

Códigos de Gauss não 2-Face Coloráveis em $\mathbb{R}P^2$

Emerson Alexandre de Oliveira Lima

25 de Abril de 2003

Dedicatória

A meu filho querido, Guilherme, por ter renovado minha força de vida e juventude.

A minha esposa Adriana por toda paciência que teve comigo durante meu doutoramento.

A toda minha família pelo apoio e constante incentivo.

Agradecimentos

Nenhum trabalho é possível de ser realizado sem a colaboração, muitas vezes imprescindível, de muitas pessoas. Correndo o risco de não citar (porém nunca de esquecer) alguém, eis algumas pessoas sem as quais nunca teria realizado este empreendimento:

Minha esposa e companheira Adriana, sem a qual não teria tido a paz de espírito necessária a qualquer realização.

Meu filho querido Guilherme cuja força vital e juventude foram de tal forma brilhantes que conseguiram iluminar a minha, um pouco extinta, chama de vida.

Meu Pai, minha mãe e irmãos que sempre me deram força e apoio nos momentos de dificuldade.

Meus antigos orientadores e eternos amigos Antonio Carlos Monteiro (matemática-graduação), Manoel Lemos (matemática-graduação), Walter Mendes de Azevedo (química-graduação), Oscar Malta (química-graduação), Marcelo Gomes (física-graduação), Sérgio Coutinho (física-graduação), Peter Veermann (matemática - mestrado), André Banks (matemática-mestrado) e Ramón Mendonza (o qual, pelos conselhos imprescindíveis que me deu durante toda minha vida acadêmica, vou considerar também como um de meus orientadores) por terem me mostrado, apesar de minha teimosia, o caminho certo de fazer ciência: o amor, a dedicação e a mente livre para o desconhecido.

Meu atual orientador e amigo Sóstenes Lins por me mostrar que a alegria, a intuição e o rigor matemático podem, e devem, ser partes integrantes do "fazer matemática".

Aos 6 cavaleiros do zodíaco: Alexandre (Dragão) , Bóris (Cisne), Delmo (Mist, o "Lagarto Real"), Kristiano (Phoenix), Otávio (Andrômeda) e Silmar (Cancer - Vejo você no Yomotso) (não esqueci de vocês, rapazes!!!)

Aos meus amigos pessoais Cláudia, Tânia, Nicole, Dulce, Carlos Henrique, Marcelo Gamma, Leonila, Nivaldo Pinheiro, Cleto França, Sílvia, Gilka, Jessé Gomes, Almir Pires, Robson Pequeno e o Pequeno Robson, Madeiro, Lígia, Joseane ...

Aos amigos que não citei acima (afinal de contas, é só uma página de dedicatória pessoal: Não cabe todo mundo), os autores dos livros e artigos que li durante toda minha vida acadêmica e todo pessoal de bastidores (biblioteca, secretarias, etc) que tornam nosso trabalho possível.

A Universidade Federal de Pernambuco pela infraestrutura que me permitiu o desenvolvimento confortável deste trabalho.

A Universidade Católica de Pernambuco pelo suporte material vital a realização desta pesquisa.

Finalmente, ao suporte financeiro do CNPq, sem o qual nada disto teria sido viável.

Conteúdo

1	Breve Histórico do Problema	1
1.1	Organização da Tese	3
2	Resumo da Solução	4
2.1	Introdução	4
2.2	Códigos de Gauss 2-Coloráveis em $\mathbb{R}P^2$	4
2.3	Mapas com Único z-gon: sua Relação com Códigos de Gauss	4
2.4	Caso 2-Colorável: Solução por Sistemas Lineares	10
2.5	Caso 2-Colorável: Solução pelo Grafo de Entrelaçamento	12
3	Principais Resultados da Tese	14
3.1	Introdução	14
3.2	A Operação de Quadruplicação do Código	14
3.3	Ações no Código Quadruplicado	20
3.4	O Teorema de Caracterização	22
4	Efeito das Ações Sobre a Função i_P	30
4.1	Introdução	30
4.2	Propriedades Imediatas da Função i em $\mathcal{P}$	30
4.3	Ações em $\mathcal{P}$: Efeitos Sobre a Função de Entrelaçamento	32
5	Efeito das Ações Sobre a Função i_P^2	36
5.1	Introdução	36
5.2	Propriedades da Intersecção de Funções de Entrelaçamento	36
5.3	Propriedades Imediatas da Função i^2	39
5.4	Efeito das Ações Sobre a Função i^2	40
6	Efeito das Ações Sobre a Função b_P	49
6.1	Introdução	49
6.2	Ações em $\mathcal{P}$: Efeitos Sobre a Função S_x	49
6.3	Demonstração das Proposições 3.6, 3.7 e 3.8	51
7	Demonstrações dos Resultados Principais	54
7.1	Introdução	54
7.2	Demonstração da Boa Definição de $K_g(P)$	54
7.3	Prova do Teorema de Caracterização	55
7.3.1	A classe $\bar{x}$	56
7.3.2	Classes de Vértices e Tipos de Arestas em K_g	57
7.3.3	Prova do Teorema de Classificação	60

Lista de Figuras

1.1	<i>lacet</i> projetivo 2-colorável	2
2.1	<i>lacet</i> projetivo não 2-colorável	5
2.2	Exemplo de Mapa Topológico	6
2.3	Ações de $\Omega(M)$ nos Retângulos do mapa M	7
2.4	Passagens do z-gon através de um retângulo	7
2.5	Quadrado Canônico	8
2.6	Representação Gráfica por Quadrados Canônicos do Código	9
2.7	Γ_i para Código Projetivo 2-Colorável	13
2.8	Γ_i para Código Projetivo Não 2-Colorável	13
3.1	Prova da condição de Paridade	15
3.2	Aresta (x,y) em ℓ e sua duplicação em $\mathcal{L}$	16
3.3	Possibilidade de passagem de $\mathcal{L}$ por $\bar{x}$	16
3.4	<i>Lacet</i> projetivo não 2-Colorável e sua duplicação.	17
3.5	Coloração dos Vértices Induzida pela Coloração Canônica das Arestas em $\mathcal{L}$	18
3.6	Representação Circular do Código Quadruplicado Canônico	19
3.7	Regiões do <i>lacet</i> correspondentes a $\Delta_{\mathbf{g}}(x)$	20
3.8	Tipos de quadrados na faixa correspondente a $\Delta_{\mathbf{g}}(x)$	20
3.9	Ações de $\bar{x}$ em $P \in \mathcal{P}$	21
3.10	Ações de $\bar{x}$ em $P \in \mathcal{P}$	22
3.11	Tipos de Arestas	24
3.12	Grafo $K_{\mathbf{g}}$ para código não 2-Colorável	25
3.13	Arestas do tipo N e E em $K_{\mathbf{g}}(P_0)$	25
3.14	Arestas do tipo N em $K_{\mathbf{g}}(P_0)$	26
3.15	Algoritmo de Classificação em um código não 2-Colorável	27
3.16	Sinais das arestas do tipo N em $K_{\mathbf{g}}(P_0)$	28
3.17	Sinais das arestas do tipo E em $K_{\mathbf{g}}(P_0)$	29
4.1	Primeira metade de todos os posicionamentos relativos entre duas classes não entrelaçadas	31
4.2	Segunda metade de todos os posicionamentos relativos entre duas classes não entrelaçadas	32
4.3	Todos os posicionamentos relativos entre duas classes $\bar{j}$ e $\bar{k}$ entrelaçadas	33
4.4	Efeito das três ações de $\bar{k}$ sobre a função i_P	34
7.1	Tipos de Arestas não Entrelaçadas	59
7.2	Tipos de Arestas Entrelaçadas	60
7.3	Efeito das Ações em Arestas do Tipo N1 a N3	61
7.4	Efeito das Ações em Arestas do Tipo E1 a E3	62
7.5	Efeito das Ações nos Vértices das Arestas tipo N	65

7.6	Efeito das Ações nos Vértices das Arestas tipo E	66
7.7	Arestas do tipo N e E em $K_{\mathbf{g}}(P_0)$	67
7.8	Arestas do tipo N em $K_{\mathbf{g}}(P_0)$	67
7.9	Cofronteira de Arestas Entrelaçadas	68

Capítulo 1

Breve Histórico do Problema

Introdução

Neste capítulo, estabelecemos o problema que nos propomos resolver nesta tese. Para tanto, discutimos, brevemente, sua origem histórica e principais contribuições no sentido de sua solução até o momento.

No próximo capítulo, continuamos este resumo histórico detalhando a solução do problema do código de Gauss em $\mathbb{R}P^2$ conforme feito por Sóstenes Lins em sua tese de doutoramento (ver [12]) para o caso de códigos 2-coloráveis.

O Problema do Código de Gauss: um Pequeno Histórico

Um **lacet** ℓ em uma superfície S (ou seja, uma variedade bidimensional compacta e fechada orientável ou não) é a imagem contínua do círculo S^1 em S de tal forma que $S - \ell$ é homeomorfo a uma coleção disjunta de discos em S e que cada auto-cruzamento em ℓ ocorre como um vértice 4-valente.

Podemos numerar arbitrariamente de 1 a n os auto-cruzamentos de ℓ de tal forma que, ao percorrer a curva a partir de qualquer um dos cruzamentos, obteremos uma seqüência de símbolos $\mathbf{g}$ com cada um dos símbolos de 1 a n ocorrendo exatamente 2 vezes ao longo de $\mathbf{g}$. Chamamos então $\mathbf{g}$ de **código do lacet ℓ em S** . Um código correspondente a um *lacet* no plano é chamado de realizável no plano ou **código planar**, sendo projetivo ou Kleiniano um código realizável, respectivamente, em $\mathbb{R}P^2$ ou na Garrafa de Klein.

Um **símbolo** x , isto é, um número de 1 a n , de um código $\mathbf{g}$ do *lacet* ℓ na superfície S é chamado de **símbolo par** quando, entre as duas aparições do símbolo x em $\mathbf{g}$, tivermos um número par de outros símbolos, sendo chamado de símbolo ímpar caso contrário. O conjunto dos símbolos que aparecem uma única vez entre as duas aparições de um símbolo x é denotado $i(x)$ (ver exemplo da Figura 1.1) enquanto que o conjunto de todos os símbolos entre as duas aparições de x é denotado por $\Delta(x)$. Podemos estender a definição das funções i e Δ para um subconjunto A de símbolos de $\mathbf{g}$ por linearidade utilizando a diferença simétrica, ou soma módulo 2, dos conjuntos.

Finalmente, uma vez que $S - \ell$ é homeomorfo a uma coleção de discos disjuntos, podemos definir o **grafo dual** desta coleção da maneira clássica, i.e., atribuindo um vértice a cada disco e uma aresta ligando discos que sejam adjacentes em S , ou seja, cuja fronteira em comum não seja vazia ou um conjunto de pontos isolados. O *lacet* (e o código correspondente) será dito **enlaçamento 2-colorável** quando o grafo assim definido for bipartido, o que equivale a coleção de discos ser 2-colorável no sentido canônico, i.e., podemos colorir, usando 2 cores, os discos em $S - \ell$ de tal forma que discos adjacentes tenham cores diferentes.

Dado um código $\mathbf{g}$ 2-colorável e uma coloração do mesmo, diremos que um símbolo é um **vértice preto** quando as duas passagens do *lacet* pelo símbolo convergem em uma face preta (estamos tacitamente admitindo que a coloração utiliza as cores preta e branca) e é um vértice branco caso contrário. vert. preto

O exemplo da Figura 1.1 ilustra estas definições.

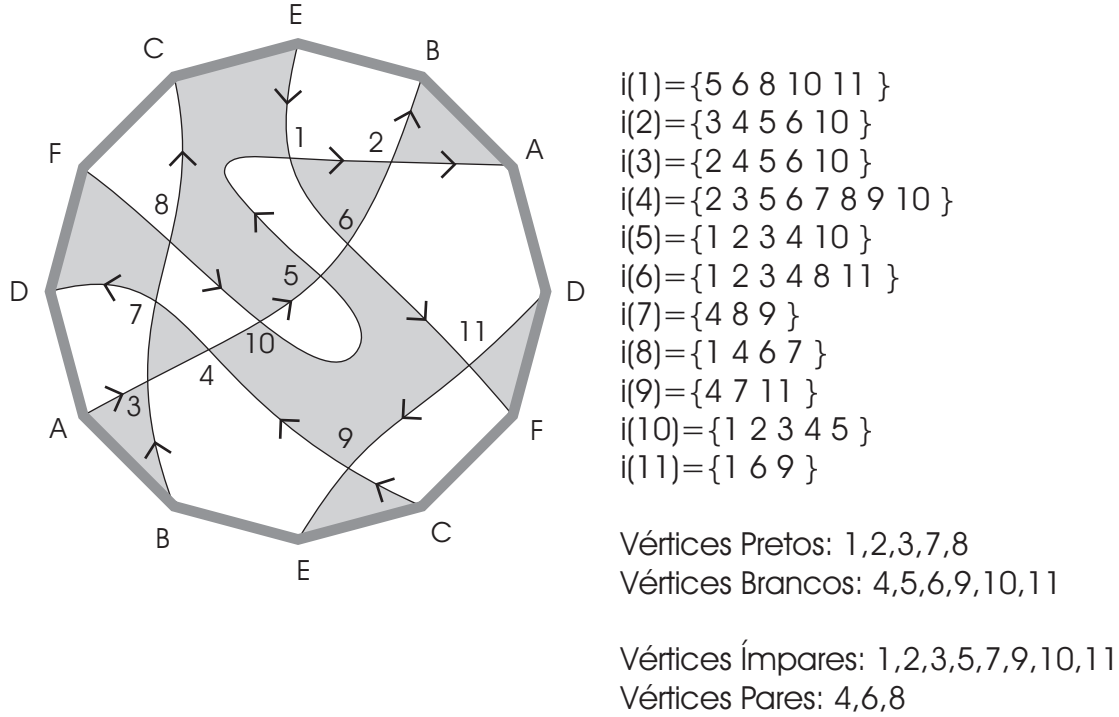


Figura 1.1: *lacet* projetivo do código $\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 10, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 4, 7, 11, 9, 1, 6, 11, 8, 10, 5$ e uma 2-coloração para o mesmo.

Nosso problema originou-se da seguinte indagação de Gauss [1]:

*Todo código planar é tal que x é par para todo símbolo x . A recíproca é verdadeira? Isto é, dado uma sequência de símbolos $\mathbf{g}$ tal que x é par para todo símbolo de $\mathbf{g}$, existirá um *lacet* planar cujo código seja $\mathbf{g}$?*

O próprio Gauss, no mesmo trabalho, concluiu na falsidade desta afirmação exibindo o código $\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 1, 2, 5$. Gauss, contudo, conjecturou a existência de condições adicionais de suficiência e esta conjectura é atualmente chamada de **Conjectura de Gauss** para códigos de *lacets*. Conj. Gauss

A solução para conjectura de Gauss para *lacets* planares foi resolvida em 1936 por Dehn [4] de forma algorítmica. A resolução da questão, na forma proposta por Gauss, de condições sobre o código foi encontrada por Rosenstiehl [9] em 1976:

Definimos em um grafo G , dado um vértice v , a **estrela** de v , ou $\delta(v)$, como o subconjunto das arestas incidentes a v que não são laços. Uma **co-fronteira** em G é a soma módulo 2 de $\delta(v)$
co-fronteira

Teorema 1.1 *Um código $\mathbf{g}$ é planar se, e somente se,*

- x é par para todo símbolo $x \in \mathbf{g}$ (condição de Gauss)
- Se x e y não são adjacentes em Γ_i então $|i(x) \cap i(y)|$ é par
- As arestas (x, y) de Γ_i para as quais $|i(x) \cap i(y)|$ é par formam uma cofronteira

Onde grafo Γ_i , ou **grafo de entrelaçamento** de um código $\mathbf{g}$ é formado tomando como Γ_i vértices os símbolos de $\mathbf{g}$. Uma aresta liga dois símbolos x e y quando eles são **vértices entrelaçados**, ou seja, as duas aparições do símbolo x em $\mathbf{g}$ separam as duas aparições do símbolo y . vert. entrel.

Representamos o entrelaçamento de dois símbolos por $x \propto y$. É fácil notar que $x \propto y$ se, e somente se, $y \propto x$.

Em 1980, Lins em sua tese de doutoramento (ver [12]), generalizou o resultado de Rosenstiehl [9] para a esfera, isto é, para caracterização dos códigos de Gauss de *lacets* para o plano projetivo no caso de *lacets* 2-coloráveis. Estes resultados também foram publicados em 1987 por Lins, Richter e Shank (ver [17]) em um trabalho posterior.

Seguindo uma linha mais algébrica, Crapo e Rosenstiehl (ver [19]) caracterizaram, no ano de 2001, os códigos de Gauss 2-coloráveis na esfera, plano projetivo e garrafa de Klein. Tal caracterização, contudo, não fornece um algoritmo para identificar os códigos Kleinianos ou Toroidais.

Finalmente, Lins, Oliveira-Lima e Valdenberg [20] obtiveram condições sobre um sistema **linear** para o problema do código de Gauss 2-colorível na Garrafa de Klein generalizando os resultados obtidos por Lins [12] para o caso do Plano Projetivo.

As soluções dadas por Lins seguem o espírito da solução original do problema encontrada por Rosenstiehl que fornece não apenas condições que caracterizam o código ser ou não realizável numa superfície mas que, também, fornecem um algoritmo que permite, efetivamente, *encontrar* o *lacet* correspondente.

Nesta tese, complementamos os resultados obtidos por Lins em [12] caracterizando os códigos projetivos não 2-coloráveis. As técnicas aqui desenvolvidas, contudo, podem ser aplicadas em outras superfícies tais como o Toro e a Garrafa de Klein o que será objeto de pesquisas futuras.

1.1 Organização da Tese

No Capítulo 2, resumimos os resultados relativos à caracterização dos códigos projetivos 2-coloráveis e cuja extensão é o objeto deste trabalho.

No Capítulo 3, é fixada a notação e são enunciados os resultados centrais da tese. O Teorema de Caracterização (Teorema 3.1) é enunciado bem como os resultados necessários à sua demonstração: As Proposições 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9.

O objetivo do restante da tese é demonstrar os resultados enunciados neste capítulo.

Nos Capítulos 4 e 5 enunciamos e demonstramos uma série de resultados que são utilizados no capítulo 6 para demonstrar as Proposições 3.6, 3.7 e 3.8.

No Capítulo 7, demonstramos a Proposição 3.9 e os Teoremas 3.1 e 3.2 finalizando assim o trabalho.

Capítulo 2

Resumo da Solução

2.1 Introdução

Neste capítulo, continuamos o histórico do problema do código de Gauss resumindo os resultados obtidos em [12] para o problema do Código de Gauss 2-Coloráveis em $\mathbb{R}P^2$ e, mais recentemente, para a Garrafa de Klein.

No próximo capítulo, segue um resumo dos resultados que serão demonstrados nesta tese e que resolvem o problema do Código de Gauss não 2-Coloráveis em $\mathbb{R}P^2$ completando a solução do Problema do Código de Gauss naquela superfície.

2.2 Códigos de Gauss 2-Coloráveis em $\mathbb{R}P^2$

Dado um **código de Gauss** $\mathbf{g}$, ou seja, uma seqüência cíclica de n símbolos numerados de 1 a n onde cada símbolo ocorre exatamente 2 vezes, denotamos por $S = Surf_{min}(g)$ a superfície de conectividade mínima na qual podemos encontrar um *lacet* cujo código seja $\mathbf{g}$. Quando S for o plano, pode-se demonstrar que o *lacet* correspondente será sempre 2-colorável, contudo, em outras superfícies isto não ocorre necessariamente conforme podemos notar para o código projetivo $\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6, 11, 8, 5, 10, 12$ cujo um dos enlaçamentos é apresentado na Figura 2.1

O que discutiremos neste capítulo é a solução dada em [12] para o problema de determinar, dado um código de Gauss $\mathbf{g}$, uma superfície que contém um enlaçamento cujo código seja $\mathbf{g}$, a qual denotaremos $Surf(g)$, no caso que podemos pressupor que tal enlaçamento é 2-colorável nesta superfície.

Para fixar idéias e estabelecer a notação, exemplificaremos a teoria no código

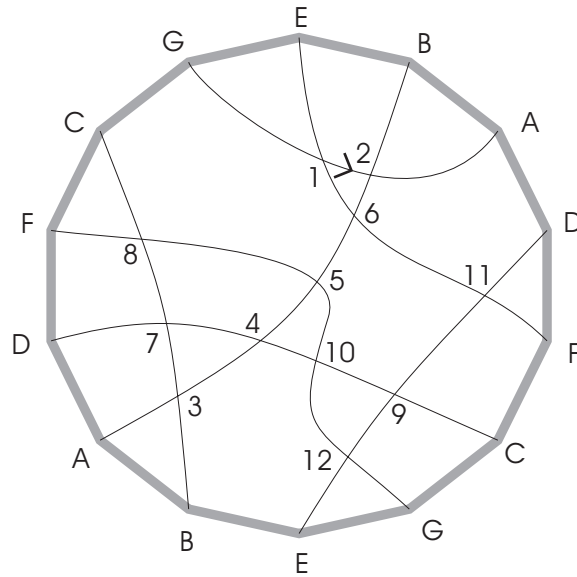
$$g = 1, 2, 3, 4, 10, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 4, 7, 11, 9, 1, 6, 11, 8, 10, 5$$

Este código é projetivo e 2-colorável, conforme ilustrado na Figura 1.1.

A demonstração dos resultados que enunciaremos neste capítulo, assim como detalhes da teoria, podem ser encontrados em [12, 21].

2.3 Mapas com Único z-gon: sua Relação com Códigos de Gauss

Para mergulhar o código $\mathbf{g}$ em alguma superfície, em [12] define-se o conceito de *mapa combinatorio*. A maior parte das definições e resultados que seguem são de [15]. As definições relativas a teoria dos grafos podem ser encontradas em [7].

Figura 2.1: *lacet* projetivo do código não 2-colorável

$\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6, 11, 8, 5, 10, 12.$

Um **mapa topológico** $M^t = (G, S)$ é um grafo G mergulhado em uma superfície S de tal forma que $S - G$ é uma coleção de discos abertos disjuntos chamados de **Faces**. Queremos, dado o código $\mathbf{g}$, encontrar uma superfície S na qual o grafo 4-regular correspondente a um *lacet* de $\mathbf{g}$ possa ser mergulhado como um mapa topológico.

Um **mapa combinatório** ou, simplesmente, mapa $M = (C_M, v_M, f_M)$ é uma tripla ordenada onde C_M é um grafo 3-regular, conexo e finito. v_M e f_M são emparelhamentos perfeitos disjuntos de tal forma que cada componente do subgrafo de C_M induzido por $v_M \cup f_M$ é sempre um polígono de 4 arestas os quais representaremos (e denotaremos) por **retângulos**. Denotamos por $a_M = E(C_M) - v_M \cup f_M$, o outro emparelhamento perfeito de C_M e por z_M as arestas diagonais dos retângulos, correspondentes a um emparelhamento perfeito no complemento de C_M .

As arestas de v_M, f_M, z_M e a_M são chamadas, respectivamente de v_M -arestas, f_M -arestas, z_M -arestas e a_M -arestas.

O grafo $Q_M = C_M \cup z_M$ é um grafo 4-regular. Uma componente de Q_M induzida por $a_M \cup v_M$ é um polígono com número par de vértices chamado de **v-gon**. Analogamente, tomando os polígonos induzidos por $a_M \cup f_M$ e por $a_M \cup z_M$ teremos, respectivamente, os f-gon's e z-gon's de C_M .

Desta forma, uma componente induzida por $v_M \cup f_M \cup z_M$ é um retângulo com diagonais. Por convenção, sempre assumiremos que os retângulos são apresentados tendo os lados menores correspondendo às v_M -arestas e os lados maiores correspondendo às f_M -arestas. As diagonais correspondendo às z_M -arestas, não são mostradas na maioria das figuras seguintes para maior clareza das mesmas.

Estes conceitos são ilustrados na Figura 2.2.

O primeiro resultado, estabelece a relação entre mapas topológicos e mapas combinatórios.

Proposição 2.1 ([12]) *O conjunto dos mapas topológicos está em bijeção com o conjunto dos mapas combinatórios. Mais ainda, dada a correspondência de M^t , mapa topológico, com M , mapa combinatório, por esta bijeção teremos as correspondências:*

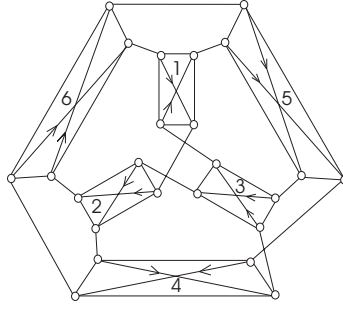


Figura 2.2: Mapa topológico contendo único z-gon: 1, 5, 4, 6, 1, 2, 6, 5, 3, 2, 4, 3 e único f-gon: 1, 5, 3, 1, 6, 2, 4, 3, 6, 5, 4, 2 induzindo o grafo K_4 com arestas, ou retângulos, indicados pelos rótulos de 1 a 6 e os 4 vértices dados pelos v-gon's 1, 5, 6 ; 2, 4, 6 ; 3, 4, 5 e 1, 2, 3. Os códigos são obtidos anotando a sequência de retângulos visitados pelos polígonos correspondentes.

- v-gons em M correspondem a vértices em M^t
- retângulos em M correspondem a arestas em M^t
- f-gons em M correspondem a faces em M^t . As faces de M^t definem um mergulho de M^t na superfície S definida como o complexo celular das faces de M^t
- z-gons em M correspondem a caminhos zig-zag em M^t .

Nota: O grafo G da correspondência $M \leftrightarrow M^t = (G, S)$ é chamado de **grafo induzido** por M e denotado G_M . Podemos obter G_M e S como segue: C_M pode ser mergulhado naturalmente em uma superfície fechada S considerando inicialmente os retângulos, os f-gons e os v-gons como discos fechados disjuntos. Cada aresta de C_M ocorre duas vezes na fronteira desta coleção de discos. Identificando as fronteiras correspondentes às duas ocorrências de cada aresta obteremos uma superfície fechada onde as bordas das faces são polígonos bicoloridos. Contraíndo cada disco limitante de um v-gon a um ponto (vértice de G_M) e cada retângulo a um segmento (aresta de G_M), os f-gons passam a ser as bordas das faces de $S - G_M$. grafo induz.

Este mergulho de C_M , fornecendo o mapa topológico $M^t = (G_M, S)$, é chamada de **mergulho fiel** do mapa combinatório M . mergulho fiel

Dado o mapa M , podemos definir os seguintes mapas associados cujas propriedades dos espaços de ciclos e co-ciclos serão úteis adiante

- **Mapa Dual** de M , denotado por D e obtido permutando os lados menores com os lados maiores de cada retângulo de M . Neste mapa, os z-gons são mantidos e os v-gons e f-gons são intercambiados. Mapa Dual
- **Mapa Phial** de M , denotado por P e obtido permutando os lados menores com as diagonais de cada retângulo de M . Neste mapa, os f-gons são mantidos e os v-gons e z-gons são intercambiados. Mapa Phial
- **Anti-Mapa** de M , denotado por $\tilde{M}$ e obtido permutando os lados maiores com as diagonais de cada retângulo de M . Neste mapa, os f-gons são mantidos e os v-gons e z-gons são intercambiados. Anti-Mapa

Estes conceitos são ilustrados na Figura 2.3.

Denotamos por $\Omega(M)$ ao conjunto dos mapas associados de M e seus anti-mapas, ou seja $\Omega(M)$

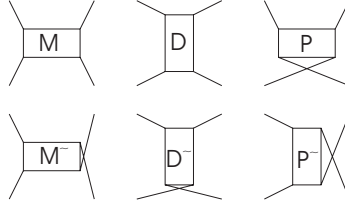


Figura 2.3: Como a vizinhança de cada retângulo é modificada nos membros de $\Omega(M)$

$\Omega(M) = \{M, D, P, \tilde{M}, \tilde{D}, \tilde{P}\}$ que induzem os 3 grafos distintos $G_M = G_{\tilde{M}}$, $G_D = G_{\tilde{D}}$ e $G_P = G_{\tilde{P}}$. Denotaremos por $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}^\perp$, respectivamente, o **espaço dos co-ciclos** e o **espaço dos ciclos** de G_M respectivamente. Identicamente, o espaço dos co-ciclos e o espaço dos ciclos de G_D são denotados, respectivamente, por $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^\perp$ e ao espaço dos co-ciclos e ao espaço dos ciclos de G_P denotamos, respectivamente, por $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{Z}^\perp$.

O próximo resultado, conforme [21] (Theorem 1), é chamado de Propriedade de Absorção e relaciona estes espaços

Proposição 2.2 ([12, 21]) *Seja M mapa qualquer então*

- $\mathcal{V} \cap \mathcal{F} \subseteq \mathcal{Z}$
- $\mathcal{F} \cap \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{V}$
- $\mathcal{Z} \cap \mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$

Seja M um mapa com único z-gon. Podemos encontrar um código cíclico para este z-gon anotando a sequência de retângulos visitados pelo mesmo. Denotaremos por $\mathbf{z}$ a este código.

Dado um mergulho fiel de M em alguma superfície S , podemos particionar os retângulos de M em duas classes de retângulos **brancos** e **pretos** conforme os dois vértices que entram no retângulo sejam extremidades de um lado longo ou de um lado curto, respectivamente. Esta definição está ilustrada na Figura 2.4.

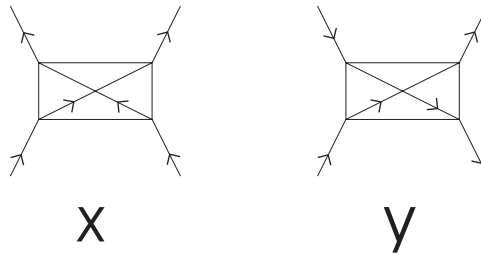


Figura 2.4: Passagens do z-gon através de um retângulo. Neste exemplo x é retângulo branco e y é retângulo preto

A próxima proposição estabelece a relação entre mapas com único z-gon e códigos de Gauss

Proposição 2.3 ([12]) *Um código de Gauss 2-colorável $\mathbf{g}$ é realizável em uma superfície S se, e somente se, existe mapa M com único z-gon $\mathbf{z}$ e com mergulho fiel em S e tal que $\mathbf{g} = \mathbf{z}$. Mais ainda, o grafo medial do grafo induzido por este mergulho fiel de M em S é um lacet para $\mathbf{g}$ tal que vértices pretos em $\mathbf{g}$ correspondem a retângulos pretos em $\mathbf{z}$ e vértices brancos em $\mathbf{g}$ correspondem a retângulos brancos em $\mathbf{z}$*

O problema de determinar se um código $\mathbf{g}$ é realizável em uma superfície S é, desta forma, equivalente ao de determinar se existe mergulho fiel de um mapa com único z -gon $\mathbf{z} = \mathbf{g}$ naquela superfície. Este último problema, pode ser entendido como um problema de posicionamento planar de retângulos como segue:

O mergulho fiel de uma mapa M é determinado de forma única através dos seus retângulos ou arestas, dos seus vértices e das suas faces. Os retângulos são dados pelos símbolos de $\mathbf{g}$ enquanto que os vértices são determinados pelos v -gons e as faces pelos f -gons. Assim, o mergulho é completamente determinado fornecendo a partição dos retângulos de M em retângulos pretos ou brancos.

Atribuindo a cada símbolo x um **quadrado canônico**, definido de tal forma que a primeira quad. can. passagem de $\mathbf{g}$ pelo quadrado rotulado por x ocorra do canto inferior esquerdo para o canto superior direito e a segunda passagem ocorra do canto inferior direito para o canto superior esquerdo (conforme ilustrado na Figura 2.5), uma atribuição de cor a um símbolo x equivalerá a substituir o quadrado rotulado por x por um retângulo apoiado sobre sua base curta ou longa conforme, respectivamente, a cor atribuída seja preta ou branca. Estes conceitos estão ilustrados na Figuras 2.5 e 2.6.

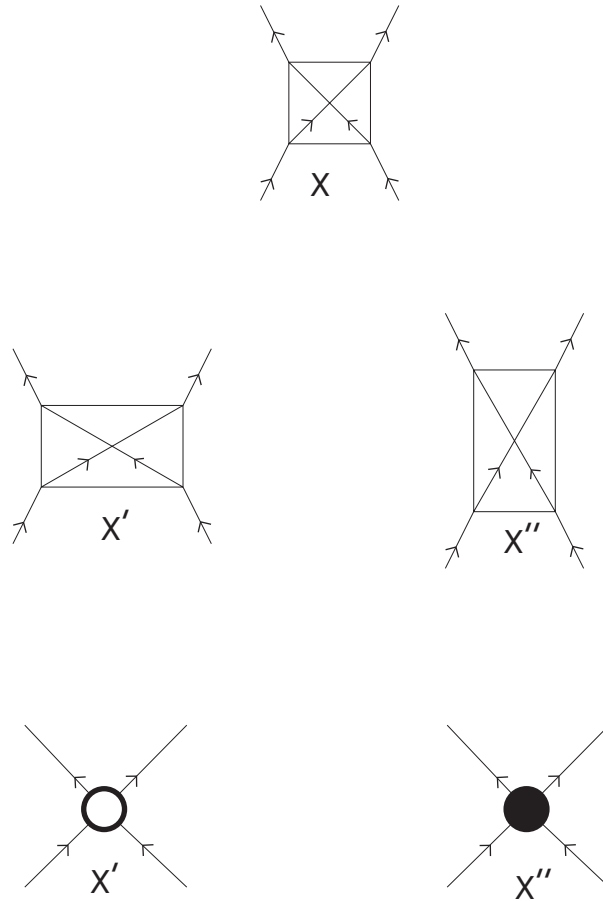


Figura 2.5: Quadrado Canônico para o Símbolo x (no alto). Se o retângulo correspondente a este quadrado apoiar-se sobre sua base longa, teremos, como no caso à esquerda (x'), um vértice branco, do contrário (x'') teremos um vértice preto.

Para encontrar então a partição dos símbolos de $\mathbf{g}$ em pretos e brancos, utilizaremos as propriedades das seguintes funções (definidas para os *singletons* $\{x\}$ e estendidas por linearidade

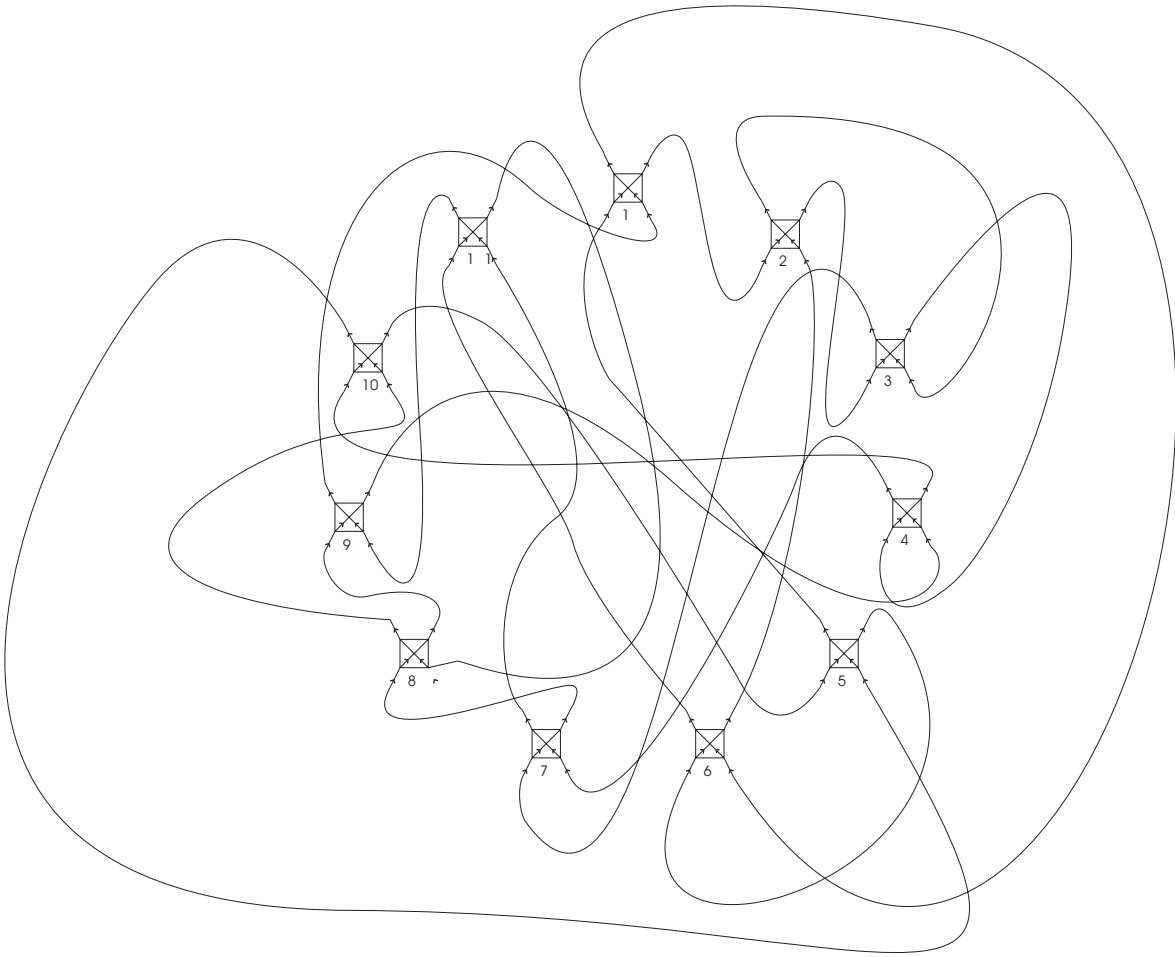


Figura 2.6: Representação Gráfica por Quadrados Canônicos do Código $\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 10, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 4, 7, 11, 9, 1, 6, 11, 8, 10, 5$

para conjuntos de símbolos utilizando a soma módulo 2, ou diferença simétrica, de conjuntos)

- $i(x)$ é o conjunto dos símbolos que aparecem apenas uma vez entre as duas aparições do símbolo x no código $\mathbf{g}$
- $k(x)$, definida quando se possui a partição dos símbolos de $\mathbf{g}$, é igual a $\{x\}$ se x é símbolo branco e $\emptyset$ caso contrário (No exemplo da Figura 2.4, temos, portanto, $k(x) = \{x\}$ e $k(y) = \emptyset$)
- $c(x) = i(x) + k(x)$
- $b(x) = c(x) + c^2(x)$. Onde $c^2(x) = c(c(x))$.

O próximo resultado estabelece a relação entre a função b de um código de Gauss realizável em uma superfície S e a conectividade desta superfície. A conectividade de S é $\xi(S) = 2 - \chi(S)$, onde $\chi(S)$ é a característica de Euler de S . A conectividade determina, a menos de orientação, a superfície.

Proposição 2.4 *Dado M mapa com único z -gon $\mathbf{g}$ possuindo mergulho fiel em uma superfície S , temos*

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(b)) &= \xi(S) \\ \text{Im}(b) &= \mathcal{V}^\perp \cap \mathcal{F}^\perp \\ \text{Ker}(b) &= \mathcal{V} + \mathcal{F} \end{aligned}$$

Como consequência desta última proposição, se $\xi(S) = 0$ (ou seja, S for o plano) então $b \equiv 0$. Se $\xi(S) = 1$ (ou seja, S for o plano projetivo) então temos a divisão dos símbolos do código em duas classes, de fato, denotando o Conjunto dos Vértices Pares de $\mathbf{g}$ por $\mathcal{E}$ e o dos vértices ímpares por $\mathcal{O}$, temos: $\circ$

Proposição 2.5 ([20]) *Se $\mathbf{g}$ é código projetivo 2-colorável então,*

- *Se $x \in \mathcal{O}$ então $b(x) = \mathcal{O}$*
- *Se $x \in \mathcal{E}$ então $b(x) = \emptyset$*

Esta propriedade dos códigos projetivos 2-coloráveis permite encontrar duas caracterizações de tais códigos.

A primeira destas caracterizações, dada pelas soluções de um sistema linear, permitiu recentemente uma generalização para superfícies de maior conectividade, tais como a Garrafa de Klein e o Toro, enquanto que a segunda, dada pelas propriedades do grafo de entrelaçamento, permitiu uma generalização para o problema, ainda em $\mathbb{RP}^2$, para o caso não 2-colorável. Esta segunda generalização é o resultado do trabalho desenvolvido nesta tese.

2.4 Caso 2-Colorável: Solução por Sistemas Lineares

Determinar a imagem da função k equivale a determinar os lados curto e longo de cada retângulo. Isto porque os v -gons e f -gons determinam, respectivamente, os vértices e as faces do grafo cujo medial é o *lacet* procurado. É possível determinar a imagem de k mediante a resolução de um sistema linear em $GF(2)$.

Proposição 2.6 ([12]) *Seja M mapa com único z -gon c , então $b(x) = i^2(x) + S_x(i(x, P))$ onde $i^2(x) = i(i(x, P), P)$ e $S_x(A) = \{y \in A : k(x, P) = k(y, P)\}$*

No teorema a seguir, se a variável γ_x assume valor 0 então o vértice x é branco e se assume o valor 1 então o vértice x é preto.

Teorema 2.1 ([12]) *c admite um lacet projetivo 2-colorável se, e somente se, o seguinte sistema linear sobre $GF(2)$ nas variáveis γ_x , onde x é símbolo de c , tem solução:*

$$i^2(x) + \sum_{y \in i(x, P)} (1 + \gamma_x + \gamma_y)y = \begin{cases} \sum_{y \in \mathcal{O}} y & x \in \mathcal{O} \\ 0 & x \in \mathcal{E} \end{cases} = \alpha(x) \sum \alpha(y)y$$

$$\text{Onde } \alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é par} \\ 1 & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Por exemplo, para o código $\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 10, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 4, 7, 11, 9, 1, 6, 11, 8, 10, 5$ temos a seguinte equação correspondentes a $x = 1$ (que é um símbolo ímpar)

$$\begin{aligned} &(\bar{1} + \bar{2} + \bar{3} + \bar{5} + \bar{7} + \bar{8} + \bar{9} + \bar{10} + \bar{11}) + \\ &(1 + \gamma_1 + \gamma_5)\bar{5} + (1 + \gamma_1 + \gamma_6)\bar{6} + (1 + \gamma_1 + \gamma_8)\bar{8} + \\ &\quad (1 + \gamma_1 + \gamma_{10})\bar{10} + (1 + \gamma_1 + \gamma_{11})\bar{11} = \bar{1} + \bar{2} + \bar{3} + \bar{5} + \bar{7} + \bar{9} + \bar{10} + \bar{11} \end{aligned}$$

fornecendo as seguintes equações para o sistema

$$\begin{aligned}
 1 + \gamma_1 + \gamma_5 &= 0 \\
 1 + \gamma_1 + \gamma_6 &= 0 \\
 \gamma_1 + \gamma_8 &= 0 \\
 1 + \gamma_1 + \gamma_{10} &= 0 \\
 1 + \gamma_1 + \gamma_{11} &= 0
 \end{aligned}$$

Repetindo o procedimento para cada um dos 11 símbolos do código, teremos o sistema procurado de equações que determina cada γ_x e, conseqüentemente, o valor de $k(x, P)$. Para este exemplo, o sistema de equações é

$$\left| \begin{array}{c} \gamma_1 + \gamma_5 = 1 \\ \gamma_1 + \gamma_{11} = 1 \\ \gamma_2 + \gamma_6 = 1 \\ \gamma_3 + \gamma_6 = 1 \\ \gamma_4 + \gamma_7 = 1 \\ \gamma_5 + \gamma_{10} = 0 \\ \gamma_7 + \gamma_9 = 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \gamma_1 + \gamma_6 = 1 \\ \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_2 + \gamma_{10} = 1 \\ \gamma_3 + \gamma_{10} = 1 \\ \gamma_4 + \gamma_8 = 1 \\ \gamma_6 + \gamma_8 = 1 \\ \gamma_9 + \gamma_{11} = 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \gamma_1 + \gamma_8 = 0 \\ \gamma_2 + \gamma_4 = 1 \\ \gamma_3 + \gamma_4 = 1 \\ \gamma_4 + \gamma_5 = 0 \\ \gamma_4 + \gamma_9 = 0 \\ \gamma_6 + \gamma_{11} = 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \gamma_1 + \gamma_{10} = 1 \\ \gamma_2 + \gamma_5 = 1 \\ \gamma_3 + \gamma_5 = 1 \\ \gamma_4 + \gamma_6 = 0 \\ \gamma_4 + \gamma_{10} = 0 \\ \gamma_7 + \gamma_8 = 0 \end{array} \right|$$

Cujas soluções são

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_7 = \gamma_8 = 0$$

$$\gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_9 = \gamma_{10} = \gamma_{11} = 1$$

e

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_7 = \gamma_8 = 1$$

$$\gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_9 = \gamma_{10} = \gamma_{11} = 0$$

A segunda solução corresponde à ilustrada na Figura 1.1.

Para o código $\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6, 11, 8, 5, 10, 12$ o sistema correspondente é

$$\left| \begin{array}{c} \gamma_1 + \gamma_5 = 1 \\ \gamma_1 + \gamma_{11} = 1 \\ \gamma_2 + \gamma_5 = 1 \\ \gamma_3 + \gamma_6 = 1 \\ \gamma_4 + \gamma_8 = 0 \\ \gamma_5 + \gamma_{12} = 1 \\ \gamma_6 + \gamma_{12} = 1 \\ \gamma_8 + \gamma_{10} = 0 \\ \gamma_{10} + \gamma_{12} = 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \gamma_1 + \gamma_6 = 1 \\ \gamma_1 + \gamma_{12} = 0 \\ \gamma_2 + \gamma_6 = 1 \\ \gamma_4 + \gamma_5 = 0 \\ \gamma_4 + \gamma_9 = 1 \\ \gamma_6 + \gamma_8 = 1 \\ \gamma_7 + \gamma_8 = 1 \\ \gamma_8 + \gamma_{12} = 0 \\ \gamma_{11} + \gamma_{12} = 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \gamma_1 + \gamma_8 = 0 \\ \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_3 + \gamma_4 = 0 \\ \gamma_4 + \gamma_6 = 1 \\ \gamma_4 + \gamma_{10} = 0 \\ \gamma_6 + \gamma_{10} = 1 \\ \gamma_7 + \gamma_9 = 1 \\ \gamma_9 + \gamma_{10} = 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \gamma_1 + \gamma_{10} = 1 \\ \gamma_2 + \gamma_4 = 0 \\ \gamma_3 + \gamma_5 = 1 \\ \gamma_4 + \gamma_7 = 0 \\ \gamma_5 + \gamma_{10} = 0 \\ \gamma_6 + \gamma_{11} = 1 \\ \gamma_7 + \gamma_{10} = 0 \\ \gamma_9 + \gamma_{11} = 1 \end{array} \right|$$

Este sistema não possui soluções em $GF(2)$ o que demonstra que toda solução em $GF(2)$ é não 2-Face Colorável.

Ressaltamos que a formulação do problema do código de Gauss mediante sistemas de equações foi generalizada em [20] e [21] para superfícies de maior conectividade. Para Garrafa de Klein, o sistema obtido é linear enquanto que, no caso geral, o sistema é quadrático.

2.5 Caso 2-Colorável: Solução pelo Grafo de Entrelaçamento

Como consequência da Proposição 2.5 temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2 ([12]) *Um código de Gauss 2-colorável $\mathbf{g}$ é realizável em uma superfície de conectividade no máximo 1 se, e somente se for possível separar os símbolos de $\mathbf{g}$ em duas classes (ou cores) satisfazendo a seguinte condição*

Para cada par x, y de símbolos de $\mathbf{g}$ temos $|i(x) \cap i(y)| + |i(x)||i(y)|$ ímpar se, e somente se, $x \propto y$ e x e y são da mesma cor

Em termos do grafo de entrelaçamento, podemos reescrever o Teorema 2.2 como:

Teorema 2.3 ([12]) *Um código de Gauss 2-colorável $\mathbf{g}$ é realizável em uma superfície de conectividade no máximo 1 se, e somente*

- *Se (x, y) não é aresta de Γ_i então $|i(x) \cap i(y)| + |i(x)||i(y)|$ é par*
- *As arestas (x, y) de Γ_i para as quais $|i(x) \cap i(y)| + |i(x)||i(y)|$ é par formam uma cofronteira em Γ_i .*

Nestas condições, denotando por B os vértices cuja cofronteira são as arestas de Γ_i para as quais $|i(x) \cap i(y)| + |i(x)||i(y)|$ é par, temos que a partição dos vértices em cores do teorema anterior é $\{B, V(\Gamma_i) - B\}$

Isto sugere uma partição das arestas do grafo completo formado pelos símbolos de $\mathbf{g}$ (denotado $K_{\mathbf{g}}$) nas seguintes classes

- **Arestas Pretas**, ou arestas (x, y) nas quais $x \propto y$ e $|i(x) \cap i(y)| + |i(x)||i(y)|$ é ímpar
- **Arestas Vermelhas**, ou arestas (x, y) nas quais $x \propto y$ e $|i(x) \cap i(y)| + |i(x)||i(y)|$ é par
- **Arestas Amarelas**, ou arestas (x, y) nas quais $x \not\propto y$ e $|i(x) \cap i(y)| + |i(x)||i(y)|$ é par
- **Arestas Verdes**, ou arestas (x, y) nas quais $x \not\propto y$ e $|i(x) \cap i(y)| + |i(x)||i(y)|$ é ímpar

Esta partição das arestas de $K_{\mathbf{g}}$ em classes permite reformular o teorema anterior numa forma mais adequada a nossa extensão para o caso não 2-colorável.

Teorema 2.4 *Um código de Gauss 2-colorável $\mathbf{g}$ é realizável em uma superfície de conectividade no máximo 1 se, e somente*

- *$K_{\mathbf{g}}$ não possui arestas verdes*
- *O conjunto das arestas vermelhas de $K_{\mathbf{g}}$ é cofronteira em Γ_i .*

Nestas condições, denotando por B os vértices cuja cofronteira são as arestas vermelhas, temos que a partição dos vértices em cores do Teorema 2.2 é $\{B, V(\Gamma_i) - B\}$

Para o exemplo do código $\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 10, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 4, 7, 11, 9, 1, 6, 11, 8, 10, 5$ temos o grafo na Figura 2.7.

O código $1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6, 11, 8, 5, 10, 12$ tem grafo $K_{\mathbf{g}}$ ilustrado na Figura 2.8. A presença de arestas verdes no grafo implica no código não ser projetivo ou ser projetivo e não 2-colorável. Uma vez que a Figura 2.1 estabelece que o código é realizável em $\mathbb{R}P^2$, concluímos em sua não 2-colorabilidade.

No próximo capítulo, generalizamos a técnica desenvolvida em [12] para tratar do caso não 2-colorável. Enunciamos uma extensão do Teorema 2.4. Este é o Teorema 3.1 que é demonstrado ao longo da tese. Usamos o código $1, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6, 11, 8, 5, 10, 12$ para ilustrar os conceitos envolvidos no Teorema 3.1.

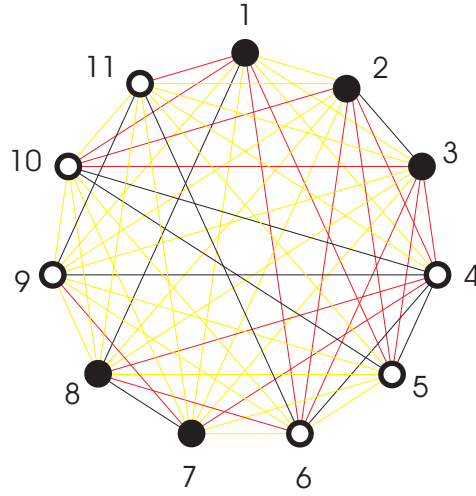


Figura 2.7: Γ_i para Código Projetivo 2-Colorável

$\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 10, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 4, 7, 11, 9, 1, 6, 11, 8, 10, 5$

Para cofronteiras temos, neste caso, as possibilidades $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ ou $\mathcal{B} = \{4, 5, 6, 9, 10, 11\}$, onde a primeira escolha, que corresponde a partição da Figura 1.1, está ilustrada acima.

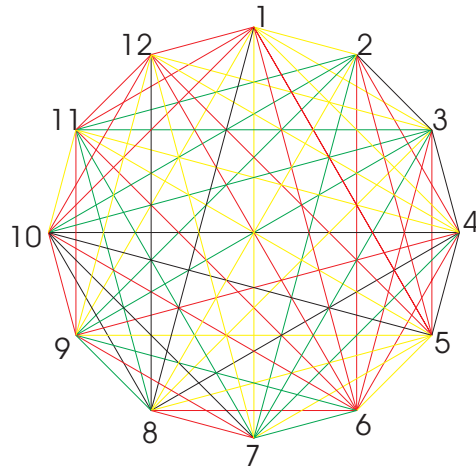


Figura 2.8: Γ_i para Código Projetivo Não 2-Colorável

$\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6, 11, 8, 5, 10, 12$

Capítulo 3

Principais Resultados da Tese

3.1 Introdução

No capítulo anterior, caracterizamos sobre quais condições um código de Gauss é realizável no plano projetivo admitindo-se sua 2-colorabilidade. Conforme vimos para o caso do código projetivo $\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6, 11, 8, 5, 10, 12$, tais condições não são suficientes para caracterização de todos os códigos projetivos, uma vez que a 2-colorabilidade não é uma condição universal como no caso planar.

Neste capítulo, estabelecemos a notação que utilizamos no restante desta tese bem como enunciamos os resultados principais, a serem demonstrados nos próximos capítulos, que *caracterizam completamente os códigos projetivos não 2-coloráveis* completando assim a teoria relativa aos códigos de Gauss realizáveis no plano projetivo, sendo esta a contribuição desta tese.

3.2 A Operação de Quadruplicação do Código

Conforme estudamos na seção anterior, o problema de determinar se um dado código de Gauss 2-colorável $\mathbf{g}$ é ou não um código projetivo baseava-se em determinar a imagem da função k para os símbolos de $\mathbf{g}$ o que equivale a determinar a 2-coloração das faces do *lacet* correspondente ao código.

A idéia da extensão desta teoria para o caso não 2-colorável é fornecer uma coloração canônica para o *lacet* correspondente ao código $\mathbf{g}$. Na verdade, associaremos ao código não 2-colorável um código 2-colorável cujo *lacet* induz um *lacet* para o código original. Este procedimento, contudo, deixa indeterminado o valor da função i , disponível no caso 2-colorável. O restante da teoria correspondente ao caso dos códigos projetivos não 2-coloráveis, que chamaremos, doravante, de **Problema Central** desta tese, consiste na recuperação da função i através das propriedades de $\mathbf{g}$.

Pr. Central

O primeiro resultado desta seção marca a principal diferença entre os códigos projetivos 2-coloráveis e aqueles que não o são.

Proposição 3.1 *Seja $\mathbf{g}$ código projetivo não 2-colorável. Então $\mathbf{g}$ satisfaz a **Condição de Paridade**, ou seja, todo símbolo de x é um símbolo par.*

Cond. Par.

Demonstração

Inicialmente, observamos que se ℓ é *lacet* projetivo não 2-colorável, ele atravessa a *capa de cruzamentos* ([13]) um número ímpar de vezes.

Fixando um cruzamento x , queremos mostrar que $|i(x)|$ é par.

De fato, x divide o *lacet* ℓ em duas partes: Uma que atravessa a *capa de cruzamentos* um número par de vezes, que denotaremos ℓ_{even} , e um que atravessa a *capa de cruzamentos* um número ímpar de vezes, denotado ℓ_{odd} .

ℓ_{even} é homologicamente nula sendo a fronteira de uma 2-cadeia. Ora, ℓ_{odd} forma uma curva fechada. Mais ainda, os cruzamentos de ℓ_{odd} com a região limitada por ℓ_{even} são, justamente, os símbolos em $i(x)$, como a fronteira da 2-cadeia é cruzada um número par de vezes, fica demonstrada a paridade de x .

Uma vez que o argumento funciona para qualquer símbolo x , segue a proposição.

A demonstração é ilustrada na Figura 3.1. ■

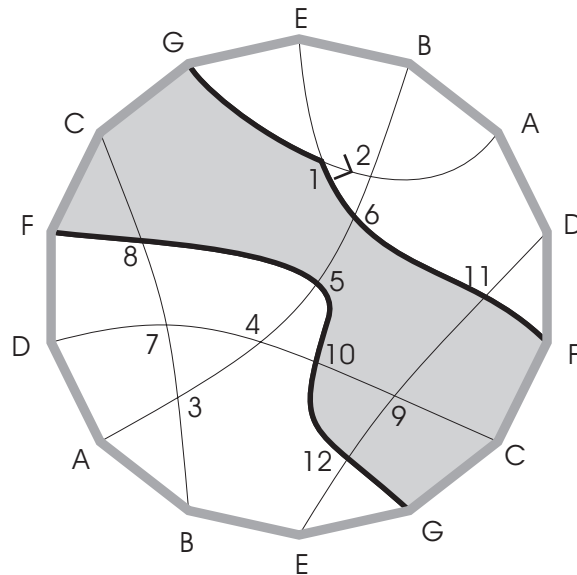


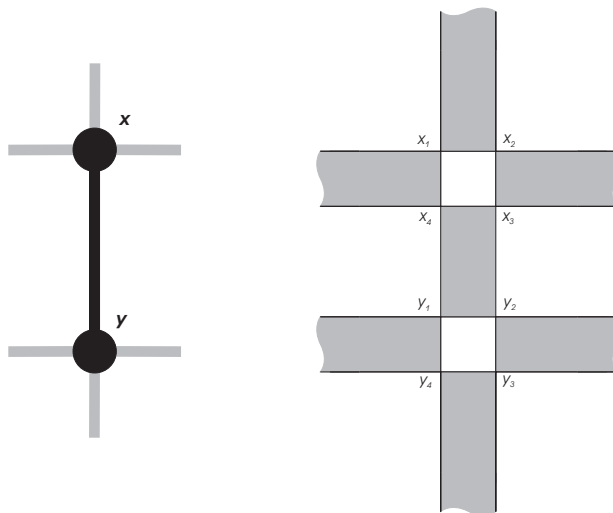
Figura 3.1: Ilustração do argumento de prova da condição de paridade. A região sombreada é relativa a ℓ_{even} com $x = 1$.

Observe que a condição de paridade não é satisfeita, por códigos projetivos 2-coloráveis uma vez que a 2-colorabilidade juntamente com a condição de paridade implicam que o código correspondente possui *lacet* em uma superfície orientável - o que exclui $\mathbb{RP}^2$ como tal superfície.

Seja $\mathbf{g}$ código projetivo não 2-colorável com *lacet* ℓ em $\mathbb{RP}^2$. Podemos associar um *lacet* $\mathcal{L}$ 2-colorável a $\mathbf{g}$ substituindo cada vértice x de ℓ por um quadrado de vértices x_1, x_2, x_3 e x_4 de tal forma que ao arco, isto é, à aresta ordenada, $[x, y]$ em ℓ correspondem dois arcos ligando os quadrados correspondentes a x e a y em $\mathcal{L}$. Este processo é ilustrado na Figura 3.2. Note que o *lacet* $\mathbf{g}$ se transforma em uma faixa com auto-cruzamentos. Evitando estes auto-cruzamentos por uma ligeira perturbação, que eleva uma dessas passagens de cada auto-cruzamento, a faixa se transforma em uma faixa de Möbius cuja fronteira é um S^1 .

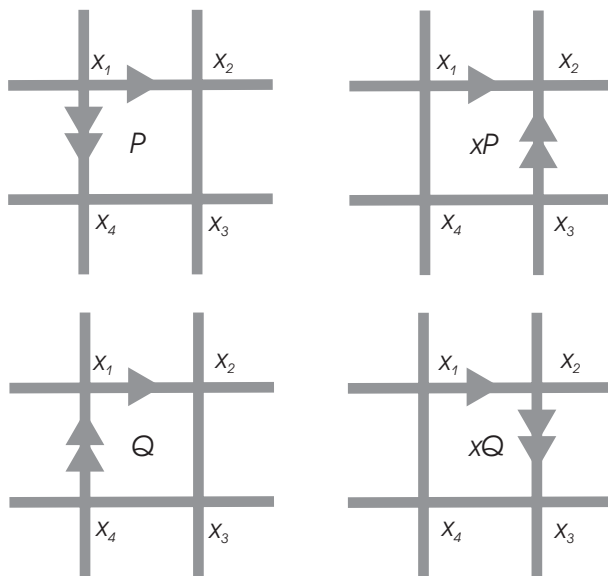
Os vértices x_1, x_2, x_3 e x_4 correspondentes em $\mathcal{L}$ ao vértice x em ℓ são a **Classe do Vértice** Classe x denotada por $\bar{x}$. Nesta tese sobrecarregamos o símbolo x tanto para significar um símbolo de $\mathbf{g}$ quanto para símbolo genérico de um dos vértices de $\bar{x}$, assim, por exemplo, $\bar{1} = \{1_1, 1_2, 1_3, 1_4\} \Rightarrow \bar{1}_1 = \bar{1}_2 = \bar{1}_3 = \bar{1}_4 = \{1_1, 1_2, 1_3, 1_4\}$

Para fixar a notação, convencionamos que a *primeira passagem* de $\mathcal{L}$ pelo quadrado $\bar{x}$ será feita *do vértice* x_1 *para o vértice* x_2 e a *terceira passagem* de $\mathcal{L}$ pelo quadrado $\bar{x}$ será feita *do*

Figura 3.2: Aresta (x,y) em ℓ e sua duplicação em $\mathcal{L}$

vértice x_4 para o vértice x_3 .

Como a faixa perturbada é uma faixa de Möbius, as passagens 2 e 4 têm o mesmo sentido. A *segunda passagem* de $\mathcal{L}$ pelo quadrado $\bar{x}$ determina, também, qual a direção da quarta passagem. Isto determina completamente $\mathcal{L}$ em $\bar{x}$. As quatro possibilidades para a segunda passagem de $\mathcal{L}$ por $\bar{x}$ são ilustradas na Figura 3.3.

Figura 3.3: As 4 Possibilidades de passagem de $\mathcal{L}$ por uma classe $\bar{x}$

Dado um *lacet* de um código $\mathbf{g}$ teremos um único $\mathcal{L}$ correspondente a ℓ que é, claramente, 2-colorável uma vez que podemos colorir a face correspondente aos quadrados de Branco e as faces correspondentes às arestas de Preto deixando as faces restantes também da cor Branca. O *lacet* correspondente ao código projetivo não 2-colorável $\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6, 11, 8, 5, 10, 12$ bem como o *lacet* duplicado a ele correspondente estão ilustrados na Figura 3.4.

Em geral, contudo, queremos determinar o *lacet* correspondente a $\mathbf{g}$, o que não permite

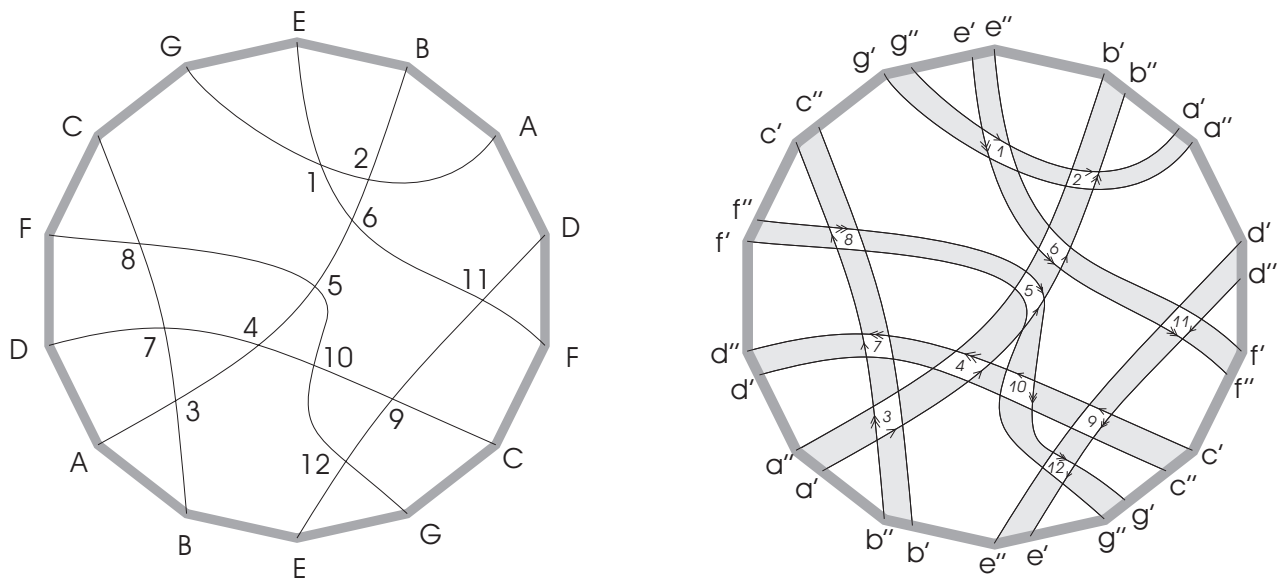


Figura 3.4: *Lacet* projetivo não 2-Colorável do código

$\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6, 11, 8, 5, 10, 12$ e sua duplicação.

construir $\mathcal{L}$. Uma vez que, tendo o *lacet* duplicado $\mathcal{L}$ do *lacet* ℓ correspondente a $\mathbf{g}$, podemos recuperar ℓ contraindo $\bar{x}$ a um vértice e as faces correspondentes às arestas, isto é, às faces pretas em $\mathcal{L}$ a um arco. O problema de determinar se um código de Gauss $\mathbf{g}$ satisfazendo a condição de paridade é realizável no plano projetivo por um ℓ não 2-colorável é equivalente a determinar se existe algum *lacet* 2-colorável $\mathcal{L}$ realizável no plano projetivo e que seja a duplicação de ℓ .

Para cada um dos n símbolos de $\mathbf{g}$ teremos 4 possibilidades locais para $\mathcal{L}$ correspondendo à indeterminação da direção da segunda passagem de $\mathcal{L}$ por x conforme ilustrado na Figura 3.3, totalizando, desta forma, 4^n possibilidades para $\mathcal{L}$. Para cada *lacet* assim construído teremos um código P com $4n$ símbolos correspondentes. O conjunto destes 4^n *Lacets* possíveis é denotado por $\mathcal{L}$ ou Conjunto dos *Lacets* Duplicados de $\mathbf{g}$ e o conjunto dos 4^n códigos correspondentes é denotado por $\mathcal{P}$ ou Conjunto dos Códigos Quadruplicados de $\mathbf{g}$. $\mathcal{L}$
 $\mathcal{P}$

A discussão prévia nos conduz ao primeiro resultado relativo aos códigos quadruplicados

Proposição 3.2 *Um código de Gauss $\mathbf{g}$ satisfazendo à condição de paridade é realizável no plano projetivo por um *lacet* não 2-colorável ℓ se, e somente se, existe $P \in \mathcal{P}$ realizável em $\mathbb{RP}^2$ por um *lacet* 2-colorável $\mathcal{L}$. Mais ainda, $\mathcal{L}$ será, nestas condições, a duplicação de ℓ . ■*

Este resultado estabelece, portanto, que bastaria aplicar o Teorema 2.4 a cada um dos códigos em $\mathcal{P}$ para resolver o problema no caso não 2-colorável, entretanto, a cardinalidade de $\mathcal{P}$ (que é 4^n onde n é o número de símbolos em $\mathbf{g}$) inviabiliza tal teste mesmo para códigos relativamente pequenos. No exemplo central desta seção, ou seja o código $\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6, 11, 8, 5, 10, 12$ teríamos, por exemplo, de realizar $4^{12} = 16.777.216$ testes.

O que propomos nesta tese é, a partir de um código quadruplicado canônico P_0 oriundo de um código de Gauss $\mathbf{g}$, obter uma partição de seus símbolos em conjuntos que forneçam ou uma condição que mostre que o código $\mathbf{g}$ não é projetivo ou uma maneira construtiva de obter, a partir de P_0 um código $P' \in \mathcal{P}(\mathbf{g})$ projetivo cujo *lacet* $\mathcal{L}$ seja contrátil a um *lacet* ℓ de $\mathbf{g}$.

Para definir o código canônico $P_0 \in \mathcal{P}$, fixaremos a *segunda passagem* de $\mathcal{L}$ por $\bar{x}$ de x_2 para x_3 o que, de acordo com as convenções anteriores, também determina a quarta passagem de $\mathcal{L}$ por $\bar{x}$ de x_1 para x_4 . Com estas convenções, o código $\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6,$

11, 8, 5, 10, 12 gera o código canônico escrito em duas linhas com igual número de entradas para enfatizar a quadruplicação do código original conforme ilustrado abaixo

$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	...
$1_1, 1_2$	$2_1, 2_2$	$3_1, 3_2$	$4_1, 4_2$	$5_1, 5_2$	$6_1, 6_1$	$2_2, 2_3$	$3_2, 3_3$	$7_1, 7_2$	$8_1, 8_2$	$9_1, 9_2$	$10_1, 10_2$	...
$1_4, 1_3$	$2_4, 2_3$	$3_4, 3_3$	$4_4, 4_3$	$5_4, 5_3$	$6_4, 6_4$	$2_1, 2_4$	$3_1, 3_4$	$7_4, 7_3$	$8_4, 8_3$	$9_4, 9_3$	$10_4, 10_3$	...

...	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{11}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$
...	$4_2, 4_3$	$7_2, 7_3$	$11_1, 11_2$	$9_2, 9_3$	$12_1, 12_2$	$1_2, 1_3$	$6_2, 6_3$	$11_2, 11_3$	$8_2, 8_3$	$5_2, 5_3$	$10_2, 10_3$	$12_2, 12_3$
...	$4_1, 4_4$	$7_1, 7_4$	$11_4, 11_3$	$9_1, 9_4$	$12_4, 12_3$	$1_1, 1_4$	$6_1, 6_4$	$11_1, 11_4$	$8_1, 8_4$	$5_1, 5_4$	$10_1, 10_4$	$12_1, 12_4$

Proposição 3.3 *O código canônico é o único código em $\mathcal{P}$ para os quais os vértices têm a mesma paridade dos seus sub-índices e para o qual um vértice é ímpar se, e somente se, é um vértice branco, ou seja, para uma classe $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ os vértices ímpares desta classe, que também são os vértices brancos, são os vértices $\mathcal{O} = \mathcal{W} = \{x_1, x_3\}$, onde denotamos por $\mathcal{W}$ ao Conjunto dos Vértices Brancos de um código e por $\mathcal{B}$ ao Conjunto dos Vértices Pretos.* $\mathcal{B}$

Demonstração

A afirmação de que os vértices brancos de uma classe $\bar{x}$ do código canônico P_0 são os vértices $\{x_1, x_3\}$ é verificada pela Figura 3.5 uma vez que a escolha da coloração mantém o interior do quadrado $\bar{x}$ como branco e as faces correspondentes às arestas como pretas. A afirmação quanto à paridade dos vértices na classe $\bar{x}$ pode ser verificada utilizando a representação circular do código quadruplicado conforme a Figura 3.6.

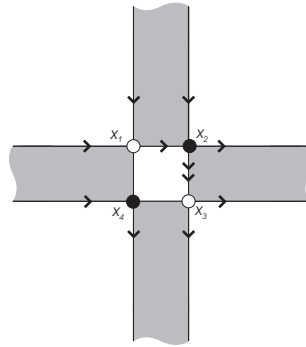


Figura 3.5: Coloração dos Vértices Induzida pela Coloração Canônica das Arestas em $\mathcal{L}$. A passagem canônica de $\mathcal{L}$ por $\bar{x}$ ocorre do vértice x_1 para o vértice x_2 na primeira passagem e do vértice x_2 para o vértice x_3 na segunda passagem. A terceira passagem ocorre de x_4 para x_3 e a quarta passagem ocorre de x_1 para x_4

Nesta representação, nossa escolha para passagem de $\mathcal{L}$ por uma classe $\bar{x}$ corresponde à configuração xQ . Como $|i_P(x) \cap \bar{y}| = 0$ ou 2 (ver Proposição 4.1) a paridade de um vértice $x \in \bar{x}$ dependerá apenas da cardinalidade de $i_P(x) \cap \bar{x}$ e a afirmação segue da Proposição 4.2. ■

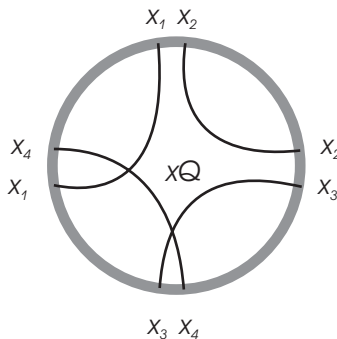


Figura 3.6: Representação Circular do Código Quadruplicado Canônico. Nesta figura, destacamos uma classe $\bar{x}$. As cordas no círculo limitam as regiões correspondentes a função i_P do símbolo correspondente. As demais classes distribuem seus símbolos aos pares ao longo dos setores delimitados por $\bar{x}$, desta forma, $|\bar{x} \cap \bar{y}| = 0$ ou 2 para cada classe $\bar{y} \neq \bar{x}$. Os cruzamentos das cordas destacam ainda que $i_P(x_1) \cap \bar{x} = \{x_4\}$, $i_P(x_2) \cap \bar{x} = \emptyset$, $i_P(x_3) \cap \bar{x} = \{x_4\}$ e $i_P(x_4) \cap \bar{x} = \{x_1, x_3\}$ determinando, assim, a paridade de cada um destes elementos.

A definição de paridade de um símbolo x , conforme anteriormente definimos, se refere à paridade da cardinalidade de $i_P(x)$. Ressaltamos, contudo, que, para superfícies nas quais a condição de paridade não é necessariamente satisfeita, como, por exemplo, a garrafa de Klein, a seguinte norma é mais útil para definir a paridade de um símbolo do código quadruplicado: $\|x\|_P = |i_P(x)| + |i(\bar{x})|$ onde $i_P(x)$ é a imagem da função i para o código P do símbolo x e $i(\bar{x})$ é a imagem da função i para o código $\mathbf{g}$ do símbolo cuja classe contém x , por exemplo, $\|1_1\|_P = |i_P(1_1)| + |i(\bar{1})|$. Como, em $\mathbb{RP}^2$ vale a condição de paridade, isto é, $|i(\bar{x})|$ é par, as duas noções coincidem neste caso.

O próximo resultado estabelece a primeira relação entre os códigos de $\mathcal{P}$ e a função b . Por convenção, acrescentaremos sub-índice às funções i e b para distinguir seus valores entre os diversos códigos de $\mathcal{P}$. Para o código original $\mathbf{g}$ as funções seguem sem sub-índices.

Proposição 3.4 *Seja $P \in \mathcal{P}$ e $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ com x símbolo de $\mathbf{g}$. Então $b_P(x_1) = b_P(x_3)$ e $b_P(x_2) = b_P(x_4)$.*

Demonstração

Queremos demonstrar que $\{x_1, x_3\} \in \mathcal{V} + \mathcal{F}$ e que $\{x_2, x_4\} \in \mathcal{V} + \mathcal{F}$. Para tanto, considere a faixa correspondente a $\Delta_{\mathbf{g}}(x) = c_1, c_2, \dots, c_k$ (ver Figura 3.7).

Nesta faixa, os elementos de $\mathcal{V}$ correspondem à soma de conjuntos de vértices que são incidentes a um quadrado enquanto que os elementos de $\mathcal{F}$ correspondem a soma de conjuntos de vértices que são incidentes a um retângulo.

Colorindo de cinza os quadrados e retângulos da faixa cuja soma dos vértices incidentes, que está no conjunto $\mathcal{V} + \mathcal{F}$, será $\{x_1, x_3\}$, somente iremos ignorar as regiões que são relativas às auto-intercessões da faixa. A proposição segue da observação de que cada vértice incide em exatamente dois retângulos ou a um retângulo e a um quadrado, exceto por x_1 , que incide em um quadrado apenas, e por x_3 , que incide em um quadrado e dois retângulos. O conjunto $\{x_2, x_4\}$ também está em $\mathcal{V} + \mathcal{F}$ pois $\{x_2, x_4\} = \{x_1, x_3\} + \bar{x}$.

O argumento de prova é ilustrado na Figura 3.8.

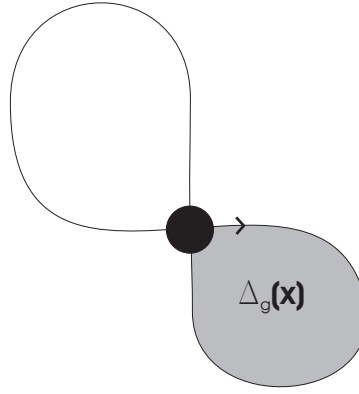


Figura 3.7: Um símbolo x divide o *lacet* em duas regiões. Os vértices que limitam uma destas regiões são os vértices de $\Delta_g(x)$. A escolha da região em questão dependerá da orientação que g dá a curva. Neste desenho, a seta indica o início e direção da primeira passagem do *lacet* pelo símbolo x , de forma que a os vértices de região $\Delta_g(x)$ são os que limitam a região escura.

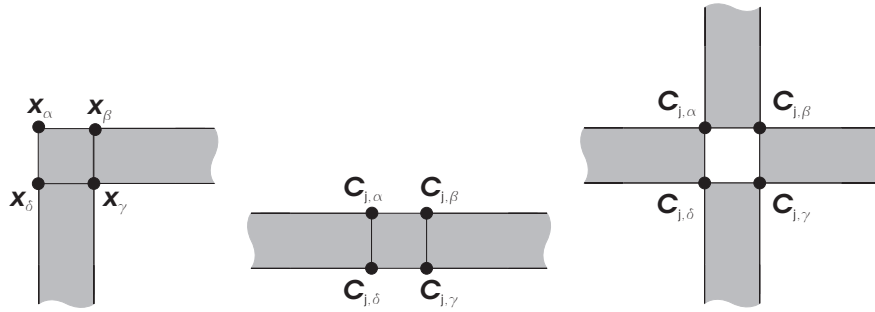


Figura 3.8: Tipos de quadrados (correspondentes a vértices do *lacet* original) na faixa correspondente a $\Delta_g(x)$.

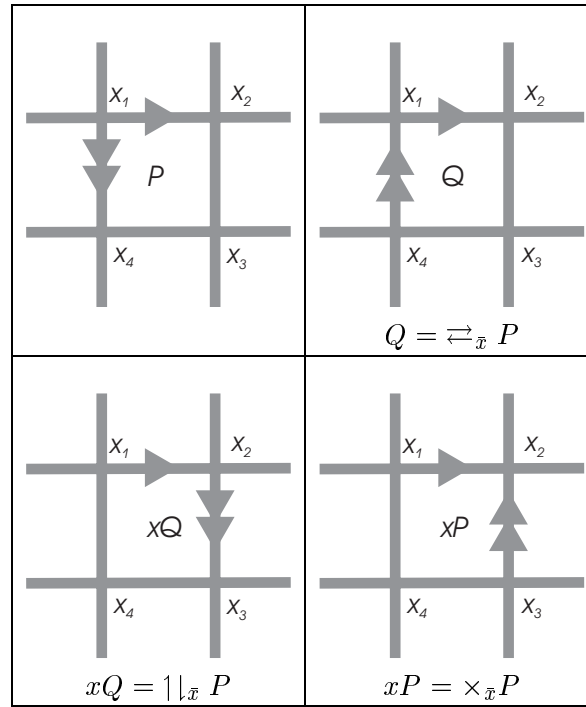
À esquerda, o quadrado $\bar{x}$. Ao centro, um quadrado cujo vértice correspondente ocorre uma única vez em $\Delta_g(x)$. À direita, um quadrado cujo vértice correspondente ocorre duas vezes em $\Delta_g(x)$.

■

3.3 Ações no Código Quadruplicado

De posse do código canônico $P_0 \in \mathcal{P}$, podemos recuperar todos os demais códigos em $\mathcal{P}$ através da realização de sucessivas ações. Uma **ação** de uma classe $\bar{x}$ sobre um código P em $\mathcal{P}$ é uma operação que produz um outro código em $\mathcal{P}$. Distinguimos 3 tipos de ações:

- **Ação Horizontal:** Muda o sentido da segunda passagem em $\bar{x}$.
- **Ação Vertical:** Troca a segunda pela quarta passagem em $\bar{x}$.
- **Ação Cruzada:** É a ação resultante da aplicação consecutiva das ações horizontal e vertical. Uma vez que as ações comutam, também pode ser obtido pela aplicação consecutiva das ações vertical e horizontal.

Figura 3.9: Ações de $\bar{x}$ em $P \in \mathcal{P}$

As Figuras 3.9 e 3.10 ilustram o efeito local das ações em $\mathcal{L}$. Abaixo segue o efeito das ações na classe $\bar{1}$ do código canônico

1_1	1_2	$\dots$	1_2	1_3	$\dots$	1_1	1_2	$\dots$	1_3	1_2	$\dots$
1_4	1_3	$\dots$	1_1	1_4	$\dots$	1_4	1_3	$\dots$	1_4	1_1	$\dots$
$P = P_0$						$Q = \bar{x} P$					
1_1	1_2	$\dots$	1_1	1_4	$\dots$	1_1	1_2	$\dots$	1_4	1_1	$\dots$
1_4	1_3	$\dots$	1_2	1_3	$\dots$	1_4	1_3	$\dots$	1_3	1_2	$\dots$
$xQ = \bar{x} P$						$xP = \bar{x} P$					

O seguinte resultado é imediato das Figuras 3.9 e 3.10

Proposição 3.5 *Seja $P \in \mathcal{P}$ e x símbolo de P , então*

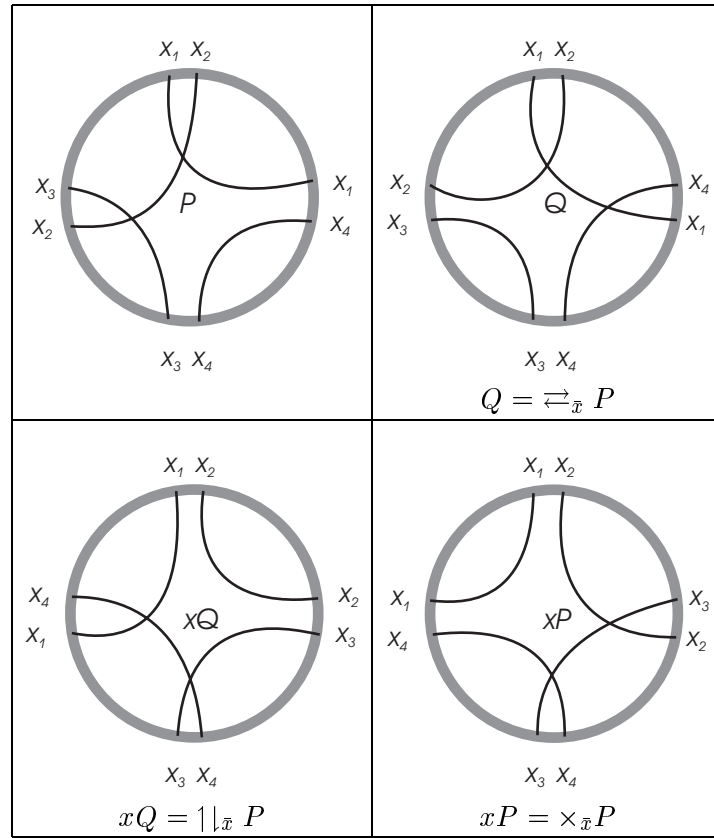
- $\bar{x} P$ inverte as paridades em $\bar{x}$ e inverte a coloração dos vértices em $\bar{x}$
- $\bar{x} P$ mantém as paridades em $\bar{x}$ e mantém a coloração dos vértices em $\bar{x}$
- $\bar{x} P$ inverte as paridades em $\bar{x}$ e inverte a coloração dos vértices em $\bar{x}$

■

Os seguintes resultados, cujas demonstrações são o objetivo do restante da tese, mostram como as ações de uma classe modificam o valor da função b em um código genérico $P \in \mathcal{P}$:

Proposição 3.6 (Demonstrada na Proposição 6.5) *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ e x par, então*

$$b_{\bar{x}P}(x) + b_P(x) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } \bar{x} \not\propto \bar{k} \\ \bar{k}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Figura 3.10: Ações de $\bar{x}$ em $P \in \mathcal{P}$

Proposição 3.7 (Demonstrada na Proposição 6.7) *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ então*

$$b_{\Leftarrow_{\bar{k}} P}(x) + b_P(x) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } i_P(x) \cap \bar{k} \in \{\emptyset, \{k_1, k_4\}, \{k_2, k_3\}\} \\ \bar{k}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Proposição 3.8 (Demonstrada na Proposição 6.8) *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ e x for par, então*

$$b_{|_{\bar{k}} P}(x) + b_P(x) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } i_P(x) \cap \bar{k} \in \{\emptyset, \{k_1, k_2\}, \{k_3, k_4\}\} \\ \bar{k}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

3.4 Caracterização dos Códigos Projetivos Não 2-Coloráveis

Seja $\bar{x} = \{x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, x_\delta\}$, onde x_α o primeiro elemento ímpar da classe $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ x_α ordenada pelos sub-índices. O antípoda de x_α , ou seja, o outro elemento ímpar em $\bar{x}$ é x_γ . Identicamente, o primeiro elemento par de $\bar{x}$ é x_β e a seu antípoda é x_δ . Denotamos $\bar{x}_{odd}$ o $\bar{x}_{odd}$ subconjunto $\{x_\alpha, x_\gamma\}$ de $\bar{x}$ e $\bar{x}_{even}$ o subconjunto $\{x_\beta, x_\delta\}$. $\bar{x}_{even}$

De posse das proposições sobre o efeito das ações na função b , podemos demonstrar (o que é feito no capítulo 7) um resultado central na caracterização dos códigos projetivos não 2-coloráveis, a **Propriedade da não Separação** da função b_P com $P \in \mathcal{P}$:

Proposição 3.9 (Propriedade da não Separação, demonstrada na Proposição 7.2) *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$, então ou $\bar{k} \subseteq b_P(x_\beta)$ ou $\bar{k} \cap b_P(x_\beta) = \emptyset$.*

Desta forma, podemos definir o grafo $K_{\mathbf{g}}(P)$ cujas propriedades fornecem uma solução do problema do código de Gauss no plano projetivo no caso não 2-colorável - o resultado central desta tese.

$K_{\mathbf{g}}(P)$ é o grafo completo que tem como vértices os símbolos de $\mathbf{g}$. As arestas de $K_{\mathbf{g}}(P)$ recebem sinal positivo ou negativo conforme $b_P(y_\beta) \cap \bar{x}$ seja vazio ou toda classe $\bar{x}$. A demonstração da boa definição do grafo $K_{\mathbf{g}}(P)$ segue da separação das classes pela função b (Proposição 3.9).

Definiremos, seguindo a linha do Teorema 2.4, uma rotulação (coloração) das arestas de $K_{\mathbf{g}}$ que, diferentemente da coloração baseada apenas em Γ_i , será dependente de P (denotaremos o grafo assim colorido por $K_{\mathbf{g}}(P)$)

- *Arestas não Entrelaçadas*

Aresta Tipo N1 São aquelas onde $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = i_P(x_\beta) \cap \bar{y} = \emptyset$. Nas ilustrações de $K_{\mathbf{g}}(P)$, são representadas por arestas azuis. N1

Aresta Tipo N2 São aquelas onde $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \emptyset$ e $i_P(x_\beta) \cap \bar{y} = \{y_\alpha, y_\gamma\}$. As arestas do tipo N2 são orientadas com início em $\bar{y}$ e fim em $\bar{x}$. Nas ilustrações de $K_{\mathbf{g}}(P)$, são representadas por arestas verdes. N2

Aresta Tipo N3 São aquelas onde $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \{x_\beta, x_\delta\}$ e $i_P(x_\beta) \cap \bar{y} = \{y_\beta, y_\delta\}$. Nas ilustrações de $K_{\mathbf{g}}(P)$, são representadas por arestas violetas. N3

- *Arestas Entrelaçadas*

Aresta Tipo E1 São aquelas onde $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\beta\}$ e $i_P(x_\beta) \cap \bar{y} = \{y_\alpha, y_\beta\}$. Nas ilustrações de $K_{\mathbf{g}}(P)$, são representadas por arestas magentas. E1

Aresta Tipo E2 São aquelas onde $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\beta\}$ e $i_P(x_\beta) \cap \bar{y} = \{y_\beta, y_\gamma\}$. As arestas do tipo E2 são orientadas com início em $\bar{y}$ e fim em $\bar{x}$. Nas ilustrações de $K_{\mathbf{g}}(P)$, são representadas por arestas vermelhas. E2

Aresta Tipo E3 São aquelas onde $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\delta\}$ e $i_P(x_\beta) \cap \bar{y} = \{y_\alpha, y_\delta\}$. Nas ilustrações de $K_{\mathbf{g}}(P)$, são representadas por arestas laranjas. E3

A Figura 3.11 ilustra algumas representações que utilizamos para cada tipo de aresta.

No capítulo 7, demonstramos que estes são os únicos tipos de arestas em qualquer grafo $K_{\mathbf{g}}(P)$, ou seja, demonstramos os seguintes resultados:

Proposição 3.10 *Seja $P \in \mathcal{P}$ e $(\bar{x}, \bar{y})$ aresta entre vértices não entrelaçados de P . Então $(\bar{x}, \bar{y})$ ou é do tipo N1 ou do tipo N2 ou do tipo N3.*

Proposição 3.11 *Seja $P \in \mathcal{P}$ e $(\bar{x}, \bar{y})$ aresta entre vértices entrelaçados de P . Então $(\bar{x}, \bar{y})$ ou é do tipo E1 ou do tipo E2 ou do tipo E3.*

Continuando a caracterização das arestas de $K_{\mathbf{g}}(P)$, diremos que uma aresta $(\bar{x}, \bar{y})$ é positiva quando $\bar{x} \cap b_P(y_\beta) = \emptyset$ e negativa quando $\bar{x} \subseteq b_P(y_\beta)$. Nas ilustrações, as arestas positivas são representadas por linhas finas enquanto que as negativas são representadas por linhas grossas. A Figura 3.12 mostra o grafo $K_{\mathbf{g}}(P_0)$ para o código $\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6, 11, 8, 5, 10, 12$.

Pela Proposição 3.9, os sinais das arestas estão bem definidos e pelas Proposições 2.5 e 3.2 para códigos projetivos, temos

Proposição 3.12 *Um código de Gauss $\mathbf{g}$ satisfazendo a condição de paridade é realizável no plano projetivo por um lacet não 2-colorável ℓ se, e somente se, existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $K_{\mathbf{g}}(P)$ consiste apenas de arestas positivas ■*

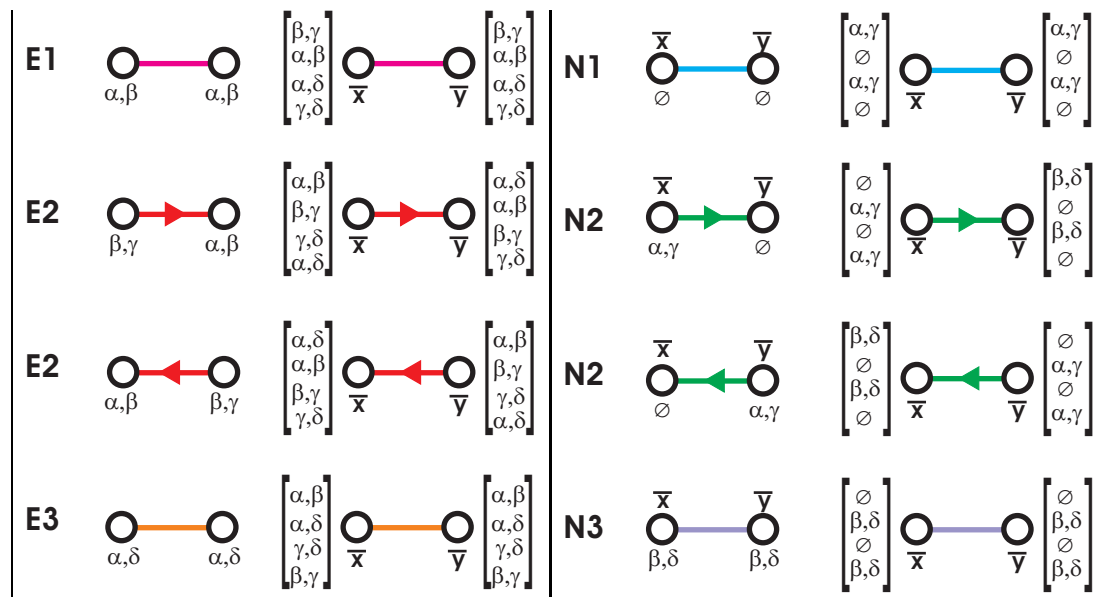


Figura 3.11: Tipos de Arestas Entrelaçadas e não Entrelaçadas.

Na representação à esquerda em cada uma das duas colunas, os subscritos referem-se a $i_P(y_\beta) \cap \bar{x}$ no vértice à esquerda ($\bar{x}$) e a $i_P(x_\beta) \cap \bar{y}$ no vértice à direita ($\bar{y}$), assim, por exemplo, para aresta N1, o subscrito $\emptyset$ no vértice à esquerda significa que $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \emptyset$.

Na representação à direita em cada uma das duas colunas, de cima para baixo lê-se, seguindo a mesma notação de subscrito da representação à direita, os valores de $i_P(y_\alpha) \cap \bar{x}$, $i_P(y_\beta) \cap \bar{x}$, $i_P(y_\gamma) \cap \bar{x}$ e $i_P(y_\delta) \cap \bar{x}$ para o vértice $\bar{x}$ e os valores de $i_P(x_\alpha) \cap \bar{y}$, $i_P(x_\beta) \cap \bar{y}$, $i_P(x_\gamma) \cap \bar{y}$ e $i_P(x_\delta) \cap \bar{y}$ para o vértice $\bar{y}$. Desta forma, por exemplo, para aresta E3, a quarta linha do colchete relativo ao vértice $\bar{x}$ ter valor β, γ significa que $i_P(y_\delta) \cap \bar{x} = \{x_\beta, x_\gamma\}$.

O seguinte teorema, demonstrado no Capítulo 7, fornece, com base no estudo do efeito das ações sobre cada tipo de aresta no grafo $K_g(P)$, a caracterização dos códigos projetivos não 2-coloráveis sendo, portanto, o resultado central desta tese.

Teorema 3.1 (Teorema de Caracterização dos Códigos Projetivos não 2-Coloráveis)

Um código de Gauss $\mathbf{g}$ não 2-colorável é código projetivo se, e somente se, as cores das arestas em $K_g(P_0)$ induzem uma partição nos vértices de $K_g(P_0)$ em 4 conjuntos A, B, C e D (alguns dos quais podem ser vazios), de tal forma que os sinais das arestas entre vértices de um mesmo conjunto e entre vértices de conjuntos diferentes se apresentem como na Figura 3.13

Mais ainda, aplicando ações cruzadas a todos os elementos de A , ações verticais a todos os elementos de B , ações horizontais a todos os elementos de C e não aplicando ação alguma nos elementos de D , obteremos um código P' correspondente a um lacet duplicado $\mathcal{L}$ de ℓ , lacet de $\mathbf{g}$ em $\mathbb{R}P^2$.

O problema de, dado o grafo $K_g(P_0)$, encontrar a partição de seus vértices nos conjuntos A, B, C e D do teorema é resolvido pelo seguinte teorema, enunciado na forma de um algoritmo e demonstrado, também, no capítulo 7, fornece tal partição ou uma condição mostrando que esta não existe o que termina completamente a solução do problema

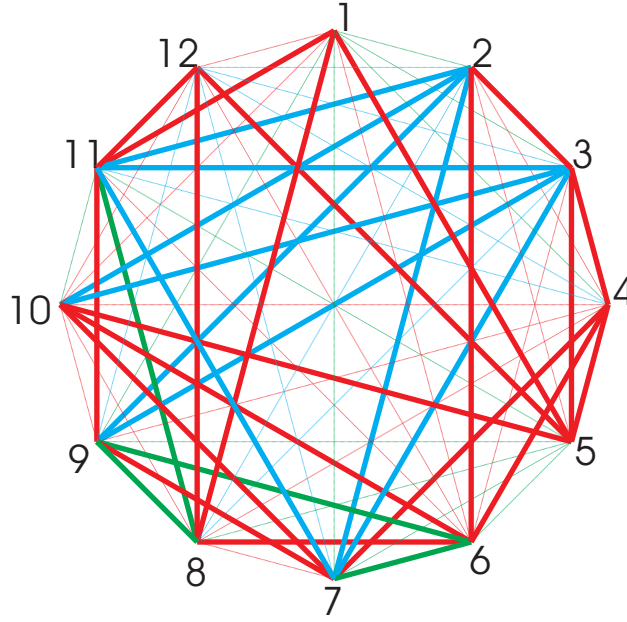


Figura 3.12: Grafo K_g para o código não 2-Colorável $g = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6, 11, 8, 5, 10, 12$. As orientações das arestas do tipo N2 e E2 foram omitidas para maior clareza do desenho.

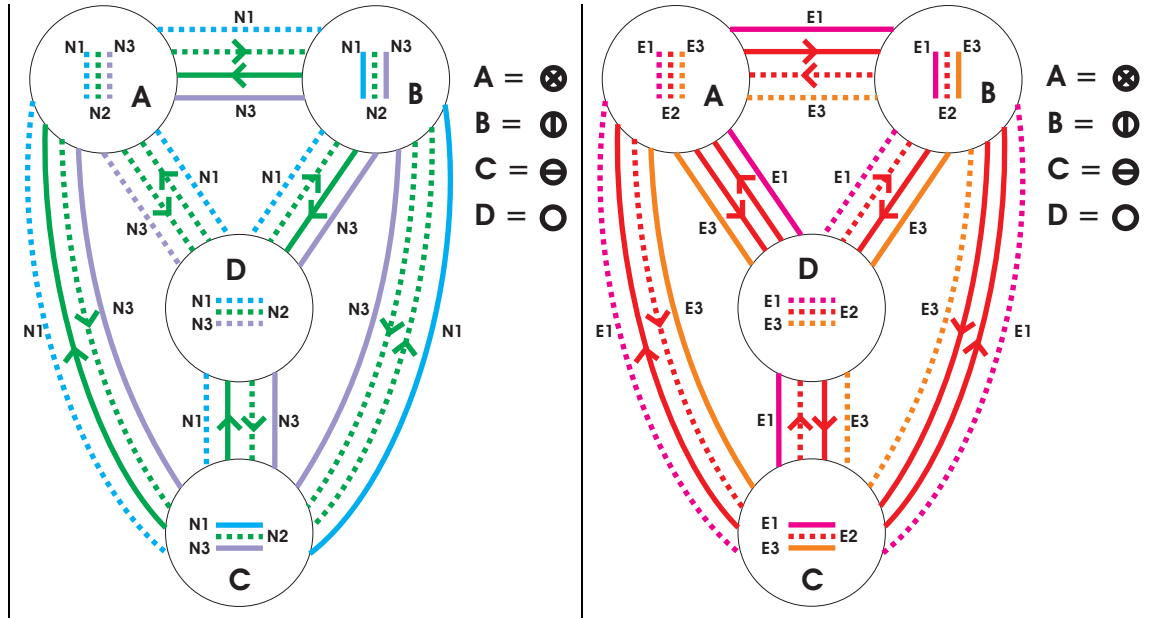


Figura 3.13: Sinais das arestas do tipo N e E na partição dos vértices em $K_g(P_0)$

Teorema 3.2 *Um código de Gauss g não 2-colorável é código projetivo quando as arestas do tipo N2 negativas induzem uma partição dos vértices de $K_g(P_0)$ em dois conjuntos X e Y , que podem ser vazios, de tal forma que as arestas do tipo N em $K_g(P_0)$ distribuem-se como na Figura 3.14 e, neste caso, aplicando ações horizontais a cada vértice em X , obtemos um grafo bipartido na arestas de tipo E negativas em dois conjuntos Z e W .*

Nestas condições, aplicando ações cruzadas em cada vértice de Z obtemos um código P^l cor-

respondente a um lacet duplicado $\mathcal{L}$ de ℓ , lacet de $\mathbf{g}$ em $\mathbb{RP}^2$. A partição definida no Teorema 3.1 é dada por $A = Z - X$, $B = Z \cap X$, $C = X - Z$ e $D = Y \cap W$.

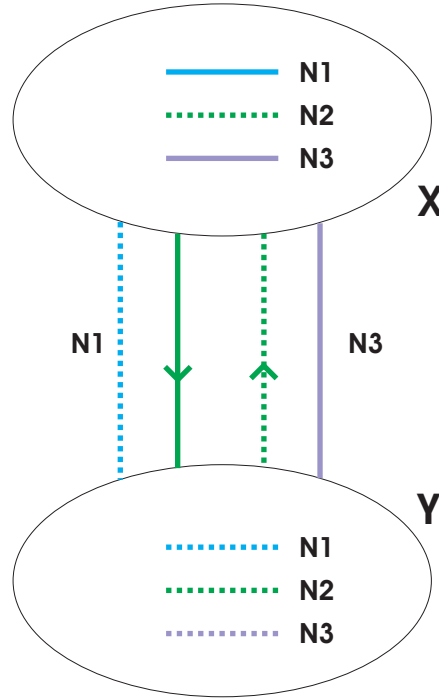


Figura 3.14: Sinais das arestas do tipo N na partição dos vértices em $K_{\mathbf{g}}(P_0)$

Se um código de Gauss $\mathbf{g}$ não 2-colorável **não** é código projetivo então existe, no grafo obtido contraindo as arestas do tipo N1 negativas e do tipo N3 positivas, uma das seguintes estruturas:

- Um vértice que não é nem fonte nem sorvedouro para arestas do tipo N2 negativas.
- Uma aresta do tipo N1 negativa ligando dois vértices fonte de arestas do tipo N2 negativas.
- Uma aresta do tipo N3 positiva ligando dois vértices sorvedouro de arestas do tipo N2 negativas.

Finalizamos este capítulo aplicando os dois últimos teoremas na demonstração da projetividade do código não 2-colorável $\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6, 11, 8, 5, 10, 12$ cujas cores das arestas em $K_{\mathbf{g}}(P_0)$ são ilustradas na Figura 3.12.

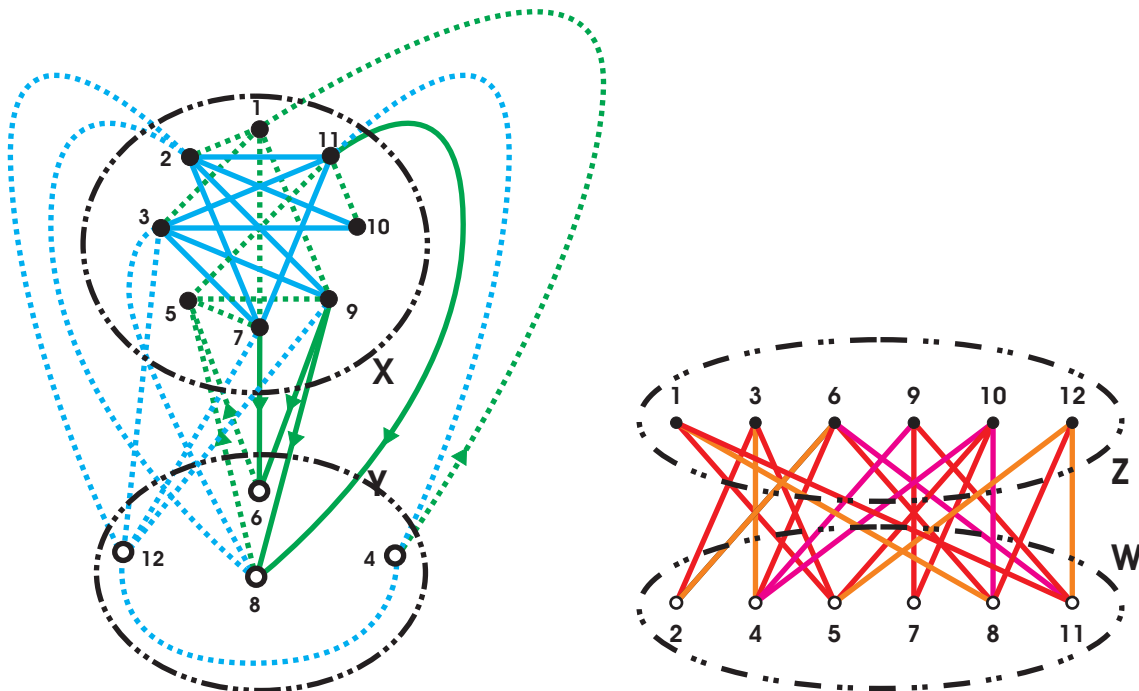


Figura 3.15: Algoritmo de Classificação aplicado ao código não 2-Colorável $\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6, 11, 8, 5, 10, 12$.

À esquerda mostramos a partição induzida pelas arestas de tipo N no grafo $K_{\mathbf{g}}(P_0)$ para o código $\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6, 11, 8, 5, 10, 12$. Para maior clareza do desenho, as direções nas arestas tipo N2 (verdes) nas arestas internas aos conjuntos X e Y foram omitidas (ver Figura 3.14).

À direita mostramos a partição induzida pelas arestas de tipo E negativas no grafo $K_{\mathbf{g}}(P')$ para o código $\mathbf{g} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 4, 7, 11, 9, 12, 1, 6, 11, 8, 5, 10, 12$ e P' obtido de P_0 pela aplicação de ações horizontais nos vértices do conjunto $X = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11\}$. Para maior clareza do desenho, as direções nas arestas tipo E2 (vermelhas) negativas foram omitidas assim como as arestas tipo E positivas internas aos conjuntos Z ou W (ver Teorema 3.2)

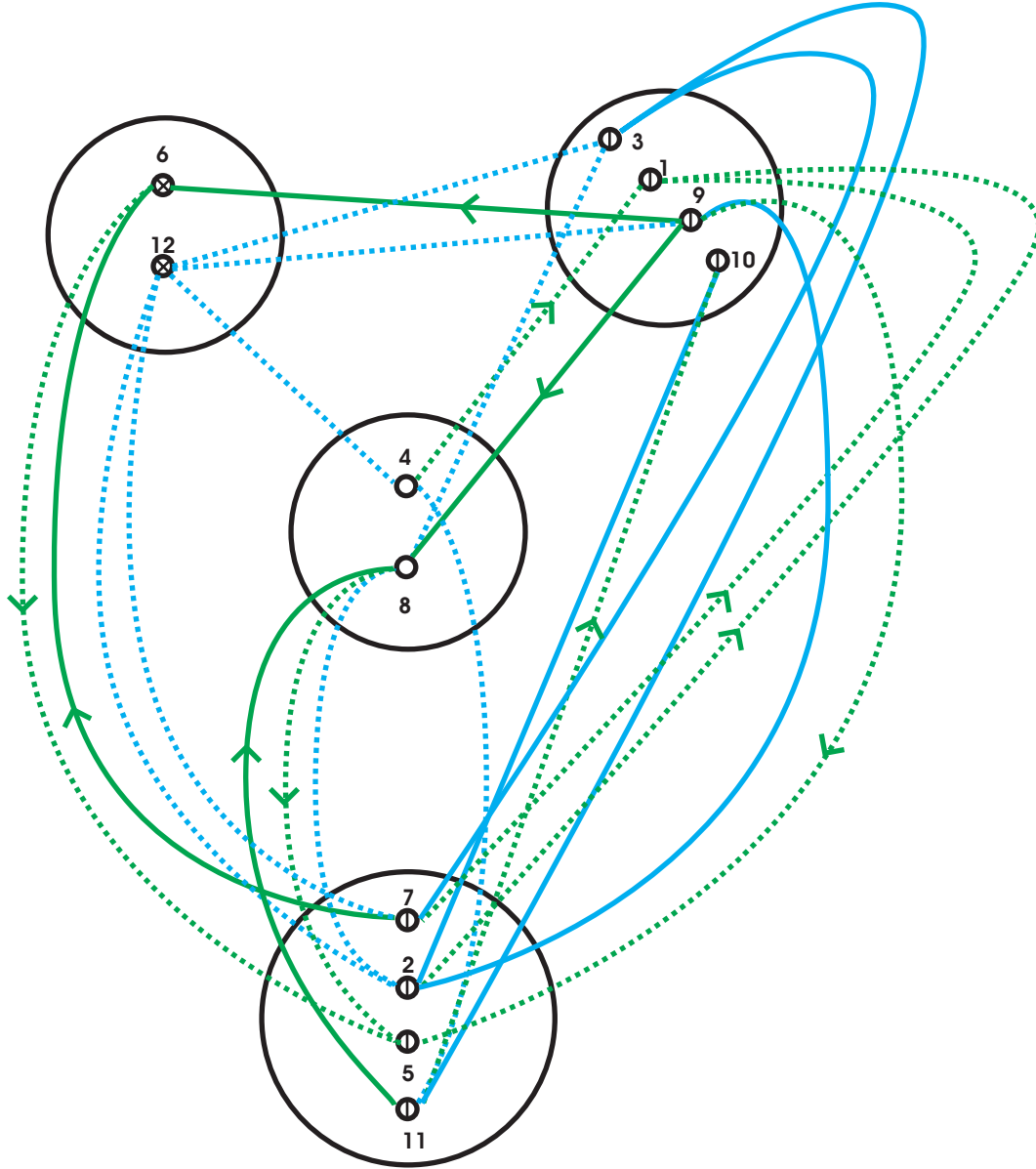


Figura 3.16: Sinais das arestas do tipo N na partição dos vértices em $K_g(P_0)$. Uma vez que, conforme a Figura 3.4, temos $X = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$, $Y = \{4, 6, 8, 12\}$, $Z = \{1, 3, 6, 9, 10, 12\}$ e $W = \{2, 4, 5, 7, 8, 11\}$, podemos utilizar a caracterização dos conjuntos A, B, C e D dadas pelo Algoritmo de Classificação (ver Teorema 3.2)

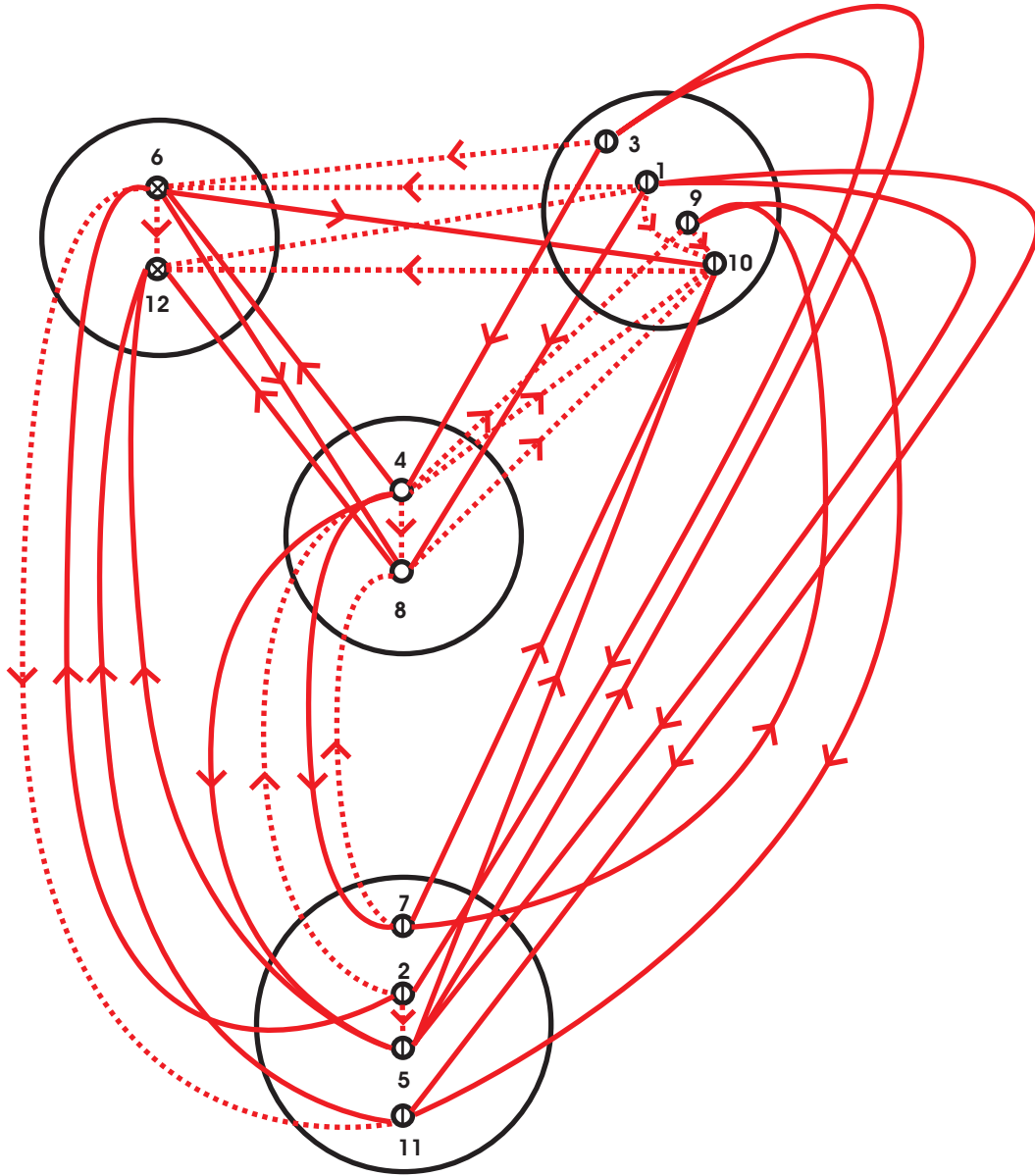


Figura 3.17: Sinais das arestas do tipo E na partição dos vértices em $K_g(P_0)$ (ver figura 3.16)

Capítulo 4

Efeito das Ações Sobre a Função i_P

4.1 Introdução

Uma vez que as funções i e b caracterizam, conforme estudado no Capítulo 7, os códigos projetivos não 2-coloráveis, neste e nos próximos 2 capítulos desta tese, estudamos com detalhes as modificações induzidas pelas ações nestas funções. A função b , conforme detalhado adiante, depende das funções i - estudada neste capítulo, i^2 - cujo estudo, no próximo capítulo, depende do entendimento da paridade das intersecções da função i para diversos símbolos $-$, e S_x , estudada, juntamente com a função b , no Capítulo 6.

A segunda seção deste capítulo se refere às propriedades da função i que valem para quaisquer códigos em $\mathcal{P}$ e a seção seguinte relaciona as propriedades preservadas pelas ações em tal função.

4.2 Propriedades Imediatas da Função i em $\mathcal{P}$

Para iniciar o estudo da função i , a análise cuidadosa de todos os posicionamentos relativos entre duas classes $\bar{x}$ e $\bar{k}$ ao longo do código (conforme as Figuras 4.1, 4.2 e 4.3) fornece os resultados básicos. Na próxima seção, analisamos como as ações de uma classe modificam os valores da função i_P , $P \in \mathcal{P}$.

Proposição 4.1 *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ então $|i_P(x) \cap \bar{k}| = 0$ ou 2. Mais ainda,*

$$\begin{aligned} \bar{x} \propto \bar{k} &\iff i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_a, k_{a+1}\} \\ \bar{x} \not\propto \bar{k} &\iff i_P(x) \cap \bar{k} = \emptyset \text{ or } \{k_a, k_{a+2}\} \end{aligned}$$

onde $a \in \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$. ■

Proposição 4.2 *Se k_1 é ímpar (isto é, $|i_P(k_1)|$ é ímpar) em P então valem os resultados:*

$$\begin{aligned} i_P(k_1) \cap \bar{k} &= \{k_2\} & i_P(k_1) \cap \bar{k} &= \{k_4\} \\ i_P(k_2) \cap \bar{k} &= \{k_1, k_3\} & \text{ou} & i_P(k_2) \cap \bar{k} &= \emptyset \\ i_P(k_3) \cap \bar{k} &= \{k_2\} & i_P(k_3) \cap \bar{k} &= \{k_4\} \\ i_P(k_4) \cap \bar{k} &= \emptyset & i_P(k_4) \cap \bar{k} &= \{k_1, k_3\} \end{aligned}$$

Se k_1 for par em P então valem:

$$\begin{aligned} i_P(k_1) \cap \bar{k} &= \{k_2, k_4\} & i_P(k_1) \cap \bar{k} &= \emptyset \\ i_P(k_2) \cap \bar{k} &= \{k_1\} & \text{ou} & i_P(k_2) \cap \bar{k} &= \{k_3\} \\ i_P(k_3) \cap \bar{k} &= \emptyset & i_P(k_3) \cap \bar{k} &= \{k_2, k_4\} \\ i_P(k_4) \cap \bar{k} &= \{k_1\} & i_P(k_4) \cap \bar{k} &= \{k_3\} \end{aligned}$$

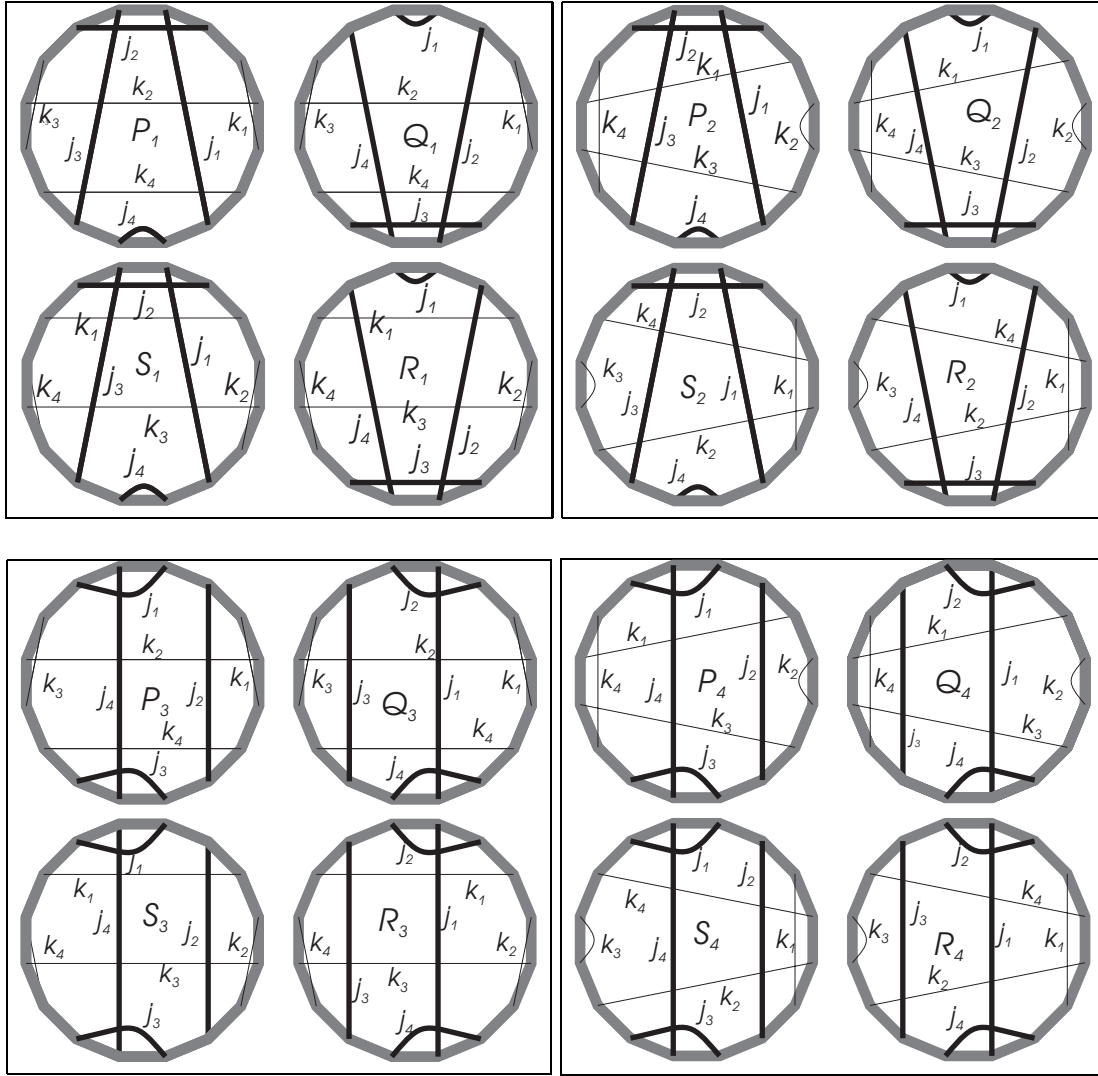


Figura 4.1: Primeira metade de todos os posicionamentos relativos entre duas classes $\bar{j}$ e $\bar{k}$ não entrelaçadas

■

Proposição 4.3 *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$, então*

$$\begin{aligned} (i_P(x_1) + i_P(x_3)) \cap \bar{k} &= (i_P(x_2) + i_P(x_4)) \cap \bar{k} = \emptyset \text{ or } \bar{k} \\ (i_P(x_1) + i_P(x_2)) \cap \bar{k} &= (i_P(x_3) + i_P(x_4)) \cap \bar{k} = \{k_1, k_3\} \text{ or } \{k_2, k_4\} \\ (i_P(x_1) + i_P(x_4)) \cap \bar{k} &= (i_P(x_2) + i_P(x_3)) \cap \bar{k} = \{k_1, k_3\} \text{ or } \{k_2, k_4\} \end{aligned}$$

■

Observação: Outra forma de enunciar a proposição anterior é a seguinte:

Proposição 4.4 *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ então $(i_P(x_a) + i_P(x_b)) \cap \bar{k}$ é igual a:*

$$\begin{aligned} \emptyset \text{ ou } \bar{k} &\iff x_a \text{ e } x_b \text{ são de mesma paridade em } P \\ \{k_1, k_3\} \text{ ou } \{k_2, k_4\} &\iff \text{ caso contrário} \end{aligned}$$

■

Observação: $\{k_1, k_3\}$ e $\{k_2, k_4\}$ são pares de antípodas.

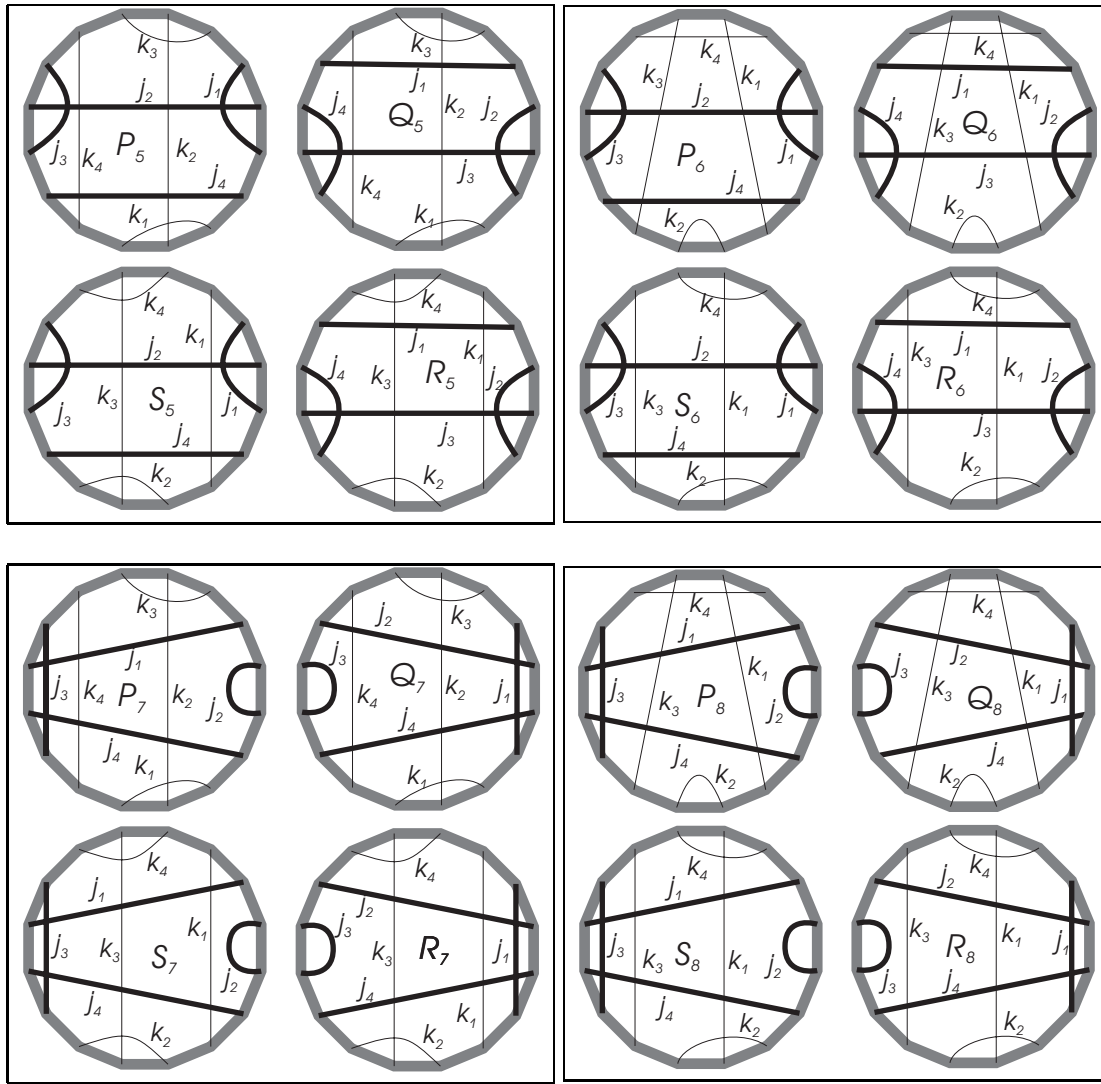


Figura 4.2: Segunda metade de todos os posicionamentos relativos entre duas classes $\bar{j}$ e $\bar{k}$ não entrelaçadas

4.3 Ações em $\mathcal{P}$: Efeitos Sobre a Função de Entrelaçamento

Os próximos resultados, relativos ao efeito das ações sobre um código quadruplicado P , são obtidos analisando as possibilidades ilustradas na Figura 4.4.

O primeiro resultado se refere à mudança na função i_P induzida pelas ações de uma classe $\bar{k}$ nos demais símbolos do código quadruplicado

Proposição 4.5 *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ então*

$$i_{\bar{x} \bar{k} P}(x) = i_P(x)$$

$$i_{\times \bar{k} P}(x) = \begin{cases} i_P(x) & \text{Se } i_P(x) \cap \bar{k} \in \{\emptyset, \{k_1, k_2\}, \{k_3, k_4\}\} \\ i_P(x) + \bar{k} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$i_{| \bar{k} P}(x) = \begin{cases} i_P(x) & \text{Se } i_P(x) \cap \bar{k} \in \{\emptyset, \{k_1, k_2\}, \{k_3, k_4\}\} \\ i_P(x) + \bar{k} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

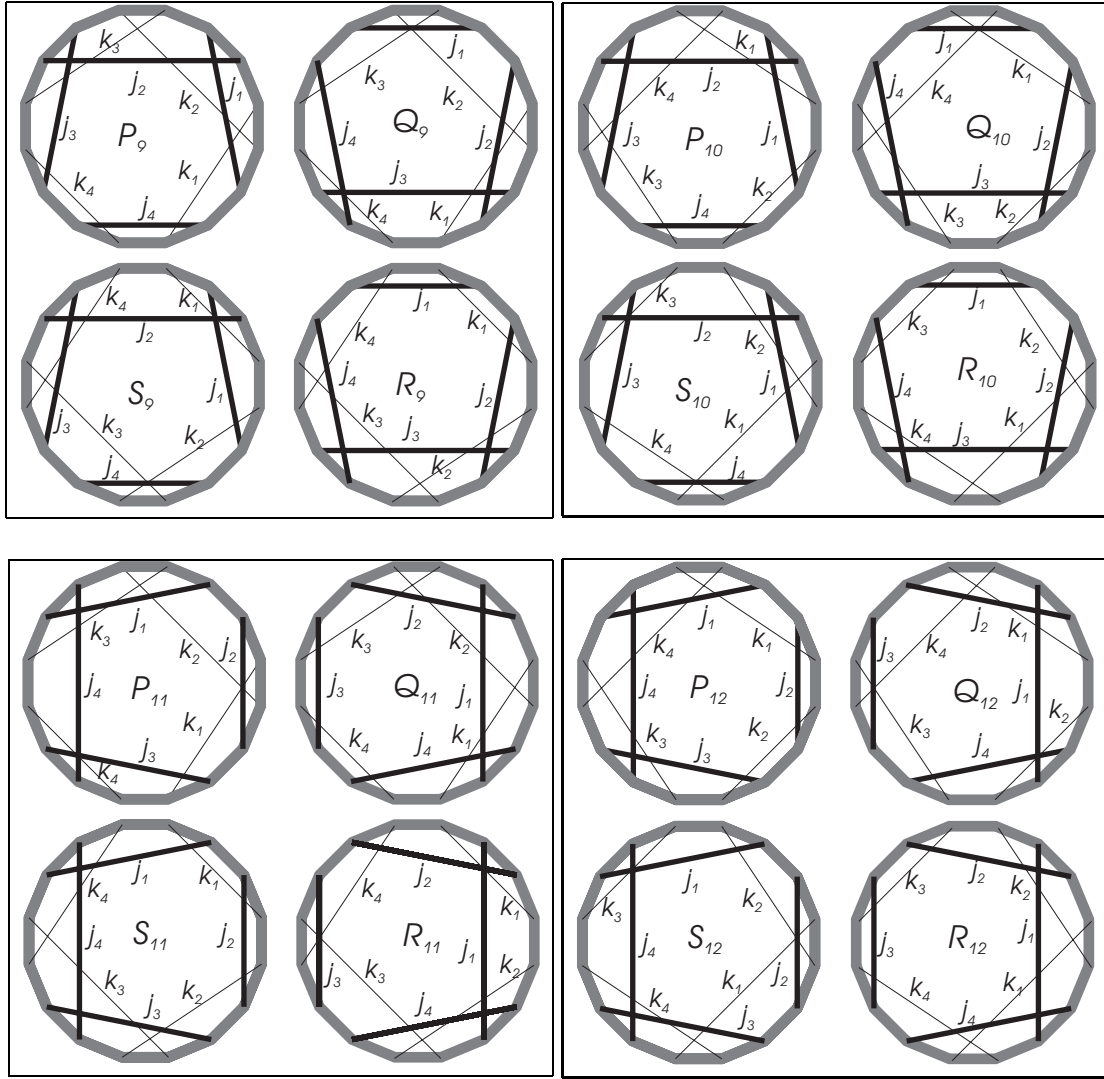


Figura 4.3: Todos os posicionamentos relativos entre duas classes $\bar{j}$ e $\bar{k}$ entrelaçadas

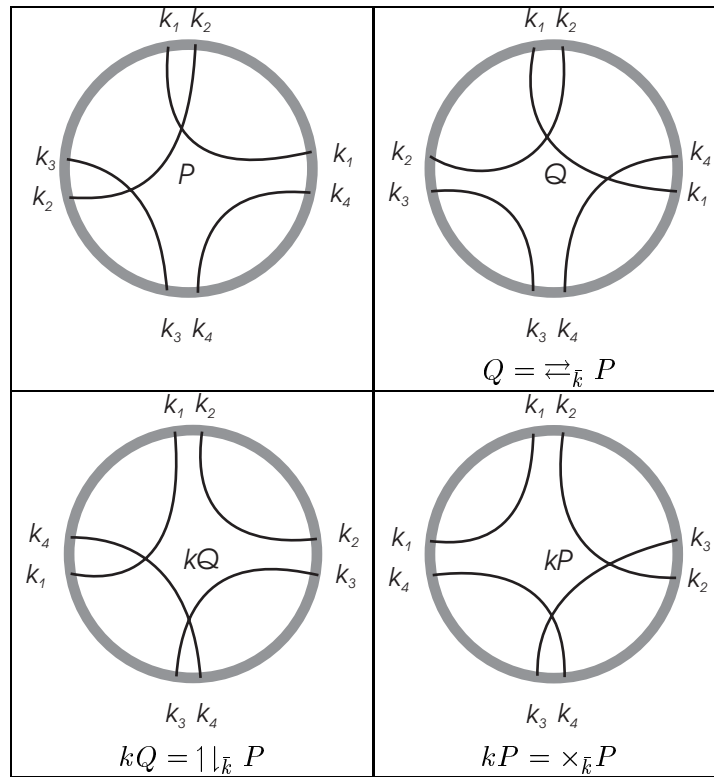
Mais ainda, as ações cruzada e horizontal mudam a paridade dos elementos de $\bar{k}$ ao contrário da ação vertical que as mantém. ■

Agora, a mudança operada em i_P pelas ações de $\bar{k}$ nos seus próprios elementos:

Proposição 4.6 *Os seguintes resultados descrevem a ação cruzada da classe $\bar{k}$ sobre a função i_P nos elementos da própria classe $\bar{k}$:*

caso 1: k_1 ímpar e $i_P(k_1) \cap \bar{k} = \{k_2\}$

$$\begin{aligned}
 i_{\times_{\bar{k}} P}(k_1) &= i_P(k_2) + \{k_1, k_3\} \\
 i_{\times_{\bar{k}} P}(k_2) &= i_P(k_1) + \{k_2, k_3\} \\
 i_{\times_{\bar{k}} P}(k_3) &= i_P(k_4) + \{k_2, k_4\} \\
 i_{\times_{\bar{k}} P}(k_4) &= i_P(k_3) + \{k_2, k_3\}
 \end{aligned}$$

Figura 4.4: Efeito das três ações de $\bar{k}$ sobre a função i_P

caso 2: k_1 ímpar e $i_P(k_1) \cap \bar{k} = \{k_4\}$

$$\begin{aligned} i_{\times_{\bar{k}} P}(k_1) &= i_P(k_2) + \{k_2, k_4\} \\ i_{\times_{\bar{k}} P}(k_2) &= i_P(k_1) + \{k_1, k_4\} \\ i_{\times_{\bar{k}} P}(k_3) &= i_P(k_4) + \{k_1, k_3\} \\ i_{\times_{\bar{k}} P}(k_4) &= i_P(k_3) + \{k_1, k_4\} \end{aligned}$$

caso 3: k_1 par e $i_P(k_1) \cap \bar{k} = \{k_2, k_4\}$

$$\begin{aligned} i_{\times_{\bar{k}} P}(k_1) &= i_P(k_2) + \{k_1, k_4\} \\ i_{\times_{\bar{k}} P}(k_2) &= i_P(k_1) + \{k_2, k_4\} \\ i_{\times_{\bar{k}} P}(k_3) &= i_P(k_4) + \{k_1, k_4\} \\ i_{\times_{\bar{k}} P}(k_4) &= i_P(k_3) + \{k_1, k_3\} \end{aligned}$$

caso 4: k_1 par e $i_P(k_1) \cap \bar{k} = \emptyset$

$$\begin{aligned} i_{\times_{\bar{k}} P}(k_1) &= i_P(k_2) + \{k_2, k_3\} \\ i_{\times_{\bar{k}} P}(k_2) &= i_P(k_1) + \{k_1, k_3\} \\ i_{\times_{\bar{k}} P}(k_3) &= i_P(k_4) + \{k_2, k_3\} \\ i_{\times_{\bar{k}} P}(k_4) &= i_P(k_3) + \{k_2, k_4\} \end{aligned}$$

■

Proposição 4.7 *Os seguintes resultados descrevem a ação vertical da classe $\bar{k}$ sobre a função i_P nos elementos da própria classe $\bar{k}$:*

caso 1: k_1 ímpar e $i_P(k_1) \cap \bar{k} = \{k_2\}$

$$\begin{aligned} i|_{\bar{k}} P(k_1) &= i_P(k_2) + \{k_1, k_3, k_4\} \\ i|_{\bar{k}} P(k_2) &= i_P(k_1) + \{k_2\} \\ i|_{\bar{k}} P(k_3) &= i_P(k_4) + \{k_4\} \\ i|_{\bar{k}} P(k_4) &= i_P(k_3) + \{k_1, k_2, k_3\} \end{aligned}$$

caso 2: k_1 ímpar e $i_P(k_1) \cap \bar{k} = \{k_4\}$

$$\begin{aligned} i|_{\bar{k}} P(k_1) &= i_P(k_2) + \{k_2, k_3, k_4\} \\ i|_{\bar{k}} P(k_2) &= i_P(k_1) + \{k_1\} \\ i|_{\bar{k}} P(k_3) &= i_P(k_4) + \{k_3\} \\ i|_{\bar{k}} P(k_4) &= i_P(k_3) + \{k_1, k_2, k_4\} \end{aligned}$$

caso 3: k_1 par e $i_P(k_1) \cap \bar{k} = \emptyset$

$$\begin{aligned} i|_{\bar{k}} P(k_1) &= i_P(k_2) + \{k_2\} \\ i|_{\bar{k}} P(k_2) &= i_P(k_1) + \{k_1, k_3, k_4\} \\ i|_{\bar{k}} P(k_3) &= i_P(k_4) + \{k_1, k_2, k_3\} \\ i|_{\bar{k}} P(k_4) &= i_P(k_3) + \{k_4\} \end{aligned}$$

caso 4: k_1 par e $i_P(k_1) \cap \bar{k} = \{k_2, k_4\}$

$$\begin{aligned} i|_{\bar{k}} P(k_1) &= i_P(k_2) + \{k_1\} \\ i|_{\bar{k}} P(k_2) &= i_P(k_1) + \{k_2, k_3, k_4\} \\ i|_{\bar{k}} P(k_3) &= i_P(k_4) + \{k_1, k_2, k_4\} \\ i|_{\bar{k}} P(k_4) &= i_P(k_3) + \{k_3\} \end{aligned}$$

■

Proposição 4.8 *Se k_1 é par ou ímpar, os seguintes resultados descrevem a ação horizontal da classe $\bar{k}$ sobre a função i_P nos elementos da própria classe $\bar{k}$:*

$$\begin{aligned} i_{\leftrightarrow \bar{k}} P(k_1) &= i_P(k_1) + \{k_4\} \\ i_{\leftrightarrow \bar{k}} P(k_2) &= i_P(k_2) + \{k_3\} \\ i_{\leftrightarrow \bar{k}} P(k_3) &= i_P(k_3) + \{k_2\} \\ i_{\leftrightarrow \bar{k}} P(k_4) &= i_P(k_4) + \{k_1\} \end{aligned}$$

Outra maneira de enunciar os resultados acima é: $i_{\leftrightarrow \bar{k}} P(k_i) = i_P(k_i) + \{k_{5-i}\}$. ■

Capítulo 5

Efeito das Ações Sobre a Função i_P^2

5.1 Introdução

Com o intuito de detalhar o efeito das ações das classes sobre a função i_P^2 com $P \in \mathcal{P}$, estudamos este efeito sobre a paridade das intersecções das funções de entrelaçamento. Isto será suficiente devido ao resultado provado por Lins [20]:

Lema 5.1 $x \in i^2(y) \iff |i(x) \cap i(y)| \text{ é ímpar}$

5.2 Propriedades da Intersecção de Funções de Entrelaçamento

Para estudar o efeito das ações sobre a paridade das intersecções das funções de entrelaçamento, enunciamos e demonstramos quatro proposições que relacionam quais elementos de uma dada classe podem estar presentes no conjunto i^2 de cada elemento de uma outra classe arbitrária.

Proposição 5.1 *Se $\bar{x} \neq \bar{y}$, $\bar{x} \neq \bar{k}$ e $\bar{y} \neq \bar{k}$ então*

- $|\bar{y} \cap (i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)))|$ e $|\bar{y} \cap (i_P(x) \cap (i_P(k_3) + i_P(k_4)))|$ têm a mesma paridade. *Mais ainda:*
- $|\bar{y} \cap (i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)))|$ é **ímpar** se, e somente se, $\bar{x} \propto \bar{y}$.

Demonstração: Conforme a Proposição 4.3, temos que $\bar{y} \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)) = \{y_1, y_3\}$ ou $\{y_2, y_4\}$. Mais ainda, pela mesma proposição, $\bar{y} \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)) = \bar{y} \cap (i_P(k_3) + i_P(k_4))$. Isto prova a primeira afirmação.

Pela Proposição 4.1, temos que $\bar{y} \cap i_P(x) = \{y_a, y_{a+1}\}$, se $\bar{x} \propto \bar{y}$, e que $\bar{y} \cap i_P(x) = \{y_a, y_{a+2}\}$, caso contrário. Assim, como $\bar{y} \cap (i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))) = (\bar{y} \cap i_P(x)) \cap (\bar{y} \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)))$, Temos as seguintes possibilidades para $\bar{y} \cap (i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)))$:

$$\begin{cases} \emptyset, \{y_1, y_3\}, \{y_2, y_4\} & \text{se } \bar{x} \not\propto \bar{y} \\ \{y_1\}, \{y_2\}, \{y_3\}, \{y_4\} & \text{se } \bar{x} \propto \bar{y} \end{cases}$$

O que prova a segunda afirmação e a proposição ■

Proposição 5.2 *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ e $|i_P(x)|$ é par, então $|\bar{x} \cap (i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)))|$ e $|\bar{x} \cap (i_P(x) \cap (i_P(k_3) + i_P(k_4)))|$ são, ambos, pares.*

Demonstração: Pela Proposição 4.2, temos que

$\bar{x} \cap i_P(x) \in \{\emptyset, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}\}$. Conforme é imediato notar, a paridade desta intersecção é igual a paridade de $|i_P(x)|$, logo, se $|i_P(x)|$ é par teremos $\bar{x} \cap i_P(x) \in \{\emptyset, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \}$. Por outro lado, a Proposição 4.3 afirma que $\bar{x} \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)) = \bar{x} \cap (i_P(k_3) + i_P(k_4)) = \{x_1, x_3\}$ ou $\{x_2, x_4\}$. O que implica, desta forma, que

$$\bar{x} \cap i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)) \in \{\emptyset, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\}\}$$

demonstrando a proposição. ■

Proposição 5.3 *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ então a paridade de $|\bar{k} \cap (i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)))|$ e $|\bar{k} \cap (i_P(x) \cap (i_P(k_3) + i_P(k_4)))|$ são diferentes se, e somente se, $\bar{x} \propto \bar{k}$. Mais ainda, $|\bar{k} \cap (i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)))|$ é par se, e somente se, exatamente uma das condições seguintes é satisfeita:*

- $i_P(x) \cap \bar{k} = \emptyset$.
- $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_3\}$ e k_1 ímpar.
- $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_2, k_4\}$ e k_1 par.
- $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_2\}$.
- $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_2, k_3\}$ e k_1 ímpar.
- $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_4\}$ e k_1 par.

Demonstração: A Proposição 4.2 estabelece que

$$\begin{aligned} \bar{k} \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)) &= \bar{k} \cap i_P(k_1) + \bar{k} \cap i_P(k_2) \\ &= \begin{cases} \{k_1, k_2, k_3\} & \text{ou} \\ \{k_4\}, & \text{se } k_1 \text{ for ímpar} \\ \{k_1, k_2, k_4\} & \text{ou} \\ \{k_3\}, & \text{se } k_1 \text{ for par} \end{cases} \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} \bar{k} \cap (i_P(k_3) + i_P(k_4)) &= \bar{k} \cap i_P(k_3) + \bar{k} \cap i_P(k_4) \\ &= \begin{cases} \{k_2\} & \text{ou} \\ \{k_1, k_3, k_4\}, & \text{se } k_1 \text{ for ímpar} \\ \{k_1\} & \text{ou} \\ \{k_2, k_3, k_4\}, & \text{se } k_1 \text{ for par} \end{cases} \end{aligned}$$

O que nos dá as seguintes possibilidades

$\bar{k} \cap i_P(x)$	$\bar{k} \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))$	$\bar{k} \cap (i_P(k_3) + i_P(k_4))$	$\bar{k} \cap i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))$	$\bar{k} \cap i_P(x) \cap (i_P(k_3) + i_P(k_4))$
$\emptyset$	$\{k_1, k_2, k_3\}$	$\{k_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\{k_4\}$	$\{k_1, k_3, k_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\{k_1, k_2, k_4\}$	$\{k_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\{k_3\}$	$\{k_2, k_3, k_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{k_1, k_3\}$	$\{k_1, k_2, k_3\}$	$\{k_2\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\emptyset$
$\{k_1, k_3\}$	$\{k_4\}$	$\{k_1, k_3, k_4\}$	$\emptyset$	$\{k_1, k_3\}$
$\{k_1, k_3\}$	$\{k_1, k_2, k_4\}$	$\{k_1\}$	$\{k_1\}$	$\{k_1\}$
$\{k_1, k_3\}$	$\{k_3\}$	$\{k_2, k_3, k_4\}$	$\{k_3\}$	$\{k_3\}$
$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_2, k_3\}$	$\{k_2\}$	$\{k_2\}$	$\{k_2\}$
$\{k_2, k_4\}$	$\{k_4\}$	$\{k_1, k_3, k_4\}$	$\{k_4\}$	$\{k_4\}$
$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_2, k_4\}$	$\{k_1\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\emptyset$
$\{k_2, k_4\}$	$\{k_3\}$	$\{k_2, k_3, k_4\}$	$\emptyset$	$\{k_2, k_4\}$
$\{k_1, k_2\}$	$\{k_1, k_2, k_3\}$	$\{k_2\}$	$\{k_1, k_2\}$	$\{k_2\}$
$\{k_1, k_2\}$	$\{k_4\}$	$\{k_1, k_3, k_4\}$	$\emptyset$	$\{k_1\}$
$\{k_1, k_2\}$	$\{k_1, k_2, k_4\}$	$\{k_1\}$	$\{k_1, k_2\}$	$\{k_1\}$
$\{k_1, k_2\}$	$\{k_3\}$	$\{k_2, k_3, k_4\}$	$\emptyset$	$\{k_2\}$
$\{k_2, k_3\}$	$\{k_1, k_2, k_3\}$	$\{k_2\}$	$\{k_2, k_3\}$	$\{k_2\}$
$\{k_2, k_3\}$	$\{k_4\}$	$\{k_1, k_3, k_4\}$	$\emptyset$	$\{k_3\}$
$\{k_2, k_3\}$	$\{k_1, k_2, k_4\}$	$\{k_1\}$	$\{k_2\}$	$\emptyset$
$\{k_2, k_3\}$	$\{k_3\}$	$\{k_2, k_3, k_4\}$	$\{k_3\}$	$\{k_2, k_3\}$
$\{k_3, k_4\}$	$\{k_1, k_2, k_3\}$	$\{k_2\}$	$\{k_3\}$	$\emptyset$
$\{k_3, k_4\}$	$\{k_4\}$	$\{k_1, k_3, k_4\}$	$\{k_4\}$	$\{k_3, k_4\}$
$\{k_3, k_4\}$	$\{k_1, k_2, k_4\}$	$\{k_1\}$	$\{k_4\}$	$\emptyset$
$\{k_3, k_4\}$	$\{k_3\}$	$\{k_2, k_3, k_4\}$	$\{k_3\}$	$\{k_3, k_4\}$
$\{k_1, k_4\}$	$\{k_1, k_2, k_3\}$	$\{k_2\}$	$\{k_1\}$	$\emptyset$
$\{k_1, k_4\}$	$\{k_4\}$	$\{k_1, k_3, k_4\}$	$\{k_4\}$	$\{k_1, k_4\}$
$\{k_1, k_4\}$	$\{k_1, k_2, k_4\}$	$\{k_1\}$	$\{k_1, k_4\}$	$\{k_1\}$
$\{k_1, k_4\}$	$\{k_3\}$	$\{k_2, k_3, k_4\}$	$\emptyset$	$\{k_4\}$

A proposição segue da análise dos casos nesta tabela. ■

Proposição 5.4 *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ e $|i_P(x)|$ é par então $|i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))|$ e $|i_P(x) \cap (i_P(k_3) + i_P(k_4))|$ têm paridades diferentes se, e somente se, $\bar{x} \propto \bar{k}$.*

Demonstração: Basta notar que

$$i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)) = \bigcup_{\substack{\bar{y} \neq \bar{k} \\ \bar{y} \neq \bar{x}}} \bar{y} \cap i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)) \quad (5.1)$$

$$+ \bar{x} \cap i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)) \quad (5.2)$$

$$+ \bar{k} \cap i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)) \quad (5.3)$$

(2) é, pela Proposição 5.2, sempre par (i.e., a paridade do conjunto é par). Identicamente, pela Proposição 5.1, cada termo de (5.1) é par ou ímpar, conforme, respectivamente, $\bar{x} \propto \bar{y}$ ou $\bar{x} \not\propto \bar{y}$.

A **condição de paridade** afirma que o número de classe entrelaçadas com $\bar{x}$ é sempre par, assim, (5.1) será par se, e somente se, $\bar{k} \not\propto \bar{x}$. Nas parcelas (5.1) e (5.2), as proposições afirmam que a cardinalidade será a mesma se mudarmos $(i_P(k_1) + i_P(k_2))$ por $(i_P(k_3) + i_P(k_4))$, assim, a diferença entre as paridades de $i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))$ e $i_P(x) \cap (i_P(k_3) + i_P(k_4))$ se deve ao termo (5.3).

Finalmente, $\bar{k} \cap i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))$ e $\bar{k} \cap i_P(x) \cap (i_P(k_3) + i_P(k_4))$ têm paridades opostas se, e somente se, $\bar{k} \propto \bar{x}$, pela Proposição 5.3, o que prova o resultado. ■

O próximo resultado é consequência da proposição anterior:

Proposição 5.5 *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ e $|i_P(x)|$ par, então as paridades de $|i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))|$ e $|\bar{k} \cap i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))|$ são diferentes se, e somente se, $\bar{k} \propto \bar{x}$.*

Demonstração: Basta notar que o termo (1) na prova da proposição anterior é par se, e somente se, $\bar{k} \not\propto \bar{x}$. Como o termo (2) é sempre par, as paridades de $|i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))|$ e $|\bar{k} \cap i_P(x) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))|$ são devidas ao termo (3) ■

Proposição 5.6 *$i_P(k_i) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))$ e $i_P(k_i) \cap (i_P(k_3) + i_P(k_4))$ têm a mesma paridade. Mais ainda, $i_P(k_i) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))$ têm a mesma paridade de $i_P(k_i)$.*

Demonstração: É imediato notar que $i_P(k_i) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)) = \bigcup_{\bar{y} \neq \bar{k}} \bar{y} \cap i_P(k_i) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)) + \bar{k} \cap i_P(k_i) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))$.

Se $\bar{y} \neq \bar{k}$, pela Proposição 4.1) $\bar{y} \cap i_P(k_i) \in \{\{y_1, y_2\}, \{y_2, y_3\}, \{y_3, y_4\}, \{y_1, y_4\}\}$ quando $\bar{y} \propto \bar{k}$ e $\bar{y} \cap i_P(k_i) \in \{\emptyset, \{y_1, y_3\}, \{y_2, y_4\}\}$ caso contrário. Mais ainda, pela Proposição 4.3, sabemos que $\bar{y} \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)) = \bar{y} \cap (i_P(k_3) + i_P(k_4)) \in \{\{k_1, k_3\}, \{k_2, k_4\}\}$. Assim, como $\bar{y} \cap i_P(k_i) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)) = (\bar{y} \cap i_P(k_i)) \cap (\bar{y} \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2)))$, podemos concluir que $|\bar{y} \cap i_P(k_i) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))|$ é ímpar se, e somente se, $\bar{k} \propto \bar{y}$.

A paridade de $\bigcup_{\bar{y} \neq \bar{k}} \bar{y} \cap i_P(k_i) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))$, portanto, é a mesma de $\{\bar{y} \neq \bar{k} : \bar{y} \propto \bar{k}\}$. Pela **condição de paridade**, o último conjunto é par, assim, a paridade de $i_P(k_i) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))$ é função apenas da paridade de $\bar{k} \cap i_P(k_i) \cap (i_P(k_1) + i_P(k_2))$.

O restante da proposição é obtida pela aplicação da Proposição 4.2, pois $i_P(k_1) \cap i_P(k_2) \cap \bar{k} = \emptyset$ ■

5.3 Propriedades Imediatas da Função i^2

Os resultados desta seção, referem-se a propriedades da função i^2 utilizadas no capítulo 7 para demonstração da boa definição do grafo $K_{\mathbf{g}}(P)$.

Definimos a função $\chi_i = \chi_i(x, \bar{k}, P) = \begin{cases} 0, & \text{se } k_i \notin i_P^2(x) \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$. Como $x, \bar{k}$ e P são constantes no restante desta análise, escrevemos simplesmente χ_i . Os seguintes resultados seguem imediatamente dos resultados da seção anterior uma vez que $\chi_i = 1 \iff k_i \in i_P^2(x) \iff |i_P(x) \cap i_P(k_i)| = 1 \pmod{2}$. Isto implica que $\chi_i + \chi_j$ é igual a paridade de $|i_P(x) \cap (i_P(k_i) + i_P(k_j))|$

Proposição 5.7 *Se $\bar{x} \propto \bar{k}$ com $\bar{x} \neq \bar{k}$ e x for par, então valem as afirmações*

- Se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_2\}$ então $\begin{cases} \chi_1 + \chi_2 &= 1 \\ \chi_3 + \chi_4 &= 0 \end{cases}$

- Se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_3, k_4\}$ então $\begin{cases} \chi_1 + \chi_2 = 0 \\ \chi_3 + \chi_4 = 1 \end{cases}$

- Se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_2, k_3\}$ então

$$\text{Se } k_1 \text{ é par então } \begin{cases} \chi_1 + \chi_2 = 0 \\ \chi_3 + \chi_4 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Se } k_1 \text{ é ímpar então } \begin{cases} \chi_1 + \chi_2 = 1 \\ \chi_3 + \chi_4 = 0 \end{cases}$$

- Se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_4\}$ então

$$\text{Se } k_1 \text{ é par então } \begin{cases} \chi_1 + \chi_2 = 1 \\ \chi_3 + \chi_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Se } k_1 \text{ é ímpar então } \begin{cases} \chi_1 + \chi_2 = 0 \\ \chi_3 + \chi_4 = 1 \end{cases}$$

Proposição 5.8 Se $\bar{x} \not\propto \bar{k}$ com $\bar{x} \neq \bar{k}$ e x for par, então valem as afirmações

- Se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_3\}$ então

$$\text{Se } k_1 \text{ é par então } \begin{cases} \chi_1 + \chi_2 = \chi_3 + \chi_4 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Se } k_1 \text{ é ímpar então } \begin{cases} \chi_1 + \chi_2 = \chi_3 + \chi_4 = 0 \end{cases}$$

- Se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_2, k_4\}$ então

$$\text{Se } k_1 \text{ é par então } \begin{cases} \chi_1 + \chi_2 = \chi_3 + \chi_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Se } k_1 \text{ é ímpar então } \begin{cases} \chi_1 + \chi_2 = \chi_3 + \chi_4 = 1 \end{cases}$$

- Se $i_P(x) \cap \bar{k} = \emptyset$ então $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = \chi_4 = 0$

Todas as somas acima são tomadas em $GF(2)$.

5.4 Efeito das Ações Sobre a Função i^2

Os resultados desta seção, referem-se ao efeito da ação de uma classe sobre as intersecções das funções de entrelaçamento o que culmina nos resultados sobre o comportamento da função i^2

Proposição 5.9 Se $\bar{x} \neq \bar{y}$, $\bar{x} \neq \bar{k}$ e $\bar{y} \neq \bar{k}$ então $|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(y)|$, $|i_{|\bar{k}}P(x) \cap i_{|\bar{k}}P(y)|$, $|i_{\rightleftharpoons_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\rightleftharpoons_{\bar{k}}P}(y)|$ e $|i_P(x) \cap i_P(y)|$ têm, todos, a mesma paridade.

Demonstração: Dada a Proposição 4.5 $i_{\times_{\bar{k}}P}(x) = i_P(x)$ or $i_P(x) + \bar{k}$, assim,

$$|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(y)| = \begin{cases} |i_P(x) \cap i_P(y)| \\ |i_P(x) \cap i_P(y) + i_P(x) \cap \bar{k}| \\ |i_P(x) \cap i_P(y) + i_P(y) \cap \bar{k}| \\ |i_P(x) \cap i_P(y) + i_P(x) \cap \bar{k} + i_P(y) \cap \bar{k} + \bar{k}| \end{cases}$$

Conforme a Proposição 4.1), $|i_P(x) \cap \bar{k}|$ e $|i_P(y) \cap \bar{k}|$ são ambos pares, assim como $|\bar{k}|$, desta forma, em todos os casos $|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(y)|$ tm a mesma paridade de $|i_P(x) \cap i_P(y)|$.

As demonstrações de que as paridades de $|i_{|\bar{k}}P(x) \cap i_{|\bar{k}}P(y)|$ e de $|i_{\rightleftharpoons_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\rightleftharpoons_{\bar{k}}P}(y)|$ são iguais a paridade de $|i_P(x) \cap i_P(y)|$ são análogas. ■

Proposição 5.10 *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ então*

$$i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) \setminus \bar{k} = i_{\upharpoonright_{\bar{k}}P}^2(x) \setminus \bar{k} = i_{\rightleftharpoons_{\bar{k}}P}^2(x) \setminus \bar{k} = i_P(x)^2 \setminus \bar{k}$$

onde $\setminus$ é a operação de subtração de conjuntos.

Demonstração: É suficiente notar que $y \in i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) \iff |i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(y)|$ é ímpar e usar a proposição anterior.

As demonstrações para $|i_{\upharpoonright_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\upharpoonright_{\bar{k}}P}(y)|$ e $|i_{\rightleftharpoons_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\rightleftharpoons_{\bar{k}}P}(y)|$ são análogas. ■

Proposição 5.11 *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ então $i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x)$, $i_{\upharpoonright_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x)$ e $i_{\rightleftharpoons_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x)$ são subconjuntos de $\bar{k}$.*

Demonstração: Segue imediatamente da proposição anterior. ■

Proposição 5.12 *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ então os seguintes pares:*

- $|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)|$ e $|i_P(x) \cap i_P(k_2)|$
- $|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_2)|$ e $|i_P(x) \cap i_P(k_1)|$
- $|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_3)|$ e $|i_P(x) \cap i_P(k_4)|$
- $|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_4)|$ e $|i_P(x) \cap i_P(k_3)|$

têm a mesma paridade se, e somente se, $\bar{x} \not\propto \bar{k}$.

Demonstração: Analisamos apenas o primeiro par, dado que cada um dos demais têm demonstração análoga.

Como $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_1, k_3\}$ ou $i_P(k_2) + \{k_1, k_4\}$ temos os seguintes casos para analisar:

caso 1: $i_P(x) \cap \bar{k} = \emptyset$ Neste caso, $i_{\times_{\bar{k}}P}(x) = i_P(x)$ (pela Proposição 4.5), assim,

Se $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_1, k_3\}$ teremos

$$\begin{aligned} |i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)| &= |i_P(x) \cap (i_P(k_2) + \{k_1, k_3\})| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |i_P(x) \cap \{k_1, k_3\}| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| \end{aligned}$$

Se $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_2, k_4\}$ teremos

$$\begin{aligned} |i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)| &= |i_P(x) \cap (i_P(k_2) + \{k_2, k_4\})| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |i_P(x) \cap \{k_2, k_4\}| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| \end{aligned}$$

Se $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_1, k_4\}$ teremos

$$\begin{aligned} |i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)| &= |i_P(x) \cap (i_P(k_2) + \{k_1, k_4\})| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |i_P(x) \cap \{k_1, k_4\}| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| \end{aligned}$$

Se $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_2, k_3\}$ teremos

$$\begin{aligned} |i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)| &= |i_P(x) \cap (i_P(k_2) + \{k_2, k_3\})| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |i_P(x) \cap \{k_2, k_3\}| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| \end{aligned}$$

pois $i_P(x) \cap \{k_1, k_3\} = i_P(x) \cap \bar{k} \cap \{k_1, k_3\} = \emptyset \cap \{k_1, k_3\} = \emptyset$ e $i_P(x) \cap \{k_1, k_4\} = i_P(x) \cap \bar{k} \cap \{k_1, k_4\} = \emptyset \cap \{k_1, k_4\} = \emptyset$

caso 2: $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_3\}$ Neste caso, $i_{\times_{\bar{k}}P}(x) = i_P(x) + \bar{k}$ (pela Proposição 4.5)

Se $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_1, k_3\}$ teremos (pela Proposição 4.2)

$$\begin{aligned} |i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)| &= |(i_P(x) + \bar{k}) \cap (i_P(k_2) + \{k_1, k_3\})| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| \\ &+ |i_P(x) \cap \{k_1, k_3\} + i_P(k_2) \cap \{k_1, k_3\} + \bar{k} \cap \{k_1, k_3\}| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_1, k_3\} + \{k_1, k_3\} + \{k_1, k_3\}| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_1, k_3\}| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| \end{aligned}$$

Se $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_2, k_4\}$ teremos (Proposição 4.2)

$$\begin{aligned} |i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)| &= |(i_P(x) + \bar{k}) \cap (i_P(k_2) + \{k_2, k_4\})| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| \\ &+ |i_P(x) \cap \{k_2, k_4\} + i_P(k_2) \cap \{k_2, k_4\} + \bar{k} \cap \{k_2, k_4\}| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\emptyset + \emptyset + \{k_2, k_4\}| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_2, k_4\}| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| \end{aligned}$$

Se $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_1, k_4\}$ teremos

$$\begin{aligned} |i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)| &= |(i_P(x) + \bar{k}) \cap (i_P(k_2) + \{k_1, k_4\})| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| \\ &+ |i_P(x) \cap \{k_1, k_4\} + i_P(k_2) \cap \{k_1, k_4\} + \bar{k} \cap \{k_1, k_4\}| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_1\} + \{k_1\} + \{k_1, k_4\}| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_1, k_4\}| \\ &= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| \end{aligned}$$

Se $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_2, k_3\}$ teremos (Proposição 4.2)

$$\begin{aligned}
|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)| &= |(i_P(x) + \bar{k}) \cap (i_P(k_2) + \{k_2, k_3\})| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| \\
&+ |i_P(x) \cap \{k_2, k_3\} + i_P(k_2) \cap \{k_2, k_3\} + \bar{k} \cap \{k_2, k_3\}| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_3\} + \{k_3\} + \{k_2, k_3\}| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_2, k_3\}| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)|
\end{aligned}$$

caso 3: $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_2\}$ Neste caso, $i_{\times_{\bar{k}}P}(x) = i_P(x)$ (Proposição 4.5)

Se $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_1, k_3\}$ teremos (Proposição 4.2)

$$\begin{aligned}
|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)| &= |i_P(x) \cap (i_P(k_2) + \{k_1, k_3\})| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |i_P(x) \cap \{k_1, k_3\}| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_1\}| \\
&= 1 + |i_P(x) \cap i_P(k_2)|
\end{aligned}$$

Se $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_2, k_4\}$ teremos (Proposição 4.2)

$$\begin{aligned}
|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)| &= |i_P(x) \cap (i_P(k_2) + \{k_2, k_4\})| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |i_P(x) \cap \{k_2, k_4\}| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_2\}| \\
&= 1 + |i_P(x) \cap i_P(k_2)|
\end{aligned}$$

Se $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_1, k_4\}$ teremos

$$\begin{aligned}
|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)| &= |i_P(x) \cap (i_P(k_2) + \{k_1, k_4\})| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |i_P(x) \cap \{k_1, k_4\}| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_1\}| \\
&= 1 + |i_P(x) \cap i_P(k_2)|
\end{aligned}$$

Se $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_2, k_3\}$ teremos (Proposição 4.2)

$$\begin{aligned}
|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)| &= |i_P(x) \cap (i_P(k_2) + \{k_2, k_3\})| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |i_P(x) \cap \{k_2, k_3\}| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_2\}| \\
&= 1 + |i_P(x) \cap i_P(k_2)|
\end{aligned}$$

caso 4: $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_2, k_3\}$ Neste caso, $i_{\times_{\bar{k}}P}(x) = i_P(x) + \bar{k}$ (Proposição 4.5)

Se $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_1, k_3\}$ teremos (Proposição 4.2)

$$\begin{aligned}
|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)| &= |(i_P(x) + \bar{k}) \cap (i_P(k_2) + \{k_1, k_3\})| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| \\
&+ |i_P(x) \cap \{k_1, k_3\} + i_P(k_2) \cap \{k_1, k_3\} + \bar{k} \cap \{k_1, k_3\}| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_3\} + \{k_1, k_3\} + \{k_1, k_3\}| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_3\}| \\
&= 1 + |i_P(x) \cap i_P(k_2)|
\end{aligned}$$

Se $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_2, k_4\}$ teremos (Proposição 4.2)

$$\begin{aligned}
|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)| &= |(i_P(x) + \bar{k}) \cap (i_P(k_2) + \{k_2, k_4\})| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| \\
&+ |i_P(x) \cap \{k_2, k_4\} + i_P(k_2) \cap \{k_2, k_4\} + \bar{k} \cap \{k_2, k_4\}| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_2\} + \emptyset + \{k_2, k_4\}| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_4\}| \\
&= 1 + |i_P(x) \cap i_P(k_2)|
\end{aligned}$$

Se $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_1, k_4\}$ teremos

$$\begin{aligned}
|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)| &= |(i_P(x) + \bar{k}) \cap (i_P(k_2) + \{k_1, k_4\})| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| \\
&+ |i_P(x) \cap \{k_1, k_4\} + i_P(k_2) \cap \{k_1, k_4\} + \bar{k} \cap \{k_1, k_4\}| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\emptyset + \{k_1\} + \{k_1, k_4\}| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_4\}| \\
&= 1 + |i_P(x) \cap i_P(k_2)|
\end{aligned}$$

Se $i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) = i_P(k_2) + \{k_2, k_3\}$ teremos (Proposição 4.2)

$$\begin{aligned}
|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)| &= |(i_P(x) + \bar{k}) \cap (i_P(k_2) + \{k_2, k_3\})| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| \\
&+ |i_P(x) \cap \{k_2, k_3\} + i_P(k_2) \cap \{k_2, k_3\} + \bar{k} \cap \{k_2, k_3\}| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_2, k_3\} + \{k_3\} + \{k_2, k_3\}| \\
&= |i_P(x) \cap i_P(k_2)| + |\{k_3\}| \\
&= 1 + |i_P(x) \cap i_P(k_2)|
\end{aligned}$$

Os casos 1 e 2 são modelos para os casos onde $\bar{x} \not\propto \bar{k}$ e os casos 3 e 4 são modelos para os casos onde $\bar{x} \propto \bar{k}$ (veja Proposição 4.1) ■

Proposição 5.13 *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ então $i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x)$ é igual a*

- $(\chi_1 + \chi_2)k_1 + (\chi_1 + \chi_2)k_2 + (\chi_3 + \chi_4)k_3 + (\chi_3 + \chi_4)k_4$, se $x \not\propto \bar{k}$

- $\bar{k} + (\chi_1 + \chi_2)k_1 + (\chi_1 + \chi_2)k_2 + (\chi_3 + \chi_4)k_3 + (\chi_3 + \chi_4)k_4$, caso contrário.

onde $\chi_i = \chi_i(x) = \begin{cases} 0 & , \text{se } k_i \notin i_P^2(x) \\ 1 & , \text{caso contrário} \end{cases}$ onde k_i denota tanto o elemento da classe $\bar{k}$, quanto seu vetor característico.

Demonstração: Da Proposição 5.11, vemos que é suficiente analisar o efeito da ação cruzada de $\bar{k}$ nos elementos de $\bar{k} \cap i_P^2(x)$.

Pela Proposição 5.12, se $\bar{x} \not\propto \bar{k}$ então o par $|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)|$ com $|i_P(x) \cap i_P(k_2)|$ e o par $|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_2)|$ com $|i_P(x) \cap i_P(k_1)|$ tem, cada um, a mesma paridade, desta forma, $k_1 \in i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \iff k_2 \in i_P(x)$.

Se $\bar{x} \propto \bar{k}$ então o par $|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)|$ com $|i_P(x) \cap i_P(k_2)|$ e o par $|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_2)|$ com $|i_P(x) \cap i_P(k_1)|$ tem, cada um, paridades opostas, desta forma, $k_1 \in i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \iff k_2 \notin i_P(x)$.

A análise para os demais elementos de $\bar{k}$ é idêntica. ■

Proposição 5.14 Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ e $i_P(x)$ é par então $i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x)$ é igual a exatamente uma das seguintes alternativas:

- $\emptyset$ se $i_P(x) \cap \bar{k} = \emptyset$ ou $\{k_1, k_3\}$ com $i_P(k_1)$ ímpar, ou $\{k_2, k_4\}$ com $i_P(k_1)$ par.
- $\bar{k}$ se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_3\}$ com $i_P(k_1)$ par ou $\{k_2, k_4\}$ com $i_P(k_1)$ ímpar.
- $\{k_1, k_2\}$ se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_3, k_4\}$ ou $\{k_2, k_3\}$ com $i_P(k_1)$ par ou $\{k_1, k_4\}$ com k_1 ímpar.
- $\{k_4, k_3\}$ se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_2\}$ ou $\{k_2, k_3\}$ com k_1 ímpar ou $\{k_1, k_4\}$ com k_1 par.

Demonstração: Segue imediatamente da tabela na demonstração da Proposições 5.3 e 5.5 ■

Proposição 5.15 Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ então $|i_{\rightrightarrows_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\rightrightarrows_{\bar{k}}P}(k_i)|$ e $|i_P(x) \cap i_P(k_i)|$ têm a mesma paridade se, e somente se, $k_{5-i} \notin i_P(x)$.

Demonstração: Pela Proposição 4.8 temos que $i_{\rightrightarrows_{\bar{k}}P}(k_i) = i_P(k_i) + \{k_{5-i}\}$ e pela Proposição 4.5 temos também que $i_{\rightrightarrows_{\bar{k}}P}(x) = i_P(x)$. Assim,

$$|i_{\rightrightarrows_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\rightrightarrows_{\bar{k}}P}(k_i)| = |i_P(x) \cap i_P(k_i)| + |\{k_{5-i}\} \cap i_P(x)|$$

e segue o resultado. ■

Proposição 5.16 Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ então $i_{\rightrightarrows_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x)$ é igual a

- $i_P(x) \cap \bar{k}$, se $i_P(x) \cap \bar{k} \in \{\emptyset, \{k_1, k_4\}, \{k_2, k_3\}\}$
- $i_P(x) \cap \bar{k} + \bar{k}$, caso contrário.

Demonstração: A demonstração é uma aplicação direta das Proposições 5.15 e 5.11. Segue um caso representativo de cada afirmação do enunciado desta proposição. O restante dos casos é análogo.

caso 1: $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_4\}$ Neste caso, $k_1 \in i_P(x) \cap \bar{k}$ assim $|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)|$ e $|i_P(x) \cap i_P(k_1)|$ têm paridades oposta e, desta forma, $k_1 \in i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) \iff k_1 \notin i_P^2(x)$. O mesmo resultado vale para k_4 .

$k_2 \notin i_P(x) \cap \bar{k}$, assim como k_3 , implica $k_2 \in i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) \iff k_1 \in i_P^2(x)$.

Desta forma, $i_P^2(x) \cap \bar{k} = \chi_1 k_1 + \chi_2 k_2 + \chi_3 k_3 + \chi_4 k_4$ implica $i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) \cap \bar{k} = (1 + \chi_1)k_1 + \chi_2 k_2 + \chi_3 k_3 + (1 + \chi_4)k_4$. Assim, $i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x) = (i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x)) \cap \bar{k} = k_1 + k_4 \equiv \{k_1, k_4\} = i_P(x) \cap \bar{k}$.

caso 2: $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_3\}$ Neste caso, $k_1 \in i_P(x) \cap \bar{k}$ assim $|i_{\times_{\bar{k}}P}(x) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)|$ e $|i_P(x) \cap i_P(k_1)|$ têm a mesma paridade e, então, $k_1 \in i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) \iff k_1 \in i_P^2(x)$. O mesmo resultado vale para k_3 .

$k_2 \notin i_P(x) \cap \bar{k}$, assim como k_4 , implica $k_2 \in i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) \iff k_1 \notin i_P^2(x)$.

Desta forma, $i_P^2(x) \cap \bar{k} = \chi_1 k_1 + \chi_2 k_2 + \chi_3 k_3 + \chi_4 k_4$ implica $i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) \cap \bar{k} = \chi_1 k_1 + (1 + \chi_2)k_2 + \chi_3 k_3 + (1 + \chi_4)k_4$. Assim, $i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x) = (i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x)) \cap \bar{k} = k_2 + k_4 \equiv \{k_2, k_4\} = i_P(x) \cap \bar{k} + \bar{k}$.

■

Proposição 5.17 *Os seguintes pares têm a mesma paridade*

- $|i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_2)|$ e $|i_P(k_1) \cap i_P(k_2)|$
- $|i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_3)|$ e $|i_P(k_2) \cap i_P(k_4)|$
- $|i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_4)|$ e $|i_P(k_2) \cap i_P(k_3)|$
- $|i_{\times_{\bar{k}}P}(k_2) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_3)|$ e $|i_P(k_1) \cap i_P(k_4)|$
- $|i_{\times_{\bar{k}}P}(k_2) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_4)|$ e $|i_P(k_1) \cap i_P(k_3)|$
- $|i_{\times_{\bar{k}}P}(k_3) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_4)|$ e $|i_P(k_3) \cap i_P(k_4)|$

Demonstração: A demonstração é imediata. Por exemplo, para o primeiro par, temos, se $i_P(k_1) \cap \bar{k} = \{k_2\}$:

$$\begin{aligned}
 i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_2) &= (i_P(k_2) + \{k_1, k_3\}) \cap (i_P(k_1) + \{k_2, k_3\}) \\
 &= i_P(k_2) \cap i_P(k_1) + i_P(k_1) \cap \{k_1, k_3\} + i_P(k_2) \cap \{k_2, k_3\} + \{k_2, k_3\} \cap \{k_1, k_3\} \\
 &= i_P(k_2) \cap i_P(k_1) + \{k_3\} + \emptyset + \{k_3\} \\
 &= i_P(k_2) \cap i_P(k_1)
 \end{aligned}$$

Em todos os casos, usamos os resultados das Proposições 4.2 e 4.6. ■

Proposição 5.18 $(i_{\times_{\bar{k}}P}^2(k_1) + i_P^2(k_2)) \cap \bar{k} = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } k_1 \text{ é ímpar} \\ \bar{k}, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Demonstração: Se $i_P^2(k_2) \cap \bar{k} = \chi_1 k_1 + \chi_2 k_2 + \chi_3 k_3 + \chi_4 k_4$ então, pela Proposição 5.17, $i_P(k_2) \cap \bar{k} = \chi_2 k_1 + \chi_1 k_2 + \chi_4 k_3 + \chi_3 k_4$ onde $\chi_i = \begin{cases} 0, & \text{se } k_i \notin i_P^2(k_1) \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Desta forma $(i_{\times_{\bar{k}}P}^2(k_1) + i_P(k_2)) \cap \bar{k} = (\chi_1 + \chi_2)k_1 + (\chi_1 + \chi_2)k_2 + (\chi_3 + \chi_4)k_3 + (\chi_3 + \chi_4)k_4$.

Pela Proposição 5.6 teremos $\chi_1 + \chi_2 = \chi_3 + \chi_4 = \begin{cases} 0 & \text{se } k_1 \text{ for ímpar} \\ 1 & \text{do contrário} \end{cases}$ e segue o resultado. ■

A técnica de prova da proposição anterior implica também nos três resultados seguintes:

Proposição 5.19 $(i_{\times_{\bar{k}}P}^2(k_2) + i_P^2(k_1)) \cap \bar{k} = \begin{cases} \bar{k} & \text{se } k_1 \text{ for ímpar } \bar{k} \\ \emptyset & \text{do contrário.} \end{cases}$

■

Proposição 5.20 $(i_{\times_{\bar{k}}P}^2(k_3) + i_P^2(k_4)) \cap \bar{k} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } k_1 \text{ for ímpar} \\ \bar{k} & \text{do contrário.} \end{cases}$

■

Proposição 5.21 $(i_{\times_{\bar{k}}P}^2(k_4) + i_P^2(k_3)) \cap \bar{k} = \begin{cases} \bar{k} & \text{se } k_1 \text{ for ímpar} \\ \emptyset & \text{do contrário.} \end{cases}$

■

Proposição 5.22

$$\begin{aligned} (i_{\times_{\bar{k}}P}^2(k_1) \setminus \bar{k}) + (i_P^2(k_2) \setminus \bar{k}) &= (i_{\times_{\bar{k}}P}^2(k_2) \setminus \bar{k}) + (i_P^2(k_1) \setminus \bar{k}) \\ &= (i_{\times_{\bar{k}}P}^2(k_3) \setminus \bar{k}) + (i_P^2(k_4) \setminus \bar{k}) \\ &= (i_{\times_{\bar{k}}P}^2(k_4) \setminus \bar{k}) + (i_P^2(k_3) \setminus \bar{k}) \\ &= \sum_{\substack{\bar{y} \neq \bar{k} \\ \bar{y} \propto \bar{k}}} \bar{y}. \end{aligned}$$

Demonstração: É imediato notar que

$$\begin{aligned} (i_{\times_{\bar{k}}P}^2(k_1) \setminus \bar{k}) + (i_P^2(k_2) \setminus \bar{k}) &= \sum_{\substack{\bar{y} \neq \bar{k} \\ \bar{y} \not\propto \bar{k}}} ((i_{\times_{\bar{k}}P}^2(k_1) \setminus \bar{k}) + (i_P^2(k_2) \setminus \bar{k})) \cap \bar{y} \\ &+ \sum_{\substack{\bar{y} \neq \bar{k} \\ \bar{y} \propto \bar{k}}} ((i_{\times_{\bar{k}}P}^2(k_1) \setminus \bar{k}) + (i_P^2(k_2) \setminus \bar{k})) \cap \bar{y} \end{aligned}$$

Cada termo no primeiro somatório é vazio pois, para $\bar{y} \not\propto \bar{k}$ a paridade de $|i_{\times_{\bar{k}}P}(y) \cap i_{\times_{\bar{k}}P}(k_1)|$ é a mesma de $|i_P(y) \cap i_P(k_2)|$ (conforme a Proposição 5.12). Mais ainda, pela mesma proposição, cada termo no segundo somatório é igual a $\bar{y}$ e o resultado segue.

Os demais casos, são demonstrados similarmente. ■

Proposição 5.23 $|i_{\rightleftharpoons_{\bar{k}}P}(k_i) \cap i_{\rightleftharpoons_{\bar{k}}P}(k_j)|$ e $|i_P(k_i) \cap i_P(k_j)|$ têm a mesma paridade se, e somente se, $|i_P(k_i)|$ e $|i_P(k_j)|$ têm paridades opostas.

Demonstração: Segue diretamente das Proposições 4.2 e 4.8. Por exemplo, se $k_i = k_1$ e $k_j = k_2$, para qualquer tipo de configuração P teremos:

$$\begin{aligned}
 i_{\bar{k}P}(k_1) \cap i_{\bar{k}P}(k_2) &= (i_P(k_1) + \{k_4\}) \cap (i_P(k_2) + \{k_3\}) \\
 &= i_P(k_1) \cap i_P(k_2) + i_P(k_1) \cap \{k_3\} + i_P(k_2) \cap \{k_4\} + \{k_4\} \cap \{k_3\} \\
 &= i_P(k_1) \cap i_P(k_2) + \emptyset + \emptyset + \emptyset \\
 &= i_P(k_1) \cap i_P(k_2)
 \end{aligned}$$

■

Proposição 5.24

$$\begin{aligned}
 i_{\bar{k}P}^2(k_1) \cap \bar{k} &+ i_P^2(k_1) \cap \bar{k} &= \{k_1, k_3\} \\
 i_{\bar{k}P}^2(k_2) \cap \bar{k} &+ i_P^2(k_2) \cap \bar{k} &= \{k_2, k_4\} \\
 i_{\bar{k}P}^2(k_3) \cap \bar{k} &+ i_P^2(k_3) \cap \bar{k} &= \{k_1, k_3\} \\
 i_{\bar{k}P}^2(k_4) \cap \bar{k} &+ i_P^2(k_4) \cap \bar{k} &= \{k_2, k_4\}
 \end{aligned}$$

Demonstração: Segue da Proposição 5.23.

■

Capítulo 6

Efeito das Ações Sobre a Função b_P

6.1 Introdução

Neste capítulo, utilizando os resultados demonstrados nos Capítulos 4 e 5, demonstramos as Proposições 3.6, 3.7 e 3.8.

No próximo capítulo, estas proposições são utilizados na demonstração do Teorema de Caracterização dos códigos projetivos não 2-coloráveis

6.2 Ações em $\mathcal{P}$: Efeitos Sobre a Função S_x

A função S_x

Definimos, dado A subconjunto de símbolos de um código $P \in \mathcal{P}$, e x símbolo de P , o conjunto $S_x^P(A)$ como o subconjunto dos símbolos de A de mesma paridade que x , i.e., $S_x^P(A)$

$$S_x^P(A) = \{y \in A : |i_P(x)| \stackrel{2}{=} |i_P(y)|\}$$

Proposição 6.1 Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ então $S_x^{\times \bar{k}P}(i_{\times \bar{k}P}(x)) + S_x^P(i_P(x))$, $S_x^{\uparrow \bar{k}P}(i_{\times \bar{k}P}(x)) + S_x^P(i_P(x))$ e $S_x^{\leftrightarrow \bar{k}P}(i_{\times \bar{k}P}(x)) + S_x^P(i_P(x))$ são subconjuntos de $\bar{k}$.

Demonstração: Qualquer ação em P altera a função $i_P(x)$ pela união com $\emptyset$ ou $\bar{k}$ e, eventualmente, pela alteração na paridade em $\bar{k}$.

Assim, se $y \notin \bar{k}$, então $y \in S_x^{\times \bar{k}P}(i_{\times \bar{k}P}(x)) \iff y \in S_x^P(i_P(x))$. Argumentos semelhantes valem para $S_x^{\uparrow \bar{k}P}$ e $S_x^{\leftrightarrow \bar{k}P}$. ■

Proposição 6.2 Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ então $S_x^{\times \bar{k}P}(i_{\times \bar{k}P}(x)) + S_x^P(i_P(x))$ é igual a exatamente uma das seguintes alternativas:

- $i_P(x) \cap \bar{k}$, se $i_P(x) \cap \bar{k} \in \{\emptyset, \{k_1, k_2\}, \{k_3, k_4\}\}$.
- $\emptyset$ se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_3\}$ e, também, $|i_P(k_1)|$ e $|i_P(x)|$ têm paridades diferentes, ou se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_2, k_4\}$ e tanto $|i_P(k_1)|$ quanto $|i_P(x)|$ têm a mesma paridade.
- $\bar{k}$ se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_3\}$ e, também, $|i_P(k_1)|$ e $|i_P(x)|$ têm a mesma paridade, ou se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_2, k_4\}$ e tanto $|i_P(k_1)|$ quanto $|i_P(x)|$ têm paridades diferentes.

- $\{k_1, k_2\}$ se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_4\}$ e, também, $|i_P(k_1)|$ e $|i_P(x)|$ têm a mesma paridade, ou se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_2, k_3\}$ e, também, $|i_P(k_1)|$ e $|i_P(x)|$ têm paridades diferentes.
- $\{k_3, k_4\}$ se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_4\}$ e, também, $|i_P(k_1)|$ e $|i_P(x)|$ têm paridades diferentes ou se $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_2, k_3\}$ e, também $|i_P(k_1)|$ e $|i_P(x)|$ têm a mesma paridade.

Demonstração:

Notando que a ação cruzada muda as paridades dos elementos de $\bar{k}$, a seguinte tabela demonstra a proposição:

Paridade de x	$i_P(x) \cap \bar{k}$	$i_{\times_{\bar{k}} P}(x) \cap \bar{k}$	subconjunto par de $\bar{k}$ em P	subconjunto par de $\bar{k}$ em $\times_{\bar{k}} P$	$S_x^P(i_P(x) \cap \bar{k})$	$S_x^{\times_{\bar{k}} P}(i_{\times_{\bar{k}} P}(x) \cap \bar{k})$
qualquer	$\emptyset$	$\emptyset$	qualquer	qualquer	$\emptyset$	$\emptyset$
par	$\{k_1, k_2\}$	$\{k_1, k_2\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1\}$	$\{k_2\}$
par	$\{k_1, k_2\}$	$\{k_1, k_2\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2\}$	$\{k_2\}$
ímpar	$\{k_1, k_2\}$	$\{k_1, k_2\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_2\}$	$\{k_1\}$
ímpar	$\{k_1, k_2\}$	$\{k_1, k_2\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_1\}$	$\{k_2\}$
par	$\{k_3, k_4\}$	$\{k_3, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_3\}$	$\{k_4\}$
par	$\{k_3, k_4\}$	$\{k_3, k_4\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_4\}$	$\{k_3\}$
ímpar	$\{k_3, k_4\}$	$\{k_3, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_4\}$	$\{k_3\}$
ímpar	$\{k_3, k_4\}$	$\{k_3, k_4\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_3\}$	$\{k_4\}$
par	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$
par	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
ímpar	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
ímpar	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$
par	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
par	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$
ímpar	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$
ímpar	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
par	$\{k_1, k_4\}$	$\{k_2, k_3\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1\}$	$\{k_2\}$
par	$\{k_1, k_4\}$	$\{k_2, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_4\}$	$\{k_3\}$
ímpar	$\{k_1, k_4\}$	$\{k_2, k_3\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_4\}$	$\{k_3\}$
ímpar	$\{k_1, k_4\}$	$\{k_2, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_1\}$	$\{k_2\}$
par	$\{k_2, k_3\}$	$\{k_1, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_3\}$	$\{k_4\}$
par	$\{k_2, k_3\}$	$\{k_1, k_4\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2\}$	$\{k_1\}$
ímpar	$\{k_2, k_3\}$	$\{k_1, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_2\}$	$\{k_1\}$
ímpar	$\{k_2, k_3\}$	$\{k_1, k_4\}$	$\{k_2, k_4\}$	$\{k_1, k_3\}$	$\{k_3\}$	$\{k_4\}$

■

Proposição 6.3 Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ então

$$S_x^{\rightleftharpoons \bar{k} P}(i_{\rightleftharpoons \bar{k} P}(x)) + S_x^P(i_P(x)) = i_P(x) \cap \bar{k}$$

Demonstração: Pela Proposição 6.1, $S_x^{\rightleftharpoons \bar{k} P}(i_{\rightleftharpoons \bar{k} P}(x)) + S_x^P(i_P(x)) = S_x^{\rightleftharpoons \bar{k} P}(i_{\rightleftharpoons \bar{k} P}(x)) \cap \bar{k} + S_x^P(i_P(x)) \cap \bar{k}$. Como $i_{\rightleftharpoons \bar{k} P}(x) = i_P(x)$ e a ação horizontal muda as paridades em $\bar{k}$, temos:

caso 1: $i_P(x) \cap \bar{k} = \emptyset$ $S_x^{\rightleftharpoons \bar{k} P}(i_{\rightleftharpoons \bar{k} P}(x)) + S_x^P(i_P(x)) = S_x^{\rightleftharpoons \bar{k} P}(i_{\rightleftharpoons \bar{k} P}(x) \cap \bar{k}) + S_x^P(i_P(x) \cap \bar{k}) = S_x^{\rightleftharpoons \bar{k} P}(i_{\rightleftharpoons \bar{k} P}(x) \cap \bar{k}) + S_x^P(i_P(x) \cap \bar{k}) = S_x^{\rightleftharpoons \bar{k} P}(\emptyset) + S_x^P(\emptyset) = \emptyset$

caso 2: $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_3\}$ $S_x^{\leftrightarrow \bar{k}P}(i_{\leftrightarrow \bar{k}P}(x)) + S_x^P(i_P(x)) = S_x^{\leftrightarrow \bar{k}P}(\{k_1, k_3\}) + S_x^P(\{k_1, k_3\}) = \emptyset + \{k_1, k_3\} = \{k_1, k_3\}$

Nota: k_1 e k_3 têm a mesma paridade. A paridade dos elementos de $\bar{k}$ muda pela aplicação da ação horizontal. Se $S_x^P(\{k_1, k_3\}) = \{k_1, k_3\}$, então $S_x^{\leftrightarrow \bar{k}P}(\{k_1, k_3\}) = \emptyset$ e se $S_x^P(\{k_1, k_3\}) = \emptyset$, então $S_x^{\leftrightarrow \bar{k}P}(\{k_1, k_3\}) = \{k_1, k_3\}$. Isto explica as igualdades anteriores.

caso 3: $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_2\}$ $S_x^{\leftrightarrow \bar{k}P}(i_{\leftrightarrow \bar{k}P}(x)) + S_x^P(i_P(x)) = S_x^{\leftrightarrow \bar{k}P}(\{k_1, k_2\}) + S_x^P(\{k_1, k_2\}) = \{k_1\} + \{k_2\} = \{k_1, k_2\}$

Nota: k_1 e k_3 têm paridades opostas. A paridade dos elementos de $\bar{k}$ muda pela aplicação da ação horizontal. Se $S_x^P(\{k_1, k_2\}) = \{k_1\}$, então $S_x^{\leftrightarrow \bar{k}P}(\{k_1, k_2\}) = \{k_2\}$ e se $S_x^P(\{k_1, k_2\}) = \{k_2\}$, então $S_x^{\leftrightarrow \bar{k}P}(\{k_1, k_2\}) = \{k_1\}$. Isto explica as igualdades anteriores.

Os demais casos são de demonstração análoga. ■

Proposição 6.4

$$\begin{aligned} S_{k_1}^{\times \bar{k}P}(i_{\times \bar{k}P}(k_1)) + S_{k_2}^P(i_P(k_2)) &= \emptyset \\ S_{k_2}^{\times \bar{k}P}(i_{\times \bar{k}P}(k_2)) + S_{k_1}^P(i_P(k_1)) &= \emptyset \\ S_{k_3}^{\times \bar{k}P}(i_{\times \bar{k}P}(k_3)) + S_{k_4}^P(i_P(k_4)) &= \emptyset \\ S_{k_4}^{\times \bar{k}P}(i_{\times \bar{k}P}(k_4)) + S_{k_3}^P(i_P(k_3)) &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{k_1}^{\leftrightarrow \bar{k}P}(i_{\leftrightarrow \bar{k}P}(k_1)) + S_{k_1}^P(i_P(k_1)) &= \emptyset \\ S_{k_2}^{\leftrightarrow \bar{k}P}(i_{\leftrightarrow \bar{k}P}(k_2)) + S_{k_2}^P(i_P(k_2)) &= \emptyset \\ S_{k_3}^{\leftrightarrow \bar{k}P}(i_{\leftrightarrow \bar{k}P}(k_3)) + S_{k_3}^P(i_P(k_3)) &= \emptyset \\ S_{k_4}^{\leftrightarrow \bar{k}P}(i_{\leftrightarrow \bar{k}P}(k_4)) + S_{k_4}^P(i_P(k_4)) &= \emptyset \end{aligned}$$

Demonstração: Pelas Proposições 4.1, 4.6 e 4.8, temos que $i_P(k_i) \cap \bar{k}$, $i_{\times \bar{k}P}(k_i) \cap \bar{k}$ e $i_{\leftrightarrow \bar{k}P}(k_i) \cap \bar{k}$ não interceptam com $\bar{k}$ em elementos de paridade igual a paridade de k_i , assim $S_{k_i}^P(i_P(k_i)) \cap \bar{k}$, $S_{k_i}^{\times \bar{k}P}(i_{\times \bar{k}P}(k_i)) \cap \bar{k}$ e $S_{k_i}^{\leftrightarrow \bar{k}P}(i_{\leftrightarrow \bar{k}P}(k_i)) \cap \bar{k}$ são, todos, conjuntos vazios. O resultado segue da ação de $\bar{k}$ nos elementos de $i_P(k_i)$ ■

6.3 Demonstração das Proposições 3.6, 3.7 e 3.8

Nesta última seção, utilizando os resultados estabelecidos e demonstrados nas seções anteriores, obtemos o resultado da ação de uma classe sobre a função b . Os resultados seguintes constituem a base do algoritmo/teorema de classificação dos códigos projetivos 2-coloráveis demonstrados no próximo capítulo.

Recorde que definimos a função $b_P(x)$ com x símbolo de $P \in \mathcal{P}$, como o conjunto:

$$b_P(x) = i_P^2(x) + S_x^P(i_P(x))$$

Os resultados seguintes referem-se às relações entre $b_P(x)$, $b_{\times_{\bar{k}}P}(x)$, $b_{\mid \bar{k}}P(x)$ e $b_{\rightleftharpoons \bar{k}}P(x)$:

Proposição 6.5 (Proposição 3.6) *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ e x par, então*

$$b_{\times_{\bar{k}}P}(x) + b_P(x) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } \bar{x} \not\propto \bar{k} \\ \bar{k}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração: O resultado segue como aplicação das Proposições 6.2 e 5.14. Os seguintes casos são representativos das situações nas quais $\bar{x} \not\propto \bar{k}$ (caso 1) e $\bar{x} \propto \bar{k}$ (caso 2)

caso 1: $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_3\}$ Neste caso, se k_1 par, sabemos que $i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x) = \bar{k}$ e $S_x^{\times_{\bar{k}}P}(i_{\times_{\bar{k}}P}(x)) + S_x^P(i_P(x)) = \bar{k}$ (dado que x e k_1 são, ambos, pares). Assim $b_{\times_{\bar{k}}P}(x) + b_P(x) = (i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x)) + (S_x^{\times_{\bar{k}}P}(i_{\times_{\bar{k}}P}(x)) + S_x^P(i_P(x))) = \emptyset$

Se k_1 ímpar, temos que $i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x) = \emptyset$ e $S_x^{\times_{\bar{k}}P}(i_{\times_{\bar{k}}P}(x)) + S_x^P(i_P(x)) = \emptyset$ (dado x e k_1 têm paridades opostas). Desta forma, $b_{\times_{\bar{k}}P}(x) + b_P(x) = (i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x)) + (S_x^{\times_{\bar{k}}P}(i_{\times_{\bar{k}}P}(x)) + S_x^P(i_P(x))) = \emptyset$.

caso 2: $i_P(x) \cap \bar{k} = \{k_1, k_4\}$ Neste caso, se k_1 par, sabemos que $i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x) = \{k_3, k_4\}$ e $S_x^{\times_{\bar{k}}P}(i_{\times_{\bar{k}}P}(x)) + S_x^P(i_P(x)) = \{k_1, k_2\}$ (dado x e k_1 são, ambos, pares). Assim $b_{\times_{\bar{k}}P}(x) + b_P(x) = (i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x)) + (S_x^{\times_{\bar{k}}P}(i_{\times_{\bar{k}}P}(x)) + S_x^P(i_P(x))) = \bar{k}$.

Se k_1 ímpares, temos que $i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x) = \{k_1, k_2\}$ e $S_x^{\times_{\bar{k}}P}(i_{\times_{\bar{k}}P}(x)) + S_x^P(i_P(x)) = \{k_3, k_4\}$ (pois x e k_1 têm paridades opostas). Assim $b_{\times_{\bar{k}}P}(x) + b_P(x) = (i_{\times_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x)) + (S_x^{\times_{\bar{k}}P}(i_{\times_{\bar{k}}P}(x)) + S_x^P(i_P(x))) = \bar{k}$.

■

Proposição 6.6 *Se k_1 é ímpar, então valem as igualdades:*

$$\begin{aligned} b_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) + b_P(k_2) &= \sum_{\substack{\bar{y} \neq \bar{k} \\ \bar{y} \propto \bar{k}}} \bar{y} \\ b_{\times_{\bar{k}}P}(k_2) + b_P(k_1) &= \bar{k} + \sum_{\substack{\bar{y} \neq \bar{k} \\ \bar{y} \propto \bar{k}}} \bar{y} \\ b_{\times_{\bar{k}}P}(k_3) + b_P(k_4) &= \sum_{\substack{\bar{y} \neq \bar{k} \\ \bar{y} \propto \bar{k}}} \bar{y} \\ b_{\times_{\bar{k}}P}(k_4) + b_P(k_3) &= \bar{k} + \sum_{\substack{\bar{y} \neq \bar{k} \\ \bar{y} \propto \bar{k}}} \bar{y} \end{aligned}$$

do contrário, se k_1 é par, então valem as igualdades:

$$\begin{aligned}
 b_{\times_{\bar{k}}P}(k_1) + b_P(k_2) &= \bar{k} + \sum_{\substack{\bar{y} \neq \bar{k} \\ \bar{y} \propto \bar{k}}} \bar{y} \\
 b_{\times_{\bar{k}}P}(k_2) + b_P(k_1) &= \sum_{\substack{\bar{y} \neq \bar{k} \\ \bar{y} \propto \bar{k}}} \bar{y} \\
 b_{\times_{\bar{k}}P}(k_3) + b_P(k_4) &= \bar{k} + \sum_{\substack{\bar{y} \neq \bar{k} \\ \bar{y} \propto \bar{k}}} \bar{y} \\
 b_{\times_{\bar{k}}P}(k_4) + b_P(k_3) &= \sum_{\substack{\bar{y} \neq \bar{k} \\ \bar{y} \propto \bar{k}}} \bar{y}
 \end{aligned}$$

Demonstração: Segue imediatamente das Proposições 5.18 até a 5.22 e Proposição 6.4. ■

Proposição 6.7 (Proposição 3.7) *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ então*

$$b_{\rightleftharpoons_{\bar{k}}P}(x) + b_P(x) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } i_P(x) \cap \bar{k} \in \{\emptyset, \{k_1, k_4\}, \{k_2, k_3\}\} \\ \bar{k}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração: Dadas as Proposições 5.16 e 6.3, temos que

$$\begin{aligned}
 b_{\rightleftharpoons_{\bar{k}}P}(x) + b_P(x) &= (i_{\rightleftharpoons_{\bar{k}}P}^2(x) + i_P^2(x)) + (S_x^{\rightleftharpoons_{\bar{k}}P}(i_{\rightleftharpoons_{\bar{k}}P}(x)) + S_x^P(i_P(x))) \\
 &= \begin{cases} i_P(x) \cap \bar{k} + i_P(x) \cap \bar{k}, & \text{se } i_P(x) \cap \bar{k} \in \{\emptyset, \{k_1, k_4\}, \{k_2, k_3\}\} \\ (i_P(x) \cap \bar{k} + \bar{k}) + i_P(x) \cap \bar{k}, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \emptyset, & \text{se } i_P(x) \cap \bar{k} \in \{\emptyset, \{k_1, k_4\}, \{k_2, k_3\}\} \\ \bar{k}, & \text{caso contrário.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

■

Proposição 6.8 (Proposição 3.8) *Se $\bar{x} \neq \bar{k}$ e x for par, então*

$$b_{|\downarrow_{\bar{k}}P}(x) + b_P(x) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } i_P(x) \cap \bar{k} \in \{\emptyset, \{k_1, k_2\}, \{k_3, k_4\}\} \\ \bar{k}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração: A prova segue da observação que a ação vertical equivale a ação horizontal seguida da ação cruzada. ■

Capítulo 7

Demonstrações dos Resultados Principais

7.1 Introdução

Neste capítulo, demonstraremos a boa definição do grafo $K_g(P)$ (Proposição 3.9) bem como justificamos o Teorema de Classificação (Teorema 3.1) o que finaliza o trabalho desenvolvido nesta tese.

7.2 Demonstração da Boa Definição de $K_g(P)$

Para mostrar que o grafo $K_g(P)$ está bem definido, temos de demonstrar a **Propriedade de não Separação**: dado y par em $P \in \mathcal{P}$, e $\bar{x} \neq \bar{y}$ então ou $\bar{x} \cap b_P(y) = \emptyset$ ou $\bar{x} \subseteq b_P(y)$. Esta propriedade foi enunciada anteriormente como a Proposição 3.9.

Proposição 7.1 *Se $x \in b_P(y)$ então $\tilde{x} \in b_P(y)$ onde $\tilde{x}$ é o elemento de mesma paridade de x em $\bar{x}$. Assim, as intersecções de uma classe com a imagem pela função b de um vértice ocorrem em pares de antípodas. Em consequência $|\bar{x} \cap b_P(y)| = 0, 2$ ou 4 .*

Demonstração

De fato $x \in b_P(y) \iff y \in b_P(x)$. Como $b_P(x) = b_P(\tilde{x})$ pelo Teorema 3.4 temos $y \in b_P(\tilde{x}) \iff \tilde{x} \in b_P(y)$. ■

Queremos então mostrar que, quanto y é par, a possibilidade $|\bar{x} \cap b_P(y)| = 2$ não ocorre.

Inicialmente, observe que se vale a propriedade de separação para um código $P \in \mathcal{P}$ então ela vale para todos os demais códigos de $\mathcal{P}$ uma vez que podemos recuperar todos os códigos de $\mathcal{P}$ a partir de P pela aplicação de sucessivas ações e que, pelas Proposições 3.6, 3.7 e 3.8, esta propriedade não é modificada pela ação dos mesmos. Desta forma, basta demonstrar a propriedade de separação para o código canônico P_0 , lembrando que, neste código, dada uma classe $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ temos que a paridade de x_i em P_0 é igual a paridade de seu sub-índice i .

Suponha então que $\bar{x} \cap b_P(y) \neq \emptyset$ com $P = P_0$. Temos dois casos a considerar

Caso 1: $\{x_1, x_3\} \subseteq b_P(y)$

Neste caso, pela Proposição 7.1, basta demonstrar que x_2 ou $x_4 \in b_P(y)$.

Como $x_1 \in b_P(y) = i_P^2(y) + S_y^P(i_P(y))$ e x_1 e y têm paridades opostas (logo $x_1 \notin S_y^P(i_P(y))$) segue que $x_1 \in i_P^2(y)$. O mesmo argumento conclui que $x_3 \in i_P^2(y)$.

Como x_1 é ímpar, temos, pelas Proposições 5.7 e 5.8 que $x_2 \in i_P^2(y)$ quando $i_P(y) \cap \bar{x} \in \{\{x_3, x_4\}, \{x_1, x_4\}, \{x_1, x_3\}\}$ e que $x_4 \in i_P^2(y)$ quando $i_P(y) \cap \bar{x} \in \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}\}$.

Mais ainda, quanto $i_P(y) \cap \bar{x} \in \{\{x_3, x_4\}, \{x_1, x_4\}, \{x_1, x_3\}\}$, temos que $x_2 \notin S_y^P(i_P(y))$ e quando $i_P(y) \cap \bar{x} \in \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}\}$ temos que $x_4 \notin S_y^P(i_P(y))$, o que conclui que, quando $i_P(y) \cap \bar{x} \in \{\{x_3, x_4\}, \{x_1, x_4\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}\}$ temos x_2 ou $x_4 \in b_P(y)$. Pelos argumentos anteriores, concluímos então que $\bar{x} \subseteq b_P(y)$.

Quanto as demais possibilidades para $i_P(y) \cap \bar{x}$, se $i_P(y) \cap \bar{x} = \emptyset$ então temos que $\bar{x} \cap b_P(y) = \emptyset$ pela Proposição 5.8 logo, como por hipótese $\bar{x} \cap b_P(y) \neq \emptyset$, resta apenas o caso $i_P(y) \cap \bar{x} = \{x_2, x_4\}$.

Se $i_P(y) \cap \bar{x} = \{x_2, x_4\}$, pela Proposição 5.8, segue que $x_2 \notin i_P^2(y)$ e que $x_4 \notin i_P^2(y)$, contudo, como y , x_2 e x_4 têm a mesma paridade, segue que $\{x_2, x_4\} \subseteq S_y^P(i_P(y))$ o que conclui mais uma vez que $\bar{x} \subseteq b_P(y)$.

Caso 2: $\{x_2, x_4\} \subseteq b_P(y)$

Neste caso, pela Proposição 7.1, basta demonstrar que x_1 ou $x_3 \in b_P(y)$.

Como $x_2 \in b_P(y) = i_P^2(y) + S_y^P(i_P(y))$ e x_2 e y têm a mesma paridade (logo $x_2 \in S_y^P(i_P(y))$) segue que $x_2 \notin i_P^2(y)$. O mesmo argumento conclui que $x_4 \notin i_P^2(y)$.

Como x_1 é ímpar, temos, pelas Proposições 5.7 e 5.8 que $x_1 \in i_P^2(y)$ quando $i_P(y) \cap \bar{x} \in \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}\}$ e que $x_3 \in i_P^2(y)$ quando $i_P(y) \cap \bar{x} \in \{\{x_3, x_4\}, \{x_1, x_4\}\}$.

Mais ainda, $x_1 \notin S_y^P(i_P(y))$ assim como $x_3 \notin S_y^P(i_P(y))$ pois as paridades de x_1 e y , assim como de x_3 e y , são diferentes. Desta forma, nos casos onde $i_P(y) \cap \bar{x} \in \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_4\}\}$ temos, pelos argumentos anteriores, que $\bar{x} \subseteq b_P(y)$.

Conforme discutido no caso anterior, $i_P(y) \cap \bar{x} \neq \emptyset$ logo resta apenas o caso no qual $i_P(y) \cap \bar{x} = \{x_1, x_3\}$ que também não pode ocorrer pois $x_2 \in S_y^P(i_P(y))$ por hipótese.

Uma vez que, em todos os casos anteriores, se $\bar{x} \cap b_P(y) \neq \emptyset$ temos $\bar{x} \subseteq b_P(y)$, concluímos que vale a propriedade de separação para o código $P = P_0$, e, portanto, para todos os códigos em $\mathcal{P}$, ou seja, demonstramos a Proposição 3.9:

Proposição 7.2 (Propriedade da não Separação) *Se $\bar{y} \neq \bar{x}$ e $y_e \in \bar{y}$ é símbolo par, então $\bar{x} \subseteq b_P(y_e)$ ou $\bar{x} \cap b_P(y_e) = \emptyset$.*

■

7.3 Prova do Teorema de Caracterização

Para demonstrarmos os Teoremas 3.1 e 3.2, estudaremos o efeito das ações em cada tipo (cor) de aresta. Na primeira seção, re-enunciamos com uma nova notação alguns dos resultados do capítulo 4 que são úteis em nossa análise.

Na seção seguinte, demonstramos as Proposições 3.10 e 3.11 enunciadas no capítulo 3.

Finalmente, na última seção, demonstramos o Teoremas 3.1 e 3.2 finalizando o trabalho desenvolvido nesta tese.

7.3.1 A classe $\bar{x}$

Seja, conforme a notação do Capítulo 3, $\bar{x} = \{x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, x_\delta\}$, onde x_α o primeiro elemento ímpar da classe $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ordenada pelos sub-índices. O antípoda de x_α , ou seja, o outro elemento ímpar em $\bar{x}$ é x_γ . Identicamente, o primeiro elemento par de $\bar{x}$ é x_β e a seu antípoda é x_δ . Denotamos $\bar{x}_{odd}$ o subconjunto $\{x_\alpha, x_\delta\}$ de $\bar{x}$ e $\bar{x}_{even}$ o subconjunto $\{x_\beta, x_\gamma\}$.

Dos resultados do Capítulo 4, destacamos, nesta notação, alguns resultados imediatos:

- $\bar{x} \not\propto \bar{y}$ se, e somente se, $i_P(y) \cap \bar{x} \in \{\emptyset, \bar{x}_{odd}, \bar{x}_{even}\}$
- Se $\bar{x} \propto \bar{y}$ então

$$\begin{aligned} i_P(y_\alpha) \cap \bar{x} &= i_P(y_\gamma) \cap \bar{x} + \bar{x} \\ i_P(y_\beta) \cap \bar{x} &= i_P(y_\delta) \cap \bar{x} + \bar{x} \end{aligned}$$

Mais ainda, ou $i_P(y_\alpha) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\beta\}$ (e, neste caso, $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \{x_\beta, x_\gamma\}$ ou $\{x_\alpha, x_\delta\}$) ou $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\beta\}$ (e, neste caso, $i_P(y_\alpha) \cap \bar{x} = \{x_\beta, x_\gamma\}$ ou $\{x_\alpha, x_\delta\}$)

- Se $\bar{x} \not\propto \bar{y}$ então

$$\begin{aligned} i_P(y_\alpha) \cap \bar{x} &= i_P(y_\gamma) \cap \bar{x} \\ i_P(y_\beta) \cap \bar{x} &= i_P(y_\delta) \cap \bar{x} \end{aligned}$$

Mais ainda, ou $i_P(y_\alpha) \cap \bar{x} \neq \emptyset$ ou $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} \neq \emptyset$

- O efeito das ações sobre a paridade dos elementos em $\bar{x}$ pode ser reescrita como

$$\bar{x} \neq \bar{y} \implies \begin{cases} \bar{x}_{odd}^P = \bar{x}_{odd}^{\times \bar{y}P} & \text{e} & \bar{x}_{even}^P = \bar{x}_{even}^{\times \bar{y}P} \\ \bar{x}_{odd}^P = \bar{x}_{odd}^{1|\bar{y}P} & \text{e} & \bar{x}_{even}^P = \bar{x}_{even}^{1|\bar{y}P} \\ \bar{x}_{odd}^P = \bar{x}_{odd}^{\rightrightarrows \bar{y}P} & \text{e} & \bar{x}_{even}^P = \bar{x}_{even}^{\rightrightarrows \bar{y}P} \end{cases}$$

Ou seja, uma ação em uma classe não afeta as paridades nas outras classes. Quanto ao efeito de uma ação em uma classe $\bar{x}$ nas paridades da própria classe, temos:

$$\begin{cases} \bar{x}_{odd}^{\times \bar{x}P} = \bar{x}_{even}^P \\ \bar{x}_{even}^{\times \bar{x}P} = \bar{x}_{odd}^P \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \bar{x}_{odd}^{\rightrightarrows \bar{x}P} = \bar{x}_{even}^P \\ \bar{x}_{even}^{\rightrightarrows \bar{x}P} = \bar{x}_{odd}^P \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \bar{x}_{odd}^{1|\bar{x}P} = \bar{x}_{odd}^P \\ \bar{x}_{even}^{1|\bar{x}P} = \bar{x}_{even}^P \end{cases}$$

Uma vez que apenas a ação vertical mantém as paridades em $\bar{x}$.

- Se $\bar{x} \neq \bar{y}$ então as ações horizontal e vertical em $\bar{x}$ afetam a intersecção $i_P(x) \cap \bar{y}$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} i_{1|\bar{x}P}(x_\alpha) \cap \bar{y} = i_{\rightrightarrows \bar{x}P}(x_\alpha) \cap \bar{y} = i_P(x_\beta) \cap \bar{y} \\ i_{1|\bar{x}P}(x_\beta) \cap \bar{y} = i_{\rightrightarrows \bar{x}P}(x_\beta) \cap \bar{y} = i_P(x_\alpha) \cap \bar{y} \\ i_{1|\bar{x}P}(x_\gamma) \cap \bar{y} = i_{\rightrightarrows \bar{x}P}(x_\gamma) \cap \bar{y} = i_P(x_\delta) \cap \bar{y} \\ i_{1|\bar{x}P}(x_\delta) \cap \bar{y} = i_{\rightrightarrows \bar{x}P}(x_\delta) \cap \bar{y} = i_P(x_\gamma) \cap \bar{y} \end{cases}$$

Enquanto que a ação cruzada não afeta tal intersecção, i.e.

$$\begin{cases} i_{\times \bar{x}P}(x_\alpha) \cap \bar{y} &= i_P(x_\alpha) \cap \bar{y} \\ i_{\times \bar{x}P}(x_\beta) \cap \bar{y} &= i_P(x_\beta) \cap \bar{y} \\ i_{\times \bar{x}P}(x_\gamma) \cap \bar{y} &= i_P(x_\gamma) \cap \bar{y} \\ i_{\times \bar{x}P}(x_\delta) \cap \bar{y} &= i_P(x_\delta) \cap \bar{y} \end{cases}$$

Onde o sobrescrito se refere ao código do qual tomamos as paridades.

7.3.2 Classes de Vértices e Tipos de Arestas em K_g

Para demonstrar os Teoremas 3.1 e 3.2, inicialmente observamos que, uma vez que as ações comutam e que os efeitos de um mesma ação duas vezes no mesmo vértice se anulam e que o efeito de duas ações diferentes em um mesmo vértice equivale a uma operação apenas da terceira ação (por exemplo, o efeito de uma ação vertical em um vértice seguida de uma ação cruzada no mesmo vértice, ou vice-versa, equivale ao efeito, naquele vértice, de uma ação horizontal), não há perda de generalidade em, dado um código P para o qual existe uma sequência, possivelmente desconhecida, de ações que, quando aplicadas aos vértices de P , forneçam um código projetivo P_0 , dividir os vértices de um código dado em classes conforme a ação que atua sobre o vértice. Diremos então que um vértice é nulo, cruzado, horizontal ou vertical conforme o tipo de ação, após feitas as simplificações, que atua sobre ele. Desta forma, dados os conjuntos dos vértices nulos, dos vértices verticais, dos vértices horizontais e dos vértices cruzados, queremos estudar que tipos de arestas podem aparecer entre eles. No capítulo 3, definimos a seguinte classificação das arestas de $K_g(P)$

- *Arestas não Entrelaçadas*

Aresta Tipo N1 São aquelas onde $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = i_P(x_\beta) \cap \bar{y} = \emptyset$. N1

Aresta Tipo N2 São aquelas onde $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \emptyset$ e $i_P(x_\beta) \cap \bar{y} = \{y_\alpha, y_\gamma\}$. As arestas N2
do tipo N2 são orientadas com início em $\bar{y}$ e fim em $\bar{x}$.

Aresta Tipo N3 São aquelas onde $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \{x_\beta, x_\delta\}$ e $i_P(x_\beta) \cap \bar{y} = \{y_\beta, y_\delta\}$. N3

- *Arestas Entrelaçadas*

Aresta Tipo E1 São aquelas onde $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\beta\}$ e $i_P(x_\beta) \cap \bar{y} = \{y_\alpha, y_\beta\}$. E1

Aresta Tipo E2 São aquelas onde $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\beta\}$ e $i_P(x_\beta) \cap \bar{y} = \{y_\beta, y_\gamma\}$. As E2
arestas do tipo E2 são orientadas com início em $\bar{y}$ e fim em $\bar{x}$.

Aresta Tipo E3 São aquelas onde $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\delta\}$ e $i_P(x_\beta) \cap \bar{y} = \{y_\alpha, y_\delta\}$. E3

Queremos mostrar que estes são *todos* os tipos possíveis de arestas em $K_g(P)$. De fato,

Proposição 7.3 (Proposição 3.10) *Seja $P \in \mathcal{P}$ e $(\bar{x}, \bar{y})$ aresta entre vértices não entrelaçados de P . Então $(\bar{x}, \bar{y})$ é do tipo N1 ou do tipo N2 ou do tipo N3*

Demonstração

Pelos resultados da seção 7.3.1, $\bar{x} \not\propto \bar{y} \iff i_P(y_\beta) \cap \bar{x} \in \{\emptyset, \bar{x}_{odd}, \bar{x}_{even}\}$.

Caso 1: $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \emptyset$

Se $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \emptyset$ então teremos, também, $i_P(y_\delta) \cap \bar{x} = \emptyset$. Neste caso, teremos duas possibilidades:

Caso 1a: $i_P(y_\alpha) \cap \bar{x} = i_P(y_\gamma) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\gamma\}$

Neste caso, $x_\alpha \in i_P(y_\alpha) \implies y_\alpha \in i_P(x_\alpha)$. Argumento idêntico

$$\begin{aligned} \text{conclui que } i_P(x_\alpha) \cap \bar{y} &= i_P(x_\gamma) \cap \bar{y} = \{y_\alpha, y_\gamma\} \\ i_P(x_\beta) \cap \bar{y} &= i_P(x_\delta) \cap \bar{y} = \emptyset \end{aligned}$$

E temos, portanto, uma aresta do tipo N1

Caso 1b: $i_P(y_\alpha) \cap \bar{x} = i_P(y_\gamma) \cap \bar{x} = \{x_\beta, x_\delta\}$

Neste caso, $x_\beta \in i_P(y_\alpha) \implies y_\alpha \in i_P(x_\beta)$. Argumento idêntico

$$\begin{aligned} \text{conclui que } i_P(x_\alpha) \cap \bar{y} &= i_P(x_\gamma) \cap \bar{y} = \emptyset \\ i_P(x_\beta) \cap \bar{y} &= i_P(x_\delta) \cap \bar{y} = \{y_\alpha, y_\gamma\} \end{aligned}$$

E temos, portanto, uma aresta do tipo N2 orientada de $\bar{y}$ para $\bar{x}$

Caso 2: $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \bar{x}_{odd} = \{x_\alpha, x_\gamma\}$

Se $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \bar{x}_{odd}$ então teremos, também, $i_P(y_\delta) \cap \bar{x} = \bar{x}_{odd}$ e $i_P(y_\alpha) \cap \bar{x} = i_P(y_\gamma) \cap \bar{x} = \emptyset$. Desta forma, teremos que

$$\begin{aligned} i_P(x_\alpha) \cap \bar{y} &= i_P(x_\gamma) \cap \bar{y} = \{y_\beta, y_\delta\} \\ i_P(x_\beta) \cap \bar{y} &= i_P(x_\delta) \cap \bar{y} = \emptyset \end{aligned}$$

E temos, portanto, uma aresta do tipo N2 orientada de $\bar{x}$ para $\bar{y}$

Caso 3: $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \bar{x}_{even} = \{x_\beta, x_\delta\}$

Se $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \bar{x}_{even}$ então teremos, também, $i_P(y_\delta) \cap \bar{x} = \bar{x}_{even}$ e $i_P(y_\alpha) \cap \bar{x} = i_P(y_\gamma) \cap \bar{x} = \emptyset$. Desta forma, teremos que

$$\begin{aligned} i_P(x_\alpha) \cap \bar{y} &= i_P(x_\gamma) \cap \bar{y} = \emptyset \\ i_P(x_\beta) \cap \bar{y} &= i_P(x_\delta) \cap \bar{y} = \{y_\beta, y_\delta\} \end{aligned}$$

E temos, portanto, uma aresta do tipo N3.

■

A Figura 7.1 ilustra as representações que utilizaremos para cada tipo de aresta não entrelaçada. Utilizando argumentos semelhantes, também podemos demonstrar que:

Proposição 7.4 (Proposição 3.11) *Seja $P \in \mathcal{P}$ e $(\bar{x}, \bar{y})$ aresta entre vértices entrelaçados de P . Então $(\bar{x}, \bar{y})$ é do tipo E1 ou do tipo E2 ou do tipo E3*

Demonstração

Pelos resultados da seção 7.3.1, $\bar{x} \propto \bar{y} \iff i_P(y_\beta) \cap \bar{x} \in \{\{x_\alpha, x_\beta\}, \{x_\beta, x_\gamma\}, \{x_\gamma, x_\delta\}, \{x_\alpha, x_\delta\}\}$, contudo, também sabemos que ou $i_P(y_\alpha) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\beta\}$ ou $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\beta\}$.

Temos, temos, portanto, os seguintes casos:

Caso 1: $i_P(y_\alpha) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\beta\}$

Temos duas seqüências possíveis para as intersecções dos elementos de $\bar{y}$:

$$\begin{aligned} \text{Caso 1a: } \begin{aligned} i_P(y_\alpha) \cap \bar{x} &= \{x_\alpha, x_\beta\} \\ i_P(y_\beta) \cap \bar{x} &= \{x_\beta, x_\gamma\} \\ i_P(y_\gamma) \cap \bar{x} &= \{x_\gamma, x_\delta\} \\ i_P(y_\delta) \cap \bar{x} &= \{x_\alpha, x_\delta\} \end{aligned} &\implies \begin{aligned} i_P(x_\alpha) \cap \bar{y} &= \{y_\alpha, y_\delta\} \\ i_P(x_\beta) \cap \bar{y} &= \{y_\alpha, y_\beta\} \\ i_P(x_\gamma) \cap \bar{y} &= \{y_\beta, y_\gamma\} \\ i_P(x_\delta) \cap \bar{y} &= \{y_\gamma, y_\delta\} \end{aligned} \end{aligned}$$

E temos uma aresta do tipo E2 orientada de $\bar{x}$ para $\bar{y}$.

$$\begin{aligned} \text{Caso 1b: } \begin{aligned} i_P(y_\alpha) \cap \bar{x} &= \{x_\alpha, x_\beta\} \\ i_P(y_\beta) \cap \bar{x} &= \{x_\alpha, x_\delta\} \\ i_P(y_\gamma) \cap \bar{x} &= \{x_\gamma, x_\delta\} \\ i_P(y_\delta) \cap \bar{x} &= \{x_\beta, x_\gamma\} \end{aligned} &\implies \begin{aligned} i_P(x_\alpha) \cap \bar{y} &= \{y_\alpha, y_\beta\} \\ i_P(x_\beta) \cap \bar{y} &= \{y_\alpha, y_\delta\} \\ i_P(x_\gamma) \cap \bar{y} &= \{y_\gamma, y_\delta\} \\ i_P(x_\delta) \cap \bar{y} &= \{y_\beta, y_\gamma\} \end{aligned} \end{aligned}$$

E temos uma aresta do tipo E3.

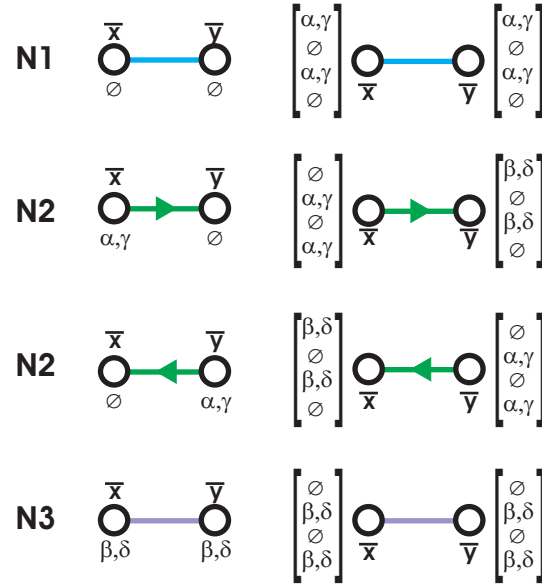


Figura 7.1: Tipos de Arestas não Entrelaçadas.

Na representação à esquerda, os subscritos referem-se a $i_P(y_\beta) \cap \bar{x}$ no vértice à esquerda ($\bar{x}$) e a $i_P(x_\beta) \cap \bar{y}$ no vértice à direita ($\bar{y}$), assim, por exemplo, para aresta N1, o subscrito $\emptyset$ no vértice à esquerda significa que $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \emptyset$.

Na representação à direita, de cima para baixo lê-se, seguindo a mesma notação de subscrito da representação à direita, os valores de $i_P(y_\alpha) \cap \bar{x}, i_P(y_\beta) \cap \bar{x}, i_P(y_\gamma) \cap \bar{x}$ e $i_P(y_\delta) \cap \bar{x}$ para o vértice $\bar{x}$ e os valores de $i_P(x_\alpha) \cap \bar{y}, i_P(x_\beta) \cap \bar{y}, i_P(x_\gamma) \cap \bar{y}$ e $i_P(x_\delta) \cap \bar{y}$ para o vértice $\bar{y}$. Desta forma, por exemplo, para aresta N3, a quarta linha do colchete relativo ao vértice $\bar{x}$ ter valor β, δ significa que $i_P(y_\delta) \cap \bar{x} = \{x_\beta, x_\delta\}$.

Caso 2: $i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\beta\}$

Temos duas seqüências possíveis para as intersecções dos elementos de $\bar{y}$:

$$\begin{array}{ll} \text{Caso 2a:} & \begin{array}{l} i_P(y_\alpha) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\delta\} \\ i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\beta\} \\ i_P(y_\gamma) \cap \bar{x} = \{x_\beta, x_\gamma\} \\ i_P(y_\delta) \cap \bar{x} = \{x_\gamma, x_\delta\} \end{array} \implies \begin{array}{l} i_P(x_\alpha) \cap \bar{y} = \{y_\alpha, y_\beta\} \\ i_P(x_\beta) \cap \bar{y} = \{y_\beta, y_\gamma\} \\ i_P(x_\gamma) \cap \bar{y} = \{y_\gamma, y_\delta\} \\ i_P(x_\delta) \cap \bar{y} = \{y_\alpha, y_\delta\} \end{array} \end{array}$$

E temos uma aresta do tipo E2 orientada de $\bar{y}$ para $\bar{x}$.

$$\begin{array}{ll} \text{Caso 2b:} & \begin{array}{l} i_P(y_\alpha) \cap \bar{x} = \{x_\beta, x_\gamma\} \\ i_P(y_\beta) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\beta\} \\ i_P(y_\gamma) \cap \bar{x} = \{x_\alpha, x_\delta\} \\ i_P(y_\delta) \cap \bar{x} = \{x_\gamma, x_\delta\} \end{array} \implies \begin{array}{l} i_P(x_\alpha) \cap \bar{y} = \{y_\beta, y_\gamma\} \\ i_P(x_\beta) \cap \bar{y} = \{y_\alpha, y_\beta\} \\ i_P(x_\gamma) \cap \bar{y} = \{y_\alpha, y_\delta\} \\ i_P(x_\delta) \cap \bar{y} = \{y_\gamma, y_\delta\} \end{array} \end{array}$$

E temos uma aresta do tipo E1.

■

A Figura 7.2 ilustra as representações que utilizamos para cada tipo de aresta entrelaçada.

Finalmente, definimos no capítulo 3 que uma aresta $(\bar{x}, \bar{y})$ é positiva quando $\bar{x} \cap b_P(y_\beta) = \emptyset$ e negativa quando $\bar{x} \subseteq b_P(y_\beta)$. Nas ilustrações, as arestas positivas são representadas por linhas pontilhadas enquanto que as negativas são representadas por linhas sólidas.

As Figuras 7.3 e 7.4 mostram como cada tipo de aresta é afetada pelas diferentes ações. A demonstração de cada um destes efeitos é realizada utilizando os resultados enunciados na seção 7.3.1. Por exemplo, a ação $\rightleftharpoons_{\bar{x}} P$ no vértice $\bar{x}$ da aresta $N1 = (\bar{x}, \bar{y})$ implica:

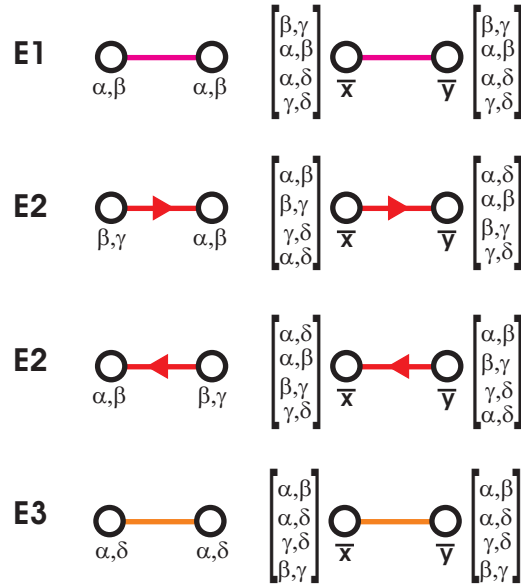


Figura 7.2: Tipos de Arestas Entrelaçadas.

As convenções de símbolos nas representações dos tipos de arestas são as mesmas da Figura 7.1

$$\begin{aligned}
 i_P(y_\alpha^P) \cap \bar{x} = \{x_\alpha^P, x_\gamma^P\} &\implies i_Q(y_\alpha^Q) \cap \bar{x} = \{x_\alpha^P, x_\gamma^P\} = \{x_\beta^Q, x_\delta^Q\} \\
 i_P(y_\beta^P) \cap \bar{x} = \emptyset &\implies i_Q(y_\beta^Q) \cap \bar{x} = \emptyset \\
 i_P(y_\gamma^P) \cap \bar{x} = \{x_\alpha^P, x_\gamma^P\} &\implies i_Q(y_\gamma^Q) \cap \bar{x} = \{x_\alpha^P, x_\gamma^P\} = \{x_\beta^Q, x_\delta^Q\} \\
 i_P(y_\delta^P) \cap \bar{x} = \emptyset &\implies i_Q(y_\delta^Q) \cap \bar{x} = \emptyset
 \end{aligned}$$

Onde $Q = \rightleftharpoons_{\bar{x}} P$ e utilizamos o fato das paridades em $\bar{x}$ serem trocadas pela ação horizontal em $\bar{x}$ e das paridades em $\bar{y}$ ficarem inalteradas assim como a intersecção $i_Q(y) \cap \bar{x}$. Utilizando a mesma notação, para o vértice $\bar{y}$, teremos:

$$\begin{aligned}
 i_P(x_\alpha^P) \cap \bar{y} = \{y_\alpha^P, y_\gamma^P\} &\implies i_Q(x_\beta^Q) \cap \bar{y} = \{y_\alpha^P, y_\gamma^P\} = \{y_\alpha^Q, y_\gamma^Q\} \\
 i_P(x_\beta^P) \cap \bar{y} = \emptyset &\implies i_Q(x_\alpha^Q) \cap \bar{y} = \emptyset \\
 i_P(x_\gamma^P) \cap \bar{y} = \{y_\alpha^P, y_\gamma^P\} &\implies i_Q(x_\delta^Q) \cap \bar{y} = \{y_\alpha^P, y_\gamma^P\} = \{y_\alpha^Q, y_\gamma^Q\} \\
 i_P(x_\delta^P) \cap \bar{y} = \emptyset &\implies i_Q(x_\gamma^Q) \cap \bar{y} = \emptyset
 \end{aligned}$$

As intersecções encontradas correspondem a sequência de intersecções de uma aresta do tipo N2 orientada de $\bar{y}$ para $\bar{x}$ conforme vimos na demonstração da Proposição 3.10. As demais ações ilustradas nas Figuras 7.3 e 7.4 são encontradas de forma análoga.

Utilizando os resultados ilustrados nas figuras, podemos encontrar o efeito de todas as possibilidades de ações nos vértices de cada tipo de aresta. Estes resultados são ilustrados nas Figuras 7.5 e 7.6. A mudança ou não de sinal nas arestas é determinada pelas Proposições 3.6, 3.7 e 3.8.

7.3.3 Prova do Teorema de Classificação

Nesta última seção, provamos o Teorema de Caracterização dos Códigos Projetivos não 2-Coloráveis (Teorema 3.1, reescrito e demonstrado no como o Teorema 7.1) assim como o teorema que fornece a caracterização dos conjuntos descritos no Teorema 3.1.

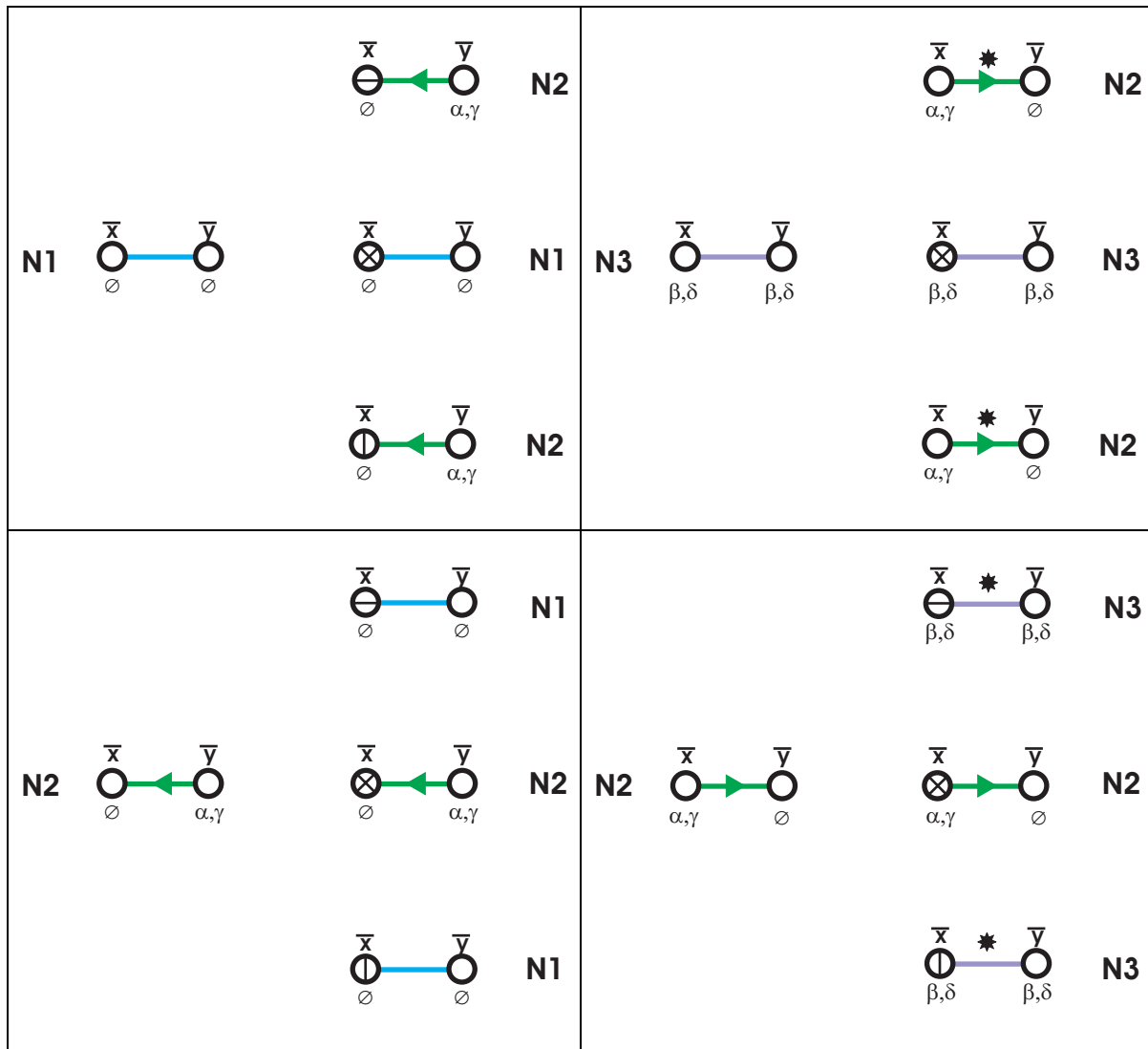


Figura 7.3: Efeito das Ações em Arestas do Tipo N1 a N3.

Em cada figura temos, à esquerda, a aresta original e à direita, de cima para baixo, como a aresta é modificada pelas ações horizontal, cruzada e vertical. As arestas que não estão marcadas por asterisco, não têm seu sinal, positivo ou negativo, alterado pela aplicação da ação enquanto que, nas arestas marcadas, ocorre, pela aplicação da ação, uma inversão de sinal.

Teorema 7.1 *Um código de Gauss $\mathbf{g}$ não 2-colorável é código projetivo se, e somente se, as cores das arestas em $K_{\mathbf{g}}(P_0)$ induzem uma partição nos vértices de $K_{\mathbf{g}}(P_0)$ em 4 conjuntos A, B, C e D (alguns dos quais podendo ser vazios), de tal forma que os sinais das arestas entre vértices de um mesmo conjunto e entre vértices de conjuntos diferentes se apresentem como na Figura 7.7.*

Mais ainda, aplicando ações cruzadas a todos os elementos de A , ações verticais a todos os elementos de B , ações horizontais a todos os elementos de C e não aplicando ação alguma nos elementos de D , obteremos um código P' correspondente a um lacet duplicado $\mathcal{L}$ de ℓ , lacet de $\mathbf{g}$ em $\mathbb{R}P^2$

Demonstração

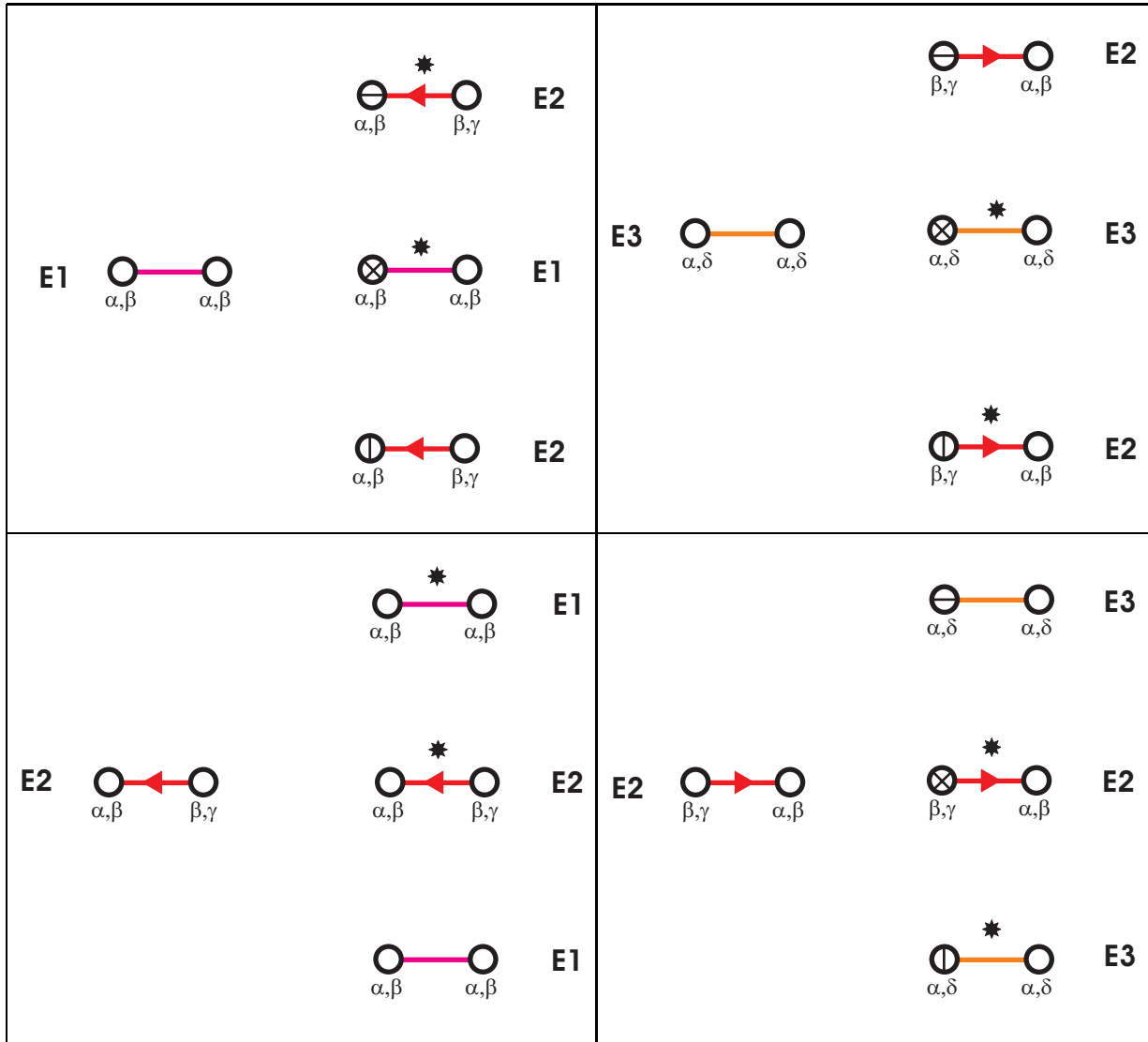


Figura 7.4: Efeito das Ações em Arestas do Tipo E1 a E3.
As convenções são as mesmas da figura anterior.

De posse das informações coletadas nas Figuras 7.5 e 7.6, a demonstração do teorema é trivial. De fato, se existe uma partição dos vértices de $K_{\mathbf{g}}(P_0)$ como indicada na figura acima, então, após a aplicação das ações prescritas pelo enunciado do teorema a todos os vértices de cada conjunto teremos apenas arestas positivas no código P assim obtido caracterizando que $\mathbf{g}$ é projetivo.

Por outro lado, se $\mathbf{g}$ é projetivo, dado $P_0 \in \mathcal{P}$, existe uma sequência de ações que, quando aplicadas em P_0 fornecem um código P de tal forma que o grafo $K_{\mathbf{g}}(P)$ somente possui arestas positivas. Notando que cada ação é uma involução, que duas ações quaisquer comutam e que a aplicação de duas ações diferentes a um mesmo vértice equivale a aplicação do terceiro tipo de ação (por exemplo, a aplicação das ações horizontal e cruzada em um dado vértice equivale a uma única aplicação, naquele vértice, de uma ação horizontal), os vértices de P estão divididos em 4 conjuntos:

Conjunto A , formado pelos vértices cujo efeito líquido da seqüência de ações que, aplicadas a P_0 , fornecem o código P é uma ação cruzada.

Conjunto B , formado pelos vértices cujo efeito líquido da seqüência de ações que, aplicadas a P_0 , fornecem o código P é uma ação vertical.

Conjunto C , formado pelos vértices cujo efeito líquido da seqüência de ações que, aplicadas a P_0 , fornecem o código P é uma ação horizontal.

Conjunto D , formado pelos vértices cujo efeito líquido da seqüência de ações que, aplicadas a P_0 , fornecem o código P é nulo, ou seja, nenhuma ação atua sobre o vértice.

Utilizando as informações das Figuras 7.5 e 7.6, concluímos, uma vez que o grafo $K_g(P)$ só possui arestas positivas, que a distribuição das arestas entre os diversos conjuntos acima definidos é exatamente a indicada no enunciado do teorema o que finaliza a sua prova. ■

A demonstração do próximo teorema, enunciado anteriormente como Teorema 3.2, finaliza o trabalho desenvolvido nesta tese.

Teorema 7.2 *Um código de Gauss $\mathbf{g}$ não 2-colorável é código projetivo quando as arestas do tipo N2 negativas induzem uma partição dos vértices de $K_g(P_0)$ em dois conjuntos X e Y , que podem ser vazios, de tal forma que as arestas do tipo N em $K_g(P_0)$ distribuem-se como na Figura 7.8 e, neste caso, aplicando ações horizontais a cada vértice em X , obtemos um grafo bipartido na arestas de tipo E negativas em dois conjuntos Z e W .*

Nestas condições, aplicando ações cruzadas em cada vértice de Z obtemos um código P' correspondente a um lacet duplicado $\mathcal{L}$ de ℓ , lacet de $\mathbf{g}$ em $\mathbb{R}P^2$. A partição definida no Teorema 3.1 é dada por $A = Z - X$, $B = Z \cap X$, $C = X - Z$ e $D = Y \cap W$.

Se um código de Gauss $\mathbf{g}$ não 2-colorável não é código projetivo então existe, no grafo obtido contraindo as arestas do tipo N1 negativas e do tipo N3 positivas, uma das seguintes estruturas:

- *Um vértice que não é nem fonte nem sorvedouro para arestas do tipo N2 negativas.*
- *Uma aresta do tipo N1 negativa ligando dois vértices fonte de arestas do tipo N2 negativas.*
- *Uma aresta do tipo N3 positiva ligando dois vértices sorvedouro de arestas do tipo N2 negativas.*

Demonstração

Inicialmente, observe que um código $P \in \mathcal{P}(\mathbf{g})$ pode ser levado a um código $P' \in \mathcal{P}(\mathbf{g})$ de tal forma que $K_g(P')$ consista apenas de arestas positivas por uma seqüência consistindo apenas de ações cruzadas se, e somente se, $K_g(P)$ for tal que todas suas arestas negativas são entrelaçadas e existe uma cofronteira para estas arestas negativas, ou seja, existe um subconjunto Z de vértices de $K_g(P)$ de tal maneira que o conjunto das arestas entrelaçadas do corte $E(Z, \bar{Z})$ é igual ao conjunto das arestas negativas (e, portanto, entrelaçadas) de $K_g(P)$.

De fato, se existe tal conjunto Z , uma vez que o efeito de uma ação cruzada em um único vértice adjacente uma aresta entrelaçada apenas muda o seu sinal e em uma aresta não entrelaçada não tem efeito algum, aplicando ações cruzadas a todos os vértices em Z (o que fornece um código P' , as arestas do corte $E(Z, \bar{Z})$ que são

entrelaçadas ficam todas positivas e que são não-entrelaçadas (e, portanto, positivas) não sofrem alteração de sinal e/ou tipo. Quanto as arestas adjacentes a dois vértices de Z forem entrelaçadas, sofrem duas mudanças de sinal logo o efeito líquido é nulo e se forem não entrelaçadas também não são modificadas uma vez que as ações cruzadas não atuam sobre elas. Uma vez que tais arestas são todas positivas, concluímos que o grafo $K_{\mathbf{g}}(P')$ somente consiste de arestas positivas.

Por outro lado, se um código $P \in \mathcal{P}(\mathbf{g})$ pode ser levado a um código $P' \in \mathcal{P}(\mathbf{g})$ por uma seqüência consistindo apenas de ações cruzadas de tal forma que $K_{\mathbf{g}}(P')$ consista apenas de arestas positivas então, definindo Z como o conjunto dos vértices nos quais atuou um único ação cruzado temos que as arestas não entrelaçadas (todas positivas) de $K_{\mathbf{g}}(P')$ não são modificadas, ou seja, todas as arestas não entrelaçadas de $K_{\mathbf{g}}(P)$ são, também, positivas e, para as arestas entrelaçadas entre vértices de $K_{\mathbf{g}}(P')$, seu tipo não é modificado pela aplicação de ações cruzadas logo estas serão de mesmo tipo em $K_{\mathbf{g}}(P)$. O sinal é alterado para cada aplicação de uma ação cruzada em um vértice adjacente a uma aresta entrelaçada logo as arestas entrelaçadas entre vértices de Z ou de $\bar{Z}$, que são todas positivas em $K_{\mathbf{g}}(P')$, continuam positivas em $K_{\mathbf{g}}(P)$ e entre um vértice de Z e outro de $\bar{Z}$ passam de positivas em $K_{\mathbf{g}}(P')$ para negativas em $K_{\mathbf{g}}(P)$ demonstrando a afirmação.

Agora, note que $\mathbf{g}$ é projetivo se, e somente se, existe uma seqüência de ações que, aplicadas a $P_0 \in \mathcal{P}$ fornecem um código $P' \in \mathcal{P}$ de tal forma que $K_{\mathbf{g}}(P')$ consista apenas de arestas positivas. Tomando apenas o efeito líquido da aplicação das ações nos vértices de $K_{\mathbf{g}}(P_0)$, podemos, utilizando a comutatividade das ações, dividir tal seqüência em duas partes, uma das quais contendo todas as ações cruzadas e a outra contendo todas as ações restantes. Pelo exposto acima $\mathbf{g}$ é projetivo se, e somente se, o grafo $K_{\mathbf{g}}(P_0)$ pode ser obtido de um grafo $K_{\mathbf{g}}(P'')$ de tal forma que todas as arestas negativas são entrelaçadas e que existe uma cofronteira Z para as arestas negativas. Utilizando as informações das Figuras 7.5 e 7.6, concluímos que, aplicando ações verticais e/ou horizontais a um grafo onde todas as arestas não entrelaçadas são negativas e chamando de X ao conjunto dos vértices nos quais aplicamos tais ações, teremos uma situação para as arestas não entrelaçadas como aquela ilustrada no enunciado do Teorema o que prova a necessidade da condição do enunciado.

Quanto a suficiência, apesar de X ser obtido aplicando ações horizontais e ações verticais, se aplicarmos ações horizontais (ou verticais) a todos os vértices em X , obteremos, pelo Teorema 3.1, um grafo em que todas suas arestas negativas são entrelaçadas e existe uma cofronteira para estas arestas negativas (ver Figura 7.9 e que, portanto pode ser reduzido a um grafo com todas as arestas positivas por uma seqüência de ações cruzadas conforme acima demonstrado o que finaliza a prova do Teorema.

As expressões para os conjuntos A, B, C e D se justificam porque a aplicação de duas ações diferentes em um mesmo vértice têm como efeito líquido uma só ação do terceiro tipo.

Quanto as condições que impedem que um código seja projetivo, basta verificar que elas são necessárias e suficientes para obter uma configuração violando a primeira parte do teorema.

■

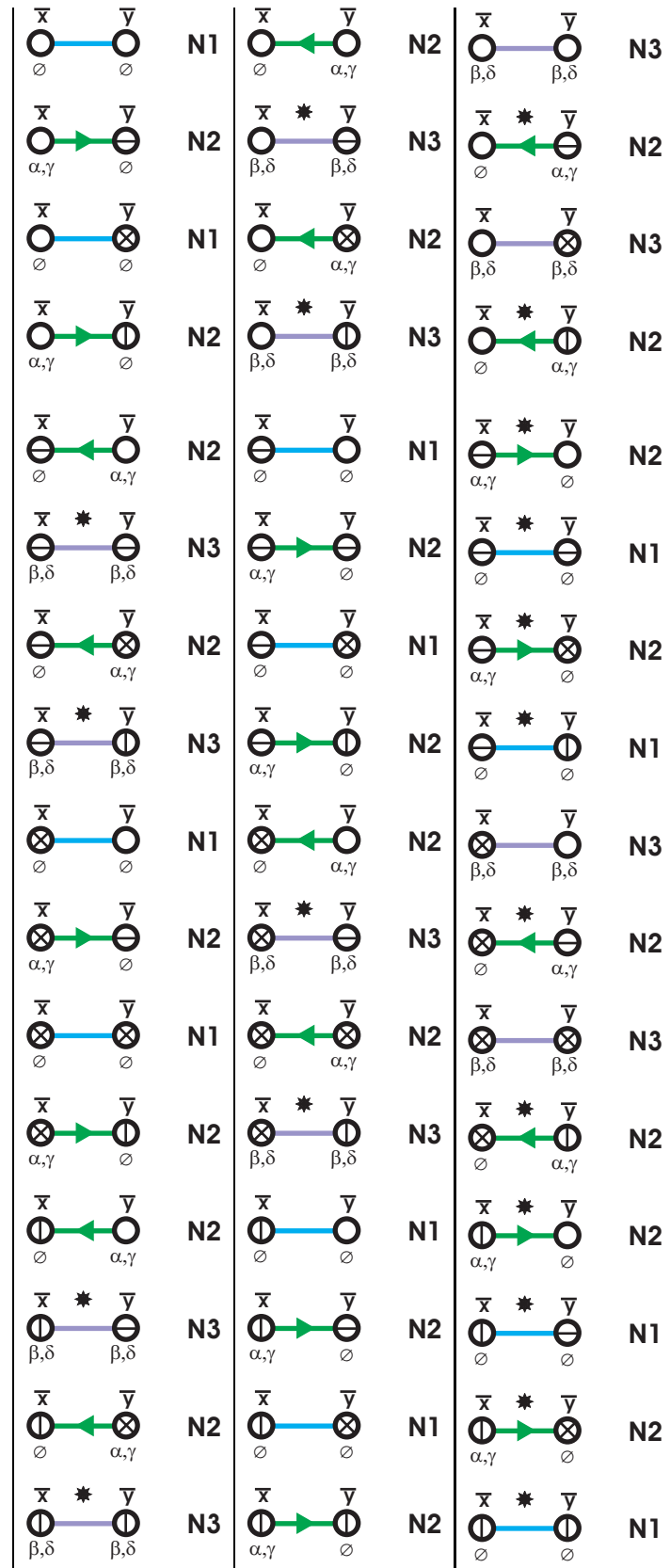


Figura 7.5: Efeito de todas as possibilidades de ações nos vértices das aresta do tipo N. Da esquerda para direita, a primeira coluna refere-se aos efeitos sobre uma aresta tipo N1, a segunda coluna refere-se as arestas do tipo N2 e a última coluna a arestas do tipo N3

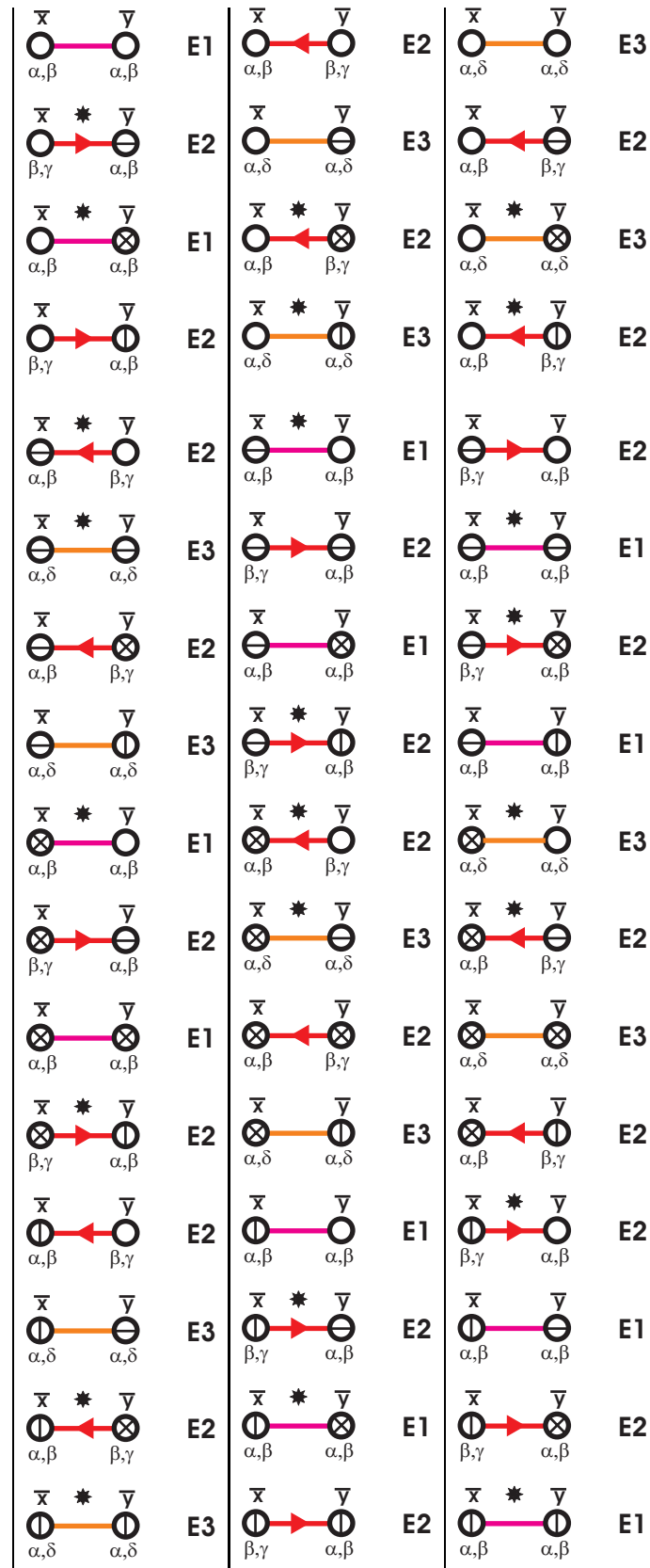


Figura 7.6: Efeito de todas as possibilidades de ações nos vértices das aresta do tipo E. Da esquerda para direita, a primeira coluna refere-se aos efeitos sobre uma aresta tipo E1, a segunda coluna refere-se as arestas do tipo E2 e a última coluna a arestas do tipo E3

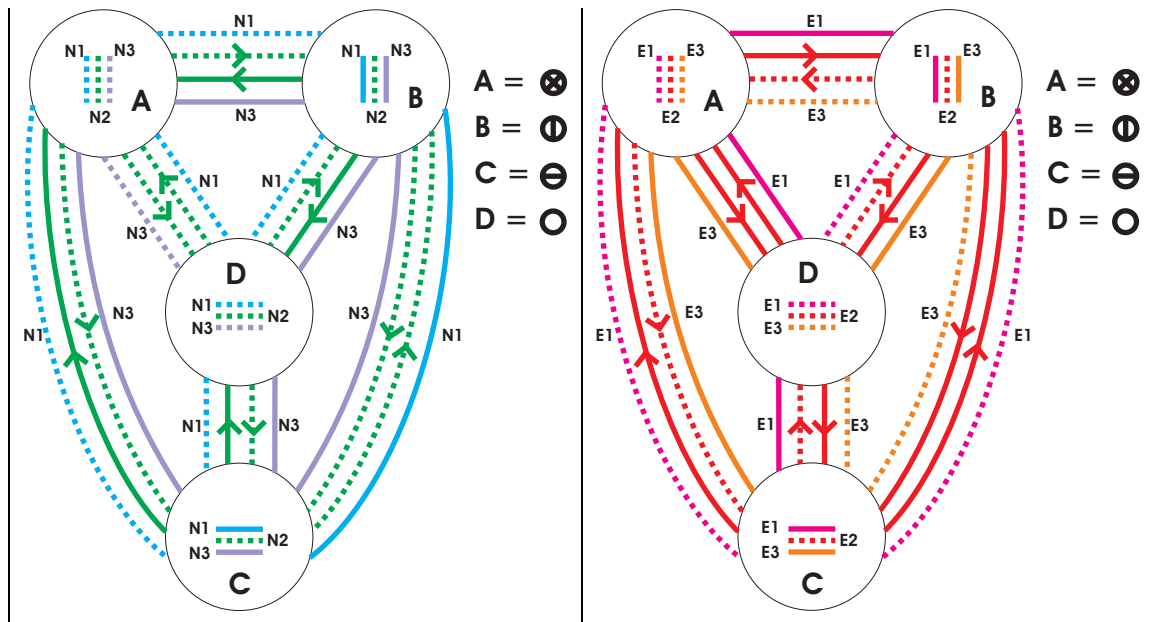


Figura 7.7: Sinais das arestas do tipo N e E na partição dos vértices em $K_g(P_0)$

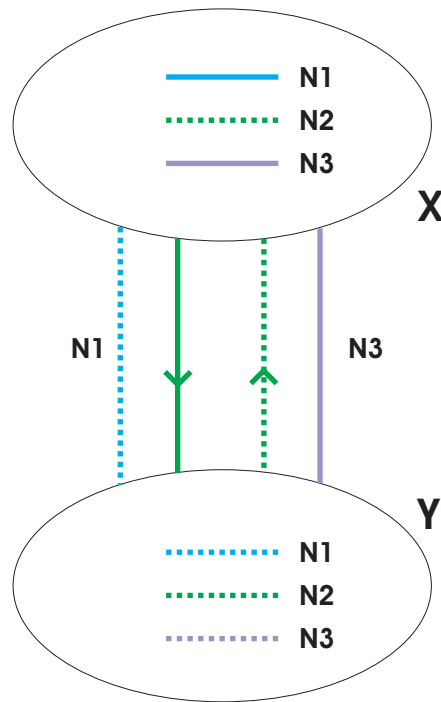


Figura 7.8: Sinais das arestas do tipo N na partição dos vértices em $K_g(P_0)$

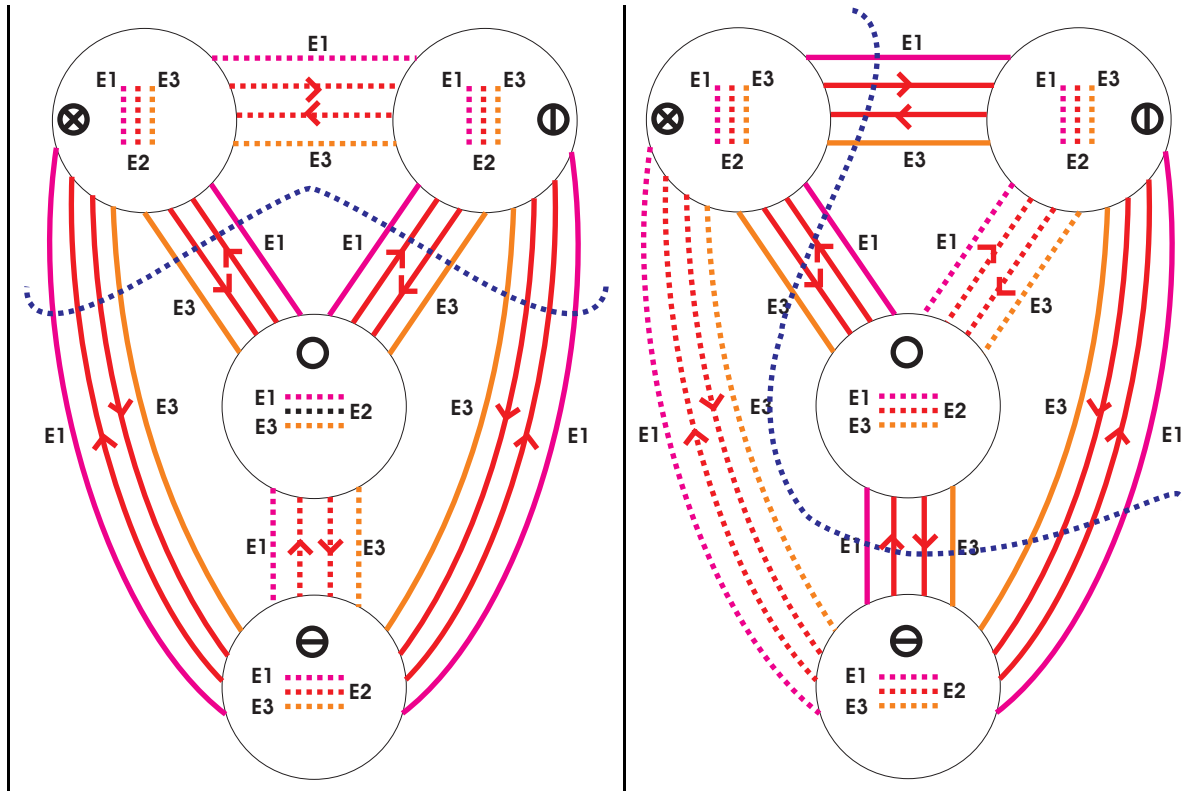


Figura 7.9: À esquerda, a aplicação de ações (todas) horizontais aos conjuntos B e C definidos no Teorema 3.1 fornece uma cofronteira de arestas entrelaçadas negativas. À direita, a cofronteira de arestas entrelaçadas negativas obtida aplicando ações (todas) verticais a tais conjuntos. A linha tracejada azul indica a cofronteira.

Bibliografia

- [1] C.F. Gauss, Werke, Vol. III, Teubner, Leipzig, (1900) pp. 272, 282-286.
- [2] Marx, M.L., *The Gauss Realizability Problem* Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1922), pp. 610-613.
- [3] Withney, H., *Non-Separable and Planar Graphs* Trans. Amer. Math. Soc. **34** (1932), pp. 339-362.
- [4] Dehn, M. *Über Kombinatorische Topologie* Acta Math. **67** (1836), pp. 123-168.
- [5] Tutte, W.T., *What is a Map?* in "New Directions in the Theory of Graphs" (F. Harary, Ed.), Academic Press, New York/London (1971).
- [6] Shank, H., *The Theory of Left-Right Paths*, Combinatorial Mathematics III Lecture Notes **452**, ed. Springer-Verlag (1975).
- [7] Bondy, A. and Murty, U., *Graph Theory with Applications*, American Elsevier (1976).
- [8] Lovasz, L., Mark, M., *A Forbidden Substructure Characterization of Gauss Code*, Acta Sci. Math **38** (1976) pp. 115-119.
- [9] Rosenstiehl, P., *Caractérisation des Graphes Planaires par une Diagonale Algébrique* C.R. Acad. Sc. Paris, t.283 (1976).
- [10] Giblin, P. *Graphs, Surfaces and Homology*, Ed. Chapman and Hall (1977).
- [11] Lins, S., *Euler Tours with Distinct Transitions* Research Report CORR 79-35 of Faculty of Mathematics of University of Waterloo (Waterloo, Ontario, Canada), (1979).
- [12] Lins, S., *Graphs of Maps*, Ph.D. Thesis, University of Waterloo (Waterloo, Ontario, Canada), (1980).
- [13] Stillwell, J., *Classical Topology and Combinatorial Group Theory* (GTM 72). Springer-Verlag (1980).
- [14] Vergnas, M. L., *Eulerian circuits of 4-valent Graphs Imbedded in Surfaces* in Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai **25** "Algebraic Methods in Graph Theory" Vol. II (1981).
- [15] Lins, S., *Graph-Encoded Maps* Journal of Combinatorial Theory B, **32** (1981) pp171-181.
- [16] Lins, S., *Combinatorics of Orientation Reversing Polygons* Aeq. Math. **29** (1985) pp123-131.
- [17] Lins, S., Richter, B. and Shank, H., *The Gauss Problem of the Plane* Aequationes Mathematicae **33** (1987) pp. 81-95.

- [18] Lins, S., *Gems, computers and attractors for 3-manifolds* K & E series on Knots and Everthing; vol. 5 (1995) ed. World Scientific Publishing Co. (London). ISBN 9810219075.
- [19] Crapo, H. and Rosenstiehl, P., *On Lacets and Their Manifolds* Discrete Mathematics **233** (2001) pp. 299-320.
- [20] Lins, S., Oliveira Lima, E. and Silva, V., *An Affine Linear Solution for the 2-Face Colorable Gauss Code Problem in the Klein Bottle and a Quadratic System for Arbitrary Closed Surfaces*. Disponível em <http://arxiv.org> código de submissão: *math.CO/0301012*.
- [21] Lins, S. and Silva, V., *On Maps with Single Zig-Zag*. Disponível em <http://arxiv.org> código de submissão: *math.CO/0301053*.

Índice

- C_M , 5
- Q_M , 5
- $S_x^P(A)$, 49
- $Surf_{min}(g)$, 4
- $\Delta(x)$, 1
- Γ_i , 3
- $\bar{x}$, 15
- $\bar{x}_{even}$, 22, 56
- $\bar{x}_{odd}$, 22, 56
- $\Omega(M)$, 6
- x_β , 22, 56
- x_γ , 22, 56
- x_δ , 22, 56
- a_M -arestas, 5
- $b(x)$, 9
- $b_P(x)$, 51
- $c(x)$, 9
- f_M -arestas, 5
- $i(x)$, 1, 9
- $k(x)$, 9
- v_M -arestas, 5
- $x \propto y$, 3
- z_M -arestas, 5
- $\mathcal{E}$, 10
- $\mathcal{F}$, 7
- $\mathcal{F}^\perp$, 7
- $\mathcal{L}$, 17
- $\mathcal{O}$, 10
- $\mathcal{P}$, 17
- $\mathcal{V}$, 7
- $\mathcal{V}^\perp$, 7
- $\mathcal{Z}$, 7
- $\mathcal{Z}^\perp$, 7
- $\|x\|_P$, 18
- x_α , 22, 56
- $\mathcal{B}$, 18
- $\mathcal{W}$, 18
- Ação Cruzada, 20
- Ação Horizontal, 20
- Ação Vertical, 20
- lacet*, 1
- ação, 20
- Anti-Mapa, 6
- Aresta Negativa, 23
- aresta negativa, 60
- Aresta Positiva, 23
- aresta positiva, 60
- Aresta Tipo E1, 23, 57
- Aresta Tipo E2, 23, 57
- Aresta Tipo E3, 23, 57
- Aresta Tipo N1, 23, 57
- Aresta Tipo N2, 23, 57
- Aresta Tipo N3, 23, 57
- código de Gauss, 4
- código do *lacet* ℓ em S , 1
- código Kleiniano, 1
- código planar, 1
- código projetivo, 1
- Classe do Vértice, 15
- co-fronteira, 2
- Condição de Paridade, 14
- Conjectura de Gauss, 2
- Conjunto dos Códigos Quadruplicados, 17
- Conjunto dos Vértices Ímpares, 10
- Conjunto dos Vértices Brancos, 18
- Conjunto dos Vértices Pares, 10
- Conjunto dos Vértices Pretos, 18
- Conjunto dos *Lacets* Duplicados, 17
- enlaçamento 2-colorável, 1
- espaço dos ciclos, 7
- espaço dos co-ciclos, 7
- estrela, 2
- f-gon, 5
- Faces, 5
- grafo de entrelaçamento, 3
- grafo induzido, 6
- mapa, 5
- mapa combinatório, 5

Mapa Dual, 6

Mapa Phial, 6

mapa topológico, 5

mergulho fiel, 6

Problema Central, 14

quadrado canônico, 8

retângulos, 5

retângulos brancos, 7

retângulos pretos, 7

símbolo, 1

símbolo ímpar, 1

símbolo par, 1

v-gon, 5

vértice branco, 2

vértice preto, 2

Vértices Cruzados, 57

vértices entrelaçados, 3

Vértices Horizontais, 57

Vértices Nulos, 57

Vértices Verticais, 57

z-gon, 5