

Determinamos por completo, a dinâmica no interior do fio. Provamos que, no interior do fio circular, as soluções ou colidem ou convergem para a origem (a menos da solução de equilíbrio). Verificamos que todas as soluções não radiais descrevem uma curva cujo traço tem uma forma particular.

No exterior do fio circular, fazemos também uma análise da dinâmica, a partir do retrato de fase. Por fim, apresentamos a região de Hill do problema restrito ao plano horizontal e o estudo da solução de equilíbrio restrito a este plano.

5.2.1 Considerações gerais

Consideremos o fio circular \mathcal{C} , contido no plano- (x, y) , centrado na origem, com raio $\rho = 1$ e massa $M = 1$ (veja observação 1.2.8). Seja $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ a posição de uma partícula neste plano sujeita a atração gravitacional deste fio. Escrevemos $r = \|\mathbf{r}\|$. No que segue da seção 6.2, escrevemos \mathbf{r} simplesmente por (x, y) ao invés de $\mathbf{r} = (x, y, 0)$.

No plano horizontal temos, por (1.2.7), $D^2 = (r + 1)^2$ e $d^2 = (r - 1)^2$, e a expressão (1.2.11) do potencial vem a ser

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(r+1)^2 \cos^2 \theta + (r-1)^2 \sin^2 \theta}} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1 + 2\sqrt{x^2 + y^2} \cos 2\theta}}.$$

Logo \mathbf{r} satisfaz a seguinte equação de movimento:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}), \quad (5.2.2)$$

onde V é o potencial do fio circular unitário restrito ao plano horizontal.

Usando a expressão de V , o sistema (5.2.2) é equivalente a

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \left(1 + \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) d\theta}{\{x^2 + y^2 + 1 + 2\sqrt{x^2 + y^2} \cos 2\theta\}^{3/2}} \\ \ddot{y} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y \left(1 + \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) d\theta}{\{x^2 + y^2 + 1 + 2\sqrt{x^2 + y^2} \cos 2\theta\}^{3/2}} \end{cases}$$

Definimos $U(r) = V(\mathbf{r})$ e $F(r) = \frac{U'(r)}{r}$, $r \neq 0$ e $F(0) = U''(0)$ (' derivada em relação a r). Assim, $\nabla V(\mathbf{r}) = F(r) \mathbf{r}$.

Como o potencial V , neste caso, é radial, o problema (5.2.2) é um problema de força central. Assim, (5.2.2) é integrável, tendo como integrais primeiras a energia total $h = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + V(\mathbf{r})$ e o momento angular $K = \langle \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}, e_3 \rangle = xy - \dot{x}y$.

O sistema de equações (5.2.2) em coordenadas polares (r, φ) é dado pelo sistema:

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{K^2}{r^3} - F(r)r, & r > 0 \\ \dot{\varphi} = \frac{K}{r^2} \end{cases} \quad (5.2.3)$$

onde K é o momento angular.

Observe que $\ddot{r} = \frac{K^2}{r^3} - U'(r) = \frac{d}{dr} \left(\frac{-K^2}{2r^2} - U(r) \right)$, que é equivalente a

$$\ddot{r} = -U'_{ff}(r), \quad (5.2.4)$$

com $U_{ff}(r) = \frac{K^2}{2r^2} + U(r)$ chamado *potencial efetivo*.

Temos assim que o sistema (5.2.4) é dado pelo seguinte sistema Hamiltoniano:

$$\begin{cases} \dot{r} = H_v = v \\ \dot{v} = -H_r = -U'_{ff}(r) \end{cases}$$

com Hamiltoniano $H(r, v) = \frac{1}{2}v^2 + U_{ff}(r)$.

Um resultado conhecido e de fácil verificação (ver [Arn]) é o seguinte:

Lema 5.2.1 $\mathbf{r}(t) = ae^{iwt} = (a \cos wt, a \sin wt)$, $w = \frac{K}{a^2}$, $a > 0$, é solução circular de (5.2.2) se, e somente se, a é ponto crítico de $U_{ff}(r) = \frac{K^2}{2r^2} + U(r)$ ($K \neq 0$).

5.2.2 A função potencial efetivo U_{ff} e as soluções circulares

Tendo em vista a relação da função U_{ff} com as soluções circulares do sistema (5.2.2), é de nosso interesse estudar a existência de pontos críticos de U_{ff} .

Observe que $U'_{ff}(r) = 0$ se, e somente se, existe r tal que $\frac{K^2}{r^4} = F(r)$, com $r \neq 0$. Note também que $F(r) = \frac{K^2}{r^4}$ implica que $F(r) \geq 0$, e $F(r) = 0$ se, e somente se, $K = 0$.

Desta forma, para fazer um estudo sobre os pontos críticos de U_{ff} , precisamos conhecer o sinal de $F(r)$. Em outras palavras, procuramos saber qual é o sentido do vetor gradiente restrito às regiões interior e exterior ao fio circular. Intuitivamente, pela geometria do problema, é simples responder a esta questão, mas na verificação precisamos usar alguns artifícios, ou melhor, algumas relações do potencial, como vemos na prova a seguir.

Proposição 5.2.2 *A derivada $U'(r)$ da função $U(r)$ restrita a uma das regiões conexas, $0 < r < 1$ (o interior do fio circular, menos a origem) ou $r > 1$ (o exterior do fio circular), não muda de sinal. Mais precisamente, para $0 < r < 1$, $U'(r) < 0$, e para $r > 1$, $U'(r) > 0$.*

Prova: Para $r > 1$, temos $D = r + 1$, $d = r - 1$. Derivando $U(r)$ temos

$$U'(r) = \left(-\frac{2}{\pi}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2[(r+1)\cos^2\theta + (r-1)\sin^2\theta]d\theta}{((r+1)^2\cos^2\theta + (r-1)^2\sin^2\theta)^{3/2}},$$

de onde $U'(r) > 0$.

No interior do fio, temos $U(r) = -\frac{2}{\pi}T(1+r, 1-r)$, T como definida em (1.2.13). Lembremos que (veja observação 2.2.0)

$$T(D, d) = \frac{f\left(\frac{d^2}{D^2}\right)}{D} \quad (5.2.5)$$

onde $0 < \frac{d^2}{D^2} < 1$ e $f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + t\sin^2\theta}}$.

Também $T(D, d) = \frac{\pi}{2\sigma(D, d)}$, onde $\sigma(D, d) = \lim_{i \rightarrow +\infty} d_i = \lim_{i \rightarrow +\infty} D_i$ (σ, d_i, D_i como definidos na seção 2.1) e note que (ver [Ke], pags. 60-61, apêndice A)

$$T(D, d) = T(D_i, d_i) \quad (5.2.6)$$

Assim, por (5.2.6), $U(r) = -\frac{2}{\pi}T(1, \sqrt{1-r^2})$ (pois $d_1 = \sqrt{1-r^2}$ e $D_1 = 1$) e por (5.2.5), temos $U(r) = -\frac{2}{\pi}f(1-r^2)$, com $0 < 1-r^2 < 1$.

Derivando temos $U'(r) = -\frac{2}{\pi}f'(1-r^2)(-2r)$, $0 < r < 1$, como f é decrescente (ver lema 2.2.1), obtemos que $U'(r) < 0$, o que conclui a prova da proposição. ■

Observações 5.2.2

1) Desde que $\nabla V(\mathbf{r}) = F(r)\mathbf{r} = \frac{U'(r)}{r}\mathbf{r}$ e como a equação de movimento é dada por (5.2.2), observamos que a força fora do fio circular é atratora, isto é, aponta para a origem, e dentro do fio circular a força é expansora, isto é, aponta no sentido contrário à origem.

2) Pela proposição anterior, $F(r) \neq 0$, ($r \neq 0$), logo não temos pontos críticos de U_{ff} com momento angular K nulo. Além disso, $F(r) > 0$ apenas para $r > 1$. Desta forma, $U'_{ff}(r) = 0$ pode ocorrer apenas para $r > 1$, com r satisfazendo $F(r) = \frac{K^2}{r^4}$ e $K \neq 0$.

Com base no que foi apresentado, obtemos o seguinte resultado sobre existência de órbitas circulares no plano que contém o fio circular.

Teorema 5.2.3 *Considere o problema (5.2.2). Então:*

(i) *Não existem soluções circulares na região interior ao fio circular.*

(ii) *Para qualquer posição de uma partícula na região exterior ao fio circular, $r > 1$, obtemos uma solução circular da forma $\mathbf{r} = ae^{iwt}$, com $w^2 = \frac{U'(a)}{a}$.*

Este teorema segue diretamente da proposição 5.2.2 e do seguinte resultado conhecido e de fácil demonstração (veja [Arn]).

Proposição 5.2.4 *Considere um problema de força central no plano:*

$$\ddot{\mathbf{r}} = -F(r)\mathbf{r}, \quad \text{com } r = \|\mathbf{r}\| \quad (5.2.7)$$

Então $\mathbf{r} = ae^{iwt}$ é uma solução circular do problema (5.2.7) se, e somente se, $F(a) = w^2$, ($w \neq 0$, $a > 0$).

Sabemos, pelo lema 5.2.1, que a cada ponto crítico de U_{ff} está associada uma solução circular de (5.2.2). Vimos também, pela observação 2), que U_{ff} só possui pontos críticos para $r > 1$ e $K \neq 0$.

Uma questão que surge naturalmente é a seguinte: Para que valores de $K \in \mathbb{R}$, U_{ff} tem pontos críticos? Em outras palavras, queremos encontrar os valores de K tais que

existem soluções circulares de (5.2.2), com momento angular K . Para responder a esta questão, lembre que a função potencial efetivo é dada por:

$$U_{ff}(r) = \frac{K^2}{2r^2} + U(r), \text{ com } r > 1, K \neq 0.$$

Lembre também que

$$U(r) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(r+1)^2 \cos^2 \theta + (r-1)^2 \sin^2 \theta}}.$$

Note que $-\frac{1}{r-1} \leq U(r) \leq -\frac{1}{r+1}$, assim

$$\frac{K^2}{2r^2} - \frac{1}{r-1} \leq U_{ff}(r) \leq \frac{K^2}{2r^2} - \frac{1}{r+1}. \quad (5.2.8)$$

Por outro lado,

$$U'_{ff}(r) = -\frac{K^2}{r^3} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(r + \cos 2\theta) d\theta}{[(r+1)^2 \cos^2 \theta + (r-1)^2 \sin^2 \theta]^{3/2}},$$

e como $\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta = 0$, temos

$$-\frac{K^2}{r^3} + \frac{r}{(r+1)^3} \leq U'_{ff}(r) \leq -\frac{K^2}{r^3} + \frac{r}{(r-1)^3} \quad (5.2.9)$$

Observe que dado qualquer $K \neq 0$, para r suficientemente próximo de 1 ou para r suficientemente grande, temos que $U_{ff}(r) < 0$, com U_{ff} tendendo a zero, quando r tende a infinito. Desta forma, encontrando valores de $K \neq 0$ tais que $U_{ff}(r) > 0$, para algum $r > 1$, estaremos obtendo ao menos um máximo e um mínimo de U_{ff} , e, pelo lema 5.2.1, estaremos encontrando soluções circulares de (5.2.2), com momento angular K .

Seguindo esta linha de análise, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 5.2.5

(i) Para $|K| > 2\sqrt{2}$, U_{ff} tem máximo e mínimo.

(ii) Para todo K , existe r_K tal que, para todo $r > r_K$, $U'_{ff}(r) > 0$, em particular U_{ff} não tem pontos críticos. Também, para $|K| > \frac{4^2}{3\sqrt{3}}$, existem r_k^- e r_k^+ , com $1 < r_k^- < 4 < r_k^+$, tais que para todo $r \in (r_k^-, r_k^+)$, $U'_{ff}(r) < 0$, em particular U_{ff} não tem pontos críticos.

(iii) Para os valores K , com $0 < |K| < \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $U'_{ff}(r) > 0$, logo U_{ff} não tem pontos críticos.

Prova: (i) Segue direto de (5.2.8), considerando $|K| > 2\sqrt{2}$ e avaliando em 2, obtemos $U_{ff}(2) > 0$, donde, existe (ao menos um) máximo e mínimo da função U_{ff} .

(ii) Por (5.2.9), supondo $0 < -\frac{K^2}{r^3} + \frac{r}{(r+1)^3}$, que equivale a $\frac{r^4}{(r+1)^3} > K^2$, temos $U'_{ff}(r) > 0$.

Defina $g(r) = \frac{r^4}{(r+1)^3}$, com $r > 0$ e observe abaixo esboço gráfico de g :

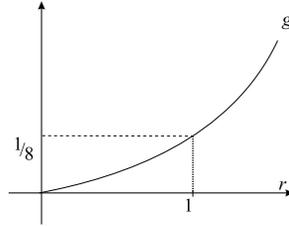


Figura 5.2.2: Gráfico das funções g

Como $g(r)$ tende para o infinito, quando r tende para o infinito, dado qualquer K , existe r_K tal que $g(r) > K^2$, para todo $r > r_K$, e sendo assim, $U'_{ff}(r) > 0$ para todo $r > r_K$, isto é, U_{ff} não tem pontos críticos para $r > r_K$.

Por (5.2.9), supondo $-\frac{K^2}{r^3} + \frac{r}{(r-1)^3} < 0$, que equivale a $\frac{r^4}{(r-1)^3} < K^2$, temos $U'_{ff}(r) < 0$.

Defina $f(r) = \frac{r^4}{(r-1)^3}$, com $r > 1$.

Como $f'(r) = \frac{r^2}{(r-1)^4}[r-4]$, temos que, para $r > 1$, f só tem ponto crítico em $r = 4$, $f(4) = \frac{4^4}{3^3}$, e f é decrescente para $r < 4$, e é crescente para $r > 4$.

Assim, para todo $|K| > \sqrt{\frac{4^4}{3^3}}$, existem r_k^- e r_k^+ , com $1 < r_k^- < 4 < r_k^+$, tais que para todo $r \in (r_k^-, r_k^+)$, $U'_{ff}(r) < 0$, em particular U_{ff} não tem pontos críticos, como queríamos provar.

(iii) Considere a função $g(r)$ como definida anteriormente. Como g é crescente e $g(1) = \frac{1}{8}$, temos que $g(r) > \frac{1}{8}$, para todo $r > 1$.

Assim, se $K^2 < \frac{1}{8}$, (ou equivalentemente $|K| < \frac{1}{2\sqrt{2}}$), então $g(r) > K^2$, para todo $r > 1$. Segue que $U'_{ff}(r) > 0$, para todo $r > 1$, como queríamos. ■

Estudo do gráfico de $U_{ff}(r)$

Temos as seguintes observações:

- (i) Para r grande, $U(r)$ se comporta como $-\frac{1}{r}$ (Kepler), que predomina em U_{ff}
- (ii) Quando $r \rightarrow 1$, a função $U_{ff} \rightarrow -\infty$
- (iii) U_{ff} não tem pontos críticos para $0 < r < 1$. Além disso, quando $r \rightarrow 0$, a função $U_{ff} \rightarrow \infty$ para $K \neq 0$, e $U_{ff} \rightarrow -1$ para $K = 0$.

Com base na proposição anterior e nas observações acima, nós obtemos o seguinte esboço do gráfico de U_{ff} :

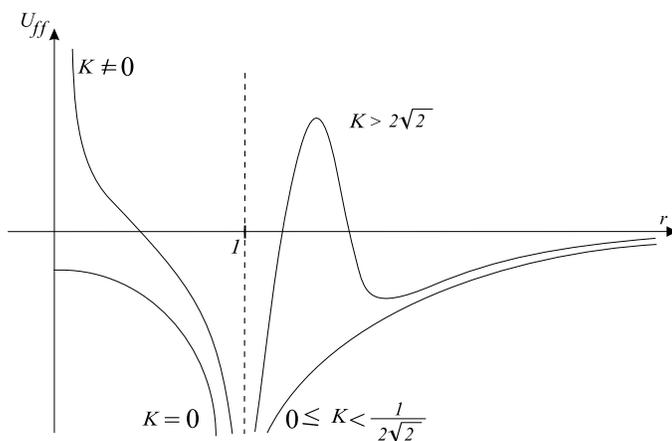


Figura 5.2.3: Gráfico do potencial efetivo U_{ff}

Observações:

- 1) Da teoria das equações diferenciais, sabemos que o ponto de máximo de U_{ff} é um ponto de equilíbrio instável de (5.2.4), que corresponde a uma solução circular instável em (5.2.2), da mesma forma, um ponto de mínimo de U_{ff} é um ponto de equilíbrio estável

de (5.2.4), que corresponde a uma solução circular estável em (5.2.2).

2) No nosso estudo não garantimos a existência de exatamente dois pontos críticos de U_{ff} (com $K > 2\sqrt{2}$), mas estudos numéricos indicam isto. Para mais detalhes sobre o estudo numérico, ver tese de Mestrado de Angelo Alberti [A].

5.2.3 Mais resultados sobre a dinâmica no plano horizontal

Antes de darmos continuidade à análise da dinâmica de uma partícula no plano horizontal, observemos que:

1) Se uma partícula passa pela origem, a solução permanece em um diâmetro do fio circular. (Neste caso teremos $K = 0$.)

2) Se uma solução é tangente a uma reta contida no plano- (x, y) e passando pela origem, para algum tempo t , então esta solução está contida nesta reta em todo o tempo (em que ela estiver definida). Este caso corresponde ao estudo de (5.2.3) com $K = 0$.

3) Analogamente, $K \neq 0$ em (5.2.3) equivale a dizer que a curva solução não passa pela origem e nunca é tangente a uma reta contida no plano e passando pela origem.

Com base nestas observações, dividimos o estudo em dois casos:

Primeiro caso: *A solução é tangente a uma reta contida no plano- (x, y) e passando pela origem, para algum tempo t . Ou equivalentemente, solução com momento angular $K = 0$.*

Como as retas que passam pela origem e estão contidas no plano horizontal são conjuntos invariantes e como o problema é invariante por rotação em torno do eixo z , é suficiente fazer o estudo da dinâmica de uma partícula contida no eixo x , com velocidade inicial neste eixo.

A função potencial que determina o movimento da partícula é dada por:

$$\begin{aligned} V(x) = V(x, 0, 0) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(\|x\|+1)^2 \cos^2 \theta + (\|x\|-1)^2 \sin^2 \theta}} \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(x+1)^2 \cos^2 \theta + (x-1)^2 \sin^2 \theta}}, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue do fato de que $T(d, D) = T(D, d)$ (ver (1.2.14)).

Observe que para $x > 0$, temos $V(x) = U(r)$, e neste caso temos $K = 0$ em (5.2.3) e o potencial $U_{ff}(r)$ se reduz a $U_{ff}(r) = U(r)$. Assim, temos o gráfico de $U(r)$ e portanto de $V(x)$, para $x > 0$. Como $V(x) = V(-x)$, obtemos o gráfico de V sobre o eixo x :

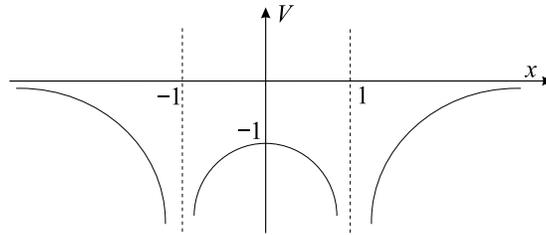


Figura 5.2.4: Gráfico de $V(x)$

$$\begin{cases} V(x) < 0, \text{ para todo } x \\ V(0) = -1 \\ V'(0) = 0 \end{cases}$$

As equações de movimento são dadas por $\ddot{x} = -V'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Escrevendo este sistema em um sistema de primeira ordem, obtemos

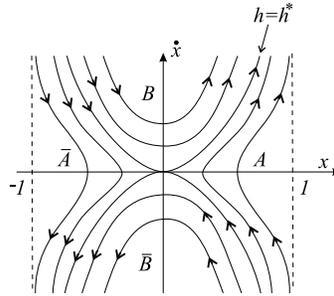
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -V'(x) \end{cases} \quad (5.2.10)$$

onde $h = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ é constante ao longo de uma solução de (5.2.10).

Ainda no estudo da dinâmica sobre o eixo x , analisamos dois casos.

a) Dinâmica no interior do fio circular ($K = 0$)

Fixando os níveis de energia h , na região interior ao fio circular ($-1 < x < 1$), obtemos o seguinte retrato de fase:

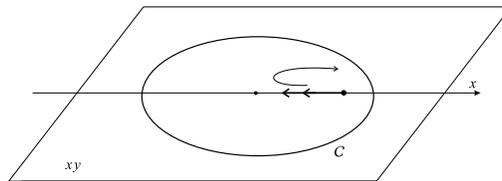


Analizando a figura acima, observamos que no interior do fio circular, para $h > h^*$ ou $h < h^*$, com $h^* = V(0) = -1$, a partícula converge para o fio. Para $h = h^*$, a partícula ou converge para a origem, ou converge para o fio, ou permanece na origem em repouso (solução de equilíbrio). Aqui, convergência significa convergência em tempo futuro, isto é, quando $t \rightarrow b^-$, onde (a, b) é o intervalo (máximo) de definição da solução.

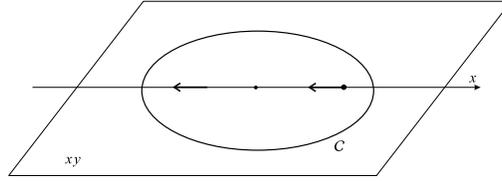
Os resultados para convergência em tempo passado são similares, pois o sistema é reversível, isto é, $\mathbf{r}(-t)$ é solução de (1.1.1) se, e somente se, $\mathbf{r}(t)$ é solução de (1.1.1).

O retrato de fase projetado no espaço das configurações nos mostra que:

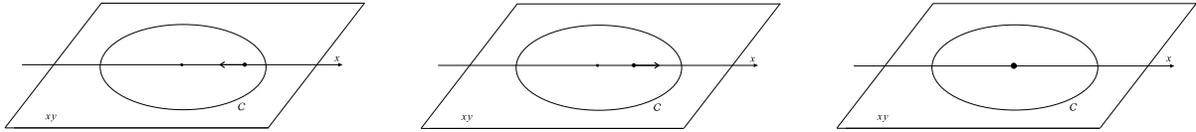
Na região A (analogamente \bar{A}), $h < h^*$, a partícula se aproxima da origem e retorna convergindo ao fio, como mostra a figura abaixo.



Na região B (analogamente \bar{B}), $h > h^*$, a partícula passa pela origem e segue convergindo ao fio (veja figura a seguir).



Na curva separatriz, de nível $h = h^*$, a partícula ou converge para a origem (figura à esquerda), ou converge ao fio (figura do centro), ou permanece em repouso (figura à direita):



Proposição 5.2.6 *Uma solução do problema do fio circular no plano horizontal, no interior do fio circular, com velocidade inicial não nula contida na reta que passa pela partícula e pela origem (equivalentemente com $K = 0$), ou colide (em tempo finito), ou converge para a origem em tempo infinito.*

Prova: Se uma solução $x(t)$ converge para o fio, esta solução colide (em tempo finito).

De fato, seja $x(t)$ uma solução de (5.2.10) convergindo para o fio circular. Seja (a, b) o intervalo de definição de $x(t)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, $x(t) \rightarrow 1^-$, quando $t \rightarrow b^-$. Como $\lim_{t \rightarrow b^-} V(x(t)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} V(x) = -\infty$, existe t_0 tal que $V(x(t)) < h - 1$, para todo t , $t_0 < t < b$, onde $h = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ é a energia de $x(t)$. Assim, para $t \geq t_0$, $\dot{x}(t) \neq 0$. Mais ainda, $\dot{x}(t) > 0$ (pois $x(t) \rightarrow 1^-$). Conseqüentemente $x(t)$, $t_0 \leq t < b$, é injetiva e tem inversa $t = t(x)$, $x_0 \leq x < 1$, $x_0 = x(t_0)$.

De $h = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$, temos que $\dot{x} = \sqrt{2(h - V(x))}$. Logo $\int_{t_0}^{t(x)} dt = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{2(h - V(x))}}$, e segue que

$$t(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{2(h - V(x))}} + t_0 \text{ para todo } x, \quad x_0 \leq x < 1.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
 b = \lim_{x \rightarrow 1^-} t(x) &= \int_{x_0}^1 \frac{dx}{\sqrt{2(h - V(x))}} + t_0 \\
 &< \int_{x_0}^1 \frac{dx}{\sqrt{2}} + t_0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - x_0) + t_0 < +\infty
 \end{aligned}$$

Assim, a solução $x(t)$ (que converge para o fio) está definida em tempo finito. Logo, pelo estudo das singularidades, $x(t)$ colide com o fio circular.

Se $x(t)$ converge para a origem, também pelo estudo das singularidades, a solução converge em tempo infinito. Isto conclui a prova da proposição. ■

b) Dinâmica no exterior do fio circular ($K = 0$)

Na região exterior ao fio circular, $x > 1$ (analogamente $x < -1$), obtemos o seguinte retrato de fase (observe a figura 5.2.4):

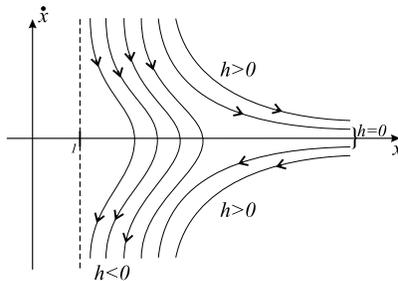


Figura 5.2.5: Retrato de fase com $x > 1$ e $K = 0$

Analisando o retrato de fase (figura 5.2.5), obtemos a seguinte dinâmica do problema:

No exterior do fio circular, para $h < 0$, a partícula converge para o fio, para $h \geq 0$, a partícula ou converge para o fio, ou escapa.

Observe que para $h = 0$, a solução é parabólica, e para $h > 0$ a solução é hiperbólica.

Da mesma forma que na região interior ao fio, verificamos a seguinte proposição:

Proposição 5.2.7 *Uma solução do problema do fio circular no plano horizontal, no exterior do fio circular, com velocidade inicial não nula contida na reta que passa pela partícula e pela origem (equivalentemente com $K = 0$), ou colide (em tempo finito), ou escapa em tempo infinito.*

Prova: De modo análogo a proposição anterior, temos que se uma solução $x(t)$ converge para o fio, esta solução colide (em tempo finito). Se uma solução $x(t)$ escapa, isto acontece em tempo infinito, pois se o tempo de escape fosse finito, pelo teorema 3.0.9, teríamos uma colisão, o que é uma contradição. ■

Segundo caso: *A solução não é tangente a uma reta contida no plano e passando pela origem do círculo. Ou equivalentemente, soluções com momento angular $K \neq 0$.*

Neste caso as equações de movimento são dadas por (5.2.2), com $K \neq 0$. O gráfico de U_{ff} é conhecido (veja seção 5.2.2).

Como feito no caso anterior, dividimos a análise da dinâmica em duas partes, como segue.

a) Dinâmica no interior do fio circular ($K \neq 0$)

Fixando os níveis de energia h , na região interior ao fio circular ($K \neq 0$), obtemos o retrato de fase abaixo (observe a figura 5.2.3):

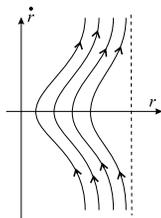


Figura 5.2.6:

Analisando o retrato de fase (ver figura 5.2.6), observamos que no interior do fio circular, todas as soluções convergem para o fio. De fato, como veremos na proposição a seguir, todas as soluções são de colisão.

Proposição 5.2.8 *Uma solução do problema do fio circular no plano horizontal, no interior do fio circular, com velocidade inicial fora da reta que passa pela partícula e pela origem (isto é, $K \neq 0$), colide (em tempo finito).*

Prova: Segue de modo análogo à prova da proposição 5.2.6. ■

O resultado seguinte descreve o traço das soluções no interior do fio circular, com $K \neq 0$.

Teorema 5.2.9 *Seja $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ uma solução de (5.2.2), com momento angular $K \neq 0$. Suponhamos que $\mathbf{r}(0) = (0, y(0))$, com $y(0) > 0$ e $\dot{\mathbf{r}}(0) = (\dot{x}(0), 0)$, $\dot{x}(0) > 0$.*

Então, o traço da curva $\mathbf{r}(t)$ é o gráfico de uma função par côncava para cima.

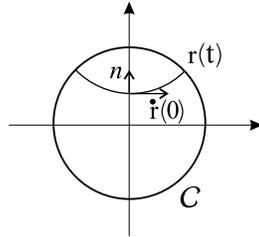


Figura 5.2.7: Traço da curva $\mathbf{r}(t)$

Antes da prova, vejamos alguns comentários.

1) Pelo retrato de fase (veja figura 5.2.6), observamos que todas as soluções $\mathbf{r}(t)$ no interior do fio, com $K \neq 0$, atingem uma distância positiva mínima à origem em um tempo t_0 , com $\dot{r}(t_0) = 0$, isto é, $\mathbf{r}(t_0)$ é ortogonal a $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$. Logo, todas as soluções no interior do fio, com $K \neq 0$, são obtidas por uma rotação, de uma solução como no enunciado do teorema acima.

2) Se $\dot{\mathbf{r}}(t) = 0$ para algum t , temos $\dot{x}(t) = 0$ e $\dot{y}(t) = 0$, assim $K = xy - \dot{x}y = 0$, então a solução é radial ($K = 0$). Assim, a solução $\mathbf{r}(t)$ do enunciado do teorema acima satisfaz $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$ para todo t em que estiver definida.

3) A curvatura da curva $\mathbf{r}(t)$ é por definição

$$k(t) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2} \langle \ddot{\mathbf{r}}(t), \mathbf{n}(t) \rangle = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^3} \langle \ddot{\mathbf{r}}(t), \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| \mathbf{n}(t) \rangle = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^3} \langle \ddot{\mathbf{r}}(t), \dot{\mathbf{r}}^\perp(t) \rangle,$$

onde $\mathbf{n}(t) = \frac{(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{\|(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))\|}$ e $\dot{\mathbf{r}}^\perp(t) = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| \mathbf{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$.

4) Note que $k(t)$ é contínua e é diferente de zero, para todo t , pois se $k(t) = 0$ para algum t , então $\ddot{\mathbf{r}}(t) \perp \mathbf{n}(t)$, donde $\dot{\mathbf{r}}(t)$ é radial (pois $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ é sempre radial), e assim, a solução $\mathbf{r}(t)$ seria radial, isto é, $K = 0$, uma contradição.

5) Seja $\mathbf{r}(t)$ como no enunciado do teorema acima. Como em $t = 0$, $\dot{\mathbf{r}}(0) \perp \ddot{\mathbf{r}}(0)$ e $\ddot{\mathbf{r}}(0)$ aponta para cima. Segue que $\mathbf{n}(0) = c \ddot{\mathbf{r}}(0)$, para algum $c > 0$. Logo $k(0) = \bar{c} \|\ddot{\mathbf{r}}(0)\|^2 > 0$, com $\bar{c} > 0$. Neste caso, como k é contínua e não se anula, temos que $k > 0$, para todo t .

Passemos agora à prova do teorema 5.2.9

Prova do teorema 5.2.9: Seja (a, b) o intervalo de definição de $\mathbf{r}(t)$, com $\mathbf{r}(0) = (0, y(0))$, $y(0) > 0$ e $\dot{\mathbf{r}}(0) = (\dot{x}(0), 0)$, $\dot{x}(0) > 0$.

Afirmação: $\dot{x}(t) \neq 0$, para todo $t \in [0, b)$.

Suponhamos que existe $t_0 \in [0, b)$ tal que $\dot{x}(t_0) = 0$. Seja $t_0 = \min\{t \geq 0; \dot{x}(t) = 0\}$. Como \dot{x} é contínua e em $t = 0$ temos $\dot{x}(0) > 0$, e segue que $t_0 > 0$. Logo $\dot{x}(t) > 0$, para $t \in [0, t_0)$.

Temos que $\dot{\mathbf{r}}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)) = (0, \dot{y}(t_0))$, com $\dot{y}(t_0) \neq 0$, pois $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$, para todo t (veja comentário (2) acima).

Podemos escrever $\dot{\mathbf{r}}(t) = a(t)(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$, com $a(t) = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| > 0$ e $\varphi(0) = 0$, φ contínua.

Derivando

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \dot{a}(t)(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)) + a(t)\dot{\varphi}(t)(-\sin\varphi(t), \cos\varphi(t))$$

$$\text{e } \dot{\mathbf{r}}^\perp(t) = a(t)(-\sin\varphi(t), \cos\varphi(t)).$$

Assim,

$$k(t) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^3} \langle \ddot{\mathbf{r}}(t), \dot{\mathbf{r}}^\perp(t) \rangle = \frac{a^2(t)\dot{\varphi}(t)}{a^3(t)} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{a(t)} > 0,$$

pois a curvatura é positiva (ver comentário 5). Isto mostra que $\varphi(t)$ é crescente.

Como $\dot{x}(t_0) = 0$, $\varphi(t_0) = \frac{\pi}{2}$ (e assim $\dot{y}(t_0) > 0$), ou $\varphi(t_0) = \frac{3\pi}{2}$ (e assim $\dot{y}(t_0) < 0$). Como φ é crescente e t_0 é mínimo, temos que $\varphi(t_0) = \frac{\pi}{2}$, o que implica que $\dot{y}(t_0) > 0$.

Além disto, como x é crescente em $(0, t_0)$, temos que $x(t_0) > 0$. Lembre que $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ é radial e expansora, isto é, $\ddot{\mathbf{r}}(t) = b(t)\mathbf{r}(t) = b(t)(x(t), y(t))$, com $b(t) > 0$.

Assim, $k(t_0) = b(t_0) \langle (x(t_0), y(t_0)), (-\dot{y}(t_0), 0) \rangle = b(t_0)(-x(t_0)\dot{y}(t_0)) < 0$, contradição. Portanto não existe t_0 tal que $\dot{x}(t_0) = 0$. Isto mostra a afirmação. ■

Segue da afirmação acima, que $\dot{x}(t) > 0$, para todo t , $a < t < b$. Logo $x(t)$ é crescente.

Desta forma, a função $t \rightarrow x(t)$ é injetiva, e assim existe função inversa $t = t(x)$.

Defina $f(x) = y(t(x))$. Note que o gráfico de f é igual ao traço de \mathbf{r} . Derivando f em relação a x , obtemos

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dt}y(t(x)) \frac{d}{dx}t(x) = \frac{\frac{d}{dt}y(t(x))}{\frac{d}{dt}x(t(x))}$$

Derivando novamente obtemos

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{1}{\dot{x}^3} \langle \ddot{\mathbf{r}}, \|\dot{\mathbf{r}}\| \mathbf{n} \rangle = \frac{k\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}{\dot{x}^3} > 0$$

pois $\dot{x} > 0$ e $k > 0$.

Assim, o traço de $\mathbf{r}(t)$ é dado pelo gráfico de uma função f côncava para cima.

Pela simetria do problema, a solução $\mathbf{r}(t)$ é simétrica em relação ao eixo y , como mostra figura 5.2.7. Assim, a função f é par. ■

Observação: Note que na prova do teorema acima, só usamos o fato de que a força é radial e expansora. Assim, o teorema 5.2.9 vale para qualquer força com estas propriedades.

Seja $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ uma solução de (5.2.2) (com $K \neq 0$), com intervalo de definição maximal (a, b) . Da proposição 5.2.8, temos que a e b são finitos.

Temos o seguinte resultado:

Proposição 5.2.10 Quando $t \rightarrow b^-$, $\mathbf{r}(t)$ converge para o fio com velocidade infinita e radial (isto é, ortogonal ao fio).

Prova: Pela proposição 5.2.8, toda solução $\mathbf{r}(t)$, com $K \neq 0$, colide (em tempo finito). Logo $\|\mathbf{r}(t)\| \rightarrow 1$, quando $t \rightarrow b^-$. Por outro lado, temos que $h = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 + V(\mathbf{r})$. Logo $\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = 2(h - V(\mathbf{r}))$.

Quando $t \rightarrow b^-$, $\|\mathbf{r}\| \rightarrow 1$, e assim $V(\mathbf{r}) \rightarrow -\infty$. Portanto $\|\dot{\mathbf{r}}\| \rightarrow +\infty$, quando $t \rightarrow b^-$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\mathbf{r}(t)$ converge para o ponto $(1, 0)$ do fio, isto é, $x(t) \rightarrow 1$ e $y(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow b^-$.

Vamos mostrar que, neste caso, $\dot{\mathbf{r}}(t)$, quando $t \rightarrow b^-$, tem como limite um vetor horizontal, isto é, $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow b^-$. Primeiro, note que $\dot{x}(t) \neq 0$, para t perto de b . Mais ainda, $\dot{x}(t) \rightarrow +\infty$, quando $t \rightarrow b^-$. Para ver isto, suponha que existe seqüência $t_n \rightarrow b^-$, com $|\dot{x}(t_n)| < M$, para algum M . Logo, $|\dot{y}(t_n)| \rightarrow +\infty$ (pois $\|\dot{\mathbf{r}}(t_n)\| \rightarrow +\infty$). Assim, $|K| = |\dot{x}(t_n)y(t_n) - \dot{y}(t_n)x(t_n)| \rightarrow +\infty$, o que é uma contradição, pois K é constante.

Agora, suponhamos, por absurdo, que $\lim_{t \rightarrow b^-} \frac{|\dot{y}(t)|}{|\dot{x}(t)|} \neq 0$. Isto implica que existe uma seqüência $\{t_n\}$, com $t_n \rightarrow b^-$, tal que $\frac{|\dot{y}(t_n)|}{|\dot{x}(t_n)|} \geq \delta$, para algum $\delta > 0$.

Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} |K| &= |x(t_n)\dot{y}(t_n) - y(t_n)\dot{x}(t_n)| \\ &> |x(t_n)||\dot{y}(t_n)| - |y(t_n)||\dot{x}(t_n)| \\ &\geq |x(t_n)|(\delta|\dot{x}(t_n)|) - |y(t_n)||\dot{x}(t_n)| \\ &= |\dot{x}(t_n)|(\delta|x(t_n)| - |y(t_n)|). \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $t_n \rightarrow b^-$, temos que $|K| \rightarrow +\infty$, contradição. Portanto, $\lim_{t \rightarrow b^-} \frac{|\dot{y}(t)|}{|\dot{x}(t)|} = 0$. ■

Sabemos, pelo teorema 5.2.3, que não existem soluções circulares de (5.2.2) no interior do fio. De fato, pelo que foi visto até agora, verificamos que não existem soluções periódicas na região planar interior ao fio circular, a menos da solução de equilíbrio, a origem.

b) Dinâmica no exterior do fio circular ($K \neq 0$)

Fixando os níveis de energia h , na região exterior ao fio circular obtemos o retrato de fase abaixo (observe figura 5.2.3):

Na região exterior ao fio circular, para $0 < K < \frac{1}{2\sqrt{2}}$:

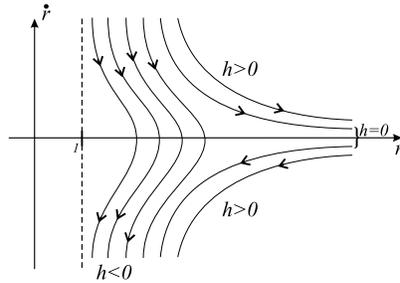


Figura 5.2.8:

Na região exterior ao fio circular, para $K > 2\sqrt{2}$:

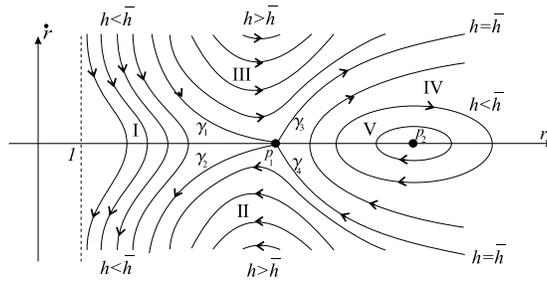


Figura 5.2.9:

Analisando o espaço de fase, obtemos a seguinte dinâmica do problema: no exterior do fio, para $0 < K < \frac{1}{2\sqrt{2}}$, o retrato de fase (veja figura 5.2.8) coincide com o caso da dinâmica exterior ao fio, para $K = 0$ (ver figura 5.2.5), onde observamos que todas as soluções colidem ou escapam ao infinito. Para $K > 2\sqrt{2}$, analisamos o retrato de fase (figura 5.2.9) por regiões, como segue.

Na região I: as soluções são limitadas, e convergem ao fio circular.

Na região II: as soluções são ilimitadas, vêm do infinito e convergem ao fio circular.

Na região III: as soluções são ilimitadas, saem próximas ao fio circular e escapam (ao infinito).

Na região IV: as soluções são ilimitadas, se aproximam da solução circular e escapam (ao infinito).

Na região V: as soluções são limitadas, e ficam próximas à solução circular.

Os dois pontos p_1 e p_2 , na figura, representam as soluções circulares. O ponto p_1 é uma solução circular instável e o ponto p_2 é estável. As curvas γ_1 e γ_3 convergem à solução circular instável. A curva γ_2 sai próxima da solução circular p_1 e converge para o fio circular. A curva γ_4 sai próxima de p_1 e escapa.

5.2.4 Região de Hill no plano horizontal

Como o potencial V é invariante em relação à rotação em torno do eixo z , para determinar a região de Hill correspondente ao plano horizontal, basta estudar o gráfico da função V ao longo do eixo x (veja figura), isto é, determinar todo x tal que $V(x) \leq h$, $h < 0$.

Como vimos anteriormente,

$$V(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(x+1)^2 \cos^2 \theta + (x-1)^2 \sin^2 \theta}}$$

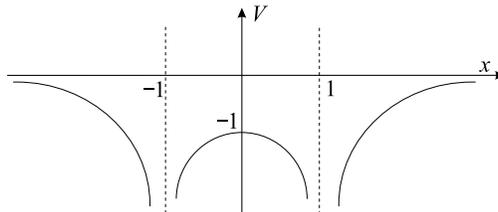


Figura 5.2.10: Gráfico de $V(x)$

Note que:

a) Quando $\|x\| \rightarrow 1$, temos $V(x) \rightarrow -\infty$

b) Quando $\|x\| \rightarrow +\infty$, temos $V(x) \rightarrow 0$

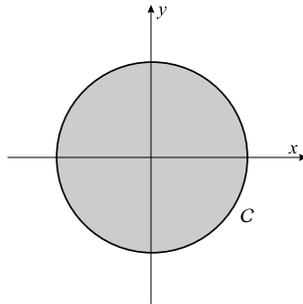
c) Para $x > 0$, $V(x) = U(r)$ e temos

para $0 < x < 1$, $V'(x) < 0$ (V decresce)

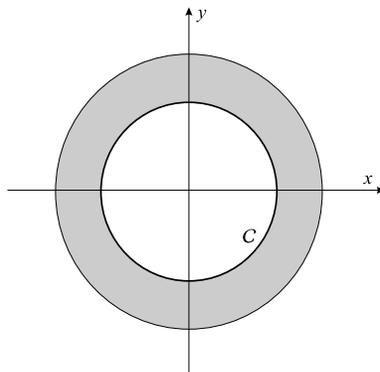
para $x > 1$, $V'(x) > 0$ (V cresce)

Desta forma, chamando $h^* = V(0) = -1$, temos:

Para $h^* \leq h < 0$ e $0 < \|\mathbf{r}\| < 1$, a região de Hill está representada na figura abaixo:

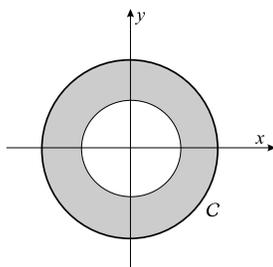


Para $h^* \leq h < 0$ e $\|\mathbf{r}\| > 1$, a região de Hill está representada na figura abaixo:

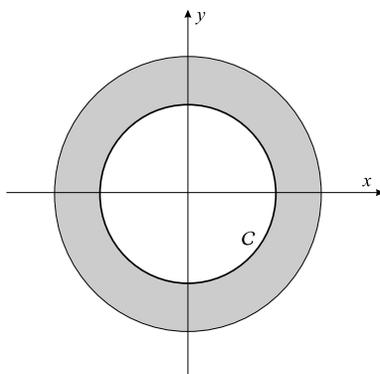


Note que quanto mais próximo h estiver de zero, mais largo fica o anel.

Para $h < h^*$ e $0 < \|\mathbf{r}\| < 1$, a região de Hill está representada na figura abaixo:



Para $h < h^*$ e $\|\mathbf{r}\| > 1$, obtemos a região:



Note que quanto menor o valor de h , mais estreitos ficam os anéis.

5.2.5 Solução de equilíbrio (no plano horizontal)

Teorema 5.2.11 *A única solução de equilíbrio do sistema (5.2.2) é a solução $\mathbf{r}(t) = 0$. Além disso, este equilíbrio é instável.*

Prova: No plano horizontal, temos que $F(r) \neq 0$, para todo $r = \|\mathbf{r}\|$, F como definida no sistema (5.2.2).

Desta forma, $-F(r) \mathbf{r} = 0$ se, e somente se, $\mathbf{r} = 0$, e obtemos assim que $\mathbf{r}(t) = 0$ é a única solução de equilíbrio.

Calculando os autovalores da parte linearizada, encontramos $i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ como autovalores (o equilíbrio da parte linear é um centro), não podendo com isto determinar a estabilidade do equilíbrio do sistema como um todo.

Estudando a matriz hessiana do sistema

$$HessV(0,0)(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

obtemos uma matriz definida negativa. Por resultado de Chetaev, concluímos que o equilíbrio do sistema é instável. ■

Observação: Observe que este é um equilíbrio para o sistema em coordenadas polares (r, φ) , com $K = 0$.

5.3 Dinâmica no(s) plano(s) vertical(is)

Nesta seção, provamos a existência de soluções periódicas no plano vertical, nos seguintes casos:

- (1) Soluções periódicas suficientemente longe do fio circular,
- (2) Soluções periódicas suficientemente próximas ao fio circular, intersectando a região do plano horizontal interior ao fio,
- (3) Soluções periódicas em forma de oito.

O fio circular homogêneo, a menos que seja descrito de forma diferente, será considerado como descrevemos inicialmente, isto é, contido no plano- (x, y) e com centro na origem. Observe que pela simetria do potencial, basta estudar o problema restrito ao plano vertical- (x, z) .

Considere o problema

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}), \tag{5.3.11}$$

onde $V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}, 1, M)$ é o potencial de um fio circular homogêneo \mathcal{C} , com raio unitário e massa $M = 2\pi\lambda$, \mathbf{r} restrito ao plano- (x, z) .

Nas três subseções seguintes, apresentamos o estudo da existência de soluções periódicas do problema (5.3.11).

5.3.1 Soluções periódicas longe do fio circular

Como o problema do fio circular, com massa fixa M , pode ser visto como uma aproximação do problema de Kepler (ver capítulo 4, seção 4.1), obtemos o seguinte resultado:

Proposição 5.3.1 *Considere o problema*

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}, \epsilon), \quad (5.3.12)$$

onde $V(\mathbf{r}, \epsilon) = V(\mathbf{r}, \epsilon, M)$ é o potencial de um fio circular homogêneo com raio ϵ e massa fixa M , com \mathbf{r} restrito ao plano- (x, z) . Seja C um círculo neste plano vertical, com centro na origem e raio arbitrário, e seja U uma vizinhança aberta de C da forma $C \subset U \subset (\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$.

Então, existe $\delta_0 > 0$ tal que, para cada ϵ , $0 < \epsilon < \delta_0$, existe uma solução periódica do problema (5.3.12) em U . Mais ainda, esta solução tem por traço uma curva fechada simples, simétrica em relação aos eixos x e z , que enlaça a origem.

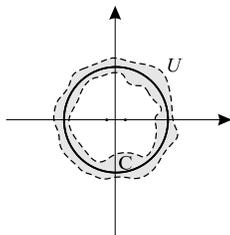


Figura 5.3.11: Círculo C e vizinhança U

Prova: Pela proposição 2.1.1, temos que este problema pode ser considerado como uma perturbação do problema de Kepler. Mais ainda, pela proposição 1.2.2, $V(\mathbf{r}, \epsilon)$, $\epsilon \neq 0$, é simétrico em relação aos eixos x e z , e para $\epsilon = 0$, obtemos o potencial de Kepler, que certamente é simétrico em relação a estes eixos. Segue do corolário 1.2.3 que o campo gradiente de V é simétrico, como campo de vetores, em relação aos eixos x e z , para $\epsilon \neq 0$. Esta simetria também vale tomando $\epsilon = 0$. Sendo assim, desde que $V(\mathbf{r}, \epsilon)$ é analítica, o campo gradiente de V satisfaz as condições do teorema 4.1.1. Isto prova a proposição. ■

Observação 5.3.2 1) Podemos supor que as soluções periódicas dadas na proposição 5.3.1 intersectam o eixo x em exatamente dois pontos: $(x_0, 0)$, $(-x_0, 0)$, para algum $x_0 > 0$ (veja observação 4.1.4).

2) Note que δ_0 da proposição depende de U e C (ver observação 4.1.2)

Observação: Também podemos usar [V1] para obter um resultado semelhante (solução periódica de período pré-fixado, não garante simetria), mas isto requer a verificação de certas hipóteses.

Podemos agora enunciar o principal resultado desta seção.

Teorema 5.3.3 *Existe $\delta_0 > 0$ tal que, para cada ϵ , $0 < \epsilon < \delta_0$, existe uma solução periódica $\mathbf{s}(t)$ do problema (5.3.11) satisfazendo $\frac{1}{2\epsilon} < \|\mathbf{s}(t)\| < \frac{3}{2\epsilon}$.*

Mais ainda, esta solução $\mathbf{s}(t)$ tem por traço uma curva fechada simples, simétrica em relação aos eixos x e z , que enlaça a origem.

Prova: Seja C círculo como na proposição 5.3.1, com raio unitário e $U = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{2} < \|\mathbf{p}\| < \frac{3}{2}\}$. Pela proposição anterior, existe $\delta_0 > 0$, tal que para cada ϵ , $0 < \epsilon < \delta_0$, existe uma solução $\mathbf{r}_\epsilon(t)$ do problema (5.3.12) em U , com $\mathbf{r}_\epsilon(t)$ periódica, satisfazendo $\frac{1}{2} < \|\mathbf{r}_\epsilon(t)\| < \frac{3}{2}$, e cujo traço é uma curva fechada simples, simétrica em relação aos eixos x e z , que enlaça a origem.

Pelo corolário 1.2.7, $\mathbf{s}(t) = \frac{1}{\epsilon}\mathbf{r}_\epsilon(\epsilon^{3/2}t)$ é solução de (5.3.11). Além disso, $\mathbf{s}(t)$ satisfaz $\frac{1}{2\epsilon} < \|\mathbf{s}(t)\| < \frac{3}{2\epsilon}$, para todo t .

Pelas propriedades de $\mathbf{r}_\epsilon(t)$, temos que $\mathbf{s}(t)$ também é periódica e tem por traço uma curva fechada simples, simétrica em relação aos eixos x e z , que enlaça a origem. ■

Observação 5.3.4 Pela observação 5.3.2, podemos supor que as soluções periódicas dadas no teorema 5.3.3 intersectam o eixo x em exatamente dois pontos.

Comentários

1) Se o período de $\mathbf{r}_\epsilon(t)$ for τ , então o período de $\mathbf{s}(t)$ será $\tau/\epsilon^{3/2}$, e assim, se ϵ está próximo

de 0, então o período de $\mathbf{s}(t)$ será grande. Desta forma as órbitas periódicas obtidas são de longo período.

2) $\|\mathbf{s}(t)\|$ cresce quando ϵ decresce.

Corolário 5.3.5 *Seja $R > 0$. Então, existe uma solução periódica $\mathbf{s}(t)$ do problema (5.3.11), com $\|\mathbf{s}(t)\| \geq R$, para todo t . Mais ainda, $\mathbf{s}(t)$ tem por traço uma curva fechada simples, simétrica em relação aos eixos x e z , que enlaça a origem.*

Prova: Dado $R > 0$, tome $0 < \epsilon < \delta_0$ fixo tal que $2\epsilon < \frac{1}{R}$, assim, para $\mathbf{s}(t) = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{r}_\epsilon(\epsilon^{3/2}t)$, temos $R < \|\mathbf{s}(t)\|$, para todo t .

Pelas propriedades de $\mathbf{r}_\epsilon(t)$, temos que $\mathbf{s}(t)$ também é periódica, e tem por traço uma curva fechada simples, simétrica em relação aos eixos x e z , que envolve a origem. ■

Segue do corolário acima que existem infinitas soluções $\mathbf{s}(t)$ periódicas de (5.3.11), simétricas em relação aos eixos x e z , e longe do fio circular (ou seja, estão afastadas da origem, veja figura abaixo).

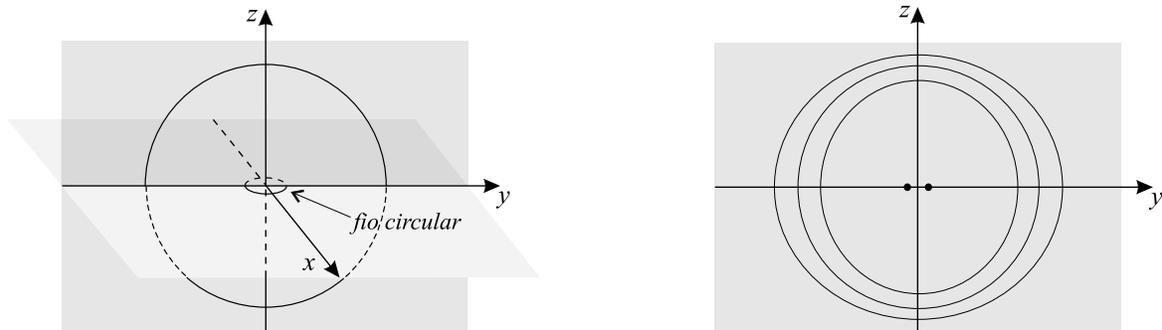


Figura 5.3.12: Soluções periódicas longe do fio circular

5.3.2 Soluções periódicas perto do fio circular

Na proposição seguinte estamos considerando o fio circular no plano- (x, z) , passando pela origem e com centro contido no eixo x (conforme figura 5.3.13).

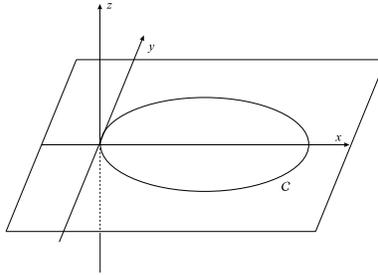


Figura 5.3.13: Fio circular centrado em $(\frac{1}{\epsilon}, 0, 0)$

Lembre que $W(x, z; \frac{1}{\epsilon})$ é o potencial do fio circular de densidade constante λ , contido no plano- (x, z) e passando pela origem, com raio $\frac{1}{\epsilon}$ e centro $(\frac{1}{\epsilon}, 0, 0)$ (faço $\frac{c}{2} = \frac{1}{\epsilon}$ em (2.2.3)).

Proposição 5.3.6 *Considere o problema*

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla W\left(\mathbf{r}, \frac{1}{\epsilon}\right), \quad (5.3.13)$$

com \mathbf{r} restrito ao plano- (x, z) . Seja C um círculo neste plano- (x, z) , com centro na origem e raio arbitrário, e seja U um aberto que contém C da forma $C \subset U \subset (\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$.

Então, existe $\delta_0 > 0$ tal que, para cada ϵ , $0 < \epsilon < \delta_0$, existe uma solução periódica do problema (5.3.13) em U . Mais ainda, esta solução tem por traço uma curva fechada simples, simétrica em relação ao eixo x , que enlaça a origem.

Prova: Pela lema 2.2.7, temos que este problema pode ser considerado como uma perturbação do problema do fio infinito $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{r}$, com $\kappa = 2\lambda$.

Desde que o campo gradiente de W satisfaz as condições do teorema 4.2.1, seguem-se as conclusões desta proposição. ■

Observações:

1) Também aqui, δ_0 da proposição depende de U e C (ver observação 5.3.2)

2) Note que as soluções obtidas na proposição 5.3.6 têm por traço curvas fechadas simples que enlaçam o fio circular. Isto significa que um dos pontos de interseção do fio circular

no plano vertical está contido na região limitada do complemento do traço da solução.

3) Podemos supor que as soluções periódicas dadas na proposição 5.3.6 intersectam o eixo x em exatamente dois pontos (veja observação 4.2.3).

Lembre que $V(\mathbf{r}, \rho, M)$ denota o potencial do fio circular, com raio ρ e massa M , com centro na origem (veja capítulo 1, seção 1.2.3).

Queremos agora variar o raio mantendo fixa a densidade λ , isto é, vamos considerar potenciais da forma $V(\mathbf{r}, \rho, \rho(2\pi\lambda))$. Obtemos o seguinte resultado:

Proposição 5.3.7 *Considere o problema*

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V\left(\mathbf{r}, \frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}(2\pi\lambda)\right), \quad (5.3.14)$$

com \mathbf{r} restrito ao plano- (x, z) .

Então, existe $\delta_0 > 0$ tal que, para cada ϵ , $0 < \epsilon < \delta_0$, existe uma solução periódica $\mathbf{r}_\epsilon(t)$ do problema (5.3.14), tendo como traço uma curva fechada simples, simétrica em relação ao eixo x , que enlaça o fio circular de centro na origem e raio $\frac{1}{\epsilon}$. Além disso, $\mathbf{r}_\epsilon(t)$ satisfaz $\frac{1}{2} < \text{dist}(\mathbf{r}_\epsilon(t), \mathcal{C}_\epsilon) < \frac{3}{2}$.

Prova: Segue diretamente do lema 1.2.9 e da proposição anterior, tomando $U = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{2} < \|\mathbf{p}\| < \frac{3}{2} \}$ e C unitário. Veja também a observação 2 desta seção e que W é transladado de V (ver (2.2.3)). ■

Finalmente, temos o principal resultado desta seção:

Teorema 5.3.8 *Seja $\chi > 0$. Então, existe uma solução periódica $\mathbf{r}(t)$ do problema (5.3.11), com $\text{dist}(\mathbf{r}(t), \mathcal{C}) \leq \chi$, para todo t . Mais ainda, $\mathbf{r}(t)$ tem por traço uma curva fechada simples, simétrica em relação ao eixo x , que enlaça o fio circular.*

Prova: Pela proposição 5.3.7, existe $\delta_0 > 0$ tal que, para cada ϵ , $0 < \epsilon < \delta_0$, existe uma solução $\mathbf{r}_\epsilon(t)$ do problema (5.3.14), satisfazendo:

(i) $\frac{1}{2} < \text{dist}(\mathbf{r}_\epsilon(t), \mathcal{C}_\epsilon) < \frac{3}{2}$

(ii) $\mathbf{r}_\epsilon(t)$ é periódica

(iii) tem por traço uma curva fechada simples que enlaça o fio circular de centro na origem e raio $\frac{1}{\epsilon}$.

(iv) $\mathbf{r}_\epsilon(t)$ é simétrica em relação ao eixo x .

Pelo corolário 1.2.7, $\mathbf{s}(t) = \epsilon \mathbf{r}_\epsilon(\frac{t}{\epsilon})$ é solução de (5.3.11). Além disso, por (i), $\frac{\epsilon}{2} < \text{dist}(\mathbf{s}(t), \mathcal{C}) < \frac{3\epsilon}{2}$.

Dado $\chi > 0$, tome $0 < \epsilon < \delta_0$ tal que $\frac{3}{2}\epsilon < \chi$, assim $\text{dist}(\mathbf{s}(t), \mathcal{C}) \leq \chi$ e pelas propriedades (ii), (iii) e (iv) de $\mathbf{r}_\epsilon(t)$, temos que $\mathbf{s}(t)$ é periódica, tem por traço uma curva fechada simples, simétrica em relação ao eixo x , que enlaça o fio circular \mathcal{C} . ■

Comentários

1) Segue do teorema 5.3.7 que existem infinitas soluções periódicas simétricas perto do fio circular (veja figura abaixo).

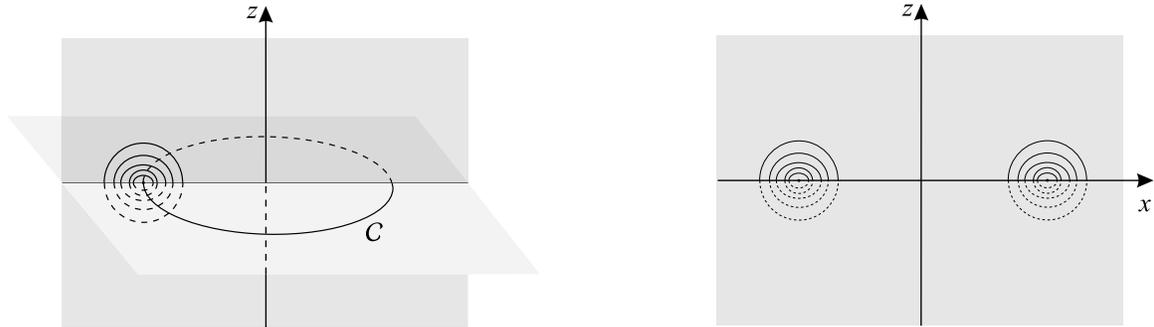


Figura 5.3.14: Soluções periódicas perto do fio circular

2) Pela simetria do problema, obtemos soluções periódicas enlaçando o ponto $(-1, 0)$ e soluções periódicas enlaçando o ponto $(1, 0)$.

3) Se o período de $\mathbf{r}_\epsilon(t)$ for τ , então o período de $\mathbf{s}(t)$ será $\tau\epsilon$, assim se ϵ está próximo de 0, então o período de $\mathbf{s}(t)$ será pequeno. Desta forma as órbitas periódicas obtidas são de curto período.

4) $\|\mathbf{s}(t)\|$ decresce quando ϵ decresce.

5) Seja $\eta > 0$. Como $\dot{\mathbf{s}}(0) = \dot{\mathbf{r}}_\epsilon(0)$, pela afirmação 4.1.2, podemos escolher \mathbf{r}_ϵ com $\|\dot{\mathbf{r}}_\epsilon(0) - \mathbf{v}_0\| < \eta$. Assim as soluções $\mathbf{s}(t)$, obtidas deste teorema, têm velocidades η -próximas.

Observação 5.3.9 Podemos supor que as soluções periódicas dadas no teorema 5.3.8 intersectam o eixo x em exatamente dois pontos (veja observação 4.2.3).

5.3.3 Soluções em forma de oito

Lembre que estamos considerando o fio circular homogêneo \mathcal{C} , com raio $\rho = 1$ e massa M , contido no plano- (x, y) e centrado na origem espaço euclidiano \mathbb{R}^3 .

Como falamos no início desta seção, consideremos o sistema

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}), \quad (5.3.15)$$

onde $V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}, 1, M)$ é o potencial de \mathcal{C} , com \mathbf{r} restrito ao plano- (x, z) . Note que o potencial V tem singularidades nos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, que são os pontos de interseção do fio \mathcal{C} com o plano vertical- (x, z) .

O sistema (5.3.15) é equivalente a (ver 1.1.4):

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -\lambda \int_0^{2\pi} \frac{(x - \cos\theta) d\theta}{\{(x - \rho \cos\theta)^2 + (y - \rho \sin\theta)^2 + z^2\}^{3/2}} \\ \ddot{z} &= -\lambda z \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\{(x - \rho \cos\theta)^2 + (y - \rho \sin\theta)^2 + z^2\}^{3/2}} \end{cases} \quad (5.3.16)$$

Nesta seção mostraremos a existência de soluções periódicas com a forma da figura oito.

Para mostrar a existência de soluções periódicas com a forma da figura oito, no plano- (x, z) , usaremos o seguinte teorema.

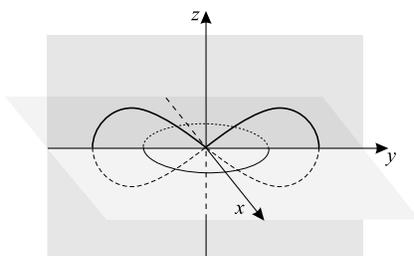


Figura 5.3.15: Solução em forma da figura do oito

Teorema 5.3.10 Existe $\mathbf{r} : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(-1, 0), (1, 0)\}$, $\tau > 0$, tal que $\mathbf{r}(t) = (x(t), z(t))$ satisfaz:

- (1) \mathbf{r} é solução de 5.3.15
- (2) $z(0) = 0, x(0) > 1$
- (3) $\mathbf{r}(\tau) = (0, 0)$, isto é, $x(\tau) = z(\tau) = 0$
- (4) $\dot{x}(0) = 0$
- (5) $z(t) > 0, t \in (0, \tau)$.

Observação: O teorema não diz nada sobre o ângulo entre $(-1, 0)$ e $\dot{\mathbf{r}}(\tau)$. Este ângulo pode ser menor que $\frac{\pi}{2}$ como na figura à esquerda abaixo, ou maior que $\frac{\pi}{2}$ como na figura à direita abaixo.

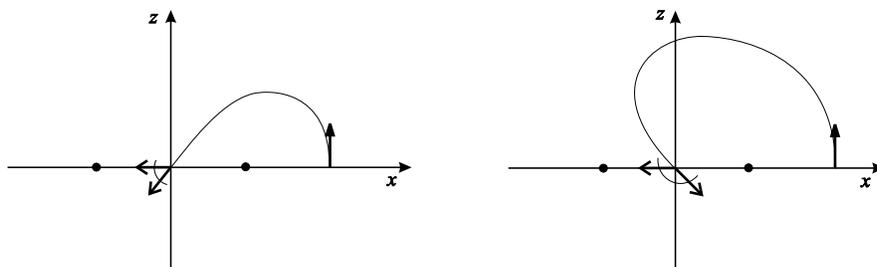


Figura 5.3.16: Traço da solução $\mathbf{r}(t)$

O seguinte lema usa a simetria do problema para completar a construção da solução periódica com a forma da figura oito. Note a similaridade deste lema com os lemas 4.0.14, 4.0.15.

Lema 5.3.11 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, com $\varphi_i \Omega = \Omega$, $i = 1, 2$, onde $\varphi_1(x, z) = (-x, z)$ e $\varphi_2(x, z) = (x, -z)$. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, invariante por φ_1 e φ_2 . Se $\mathbf{r} : [0, \tau] \rightarrow \Omega$, $\tau > 0$, é solução do problema

$$\ddot{\mathbf{r}} = f(\mathbf{r}) \quad (5.3.17)$$

tal que $\mathbf{r}(t) = (x(t), z(t))$ satisfaz $z(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\mathbf{r}(\tau) = (0, 0)$, então a extensão $\bar{\mathbf{r}} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ de \mathbf{r} , definida por:

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}(t - 4n\tau), & t \in [4n\tau, (4n + 1)\tau] \\ \varphi_1 \varphi_2 \mathbf{r}((4n + 2)\tau - t), & t \in [(4n + 1)\tau, (4n + 2)\tau] \\ \varphi_1 \mathbf{r}(t - (4n + 2)\tau), & t \in [(4n + 2)\tau, (4n + 3)\tau] \\ \varphi_2 \mathbf{r}(4n\tau - t), & t \in [(4n - 1)\tau, (4n)\tau], \end{cases}$$

com $n \in \mathbb{Z}$, é solução periódica de período 4τ do problema (5.3.17). Mais ainda, o traço de $\bar{\mathbf{r}}$ é simétrico em relação aos eixos x e z .

Prova: Análoga à prova do lema 4.0.14. ■

Observação:

1) Seja \mathbf{r} como no teorema anterior. Aplicando o lema a este \mathbf{r} obtemos uma solução $\bar{\mathbf{r}}$ com a forma da figura oito. Se o ângulo entre $(-1, 0)$ e $\dot{\mathbf{r}}(\tau)$ é menor que $\frac{\pi}{2}$, o traço de $\bar{\mathbf{r}}$ é como na figura abaixo.

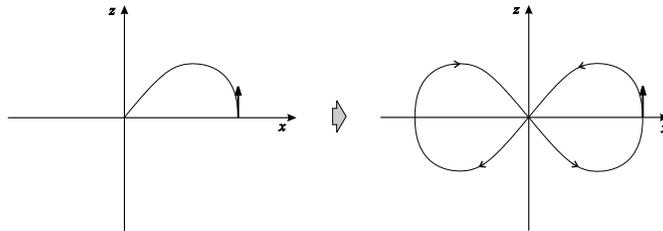


Figura 5.3.17: Solução em forma da figura do oito

Se o ângulo entre $(-1, 0)$ e $\dot{\mathbf{r}}(\tau)$ é maior que $\frac{\pi}{2}$, o traço de $\bar{\mathbf{r}}$ é como na figura 5.3.18.

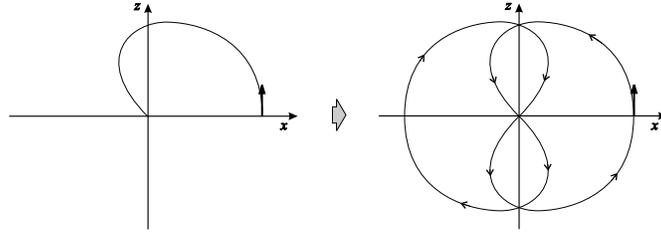


Figura 5.3.18: Solução em forma da figura do oito

2) Por (5) do teorema, o número de enlaçamento de $\bar{\mathbf{r}} \leq 0 \leq 4\tau$, em $(1, 0)$ é $+1$, e em $(-1, 0)$ é -1 .

Lembre que o número de enlaçamento $W(\alpha, p)$ de uma curva fechada $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{p\}$, ao redor de $p \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ é definido como $W(\alpha, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{dz}{z-p} \in \mathbb{Z}$. A função $[\alpha] \mapsto W(\alpha, p)$, é um isomorfismo entre $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{p\})$ e \mathbb{Z} .

Observação 5.3.12 Os métodos desta seção servem também para construir soluções periódicas com a forma da figura oito, para o problema planar simétrico de Euler, isto é, para o problema de dois centros fixos, com a mesma massa. Para mais detalhes, veja o final desta seção.

Passemos à prova do teorema 5.3.10. Estaremos denotando por $\mathbf{r}(t)$ uma solução de (5.3.15).

Prova do teorema 5.3.10: Seja $\mathbf{s}_0(t) = \mathbf{s}(t, \tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0, 1)$ uma solução de 5.3.15 obtida do teorema 5.3.3, que passa por fora do fio circular, e seja $\mathbf{s}_1(t) = \mathbf{s}(t, \tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_1, 1)$, solução de 5.3.15 obtida do teorema 5.3.8, que enlaça o ponto $(1, 0)$, veja figura 5.3.19. Considere as condições iniciais $\tilde{\mathbf{x}}_0 = (\tilde{x}_0, 0)$ e $\tilde{\mathbf{x}}_1 = (\tilde{x}_1, 0)$ no eixo positivo dos x . É claro que podemos supor $\tilde{x}_0 > \tilde{x}_1 > 1$. Lembre que as velocidades iniciais $\tilde{\mathbf{v}}_0 = (0, \tilde{v}_0)$ e $\tilde{\mathbf{v}}_1 = (0, \tilde{v}_1)$ são ortogonais ao eixo x . Suponhamos que elas tenham o mesmo sentido do eixo z , isto é, $\tilde{v}_0 > 0, \tilde{v}_1 > 0$.

Pela observação 5.3.4, podemos escolher \mathbf{s}_0 tal que intersecta transversalmente o eixo x em exatamente dois pontos $(\tilde{x}_0, 0)$ e $(-\tilde{x}_0, 0)$, com $\tilde{x}_0 > 1$. Também, pela observação 5.3.9 e pelo teorema 5.3.8, podemos escolher \mathbf{s}_1 tal que intersecta transversalmente o eixo x em exatamente dois pontos $(\tilde{x}_1, 0)$ e $(\tilde{x}'_1, 0)$, com $\tilde{x}_1 > 1, 0 < \tilde{x}'_1 < 1$.

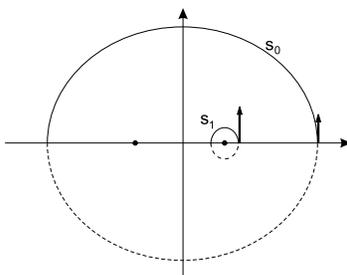


Figura 5.3.19:

Para continuar a prova deste teorema consideremos as seguintes afirmações e o seguinte lema, que provaremos depois.

Afirmação 5.3.13 *Podemos escolher $\mathbf{s}_0(t) = \mathbf{s}(t, \tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0, 1)$ e $\mathbf{s}_1(t) = \mathbf{s}(t, \tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_1, 1)$, com energia negativa. Além disso, podemos também escolher $\tilde{v}_0 < \tilde{v}_1$, e satisfazendo*

$$V(\tilde{\mathbf{x}}_1) + \frac{1}{2} |\tilde{v}_1|^2 < V(\tilde{\mathbf{x}}_0) + \frac{1}{2} |\tilde{v}_0|^2 < 0.$$

Seja $\delta_0 = V(\tilde{\mathbf{x}}_0) + \frac{1}{2} \tilde{v}_0^2 < 0$. No que segue denotaremos por $[\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_0] = \{(x, 0); \tilde{x}_1 \leq x \leq \tilde{x}_0\}$ e $[\tilde{\mathbf{v}}_0, \tilde{\mathbf{v}}_1] = \{(0, v); \tilde{v}_0 \leq v \leq \tilde{v}_1\}$.

Afirmação 5.3.14 *Seja $\mathcal{A} = ([\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_0] \times \{\tilde{\mathbf{v}}_0\}) \cup (\{\tilde{\mathbf{x}}_1\} \times [\tilde{\mathbf{v}}_0, \tilde{\mathbf{v}}_1])$. Para todo $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}$, a energia $H(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ da solução $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$ de 5.3.15 é menor ou igual a δ_0 .*

Na figura abaixo ilustramos o conjunto $\{(x, v); ((x, 0), (0, v)) \in \mathcal{A}\}$.

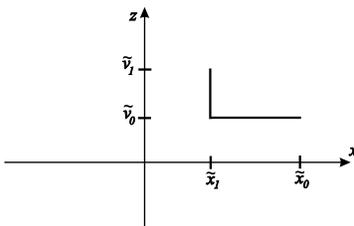


Figura 5.3.20:

O lema a seguir será usado de forma essencial mais adiante, mas ele também é interessante por si próprio.

Lema 5.3.15 Para todo $\delta < 0$, existe $T_\delta > 0$, tal que se $\mathbf{r}(t) = (x(t), z(t))$ é uma solução de (5.3.15), com $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) > 0$ e $E(\mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)) = H(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \leq \delta$, então $\lim_{t \rightarrow t_0^-} z(t) = 0$, para algum $t_0 \in (0, T_\delta]$.

A necessidade de colocar o limite $\lim_{t \rightarrow t_0^-} z(t)$ no enunciado acima, em vez de $z(t_0)$, deve-se ao fato da solução poder convergir a um dos pontos do fio.

Na prova do lema 5.3.15 mostraremos que podemos escolher $T_\delta = 2\left(1 + \frac{2}{\min\{A, 1\}}\right)$, onde $A = \frac{M}{(1+R_\delta)^3}$ e R_δ é raio da região de Hill, correspondente a δ (veja observação 5.3.20 adiante).

Antes de enunciarmos a última afirmação, observe o seguinte.

Para $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}$, seja $\tilde{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \inf\{t > 0; \dot{z}(t) = 0\}$, onde $(x(t), z(t)) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$ é uma solução de (5.3.15). Pelo lema 5.3.15 e afirmação 5.3.14, $\tilde{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ existe, e $\tilde{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \leq T_{\delta_0}$, para todo $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}$. Também, como $\dot{z}(0) = v > 0$, $\mathbf{v} = (0, v)$, temos que $\tilde{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) > 0$. Assim, segue que

$$\dot{z}(t) > 0, \quad \text{para todo } t \in [0, \tilde{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v})], \quad \text{e} \quad (5.3.18)$$

$$z(t) \quad \text{é crescente, para todo } t \in [0, \tilde{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v})]. \quad (5.3.19)$$

Note que $\dot{z}(\tilde{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v})) = 0$ e por (5.3.16), $z(\tilde{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v}))$ é máximo local da curva $z(t)$.

Definição 5.3.16 $\tilde{z}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = z(\tilde{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v}))$, com $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}$ e $(x(t), z(t)) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$ solução de (5.3.15).

Observação: $\tilde{z}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) > 0$, para todo $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}$ (segue da equação (5.3.19)).

A seguinte afirmação diz que existe uma altura $\xi > 0$, tal que todas as soluções $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$ de (5.3.15), com $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}$, "passam" desta altura, isto é:

Afirmação 5.3.17 Existe $\xi > 0$, tal que para todo $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}$, $\tilde{z}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \geq \xi$.

Assumindo as afirmações e o lema, continuaremos a prova do teorema.

Seja n tal que $\frac{1}{n} < \xi$, onde ξ é como na afirmação 5.3.17, e seja E_n o segmento $E_n = \{(x, \frac{1}{n}); x \in \mathbb{R}\}$.

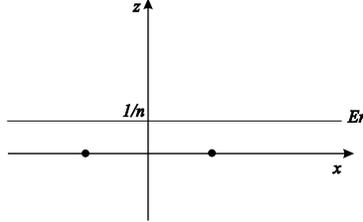


Figura 5.3.21: Segmento E_n

Seja $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}$, e $\mathbf{r}(t) = (x(t), z(t)) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$. Pela afirmação 5.3.17, $z(\tilde{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v})) \geq \xi > \frac{1}{n}$. Como $z(0) = 0$, temos que $0 = z(0) < \frac{1}{n} < z(\tilde{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v}))$. Pelo teorema do Valor Intermediário, obtemos que existe $t_1 = t_1(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ tal que

$$(1) \quad 0 < t_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) < \tilde{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$$

$$(2) \quad z(t_1(\mathbf{x}, \mathbf{v})) = \frac{1}{n}, \text{ isto é, } \mathbf{r}(t_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1) \in E_n.$$

Por (5.3.19), $t_1(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ é único satisfazendo (1) e (2) acima, e por (5.3.18), $\dot{z}(t_1(\mathbf{x}, \mathbf{v})) > 0$. Segue que $\dot{\mathbf{r}}(t_1)$ não é horizontal, isto é, a intersecção de \mathbf{r} com E_n em $t_1(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ é transversal.

Para $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}$, seja $t_2 = t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \inf\{t > \tilde{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v}); \mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1) \in E_n\}$. Note que t_2 existe, pois pelo teorema do Valor Intermediário e pelo lema 5.3.15, temos que $\{t > \tilde{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v}); \mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1) \in E_n\} \neq \emptyset$. Mais ainda, também pelo lema 5.3.15, temos $t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}) < T_{\delta_0}$. Pela definição de t_2 , é fácil ver que

$$z(t) > 0, \quad t \in (0, t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})]. \quad (5.3.20)$$

Mostraremos agora que $\dot{z}(t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})) \neq 0$, onde $(x(t), z(t)) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$. Se $\dot{z}(t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})) = 0$, então $t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ é um máximo local de z (pois, como $z(t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})) = 1/n > 0$, $\ddot{z}(t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})) < 0$, veja (5.3.16)). Segue que z é crescente, para $t < t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, t perto de $t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})$. Como $z(\tilde{t}) \geq \xi > 1/n$, $\tilde{t} = \tilde{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, temos que existe $t', \tilde{t} < t' < t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ com $z(t') = 1/n$, o que contradiz a definição de $t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})$. Isto mostra que $\dot{z}(t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})) \neq 0$ e segue que $\dot{\mathbf{r}}(t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}))$ não é horizontal, isto é, a intersecção de \mathbf{r} com E_n em $t = t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ é transversal.

Em resumo, temos aplicações $t_1, t_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ com

(1) $0 < t_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) < \tilde{t}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) < t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}) < T_{\delta_0}$, para todo $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}$

(2) $\mathbf{r}(t_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1) \in E_n$, $i = 1, 2$, $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}$ e $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$ intersecta transversalmente E_n em $t = t_1, t_2$.

(3) t_1, t_2 são os primeiros dois tempos onde $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$ intersecta transversalmente E_n , isto é, $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1) \notin E_n$, para todo $t \in (0, t_2)$, $t \neq t_1$.

Note que t_1 e t_2 dependem de n .

Mostraremos agora que t_1 e t_2 são funções contínuas em \mathcal{A} , para cada n fixado. Seja $(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{v})$, $(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$ uma seqüência em \mathcal{A} e $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}$. Escolha $a, b > 0$ tais que $t_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) < a < t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}) < b$, e que $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$, $a \leq t \leq b$, intersecta E_n transversalmente em um único ponto (certamente este ponto é $\mathbf{r}(t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$).

Note que também temos que $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$, $0 \leq t \leq a$, intersecta transversalmente E_n em um único ponto (este ponto é $\mathbf{r}(t_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$).

Aplicando a proposição 4.0.11 a $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$, com $0 \leq t \leq a$, e a $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$, com $a \leq t \leq b$, temos que para k suficientemente grande, $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, 1)$, com $0 \leq t \leq a$, e $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, 1)$, com $a \leq t \leq b$, intersectam E_n transversalmente em um único ponto. Segue que $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, 1)$, com $0 \leq t \leq b$, intersecta E_n transversalmente em dois pontos, e estas intersecções acontecem nos tempos $t_1(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$ e $t_2(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$. Aplicando a proposição 4.0.12 a $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$, com $0 \leq t \leq a$, temos que $\lim_{k \rightarrow +\infty} t(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) = t(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, onde $t(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$, com $(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ próximo de (\mathbf{x}, \mathbf{v}) , é o tempo em que $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}', \mathbf{v}', 1)$, $0 \leq t \leq a$, intersecta E_n transversalmente. Por unicidade das intersecções $t(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) = t_1(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, o que implica que t_1 é contínua. Da mesma forma, aplicando novamente a proposição 4.0.12 a $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$, com $a \leq t \leq b$, temos que $\lim_{k \rightarrow +\infty} t(\mathbf{r}_k(a), \dot{\mathbf{r}}_k(a)) = t(\mathbf{r}(a), \dot{\mathbf{r}}(a))$, onde $\mathbf{r}_k(a) = \mathbf{r}(a, \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, 1)$ e $\dot{\mathbf{r}}_k(a) = \dot{\mathbf{r}}(a, \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, 1)$, e onde $t(\mathbf{r}_k(a), \dot{\mathbf{r}}_k(a))$ é o tempo em que $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, 1)$, $a \leq t \leq b$, intersecta E_n transversalmente. Por unicidade das intersecções $t(\mathbf{r}_k(a), \dot{\mathbf{r}}_k(a)) = t_2(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$ e $t(\mathbf{r}(a), \dot{\mathbf{r}}(a)) = t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})$. Logo $t_2(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \rightarrow t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, o que implica que t_2 é contínua.

Defina $f : \mathcal{A} \rightarrow E_n$ por $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{r}(t_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$.

Como \mathbf{r} e t_2 são contínuas, segue que f é contínua. Lembre que $\mathbf{s}_0(t)$ e $\mathbf{s}_1(t)$ intersectam transversalmente o eixo x exatamente em dois pontos (veja início da prova do teorema), logo, para n suficientemente grande, $\mathbf{s}_0(t)$ e $\mathbf{s}_1(t)$ também intersectam E_n transversalmente

em exatamente dois pontos, e temos que $f(\tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0) = (\mathbf{x}', \frac{1}{n})$, com $\mathbf{x}' < 0$, $f(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_1) = (\mathbf{x}'', \frac{1}{n})$, com $\mathbf{x}'' > 0$. Assim, como \mathcal{A} é conexo e f contínua, pelo teorema do Valor Intermediário, existe $(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n) \in \mathcal{A}$ tal que $f(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n) = (0, \frac{1}{n})$.

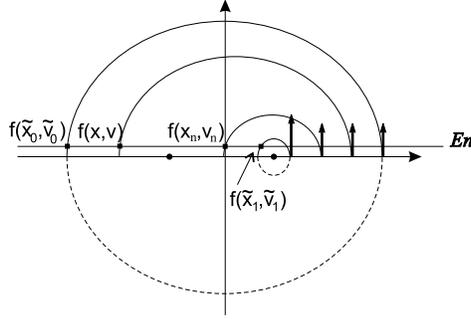


Figura 5.3.22:

Obtemos assim uma seqüência $\{(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n)\} \in \mathcal{A}$ tal que $\mathbf{r}(t_n, \mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n, 1) = (0, \frac{1}{n})$, para algum $t_n \in (0, T_{\delta_0})$, (de fato $t_n = t_2(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n)$). Como \mathcal{A} é compacto e $t_n \in [0, T_{\delta_0}]$, existe subsequência $(t_m, \mathbf{x}_m, \mathbf{v}_m)$ de $(t_n, \mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n)$, tal que $(t_m, \mathbf{x}_m, \mathbf{v}_m) \rightarrow (\tau, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}) \in [0, T_{\delta_0}] \times \mathcal{A}$.

Conseqüentemente, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{r}(t_m, \mathbf{x}_m, \mathbf{v}_m, 1) = \mathbf{r}(\tau, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}, 1)$. Por outro lado, $\mathbf{r}(t_m, \mathbf{x}_m, \mathbf{v}_m, 1) = (0, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$, o que implica $\mathbf{r}(\tau, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}, 1) = (0, 0)$. Portanto $\mathbf{r} : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}, 1)$ satisfaz (1), (2), (3), (4) do teorema.

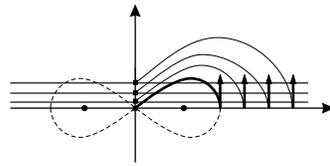


Figura 5.3.23: Obtenção da solução $\mathbf{r}(t)$

Para terminar a prova do teorema, mostramos que $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}, 1)$ satisfaz (5). Seja $(x_m(t), z_m(t)) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}_m, \mathbf{v}_m, 1)$. Note que, por (5.3.20), $z_m(t) \geq 0$, para todo $t \in [0, t_m]$ (pois $t_m = t_2(\mathbf{x}_m, \mathbf{v}_m)$). Logo $\bar{z}(t) \geq 0$, para todo $t \in [0, \tau]$, onde $(\bar{x}(t), \bar{z}(t)) = \mathbf{r}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}, 1)$. Conseqüentemente, se $\bar{z}(t') = 0$ para algum $t' \in (0, \tau)$, temos $\dot{\bar{z}}(t') = 0$ (t' é ponto de mínimo local), isto é, (\bar{x}, \bar{z}) é tangente ao eixo x em $t = t'$. Segue que $(\bar{x}(t), \bar{z}(t))$ está contido no eixo x , para todo $t \in (0, \tau)$, o que é uma contradição. Logo $\bar{z}(t) > 0$, $t \in (0, \tau)$. Isto mostra que $\mathbf{r}(t)$ satisfaz (5) do teorema. ■

Provas das afirmações e do lema 5.3.15

Afirmação 5.3.13 *Podemos escolher duas soluções de (5.3.15), $\mathbf{s}_0(t) = s(t, \tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0, 1)$ e $\mathbf{s}_1(t) = s(t, \tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_1, 1)$, obtidas dos teoremas 5.3.3 e 5.3.8, respectivamente, com energia negativa. Além disso, podemos também escolher $\tilde{v}_0 < \tilde{v}_1$, e satisfazendo*

$$V(\tilde{\mathbf{x}}_1) + \frac{1}{2} |\tilde{v}_1|^2 < V(\tilde{\mathbf{x}}_0) + \frac{1}{2} |\tilde{v}_0|^2 < 0.$$

Prova: Seja $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, 0)$ solução circular de $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}, 0) = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$, $\kappa > 0$, com energia $E(\mathbf{r}_0(t)) = h < 0$ (veja pag. 47).

Seja $\mathbf{r}_\epsilon(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{v}}, \epsilon)$ solução periódica de $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}, \epsilon)$, obtida da proposição 5.3.1, com energia $E(\mathbf{r}_\epsilon(t)) = \bar{h}$, para $\epsilon > 0$.

Se $\|\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}}\| < \min\{\|\mathbf{v}_0\|, \frac{|h|}{3\|\mathbf{v}_0\|}\} = \eta$ então $\frac{1}{2}\|\bar{\mathbf{v}}\|^2 < \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_0\|^2 + \frac{|h|}{2}$.

De fato, primeiro note que $\|\bar{\mathbf{v}}\| \leq \|\mathbf{v}_0\| + \eta \leq 2\|\mathbf{v}_0\|$. Agora,

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{v}}\|^2 - \|\mathbf{v}_0\|^2 &= (\|\bar{\mathbf{v}}\| + \|\mathbf{v}_0\|)(\|\bar{\mathbf{v}}\| - \|\mathbf{v}_0\|) \\ &\leq 3\|\mathbf{v}_0\|(\|\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_0\|) \\ &\leq 3\|\mathbf{v}_0\| \frac{|h|}{3\|\mathbf{v}_0\|} = |h| \end{aligned}$$

Como V contínua em ϵ , para ϵ suficiente pequeno temos $V(\mathbf{x}_0, \epsilon) \leq V(\mathbf{x}_0, 0) - \frac{h}{2}$ e $\frac{1}{2}\|\bar{\mathbf{v}}\|^2 < \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_0\|^2 - \frac{h}{2}$.

Assim, para η e ϵ como acima (η é garantido pela afirmação 4.1.2),

$$\bar{h} = \frac{1}{2}\|\bar{\mathbf{v}}\|^2 + V(\mathbf{x}_0, \epsilon) < \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_0\|^2 + V(\mathbf{x}_0, 0) - h = 0.$$

Logo $\bar{h} = E(\mathbf{r}_\epsilon(t)) < 0$.

Seja $\mathbf{s}_0(t) = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{r}_\epsilon(\epsilon^{3/2}t)$ solução de (5.3.15). A energia de $\mathbf{s}_0(t)$ também é negativa. De fato

$$\begin{aligned} E(\mathbf{s}_0(t)) &= \frac{1}{2}\epsilon \|\dot{\mathbf{r}}_\epsilon(0)\|^2 + V(\frac{1}{\epsilon}\mathbf{x}_0, 1) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon \|\bar{\mathbf{v}}\|^2 + \epsilon V(\mathbf{x}_0, \epsilon) \\ &= \epsilon E(\mathbf{r}_\epsilon(t)) = \epsilon \bar{h} < 0, \end{aligned}$$

aqui usamos uma das propriedades do potencial, ver lema 1.2.6.

Isto mostra que podemos escolher \mathbf{s}_0 com energia negativa.

Note que $\tilde{\mathbf{v}}_0 = \dot{\mathbf{s}}_0(0) = \epsilon \dot{\mathbf{r}}_\epsilon(0) = \epsilon \tilde{\mathbf{v}}$. Assim,

$$\|\tilde{\mathbf{v}}_0\| = |\tilde{v}_0| \leq \epsilon(2\|\mathbf{v}_0\|). \quad (5.3.21)$$

Seja $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, 0)$ solução circular de $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla W(\mathbf{r}, 0) = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{r}$, $\kappa > 0$. (veja (4.2.8)). Note que $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{\kappa}$.

Seja $\mathbf{r}_{\frac{1}{\epsilon}}(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{w}}, \frac{1}{\epsilon})$ solução periódica de $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla W(\mathbf{r}, \frac{1}{\epsilon})$, obtida do teorema 5.3.6.

Se $\|\mathbf{v}_1 - \bar{\mathbf{w}}\| < \frac{\|\mathbf{v}_1\|}{2} = \frac{\sqrt{\kappa}}{2} = \eta$, então $\frac{\kappa}{4} < \|\bar{\mathbf{w}}\|^2 < 4\kappa$.

Considere o sistema $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}, \frac{1}{\epsilon})$, onde V é transladado de W (ver lema 1.2.9), e seja $\mathbf{s}_{\frac{1}{\epsilon}}(t)$ a solução deste sistema obtida da translação da solução periódica $\mathbf{r}_{\frac{1}{\epsilon}}(t)$ acima (ver corolário 1.2.7).

Note que a energia $E(\mathbf{s}_{\frac{1}{\epsilon}}(t)) = E(\mathbf{r}_{\frac{1}{\epsilon}}(t))$ e que $\dot{\mathbf{s}}_{\frac{1}{\epsilon}}(0) = \dot{\mathbf{r}}_{\frac{1}{\epsilon}}(0) = \bar{\mathbf{w}}$.

Seja $\mathbf{s}_1(t) = \epsilon \mathbf{s}_{\frac{1}{\epsilon}}(\frac{t}{\epsilon})$ solução de (5.3.15). Logo $\dot{\mathbf{s}}_1(0) = \dot{\mathbf{s}}_{\frac{1}{\epsilon}}(0) = \bar{\mathbf{w}}$, e $dist(\mathbf{s}_1(0), \mathcal{C}) = \epsilon\|\mathbf{x}_1\|$, onde \mathcal{C} é o fio circular de raio 1.

Assim,

$$E(\mathbf{s}_1(t)) = \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{s}}_{\frac{1}{\epsilon}}(0)\|^2 + V(\mathbf{s}_1(0), 1) < 2\kappa + V(\mathbf{s}_1(0), 1)$$

como $dist(\mathbf{s}_1(0), \mathcal{C}) = \epsilon\|\mathbf{x}_1\|$, e $V(\mathbf{x}, 1) \rightarrow -\infty$, quando $dist(\mathbf{x}, \mathcal{C}) \rightarrow 0$, temos que podemos escolher ϵ suficientemente pequeno tal que $E(\mathbf{s}_1(t)) < 0$. Mais ainda, dado $n > 0$, podemos escolher ϵ suficientemente pequeno tal que $E(\mathbf{s}_1(t)) < -n$. Em particular, podemos escolher $\mathbf{s}_0(t)$ e $\mathbf{s}_1(t)$ tais que $E(\mathbf{s}_1(t)) < E(\mathbf{s}_0(t))$.

Note que $\tilde{\mathbf{v}}_1 = \dot{\mathbf{s}}_1(0) = \bar{\mathbf{w}}$. Logo

$$\|\tilde{\mathbf{v}}_1\| = |\tilde{v}_1| = \|\bar{\mathbf{w}}\| > \frac{\sqrt{\kappa}}{2} \quad (5.3.22)$$

De (5.3.21) e (5.3.22) segue que podemos escolher $\|\tilde{\mathbf{v}}_0\| < \|\tilde{\mathbf{v}}_1\|$. Isto prova a afirmação.

■

Afirmação 5.3.14 *Seja $\mathcal{A} = ([\tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{x}}_1] \times \{\tilde{\mathbf{v}}_0\}) \cup (\{\tilde{\mathbf{x}}_1\} \times [\tilde{\mathbf{v}}_0, \tilde{\mathbf{v}}_1])$. Para todo $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}$, a energia $H(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ da solução $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1)$ de (5.3.15) é menor ou igual a δ_0 .*

Prova: Segue da afirmação 5.3.13 e do fato de que $V(\tilde{\mathbf{x}}_0) \leq V(\mathbf{x}) \leq V(\tilde{\mathbf{x}}_1)$, para todo $\mathbf{x} \in [\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_0]$. ■

Afirmação 5.3.17 *Existe $\xi > 0$, tal que para todo $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}$, $\tilde{z}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \geq \xi$.*

Prova: Suponhamos que não existe um tal $\xi > 0$. Então existe seqüência $(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n)$ tal que $\tilde{z}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n) \leq \frac{1}{n}$. Como $(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n) \in \mathcal{A}$, que é compacto, existe subsequência $(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{v}_{n_k})$ de $(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n)$, que converge a um $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}) \in \mathcal{A}$. Por continuidade temos que $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{v}_{n_k}, 1) \rightarrow (\mathbf{r}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}, 1)$ e $\dot{\mathbf{r}}(t, \mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{v}_{n_k}, 1) \rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}, 1)$, o que implica que

$$z_{n_k}(t) \rightarrow \bar{z}(t) \quad \text{e} \quad (5.3.23)$$

$$\dot{z}_{n_k}(t) \rightarrow \dot{\bar{z}}(t) \quad (5.3.24)$$

onde $(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{v}_n(t)) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n, 1)$ e $(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{v}}(t)) = \mathbf{r}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}, 1)$.

Seja $t \in [0, \frac{1}{2}\tilde{t}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})]$. Por (5.3.18), temos que existe $\chi > 0$ tal que $\dot{\bar{z}}(t) \geq \chi$, para todo $t \in [0, \frac{1}{2}\tilde{t}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})]$.

Por (5.3.24), temos que, para n_k suficientemente grande,

$$\dot{z}_{n_k}(t) \geq \frac{\chi}{2} > 0, \quad \text{para todo } t \in [0, \frac{1}{2}\tilde{t}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})] \quad (5.3.25)$$

para todo $t \in [0, \frac{1}{2}\tilde{t}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})]$.

Por (5.3.23), temos que, para n_k suficientemente grande,

$$z_{n_k}(\frac{1}{2}\tilde{t}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})) \geq \frac{1}{2}z(\frac{1}{2}\tilde{t}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})) > 0.$$

Note que $\mathbf{r}(t, \mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{v}_{n_k}, 1)$ está definida em $[0, \frac{1}{2}\tilde{t}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})]$, para n suficientemente grande.

Por definição de \tilde{t} e por (5.3.25), temos que $\tilde{t}(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{v}_{n_k}) > \frac{1}{2}\tilde{t}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})$, assim, por (5.3.19),

$$\begin{aligned} \tilde{z}(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{v}_{n_k}) &> z_{n_k}(\frac{1}{2}\tilde{t}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})) \\ &\geq \frac{1}{2}z(\frac{1}{2}\tilde{t}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}})) = \eta > 0 \end{aligned}$$

Assim, $\tilde{z}(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{v}_{n_k}) > \eta > 0$, para todo n_k suficientemente grande, uma contradição, pois $\tilde{z}(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n) \rightarrow 0$. ■

Para provar o lema 5.3.15 usaremos os seguintes lemas e observações. No que segue escrevemos $\Lambda_A = \frac{2}{\min\{1, A\}} + 1$, para $A > 0$. Note que $\Lambda_A > 1$.

Lema 5.3.18 *Seja $z(t)$ definida em $[0, a]$ tal que*

$$(1) \quad \ddot{z} \leq -Az, \quad A > 0$$

$$(2) \quad \begin{cases} z(0) = z_0 > 0 \\ \dot{z}(0) = 0 \end{cases}$$

Se $a > \Lambda_A$, então existe $t_0 \in [0, \Lambda_A]$ tal que $z(t_0) = 0$.

Prova: Suponha que $z(t) \neq 0$, para todo $t \in [0, \Lambda_A]$. Sendo assim, temos que $z(t) > 0$, para todo $t \in [0, \Lambda_A]$. Note que, por (1), $\dot{z}(t)$ é decrescente em $[0, \Lambda_A]$.

Como $\dot{z}(0) = 0$, temos $\dot{z}(t) < 0$, $t \in (0, \Lambda_A]$. Logo z é decrescente em $(0, \Lambda_A]$. Note também que z está definida em 1, pois $1 < \Lambda_A < a$.

Afirmamos que $\dot{z}(1) \leq -(\min\{1, A\})\frac{z_0}{2}$. De fato, temos dois casos: $z(1) \geq \frac{z_0}{2}$ ou $z(1) \leq \frac{z_0}{2}$.

Suponhamos, primeiro, que $z(1) \geq \frac{z_0}{2}$. Isto implica que $z(t) \geq \frac{z_0}{2}$ para todo $t \in [0, 1]$. Logo

$$\begin{aligned} \dot{z}(1) &= \int_0^1 \ddot{z}(t) dt \leq \int_0^1 -Az(t) dt \\ &\leq -A \int_0^1 z(t) dt \leq -A \frac{z_0}{2}. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que $z(1) \leq \frac{z_0}{2}$. Pelo teorema do Valor Médio, existe $t' \in (0, 1)$ tal que

$$\dot{z}(1) < \dot{z}(t') = \frac{z(1) - z(0)}{1 - 0} \leq -\frac{z_0}{2},$$

provando assim nossa afirmação.

Como \dot{z} é decrescente em $(0, \Lambda_A]$, para $1 \leq t \leq \Lambda_A$, temos que $\dot{z}(t) \leq \dot{z}(1) \leq -\alpha$, com $\alpha = (\min\{A, 1\})\frac{z_0}{2}$.

Assim, $z(t) - z(1) = \int_1^t \dot{z}(s) ds \leq -\alpha(t-1)$. Segue que $z(t) \leq z(1) - \alpha(t-1) \leq z_0 - \alpha(t-1)$, para $1 \leq t \leq \Lambda_A$. Portanto

$$z(\Lambda_A) = z\left(\frac{z_0}{\alpha} + 1\right) \leq z_0 - \alpha(\Lambda_A - 1) = 0$$

Segue que existe $t_0 \in [0, \Lambda_A]$ tal que $z(t_0) = 0$. ■

Lema 5.3.19 *Seja $z(t)$ definida em $[0, +\infty)$ tal que*

$$(1) \ddot{z} \leq -Az, \quad A > 0$$

$$(2) \begin{cases} z(0) = 0 \\ \dot{z}(0) > 0 \end{cases}$$

Então existe $t_0 > 0$ tal que $\dot{z}(t_0) = 0$.

Prova: Suponha que $\dot{z}(t) \neq 0$, para todo t . Logo $\dot{z}(t) > 0$, para todo t , e assim z é crescente. Então $0 < z(1) < z(t)$, para todo $t \geq 1$, e

$$\dot{z}(t) = \dot{z}(1) + \int_1^t \ddot{z}(s) ds \leq \dot{z}(1) - A \int_1^t z(s) ds \leq \dot{z}(1) - Az(1)(t-1).$$

Avaliando em $t = 1 + \frac{\dot{z}(1)}{Az(1)}$, temos $\dot{z}(1 + \frac{\dot{z}(1)}{Az(1)}) \leq 0$, o que é uma contradição. ■

Ainda para provar o lema 5.3.15 fazemos as seguintes observações.

Observações 5.3.20 1) Note que $\frac{\partial V}{\partial z}(x, z) = \lambda z \int_{\mathcal{C}} \frac{du}{\|\mathbf{r}-u\|^3}$, onde $\mathbf{r} = (x, z)$, (veja (1.1.2)).

2) Seja $\mathbf{r}(t)$ uma solução de (5.3.15) e suponhamos que a energia $E(\mathbf{r}(t)) \leq \delta < 0$. Pelo lema 2.0.8, sabemos que a região de Hill, correspondente a δ , é limitada. Logo existe R_δ , $0 < R_\delta < +\infty$, tal que $\{\mathbf{r}; V(\mathbf{r}) \leq \delta\} \subset B(R_\delta)$ onde $B(R_\delta)$ é a bola centrada na origem, com raio R_δ . Portanto, se $\mathbf{r}(t)$ é solução de (5.3.15), com $E(\mathbf{r}(t)) \leq \delta < 0$, então $\|\mathbf{r}(t)\| \leq R_\delta$.

3) Vamos estimar $\int_{\mathcal{C}} \frac{du}{\|\mathbf{r}-u\|^3}$, com \mathcal{C} fio circular de raio unitário e centrado na origem:

$\|\mathbf{r} - u\| \leq \|\mathbf{r}\| + \|u\| \leq R_\delta + 1$, para todo $u \in \mathcal{C}$ e para todo \mathbf{r} tal que $V(\mathbf{r}) \leq \delta$. Assim, $\frac{1}{\|\mathbf{r}-u\|^3} \geq \frac{1}{(R_\delta+1)^3}$, e segue que

$$\lambda \int_{\mathcal{C}} \frac{du}{\|\mathbf{r} - u\|^3} \geq \lambda \int_{\mathcal{C}} \frac{du}{(R_\delta + 1)^3} = \frac{M}{(R_\delta + 1)^3}. \quad (5.3.26)$$

Finalmente, provamos o lema 5.3.15:

Lema 5.3.15 *Para todo $\delta < 0$, existe $T_\delta > 0$, tal que se $\mathbf{r}(t) = (x(t), z(t))$ é uma solução de (5.3.15), com $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) > 0$ e $E(\mathbf{r}(t), \mathbf{x}, \mathbf{v}, 1) = H(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \leq \delta$, então $\lim_{t \rightarrow t_0^-} z(t) = 0$, para algum $t_0 \in (0, T_\delta]$.*

Prova: Temos que

$$\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}(x, z) = -\lambda z \int_{\mathcal{C}} \frac{du}{\|\mathbf{r} - u\|^3} \quad (5.3.27)$$

Note que $\ddot{z} < 0$, se $z > 0$, e $\ddot{z} > 0$, se $z < 0$. Seja $\mathbf{r}(t)$ solução de (5.3.15), com $E(\mathbf{r}(t)) \leq \delta < 0$, $z(0) = 0$ e $\dot{z}(0) > 0$. Por (5.3.27), $|\ddot{z}| = \lambda |z| \int_{\mathcal{C}} \frac{du}{\|\mathbf{r}-u\|^3} \geq \frac{M}{(R_\delta+1)^3} |z|$, onde a desigualdade segue de (5.3.26).

Chame $A = \frac{M}{(R_\delta+1)^3}$ e $\Lambda_A = \frac{2}{\min\{1, A\}} + 1$. Temos a inequação

$$|\ddot{z}| \geq A |z| \quad (5.3.28)$$

Se $z > 0$, temos $\ddot{z} < 0$, e a inequação vem a ser $-\ddot{z} \geq Az$, para $z \geq 0$.

Seja (a, b) , $a < 0 < b$, o intervalo (maximal) de definição de $\mathbf{r}(t) = (x(t), z(t))$. Se $b < 2\Lambda_A$, $\mathbf{r}(t)$ colide e assim $\lim_{t \rightarrow b^-} z(t) = 0$, e o lema está provado. Suponhamos então que $b > 2\Lambda_A$.

Afirmamos que existe $\bar{t} \in (0, b)$, tal que $\dot{z}(\bar{t}) = 0$. Se $\dot{z}(t) \neq 0$, para todo $t \in (0, b)$, então z é crescente e $\lim_{t \rightarrow b^-} z(t) > 0$. Logo $\mathbf{r}(t)$ não é solução com colisão em b , o que implica que $b = +\infty$. Como $z(t) > 0$, $t \in (0, +\infty)$, isto contradiz o lema 5.3.19. Isto mostra que existe $\bar{t} \in (0, b)$ tal que $\dot{z}(\bar{t}) = 0$.

Substituindo \bar{t} por $\min\{t > 0; \dot{z}(t) = 0\}$, podemos supor que $\dot{z}(t) > 0$, $t \in [0, \bar{t}]$. Logo $z(t)$ é crescente em $[0, \bar{t}]$ e $z(t) > 0$, $t \in (0, \bar{t}]$. Aplicando o lema 5.3.18 à aplicação $t \mapsto z(\bar{t} - t)$, $t \in [0, \bar{t}]$, obtemos que $\bar{t} \leq \Lambda_A$.

Lembre que estamos supondo que $b > 2\Lambda_A$. Vamos mostrar que existe $t_0 \in [0, 2\Lambda_A]$, tal que $z(t_0) = 0$. Suponhamos que $z(t) \neq 0$, $t \in (0, 2\Lambda_A]$. Como $\bar{t} \in (0, 2\Lambda_A)$ e $z(\bar{t}) > 0$, temos $z(t) > 0$, $t \in (0, 2\Lambda_A]$. Por continuidade existe c , tal que $z(t) > 0$, $t \in (0, c)$, com $2\Lambda_A < c < b$. Note que $c - \bar{t} > \Lambda_A$.

Aplicando o lema 5.3.18 à aplicação $t \mapsto z(t + \bar{t})$, $t \in [0, c - \bar{t}]$, obtemos uma contradição. Isto prova o lema. ■

Solução em forma de oito no problema de Euler simétrico

Durante nosso estudo no plano vertical percebemos a semelhança do problema de Euler simétrico com o problema do fio circular restrito ao plano vertical. Para o problema de Euler simétrico, que é um problema integrável e sobre o qual existem muitos estudos, não encontramos a prova da existência de soluções em forma de oito. Para terminar esta seção vamos verificar que, com mínimas modificações, os métodos desta seção servem para construir soluções periódicas em forma da figura oito, para o problema de Euler simétrico.

Considere o plano- (x, y) e dois centros fixos, com massa M , situados nos pontos $(\rho, 0) = \rho e_1$, $(-\rho, 0) = -\rho e_1$, $\rho > 0$. Consideremos uma partícula P , de massa infinitesimal, movendo-se neste plano, submetida unicamente à força de atração gravitacional induzida pelos dois centros fixos. O potencial deste problema é dado por

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{M}{\|\mathbf{r} + \rho e_1\|} - \frac{M}{\|\mathbf{r} - \rho e_1\|}.$$

Para expressar a dependência da massa e de ρ , podemos escrever $U(\mathbf{r}, \rho, M) = -\frac{M}{\|\mathbf{r} + \rho e_1\|} - \frac{M}{\|\mathbf{r} - \rho e_1\|}$. U satisfaz as mesmas propriedades que V (capítulo 1, seção 1.2.3).

Para M fixo, ρ pequeno, $U(\mathbf{r}, \rho, M)$ é uma perturbação simétrica do potencial de Kepler $U(\mathbf{r}, 0, M) = -\frac{2M}{\|\mathbf{r}\|}$. Podemos então obter, de forma similar ao caso do fio circular, soluções $\mathbf{s}_0(t)$ periódicas, simétricas, longe dos centros fixos. Mais ainda, um argumento similar ao usado na prova da afirmação 5.3.13, mostra que podemos escolher $\mathbf{s}_0(t)$ com energia negativa e próxima de zero, e também tal que $\|\dot{\mathbf{s}}_0(t)\|$ seja pequeno.

Seja

$$\mathcal{U}(\mathbf{r}, \epsilon) = -\frac{M}{\|\mathbf{r}\|} - \frac{M}{\|\mathbf{r} + 2\frac{1}{\epsilon}e_1\|} = -\frac{M}{\|\mathbf{r}\|} - \frac{\epsilon M}{\|\epsilon \mathbf{r} + 2e_1\|}.$$

Note que $\mathcal{U}(\mathbf{r}, \epsilon)$ é o transladado de $U(\mathbf{r}, \frac{1}{\epsilon}, M)$ (ver lema 1.2.9). Note também que, para ϵ pequeno, podemos considerar $\mathcal{U}(\mathbf{r}, \epsilon)$ como uma perturbação do potencial de Kepler $U(\mathbf{r}, 0) = -\frac{M}{\|\mathbf{r}\|}$. Seja $\bar{\mathbf{v}} = (0, \bar{v})$, $\bar{v} > 0$, a velocidade tal que $\bar{\mathbf{r}}(t)$ seja solução circular do problema de Kepler $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r}, 0)$, com $\bar{\mathbf{r}}(0) = (1, 0) = e_1$ e $\dot{\bar{\mathbf{r}}}(0) = \bar{\mathbf{v}}$. Note que $\bar{v} = \sqrt{M}$.

Seja também $\bar{t} > 0$, tal que $\bar{\mathbf{r}}(\bar{t}) = (0, -1)$, $\bar{t} > 0$ é o primeiro tempo (positivo) no qual $\bar{\mathbf{r}}$ atinge $(0, -1)$. Note que $\bar{\mathbf{r}}(t)$, $0 \leq t \leq \bar{t}$, intersecta transversalmente o eixo x negativo em um único ponto.

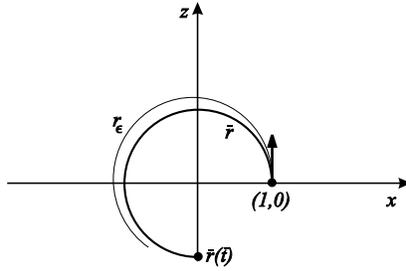


Figura 5.3.24:

Seja $\mathbf{r}_\epsilon(t) = (\mathbf{x}_\epsilon(t), \mathbf{v}_\epsilon(t))$, a solução de $\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U(\mathbf{r}, \epsilon)$, com $\mathbf{r}_\epsilon(0) = e_1$, $\dot{\mathbf{r}}_\epsilon(0) = \bar{\mathbf{v}}$.

Logo, pela proposição 4.0.18, para ϵ suficientemente pequeno, $\mathbf{r}_\epsilon(t)$, $0 \leq t \leq \bar{t}$, intersecta transversalmente o eixo x negativo exatamente em um ponto $\mathbf{r}_\epsilon(t_\epsilon)$ e $y_\epsilon(t) > 0$, $0 < t < t_\epsilon$. Como \mathbf{r}_ϵ está perto de $\bar{\mathbf{r}}$, para ϵ suficientemente pequeno, podemos supor que $-2 < x_\epsilon(t_\epsilon)$.

Seja $\tilde{\mathbf{r}}_\epsilon(t) := \mathbf{r}_\epsilon(t) + \frac{1}{\epsilon}e_1$. Logo $\tilde{\mathbf{r}}_\epsilon(t)$ é solução de $\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U(\mathbf{r}, \frac{1}{\epsilon}, M)$. Seja $\mathbf{s}^\epsilon(t) := \epsilon \tilde{\mathbf{r}}_\epsilon(\epsilon^{-3/2}t)$. Segue do corolário 1.2.7 que $\mathbf{s}^\epsilon(t) = (x^\epsilon(t), y^\epsilon(t))$ é solução de $\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U(\mathbf{r}, 1, M)$, e verifica-se facilmente que $\mathbf{s}^\epsilon(0) = (1 + \epsilon, 0)$, $\mathbf{s}^\epsilon(\epsilon^{3/2}t_\epsilon) = (x^\epsilon, 0)$, $0 < x^\epsilon < 1$, $y^\epsilon(t) > 0$, $0 < t < \epsilon^{3/2}t_\epsilon$, e $\dot{\mathbf{s}}^\epsilon(0) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\bar{\mathbf{v}}$. Logo

$$\begin{aligned} E(\mathbf{s}^\epsilon(t)) &= E(\mathbf{s}^\epsilon(0)) = \frac{1}{2\epsilon} \|\bar{\mathbf{v}}\|^2 + U(\mathbf{s}^\epsilon(0), 1, M) = \\ &= \frac{M}{2\epsilon} - \frac{M}{\epsilon} - \frac{M}{2+\epsilon} = \\ &= -\frac{M}{2\epsilon} \left(1 + \frac{2\epsilon}{2+\epsilon}\right) \end{aligned}$$

Assim, escolhendo ϵ suficientemente pequeno, podemos escolher $\mathbf{s}_1(t) = \mathbf{s}^\epsilon(t)$ com

energia negativa e de valor absoluto grande. Note também que $\|\dot{\mathbf{s}}_1(0)\| = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \|\dot{\mathbf{v}}\| = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{\epsilon}}$.
é grande.

As soluções $\mathbf{s}_0(t)$ e $\mathbf{s}_1(t)$ acima construídas satisfazem as propriedades análogas ao caso do problema do fio circular, necessárias para a prova da existência de soluções em forma de oito.

Note que $U(\mathbf{r}, 1, M)$ também satisfaz o lema 5.3.11.

Para o caso do problema de Euler simétrico, a afirmação 5.3.13 segue da escolha de \mathbf{s}_0 e \mathbf{s}_1 acima, e a prova das afirmações 5.3.14 e 5.3.17 são idênticas. A prova do lema 5.3.15 também é análoga, é só estimar $\frac{\partial}{\partial y} U(x, y) = y \left(\frac{M}{\|\mathbf{r} - e_1\|^3} + \frac{M}{\|\mathbf{r} + e_1\|^3} \right)$, onde $U(x, y) = U((x, y), 1, M)$. Mas, um simples cálculo mostra que se $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ tem energia menor ou igual a $\delta < 0$, então

$$\left(\frac{M}{\|\mathbf{r} - e_1\|^3} + \frac{M}{\|\mathbf{r} + e_1\|^3} \right) \geq \frac{2M}{(1 + R_\delta)^3},$$

onde $R_\delta < +\infty$ é o raio da região de Hill de energia $\delta < 0$, isto é, $R_\delta = \sup \{ \|\mathbf{r}\| ; U(\mathbf{r}) \leq \delta \}$ (verificamos diretamente que $R_\delta \leq \frac{2}{-\delta} + 1$).

Logo $y(t)$ satisfaz a inequação

$$|\ddot{y}| \geq A|y|,$$

com $A = \frac{2M}{(1+R_\delta)^3}$.

O restante das provas do lema 5.3.15 e do teorema 5.3.10 são análogos. ■

5.4 Soluções periódicas perto do fio circular no caso geral

No estudo da dinâmica no plano vertical, para um fio contido no plano horizontal, passando pela origem, de raio $\frac{1}{\epsilon}$, vimos que o sistema é dado por

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\partial W}{\partial x} \left(x, z, \frac{1}{\epsilon} \right) \\ \ddot{z} = -\frac{\partial W}{\partial z} \left(x, z, \frac{1}{\epsilon} \right) \end{cases} \quad (5.4.29)$$

onde W é como em (2.2.3). Este sistema se comporta como uma perturbação do problema do fio infinito (veja observação 4.2.4). Usando o teorema 4.2.1, provamos a existência de soluções periódicas do sistema (5.4.29) acima, numa vizinhança da origem.

Fixe $K \in \mathbb{R}$. Consideremos agora o sistema:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\frac{K^2}{\epsilon^2}}{\left(x - \frac{1}{\epsilon}\right)^3} - \frac{\partial W}{\partial x} \left(x, z, \frac{1}{\epsilon} \right) \\ \ddot{z} = -\frac{\partial W}{\partial z} \left(x, z, \frac{1}{\epsilon} \right) \end{cases} \quad (5.4.30)$$

onde W é como acima (ver (2.2.3)) e $x < \frac{1}{\epsilon}$.

Para ϵ suficientemente pequeno, o sistema dado por (5.4.30) também se comporta como uma perturbação do problema do fio infinito, pois $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{K^2}{\epsilon^2}}{\left(x - \frac{1}{\epsilon}\right)^3} = 0$

De fato, defina

$$g(x, z, \epsilon) = \begin{cases} \left(\frac{\frac{K^2}{\epsilon^2}}{\left(x - \frac{1}{\epsilon}\right)^3}, 0 \right) - \left(\frac{\partial W}{\partial x} \left(x, z, \frac{1}{\epsilon} \right), \frac{\partial W}{\partial z} \left(x, z, \frac{1}{\epsilon} \right) \right), & \text{para } \epsilon \neq 0 \\ -2\lambda \frac{(x, z)}{\|(x, z)\|^2}, & \text{para } \epsilon = 0 \end{cases}$$

Pelo lema 2.2.7, segue-se que g é contínua, e por definição de g , para cada ϵ fixo, g é C^1 em (x, z) , e é invariante pela simetria $\varphi(x, z) = (x, -z)$.

Mantendo a notação do teorema 4.2.1, ou seja, dado um círculo C no plano- (x, z) , com centro na origem e dado um aberto U da forma $C \subset U \subset (\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$, verificamos que (5.4.30) satisfaz as condições do teorema 4.2.1.

Assim, aplicando o teorema 4.2.1, para C e U como acima, obtemos $\delta_0 > 0$ tal que existe solução periódica $\mathbf{r}(t) = (x(t), z(t))$ do sistema (5.4.30) em U , para cada $\epsilon \in (-\delta_0, \delta_0)$. Estas soluções periódicas têm por traço um curva fechada simples, simétrica em relação ao eixo x , que enlaça a origem.

Observação:

1) Considere o sistema

$$\ddot{\mathbf{r}} = g(\mathbf{r}, \epsilon), \tag{5.4.31}$$

com g como definida acima e $\mathbf{r} = (x, z)$.

Observe que uma solução de (5.4.31), com $\epsilon \neq 0$, é uma solução de (5.4.30).

2) O sistema (5.4.30) pode ser re-escrito como $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla \bar{W}(\mathbf{r}, \frac{1}{\epsilon})$, onde

$$\bar{W}(\mathbf{r}, \frac{1}{\epsilon}) = \bar{W}(x, z, \frac{1}{\epsilon}) = - \left(\frac{\frac{K^2}{\epsilon^2}}{2(x - \frac{1}{\epsilon})^2} + W(x, z, \frac{1}{\epsilon}) \right).$$

Finalmente, consideremos o sistema:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{K^2}{x^3} - \frac{\partial V}{\partial x} \left(x, z, \frac{1}{\epsilon} \right) \\ \ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \left(x, z, \frac{1}{\epsilon} \right) \end{cases} \tag{5.4.32}$$

onde V é o potencial do fio circular, centrado na origem do plano- (x, y) , de raio $\frac{1}{\epsilon}$.

Observações:

1) O sistema (5.4.32) pode ser re-escrito como $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla \bar{V}(\mathbf{r}, \frac{1}{\epsilon})$, com $\mathbf{r} = (x, z)$ e

$$\bar{V}\left(x, z, \frac{1}{\epsilon}\right) = -\left(\frac{K^2}{2x^2} + V\left(x, z, \frac{1}{\epsilon}\right)\right).$$

2) Note que \bar{V} é um transladado de \bar{W} , isto é,

$$\bar{V}\left(x - \frac{1}{\epsilon}, z, \frac{1}{\epsilon}\right) = \bar{W}\left(x, z, \frac{1}{\epsilon}\right),$$

onde \bar{W} é o potencial do problema (5.4.30).

Proposição 5.4.1 *Consideremos o sistema (5.4.32). Seja C um círculo no plano- (x, z) , com centro na origem e raio arbitrário, e seja U um aberto que contém C da forma $C \subset U \subset (\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$.*

Então, existe $\delta_0 > 0$ tal que para cada ϵ , com $0 < \epsilon < \delta_0$, existe uma solução periódica $\mathbf{r}_\epsilon(t)$ de (5.4.32) em $U - \{(\frac{1}{\epsilon}, 0)\} = \{(x - \frac{1}{\epsilon}, z); (x, z) \in U\}$. Além disso, $\mathbf{r}_\epsilon(t)$ tem por traço uma curva fechada simples, simétrica em relação ao eixo x , que enlaça o ponto $\{(-\frac{1}{\epsilon}, 0)\}$.

Prova: Segue do fato do sistema (5.4.30) ter soluções periódicas (com propriedades como no enunciado acima), do lema 1.2.9 e das observações 1) e 2) acima. ■

Observações 5.4.2

1) Seja $\mathbf{r}_\epsilon(t) = (x_\epsilon(t), z_\epsilon(t))$ solução de (5.4.32), como na proposição 5.4.1. Da forma do sistema (5.4.32) e da simetria do potencial V , segue que $(-x_\epsilon(t), z_\epsilon(t))$ também é solução de (5.4.32), e assim, também obtemos soluções de (5.4.32) em $U + \{(\frac{1}{\epsilon}, 0)\} = \{(x + \frac{1}{\epsilon}, z); (x, z) \in U\}$.

2) Como U é fixo, para ϵ suficientemente pequeno, a solução $\mathbf{r}_\epsilon(t) = (x_\epsilon(t), z_\epsilon(t))$, dada na proposição 5.4.1, fica no semiplano dos $x < 0$, do plano- (x, z) , isto é, $x_\epsilon(t) < 0$. Analogamente, para ϵ suficientemente pequeno, a solução $(-x_\epsilon(t), z_\epsilon(t))$ fica no semiplano dos $x > 0$.

3) Pelo lema 1.2.9 as soluções obtidas da proposição 5.4.1 são da forma $\mathbf{r}_\epsilon(t) = (x_\epsilon(t), z_\epsilon(t)) = (x(t) - \frac{1}{\epsilon}, z(t))$, $(-x_\epsilon(t), z_\epsilon(t)) = (x(t) + \frac{1}{\epsilon}, z(t))$, onde $(x(t), z(t))$ são soluções de (5.4.30).

Na próxima seção, usamos a formulação lagrangeana do problema do fio circular homogêneo, para mostrar que as soluções de (5.4.32) são soluções “reduzidas” do problema do fio circular homogêneo de raio $\frac{1}{\epsilon}$.

5.4.1 Redução do problema tri-dimensional a um problema planar

Consideremos o problema do fio circular homogêneo no espaço \mathbb{R}^3 , contido no plano- (x, y) , centrado na origem, e com raio $\frac{1}{\epsilon}$.

Usando coordenadas cilíndricas (r, φ, z) , o lagrangeano nestas coordenadas se escreve como:

$$L(r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U_\epsilon(r, z)$$

onde

$$U_\epsilon(r, z) = V(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z, \frac{1}{\epsilon}) = -\frac{2}{\pi}M \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\left\{[(r + \frac{1}{\epsilon})^2 + z^2]\cos^2\theta + [(r - \frac{1}{\epsilon})^2 + z^2]\sin^2\theta\right\}^{1/2}}$$

e $V((x, y, z), \frac{1}{\epsilon})$ é o potencial do fio circular, com raio $\frac{1}{\epsilon}$, em coordenadas cartesianas (ver (1.2.11)).

As equações do movimento (1.1.1) nestas coordenadas são dadas por:

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{K^2}{r^3} - \frac{\partial U_\epsilon}{\partial r}(r, z) \\ \ddot{z} = -\frac{\partial U_\epsilon}{\partial z}(r, z) \\ \dot{\varphi}(t) = \frac{K/\epsilon}{r^2} \end{cases} \quad (5.4.33)$$

onde K é constante.

Observações:

1) Note que o sistema (5.4.33) (e as soluções (r, φ, z)) depende da constante K).

2) $K = 0$ implica que φ é constante. Logo o movimento estará sobre um plano, o plano determinado pelo eixo z e pelo vetor $(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$. Desta forma, para $K = 0$ recaímos num problema planar

$$\begin{cases} \ddot{r} = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} \left(r, z, \frac{1}{\epsilon} \right) \\ \ddot{z} = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} \left(r, z, \frac{1}{\epsilon} \right) \end{cases}$$

onde $\tilde{V}(r, z) = U_\epsilon(r, z)$.

3) As duas primeiras equações do sistema (5.4.33) coincidem com o sistema (5.4.32). E pela proposição 5.4.1 e observações 5.4.2, existe solução periódica de (5.4.33) em (r, z) , que tem por traço uma curva fechada simples, simétrica em relação ao eixo x , que enlaça o ponto $(\frac{1}{\epsilon}, 0)$.

Observe que se $(r(t), z(t))$ é solução de (5.4.32), definindo $\varphi(t) = \int_0^t \frac{K/\epsilon ds}{r^2(s)}$, temos que $(r(t), \varphi(t), z(t))$ é solução de (5.4.33). Logo $(r(t) \cos\varphi(t), r(t) \sin\varphi(t), z(t))$ é solução de (1.1.1), com o fio circular contido no plano horizontal, com raio $1/\epsilon$.

Lema 5.4.2 *Seja $(r(t), z(t))$ solução periódica de (5.4.32), de período τ e $\varphi(t) = \int_0^t \frac{K/\epsilon ds}{r^2(s)}$. Então $\mathbf{r}(t) = (r(t) \cos\varphi(t), r(t) \sin\varphi(t), z(t))$ é solução periódica de (1.1.1) se, e somente se, $\frac{\varphi(\tau)}{2\pi}$ é um número racional.*

Prova: Primeiro, note que, como $r(t)$ é τ -periódica, temos que $\dot{\varphi}(t)$ também é τ -periódica.

Suponhamos que $\frac{\varphi(\tau)}{2\pi} = \frac{p}{q}$. Assim, $q\varphi(\tau) = 2\pi p$. Além disto, como $r(t)$ é τ -periódica, por definição de φ , temos que $n\varphi(\tau) = \varphi(n\tau)$, logo

$$\varphi(q\tau) = 2\pi p.$$

Vejamus que $\varphi(t + q\tau) = \varphi(t) + 2\pi p$. De fato, defina $\psi_1(t) = \varphi(t + q\tau)$ e $\psi_2(t) = \varphi(t) + 2\pi p$. Como $\dot{\varphi}(t)$ é τ -periódica, temos que $\dot{\psi}_1(t) = \dot{\psi}_2(t)$ e como $\psi_1(0) = \varphi(q\tau) = 2\pi p = \psi_2(0)$, concluímos que $\psi_1(t) = \psi_2(t)$. Segue que $\varphi(t + q\tau) = \varphi(t) + 2\pi p$.

Desde que cosseno e seno são funções 2π -periódicas, e $(r(t), z(t))$ é τ -periódica, a solução de (1.1.1), dada por $(x(t), y(t), z(t)) = (r(t) \cos\varphi(t), r(t) \operatorname{sen}\varphi(t), z(t))$ é $q\tau$ -periódica.

Reciprocamente, suponhamos que $(r(t) \cos\varphi(t), r(t) \operatorname{sen}\varphi(t), z(t))$ é τ_0 -periódica. Logo, $z(t)$ e $r(t) = \sqrt{(r(t) \cos\varphi(t))^2 + (r(t) \operatorname{sen}\varphi(t))^2}$ são τ_0 -periódicas.

Podemos supor τ período mínimo de $(r(t), z(t))$. Segue que $\tau_0 = n\tau$.

Assim, como $r(t) > 0$, para todo t , e $r(t)$ é τ_0 -periódica, temos $\cos\varphi(t + n\tau) = \cos\varphi(t + \tau_0) = \cos\varphi(t)$. Da mesma forma, $\operatorname{sen}\varphi(t + n\tau) = \operatorname{sen}\varphi(t + \tau_0) = \operatorname{sen}\varphi(t)$, o que implica que $\varphi(t + n\tau) - \varphi(t) = 2\pi p$, para algum $p \in \mathbb{Z}$.

Avaliando em $t = 0$, temos $n\varphi(\tau) = \varphi(n\tau) = 2\pi p$, e portanto $\frac{\varphi(\tau)}{2\pi} = \frac{p}{n}$. ■

Usaremos a seguinte notação. Seja $U \subset \mathbb{R}_+^2 \subset \mathbb{R}^2$, onde $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, 0, z); x > 0\}$. Definimos a rotação de U ao redor do eixo z :

$$\operatorname{rot} U = \{(x \cos\varphi, x \operatorname{sen}\varphi, z); \varphi \in \mathbb{R}, (x, z) \in U\}.$$

Em coordenadas cilíndricas, temos $\operatorname{rot} U = \{(r, \varphi, z); (r, z) \in U\}$.

Teorema 5.4.3 *Seja C um círculo no plano- (x, z) , com centro na origem e seja U um aberto limitado que contém C da forma $C \subset U \subset (\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\})$. Seja $K \neq 0$.*

Então, existe $\delta_0 > 0$ tal que para cada $\epsilon_0 < \delta_0$, existe ϵ , com $0 < \epsilon < \epsilon_0$ e existe uma solução periódica $\mathbf{r}_\epsilon(t) = (x_\epsilon(t)\cos\varphi_\epsilon(t), x_\epsilon(t)\sen\varphi_\epsilon(t), z_\epsilon(t))$ de (1.1.1) em $\text{rot}(U - \{(\frac{1}{\epsilon}, 0)\})$, com momento angular K/ϵ . Além disso, $(x_\epsilon(t), z_\epsilon(t))$ tem por traço uma curva fechada simples, simétrica em relação ao eixo x , que enlaça o fio circular.

Prova: Seja C um círculo no plano- (x, z) , com centro na origem, e U um aberto limitado que contém C da forma $C \subset U \subset \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Sem perda de generalidade, podemos supor $K > 0$.

Seja $\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}_0, 0}(t) := \bar{\mathbf{r}}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, 0)$ solução circular de (5.4.31), que tem como traço a curva C . Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\mathbf{x}_0 \in \{\text{eixo positivo dos } x\}$

Considere $[0, \bar{t}]$ um intervalo de tempo no qual $\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}_0, 0}(t)$ intersecta transversalmente o segmento fechado $E = \{(x, 0); -\infty < x \leq 0\}$, em um único ponto. Aplicando a proposição 4.0.18 a $\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}_0, 0}(t)$, $t \in [0, \bar{t}]$, obtemos um $\delta > 0$ tal que, se $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\| < \delta$, $|\epsilon| < \delta$, então a solução $\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}, \epsilon}(t) = (\bar{x}_{\mathbf{v}, \epsilon}(t), \bar{z}_{\mathbf{v}, \epsilon}(t))$, $t \in [0, \bar{t}]$, de (5.4.30), intersecta E em um único ponto, e $t(\mathbf{v}, \epsilon) := t(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}, \epsilon)$ é contínua.

Defina $\tau(\mathbf{v}, \epsilon) := 2t(\mathbf{v}, \epsilon)$ e $V_\delta = \{(1 + s)\mathbf{v}_0; |s| < \delta\}$.

Note que

1) $\tau(\mathbf{v}, \epsilon)$ é limitada ($0 < \tau(\mathbf{v}, \epsilon) < 2\bar{t}$).

2) Podemos tomar δ , suficientemente pequeno, tal que $|\bar{x}_{\mathbf{v}, \epsilon}(t)| \leq l + 1$, para todo $t \in [0, 2\bar{t}]$, onde l é o raio de C . Mais ainda, como $2\bar{t} > \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tau(\mathbf{v}, \epsilon) = \tau(\mathbf{v}, 0) > 0$, e τ é contínua, também podemos tomar δ suficientemente pequeno, tal que $0 < \gamma < \tau(\mathbf{v}, \epsilon) < 2\bar{t}$, para uma constante γ .

3) Se $\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}, \epsilon}(t)$ é a solução periódica de (5.4.30), obtida do teorema 4.2.1, então $\tau(\mathbf{v}, \epsilon)$ é o seu período.

Seja $\delta_0 > 0$, como na proposição 5.4.1, e podemos supor $0 < \delta_0 < \delta$.

Seja $\mathbf{r}_{\mathbf{v}, \epsilon}(t) = (x_{\mathbf{v}, \epsilon}(t), z_{\mathbf{v}, \epsilon}(t)) = (\bar{x}_{\mathbf{v}, \epsilon}(t) + \frac{1}{\epsilon}, \bar{z}_{\mathbf{v}, \epsilon}(t))$ solução de (5.4.32), com

$x_{\mathbf{v},\epsilon} > 0$, $\epsilon \in (-\delta, \delta)$.

Temos que $(x_{\mathbf{v},\epsilon}, \varphi, z_{\mathbf{v},\epsilon})$ é solução de (5.4.33) (em coordenadas cilíndricas, do problema do fio circular, com raio $\frac{1}{\epsilon}$ e momento angular $\frac{K}{\epsilon}$), onde $\varphi(t) := \varphi_{\mathbf{v},\epsilon}(t) = \int_0^t \frac{K/\epsilon ds}{x_{\mathbf{v},\epsilon}^2(s)}$, (estamos assumindo $\varphi(0) = 0$).

Defina $\Theta : V_\delta \times [0, \delta_0] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Theta(\mathbf{v}, \epsilon) = \begin{cases} \int_0^{\tau(\mathbf{v},\epsilon)} \frac{K/\epsilon ds}{x_{\mathbf{v},\epsilon}^2(s)} = \int_0^{\tau(\mathbf{v},\epsilon)} \frac{K/\epsilon ds}{\left(\bar{x}_{\mathbf{v},\epsilon} + \frac{1}{\epsilon}\right)^2(s)}, & \text{para } \epsilon \neq 0 \\ 0, & \text{para } \epsilon = 0. \end{cases}$$

De 1) e 2) acima e do fato de τ ser contínua, segue que Θ é contínua em $V_\delta \times [0, \delta_0]$.

Note que $\Theta(\mathbf{v}, \epsilon) = \varphi_{\mathbf{v},\epsilon}(\tau(\mathbf{v}, \epsilon))$. Além disso, como estamos supondo $K > 0$, temos que $\Theta(\mathbf{v}, \epsilon) > 0$, para $\epsilon > 0$ e $\Theta(\mathbf{v}, 0) = 0$, para todo \mathbf{v} .

Seja ϵ_0 , $0 < \epsilon_0 < \delta_0$. Pelo addendum ao teorema 4.2.1 (tomando $\epsilon_0 > 0$ ainda menor, se necessário), existe conjunto conexo, compacto $\mathcal{V} \subset V_\delta \times [0, \epsilon_0]$, com $\mathcal{V}_\epsilon \neq \emptyset$, para todo $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$, tal que para $(\mathbf{v}, \epsilon) \in \mathcal{V}$, $\mathbf{r}_{\mathbf{v},\epsilon}(t)$ é solução periódica de 5.4.32, tendo por traço uma curva fechada simples, simétrica em relação ao eixo x , que enlaça o fio circular. (Lembre que $\mathcal{V}_\epsilon = \mathcal{V} \cap (V_\delta \times \{\epsilon\})$).

Como $\mathcal{V}_{\epsilon_0} \neq \emptyset$ e $\mathcal{V}_0 \neq \emptyset$, existem $(\mathbf{v}_{\epsilon_0}, \epsilon_0), (\mathbf{v}_0, 0) \in \mathcal{V}$. Mais ainda, $\Theta(\mathbf{v}_{\epsilon_0}, \epsilon_0) > 0$ e $\Theta(\mathbf{v}_0, 0) = 0$. Como \mathcal{V} é conexo, temos que $[0, \Theta(\mathbf{v}_{\epsilon_0}, \epsilon_0)] \subset \Theta(\mathcal{V})$. Então, existe número racional $\frac{p}{q} \in (0, \Theta(\mathbf{v}_{\epsilon_0}, \epsilon_0)]$ e assim, existe $(\mathbf{v}_\epsilon, \epsilon) \in \mathcal{V}$, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, tal que $\Theta(\mathbf{v}_\epsilon, \epsilon) = \frac{p}{q}$. Do lema 5.4.2, segue que $(x_{\mathbf{v},\epsilon}(t)\cos\varphi_{\mathbf{v},\epsilon}(t), x_{\mathbf{v},\epsilon}(t)\sen\varphi_{\mathbf{v},\epsilon}(t), z_{\mathbf{v},\epsilon}(t))$ é solução periódica de (1.1.1), que satisfaz as propriedades do enunciado do teorema. ■

Teorema 5.4.4 *Considere o problema*

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}), \tag{5.4.34}$$

onde $V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}, 1, 2\pi\lambda)$ é o potencial do fio circular homogêneo \mathcal{C} , com raio unitário e

massa $M = 2\pi\lambda$, e \mathbf{r} no espaço \mathbb{R}^3 .

Seja $\chi > 0$. Então, para todo momento angular $K \neq 0$, existe uma solução periódica $\mathbf{r}(t)$ do problema (5.4.34), com momento angular K e satisfazendo $\text{dist}(\mathbf{r}(t), \mathcal{C}) \leq \chi$, para todo t . Mais ainda, se escrevemos $\mathbf{r}(t) = (r(t) \cos\varphi(t), r(t) \sin\varphi(t), z(t))$, então $(r(t), z(t))$ tem por traço uma curva fechada simples, simétrica em relação ao eixo x , que enlaça o fio circular.

Prova: Consideramos, no teorema 5.4.3, \mathcal{C} com raio unitário e $U = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{2} < \mathbf{p} < \frac{3}{2}\}$, conseguimos $\delta_0 > 0$ tal que para cada $\epsilon_0 < \delta_0$, existem ϵ , com $0 < \epsilon < \epsilon_0$, e uma solução periódica $\mathbf{r}_\epsilon(t) = (x_\epsilon(t) \cos\varphi_\epsilon(t), x_\epsilon(t) \sin\varphi_\epsilon(t), z_\epsilon(t))$ do problema (1.1.1) (com fio circular de raio $1/\epsilon$), com momento angular K/ϵ . Além disso, $(x_\epsilon(t), z_\epsilon(t))$ tem por traço uma curva fechada simples, simétrica em relação ao eixo x , que enlaça o fio circular. Pela escolha de U , temos $\frac{1}{2} < \text{dist}(\mathbf{r}_\epsilon, \mathcal{C}_\epsilon) < \frac{3}{2}$.

Seja $r(t) = \epsilon x_\epsilon\left(\frac{1}{\epsilon}t\right)$, $z(t) = \epsilon z_\epsilon\left(\frac{1}{\epsilon}t\right)$, $\varphi(t) = \varphi_\epsilon\left(\frac{1}{\epsilon}t\right)$, e $\mathbf{r}(t) = (r(t) \cos\varphi(t), r(t) \sin\varphi(t), z(t))$. Segue que $\mathbf{r}(t) = \epsilon \mathbf{r}_\epsilon\left(\frac{1}{\epsilon}t\right)$. Pelo corolário 1.2.7, $\mathbf{r}(t)$ é solução de (5.4.34), pelas propriedades de \mathbf{r}_ϵ , temos que $\mathbf{r}(t)$ satisfaz:

(1) $\frac{\epsilon}{2} < \text{dist}(\mathbf{r}(t), \mathcal{C}) < \frac{3\epsilon}{2}$

(2) escrevendo $\mathbf{r}_\epsilon(t) = (x_\epsilon(t), y_\epsilon(t), z_\epsilon(t))$, observamos que

$\mathbf{r}(t) = (\epsilon x_\epsilon\left(\frac{1}{\epsilon}t\right), \epsilon y_\epsilon\left(\frac{1}{\epsilon}t\right), \epsilon z_\epsilon\left(\frac{1}{\epsilon}t\right))$ tem momento angular $\epsilon(\dot{y}_\epsilon x_\epsilon - \dot{x}_\epsilon y_\epsilon) = \epsilon \frac{K}{\epsilon} = K$.

Dado $\chi > 0$, tome ϵ_0 com $\frac{3}{2}\epsilon_0 < \chi$. Logo existem $0 < \epsilon < \epsilon_0$, $\mathbf{r}_\epsilon(t)$, e $\mathbf{r}(t) = \epsilon \mathbf{r}_\epsilon\left(\frac{1}{\epsilon}t\right)$ como acima. Assim, $\text{dist}(\mathbf{r}(t), \mathcal{C}) \leq \chi$. Mais ainda, como (x_ϵ, z_ϵ) tem por traço uma curva fechada simples, simétrica em relação ao eixo x , que enlaça o fio circular, o mesmo vale para $(r(t), z(t)) = (\epsilon x_\epsilon\left(\frac{1}{\epsilon}t\right), \epsilon z_\epsilon\left(\frac{1}{\epsilon}t\right))$. ■

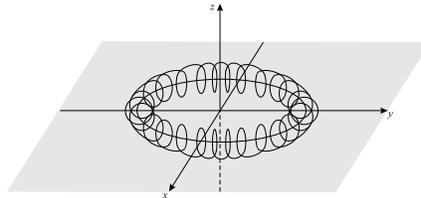


Figura 5.4.25: Solução periódica no espaço \mathbb{R}^3

Comentário Dada uma solução (periódica) \mathbf{r}_ϵ de (1.1.1), com o fio circular com raio $1/\epsilon$ e com momento angular $\frac{K}{\epsilon}$, obtemos uma solução (periódica) $\mathbf{s}(t)$ do sistema (5.4.34), com momento angular K (veja figura 5.4.25).

5.5 Solução de equilíbrio

No início deste trabalho observamos que a origem é um equilíbrio do sistema (1.1.1), veja observação 1.1.2. Nesta seção, verificamos que a origem é a única solução de equilíbrio deste sistema.

Teorema 5.5.1 *A origem é o único equilíbrio do sistema $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r})$, onde V é o potencial do fio circular homogêneo.*

Prova: Já vimos que a origem é um equilíbrio do sistema $\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r})$, provemos agora a unicidade. Temos que $\frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) = \beta z$, $\beta > 0$, para todo z , logo se $\frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) = 0$ então $z = 0$, assim, se temos outra solução (x, y, z) de equilíbrio, esta se encontra no plano- (x, y) que contém o círculo. Pela proposição 4.2.2 e pela observação 5.2.2, temos que, no plano- (x, y) , a menos da origem, $\nabla V(\mathbf{r}) = \frac{U'(r)}{r}\mathbf{r}$, com $U' > 0$ fora do círculo e $U' < 0$ na região interior ao círculo menos a origem. Portanto, $\nabla V = 0$ apenas na origem, como queríamos provar. ■

Apêndice A

O potencial devido a Gauss

Apresentamos aqui a prova detalhada da terceira expressão equivalente do potencial, que aparece na seção 1.2.1. Inicialmente, vamos lembrar a definição da média aritmético-geométrica. Como falamos anteriormente, obtemos esta média da seguinte maneira:

Dados dois números positivos m, n , a média aritmética destes é maior ou igual que sua média geométrica, pois desde que $(m - n)^2 \geq 0$, segue que $m^2 + 2mn + n^2 \geq 4mn$, sendo assim $\frac{(m+n)^2}{4} \geq mn$, logo $\frac{1}{2}(m + n) \geq \sqrt{mn}$.

Supondo $m > n$, então $m > \frac{m+n}{2} > \sqrt{mn} > n$.

Chamando $m_1 = \frac{m+n}{2}$ e $n_1 = \sqrt{mn}$, e construindo as seqüências $\{m_i\}$, $\{n_i\}$ com

$$m_{i+1} = \frac{m_i + n_i}{2}, \quad n_{i+1} = \sqrt{m_i n_i}$$

temos $m > m_1 > m_2 > \dots > n_2 > n_1 > n$.

Como a seqüência $\{m_i\}$ é decrescente e limitada por n , esta converge, digamos para \bar{m} . Da mesma forma, $\{n_i\}$ é uma seqüência crescente e limitada por m , logo converge, digamos para \bar{n} . Agora, veremos que os limites são iguais.

De fato, considere a diferença $m_{i+1} - n_{i+1}$. Desde que $n_{i+1} > n_i$ é claro que

$$m_{i+1} - n_{i+1} < m_{i+1} - n_i = \frac{1}{2}(m_i + n_i) - n_i = \frac{1}{2}(m_i - n_i)$$

E portanto $0 < m_i - n_i < \frac{1}{2^i}(m - n)$.

Tomando o limite quando i tende para o infinito, vemos que as seqüências convergem a um mesmo limite comum. Este limite é chamado por Gauss ([H], pag. 78), de *média aritmético-geométrica* de m e n , que denotaremos por $\sigma(m, n)$. Note que se $m = n$, então $\sigma(m, m) = m$. ■

Terceira expressão: *O potencial do fio circular homogêneo devido a Gauss é dado por:*

$$V(P) = -\frac{M}{\sigma(D, d)} \quad (\text{A.0.1})$$

onde $\sigma(D, d)$ é a média aritmético-geométrica de $D > 0$ e $d > 0$, e d, D são as funções de $P = (x, y, z)$ definidas em (1.2.7).

Prova: Pela mudança de variável $\psi = \frac{w}{2}$ em (1.2.12), obtemos a expressão

$$V(P) = -2\lambda\rho \int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{d^2 \cos^2 \psi + D^2 \sin^2 \psi}} \quad (\text{A.0.2})$$

E pela mudança de variável $\psi' = \pi - \psi$ em (A.0.2) temos

$$\begin{aligned} V(P) &= -2\lambda\rho \int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{D^2 \cos^2 \psi + d^2 \sin^2 \psi}} \\ &= -\lambda\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{D^2 \cos^2 \psi + d^2 \sin^2 \psi}} \\ &= -\frac{\lambda\rho}{D} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos^2 \psi + \frac{d^2}{D^2} \sin^2 \psi}}. \end{aligned} \quad (\text{A.0.3})$$

A última integral depende somente da razão $\frac{d}{D}$. Portanto, se nós encontramos o potencial de um ponto qualquer onde esta razão tem um dado valor c , nós podemos encontrar o potencial em todos os pontos onde a razão entre as distâncias máxima e mínima tem este valor c .

Se tomamos um ponto P no eixo z , temos $d = D$ e o potencial satisfaz

$$V(P) = -\frac{\lambda\rho}{D} \int_0^{2\pi} d\psi = -\frac{M}{D} = -\frac{M}{\sigma(D, D)}$$

como queríamos.

Seja então P um ponto fora do eixo z , logo com $d < D$. O conjunto de pontos P_α , no plano que contém o ponto P e o eixo z , para os quais $\frac{d_\alpha}{D_\alpha} = \frac{d}{D}$ é constante, formam um círculo \bar{C} passando pelo interior do fio circular.

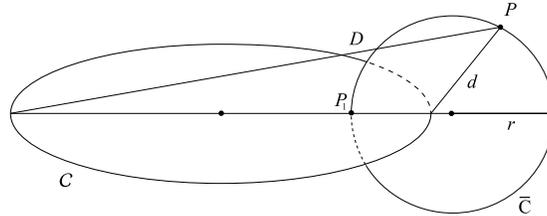
De fato, considerando, sem perda de generalidade, P no plano- (x, z) , fazendo $y = 0$, a equação

$$\frac{[(\sqrt{x^2 + y^2} - \rho)^2 + z^2]^{1/2}}{[(\sqrt{x^2 + y^2} + \rho)^2 + z^2]^{1/2}} = c$$

se reduz a $(x - \frac{\rho(1+c^2)}{1-c^2})^2 + z^2 = (\frac{\rho(1+c^2)}{1-c^2})^2 - \rho^2$ que é a expressão de um círculo de centro $x_0 = \frac{\rho(1+c^2)}{1-c^2}$, $z = 0$ e raio r com $r^2 = [\frac{\rho(1+c^2)}{1-c^2}]^2 - \rho^2 = \frac{4\rho^2 c^2}{(1-c^2)^2}$.

Observações:

- 1) Observe que quando c tende para 1, o raio e o centro vão para o infinito e no limite o círculo degenera no eixo z , que é o conjunto dos pontos onde $c = 1$, ou equivalentemente, $d = D$.
- 2) O círculo corta o eixo x em dois pontos: $(x_0 - r, 0, 0)$ e $(x_0 + r, 0, 0)$. O ponto $(x_0 - r, 0, 0)$ pertence ao interior do fio circular no plano- (x, z) pois $0 < (x_0 - r) < \rho$.



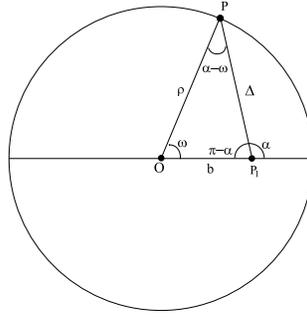
Voltando à prova, seja P_1 o ponto deste círculo \bar{C} no plano- (x, y) e interior ao fio circular homogêneo (veja figura acima). Se p_1 denota a distância máxima de P_1 ao fio, temos de (A.0.3) que $DV(P) = p_1V(P_1)$ o que implica

$$V(P) = \frac{p_1}{D}V(P_1) \tag{A.0.4}$$

ou seja, se conhecemos o valor do potencial em P_1 , podemos conhecer em todos os pontos ao longo do círculo que passa por P_1 . Assim, o problema se reduz a encontrar o potencial nos pontos do raio do fio circular.

Pela lei dos senos, temos a seguinte relação:

$$\frac{\rho}{\text{sen}(\pi - \alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\alpha - w)}$$



Como $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen} \alpha$, então temos

$$\text{sen}(\alpha - w) = \frac{b}{\rho} \text{sen} \alpha. \quad (\text{A.0.5})$$

Queremos w em função de α :

Derivando $\rho \text{sen}(\alpha - w(\alpha)) = b \text{sen} \alpha$ em relação a α temos

$$\rho \cos(\alpha - w(\alpha)) \left(1 - \frac{dw}{d\alpha}\right) = b \cos \alpha$$

logo, $1 - \frac{dw}{d\alpha} = \frac{b \cos \alpha}{\rho \cos(\alpha - w(\alpha))}$, segue que

$$\frac{dw}{d\alpha} = 1 - \frac{b \cos \alpha}{\rho \cos(\alpha - w(\alpha))} = \frac{\rho \cos(\alpha - w(\alpha)) - b \cos \alpha}{\rho \cos(\alpha - w(\alpha))},$$

donde

$$\frac{dw}{d\alpha} = \frac{\Delta(w(\alpha))}{\rho \cos(\alpha - w(\alpha))} \quad (\text{A.0.6})$$

pois $\Delta = \rho \cos(\alpha - w) + b \cos(\pi - \alpha) = \rho \cos(\alpha - w) - b \cos \alpha$.

Sendo assim, por (A.0.5) e (A.0.6), temos:

$$\begin{aligned} V(P_1) &= -\lambda\rho \int_0^{2\pi} \frac{dw}{\Delta(w)} &= -\lambda\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\rho\sqrt{1 - \frac{b^2}{\rho^2}\text{sen}^2\alpha}} \\ &= -\lambda\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{\rho^2 - b^2\text{sen}^2\alpha}} &= -\lambda\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{\rho^2\cos^2\alpha + (\rho^2 - b^2)\text{sen}^2\alpha}} \end{aligned}$$

Como as distâncias máxima e mínima de P_1 ao fio circular C são $p_1 = \rho + b$ e $q_1 = \rho - b$, notamos que

$$\rho = \frac{p_1 + q_1}{2} = p_2 \quad \text{e} \quad \sqrt{\rho^2 - b^2} = \sqrt{p_1 q_1} = q_2$$

ou seja, p_2 e q_2 são as médias aritmética e geométrica de p_1 e q_1 , respectivamente, e escrevemos

$$V(P_1) = -\lambda\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{p_2^2 \cos^2\alpha + q_2^2 \text{sen}^2\alpha}}$$

Comparando com (A.0.3), a qual é válida para $P = P_1$, $D = p_1$, $d = q_1$ vemos que a integral não muda pela substituição de p_1 e q_1 pelas suas médias aritmética p_2 e geométrica q_2 . Definindo a função $\varphi(u, v) = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{u^2 \cos^2\alpha + v^2 \text{sen}^2\alpha}}$, temos

$$\varphi(\rho, \sqrt{\rho^2 - b^2}) = \varphi(\rho + b, \rho - b)$$

ou seja, fazendo $u = \rho + b$, $v = \rho - b$, vemos que φ satisfaz $\varphi(u, v) = \varphi\left(\frac{u+v}{2}, \sqrt{uv}\right)$.

Como ρ e b são quaisquer, com $\rho > b$, concluímos que

$$\varphi(p_1, q_1) = \varphi(p_2, q_2) = \varphi(p_3, q_3) = \cdots = \varphi(p_n, q_n) \cdots$$

com $p_{n+1} = \frac{p_n + q_n}{2}$ e $q_{n+1} = \sqrt{p_n q_n}$.

A importância desta observação deve-se ao fato de que as seqüências $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ convergem para um mesmo limite $\sigma(p_1, q_1)$ quando n vai para o infinito. σ é a média aritmético-geométrica de p_1 e q_1 .

Assim,

$$V(P_1) = -\lambda\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sigma^2 \cos^2\alpha + \sigma^2 \text{sen}^2\alpha}} = -\frac{2\pi\lambda\rho}{\sigma(p_1, q_1)} = -\frac{M}{\sigma(p_1, q_1)}$$

De fato, temos $V(P) = -\frac{M}{\sigma(D,d)}$ para qualquer ponto P , concluindo a prova da afirmação. ■

Observações:

1) A prova de (A.0.1) pode ser encontrada em [Po], pags. 32-38, [Ke], pags. 58-61. Eles apresentam uma prova para um ponto P no interior do fio circular e logo concluem que vale para todo ponto.

Para verificar que (A.0.1) vale para um ponto P qualquer no espaço, consideramos o ponto P_1 no interior do fio circular, satisfazendo (A.0.4), onde p_1 e q_1 denotam as distâncias máxima e mínima de P_1 ao fio respectivamente, e $\frac{d}{D} = \frac{q_1}{p_1}$

Por (A.0.4) temos

$$V(P) = -\frac{p_1}{D} \frac{M}{\sigma(p_1, q_1)} \quad (\text{A.0.7})$$

E como σ é homogênea de grau 1, temos

$$V(P) = -\frac{p_1}{D} \frac{M}{\sigma(p_1, q_1)} = -\frac{M}{\frac{D}{p_1} \sigma(p_1, q_1)} = -\frac{M}{\sigma\left(D, \frac{Dq_1}{p_1}\right)} = -\frac{M}{\sigma(D, d)}$$

a última igualdade segue do fato $\frac{d}{D} = \frac{q_1}{p_1}$.

2) É interessante notar que a expressão (A.0.7) nos diz que basta calcular a média aritmético-geométrica de p_1 e q_1 e obtemos o valor do potencial em todos os pontos do círculo \overline{C} que passa por P_1 .

Os valores p_1 e q_1 são encontrados como função de D e d . Assim, dado um ponto P no espaço, determinamos os valores D e d (extremos de Δ) e encontramos p_1 e q_1 pelas equações: $p_1 + q_1 = 2\rho$ e $\frac{q_1}{p_1} = \frac{d}{D}$

$$q_1 = \frac{2\rho d}{d + D}, \quad p_1 = \frac{2\rho D}{d + D}$$

Determinando a média aritmético-geométrica de p_1 e q_1 , por (A.0.7) obtemos o potencial no ponto P .

Comentário

Usando a primeira ou segunda expressão para o potencial V , facilmente obtemos a expressão do seu gradiente ∇V . Porém, quando escrevemos o potencial de um ponto como o inverso da média aritmético-geométrica das distâncias máxima e mínima do ponto ao fio circular, não é claro como é a expressão do gradiente. Fizemos esta análise e obtivemos uma expressão para o gradiente do potencial ∇V neste caso. Estes cálculos apresentamos a seguir.

Considere o espaço dos parâmetros d, D e uma curva $P(t)$:

$$P(t) = (D(t), d(t))$$

$$P(0) = (D, d)$$

$$\dot{P}(0) = (\alpha, \eta)$$

$$\text{Faça } (\alpha, \eta) \longrightarrow (\gamma D, \tilde{\delta}d) \text{ e } \tilde{\delta} = \gamma + \delta.$$

Desenvolvendo em série de Taylor em torno de $t = 0$, temos:

$$D(t) = D + t\alpha + \dots = (1 + t\gamma)D + O(t^2)$$

$$d(t) = d + t\eta + \dots = (1 + t\gamma)d + t\delta d + O(t^2)$$

Calculando as médias aritmética e geométrica de $D(t)$ e $d(t)$, obtemos:

$$\begin{aligned} D_1(t) &= \frac{D(t)+d(t)}{2} = (1 + t\gamma)D_1 + \frac{1}{2}t\delta d + O(t^2) \\ &= (1 + t\alpha_1)D_1 + O(t^2) \end{aligned}$$

onde $\alpha_1 = \gamma + \frac{1}{2}\delta \frac{d}{D_1}$ e $D_1 = \frac{D(0)+d(0)}{2}$.

$$\begin{aligned} d_1(t) &= (1 + t\gamma)d_1 + \frac{1}{2}t\delta d_1 + O(t^2) \\ &= (1 + t\alpha_1)d_1 + \frac{1}{2}t\delta d_1 \left(1 - \frac{d}{D_1}\right) + O(t^2) \end{aligned}$$

onde $d_1 = \sqrt{D(0)d(0)}$.

Fazendo este processo sucessivamente, do cálculo das médias aritmética e geométrica e rearrumando, obtemos uma forma geral:

$$D_n(t) = (1 + t\alpha_n)D_n + O(t^2)$$

$$d_n(t) = (1 + t\alpha_n)d_n + \frac{1}{2^n}t\delta d_n \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{d_{j-1}}{D_j}\right) + O(t^2)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$, $\alpha_0 = \gamma$, $d_0 = d$, $D_0 = D$ e

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \frac{1}{2^n} \delta \frac{d_{n-1}}{D_n} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{d_{j-1}}{D_j}\right),$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$

Segue que $\alpha_n = \alpha_0 + \delta \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \frac{d_{i-1}}{D_i} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 - \frac{d_{j-1}}{D_j}\right)$.

Tomando o limite em $d_n(t)$ ou em $D_n(t)$, quando n vai para o infinito, obtemos $\sigma(t) = (1 + t\alpha^*)\sigma + O(t^2)$, $n \rightarrow \infty$, com

$$\alpha^* = \alpha_0 + \delta \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_{n-1}}{D_n} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{d_{j-1}}{D_j}\right)$$

Note que α^* é um número, ou seja, a série converge.

Mas sabemos que

$$\begin{aligned} V(P(t)) = \frac{1}{\sigma(t)} &= \frac{1}{\sigma} - \frac{t\alpha^*}{\sigma} + O(t^2) \\ &= V(d, D) - t\alpha^*V(d, D) + O(t^2) \end{aligned}$$

Logo $\frac{d}{dt}V(P(t))|_{t=0} = -\alpha^*V(d, D) = \langle \nabla V(P(0)), (\alpha, \eta) \rangle$.

Mas temos que $\alpha^* = \gamma + \delta\chi$, onde $\chi = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_{n-1}}{D_n} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{d_{j-1}}{D_j}\right)$, e como $\gamma = \frac{\alpha}{D}$, $(\gamma + \delta = \eta/d)$, $\delta = \frac{\eta}{d} - \frac{\alpha}{D}$, temos

$$\alpha^* = \frac{\alpha}{D} + \left(\frac{\eta}{d} - \frac{\alpha}{D}\right)\chi = \frac{\alpha}{D}(1 - \chi) + \frac{\eta}{d}\chi$$

Assim, $\alpha^* = \left(\frac{1-\chi}{D_0}\right)\alpha + \frac{\chi}{d_0}\eta$, e portanto

$$\langle \nabla V(d, D), (\alpha, \eta) \rangle = - \left(\frac{1-\chi}{D_0} V(d, D)\alpha + \frac{\chi}{d_0} V(d, D)\eta \right)$$

e encontramos uma expressão para o gradiente de $V(d, D)$ em \mathbb{R}^2 ,

$$\nabla V(d, D) = \left(\frac{\chi-1}{D_0} V(d, D), -\frac{\chi}{d_0} V(d, D) \right).$$

Observação: Podemos obter o gradiente de V em \mathbb{R}^3 , usando a matriz da transformação:

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$$

$$(x, y, z) \mapsto (D, d),$$

com $D^2 = (\sqrt{x^2 + y^2} + \rho)^2 + z^2$ e $d^2 = (\sqrt{x^2 + y^2} - \rho)^2 + z^2$.

Apêndice B

Prova do Lema 4.2.1

Neste apêndice $H_n(Z)$ denota a homologia singular, com coeficientes em \mathbb{Z} , de um espaço Z .

Se Z é um espaço topológico e $z \in Z$, $\mathcal{C}_Z(z)$ denota a componente conexa do ponto z em Z . Mais geralmente, se $A \subset Z$ é conexo, $\mathcal{C}_Z(A)$ denota também a componente conexa de A em Z .

Lembre que se $A, B \subset Z$ são fechados e conexos, $X \subset Z$ fechado, e A, B, X disjuntos, dizemos que X *separa* A, B em Z , se A e B estão em componentes conexas diferentes de $Z \setminus X$, isto é, $\mathcal{C}_{Z \setminus X}(A) \neq \mathcal{C}_{Z \setminus X}(B)$, ou equivalentemente, $\mathcal{C}_{Z \setminus X}(A) \cap \mathcal{C}_{Z \setminus X}(B) = \emptyset$. (Lembre que componentes conexas, ou são disjuntas ou coincidem).

Note que se X separa A, B , então X' também separa A, B , com $X \subset X'$, A, B, X' disjuntos.

Se A, B são conexos por caminhos, e Z é uma variedade topológica, o conceito de separação pode ser também escrito em termos homológicos: X separa A, B em Z se $\iota(x) \neq 0 \in H_0(Z \setminus X)$, onde ι é induzida pela inclusão $A \cup B \hookrightarrow Z \setminus X$ e $x = x_A - x_B$, com

$$x_A = [a] \in H_0(A) \cong \mathbb{Z}, \quad a \in A,$$

$$x_B = [b] \in H_0(B) \cong \mathbb{Z}, \quad b \in B.$$

Aqui estamos considerando $H_0(A \cup B) = H_0(A) \oplus H_0(B)$ (A e B são disjuntos, e

A, B são abertos em $A \cup B$). Note que as classes x_A, x_B não dependem dos pontos a, b escolhidos, pois A, B são conexos por caminhos. A condição de Z ser variedade topológica é usada para que as componentes conexas de abertos, coincidam com as componentes conexas por caminhos.

Lema B.0.2 *Seja Z uma variedade topológica e $X_0, A, B \subset Z$ fechados, disjuntos, com A, B conexos por caminhos. Seja também $\{X_n\}_{n \geq 1}$, uma seqüência decrescente de compactos, com $X_1 \subset X_0$. Se X_n separa A, B , para todo n , então $\bigcap X_n$ separa A, B .*

Prova: Suponha que $X = \bigcap X_n$ não separa A, B . Logo, $\mathcal{C}_{Z \setminus X}(A) = \mathcal{C}_{Z \setminus X}(B)$. Como X é compacto, $Z \setminus X$ é aberto. Conseqüentemente $\mathcal{C}_{Z \setminus X}(A)$ é aberto. Segue que $\mathcal{C}_{Z \setminus X}(A)$ é conexo por caminhos. Então, para $a \in A, b \in B$, existe $\alpha : [0, 1] \rightarrow Z \setminus X$ contínua, com $\alpha(0) = a, \alpha(1) = b$. Como $\alpha([0, 1]) \cap X = \emptyset$ e $X = \bigcap X_n$, existe n_0 tal que $\alpha([0, 1]) \cap X_n = \emptyset$, para todo $n \geq n_0$, o que implica que X_n não separa A, B , para todo $n \geq n_0$. ■

Lema B.0.3 *Sejam Z variedade topológica, $A, B, X_1, X_2 \subset Z$ fechados, disjuntos, com A, B conexos por caminhos. Suponha que $H_1(Z) = 0$. Se X_i não separa $A, B, i = 1, 2$, então $X_1 \cup X_2$ não separa A, B .*

Prova: Seja $K = A \cup B$ e $X = X_1 \cup X_2$. Então $H_0(K) = H_0(A) \oplus H_0(B) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Seja $x = x_A - x_B, x_A = [a], x_B = [b], a \in A, b \in B$.

Como X_i não separa A, B temos que $\iota_i(x) = 0 \in H_0(Z \setminus X_i), i = 1, 2$, onde ι_i é induzido pela inclusão $K \hookrightarrow Z \setminus X_i$. Considere o seguinte diagrama de seqüências de Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & H_1(K) & \longrightarrow & H_0(K) & \xrightarrow{\phi} & H_0(K) \oplus H_0(K) & \longrightarrow & H_0(K) & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow \iota & & \downarrow \iota_1 \oplus \iota_2 & & \downarrow & & \\ \longrightarrow & H_1(Z) & \xrightarrow{\theta} & H_0(Z - X) & \xrightarrow{\psi} & H_0(Z - X_1) \oplus H_0(Z - X_2) & \longrightarrow & H_0(Z) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

A primeira linha é a seqüência de Mayer-Vietoris de $K = A \cup B$, a segunda linha é a seqüência de Mayer-Vietoris de $Z = (Z - X_1) \cup (Z - X_2)$. Note que $(Z - X_1) \cap (Z - X_2) = Z - (X_1 \cup X_2) = Z - X$. As verticais são induzidas pelas inclusões.

Como $\phi(x) = (x, x)$, temos $(\iota_1 \oplus \iota_2) \phi(x) = (\iota_1(x), \iota_2(x)) = (0, 0)$. Assim $\psi \iota(x) = 0$ e temos $\iota(x) \in \text{Im } \theta$. Mas $H_1(Z) = 0$. Conseqüentemente, $\iota(x) = 0$, isto é, X não separa A, B . ■

Corolário B.0.4 *Seja Z variedade topológica, $A, B, X_1, X_2, \dots, X_k$ fechados, disjuntos em Z , com A, B conexos por caminhos. Suponha que $H_1(Z) = 0$. Se X_i não separa A, B , então $\bigcup_{i=1}^k X_i$ não separa A, B .*

Prova: Por indução, usando o lema anterior. ■

Proposição B.0.5 *Seja Z variedade topológica, A, B, X disjuntos, fechados em Z , com A, B conexos por caminhos e X compacto. Se X separa A, B , então existe componente conexa de X que separa A, B .*

Prova: Sejam $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ a família de componentes conexas de X . Se Λ é finito, a proposição segue do corolário acima.

Suponha que Λ é infinito. Como Z é variedade topológica, podemos supor que Z tem uma métrica *dist*.

Seja $Y_n = \{p \in Z; \text{dist}(p, X) \leq 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$, a $\frac{1}{n}$ -vizinhança de X em Z . Logo Y_n é compacto, $X = \bigcap Y_n$, e $Y_{n+1} \subset Y_n$.

Afirmção: Y_n tem um número finito de componentes conexas D , com $D \cap X \neq \emptyset$.

Prova: Suponhamos que Y_n tem infinitas componentes conexas D , com $D \cap X \neq \emptyset$. Escrevemos $Y = Y_n$.

Sejam D_1, D_2, \dots uma seqüência infinita de componentes conexas de Y diferentes, com $D_j \cap X \neq \emptyset$. Seja $x_j \in D_j \cap X$. Como X é compacto, podemos supor que $x_j \rightarrow x \in X$. Logo, existe componente conexa D de Y , com $x \in D \cap X$. Pela definição de $Y = Y_n$, $B \subset D \subset Y$, onde B é a componente conexa da bola aberta $B(x, \frac{1}{n})$ que contém x . Como $x_j \mapsto x$ e B é aberto, existe j_0 tal que $x_j \in B \subset D$, para todo $j \geq j_0$. Segue que $D_j \cap D \neq \emptyset$, para todo $j \geq j_0$. Logo $D_j = D$, para todo $j \geq j_0$, uma contradição. Isto prova a afirmação. ■

Como X é compacto, existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $Y_n \cap (A \cup B) = \emptyset$. Portanto Y_n também separa A, B , para $n \geq n_0$.

Pela afirmação anterior, Y_n tem um número finito de componentes. Logo, para $n \geq n_0$, existe componente conexa D_n de Y_n , com $D_n \cap X \neq \emptyset$ e tal que D_n separa A, B . Note que D_n é compacto.

Como toda componente conexa D de Y_{n+1} , com $D \cap X \neq \emptyset$ está contida em uma única componente conexa D' de Y_n , com $D' \cap X \neq \emptyset$, temos que podemos construir uma seqüência decrescente $\{D_n\}$ de compactos, com $D_n \subset Y_n$ e D_n separa A, B .

Pelo lema B.0.2, $D := \bigcap D_n$ separa A, B . Note que $D = \bigcap D_n \subset \bigcap Y_n = X$. Seja \mathcal{W} a componente conexa de D em X . Logo \mathcal{W} separa A, B . ■

Podemos agora provar o lema 4.2.1.

Lema 4.2.1 *Sejam $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$ intervalos fechados e $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que*

$$\begin{cases} f(x, c) < 0, & x \in [a, b] \\ f(x, d) > 0, & x \in [a, b]. \end{cases}$$

Então, existe $\mathcal{W} \subset f^{-1}(0)$ compacto, conexo, tal que $\mathcal{W}_x := \mathcal{W} \cap (\{x\} \times [c, d]) \neq \emptyset$, para todo $x \in [a, b]$.

Prova: Seja $X = f^{-1}(0)$. Logo X separa $[a, b] \times \{c\}$, $[a, b] \times \{d\}$ em $[a, b] \times [c, d]$. Pela proposição B.0.5, existe componente conexa \mathcal{W} de $f^{-1}(0)$, tal que \mathcal{W} separa $[a, b] \times \{c\}$, $[a, b] \times \{d\}$ em $[a, b] \times [c, d]$. Note que $\mathcal{W}_x = \mathcal{W} \cap [\{x\} \times [c, d]] \neq \emptyset$, para todo $x \in [a, b]$. De fato, se $\mathcal{W}_x = \emptyset$, para algum $x \in [a, b]$, então o segmento $\{x\} \times [c, d]$ não intersecta \mathcal{W} . Mas $\{x\} \times [c, d]$ liga $[a, b] \times \{c\}$ com $[a, b] \times \{d\}$. Segue que \mathcal{W} não separa $[a, b] \times \{c\}$ e $[a, b] \times \{d\}$, o que é uma contradição. ■

Bibliografia

- [A] Alberti, A.: 2003, *Dinâmica de uma partícula no potencial de um fio circular*, tese de mestrado, Dep. de Matemática, UFPE, Brasil.
- [AB] Ambrosetti, A. and Bessi, U.: 1992, *Multiple closed orbits for perturbed Keplerian problems*, Journal of Differential Equations, **96**, 283-294.
- [AC1] Ambrosetti, A. and Coti Zelati, V.: 1989, *Perturbation of hamiltonian systems with Keplerian potentials*, Math. Zeitschrift, **201**, 227-242, Springer-Verlag.
- [AC2] Ambrosetti, A. and Coti Zelati, V.: 1990, *Closed orbits of fixed energy for singular hamiltonian systems*, Arch. Rational Mech. Anal., **112**, 339-362, Springer-Verlag.
- [AZ] Rabinowitz, P.H., Ambrosetti, A., Ekeland, I. and Zehnder, E.J.: 1987, *Periodic Solutions of Hamiltonian Systems and Related Topics*, D. Reidel Publishing Company.
- [B1] Bessi, U.: 1991, *Multiple closed orbits for singular conservative systems via geodesic theory*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 85.
- [B2] Bessi, U.: 1993, *Multiple closed orbits for fixed energy for gravitational potentials*, Journal of Differential Equations, **104**, 1-10.
- [BLO] Belbruno, E., Llibre, J. and Ollé, M.: 1994, *On the families of periodic orbits which bifurcate from the circular Sitnikov motions*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **60**, 99-129.

- [G] Goldstein, H.: 1980, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley.
- [H] Hancock, H.: 1958, *Elliptic Integrals*, Dover Publications, Inc. New York.
- [Ke] Kellogg, O.D.: 1954, *Foundations of Potential Theory*, Dover Publications, Inc. New York.
- [M] Moser, J.: 1973, *Stable and random motions in dynamical systems*, Annals of Mathematics Studies 77, Princeton University Press.
- [Mc] MacMillan, W.D.: 1958, *Theoretical Mechanics: The theory of the potential*, Dover Publications, Inc. New York.
- [Po] Poincaré, H.: 1990, *Théorie du Potentiel Newtonien*, Éditions Jacques Gabay, Paris.
- [SM] Sotomayor, J.: *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides.
- [SS] Stiefel, E.L. and Scheifele, G.: 1971, *Linear and regular celestial mechanics*, Springer-Verlag, (Berlin Heidelberg) New York.
- [V1] Vidal, C.: 2001, 'Periodic solutions for any planar symmetric perturbation of the Kepler problem', *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **80**, 119-132.
- [V2] Vidal, C.: 'Periodic solutions of symmetric perturbations of the gravitational potentials', preprint.