Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Matemática

# Uma Teoria Assintótica para Equações em Diferenças Funcionais com Retardo Infinito

por

**Luis Francisco Del Campo Conejeros** *
Doutorado em Matemática - Recife - PE

**Orientador: Prof. Dr. Cláudio Rodrigo Cuevas Henríquez**

*Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Del Campo Conejeros, Luis Francisco
Uma teoria assintótica para equações em diferenças funcionais com retardo infinito / Luis Francisco Del Campo Conejeros. – Recife : O Autor, 2003.
60 folhas.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2003.

Inclui bibliografia.

1. Matemática – Equações diferenciais funcionais. 2. Sistema homogêneo de equações – Teoria assintótica. 3. Equações com retardo infinito. I. Título.

| | | |
|---|---|---|
| 517.96 | CDU (2.ed.) | UFPE |
| 515.7 | CDD (22.ed.) | BC2006-177 |

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Ciências.

Aprovado: ______________________________
*Claudio Rodrigo Cuevas Henriquez*
**Orientador**

______________________________
*José Claudio Vidal Diaz*

______________________________
*Fernando Antonio Figueiredo Cardoso Silva*

______________________________
*Carlos Enrique Lizama Yanez*

______________________________
*Sergei Trofimchuk*

**UMA TEORIA ASSINTÓTICA PARA EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS FUNCIONAIS COM RETARDO INFINITO**

*por*

*Luis Francisco Del Campo Conejeros*

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
*Cidade Universitária – Tels. (081) 3271- 8410 – Fax: (081) 3271-1833*
RECIFE – BRASIL



Agosto - 2003

# Dedicatória

**No sé tú, pero yo no dejo de pensar.**
**Me diste la verdad que yo soñé.**
**Que había en mi corazón por tí.**
**¿Cómo imaginar que la vida sigue igual?**
**Te extraño.**
**No existe un momento del día en que pueda apartarme de tí.**
**Cuando vuelva a tu lado une tu labio al mío...**†

Para a mulher que me permitiu conhecer o que sempre sonhei, o que sempre desejei... o amor mais profundo e verdadeiro que poderia ter imaginado.

†Cada uma destas frases foi tirada de algum conhecido bolero.

# Agradecimentos

---

- **No Chile dizemos que *"É melhor ter amigos que ter dinheiro"*. Posso dizer que voces mostraram que esse ditado é verdadeiro, muito obrigado :**

  **A minha pequena familia :** *Maura Cecilia, Mauro Francisco e Taína Francisca.*

  **Aos amigos que aqui conheci, em especial :** *Adriano Veiga, Adson Motta, Airton Castro, Alberto Maia, Alan Almeida, Aldi Nestor, Almir Olimpio, Ana Cristina, Ana Flávia, Ângelo Alberti, Avelita Coelho, Carlinda Maria, Catarina Lacerda, César Castilho, Cláudio Cuevas, Cláudio Cristino, Cláudio Vidal, Cristiane Justino, Davy Cardoso, Éder Mateus, Fabio Santos, Fabiola de Oliveira, Fernando Xavier, Gastão Miranda, Gleidson da Silva, Gilberlandio Jesús, Gracivane Pessoa, Hélio Porto, Ivana Latosinski, Jalila Rios, Jacqueline Rojas, Kalasas Vasconcelos, Karina de O. Ramos, Katia Bezerra, Katya Silene, Letícia Zarate, Lucia de Fátima, Lucimary, Marcelo Marchesin, Marcelo da Costa, Marcia Lima, Mário Sansuke, Murilo Sampaio, Oscar Neto, Paulo Rabelo, Ramón Mendoza, Renata Nunes, Ricardo Pereira, Severino Horácio, Steve Wonderson, Taise Santiago, Teófilo Nascimento, Tereza Raquel, Wallace, Wallisom Rosa, Wellington Silva.*

  **Ao pessoal do CCEN da UFPE, particularmente :** *Airton Castro, Antônio Brandão, Carlos Roberto, César Castilho, Claudia Bezerra, Cláudio Cuevas, Cláudio Vidal, Creusa Silva, Eduardo Shirlipi, Elizabeth Gasparin, Fátima Bacelae, Fernando Cardoso, Francisco Brito, Henrique Araújo, Hildeberto Cabral, Jane Souto Maior, Joaquim de Souza, Manoel Lemus, Manoel Ronaldo, Marcus Vinícius, Maria de Freitas, Oscar Neto, Paulo Santiago, Pedro Ontaneda, Ramón Mendoza, Raquel Estevam,*

*Senhora Jane, Sergio Santa Cruz, Silvio Mello, Tánia Maranhão.*

**Aos que estão no Chile, especialmente :** *Augusto Cortés, Edmundo Mansilla, Eliana Conejeros, Emedín Montaño, Humberto Prado, Jaime Vera, Jennifer Rosa, Jorge Alfredo, Jorge Alfredo(pai), Marcelo Uribe, María Soledad, Maura Cecilia, Mauro Francisco, Ricardo Álvarez, Rodrigo Sanchez, Rosa Donoso, Taína Francisca, Zoila Fernandez.*

**Aos alunos que tive o privilegio de conhecer dos cursos :** *Arquitetura, Desenho Industrial, Engenharia, Farmácia, Lic. em Física, Lic. em Matemática, Lic. em Química, Química Industrial.*

- Ao pessoal da biblioteca do CCEN, sempre com boa vontade.
- Às pessoas que posso ter esquecido aqui.
- Aos que não gostaria de mencionar aqui, pois também me ajudaram para me lembrar que não passei por aqui, mas sim vivi aqui.
- Ao povo brasileiro, que afinal é quem financia os estudos de pós-graduação.
- Ao CNPq pelo suporte financeiro.

# Resumo

Nosso interesse neste trabalho foi o desenvolvimento de uma teoria assintótica para um sistema homogêneo de equações em diferenças funcionais. Nós nos concentramos na existência de soluções convergentes, comportamento assintótico e propriedades desta classe de soluções para perturbações não lineares do sistema homogêneo. Abordamos esta problemática no marco da teoria das dicotomias. Especificamente estudamos os casos nos quais o operador solução, o qual é associado à equação homogênea, possui um determinado tipo de dicotomia. Usando o teorema de Krasnoselky e o critério de compacidade, provamos a existência de soluções convergentes . Além disso, entre outros assuntos, obtemos interessante informação com respeito ao conjunto das soluções convergentes, como por exemplo que tal conjunto é equiconvergente em peso em infinito. Este tipo de informação não tem sido estudada até hoje na literatura existente sobre equações em diferenças funcionais.

# Abstract

This investigation using discrete dichotomies and Krasnoselsky's theorem we obtain existence and asymptotic behavior of convergent solutions for retarded functional difference equations. We also will get some global properties for the set of convergent solutions. Applications on Volterra difference equations with infinite delay are show.

# Sumário

# Introdução

---

O objeto de nossa pesquisa são as Equações em Diferenças Funcionais. Mais concretamente, desenvolvemos uma teoria assintótica para certas equações em diferenças funcionais com retardo infinito. A problemática de considerar retardo infinito tem atraido bastante a atenção dos pesquisadores nos últimos anos tendo aparecido diversas publicações. A motivação de estudar este tipo de equações surge do fato que suas aplicações atingem um raio de expansão muito amplo, pois elas aparecem de maneira natural em diversos modelos Biológicos, Econômicos, Químicos e Físicos (ver [13]).

A teoria assintótica para equações em diferenças tem-se desenvolvido lentamente quando comparadas às suas homólogas, isto é, as equações diferenciais. Como aspecto histórico, ressaltamos que H. Poincaré [30] estabeleceu os fundamentos da teoria assintótica, tanto para equações diferenciais quanto para equações em diferenças. Posteriormente, para equações em diferenças, foi continuada por O. Perron [26].

Até agora em equações em diferenças, a maior parte dos trabalhos com respeito ao desenvolvimento assintótico consideram retardo finito não tendo considerado condições iniciais num espaço de fase abstrato. É por isso crescente o interesse em estudar as equações em diferenças funcionais abstratas com retardo infinito. O conceito de espaço de fase foi introduzido por Hale e Kato, no seu clássico artigo [16], eles o utilizaram para estudar a teoria qualitativa de equações diferenciais funcionais com retardo não-limitado. Uma excelente referência para a filosofia geral destes espaços é o livro de Hino, Murakami e Naito [19].

Estamos interessados no desenvolvimento de uma teoria assintótica para um sistema homogêneo de equações em diferenças funcionais do tipo

$$x\,(n+1) = L\,(n, x_n) \quad , \quad n \geq n_o \geq 0,$$

e seu sistema perturbado

$$x(n+1) = L(n, x_n) + f_1(n, x_n) + f_2(n, x_\bullet) \quad , \quad n \geq n_o \geq 0,$$

onde $L$ é um operador linear limitado com respeito à segunda variável, a qual pertence ao espaço de fase $\mathfrak{B}$. Neste trabalho nos concentraremos na existência de soluções convergentes, o comportamento assintótico e algumas outras propriedades desta classe de soluções para perturbações não lineares do sistema homogêneo anterior. Abordaremos este problema no marco da teoria das dicotomias. Especificamente estudaremos os casos nos quais o operador solução, associado à equação homogênea, possui uma $(k_1, k_2)$-dicotomia compensada ou uma dicotomia de tipo somável (Definições 1.1.2 e 1.1.3).

É importante destacar que a introdução de perturbações fortemente não lineares na equação, dá lugar ao uso de potentes teoremas de ponto fixo como o teorema de Schauder e o teorema de Krasnoselky entre outros. Estes teoremas fornecem uma importante ferramenta para processar novos resultados de existência. Observamos que qualquer situação não linear concreta requer um operador compacto e assim, um critério de compacidade conveniente. Portanto, é necessário construir critérios de compacidade eficazes. Destacamos que o teorema de Schauder foi aplicado com sucesso por Cuevas e Pinto em [9] para o estudo concernente à existência de soluções convergentes, para um tipo de equações similares às consideradas aqui.

A noção de dicotomia para um sistema homogêneo de equações diferenciais foi introduzida nos trabalhos de Perron [27], Levinson [21] e [22], Massera e Schäfer [23]. Posteriormente Coppel [5] sintetiza e melhora os resultados existentes na literatura até 1978. É interessante mencionar que os resultados homólogos em equações em diferenças apareceram muito tempo depois, tendo em 1981, Henry incluído dicotomias discretas no seu clássico livro [17]. Só em 1990 a noção de dicotomia foi estendida a equações diferenciais não lineares por Elaydi e Háyek [12].

O problema de convergência em equações diferenciais ordinárias tem sido estudado por muitos autores, entre outros Avramescu [3], Hallam [14] e [15] e Kartsatos e Michaelides [18]. Alguns resultados para equações em diferenças foram estabelecidos por Cheng et al. [4], Drazdowicz e Popenda [11], Aulbach [2], entre outros. Mas muitos deles estão relacionados com uma classe especial de equações em diferenças de segunda ordem e, particularmente com soluções convergentes para zero. Em Pinto [28] foram estabelecidos resultados de soluções convergentes e soluções limitadas de sistemas em diferenças não lineares, usando uma dicotomia de tipo somável. Em Cuevas [7], o autor prova a existência de soluções convergentes e soluções limitadas para equações em diferenças do tipo Volterra autônomo com retardo infinito, usando uma dicotomia $p$-somável e o princípio da contração. Posteriormente, Cuevas e Pinto [8] provam a versão não autônoma de [7]. Generalizações deste tipo de equações serão abordadas nas aplicações (Capitulo 2). Num artigo mais recente [9], os mesmos autores tem estabelecido a existência de soluções convergentes usando dicotomia somável em peso e o teorema do ponto fixo de Schauder.

O teorema de Krasnoselky é uma ferramenta muito útil na argumentação de teoremas de existência para equações funcionais. Este poderoso teorema não tem sido suficientemente usado em equações em diferenças. Usando tal teorema, provaremos a existência de soluções convergentes para certas perturbações do sistema homogêneo anteriormente indicado (Teoremas 1.2.1, 1.2.5, 1.3.1, 1.3.4, 1.4.1 e 1.4.4). Além disso, entre outros assuntos, obtemos interessantes resultados referentes ao conjunto das soluções convergentes (Observações 1.2.7 e 1.3.5)

A relevância dos nossos resultados reside no fato que têm importantes consequências em aplicações devido à generalidade da equação aqui tratada. Como um modelo concreto desta classe de equações nós estudamos sistemas em diferenças do tipo Volterra. Estes podem ser considerados uma generalização natural dos sistemas em diferenças e são comumente utilizados em modelos em economia e ecologia. Esta classe aparece quando se considera aproximações numéricas discretas de equações de Volterra integrais ou integro-diferenciais.

No primeiro capítulo são abordados os casos nos quais o operador solução tem uma $(k_1, k_2)$-dicotomia ou uma dicotomia somável em peso. Particularmente obtemos refinamentos genuínos que permitem melhorar alguns resultados já existentes na literatura (observações 1.2.2 e 1.2.3). Também dos nossos resultados podemos inferir que o conjunto de todas as soluções convergentes é equiconvergente em peso em $\infty$ (observações 1.2.7 e 1.3.5) e, embora não possamos garantir que este seja relativamente compacto, modificando-o ligeiramente obtemos um conjunto que é relativamente compacto. Este tipo de informação não tem sido estudada até hoje na literatura existente sobre equações em diferenças funcionais.

No segundo capítulo apresentamos aplicações dos resultados obtidos no primeiro.

# Capítulo 1

# Existência de Soluções Convergentes

## 1.1 Notações e Preliminares

Como usualmente, denotaremos por $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$ o conjunto dos inteiros, os inteiros não negativos e os inteiros não positivos, respectivamente. Para $r \in \mathbb{Z}$, $r > 0$, $\mathbb{C}^r$ representa o espaço Euclidiano complexo de dimensão $r$ com norma $|\cdot|$.

Se $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^-, \mathbb{C}^r)$ é a familia de todas as funções de $\mathbb{Z}^-$ em $\mathbb{C}^r$, então para uma função $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^r$ e $n \in \mathbb{Z}$, denotamos por $x_n$ o membro de $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^-, \mathbb{C}^r)$ definido por $x_n(s) = x(n+s)$.

Usando a terminologia de Murakami [19] definimos o espaço de fase $\mathfrak{B}$ $(\subseteq \mathcal{F}(\mathbb{Z}^-, \mathbb{C}^r))$, como sendo um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$ e que satisfaz os seguintes axiomas:

(A) Existe uma constante positiva $J$ e funções não negativas $N(\cdot)$ e $M(\cdot)$ definidas em $\mathbb{Z}^+$ com a propriedade que se $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^r$ é uma função tal que $x_o \in \mathfrak{B}$, então para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ :

   (i) $x_n \in \mathfrak{B}$ ,

   (ii) $J|x(n)| \leq \|x_n\|_{\mathfrak{B}} \leq N(n) \sup\limits_{0 \leq s \leq n} |x(s)| + M(n)\|x_o\|_{\mathfrak{B}}$.

(B) A aplicação inclusão $i : (B(\mathbb{Z}^-, \mathbb{C}^r), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathfrak{B}, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}})$ é contínua, ou seja, existe $K \geq 0$ tal que $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \leq K\|\varphi\|_\infty$, para todo $\varphi \in B(\mathbb{Z}^-, \mathbb{C}^r)$, onde $B(\mathbb{Z}^-, \mathbb{C}^r)$ representa as funções limitadas de $\mathbb{Z}^-$ em $\mathbb{C}^r$.

**Exemplo 1.1.1.** *Um exemplo típico desta classe de espaços é o seguinte: Seja* $\alpha : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ *uma sequência positiva crescente. Definamos o conjunto* $\mathfrak{B}_\alpha$ *por*

$$\mathfrak{B}_\alpha = \left\{ \phi : \mathbb{Z}^- \rightarrow \mathbb{C}^r \ : \ \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{|\phi(-n)|}{\alpha(n)} < +\infty \right\},$$

*o qual é um espaço de Banach com a norma* $\|\phi\|_{\mathfrak{B}_\alpha} = \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{|\phi(-n)|}{\alpha(n)}$, $\phi \in \mathfrak{B}_\alpha$. *É fácil ver que* $\mathfrak{B}_\alpha$ *satisfaz os axiomas (A) e (B), com* $J = K = N(n) = \alpha(0)^{-1}$ *e* $M(n) = 1$.

No que segue-se, $\mathfrak{B}$ denotará sempre um espaço de fase.

Suponhamos que $\{k(n)\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ é uma sequência positiva arbitrária. Denotamos por $X_k$ o espaço de Banach de todas as funções $\eta : \mathbb{N}(n_o) \longrightarrow \mathfrak{B}$ que são $k$-limitadas, ou limitadas em peso $k$, munido da norma natural:

$$\|\eta\|_k = \sup_{n \geq n_o} \|\eta(n)\|_{\mathfrak{B}} \, k(n)^{-1} < +\infty,$$

onde temos denotado por $\mathbb{N}(n_o) := \{n_o, \, n_o + 1, \ldots\}$, para $n_o \in \mathbb{Z}^+$.

Neste espaço consideramos o sub-espaço $X_{\infty,k}$ das funções $\xi \in X_k$ que são $k$-convergentes, ou convergentes em peso $k$, ou seja, para as quais existe o limite $\lim_{n \to \infty} \xi(n) \, k(n)^{-1}$ (que denotaremos por $Z_\infty^k(\xi) := \lim_{n \to \infty} \xi(n) \, k(n)^{-1}$), munido com a norma $\|\cdot\|_k$. Também consideramos o conjunto $X_{\infty,k}[\lambda]$, para $\lambda > 0$, que denota a bola $\|\xi\|_k \leq \lambda$ em $X_{\infty,k}$.

Nosso interesse é estudar o seguinte sistema linear homogêneo de equações em diferenças funcionais:

$$x(n+1) = L(n, x_n) \quad , \quad n \geq n_o \geq 0, \tag{1.1}$$

e seu sistema perturbado

$$x(n+1) = L(n, x_n) + f_1(n, x_n) + f_2(n, x_\bullet) \quad , \quad n \geq n_o \geq 0, \tag{1.2}$$

onde $L : \mathbb{N}(n_o) \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{C}^r$ é uma aplicação linear limitada com respeito à segunda variável, e no que segue-se sempre denotara um operador com essa propriedade; $f_1 : \mathbb{N}(n_o) \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{C}^r$ e $f_2 : \mathbb{N}(n_o) \times X_k \rightarrow \mathbb{C}^r$ são funções sob condições convenientes que especificamos mais adiante. Além disso, $x_\bullet : \mathbb{N}(n_o) \rightarrow \mathfrak{B}$ é a função definida por $x_\bullet(n) = x_n$.

Para qualquer $n \geq \tau$, definimos o operador $T(n, \tau) : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ por $T(n, \tau)\varphi = x_n(\cdot, \tau, \varphi, 0)$, $\varphi \in \mathfrak{B}$; onde $x(\cdot, \tau, \varphi, 0)$ denota a solução do sistema linear homogêneo (1.1) que passa por $(\tau, \varphi)$, ou seja $x_\tau(\cdot, \tau, \varphi, 0) = \varphi$. O operador $T(n, \tau)$, chamado de Operador Solução do sistema linear homogêneo (1.1), é linear limitado (axioma (A)) e satisfaz as seguintes propriedades de semigrupo:

$$T(n,s)\,T(s,\tau) = T(n,\tau)\ ,\ \ T(\tau,\tau) = I\ ,\ n \geq s \geq \tau \geq n_o. \tag{1.3}$$

Vamos lembrar a definição de $(k_1, k_2)$-dicotomia, $(k_1, k_2)$-dicotomia compensada e dicotomia $p$-somável em peso, pois estamos interessados em estabelecer nossos resultados para estes tipos de dicotomias.

**Definição 1.1.2.** *Sejam $k_1$ e $k_2$ duas sequências positivas.*

*(a) Dizemos que o sistema linear homogêneo de equações em diferenças funcionais (1.1) tem uma $(k_1, k_2)$-dicotomia se o operador solução $T(n,\tau)$ satisfaz as seguintes propriedades: Existe uma constante positiva $M$ e um operador projeção $P(\tau) : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, $\left(P(\tau)^2 = P(\tau)\right)$, $\tau \in \mathbb{Z}$, tal que se $Q(\tau) = I - P(\tau)$, então*

*(a.1)* $T(n,\tau)\,P(\tau) = P(n)\,T(n,\tau)\ , \qquad n \geq \tau.$

*(a.2) A restrição $T(n,\tau)|_{R(Q(\tau))}$, $n \geq \tau$, é um isomorfismo de $R(Q(\tau))$ sobre $R(Q(n))$, onde $R(Q(\cdot))$ denota a imagem de $Q(\cdot)$, e denotamos por $T(\tau, n)$ a aplicação inversa.*

*(a.3)* $\|T(n,\tau)\,P(\tau)\| \leq Mk_1(n)\,k_1(\tau)^{-1}\ , \qquad n \geq \tau.$

*(a.4)* $\|T(n,\tau)\,Q(\tau)\| \leq Mk_2(n)\,k_2(\tau)^{-1}\ , \qquad \tau \geq n.$

*(b) Dizemos que a $(k_1, k_2)$-dicotomia é compensada se existe uma constante positiva $C \geq 1$ tal que:*

$$k_1(n)\,k_1(m)^{-1} \leq Ck_2(n)\,k_2(m)^{-1}\ , \qquad n \geq m.$$

**Definição 1.1.3.** *Seja $p \geq 1$, e sejam $a_1$ e $a_2$ duas sequências positivas. Dizemos que o sistema (1.1) tem uma dicotomia p-somável em peso $(a_1, a_2)$ (ou simplesmente dicotomia somável) se o operador solução $T(n,\tau)$ satisfaz as condições (a.1) e (a.2) da definição anterior e, existe uma constante positiva $\widetilde{K}$ tal que:*

*(i)* $\|\Gamma(n,\cdot)\|_{a_2,p} := \left(\sum_{s=n_o}^{\infty} \|\Gamma(n,s)\|^p\, a_2(s)\right)^{1/p} \leq \widetilde{K}\, a_1(n)$ *, para $n \geq n_o$, onde $\Gamma(n,s)$ denota a função:*

$$\Gamma(n,s) = \begin{cases} T(n,s+1)\,P(s+1)\,, & se\ n-1 \geq s, \\ \\ -T(n,s+1)\,Q(s+1)\,, & se\ n-1 < s, \end{cases}$$

*chamada de Função de Green associada com a equação (1.1) (ver [1] para mais detalhes e propriedades desta função)*

**Observação 1.1.4.** *A Teoria das dicotomias foi introduzida em equações diferenciais pelos trabalhos de Perron [26], Levinson [21] e [22] e Massera e Shäfer [23]. A noção de dicotomia exponencial e ordinaria são devidas a Shäfer. Importantes desenvolvimentos desta teoria tem aparecido nos trabalhos de Coppel [5], Palmer [25] e Dalietckii e Krein [10].*

*Em geral, as dicotomias são descompostas em dois importantes grupos: as dicotomias "uniformes", que são uma extensão natural de dicotomia ordinaria, e as dicotomias "somáveis em peso", que são uma extensão de dicotomia exponencial.*

**Exemplo 1.1.5.** *Consideremos o espaço de fase*

$$\mathfrak{B}_\alpha = \left\{ \phi : \mathbb{Z}^- \rightarrow \mathbb{C}^2 \ : \ \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{|\phi(-n)|}{\alpha(n)} < +\infty \right\},$$

*onde $\alpha(n) = 2^n$. Sejam $k_1(n) = k_2(n) = 2^{-n}$. Nestas condições consideremos o seguinte sistema em diferenças do tipo Volterra*

$$y(n+1) = Ay(n), \quad n \geq 0, \tag{1.4}$$

*onde $A$ é a matriz $2 \times 2$ dada por $A = diag(1/2, 2)$.*

*Começamos com uma análise completa para verificar as propriedades de dicotomia. Notemos que $T(n)$ é um operador linear limitado no espaço $\mathfrak{B}_\alpha$ definido por:*

$$T(n)\phi(\theta) = \begin{cases} y(n+\theta, 0, \phi, 0) = \left(2^{-(n+\theta)}\phi^1(0), 2^{n+\theta}\phi^2(0)\right), & se \ -n \leq \theta \leq 0, \\ \phi(n+\theta), & se \ \theta < -n. \end{cases}$$

*Para $\phi(\cdot) = (\phi^1(\cdot), \phi^2(\cdot)) \in \mathfrak{B}_\alpha$. Necessitamos definir projeções apropriadas. Neste caso as projeções podem ser tomadas como $P(n) : \mathfrak{B}_\alpha \rightarrow \mathfrak{B}_\alpha$, dadas por:*

$$P(n)\phi(\theta) = \begin{cases} \left(\phi^1(\theta) - 2^{-\theta}\phi^1(0), \phi^2(\theta) - 2^{\theta}\phi^2(0)\right), & se \ -n \leq \theta \leq 0, \\ (0,0), & se \ \theta < -n, \end{cases}$$

*e $Q(n) = I - P(n) : \mathfrak{B}_\alpha \rightarrow \mathfrak{B}_\alpha$, dadas por:*

$$Q(n)\phi(\theta) = \begin{cases} \left(2^{-\theta}\phi^1(0), 2^{\theta}\phi^2(0)\right), & se \ -n \leq \theta \leq 0, \\ (\phi^1(\theta), \phi^2(\theta)), & se \ \theta < -n. \end{cases}$$

*Para $n \geq \tau$, observamos que $T(n-\tau) : Q(\tau)\mathfrak{B}_\alpha \to Q(n)\mathfrak{B}_\alpha$ é dado por:*

$$T(n-\tau)\,Q(\tau)\,\phi(\theta) = \begin{cases} \left(2^{-(n-\tau+\theta)}\phi^1(0), 2^{n-\tau+\theta}\phi^2(0)\right), & se\ -n \leq \theta \leq 0, \\ \left(\phi^1(n-\tau+\theta), \phi^2(n-\tau+\theta)\right), & se\ \theta < -n. \end{cases}$$

*Podemos ver que para $n \geq \tau$, temos que:*

$$T(n-\tau)\,Q(\tau) = Q(n)\,T(n-\tau),$$
$$T(n-\tau)\,P(\tau) = P(n)\,T(n-\tau).$$

*Pode-se provar que, de fato, $T(n-\tau)$, $n \geq \tau$ é um isomorfismo de $Q(\tau)\mathfrak{B}_\alpha$ sobre $Q(n)\mathfrak{B}_\alpha$. Definimos $T(\tau-n)$ como a aplicação inversa, a qual é dada por:*

$$T(\tau-n)\,Q(n)\,\phi(\theta) = \begin{cases} \left(2^{n-\tau}\phi^1(0), 2^{-(n-\tau)}\phi^2(0)\right), & se\ -\tau \leq \theta \leq 0, \\ \left(\phi^1(\tau-n+\theta), \phi^2(\tau-n+\theta)\right), & se\ \theta < -\tau. \end{cases}$$

*Um cálculo direto mostra que*

$$\|T(n-\tau)\,P(\tau)\| \leq 2 \cdot 2^{-(n-\tau)}, \;\; n \geq \tau,$$
$$\|T(n-\tau)\,Q(\tau)\| \leq 2 \cdot 2^{(\tau-n)}, \;\; \tau \geq n.$$

*Ou seja, o sistema (1.4) tem uma $(2^{-n}, 2^{-n})$-dicotomia, e de fato é compensada, onde a constante da Definição 1.1.2 é $C = 1$.*

**Exemplo 1.1.6.** *Consideremos o espaço de fase*

$$\mathfrak{B}_\alpha = \left\{ \phi : \mathbb{Z}^- \to \mathbb{C} \; : \; \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{|\phi(-n)|}{\alpha(n)} < +\infty \right\},$$

*onde $\alpha(n) = 2^n$. Sejam $a_1(n) = \left(1/\sqrt{2}\right)^n$, $a_2(n) = (1/4)^{n+1}$ e $a > 1$. Então consideremos a equação em diferenças linear homogênea:*

$$x(n+1) = a^n x(n), \;\; n \geq n_o \geq 0. \tag{1.5}$$

*Vamos checar as propriedades de dicotomia para este exemplo. Notamos que a solução $x(\cdot, m, \varphi)$ de (1.5) é dada por:*

$$x(n, m, \varphi) = a^{m+(m+1)+\cdots+n-1}\varphi(0) = \sqrt{a}^{(n-m)(n+m-1)}\varphi(0),$$

*para $n \geq m$. Assim:*

$$T(n,m)\,\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(0)\,\sqrt{a}^{(n+\theta-m)(n+\theta+m-1)}, & se\ m-n \leq \theta \leq 0, \\ \varphi(n+\theta-m), & se\ n+\theta \leq m. \end{cases}$$

*Um cálculo direto mostra que:*

$$T(n,s)\,T(s,m) = T(n,m)\,,\ n \geq s \geq m,$$
$$T(n,n) = I,\ \ n \geq n_o.$$

*As projeções apropriadas neste caso podem ser tomadas como* $P(n) : \mathfrak{B}_\alpha \to \mathfrak{B}_\alpha$*, dadas por:*

$$P(n)\,\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(\theta) - \varphi(0)\,\sqrt{a}^{\left(2n\theta+\theta^2-\theta\right)}, & se\ -n \leq \theta \leq 0, \\ 0, & se\ \theta < -n, \end{cases}$$

*e* $Q(n) = I - P(n) : \mathfrak{B}_\alpha \to \mathfrak{B}_\alpha$ *dadas por:*

$$Q(n)\,\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(0)\,\sqrt{a}^{\left(2n\theta+\theta^2-\theta\right)}, & se\ -n \leq \theta \leq 0, \\ \varphi(\theta)\,, & se\ \theta < -n. \end{cases}$$

*Podemos ver que para* $n \geq \tau$*, temos:*

$$T(n,\tau)\,P(\tau) = P(n)\,T(n,\tau)\,,$$
$$T(n,\tau)\,Q(\tau) = Q(n)\,T(n,\tau)\,.$$

*Para* $n \geq \tau$*, notamos que* $T(n,\tau) : Q(\tau)\,\mathfrak{B}_\alpha \to Q(n)\,\mathfrak{B}_\alpha$ *é dado por:*

$$T(n,\tau)\,Q(\tau)\,\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(0)\,\sqrt{a}^{(n+\theta-\tau)(n+\theta+\tau-1)}, & se\ -n \leq \theta \leq 0, \\ \varphi(n+\theta-\tau)\,, & se\ \theta < -n, \end{cases}$$

*e é um isomorfismo de* $Q(\tau)\,\mathfrak{B}_\alpha$ *sobre* $Q(n)\,\mathfrak{B}_\alpha$*. Definimos* $T(\tau,n)$ *como a aplicação inversa dada por:*

$$T(\tau,n)\,Q(n)\,\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(0)\,\sqrt{a}^{(\tau+\theta-n)(\tau+\theta+n-1)}, & se\ -\tau \leq \theta \leq 0, \\ \varphi(\tau-n+\theta)\,, & se\ \theta < -\tau, \end{cases}$$

*e obtemos que:*

$$\|T(n,s)\,P(s)\,\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha} \leq 2\,(1/2)^{n-(s)}\,\|\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha}\,,\ \ n \geq s,$$
$$\|T(n,s)\,Q(s)\,\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha} \leq 2^{s-n}\,\|\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha}\,,\ \ s \geq n,$$

*o que implica que:*

$$\|\Gamma(n,\cdot)\|_{a_{2,1}} \leq 2a_1(n)\,,\ n \geq n_o.$$

*Ou seja, (1.5) tem uma dicotomia* 1*-somável.*

Em $\ell^\infty := \ell^\infty(\mathbb{N}(n_o), \mathbb{R}^m)$, o espaço de Banach das sequências limitadas, não existe um bom critério de compacidade (aqui $\mathbb{R}^m$ denota $m$ cópias de $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$). Usaremos o seguinte critério conhecido na literatura (ver [9]):

"Um subconjunto $S$ de $\ell^\infty$, limitado e equiconvergente em $\infty$ é relativamente compacto."

Lembremos que um conjunto $S$ de sequências $x : \mathbb{N}(n_o) \to \mathbb{R}^m$ em $\ell^\infty$ diz-se que é equiconvergente em $\infty$ se toda sequência em $S$ é convergente no ponto $\infty$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x(n) - Z^1_\infty(x)| < \varepsilon$, para todo $n \geq N$, e todo $x \in S$. Aqui $Z^1_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} x(n)$.

Temos o seguinte critério de compacidade.

**Lema 1.1.7.** ***(Critério de Compacidade em $X_{\infty,k}$)*** *Seja $S$ um subconjunto de $X_{\infty,k}$. Suponhamos que as seguintes condições são satisfeitas:*

*($C_1$) O conjunto $H^k_n(S) := \left\{\xi(n)\, k(n)^{-1} : \xi \in S\right\}$ é relativamente compacto em $\mathfrak{B}$ para todo $n \in \mathbb{N}(n_o)$,*

*($C_2$) $S$ é equiconvergente em peso $k$ em $\infty$; isto é, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left\|\xi(n)\, k(n)^{-1} - Z^k_\infty(\xi)\right\|_{\mathfrak{B}} < \varepsilon\,, \quad \text{para todo } n \geq N, \text{ para todo } \xi \in S.$$

*Então, $S$ é relativamente compacto em $X_{\infty,k}$.*

**Demonstração:** Seja $\{\xi_m\}_m$ uma sequência em $S$. Segue de ($C_1$) que existe uma subsequência $\left\{\xi_{m_j}\right\}_j$ de $\{\xi_m\}_m$ tal que o limite $a(n) = \lim_{j\to\infty} \xi_{m_j}(n)\, k(n)^{-1}$ existe para cada $n \in \mathbb{N}(n_o)$. Por outra parte o conjunto

$$Z^k_\infty(S) = \left\{Z^k_\infty(\xi) : \xi \in S\right\},$$

é relativamente compacto em $\mathfrak{B}$. De fato, segue de ($C_1$) e ($C_2$) que $Z^k_\infty(S)$ é o limite uniforme dos conjuntos relativamente compactos $H^k_n(S)$, e assim ele é relativamente compacto em $\mathfrak{B}$. Portanto, podemos assumir que $\left\{Z^k_\infty\left(\xi_{m_j}\right)\right\}_j$ é uma sequência de Cauchy em $\mathfrak{B}$. Notemos que $\left\{\xi_{m_j}\right\}_j$ é uma sequência de Cauchy em $X_{\infty,k}$. Com efeito, fixado $N$, dado pela condição ($C_2$), se $n_o \leq n \leq N$ :

$$\begin{aligned}&\left\|\xi_{m_j}(n) - \xi_{m_i}(n)\right\|_{\mathfrak{B}} k(n)^{-1} \\ &\qquad \leq \left\|\xi_{m_j}(n)\, k(n)^{-1} - a(n)\right\|_{\mathfrak{B}} + \left\|a(n) - \xi_{m_i}(n)\, k(n)^{-1}\right\|_{\mathfrak{B}}.\end{aligned}$$

E para $n > N$ :

$$\left\|\xi_{m_j}(n) - \xi_{m_i}(n)\right\|_{\mathfrak{B}} k(n)^{-1}$$

$$\leq \left\|\xi_{m_j}(n)\,k(n)^{-1} - Z_\infty^k\left(\xi_{m_j}\right)\right\|_{\mathfrak{B}} + \left\|\xi_{m_i}(n)\,k(n)^{-1} - Z_\infty^k\left(\xi_{m_i}\right)\right\|_{\mathfrak{B}} + \left\|Z_\infty^k\left(\xi_{m_i}\right) - Z_\infty^k\left(\xi_{m_j}\right)\right\|_{\mathfrak{B}}.$$

O que mostra que $\left\{\xi_{m_j}\right\}_j$ é uma sequência de Cauchy em $X_{\infty,k}$, e isso conclui nossa demonstração. ∎

**Observação 1.1.8.** *A condição ($C_2$) pode ser substituída pela seguinte condição equivalente:*

*($C_2$)$^*$ $S$ é uniformemente de Cauchy em peso $k$ ; isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_o \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\left\|\xi(m)\,k(m)^{-1} - \xi(n)\,k(n)^{-1}\right\|_{\mathfrak{B}} < \varepsilon\,,$$

*para todo $m \geq n \geq N_o$, para todo $\xi \in S$.*

*Com efeito, é claro que ($C_2$)$^*$ se deduz de ($C_2$). Suponhamos que se satisfaz ($C_2$)$^*$. Então $\left\{\xi(n)\,k(n)^{-1}\right\}_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathfrak{B}$, para cada $\xi \in S$. Portanto existe o limite $Z_\infty^k(\xi) = \lim_{n\to\infty} \xi(n)\,k(n)^{-1}$, para cada $\xi \in S$. Seja $n \geq N_o$, $n$ fixo. Então temos*

$$\left\|\xi(m)\,k(m)^{-1} - \xi(n)\,k(n)^{-1}\right\|_{\mathfrak{B}} < \varepsilon\,,$$

*para todo $m \geq n$, para todo $\xi \in S$.*

*Assim,*

$$a = \sup_{\xi\in S}\sup_{m\geq n}\left\|\xi(m)\,k(m)^{-1} - \xi(n)\,k(n)^{-1}\right\|_{\mathfrak{B}} \leq \varepsilon.$$

*Por outro lado,*

$$\left\|\xi(m)\,k(m)^{-1} - \xi(n)\,k(n)^{-1}\right\|_{\mathfrak{B}} \leq a \leq \varepsilon\,,$$

*para todo $m \geq n$, para todo $\xi \in S$.*

*Então, $\left\|Z_\infty^k(\xi) - \xi(n)\,k(n)^{-1}\right\|_{\mathfrak{B}} \leq a \leq \varepsilon$, para $n \geq N_o$, para cada $\xi \in S$, como queriamos provar.*

No que segue consideramos a função com valores nas matrizes $r\times r$, $E^{o}(t)$, para $t\in\mathbb{Z}^{-}$, definida por:

$$E^{o}(t)=\begin{cases} I \quad (\text{matriz identidade } r\times r) & \text{se } t=0,\\ \\ 0 \quad (\text{matriz nula } r\times r) & \text{se } t<0.\end{cases}$$

**Lema 1.1.9.** *Assumamos que a função $z:[\tau,+\infty)\to\mathfrak{B}$ satisfaz a relação*

$$z(n)=T(n,\tau)\,z(\tau)+\sum_{s=\tau}^{n-1}T(n,s+1)\,E^{o}p(s)\ ,\quad n\geq\tau, \tag{1.6}$$

*e definamos a função $y:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}^{r}$ por:*

$$y(n)=\begin{cases} z(n)(0)\,, & se\ \ n\geq\tau,\\ \\ z(\tau)(n-\tau)\,, & se\ \ n<\tau.\end{cases} \tag{1.7}$$

*Então $y$ satisfaz a equação*

$$y(n+1)=L(n,y_{n})+p(n)\ ,\quad n\geq\tau, \tag{1.8}$$

*junto com a relação $y_{n}=z(n)\ ,\ n\geq\tau$.*

**Demonstração:** O Teorema 2.1 em [24] afirma que a solução $x(\cdot,\tau,\phi,p)$ de (1.8) passando por $(\tau,\phi)$ satisfaz a relação:

$$x_{n}(\cdot,\tau,\phi,p)=T(n,\tau)\,\phi+\sum_{s=\tau}^{n-1}T(n,s+1)\,E^{o}p(s)\ ,\ \ n\geq\tau. \tag{1.9}$$

Assim, de (1.6) e (1.9) temos que:

$$z(n)=x_{n}(\cdot,\tau,z(\tau),p)\ ,\ \ n\geq\tau. \tag{1.10}$$

Portanto,

$$z(n)(s)=x(n+s,\tau,z(\tau),p)\,, \tag{1.11}$$

para $s\leq 0$ e $n\geq\tau$. Donde

$$z(n)(0)=x(n,\tau,z(\tau),p)\,.$$

De (1.7), (1.10) e (1.11) temos:

$$y(n+s)=z(n+s)(0)=x(n+s,\tau,z(\tau),p)\,,$$

se $s \geq \tau - n$, e

$$y(n+s) = z(\tau)(n+s-\tau) = x(n+s, \tau, z(\tau), p),$$

se $s < \tau - n$. Ou seja,

$$y_n(s) = x_n(s, \tau, z(\tau), p),$$

para $s \leq 0$. Assím:

$$y_n = x_n(\cdot, \tau, z(\tau), p). \tag{1.12}$$

De (1.10) e (1.12), tem-se que $y_n = z(n)$, para $n \geq \tau$. Como $z(n)(0) = y_n(0) = y(n)$, de (1.12) obtemos

$$y(n) = x(n, \tau, z(\tau), p) = x(n, \tau, y_\tau, p),$$

para $n \geq \tau$. Portanto $y(n)$ é a solução de (1.8) passando por $(\tau, \phi)$. ∎

## 1.2 $(k_1, k_2)$-Dicotomia Compensada

O teorema de Krasnoselky é uma ferramenta muito útil na argumentação de teoremas de existência para equações funcionais. Este teorema afirma que: *se $S$ é um subconjunto convexo e completo de um espaço normado $E$, $T : S \to S$ é uma aplicação continua com imagem relativamente compacta, $B : S \to E$ é uma contração e $Tx + By \in S$, para $x, y \in S$, então $T + B$ tem um ponto fixo* (ver ref. [6] e [20] para uma discussão e outras referências).

Este poderoso teorema não tem sido suficientemente usado em Equações em Diferenças. Usando tal teorema, provaremos a existência de soluções convergentes da equação (1.2). Entre outros assuntos, no desenvolvimento desta seção e na próxima, obtemos interessante informação referente ao conjunto das soluções convergentes de (1.2) (ver Observações 1.2.7 e 1.3.5).

Vale a pena mencionar que a relevância do Teorema 1.2.1 (assim como o Teorema 1.3.1), reside no fato que tem importantes consequência em aplicações devido à generalidade da equação tratada aqui (ver Capítulo 2). Em particular, esta abordagem melhora, e de fato generaliza, um resultado sobre soluções convergentes provado no Teorema 4.1 de [8], para um contexto mais geral sob suposições menos restritivas. Em [8] os autores tratam o problema de convergência para o sistema em diferenças do tipo Volterra não autônomo com retardo infinito com a suposição que o operador solução tem uma $(k_1, k_2)$-dicotomia.

No processo para obter nossos resultados, inicialmente requereremos que o operador solução $T(n,\tau)$, o qual é associado com a equação linear homogênea (1.1), tenha uma $(k_1,k_2)$-dicotomia, a qual é compensada, e a equação em diferença quase linear (1.2) seja submetida a duas perturbações não lineares.

Introduzimos a seguinte notação, para $\varphi \in \mathfrak{B}$

$$Z_\varphi(n) := T(n,n_o)\,P(n_o)\,\varphi.$$

Especificamente, para obter os seguintes dois resultados, precisamos introduzir a hipótese:

(D) As seguintes condições valem:

(d-1) A função $f_1(n,\varphi)$ é localmente Lipschitz em $\varphi \in \mathfrak{B}$; isto é, para cada número positivo $R$ e para todo $\varphi$, $\psi \in \mathfrak{B}$, com $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}}$, $\|\psi\|_{\mathfrak{B}} \leq R$ :

$$|f_1(n,\varphi) - f_1(n,\psi)| \leq k_1(n)^{-1}\,F_1(n,R)\,\|\varphi-\psi\|_{\mathfrak{B}},$$

onde $F_1 : \mathbb{N}(n_o)\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua não-decrescente com respeito à segunda variável e $f_1(n,0)=0$, $F_1(n,0)=0$, para $n \geq n_o$.

(d-2) Existem constantes positivas $\mu_{1j}$, $j=1,2$ tais que

$$\sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s,\mu_{1j}k_j(s))\,k_1(s+1)^{-1} < +\infty.$$

(d-3) Existem constantes positivas $\lambda_j$, e funções $F_{2j} : \mathbb{N}(n_o)\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ não decrescentes com respeito à segunda variável, $j=1,2$ tais que, para cada $(n,\xi) \in \mathbb{N}(n_o)\times X_{k_j}$, com $\|\xi\|_{k_j} \leq \lambda_j$ :

$$|f_2(n,\xi)| \leq F_{2j}\left(n,\|\xi\|_{k_j}\right).$$

(d-4) Existem constantes positivas $\mu_j$, $j=1,2$ tais que

$$\beta_{\mu_j} = \sup_{\gamma\in(0,\mu_j]} \frac{\delta_j(\gamma)}{\gamma} < 1,$$

onde

$$\delta_j(\gamma) := \Gamma_1 \sum_{s=n_o}^{\infty} F_{2j}(s,\gamma)\,k_1(s+1)^{-1},$$

com

$$\Gamma_1 := KMC\max\left\{1, Ck_1(n_o)\,k_2(n_o)^{-1}\right\},$$

$K$ é a constante do axioma (B) e $M, C$ são as constantes da definição 1.1.2.

A prova do seguinte resultado combina o crucial critério de compacidade da seção precedente com o teorema de Krasnoselky. Observemos que as hipóteses para $f_1$ dão origem a um operador contractível, e as hipoteses para $f_2$ dão origem a um operador Schauderiano, em espaços adequados. Este teorema nos dá importante informação sobre soluções convergentes de (1.2). Nós obtemos existência de soluções convergentes e comportamento assintótico para estas soluções.

**Teorema 1.2.1.** *Assumamos que a condição (D) vale. Suponhamos também que as seguintes condições são satisfeitas:*

*($D_1$) O sistema (1.1) tem uma $(k_1, k_2)$-dicotomia compensada e tal que*

$$\lim_{m\to\infty} k_1(m)^{-1} T(m,n) P(n) = 0,$$

*para qualquer $n \in \mathbb{N}(n_o)$.*

*($D_2$) Para qualquer $n \geq n_o$ e $j = 1, 2$ as funções*

$$g_j(n,\cdot) := F_{2j}(n, \mu_j)^{-1} f_2(n,\cdot),$$

*são contínuas.*

*($D_3$) Os limites $\pi(\xi) := Z^1_\infty(g_j(\cdot,\xi))$, $j = 1,2$ existem uniformemente em $\xi \in X_{\infty,k_j}[\lambda_j]$.*

*Então, existem constantes positivas $\gamma_j$, $\widetilde{M}_j$, $j = 1,2$ tais que para cada $\varphi \in P(n_o)\mathfrak{B}$ com $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \leq (\gamma_j\beta_{\mu_j} - \delta_j(\gamma_j))\widetilde{M}_j^{-1}$, existe uma solução $y^j = y^j(\varphi) = y^j(n, n_o, \psi)$, $j = 1,2$ com $P(n_o)\psi = \varphi$, da equação (1.2) tal que $\lim_{n\to\infty} k_j(n)^{-1} y^j_n = 0$. Além disso, temos a seguinte fórmula assintótica:*

$$y^j_n(\varphi) = o(k_j(n)) \quad , \qquad \textit{quando } n \to \infty. \tag{1.13}$$

**Demonstração:** Começamos usando a propriedade (d-2) para escolher uma constante apropriada $0 < \gamma_j < \min\{\lambda_j,\, \mu_j,\, \mu_{1j}\}$, $j = 1,2$ tal que:

$$\tau_j := \beta_{\mu_j} + KMC\left(\sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s, \gamma_j k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1}\right) < 1,$$

onde $\beta_{\mu_j}$ é dada por (d-4).

Consideremos o operador $B^j : X_{\infty,k_j}[\gamma_j] \to X_{\infty,k_j}$ definido por

$$B^j\eta(n) := \sum_{s=n_o}^{\infty} \Gamma(n,s) E^o f_1(s,\eta(s)). \tag{1.14}$$

Então $Z_\infty^{k_j}(B^j\eta) = 0$. Com efeito, para cada $s \in \mathbb{N}(n_o)$ temos

$$\|\eta(s)\|_{\mathfrak{B}} k_j(s)^{-1} \leq \gamma_j < \mu_{1j},$$

ou seja,

$$\|\eta(s)\|_{\mathfrak{B}} < \mu_{1j} k_j(s),$$

e usando ($D_1$), (d-1) e (d-2), obtemos

$$\begin{aligned}
&\|B^j\eta(n)\|_{\mathfrak{B}} k_j(n)^{-1} \\
&\quad \leq K\sum_{s=n_o}^{n_1-1} \|T(n,s+1)P(s+1)\| F_1(s,\mu_{1j}k_j(s)) k_1(s)^{-1} k_j(n)^{-1} \|\eta(s)\|_{\mathfrak{B}} \\
&\quad + K\sum_{s=n_1}^{n-1} \|T(n,s+1)P(s+1)\| F_1(s,\mu_{1j}k_j(s)) k_1(s)^{-1} k_j(n)^{-1} \|\eta(s)\|_{\mathfrak{B}} \\
&\quad + K\sum_{s=n}^{\infty} \|T(n,s+1)Q(s+1)\| F_1(s,\mu_{1j}k_j(s)) k_1(s)^{-1} k_j(n)^{-1} \|\eta(s)\|_{\mathfrak{B}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma_j KMCk_1(n_1)\|T(n,n_1)P(n_1)\| k_1(n)^{-1} \sum_{s=n_o}^{n_1-1} F_1(s,\mu_{1j}k_j(s)) k_1(s+1)^{-1} \\
&+ \gamma_j KMC\sum_{s=n_1}^{n-1} F_1(s,\mu_{1j}k_j(s)) k_1(s+1)^{-1} \\
&+ \gamma_j KMC\sum_{s=n}^{\infty} F_1(s,\mu_{1j}k_j(s)) k_1(s+1)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma_j KMCk_1(n_1)\|T(n,n_1)P(n_1)\| k_1(n)^{-1} \sum_{s=n_o}^{n_1-1} F_1(s,\mu_{1j}k_j(s)) k_1(s+1)^{-1} \\
&+ \gamma_j KMC\sum_{s=n_1}^{\infty} F_1(s,\mu_{1j}k_j(s)) k_1(s+1)^{-1}.
\end{aligned}$$

Notemos que cada parcela se faz tão pequena quanto se deseja para $n$ e $n_1$ suficientemente grandes com $n_1$ fixo e $n > n_1$.

Além disso, para $\eta, \xi \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$, usando a propriedade de compensação, obtemos:

$$\left\|B^j\eta - B^j\xi\right\|_{k_j} \leq KMC\left(\sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s,\gamma_j k_j(s)) k_1(s+1)^{-1}\right)\|\eta-\xi\|_{k_j}.$$

Com efeito, notar que $\|\eta(n)\|_{\mathfrak{B}}$, $\|\xi(n)\|_{\mathfrak{B}} \leq \gamma_j k_j(s)$, e portanto

$$\begin{aligned}
&\left\|B^j\eta(n) - B^j\xi(n)\right\|_{\mathfrak{B}} k_j(n)^{-1} \\
&\leq KM\sum_{s=n_o}^{n-1} k_1(n)\, k_1(s+1)^{-1}\, k_1(s)^{-1}\, F_1(s,\gamma_j k_j(s))\,\|\eta(s)-\xi(s)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} \\
&+ KM\sum_{s=n}^{\infty} k_2(n)\, k_2(s+1)^{-1}\, k_1(s)^{-1}\, F_1(s,\gamma_j k_j(s))\,\|\eta(s)-\xi(s)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} \\
&\leq KMC\left(\sum_{s=n_o}^{n-1} F_1(s,\gamma_j k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1}\right)\|\eta-\xi\|_{k_j} \\
&+ KMC\left(\sum_{s=n}^{\infty} F_1(s,\gamma_j k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1}\right)\|\eta-\xi\|_{k_j} \\
&\leq KMC\left(\sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s,\gamma_j k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1}\right)\|\eta-\xi\|_{k_j}.
\end{aligned}$$

O que prova nossa afirmação.

Denotemos por $\widetilde{M_j} := MC^{j-1}k_j(n_o)^{-1}$ e seja $\varphi \in P(n_o)\mathfrak{B}$ tal que

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \leq \left(\gamma_j\beta_{\mu_j} - \delta_j(\gamma_j)\right)\widetilde{M}_j^{-1},\ para\ j = 1, 2.$$

Definamos o operador $T^j$ sobre o conjunto $X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$, $j = 1, 2$ por

$$T^j\xi(n) := Z_\varphi(n) + \sum_{s=n_o}^{\infty}\Gamma(n,s)\, E^o f_2(s,\xi), \tag{1.15}$$

para $\xi \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$ e $n \geq n_o$. Provaremos que $T^j\xi \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$. De fato, temos que $T^j\xi$ pode ser estimado como segue:

$$\left\|T^j\xi(n)\right\|_{\mathfrak{B}} k_j(n)^{-1} \leq \gamma_j\beta_{\mu_j} - \delta_j(\gamma_j) + \Gamma_1\sum_{s=n_o}^{\infty} F_{2j}(s,\gamma_j)\, k_1(s+1)^{-1}.$$

Ou seja,

$$\left\|T^j\xi(n)\right\|_{\mathfrak{B}} k_j(n)^{-1} \leq \gamma_j\beta_{\mu_j} \leq \gamma_j.$$

Vamos verificar que $Z_\infty^{k_j}(T^j\xi) = 0$ uniformemente em $\xi \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$ :

$$\begin{aligned}
&\|T^j\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1} \\
&\leq \|T(n,n_o)P(n_o)\|\, k_1^{-1}\,\|\varphi\|_{\mathfrak{B}}
\end{aligned}$$

$$+ KMC^{j-1}k_1(n_1)\,k_1(n_o)\,k_j(n_o)^{-1}\,\|T(n,n_1)\,P(n_1)\|\,k_1(n)^{-1}\sum_{s=n_o}^{n_1-1}F_{2j}(s,\mu_j)\,k_1(s+1)^{-1}$$
$$+ KMC^{j-1}k_1(n_o)\,k_j(n_o)^{-1}\sum_{s=n_1}^{\infty}F_{2j}(s,\mu_j)\,k_1(s+1)^{-1}$$

Para $n_1$ suficientemente grande, $n > n_1$, temos que cada parcela se faz tão pequena quanto se deseja, uniformemente em $\xi$. Assim temos que $T^j\xi \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$.

Se $\xi, \eta \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$, então, temos que $T^j\xi + B^j\eta \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$. Com efeito:

$$\begin{aligned}\left\|T^j\xi(n) + B^j\eta(n)\right\|_{\mathfrak{B}} k_j(n)^{-1} &\le \widetilde{M}_j\,\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} + \delta_j(\gamma_j) + \gamma_j\left(\tau_j - \beta_{\mu_j}\right)\\ &\le \gamma_j\,.\end{aligned}$$

Agora, usando a condição ($D_2$) vamos provar que o operador $T^j$ é contínuo. Para isso, consideremos uma sequência $\{\xi_m\}_m$ tal que $\xi_m \to \xi$ em $X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$. Seja $n_1 \ge n_o$ suficientemente grande. Levando em conta a propriedade de compensação e com a ajuda de (d-3), temos:

$$\|T^j\xi_m(n) - T^j\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}\,k_j(n)^{-1}$$

$$\le KMC\max_{n_o\le s\le n_1-1}|g_j(s,\xi_m) - g_j(s,\xi)|\sum_{s=n_o}^{n_1-1}k_1(n)\,k_1(s+1)^{-1}\,F_{2j}(s,\mu_j)\,k_j(n)^{-1}$$
$$+ KM\sum_{s=n_1}^{n-1}k_1(n)\,k_1(s+1)^{-1}\,F_{2j}(s,\mu_j)\,|g_j(s,\xi_m) - g_j(s,\xi)|\,k_j(n)^{-1}$$
$$+ KM\sum_{s=n}^{\infty}k_2(n)\,k_2(s+1)^{-1}\,F_{2j}(s,\mu_j)\,|f_2(s,\xi_m) - f_2(s,\xi)|\,k_j(n)^{-1}$$

$$\le KMC^{j-1}k_1(n_o)\,k_j(n_o)^{-1}\max_{n_o\le s\le n_1-1}|g_j(s,\xi_m) - g_j(s,\xi)|\sum_{s=n_o}^{n_1-1}F_{2j}(s,\mu_j)\,k_1(s+1)^{-1}$$
$$+ KMC^{j-1}k_1(n_o)\,k_j(n_o)^{-1}\sum_{s=n_1}^{n-1}k_1(s+1)^{-1}\,|f_2(s,\xi_m) - f_2(s,\xi)|$$
$$+ KMC^{j}k_1(n_o)\,k_j(n_o)^{-1}\sum_{s=n}^{\infty}k_1(s+1)^{-1}\,|f_2(s,\xi_m) - f_2(s,\xi)|$$

$$\le L_j\delta_j(\mu_j)\max_{n_o\le s\le n_1-1}|g_j(s,\xi_m) - g_j(s,\xi)| + 2\Gamma_1 L_j\sum_{s=n_1}^{\infty}F_{2j}(s,\mu_j)\,k_1(s+1)^{-1}\,.$$

Onde $L_j = \dfrac{1}{\Gamma_1}KMC^jk_1(n_o)\,k_j(n_o)^{-1}$ e $\delta_j(\mu_j)$ é dada por (d-4). Assim obtemos que:

$$\|T^j\xi_m - T^j\xi\|_{k_j} \le L_j\delta_j(\mu_j)\max_{n_o\le s\le n_1-1}|g_j(s,\xi_m) - g_j(s,\xi)| + 2\Gamma_1 L_j\sum_{s=n_1}^{\infty}F_{2j}(s,\mu_j)\,k_1(s+1)^{-1}\,,$$

o que prova a continuidade do operador $T^j$, como tínhamos afirmado.

Um passo essencial é agora mostrar que a imagem de $T^j$ é relativamente compacta em $X_{\infty,k_j}$. Para isso primeiro provaremos que o conjunto

$$H_n^{k_j}\left(T^j X_{\infty,k_j}[\gamma_j]\right) = \left\{T^j\xi(n)\, k_j(n)^{-1} : \xi \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]\right\}$$

é relativamente compacto em $\mathfrak{B}$ para todo $n \geq n_o$. Consideremos uma sequência arbitrária $\{\xi_m\}_m$ em $X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$. Então $\{g_j(\cdot,\xi_m)\}_m$ é relativamente compacto em $\ell^\infty$ (aqui $\ell^\infty$ denota o espaço de Banach das sequências limitadas de $\mathbb{N}(n_o)$ em $\mathbb{C}^r$). Com efeito, notar que de (d-3) é limitado, pois

$$\begin{aligned} |g_j(n,\xi_m)| &\leq F_{2j}(n,\mu_j)^{-1} F_{2j}\left(n, \|\xi_m\|_{k_j}\right) \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

e ($D_3$) garante que é equiconvergente. Assim, existe uma subsequências $\{g_j(\cdot,\xi_{m_i})\}_i$ uniformemente convergente para algum $\psi_j \in \ell^\infty$. Fazendo

$$\varphi_j(n) := F_{2j}(n,\mu_j)\,\psi_j(n),$$

podemos verificar que a sequência $T^j\xi_{m_i}(n)\,k_j(n)^{-1}$ converge para

$$Z_\varphi(n)\,k_j(n)^{-1} + \sum_{s=n_o}^{\infty} \Gamma(n,s)\,E^o\varphi_j(s)\,k_j(n)^{-1}.$$

De fato, sempre usando a propriedade de compensação, temos:

$$\begin{aligned} &\left\|T^j\xi_{m_i}(n) - Z_\varphi(n) - \sum_{s=n_o}^{\infty}\Gamma(n,s)\,E^o\varphi_j(s)\right\|_{\mathfrak{B}} k_j(n)^{-1} \\ &\qquad \leq K\sum_{s=n_o}^{\infty}\|\Gamma(n,s)\|\,F_{2j}(s,\mu_j)\,|g_j(s,\xi_{m_i}) - \psi_j(s)|\,k_j(n)^{-1} \\ &\qquad \leq K\,\|g_j(\cdot,\xi_{m_i}) - \psi_j\|_\infty \sum_{s=n_o}^{\infty}\|\Gamma(n,s)\|\,F_{2j}(s,\mu_j)\,k_j(n)^{-1} \\ &\qquad \leq L_j\delta_j(\mu_j)\,\|g_j(\cdot,\xi_{m_i} - \psi_j)\|_\infty. \end{aligned}$$

A equiconvergência em peso em $\infty$ da imagem de $T^j$ é uma consequência imediata do fato que o $k_j$-limite de $T^j\xi$ é zero uniformemente em $\xi \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$.

Finalmente, o critério de compacidade em $X_{\infty,k_j}$ leva a concluir que a imagem de $T^j$ é relativamente compacta em $X_{\infty,k_j}$. Agora, usando o teorema de Krasnoselky, temos que $T^j + B^j$ tem um ponto fixo $\xi \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$. Ou seja, temos que $\xi(n) = T^j\xi(n) + B^j\xi(n)$, para $n \geq n_o$, ou

$$\xi(n) = Z_\varphi(n) + \sum_{s=n_o}^{\infty} \Gamma(n,s) E^o(f_1(s,\xi(s)) + f_2(s,\xi)) \ ; \quad n \geq n_o.$$

Em particular, obtemos que:

$$\xi(n_o) = P(n_o)\varphi - \sum_{s=n_o}^{\infty} T(n_o, s+1) Q(s+1) E^o(f_1(s,\xi(s)) + f_2(s,\xi)).$$

Ou seja:

$$P(n_o)\varphi = \xi(n_o) + \sum_{s=n_o}^{\infty} T(n_o, s+1) Q(s+1) E^o\Lambda(s,\xi).$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\xi(n) = T(n,n_o)&\left(\xi(n_o) + \sum_{s=n_o}^{\infty} T(n_o,s+1) Q(s+1) E^o\Lambda(s,\xi)\right)\\
&+ \sum_{s=n_o}^{n-1} T(n,s+1) P(s+1) E^o\Lambda(s,\xi)\\
&- \sum_{s=n}^{\infty} T(n,s+1) Q(s+1) E^o\Lambda(s,\xi)\\
&= T(n,n_o)\xi(n_o) + \sum_{s=n_o}^{n-1} T(n,s+1) E^o\Lambda(s,\xi)
\end{aligned}$$

onde $\Lambda(s,\xi) := f_1(s,\xi(s)) + f_2(s,\xi)$.

Portanto $\xi$ satisfaz as condições do Lema 1.1.9. Assim, definindo $y$ por

$$y(n) = \begin{cases} \xi(n)(0), & \text{se } n \geq n_o, \\ \xi(n_o)(n - n_o), & \text{se } n < n_o, \end{cases}$$

temos que $y$ é solução da equação (1.2) e $y_n = \xi(n)$, $n \geq n_o$. O que conclui a demonstração do teorema. ∎

Antes de proceder com o próximo resultado, vamos nos concentrar nas seguintes duas observações.

**Observação 1.2.2.** *Como foi dito antes, o Teorema 1.2.1 é um resultado muito melhor do que o Teorema 4.1 de [8], observamos que conseguimos eliminar uma condição usada no argumento da sua prova, a saber a condição (iv) desse teorema.*

**Observação 1.2.3.** *No Teorema 3.1 de [7] (respectivamente o Teorema 4.1 de [8]) foi provada a continuidade da aplicação $\varphi \to y_\bullet(\varphi)$ e a bicontinuidade da correspondência $y_\bullet(\varphi) \to Z_\varphi$ para o sistema em diferenças do tipo Volterra autônomo (respectivamente não autônomo), com perturbação Lipschitz, sob o suposto que o operador solução, o qual é associado com o sistema em diferenças de Volterra homogêneo autônomo (respectivamente não autônomo), tem uma dicotomia somável (respectivamente $(k_1, k_2)$-dicotomia). Devemos observar que em nosso caso este resultado não vale, exceto para a aplicação $y_\bullet(\varphi) \to Z_\varphi$, a qual é contínua justamente pelas condições do Teorema 1.2.1 (ver observação 1.3.2). Contudo, podemos obter a continuidade das aplicações prévias se substituímos a condição $(D_2)$ do Teorema 1.2.1, pela seguinte condição:*

*$(D_4)$ Existem constantes positivas $\mu_{2j}$, $j = 1, 2$ e funções $G_j : \mathbb{N}(n_o) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ não-decrescentes com respeito à segunda e à terceira variáveis, tal que $G_j(n, 0, 0) = 0$, para $n \geq n_o$, além de*

$$\sum_{s=n_o}^{\infty} F_{2j}(s, \mu_j)\, G_j(s, \mu_{2j}, \mu_{2j})\, k_1(s+1)^{-1} < +\infty,$$

*e*

$$|g_j(n, \xi) - g_j(n, \eta)| \leq G_j\left(n, \|\xi\|_{k_j}, \|\eta\|_{k_j}\right) \|\xi - \eta\|_{k_j},$$

*para todo $\xi, \eta \in X_{k_j}$.*

*Para provar a continuidade das aplicações prévias, primeiro notamos que podemos escolher $\gamma_j$ no Teorema 1.2.1 com $0 < \gamma_j < \min\{\lambda_j,\, \mu_j,\, \mu_{1j},\, \mu_{2j}\}$ tal que*

$$\begin{aligned}\tau_j := \beta_{\mu_j} + KMC \sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s, \gamma_j k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1} \\ + \Gamma_1 \sum_{s=n_o}^{\infty} F_{2j}(s, \mu_j)\, G_j(s, \gamma_j, \gamma_j)\, k_1(s+1)^{-1} < 1.\end{aligned}$$

*Além disso, temos as seguintes estimativas responsáveis pela continuidade das aplicações precedentes:*

$$\left\| \sum_{s=n_o}^{\infty} \Gamma(n, s)\, E^o\left(f_2(s, y_\bullet^j(\varphi)) - f_2(s, y_\bullet^j(\varphi_o))\right) \right\|_{\mathfrak{B}} k_j(n)^{-1}$$

$$\leq \Gamma_1 \sum_{s=n_o}^{\infty} G_j \left(s, \|y^j_\bullet(\varphi)\|_j, \|y^j_\bullet(\varphi_o)\|_j\right) \|y^j_\bullet(\varphi) - y^j_\bullet(\varphi_o)\|_{k_j} F_{2j}(s,\mu_j)\, k_1(s+1)^{-1}$$
$$\leq \Gamma_1 \left(\sum_{s=n_o}^{\infty} F_{2j}(s,\mu_j)\, G_j(s,\gamma_j,\gamma_j)\, k_1(s+1)^{-1}\right) \|y^j_\bullet(\varphi) - y^j_\bullet(\varphi_o)\|_{k_j},$$

*e é fácil ver que:*

$$\left\|\sum_{s=n_o}^{\infty} \Gamma(n,s)\, E^o\left(f_1\left(s, y^j_s(\varphi)\right) - f_1\left(s, y^j_s(\varphi_o)\right)\right)\right\|_{\mathfrak{B}} k_j(n)^{-1}$$
$$\leq KMC^j \left(\sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s, \gamma_j k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1}\right) \left\|y^j_\bullet(\varphi) - y^j_\bullet(\varphi_o)\right\|_{k_j}$$

*Por outra parte,*

$$\|y^j_n(\varphi) - y^j_n(\varphi_o)\|_{\mathfrak{B}}\, k_j(n)^{-1}$$
$$\leq MC^{j-1} k_j(n_o)^{-1} \|\varphi - \varphi_o\|_{\mathfrak{B}}$$
$$+ \Gamma_1 \left(\sum_{s=n_o}^{\infty} F_{2j}(s,\mu_j)\, G_j(s,\gamma_j,\gamma_j)\, k_1(s+1)^{-1}\right) \left\|y^j_\bullet(\varphi) - y^j_\bullet(\varphi_o)\right\|_{k_j}$$
$$+ KMC \left(\sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s, \gamma_j k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1}\right) \left\|y^j_\bullet(\varphi) - y^j_\bullet(\varphi_o)\right\|_{k_j}$$

*Donde,*

$$\left(1 - \tau_j + \beta_{\mu_j}\right) \left\|y^j_\bullet(\varphi) - y^j_\bullet(\varphi_o)\right\|_{k_j} \leq \widetilde{M}_j \|\varphi - \varphi_o\|_{\mathfrak{B}},$$

*Ou seja,*

$$\left\|y^j_\bullet(\varphi) - y^j_\bullet(\varphi_o)\right\|_{k_j} \leq \frac{\widetilde{M}_j}{\left(1 - \tau_j + \beta_{\mu_j}\right)} \|\varphi - \varphi_o\|_{\mathfrak{B}}.$$

*Onde $\widetilde{M}_j$ é a constante dada na prova do Teorema 1.2.1.*

*Usando o mesmo tipo de argumento temos a seguinte desigualdade:*

$$\left\|y^j_\bullet(\varphi) - y^j_\bullet(\varphi_o)\right\|_{k_j} \leq \|Z_\varphi - Z_{\varphi_o}\|_{k_j} + \left(\tau_j - \beta_{\mu_j}\right) \left\|y^j_\bullet(\varphi) - y^j_\bullet(\varphi_o)\right\|_{k_j},$$

*donde*

$$\left(1 - \tau_j + \beta_{\mu_j}\right) \left\|y^j_\bullet(\varphi) - y^j_\bullet(\varphi_o)\right\|_{k_j} \leq \|Z_\varphi - Z_{\varphi_o}\|_{k_j}.$$

*Notamos que* $\Gamma^j = T^j + B^j$ *é uma* $\tau_j$*-contração. Com efeito,*

$$
\begin{aligned}
&\left\|\Gamma^j \xi(n) - \Gamma^j \eta(n)\right\|_{\mathfrak{B}} k_j(n)^{-1} \\
&\qquad \leq \Gamma_1 \left( \sum_{s=n_o}^{\infty} F_{2j}(s,\mu_j)\, G_j(s,\gamma_j,\gamma_j)\, k_1(s+1)^{-1} \right) \|\xi - \eta\|_{k_j} \\
&\qquad + KMC \left( \sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s,\gamma_j k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1} \right) \|\xi - \eta\|_{k_j} \\
&\qquad \leq \tau_j \|\xi - \eta\|_{k_j}
\end{aligned}
$$

*Notamos que se para qualquer* $n \geq n_o$, *temos que as funções* $\varphi \to g_j(n, y^j_\bullet(\varphi))$, $j = 1, 2$ *são contínuas, então as funções* $\varphi \to y^j_\bullet(\varphi)$, $j = 1, 2$ *também são contínuas. Com efeito, para cada* $\xi \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$, *temos:*

$$
\begin{aligned}
\left(1 - \tau_j + \beta_{\mu_j}\right) \left\| y^j_\bullet(\varphi) - y^j_\bullet(\varphi_o) \right\|_{k_j} \leq\, & \widetilde{M}_j \|\varphi - \varphi_o\|_{\mathfrak{B}}\, \delta_j(\mu_j) \\
& \max_{s \geq n_o} \left| g_j\left(s, y^j_\bullet(\varphi)\right) - g_j\left(s, y^j_\bullet(\varphi_o)\right) \right| \\
& + 2\Gamma_1 \sum_{s=n_1}^{\infty} k_1(s+1)^{-1} F_{2j}(s,\mu_j)\,.
\end{aligned}
$$

*A última condição entretanto não garante a continuidade de* $Z_\varphi \to y^j_\bullet(\varphi)$ *(ver final da Observação 1.3.2). Isto completa a discussão da observação.*

**Observação 1.2.4.** *Se eliminamos a hipotese* $f_1(n,0) = 0$, *em (d-1), o Teorema 1.2.1 não é alterado de maneira essencial, pois é possível obter um resultado análogo para o sistema*

$$x(n+1) = L(n,x_n) + f_1(n,x_n) + f_2(n,x_\bullet) - f_1(n,0) \tag{1.16}$$

Uma questão natural para a discussão, que é de interesse intrínseco da teoria, acontece quando relaxamos a condição $\lim_{m\to\infty} k_1(m)^{-1} T(m,n) P(n) = 0$, a qual foi responsável no Teorema 1.2.1 pela existência dos $k_j$-limites dos operadores $T^j$ e $B^j$. Podemos trocar esta hipótese por uma condição mais fraca, $\lim_{m\to\infty} k_j(m)^{-1} T(m,n) P(n) = L^j(n) \in \mathcal{L}(\mathfrak{B})$.

Do ponto de vista prático, notamos que quando lidamos com situações concretas, a primeira condição é muito mais simples, para o estudo de soluções convergentes, que a segunda (ver Capítulo 2). Mas, do ponto de vista teórico, o seguinte resultado é muito mais completo que o teorema anterior. Entre outras coisas é natural esperar uma informação mais detalhada sobre o comportamento assintótico das soluções convergentes (ver (1.17),(1.18) e (1.19)).

Antes de enunciar nosso próximo teorema, notemos que pelo fato de $k_1$ e $k_2$ satisfazer a propriedade de compensação, temos que

$$0 \leq \inf_{n \geq n_o} \frac{k_1(n)}{k_2(n)} \leq c_2.$$

Seja $\omega = \inf\limits_{n \geq n_o} \frac{k_1(n)}{k_2(n)}$. Se $\omega \neq 0$, as sequências $k_1$ e $k_2$ são equivalentes, e então tem-se que $L^2 = \omega L^1$, como pode-se verificar por um cálculo direto. Caso contrario, $\omega = 0$, as sequências não são equivalentes e tem-se que $L^2 = 0$.

Por conveniencia notacional, no próximo teorema assumimos que $\omega^0 = 1$ para qualquer $\omega$ real não negativo.

**Teorema 1.2.5.** *Assumamos as hipóteses do Teorema 1.2.1, exceto $(D_1)$, a qual é substituída pela seguinte condição:*

*$(D_5)$ O sistema (1.1) tem uma $(k_1, k_2)$-dicotomia a qual é compensada e tal que*

$$\lim_{m \to \infty} k_j(m)^{-1} T(m, n) P(n) = \omega^{j-1} L^1(n),$$

*$j = 1, 2$ para todo $n \geq n_o$.*

*Então, existem constantes $\gamma_j$, $\widetilde{M}_j$ positivas, $j = 1, 2$ tais que para cada $\varphi \in P(n_o)\mathfrak{B}$ com $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \leq \left(\gamma_j \beta_{\mu_j} - \delta_j(\gamma_j)\right) \widetilde{M}_j^{-1}$, existe uma solução $y^j = y^j(\varphi) = y^j(n, n_o, \psi)$, $j = 1, 2$ com $P(n_o)\psi = \varphi$, da equação (1.2) tal que o $k_j$-limites de $y^j_\bullet$ existe e $\|y^j_\bullet\|_{k_j} \leq \gamma_j$. Além disso, temos a seguinte fórmula assintótica:*

$$y^j_n(\varphi) = Z_\varphi(n) + \sum_{s=n_o}^{n-1} \Gamma(n, s) E^o\left(f_1\left(s, y^j_s(\varphi)\right) + f_2\left(s, y^j_\bullet(\varphi)\right)\right) + o(k_j(n)), \tag{1.17}$$

*quando $n \to \infty$. O $k_j$-limite de $y^j_\bullet$ é dado por:*

$$Z^{k_j}_\infty\left(y^j_\bullet(\varphi)\right) = \omega^{j-1} L^1(n_o)\varphi + Z^{k_j}_\infty\left(\sum_{s=n_o}^{\bullet-1} \Gamma(\bullet, s) E^o\left(f_1\left(s, y^j_s(\varphi)\right) + f_2\left(s, y^j_\bullet(\varphi)\right)\right)\right). \tag{1.18}$$

*Por outra parte, se $b_j := \sup\limits_{n \geq n_o} \|L^1(n)\| k_j(n) < +\infty$, então*

$$Z^{k_j}_\infty\left(y^j_\bullet(\varphi)\right) = \omega^{j-1} L^1(n_o)\varphi + \omega^{j-1} \sum_{s=n_o}^{\infty} L^1(s+1) E^o\left(f_1\left(s, y^j_s(\varphi)\right) + f_2\left(s, y^j_\bullet(\varphi)\right)\right). \tag{1.19}$$

**Demonstração:** Usando a notação do Teorema 1.2.1, destacamos alguns argumentos da prova. Inicialmente notamos que os limites

$$\lim_{m\to\infty} A(m,\xi)\, k_j(m)^{-1} = Z_\infty^{k_j}(A(\cdot,\xi)),$$

$j=1,2$ existem uniformemente em $\xi \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$, onde $\gamma_j$ é suficientemente pequeno e

$$A(m,\xi) = \sum_{s=n_o}^{m-1} \Gamma(m,s)\, E^o f_2(s,\xi).$$

Com efeito, é suficiente provar que para todo $\varepsilon > 0$, existe um número $M_o \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\left\| A(m,\xi)\, k_j(m)^{-1} - A(n,\xi)\, k_j(n)^{-1} \right\|_{\mathfrak{B}} < \varepsilon,$$

para qualquer $m \geq n \geq M_o$, para todo $\xi \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$.

O fato que $A(m,\xi)$ verifica a última afirmação é consequência das seguintes duas estimativas: Seja $n_1$ suficientemente grande, e fixemos $M_o \geq n_1$. Para cada $m$ e $n$, satisfazendo $m \geq n \geq M_o$, temos:

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{s=n_o}^{n_1-1} \left[ \Gamma(n,s)\, k_j(n)^{-1} - \Gamma(m,s)\, k_j(m)^{-1} \right] E^o f_2(s,\xi) \right\|_{\mathfrak{B}} \\
&\qquad \leq K \sum_{s=n_o}^{n_1-1} F_{2j}(s,\gamma_j) \left[ \max_{n_o \leq s \leq n_1-1} \left\| \Gamma(n,s)\, k_j(n)^{-1} - \omega^{j-1} L^1(s+1) \right\| \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \max_{n_o \leq s \leq n_1-1} \left\| \Gamma(m,s)\, k_j(m)^{-1} - \omega^{j-1} L^1(s+1) \right\| \right].
\end{aligned}$$

Nossa segunda estimativa é:

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{s=n_1}^{n-1} \left( \Gamma(n,s)\, k_j(n)^{-1} - \Gamma(m,s)\, k_j(m)^{-1} \right) E^o f_2(s,\xi) \right\|_{\mathfrak{B}} \\
&\qquad\qquad + \left\| \sum_{s=n}^{m-1} \Gamma(m,s)\, k_j(m)^{-1} E^o f_2(s,\xi) \right\|_{\mathfrak{B}} \\
&\qquad\qquad \leq 3\Gamma_1 \sum_{s=n_1}^{\infty} F_{2j}(s,\gamma_j)\, k_2(s+1)^{-1},
\end{aligned}$$

onde $\Gamma_1$ é dada por (d-4). Assim, temos provada nossa afirmação.

Se $B(n,\eta) = \sum_{s=n_o}^{n-1} \Gamma(n,s)\, E^o f_1(s,\eta(s))$, então os limites $Z_\infty^{k_j}(B(\cdot,\eta))$, $j=1,2$ existem para cada $\eta \in X_{\infty,k_j}[\gamma_j]$. O argumento para provar isto é análogo ao anterior. Sejam

$m, n, M, n_1$ como antes. Então temos as seguintes estimativas:

$$\left\| \sum_{s=n_o}^{n_1-1} \left( \Gamma(n,s) k_j(n)^{-1} - \Gamma(m,s) k_j(m)^{-1} \right) E^o f_1(s, \eta(s)) \right\|_{\mathfrak{B}}$$

$$\leq c_2(n_1) \max_{n_o \leq s \leq n_1} \left\| \Gamma(n,s) k_j(n)^{-1} - \omega^{j-1} L^1(s+1) \right\|$$

$$+ \max_{n_o \leq s \leq n_1} \left\| \Gamma(m,s) k_j(m)^{-1} - \omega^{j-1} L^1(s+1) \right\|,$$

onde $c_2(n_1)$ é uma constante que depende de $n_1$, para $n_1$ suficientemente grande. A segunda estimativa é:

$$\left\| \sum_{s=n_1}^{n-1} \left( \Gamma(n,s) k_j(n)^{-1} - \Gamma(m,s) k_j(m)^{-1} \right) E^o f_1(s, \eta(s)) \right\|_{\mathfrak{B}}$$

$$+ \left\| \sum_{s=n}^{m-1} \Gamma(m,s) k_j(m)^{-1} E^o f_1(s, \eta(s)) \right\|_{\mathfrak{B}}$$

$$\leq 3\gamma_j KMC \sum_{s=n_1}^{\infty} F_1(s, \gamma_j k_j(s)) k_1(s+1)^{-1}$$

Assim os $k_j$-limites de $B^j \eta$ são explicitamente calculáveis, e de fato temos que $Z_\infty^{k_j}(B^j \eta) = Z_\infty^{k_j}(B(\cdot, \eta))$.

A equiconvergência em $\infty$ da imagem de $T^j$ é consequência imediata do fato que $Z_\infty^{k_j}(T^j \xi) = \omega^{j-1} L^1(n_o) \varphi + Z_\infty^{k_j}(A(\cdot, \xi))$, uniformemente em $\xi \in X_{\infty, k_j}[\gamma_j]$.

Assumamos que $b_j := \sup_{n \geq n_o} \|L^1(n)\| k_j(n) < \infty$, e denotemos por $A_j(s) := f_1(s, y_s^j) + f_2(s, y_\bullet^j)$. Provaremos que:

$$\lim_{n \to \infty} k_j(n)^{-1} \sum_{s=n_o}^{n-1} \Gamma(n,s) E^o A_j(s) = \omega^{j-1} \sum_{s=n_o}^{\infty} L^1(s+1) E^o A_j(s).$$

Notamos que a última série esta bem definida, pois de fato temos:

$$\left\| \omega^{j-1} \sum_{s=n_o}^{\infty} L^1(s+1) E^o A_j(s) \right\|_{\mathfrak{B}}$$

$$\leq K b_j \omega^{j-1} \sum_{s=n_o}^{\infty} \left( k_1(s)^{-1} F_1(s, \gamma_j k_j(s)) \|y_s^j\|_{\mathfrak{B}} + F_{2j}\left(s, \|y_\bullet^j\|_{k_j}\right) \right) k_j(s+1)^{-1}$$

$$\leq K b_j \omega^{j-1} C^{j-1} \|y_\bullet^j\|_{k_j} \sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s, \gamma_j k_j(s)) k_1(s+1)^{-1}$$

$$+ Kb_j\omega^{j-1}C^{j-1}k_1(n_o)\,k_j(n_o)^{-1}\sum_{s=n_o}^{\infty}F_{2j}(s,\gamma_j)\,k_j(s+1)^{-1}$$
$$\leq Kb_j\omega^{j-1}C^{j-1}\gamma_j\sum_{s=n_o}^{\infty}\big(F_1(s,\gamma_jk_j(s))\,k_1(s+1)^{-1}$$
$$+ \tfrac{1}{\Gamma_1}Kb_j\omega^{j-1}C^{j-1}k_1(n_o)\,k_j(n_o)^{-1}\,\delta_j(\gamma_j)\,.$$

Ou seja, a série $\sum_{s=n_o}^{\infty}L^j(s+1)\,E^oA_j(s)$ é dominada pelas séries convergentes

$$\sum_{s=n_o}^{\infty}F_1(s,\gamma_jk_j(s))\,k_1(s+1)^{-1}\quad \text{e}\quad \delta_j(\gamma_j)\,.$$

Para provar o $k_j$-limite, temos a seguinte estimativa: Escolhamos $n_1$ suficientemente grande e seja $n\geq n_1$ arbitrario. Então:

$$\left\|k_j(n)^{-1}\sum_{s=n_o}^{n-1}\Gamma(n,s)\,E^oA_j(s)-\sum_{s=n_o}^{\infty}\omega^{j-1}L^1(s+1)\,E^oA_j(s)\right\|_{\mathfrak{B}}$$
$$\leq c(n_1)\max_{n_o\leq s\leq n_1-1}\left\|k_j(n)^{-1}\Gamma(n,s)-\omega^{j-1}L^1(s+1)\right\|$$
$$+ KMC\sum_{s=n_1}^{n-1}\big(\gamma_jF_1(s,\gamma_jk_j(s))+k_1(n_o)\,k_j(n_o)^{-1}F_{2j}(s,\gamma_j)\big)\,k_1(s+1)^{-1}$$
$$+ Kb_j\omega^{j-1}C\sum_{s=n}^{\infty}\big(\gamma_jF_1(s,\gamma_jk_j(s))+k_1(n_o)\,k_j(n_o)^{-1}F_{2j}(s,\gamma_j)\big)\,k_1(s+1)^{-1}$$
$$\leq c(n_1)\max_{n_o\leq s\leq n_1-1}\left\|k_j(n)^{-1}\Gamma(n,s)-\omega^{j-1}L^1(s+1)\right\|$$
$$+d\sum_{s=n_1}^{\infty}\left(F_1(s,\gamma_jk_j(s))+F_{2j}(s,\gamma_j)\right)k_1(s+1)^{-1}\,, \tag{1.20}$$

onde notamos que $c(n_1)$ é uma constante que depende de $n_1$ e $d$ é uma constante independente de $n$. ∎

**Observação 1.2.6.** *O Teorema 1.2.5 fornece a seguinte estimativa a priori para os $k_j$-limites das soluções $y_\bullet^j$, $\left\|Z_\infty^{k_j}(y_\bullet^j)\right\|_{\mathfrak{B}}\leq\gamma_j$. Agora, com ajuda da desigualdade de Gronwall discreta, podemos melhorar esta cota superior como segue: $\left\|Z_\infty^{k_j}(y_\bullet^j)\right\|_{\mathfrak{B}}\leq a_j\gamma_j$, onde $0<a_j<1$. Para provar isto, notemos que podemos escolher $\tau_j$, definido na demonstração do Teorema*

*1.2.1, tal que $a_j = \tau_j e < 1$, e então:*

$$\begin{aligned} k_j(n)^{-1}\left\|y_n^j\right\|_{\mathfrak{B}} &\leq \gamma_j\beta_{\mu_j} - \delta(\gamma_j) \\ &+ KMC\sum_{s=n_o}^{n-1} F_1(s,\gamma_j k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1}\left\|y_s^j\right\|_{\mathfrak{B}} k_1(s)^{-1} \\ &+ KMC\left\|y_{\bullet}^j\right\|_{k_j}\sum_{s=n}^{\infty} F_1(s,\gamma_j k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1} \\ &+ \Gamma_1\sum_{s=n_o}^{\infty} F_{2j}(s,\gamma_j)\, k_1(s+1)^{-1} \\ &\leq \gamma_j\beta_{\mu_j} \\ &+ KMC\gamma_j\sum_{s=n}^{\infty} F_1(s,\gamma_j k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1} \\ &+ \sum_{s=n_o}^{n-1} KMCF_1(s,\gamma_j k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1}\left\|y_s^j\right\|_{\mathfrak{B}} k_1(s)^{-1}. \end{aligned}$$

*Assim, definindo as seguintes funções: $h_j(s) := KMCF_1(s,\gamma_j k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1}$, $u_j(s) := k_j(s)^{-1}\|y_s^j\|_{\mathfrak{B}}$ e $p_j(s) := \gamma_j\beta_{\mu_j} + KMC\gamma_j\sum_{s=n}^{\infty} F_1(s,\gamma_j k_j(s))\, k_1(s+1)^{-1}$, temos que:*

$$u_j(n) \leq p_j(n) + \sum_{s=n_o}^{n-1} h_j(s)\, u_j(s),$$

*ou*

$$u_j(n) \leq \gamma_j\tau_j + \sum_{s=n_o}^{n-1} h_j(s)\, u_j(s),$$

*e pela desigualdade de Gronwall discreta, obtemos que:*

$$u_j(n) \leq \gamma_j\tau_j\prod_{\tau=s+1}^{n-1}(1+h_j(\tau)),$$

*donde*

$$\begin{aligned} u_j(n) &\leq \gamma_j\tau_j\prod_{\tau=s+1}^{n-1} e^{h_j(s)} \\ &\leq \gamma_j\tau_j e^{\tau_j-\beta_{\mu_j}} \\ &\leq a_j\gamma_j, \end{aligned}$$

*e assim $\left\|Z_{\infty}^{k_j}(y_{\bullet}^j)\right\|_{\mathfrak{B}} \leq a_j\gamma_j$, o que prova nossa afirmação.*

A seguinte observação fornece importante informação a respeito do conjunto das soluções convergentes de (1.2).

**Observação 1.2.7.** *Denotemos por* $R_j := \left(\gamma_j\beta_{\mu_j} - \delta_j(\gamma_j)\right)\widetilde{M}_j^{-1}$ *e seja* $P(n_o)\mathfrak{B}[R_j]$ *a bola* $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \le R_j$ *em* $P(n_o)\mathfrak{B}$. *Sob as condições do Teorema 1.2.5 podemos deduzir que o conjunto* $\Omega$ *de todas as soluções convergentes* $y^j_\bullet(\varphi)$ *da equação (1.2) com* $\varphi \in P(n_o)\mathfrak{B}[R_j]$ *é equiconvergente em peso em* $\infty$ *no espaço* $X_{\infty,k_j}$. *Isto segue de (1.20) combinado com o fato que* $\lim\limits_{n\to\infty} k_j(n)^{-1} o(k_j(n)) = 0$ *uniformemente em* $\Omega$, *onde* $o(k_j(n))$ *é dado por (1.17).*

*Não podemos garantir que* $\Omega$ *seja relativamente compacto em* $X_{\infty,k_j}$. *Porém, se nós modificamos ligeiramente esse conjunto, digamos* $\widetilde{\Omega}$, *como o conjunto dos* $y^j_\bullet(\varphi) - Z_\varphi(\cdot)$, *com* $\varphi \in P(n_o)\mathfrak{B}[R_j]$ *e introduzimos uma condição similar à* $(D_3)$ *do Teorema 1.2.1, dada por:*

$(D_6)$ *Os limites* $\widetilde{\pi}(\xi) := Z^1_\infty(\widetilde{g}_j(\cdot,\xi))$, $j = 1,2$ *existem uniformemente em* $\xi \in X_{\infty,k_j}[\lambda_j]$, *onde*

$$\widetilde{g}_j(n,\xi) = k_1(n)\,k_j(n)^{-1} F_1(n,\mu_{1j}k_j(n))^{-1} f_1(n,\xi(n)).$$

*Então, usando o critério de compacidade, podemos provar que* $\widetilde{\Omega}$ *é relativamente compacto em* $X_{\infty,k_j}$. *Com efeito, consideremos o conjunto*

$$H_n^{k_j}\left(\widetilde{\Omega}\right) = \left\{y_n^j(\varphi)\,k_j(n)^{-1} - Z_\varphi(n)\,k_j(n)^{-1} : \varphi \in P(n_o)\mathfrak{B}[R_j]\right\}$$

*Seja a sequência* $\{\varphi_m\}_m$ *em* $P(n_o)\mathfrak{B}[R_j]$. *Então, pelo argumento usado na prova do Teorema 1.2.1, existe uma subsequência* $\{\varphi_{m_i}\}_i$ *tal que* $\{g_j(\cdot, y^j_\bullet(\varphi_{m_i}))\}_i$ *é uniformemente convergente para algúm* $\psi_j \in \ell^\infty$. *Além disso temos*

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{g}_j\left(n, y^j_\bullet(\varphi_{m_i})\right)\right| &\le \left\|y^j_\bullet(\varphi_{m_i})\right\|_{k_j}\\ &\le \gamma_j.\end{aligned}$$

*Assim, a sequência* $\{\widetilde{g}_j(\cdot, y^j_\bullet(\varphi_{m_i}))\}_i$ *é limitada, e de* $(D_6)$ *é equiconvergente. Portanto, existe uma subsequência desta, uniformemente convergente para algúm* $\widetilde{\psi}_j \in \ell^\infty$. *Definamos*

$$\varphi_j(n) := F_{2j}(n,\mu_j)\,\psi_j(n) + k_1(n)^{-1} k_j(n)\,F_1(n,\mu_{1j}k_j(n))\,\widetilde{\psi}_j(n).$$

*Então, temos a seguinte estimativa:*

$$\begin{aligned}&\left\|y_n^j(\varphi_{m_i}) - Z_{\varphi_{m_i}}(n) - \sum_{s=n_o}^{\infty}\Gamma(n,s)\,E^o\varphi_j(s)\right\|_{\mathfrak{B}} k_j(n)^{-1}\\ &\qquad\le KMC\sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s,\mu_{1j}k_j(s))\,k_2(s+1)^{-1}\left\|\widetilde{g}_j\left(\cdot, y^j_\bullet(\varphi_m)\right) - \widetilde{\psi}_j\right\|_\infty\\ &\qquad\quad + L_j\delta_j(\mu_j)\left\|g_j\left(\cdot, y^j_\bullet(\varphi_{m_i})\right) - \psi_j\right\|_\infty.\end{aligned}$$

*Isto mostra que* $\left(y_n^j(\varphi_{m_i}) - Z_{\varphi_{m_i}}(n)\right) k_j(n)^{-1}$ *é convergente e converge para*

$$\sum_{s=n_o}^{\infty} \Gamma(n,s)\, E^o \varphi_j(s)\, k_j(n)^{-1}$$

*quando* $i \to \infty$.

*A equiconvergência de* $\widetilde{\Omega}$ *é evidente dos resultados prévios. Assim, pelo critério de compacidade temos que é relativamente compacto, como tínhamos afirmado.*

*Destacamos que até agora este tipo de resultados não tem sido analisados na literatura existente sobre equações em diferenças funcionais.*

## 1.3 Dicotomia $p$-somável em peso

Até aqui, temos analisado o problema da convergência exclusivamente do ponto de vista das $(k_1, k_2)$-dicotomias. Nesta seção vamos nos concentrar em analisar este problema considerando dicotomias $p$-somáveis em peso.

Em [7] o autor prova a existência de soluções convergentes de um sistema em diferenças do tipo Volterra com retardo infinito usando dicotomias somáveis e o princípio da contração. Porém, esses resultados não são suficientemente ótimos para incluir perturbações mais gerais. Sem dúvida, pesquisas nessa direção são tecnicamente mais complicadas, pois é necessário aplicar outros tipos de argumentos de ponto fixo, como também usar critérios de compacidade eficazes, os quais nos fornecem uma ferramenta sensível para processar novos resultados.

No que segue-se $p$ e $q$ são expoentes conjugados, isto é $p^{-1} + q^{-1} = 1$, e excluímos o caso $p = 1$, que corresponde a $q = \infty$.

Para estabelecer os seguintes resultados (ver Teorema 1.3.1 e 1.3.4) necessitamos introduzir a hipótese:

(D)$^*$ As seguintes condições valem:

(d-1)$^*$ A função $f_1(n,\varphi)$ é localmente Lipschitz em $\varphi \in \mathfrak{B}$; isto é, para cada número positivo $R$, para todo $\varphi$, $\psi \in \mathfrak{B}$, com $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}}$, $\|\psi\|_{\mathfrak{B}} \leq R$, tem-se:

$$|f_1(n,\varphi) - f_1(n,\psi)| \leq a_2(n)^{1/p} F_1(n,R)^{1/q} \|\varphi - \psi\|_{\mathfrak{B}},$$

onde $F_1 : \mathbb{N}(n_o) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua e não decrescente com respeito à segunda variável, e $f_1(n,0) = 0$, $F_1(n,0) = 0$, para $n \geq n_o$.

(d-2)* Existe uma constante positiva $\widetilde{\nu}$ tal que

$$\sum_{s=n_o}^{\infty} F_1\left(s, \widetilde{\nu} a_1(s)\right) a_1(s)^q < \infty.$$

(d-3)* Existe uma constante positiva $\lambda$ e uma função $F_2 : \mathbb{N}(n_o) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ não-decrescente com respeito à segunda variável e

$$\rho\left[F_2\right] = \sup_{n \geq n_o} F_2(n, \lambda) < \infty.$$

Também existe uma função $l \in \ell^q$ tal que, para cada $(n, \xi) \in \mathbb{N}(n_o) \times X_{a_1}$, com $\|\xi\|_{a_1} \leq \lambda$ :

$$|f_2(n, \xi)| \leq \nu(n) F_2\left(n, \|\xi\|_{a_1}\right),$$

onde $\nu(n) = a_2(n)^{1/p} l(n)$.

(d-4)* Existe uma constante positiva $\mu$ tal que

$$\beta_\mu := \sup_{\gamma \in (0,\mu]} \frac{\delta(\gamma)}{\gamma} < 1,$$

onde $\delta(\gamma) := K\widetilde{K} \|l\|_q \|F_1(\cdot, \gamma)\|_\infty$. Aqui $K$ é a constante do axioma (B) e $\widetilde{K}$ a constante da Definição 1.1.3.

O seguinte resultado fornece soluções convergentes da equação (1.2) sob o suposto que o sistema homogêneo (1.1) tem uma dicotomia $p$-somável em peso. Uma observação importante a respeito do nosso próximo resultado é o fato que este é uma versão refinada do Teorema 3.1 de [9], apresentando interessantes melhoras obtidas primeiro pela remoção de duas hipóteses (condições ($E_3$) e ($E_4$) no Teorema 3.1 de [9]) as quais foram fortemente usadas no argumento da prova desse teorema. Por outra parte, permite obter informações mais precisas sobre a expansão assintótica (ver (1.21)) das soluções convergentes obtidas em [9]. Assim, nosso Teorema 1.3.1 resulta ser mais eficiente que o Teorema 3.1 de [9] na teoria aplicada associada a este tipo de sistemas. Por exemplo, temos ganhado um resultado muito melhor que o Teorema 3.1 de [7], pois vemos que podemos retirar as condicões (iv) e (v) nesse resultado (ver [7], pag. 467, para mais detalhes).

**Teorema 1.3.1.** *Sejam p e q expoentes conjugados e assumamos que a condição (D)* vale. Suponhamos que as seguintes condições se satisfazem:*

*$(D_1)^*$ O sistema (1.1) tem uma dicotomia p-somável em peso $(a_1, a_2)$ e tal que*

$$\lim_{m\to\infty} a_1(m)^{-1} T(m,n) P(n) = 0,$$

*para cada $n \geq n_o$.*

*$(D_2)^*$ Para qualquer $n \geq n_o$, a função $g(n,\cdot) = \nu(n)^{-1} f_2(n,\cdot)$ é contínua.*

*$(D_3)^*$ O limite $\pi(\xi) = Z_\infty^{a_1}(g(\cdot,\xi))$ existe uniformemente em $\xi \in X_{\infty,a_1}[\lambda]$.*

*Então existem constantes positivas $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{M}$, tais que, para cada $\varphi \in P(n_o)\mathfrak{B}$, com $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \leq (\widetilde{\gamma}\beta_\mu - \delta(\widetilde{\gamma}))\widetilde{M}^{-1}$, existe uma solução $y = y(\varphi) = y(n, n_o, \psi)$, com $P(n_o)\psi = \varphi$, da equação (1.2) tal que $\lim_{n\to\infty} a_1(n)^{-1} y_n = 0$. Além disso temos a fórmula assintótica:*

$$y_n(\varphi) = o(a_1(n)), \tag{1.21}$$

*quando $n \to \infty$.*

**Demonstração:** Segundo (d-2)$^*$, podemos escolher uma constante apropriada $\widetilde{\gamma}$, com $0 < \widetilde{\gamma} < \min\{\lambda, \mu, \widetilde{\nu}\}$, tal que

$$\widetilde{\delta} := \beta_\mu + K\widetilde{K}\left(\sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s, \widetilde{\gamma}a_1(s))\, a_1(s)^q\right)^{1/q} < 1$$

Introduzimos o operador $B : X_{\infty,a_1}[\widetilde{\gamma}] \to X_{\infty,a_1}$, definido por (1.14). Este operador está bem definido, de fato

$$\begin{aligned}
\|B\eta(n)\|_{\mathfrak{B}}\, a_1(n)^{-1} &\leq K \sum_{s=n_o}^{\infty} \|\Gamma(n,s)\|\, a_2(s)^{1/p}\, F_1(s,\widetilde{\gamma}a_1(s))^{1/q}\, \|\eta(s)\|_{\mathfrak{B}}\, a_1(n)^{-1} \\
&\leq K\widetilde{\gamma}\left(\sum_{s=n_o}^{\infty}\|\Gamma(n,s)\|^p a_2(s)\right)^{1/p}\left(\sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s,\widetilde{\gamma}a_1(s))\, a_1(s)^q\right)^{1/q} a_1(n)^{-1} \\
&\leq K\widetilde{K}\widetilde{\gamma}\left(\sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s,\widetilde{\gamma}a_1(s))\, a_1(s)^q\right)^{1/q} \\
&\leq \widetilde{\gamma}\left(\widetilde{\delta} - \beta_\mu\right).
\end{aligned}$$

Por outra lado, devemos provar que o $a_1$-limite de $B\eta$ existe.

Seja $\varepsilon > 0$ e $n_1$ suficientemente grande. Se $n \geq n_1$, então

$$\begin{aligned}
\|B\eta(n)\|_{\mathfrak{B}}\, a_1(n)^{-1} &\leq \widetilde{\gamma}\left(\widetilde{\delta} - \beta_\mu\right)\|T(n,n_1)P(n_1)\|\, a_1(n)^{-1} a_1(n_1) \\
&\quad + \widetilde{\gamma}K\widetilde{K}\left(\sum_{s=n_1}^{\infty} F_1(s,\widetilde{\gamma}a_1(s))\, a_1(s)^q\right)^{1/q} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ou seja, $Z_{\infty}^{a_1}(B\eta) = 0$.

O operador $B$ é uma $\left(\widetilde{\delta} - \beta_\mu\right)$-contração, como mostra o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned}
\|B\eta(n) - B\xi(n)\|_{\mathfrak{B}} a_1(n)^{-1} &\le K \|\eta - \xi\|_{a_1} \left[\textstyle\sum_{s=n_o}^{\infty} \|\Gamma(n,s)\|^p a_2(s)\right]^{1/p} \\
&\qquad \left[\textstyle\sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s, \widetilde{\gamma} a_1(s)) a_1(s)^q\right]^{1/q} a_1(n)^{-1} \\
&\le \|\eta - \xi\|_{a_1} K\widetilde{K} \left[\textstyle\sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s, \widetilde{\gamma} a_1(s)) a_1(s)^q\right]^{1/q} \\
&\le \left(\widetilde{\delta} - \beta_\mu\right) \|\eta - \xi\|_{a_1}.
\end{aligned}$$

Definamos $\widetilde{M} := \sup_{n \ge n_o} a_1(n)^{-1} \|T(n, n_o) P(n_o)\|$, e seja $\varphi \in P(n_o)\mathfrak{B}$ com $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \le (\widetilde{\gamma}\beta_\mu - \delta(\widetilde{\gamma})) \widetilde{M}^{-1}$. Introduzimos o operador $T : X_{\infty,a_1}[\widetilde{\gamma}] \to X_{\infty,a_1}[\widetilde{\gamma}]$, definido por (1.15). Usando as condições (d-3)* e (d-4)*, temos que:

$$\begin{aligned}
\|T\xi(n)\|_{\mathfrak{B}} a_1(n)^{-1} &\le \widetilde{\gamma}\beta_\mu - \delta(\widetilde{\gamma}) + K \sum_{s=n_o}^{\infty} \|\Gamma(n,s)\| a_2(s)^{1/p} l(s) F_2(s, \widetilde{\gamma}) a_1(n)^{-1} \\
&\le \widetilde{\gamma}\beta_\mu - \delta(\widetilde{\gamma}) + K \|F_2(\cdot, \widetilde{\gamma})\| \\
&\qquad \left(\sum_{s=n_o}^{\infty} \|\Gamma(n,s)\|^p a_2(s)\right)^{1/p} \left(\sum_{s=n_o}^{\infty} l(s)^q\right)^{1/q} a_1(n)^{-1} \\
&\le \widetilde{\gamma}\beta_\mu \\
&< \widetilde{\gamma}.
\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\|T\xi(n)\|_{\mathfrak{B}} a_1(n)^{-1} \le{}& \|T(n, n_o) P(n_o)\| a_1(n)^{-1} (\widetilde{\gamma}\beta_\mu - \delta(\widetilde{\gamma})) \widetilde{M}^{-1} \\
&+ a_1(n_1) \delta(\widetilde{\gamma}) a_1(n)^{-1} \|T(n, n_1) P(n_1)\| \\
&+ K\widetilde{K} \|F_2(\cdot, \widetilde{\gamma})\| \left(\sum_{s=n_1}^{\infty} l(s)^q\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

o que mostra que para $n_1$ suficientemente grande, e $n \ge n_1$, temos $\|T\xi(n)\|_{\mathfrak{B}} a_1(n)^{-1} < \varepsilon$, uniformemente em $\xi$.

Notamos que se $\xi$, $\eta \in X_{\infty,a_1}[\widetilde{\gamma}]$, então $T\xi + B\eta \in X_{\infty,a_1}[\widetilde{\gamma}]$. Com efeito, dos cálculos anteriores é fácil ver que:

$$\|T\xi(n) + B\eta(n)\|_{\mathfrak{B}} a_1(n)^{-1} \le \widetilde{\gamma}\widetilde{\delta} \le \widetilde{\gamma}.$$

Agora provaremos que $T$ é contínuo. Seja $\{\xi_m\}_m$ uma sequência em $X_{\infty,a_1}[\widetilde{\gamma}]$ tal que $\xi_m \to \xi \in X_{\infty,a_1}[\widetilde{\gamma}]$. Então,

$$
\begin{aligned}
&\|T\xi_m(n) - T\xi(n)\|_{\mathfrak{B}}\, a_1(n)^{-1} \\
&\qquad \le K \sum_{s=n_o}^{n_1-1} \|\Gamma(n,s)\|\, a_2(s)^{1/p}\, l(s)\, |g(s,\xi_m) - g(s,\xi)|\, a_1(n)^{-1} \\
&\qquad + K \sum_{s=n_1}^{\infty} \|\Gamma(n,s)\|\, a_2(s)^{1/p}\, l(s) \left(F_2\left(s, \|\xi_m\|_{a_1}\right) + F_2\left(s, \|\xi\|_{a_1}\right)\right) a_1(n)^{-1} \\
&\qquad \le K\widetilde{K}\, \|l\|_q \max_{n_o \le s \le n_1 - 1} |g(s,\xi_m) - g(s,\xi)| \\
&\qquad + 2K\widetilde{K}\rho[F_2] \left(\sum_{s=n_1}^{\infty} l(s)^q\right)^{1/q}
\end{aligned}
$$

o que prova a continuidade de $T$.

Como no Teorema 1.2.1, precisamos provar que a imagem de $T$ é relativamente compacta em $X_{\infty,a_1}$, e para isso usaremos o mesmo tipo de argumento. Seja

$$
H_n^{a_1}\left(TX_{\infty,a_1}[\widetilde{\gamma}]\right) = \left\{T\xi(n)\, a_1(n)^{-1} : \xi \in X_{\infty,a_1}[\widetilde{\gamma}]\right\},
$$

para $n \ge n_o$. Consideremos uma sequência arbitrária $\{\xi_m\}_m$ em $X_{\infty,a_1}[\widetilde{\gamma}]$. Então

$$
\begin{aligned}
|g(n,\xi_m)| &\le F_2\left(n, \|\xi_m\|_{a_1}\right) \\
&\le F_2(n, \widetilde{\gamma}) \\
&\le \rho[F_2].
\end{aligned}
$$

Portanto $\{g(\cdot,\xi_m)\}_m$ é uma sequência limitada em $\ell^\infty$ e $(\mathrm{D}_3)^*$ garante que é equiconvergente. Assim, existe uma subsequências $\{g(\cdot,\xi_{m_i})\}_{m_i}$ uniformemente convergente para algum $\psi_1 \in \ell^\infty$. Se definimos $\psi(n) := \nu(n)\,\psi_1(n)$, então, temos que:

$$
\left\| T\xi_{m_i}(n) - Z_\varphi(n) - \sum_{s=n_o}^{\infty} \Gamma(n,s)\, E^o \psi(s) \right\|_{\mathfrak{B}} a_1(n)^{-1} \le K\widetilde{K}\, \|l\|_q\, \|g(\cdot,\xi_{m_i}) - \psi_1\|_\infty
$$

Assim temos provado que $T\xi_{m_i}(n)\, a_1(n)^{-1}$ é convergente e que de fato converge para $Z_\varphi(n)\, a_1(n)^{-1} + a_1(n)^{-1} \sum_{s=n_o}^{\infty} \Gamma(n,s)\, E^o\psi(s)$.

Agora, a equiconvergência em peso em $\infty$, da imagem de $T$, é imediata, pois $T\xi$ é $a_1$-convergente para zero, uniformemente em $\xi \in X_{\infty,a_1}[\widetilde{\gamma}]$. Portanto, pelo critério de compacidade, temos que a imagem de $T$ é relativamente compacta em $X_{\infty,a_1}$.

Aplicando o teorema de Krasnoselky a $T+B$, obtemos que existe um ponto fixo em $X_{\infty,a_1}$, e a demonstração está concluída. ∎

**Observação 1.3.2.** *Sob as condições do resultado prévio, temos que* $y_\bullet(\varphi) \to Z_\varphi$ *é uma aplicação contínua como mostra a seguinte estimativa:*

$$\begin{aligned}
&\|Z_\varphi(n) - Z_{\varphi_o}(n)\|_{\mathfrak{B}}\, a_1(n)^{-1} \\
&\qquad \le \|y_n(\varphi) - y_n(\varphi_o)\|_{\mathfrak{B}}\, a_1(n)^{-1} + \|y_\bullet(\varphi) - y_\bullet(\varphi_o)\|_{a_1}\left(\widetilde{\delta} - \beta_\mu\right) \\
&\qquad + K\widetilde{K}\,\|l\|_q \max_{n_o \le s \le n_1 - 1} |g(s, y_\bullet(\varphi)) - g(s, y_\bullet(\varphi_o))| \\
&\qquad + 2K \sum_{s=n_1}^{\infty} \|\Gamma(n,s)\|\, a_2(s)^{1/p}\, l(s)\, F_2(s, \widetilde{\gamma})\, a_1(n)^{-1} \\
&\qquad \le \left(1 + \widetilde{\delta} - \beta_\mu\right)\|y_\bullet(\varphi) - y_\bullet(\varphi_o)\|_{a_1} \\
&\qquad + K\widetilde{K}\,\|l\|_q \max_{n_o \le s \le n_1 - 1} |g(s, y_\bullet(\varphi)) - g(s, y_\bullet(\varphi_o))| \\
&\qquad + 2K\rho[F_2]\left(\sum_{s=n_o}^{\infty} \|\Gamma(n,s)\|^p a_2(s)\right)^{1/p}\left(\sum_{s=n_o}^{\infty} l(s)^q\right)^{1/q} a_1(n)^{-1}.
\end{aligned}$$

*Ou seja,*

$$\begin{aligned}
\|Z_\varphi - Z_{\varphi_o}\|_{a_1} \le& \left(1 + \widetilde{\delta} - \beta_\mu\right)\|y_\bullet(\varphi) - y_\bullet(\varphi_o)\|_{a_1} \\
&+ K\widetilde{K}\,\|l\|_q \max_{n_o \le s \le n_1 - 1} |g(s, y_\bullet(\varphi)) - g(s, y_\bullet(\varphi_o))| \\
&+ 2K\widetilde{K}\rho[F_2]\left(\sum_{s=n_1}^{\infty} l(s)^q\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

*Agora para obter a continuidade da aplicação* $\varphi \to y_\bullet(\varphi)$ *e a bicontinuidade da correspondência* $y_\bullet(\varphi) \to Z_\varphi$*, substituímos a condição* $(D_2)^*$ *do Teorema 1.3.1 pela seguinte hipótese:*

$(D_4)^*$ *Existe uma constante positiva* $\widetilde{\mu}$ *e uma função* $G : \mathbb{N}(n_o) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$*, não-decrescente com respeito da segunda e terceira variáveis, com* $G(n,0,0) = 0$ *para* $n \ge n_o$*, tal que* $G(\cdot, \widetilde{\mu}, \widetilde{\mu})\, l(\cdot) \in \ell^q$ *e*

$$|g(n,\xi) - g(n,\eta)| \le G\left(n, \|\xi\|_{a_1}, \|\eta\|_{a_1}\right)\|\xi - \eta\|_{a_1},$$

*para* $\xi$*,* $\eta \in X_{a_1}$*.*

*Notar que podemos escolher* $\widetilde{\gamma}$ *no Teorema 1.3.1 suficientemente pequeno tal que*

$$\delta^{\#} := \beta_\mu + K\widetilde{K}\left(\sum_{s=n_o}^{\infty} F_1\left(s,\widetilde{\gamma}a_1\left(s\right)\right)a_1\left(s\right)^q\right)^{1/q} + K\widetilde{K}\left\|G\left(\cdot,\widetilde{\gamma},\widetilde{\gamma}\right)l\left(\cdot\right)\right\|_q < 1.$$

*Então temos as seguintes estimativas:*

$$\begin{aligned}
&\left\|y_n\left(\varphi\right) - y_n\left(\varphi_o\right)\right\|_{\mathfrak{B}} a_1\left(n\right)^{-1} \\
&\qquad \le \widetilde{M}\left\|\varphi - \varphi_o\right\|_{\mathfrak{B}} \\
&\qquad + K\widetilde{K}\left\|y_\bullet\left(\varphi\right) - y_\bullet\left(\varphi_o\right)\right\|_{a_1}\left(\sum_{s=n_o}^{\infty} F_1\left(s,\widetilde{\gamma}a_1\left(s\right)\right)a_1\left(s\right)^q\right)^{1/q} \\
&\qquad + K\widetilde{K}\left\|y_\bullet\left(\varphi\right) - y_\bullet\left(\varphi_o\right)\right\|_{a_1}\left(\sum_{s=n_o}^{\infty} l\left(s\right)^q G\left(s,\widetilde{\gamma},\widetilde{\gamma}\right)^q\right)^{1/q} \\
&\qquad \le \widetilde{M}\left\|\varphi - \varphi_o\right\|_{\mathfrak{B}} + \left(\delta^{\#} - \beta_\mu\right)\left\|y_\bullet\left(\varphi\right) - y_\bullet\left(\varphi_o\right)\right\|_{a_1}.
\end{aligned}$$

*Ou seja,*

$$\left\|y_\bullet\left(\varphi\right) - y_\bullet\left(\varphi_o\right)\right\|_{a_1} \le \frac{\widetilde{M}}{1 + \delta^{\#} - \beta_\mu}\left\|\varphi - \varphi_o\right\|_{\mathfrak{B}}.$$

*Além disso, do cálculo anterior obtemos que*

$$\left(1 - \delta^{\#} + \beta_\mu\right)\left\|y_\bullet\left(\varphi\right) - y_\bullet\left(\varphi_o\right)\right\|_{a_1} \le \left\|Z_\varphi - Z_{\varphi_o}\right\|_{a_1}.$$

*Mas,*

$$\begin{aligned}
&\left\|Z_\varphi\left(n\right) - Z_{\varphi_o}\left(n\right)\right\|_{\mathfrak{B}} a_1\left(n\right)^{-1} \\
&\qquad \le \left\|y_n\left(\varphi\right) - y_n\left(\varphi_o\right)\right\|_{\mathfrak{B}} a_1\left(n\right)^{-1} + \left(\delta^{\#} - \beta_\mu\right)\left\|y_\bullet\left(\varphi\right) - y_\bullet\left(\varphi_o\right)\right\|_{a_1} \\
&\qquad \le \left(1 + \delta^{\#} - \beta_\mu\right)\left\|y_\bullet\left(\varphi\right) - y_\bullet\left(\varphi_o\right)\right\|_{a_1}
\end{aligned}$$

*Notamos que se para qualquer* $n \ge n_o$*, a função* $\varphi \to g\left(n, y_\bullet\left(\varphi\right)\right)$ *é contínua, então* $\varphi \to y_\bullet\left(\varphi\right)$ *é uma função contínua também. De fato temos a seguinte estimativa:*

$$\begin{aligned}
&\left(1-\delta^{\#}+\beta_{\mu}\right)\left\|y_{\bullet}(\varphi)-y_{\bullet}(\varphi_o)\right\|_{a_1}\\
&\qquad\leq \widetilde{M}\left\|\varphi-\varphi_o\right\|_{\mathfrak{B}}\\
&\qquad+K\widetilde{K}\left\|l\right\|_q \max_{n_o\leq s\leq n_1-1}\left|g\left(s,y_{\bullet}(\varphi)\right)-g\left(s,y_{\bullet}(\varphi_o)\right)\right|\\
&\qquad+2K\widetilde{K}\rho\left[F_2\right]\left(\sum_{s=n_1}^{\infty}l(s)^q\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

*Notamos que a última condição porém não garante a continuidade de $Z_{\varphi}\to y_{\bullet}(\varphi)$.*

**Observação 1.3.3.** *Devido ao nosso interesse nas aplicações, temos preferido usar diretamente a condição $\lim\limits_{m\to\infty} a_1(m)^{-1}T(m,n)P(n)=0$ no Teorema 1.3.1 no lugar de*

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{s=n+1}^{m-1}\frac{\widetilde{K}a_1(s+1)}{\left[\widetilde{K}^p a_1(s+1)^p+a_2(s)\right]^{1/p}}=0$$

*usada em [9]. De fato esta última apresenta uma desvantagem prática, ao trabalhar com situações concretas, e até certo ponto é muito mais complicado lidar com esta.*

**Teorema 1.3.4.** *Suponhamos que se satisfazem as condições do Teorema 1.3.1, exceto $(D_1)^*$ que é substituída por:*

$(D_5)^*$ *O sistema (1.1) tem uma dicotomia p-somável em peso $(a_1,a_2)$ com*

$$\lim_{m\to\infty}a_1(m)^{-1}T(m,n)P(n)=L(n),$$

*para todo $n\geq n_o$.*

*Então, existem constantes $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{M}$ positivas, tais que para cada $\varphi\in P(n_o)\mathfrak{B}$ com $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}}\leq(\widetilde{\gamma}\beta_{\mu}-\delta(\widetilde{\gamma}))\widetilde{M}^{-1}$, existe uma solução $y=y(\varphi)=y(n,n_o,\psi)$, com $P(n_o)\psi=\varphi$, da equação (1.2) tal que o $a_1$-limite de $y_{\bullet}$ existe e $\|y_{\bullet}\|_{a_1}\leq\widetilde{\gamma}$. Além disso, temos a seguinte fórmula assintótica:*

$$y_n(\varphi)=Z_{\varphi}(n)+\sum_{s=n_o}^{n-1}\Gamma(n,s)E^o\left(f_1\left(s,y_s(\varphi)\right)+f_2\left(s,y_{\bullet}(\varphi)\right)\right)+o\left(a_1(n)\right),\tag{1.22}$$

*quando $n\to\infty$. O $a_1$-limite de $y_{\bullet}$ é dado por:*

$$Z_{\infty}^{a_1}\left(y_{\bullet}(\varphi)\right)=L(n_o)\varphi+Z_{\infty}^{a_1}\left(\sum_{s=n_o}^{\bullet-1}\Gamma(\cdot,s)E^o\left(f_1\left(s,y_s(\varphi)\right)+f_2\left(s,y_{\bullet}(\varphi)\right)\right)\right).$$

*Por outra parte, se* $b^{\#} := \left( \sum_{s=n_o}^{\infty} \| L(s+1) \|^p a_2(s) \right)^{1/p} < \infty$, *então*

$$Z_{\infty}^{a_1}(y_{\bullet}(\varphi)) = L(n_o)\varphi + \sum_{s=n_o}^{\infty} L(s+1) E^o \left[ f_1(s, y_s(\varphi)) + f_2(s, y_{\bullet}(\varphi)) \right].$$

**Demonstração:** Damos alguns dos argumentos da prova. Consideremos $m \geq n_o$, $\xi \in X_{\infty,a_1}[\widetilde{\gamma}]$, onde $\widetilde{\gamma}$ é suficientemente pequeno, e seja $A(m,\xi)$ definido por

$$A(m,\xi) := \sum_{s=n_o}^{m-1} \Gamma(m,s) E^o f_2(s,\xi).$$

Seja $n_1$ suficientemente grandes, e $M \geq n_1$. Para cada $m, n$ satisfazendo $m \geq n \geq M$, temos

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{s=n_o}^{n_1-1} \left( a_1(n)^{-1} \Gamma(n,s) - a_1(m)^{-1} \Gamma(m,s) \right) E^o f_2(s,\xi) \right\|_{\mathfrak{B}} \\
&\qquad \leq K \max_{n_o \leq s \leq n_1-1} \left\| a_1(n)^{-1} \Gamma(n,s) - L(s+1) \right\| \sum_{s=n_o}^{n_1-1} |f_2(s,\xi)| \\
&\qquad + K \max_{n_o \leq s \leq n_1-1} \left\| a_1(m)^{-1} \Gamma(m,s) - L(s+1) \right\| \sum_{s=n_o}^{n_1-1} |f_2(s,\xi)| \\
&\qquad \leq c_1(n_1) \left( \max_{n_o \leq s \leq n_1-1} \left\| a_1(n)^{-1} \Gamma(n,s) - L(s+1) \right\| \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \max_{n_o \leq s \leq n_1-1} \left\| a_1(m)^{-1} \Gamma(m,s) - L(s+1) \right\| \right).
\end{aligned}$$

Onde $c_1(n_1)$ é uma constante que depende de $n_1$. Por outra parte, temos:

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{s=n_1}^{n-1} \left( a_1(n)^{-1} \Gamma(n,s) - a_1(m)^{-1} \Gamma(m,s) \right) E^o f_2(s,\xi) \right\|_{\mathfrak{B}} \\
&\qquad + \left\| \sum_{s=n_1}^{m-1} a_1(m)^{-1} \Gamma(m,s) E^o f_2(s,\xi) \right\|_{\mathfrak{B}} \leq 3K\widetilde{K}\rho[F_2] \left( \sum_{s=n_1}^{\infty} l(s)^q \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

Destas estimativas obtemos que o $a_1$-limite de $A(\cdot,\xi)$ existe uniformemente em $\xi \in X_{\infty,a_1}[\widetilde{\gamma}]$.

A imagem de $T$ é equiconvergente em peso em $\infty$, pois de $(\mathrm{D}_5)^*$ e do cálculo anterior obtemos que:

$$Z_{\infty}^{a_1}(T\xi) = L(n_o)\varphi + Z_{\infty}^{a_1}(A(\cdot,\xi))$$

uniformemente em $\xi \in X_{\infty,a_1}[\widetilde{\gamma}]$.

Denotemos por $A(s) := f_1(s, y_s(\varphi)) + f_2(s, y_\cdot(\varphi))$, e seja $n_1$ suficientemente grande. Para $n \geq n_1$, temos a seguinte estimativa:

$$\left\| a_1(n)^{-1} \sum_{s=n_o}^{n-1} \Gamma(n,s) E^o A(s) - \sum_{s=n_o}^{\infty} L(s+1) E^o A(s) \right\|_{\mathfrak{B}}$$

$$\leq K \max_{n_o \leq s \leq n_1 - 1} \left\| a_1(n)^{-1} \Gamma(n,s) - L(s+1) \right\| \sum_{s=n_o}^{n_1-1} \left( |f_1(s, y_s(\varphi))| + |f_2(s, y_\bullet(\varphi))| \right)$$

$$+ K \sum_{s=n_1}^{n-1} \|\Gamma(n,s)\| a_1(n)^{-1} \left( |f_1(s, y_s(\varphi))| + |f_2(s, y_\bullet(\varphi))| \right)$$

$$+ K \sum_{s=n_1}^{n-1} \|L(s+1)\| a_1(n)^{-1} \left( |f_1(s, y_s(\varphi))| + |f_2(s, y_\bullet(\varphi))| \right)$$

$$+ K \sum_{s=n}^{\infty} \|L(s+1)\| a_1(n)^{-1} \left( |f_1(s, y_s(\varphi))| + |f_2(s, y_\bullet(\varphi))| \right)$$

$$\leq c_2(n_1) \max_{n_o \leq s \leq n_1 - 1} \left\| a_1(n)^{-1} \Gamma(n,s) - L(s+1) \right\|$$

$$+ d \left( \left( \sum_{s=n_1}^{\infty} F_1(s, \widetilde{\gamma} a_1(s)) a_1(s)^q \right)^{1/q} + \left( \sum_{s=n_1}^{\infty} l(s)^q \right)^{1/q} \right)$$

onde $c_2(n_1)$ é uma constante que depende de $n_1$ e $d$ é uma constante independente de $n$ (isto é garantido se $b^{\#} < \infty$). Portanto, temos provado que

$$\lim_{n \to \infty} a_1(n)^{-1} \sum_{s=n_o}^{n-1} \Gamma(n,s) E^o A(s) = \sum_{s=n_o}^{\infty} L(s+1) E^o A(s)$$

o que conclui a demonstração. ∎

Para concluir esta seção, damos como observação alguns resultados similares as observações 1.2.6 e 1.2.7 que podem ser obtidos para dicotomias $p$-somáveis.

**Observação 1.3.5.** *Sob as suposições do resultado precedente, pode-se mostrar que*

*(i) Existe uma constante $\alpha \in (0,1)$, tal que $\|Z_\infty^{a_1}(y_\bullet)\|_{\mathfrak{B}} \leq \alpha \widetilde{\gamma}$. Com efeito, é suficiente escolher $\widetilde{\delta}$ no Teorema 1.3.1, tal que $\alpha := 9\widetilde{\delta}^{1/q} e^{\frac{3^q}{q}} < 1$. Assim, usando um argumento envolvendo a desigualdade discreta de Gronwall obtemos nossa afirmação.*

*(ii)* *O conjunto* $\Omega$ *de todas as soluções convergentes* $y_\bullet(\varphi)$ *da equação (1.2) com* $\varphi \in P(n_o)\mathfrak{B}[R]$, *onde* $R := (\widetilde{\gamma}\beta_\mu - \delta(\widetilde{\gamma}))\widetilde{M}^{-1}$, *é equiconvergente em peso em* $\infty$ *no* $X_{\infty,a_1}$.

*Se além das hipóteses do Teorema 1.3.4, supomos que a seguinte condição vale:*

*$(D_6)^*$* *Os limites* $Z^1_\infty(g(\cdot,\xi))$ *existem uniformemente em* $\xi \in X_{\infty,a_1}[\lambda]$, *onde*

$$g(n,\xi) := a_2(n)^{-1/p} a_1(n)^{-1} F_1(n, \widetilde{\nu} a_1(n))^{-1/q} f_1(n,\xi),$$

*então podemos provar que*

*(iii)* *O conjunto de todas as* $y_\bullet(\varphi) - Z_\varphi(\cdot)$, *com* $\varphi \in P(n_o)\mathfrak{B}[R]$, *é relativamente compacto em* $X_{\infty,a_1}$.

Como as dicotomias podem ser descompostas em dicotomias uniformes e dicotomias somáveis, os Teoremas 1.2.1 e 1.2.5 (respectivamente, observações 1.2.3, 1.2.6 e 1.2.7) são complementarios com respeito aos Teoremas 1.3.1 e 1.3.4 (respectivamente, Observações 1.3.2 e 1.3.5). Também, observamos que estes resultados são simétricos com respeito das condições sobre $f_1$ e $f_2$ dos teoremas precedentes. No Capítulo 2, poderemos ver que as suposições dos Teoremas 1.2.1, 1.2.5, 1.3.1 e 1.3.4, são muito naturais e elas não são difíceis de verificar. Destacamos que muitos resultados interessantes podem ser derivados de estes teoremas, os quais incluem uma grande classe, digamos, sistemas (1.2) onde (1.1) tem uma $(k_1,k_2)$-dicotomia ou uma dicotomia $p$-somável em peso.

## 1.4 Generalizações

Nesta seção estamos interessados com o seguinte sistema não homogêneo quase linear de equações em diferenças funcionais

$$x(n+1) = L(n,x_n) + f_1(n,Tx_n) + f_2(n,Sx_\bullet), \tag{1.23}$$

onde $T : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ e $S : X_k \to X_k$, são operadores sob condições convenientes.

A equação (1.23) é uma versão generalizada da equação (1.2). No que segue estamos interessados, principalmente, em abordar vários tipos de operadores $T$ e $S$. Uma expectativa natural é que a maioria das propriedades e resultados discutidos nas seções precedentes sejam válidos para uma grande classe de operadores. Em ordem a discutir estes aspectos em mais detalhes, introduziremos as seguintes notações, para $\xi \in X_{\infty,k_j}$ :

$$B^j\xi(n) := \sum_{s=n_o}^{\infty} \Gamma(n,s) E^o f_1(s, T\xi(s)), \tag{1.24}$$

$$T^j\xi(n) := Z_\varphi(n) + \sum_{s=n_o}^{\infty} \Gamma(n,s) E^o f_2(s, S\xi), \tag{1.25}$$

$$\tau_j := \gamma_S\beta_{\mu_j} + KMC\gamma_T \sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s, \gamma_T\gamma_j k_j(s)) k_1(s+1)^{-1}, \tag{1.26}$$

$$\sigma_j := \min\left\{\frac{\lambda_j}{\gamma_S}, \frac{\mu_j}{\gamma_S}, \frac{\mu_{1j}}{\gamma_T}\right\}, \tag{1.27}$$

onde as constantes que aparecem aqui são obtidas como antes ou dadas a continuação.

Em ordem de passar para nosso próximo resultado introduzimos as seguintes hipóteses sobre os operadores $T$ e $S$:

(E) As seguintes condições são verdadeiras:

- (e-1) O operador $T : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ é $\gamma_T$-Lipschitz e $T0 = 0$.
- (e-2) O operador $S : X_{k_j} \to X_{k_j}$ é $\gamma_S$-Lipschitz e $S0 = 0$.

**Teorema 1.4.1.** *Assumamos a condição (E) e todas as hipóteses do Teorema 1.2.1, exceto (d-4), a qual é substituída por:*

*(d-4)** Existem constantes positivas $\mu_j$, $j = 1,2$ tais que $\beta_{\mu_j} < \min\{1, 1/\gamma_S\}$, onde $\beta_{\mu_j}$ é a constante definida em (d-4).*

*Então, existem constantes positivas $\gamma_j$, $\widetilde{M}_j$, $j = 1,2$ tal que para cada $\varphi \in P(n_o)\mathfrak{B}$, com $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \le \left(\gamma_S\gamma_j\beta_{\mu_j} - \delta_j(\gamma_S\gamma_j)\right)\widetilde{M}_j^{-1}$, existe uma solução $y^j = y^j(\varphi) = y^j(n, n_o, \psi)$, $j = 1,2$ com $P(n_o)\psi = \varphi$ da equação (1.26), tal que $\lim_{n\to\infty} k_j(n)^{-1} y_n^j = 0$ e $y_n^j$ é assintoticamente dado por (1.13).*

**Demonstração:** A prova é baseada nos mesmos argumentos da demonstração do Teorema 1.2.1. As idéias principais são como segue: Sejam $B^j$ e $T^j$ os operadores definidos por (1.24) e (1.25), respectivamente. Podemos escolher $\gamma_j \in (0, \sigma_j)$ tal que $\tau_j < 1$. Tais operadores estão bem definidos, como mostram as seguintes estimativas:

$$\left\|B^j\xi(n)\right\|_{\mathfrak{B}} k_j(n)^{-1} \le KMC \sum_{s=n_o}^{\infty} F_1(s, \gamma_T\gamma_j k_j(s)) k_1(s+1)^{-1}.$$

O operador $B^j$ é uma $\left(\tau_j - \gamma_S \beta_{\mu_j}\right)$-contração.

Por outra lado

$$\begin{aligned} \left\|T^j \xi(n)\right\|_{\mathfrak{B}} k_j(n)^{-1} &\leq \widetilde{M}_j \|\varphi\|_{\mathfrak{B}} + \delta_j(\gamma_S \gamma_j) \\ &\leq \gamma_j. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left\|T^j \xi(n)\right\|_{\mathfrak{B}} k_j(n)^{-1} \leq{}& C k_1(n_o) k_j(n_o)^{-1} \|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \|T(n, n_o) P(n_o)\| k_j(n)^{-1} \\ &+ KMC k_1(n_1) k_1(n_o) k_j(n_o)^{-1} \left( \sum_{s=n_o}^{n_1-1} F_{2j}(s, \mu_j) k_1(s+1)^{-1} \right) \\ &\qquad \|T(n, n_1) P(n_1)\| k_1(n)^{-1} \\ &+ KMC^2 k_1(n_o) k_j(n_o)^{-1} \sum_{s=n_1}^{\infty} F_{2j}(s, \mu_j) k_1(s+1)^{-1} \end{aligned}$$

o que mostra que $Z_\infty^{k_j}(T^j \xi) = 0$, uniformemente em $\xi \in X_{\infty, k_j}[\gamma_j]$.

Agora, como no caso do Teorema 1.2.1, para $\xi$, $\eta \in X_{\infty, k_j}[\gamma_j]$, temos que $T^j \xi + B^j \eta \in X_{\infty, k_j}[\gamma_j]$.

A continuidade do operador $T^j$ é imediata da seguinte estimativa, análoga à do Teorema 1.2.1:

$$\begin{aligned} \left\|T^j \xi_m(n) - T^j \xi(n)\right\|_{\mathfrak{B}} k_j(n)^{-1} \leq{}& L_j \delta(\mu_j) \max_{n_o \leq s \leq n_1 - 1} |g_j(s, S\xi_m) - g_j(s, S\xi)| \\ &+ 2\Gamma_1 L_j \sum_{s=n_1}^{\infty} F_{2j}(s, \mu_j) k_1(s+1)^{-1}. \end{aligned}$$

Para ver que a imagem de $T^j$ é relativamente compacta, usando a mesma construção do Teorema 1.2.1, obtemos que $\{g_j(\cdot, S\xi_{m_i})\}_{m_i}$ converge uniformemente para algum $\psi_j \in \ell^\infty$. Então $T^j \xi_{m_i}(n) k_j(n)^{-1}$ converge para $\sum_{s=n_o}^{\infty} \Gamma(n, s) E^o \varphi_j(s) k_j(n)^{-1}$, onde $\varphi_j(s) := F_{2j}(s, \mu_j) \psi_j(s)$.

Isto completa a prova do teorema. ∎

**Observação 1.4.2.** *Enfatizamos aqui que, com mínimas modificações no Teorema 1.4.1, podemos garantir que o mesmo resultado é valido para um operador $S : X_{k_j} \to X_{k_j}$, $j = 1, 2$ tal que $\|S\eta\|_{k_j} \leq \gamma_S \|\eta\|_{k_j}$, para cada $\eta \in X_{k_j}$, tendo-se que substituir a condição ($D_2$) do Teorema 1.2.1 por:*

*(A)** *Para todo* $n \geq n_o$ *e* $j = 1, 2$, *a função*

$$g_j\,(n, S\,(\cdot)) := F_{2j}\,(n, \mu_j)^{-1}\, f_2\,(n, S\,(\cdot))$$

*é contínua.*

*Além disso, o Teorema 1.4.1 também é verdadeiro se consideramos os operadores* $T$ *e* $S$ *satisfazendo:* $\|T\varphi\|_{\mathfrak{B}} \leq \gamma_T \|\varphi\|_{\mathfrak{B}}$, *para* $\varphi \in \mathfrak{B}$, *e* $\|S\eta\|_{k_j} \leq \gamma_S \|\eta\|_{k_j}$, *para* $\eta \in X_{k_j}$. *Neste caso, além de substituir a condição* $(D_2)$ *por (A)**, *temos que substituir (d-1) por:*

*(B)** *A função* $f_1\,(n, T\varphi)$ *é* $k_1^{-1}F_1$*-localmente Lipschitz em* $\varphi \in \mathfrak{B}$, *onde* $F_1$ *é como em (d-1) e (d-2).*

**Observação 1.4.3.** *É fácil ver que sem mudanças essenciais e repetindo a maior parte das demonstrações, também valem as observações 1.2.3, 1.2.6 e 1.2.7, além do Teorema 1.2.5 da seção 1.2, para a equação (1.23), com* $T$ *e* $S$ *o mesmo tipo de operadores considerados nesta seção.*

O seguinte teorema é o análogo ao teorema anterior para dicotomias $p$-somáveis.

**Teorema 1.4.4.** *Assumamos que a condição (e-1) vale e que o operador* $S : X_{a_1} \to X_{a_1}$ *é* $\gamma_S$*-Lipschitz, com* $S0 = 0$. *Assumamos todas as hipóteses do Teorema 1.3.1, exceto (d-4)**, *a qual é substituída por:*

*(d-5)*** *Existe uma constante positiva* $\mu$ *tal que* $\beta_\mu < \min\{1, 1/\gamma_S\}$, *onde* $\beta_\mu$ *é a constante definida em (d-4)**.

*Então, existem constantes positivas* $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{M}$ *tais que para cada* $\varphi \in P\,(n_o)\,\mathfrak{B}$, *com* $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}} \leq (\gamma_S \widetilde{\gamma} \beta_\mu - \delta\,(\gamma_S \widetilde{\gamma}))\,\widetilde{M}^{-1}$, *existe uma solução* $y = y\,(\varphi) = y\,(n, n_o, \psi)$, *com* $P\,(n_o)\,\psi = \varphi$, *da equação (1.23), tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_1\,(n)^{-1}\, y_n = 0$ *e* $y_n$ *é assintoticamente dado por (1.21).*

**Demonstração:** Para provar o teorema é suficiente escolher, usando (d-2)$^*$, a constante apropriada $0 < \widetilde{\gamma} < \min\left\{\dfrac{\lambda}{\gamma_S}, \dfrac{\mu}{\gamma_S}, \dfrac{\widetilde{\nu}}{\gamma_T}\right\}$ tal que

$$\widetilde{\delta} := \gamma_S \beta_\mu + K\widetilde{K}\gamma_T \left(\sum_{s=n_o}^{\infty} F_1\,(s, \gamma_T \widetilde{\gamma} a_1\,(s))\, a_1\,(s)^q\right)^{1/q} < 1.$$

Neste caso o operador $B$ é uma $\left(\widetilde{\delta} - \gamma_S \beta_\mu\right)$-contração.

O restante da demonstração é exatamente análoga à do Teorema 1.3.1. ∎

**Observação 1.4.5.** *Podemos ver que o Teorema 1.4.4 é verdadeiro para operadores* $T$ *e* $S$ *tais que* $\|T\varphi\|_{\mathfrak{B}} \leq \gamma_T \|\varphi\|_{\mathfrak{B}}$, *para* $\varphi \in \mathfrak{B}$, *e* $\|S\eta\|_{a_1} \leq \gamma_S \|\eta\|_{a_1}$, *para* $\eta \in X_{a_1}$. *Porém, é necessário substituir as condições* $(D_2)^*$ *e (d-1)*$^*$ *por condições convenientes de maneira similar à observação 1.4.2, mas não requer nenhuma idéia diferente das abordadas até agora.*

# Capítulo 2

# Aplicações

A relevância dos resultados do capítulo anterior reside no fato que têm importantes consequências em aplicações devido à generalidade da equação tratada alí. Neste capítulo apresentamos aplicações dos nossos resultados prévios, considerando como um modelo concreto desta classe de equações os seguintes sistemas em diferenças do tipo Volterra com retardo infinito.

## 2.1 Aplicações

Sejam $A(n)$, $K(s)$, $B(n)$, $D(n,m)$ e $G(m)$ matrizes $r \times r$ definidas para $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}^+$, $m \in \mathbb{Z}^-$, e seja $\alpha : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma sequência arbitrária crescente tal que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(|G(-n)| + |K(n)|\right) \alpha(n) < +\infty. \tag{2.1}$$

A continuação consideramos o seguinte sistema em diferenças de Volterra com retardo infinito:

$$x(n+1) = \sum_{s=-\infty}^{n} A(n) K(n-s) x(s), \tag{2.2}$$

para $n \geq n_o \geq 0$, e seu sistema perturbado:

$$y(n+1) = \sum_{s=-\infty}^{n} \left\{A(n) K(n-s) + B(n) G(s-n) |y(0)| + \nu D(n,s) |y(s)|\right\} y(s). \tag{2.3}$$

As equações (2.2) e (2.3) são equações em diferenças funcionais no espaço de fase $\mathfrak{B}_\alpha$, onde $\mathfrak{B}_\alpha$ é o espaço dado por:

$$\mathfrak{B}_\alpha = \left\{\varphi : \mathbb{Z}^- \to \mathbb{C}^r \ : \ \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{|\varphi(-n)|}{\alpha(n)} < +\infty\right\}, \tag{2.4}$$

com a norma:

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha} = \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{|\varphi(-n)|}{\alpha(n)}, \phi \in \mathfrak{B}_\alpha \tag{2.5}$$

De fato, o sistema (2.3) pode ser escrito como uma equação em diferenças funcionais da forma (1.2). Com efeito, consideremos $\xi : \mathbb{N}(n_o) \to \mathfrak{B}_\alpha$ e $\varphi \in \mathfrak{B}_\alpha$. Notamos que

$$L(n,\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} A(n) K(j) \varphi(-j),$$

$$f_1(n,\varphi) = B(n) |\varphi(-n)| \sum_{s=-\infty}^{0} G(s) \varphi(s),$$

$$f_2(n,\xi) = \sum_{\tau=-\infty}^{n_o-1} \nu D(n,\tau) |\xi(n_o)(\tau-n_o)| \xi(n_o)(\tau-n_o) + \sum_{\tau=n_o}^{n} \nu D(n,\tau) |\xi(\tau)(0)| \xi(\tau)(0).$$

Em ordem de passar para o próximo resultado, introduzimos a seguinte notação, para $j = 1,2$:

$$\widetilde{\alpha}_j(\tau) = \begin{cases} k_j(\tau)\alpha(0), & se\ \tau \geq n_o, \\ k_j(n_o)\alpha(n_o-\tau) & se\ \tau < n_o. \end{cases}$$

$$l_j(n) = \sum_{\tau=-\infty}^{n} |nD(n,\tau)| (\widetilde{\alpha}_j(\tau))^2$$

**Teorema 2.1.1.** *Suponhamos que as seguintes condições são satisfeitas:*

*($E_1$) O sistema (2.2) tem uma $(k_1,k_2)$-dicotomia a qual é compensada e tal que*

$$\lim_{m\to\infty} k_1(m)^{-1} T(m,n) P(n) = 0.$$

*($E_2$) $\Gamma_1 |\nu| \rho_j < 1$, onde $\Gamma_1$ e $\nu$ são as constantes de (d-4) e (2.3), respectivamente, e*

$$\rho_j := \sum_{s=n_o}^{\infty} l_j(s) k_1(s+1)^{-1} < +\infty$$

*($E_3$)* $\sum_{s=n_o}^{\infty} \alpha(s) |sB(s)| k_2^2(s) k_1(s+1)^{-1} < +\infty$

*Então, existem constantes positivas $\gamma_j$, $a_j$, $\widetilde{M}_j$, $j = 1,2$ tais que para cada $\varphi \in P(n_o)\mathfrak{B}_\alpha[R_j]$, onde $R_j = \Gamma_1 |\nu| \rho_j \left(\gamma_j a_j - \gamma_j^2\right) \widetilde{M}_j^{-1}$, existe uma solução $y^j = y^j(\varphi)$, $j = 1,2$ da equação (2.3) tal que o $k_j$-limite de $y^j_\bullet$ é zero. Por outra parte, temos a relação assintótica $y^j_n(\varphi) = Z_\varphi(n) + o(k_j(n))$, quando $n \to \infty$. A correspondência $y^j_\bullet(\varphi) \longleftrightarrow Z_\varphi$ é bicontínua e a aplicação $\varphi \to y^j_\bullet(\varphi)$ é contínua (ver Observação 1.2.3). Além disso, o conjunto $\Omega$, de todas as soluções convergentes $y^j_\bullet(\varphi)$ da equação (2.3) com $\varphi \in P(n_o)\mathfrak{B}_\alpha[R_j]$ é equiconvergente em peso em $\infty$ em $X_{\infty,k_j}$ e o conjunto $\widetilde{\Omega}$ definido na Observação 1.2.7, é relativamente compacto em $X_{\infty,k_j}$.*

**Demonstração:** Denotemos por $\rho := \sum_{s=0}^{\infty} |G(-s)|\,\alpha(s)$. Então

$$|f_1(n,\varphi) - f_1(n,\psi)| \leq |B(n)|\,\alpha(n)\,\rho\left(\|\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha} + \|\psi\|_{\mathfrak{B}_\alpha}\right)\|\varphi - \psi\|_{\mathfrak{B}_\alpha}.$$

Assim, se

$$F_1(n,R) = 2\rho R\,|nB(n)|\,\alpha(n)\,k_1(n), \quad n \geq n_o.$$

temos que

$$|f_1(n,\varphi) - f_1(n,\psi)| \leq k_1(n)^{-1} F_1(n,R)\,\|\varphi - \psi\|_{\mathfrak{B}_\alpha}.$$

Notar que a condição ($E_3$) implica (d-2)

Por outra parte

$$\begin{aligned} |f_2(n,\xi)| &\leq \sum_{\tau=-\infty}^{n_o-1} |\nu|\,|D(n,\tau)|\,\|\xi(n_o)\|^2_{\mathfrak{B}_\alpha} k_j(n_o)^2\,\alpha(n_o-\tau)^2\,k_j(n_o)^{-2} \\ &\quad + \sum_{\tau=n_o}^{n} |\nu|\,|D(n,\tau)|\,\|\xi(\tau)\|^2_{\mathfrak{B}_\alpha} k_j(\tau)^2\,\alpha(0)^2\,k_j(\tau)^{-2} \\ &\leq \frac{1}{n}|\nu|\,l_j(n)\,\|\xi\|^2_{k_j}. \end{aligned}$$

Assim, com $F_{2j}(n,t) = |\nu|\,l_j(n)\,t^2$, temos que

$$|f_2(n,\xi)| \leq F_{2j}\left(n, \|\xi\|_{k_j}\right).$$

Notamos que:

$$\beta_{\mu_j} = \Gamma_1 |\nu|\,\rho_j < 1.$$

Portanto, a condição (D) do Teorema 1.2.1 e satisfeita, e vemos que para $\|\xi\|_{k_j} \leq \lambda_j$, se satisfaz a condição ($D_3$) desse teorema.

A condição ($D_2$) é consequência imediata da seguinte estimativa:

$$|f_2(n,\xi) - f_2(n,\eta)| \leq \frac{1}{n}|\nu|\,l_j(n)\,\|\xi - \eta\|^2_{k_j}. \tag{2.6}$$

Temos então as hipóteses do Teorema 1.2.1. Além disso, se definimos $G_j(n,r,t) = \frac{1}{n}\mu_j^{-2}(r+t)$, usando ($E_2$) obtemos a condição ($D_4$) da Observação 1.2.3.

Finalmente, vemos que se satisfaz a Observação 1.2.7, pois:

$$|\widetilde{g}_j(n,\xi)| \leq \frac{\lambda_j^2\rho^{-1}\mu_{1j}^{-1}}{n}.$$

Assim o teorema está provado. ∎

**Observação 2.1.2.** *O resultado anterior generaliza o Teorema 4.1 de [8] para um contexto muito mais geral (ver Observação 1.2.2 da seção 1.2).*

A continuação consideramos a seguinte perturbação de (2.2):

$$\begin{aligned} y(n+1) = & \sum_{s=-\infty}^{n} \{A(n)K(n-s) + B(n)G(s-n)|y(0)|\}\, y(s) \\ & + \sum_{s=-\infty}^{n} H(n,s,y(0)). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Temos o seguinte resultado:

**Teorema 2.1.3.** *Assumamos que as condições ($E_1$) e ($E_3$) do Teorema 2.1.1 valem. Suponhamos também que se satisfazem as seguintes condições:*

*($E_4$)* $H : \mathbb{N}(n_o) \times \mathbb{Z}^- \times \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r$ *é contínua com respeito à terceira variável.*

*($E_5$) Existe uma função positiva* $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$*, contínua, não-decrescente com*

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\gamma\in(0,\delta]} \frac{g(\gamma)}{\gamma} = 0,$$

*e uma função* $\beta : \mathbb{N}(n_o) \times \mathbb{Z}^- \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$|H(n,\tau,\widetilde{\alpha}_j(\tau)z)| \leq a_n\beta(n,\tau)\, g(|z|),$$

*para todo* $n \geq n_o$*,* $\tau \in \mathbb{Z}$*, com* $a_n \geq 0$*,* $a_n \to 0$ *e*

$$\chi := \sum_{s=n_o}^{\infty}\left(\sum_{\tau=-\infty}^{s}\beta(s,\tau)\right)k_1(s+1)^{-1} < +\infty.$$

*Então, existem constantes $\gamma_j$, $\delta$, $\widetilde{M}_j$ positivas, $j = 1,2$ tais que para cada $\varphi \in P(n_o)\mathfrak{B}_\alpha[R_j]$, onde $R_j := (\gamma_j\beta_\delta - \Gamma_1 \|a\|_\infty g(\gamma_j))\widetilde{M}_j^{-1}$, existe uma solução $y^j_\bullet$, $j = 1,2$ da equação (2.7) tal que o $k_j$-limite de $y^j_\bullet$ é zero e a fórmula assintótica (1.13) vale. Além disso, a aplicação $y^j_\bullet(\varphi) \to Z_\varphi$ é contínua (ver observação 1.2.3) e o conjunto $\Omega$ de todas as soluções convergentes de (2.7), é equiconvergente em peso e o conjunto $\widetilde{\Omega}$ é relativamente compacto.*

**Demonstração:** Notemos que a equação (2.7) pode-se escrever na forma (1.2), definindo

$$L(n,\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} A(n) K(j) \varphi(-j),$$

$$f_1(n,\varphi) = B(n)|\varphi(-n)| \sum_{s=-\infty}^{n} G(s)\varphi(s),$$

$$f_2(n,\xi) = \sum_{s=-\infty}^{n_o-1} H(n,s,\xi(n_o)(s-n_o)) + \sum_{s=n_o}^{n} H(n,s,\xi(s)(0)).$$

Donde, por simples cálculos, podemos verificar as hipóteses do Teorema 1.2.1. ∎

Consideremos a seguinte notação:

$$B(n,s,y) = \begin{cases} B(0)|y(0)|G(0)y(0), & se\ n = s = 0, \\ \frac{1}{s}B(0)|y(0)|G(s)y(s+1), & se\ n = 0,\ s < 0, \\ \frac{1}{sn}B(n)|y(1)|G(s)y(n+s+1), & se\ n > 0,\ s < 0, \\ \frac{1}{n}B(n)|y(1)|G(0)y(n), & se\ n > 0,\ s = 0. \end{cases}$$

$$\widetilde{H}(n,s,y) = \begin{cases} H(n,s,y(0)), & se\ s < 0, \\ H(n,s,y(s)), & se\ s \geq 0. \end{cases}$$

A continuação fornecemos uma observação para ilustrar a utilidade dos resultados da seção 1.4.

**Observação 2.1.4.** *Se as hipóteses $(E_i)$, $i = 1,3,4,5$ valem, usando o Teorema 1.4.1 e a Observação 1.4.2 da seção 1.4, é fácil obter o mesmo tipo de resultado (Teorema 2.1.3) para o seguinte sistema em diferença de Volterra não-autônomo com retardo infinito:*

$$y(n+1) = \sum_{s=-\infty}^{n} \left\{ A(n) K(n-s) y(s) + B(n,s-n,y) + \widetilde{H}(n,s,y) \right\}, \tag{2.8}$$

*para* $n \geq 0$. *Podemos observar que neste caso, para* $\varphi \in \mathfrak{B}_\alpha$ *e* $\xi \in X_{k_j}$, *o operador* $T$ *de (e-1) (ver seção 1.4) é definido por*

$$T\varphi(0) = \varphi(0)\,,\ T\varphi(s) = \frac{1}{s}\varphi(s+1)\,,\ se\ s < 0,$$

*e o operador* $S$ *é definido por*

$$[S\xi(n)](\tau) = \xi(n)(0)\,,\ n \geq 0,\ \tau \in \mathbb{Z}^-.$$

*Podemos ver que* $T$ *é um operador* 1*-Lipschitz e* $\|S\xi\|_{k_j} \leq \|\xi\|_{k_j}$. *Além disso, neste caso temos que:*

$$L(n,\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} A(n)\,K(j)\,\varphi(-j)\,,$$

$$f_1(n,\varphi) = B(n)\,|\varphi(-n)| \sum_{s=-\infty}^{n} G(s-n)\,\varphi(s-n)\,,$$

$$f_2(n,\xi) = \sum_{s=-\infty}^{-1} H(n,s,\xi(0)(s)) + \sum_{s=0}^{n} H(n,s,\xi(s)(0))\,.$$

*Com o qual obtém-se o desejado como antes.*

Agora apresentaremos uma aplicação do Teorema 1.3.1, Observações 1.3.2 e 1.3.5.

Sejam $a_i(n)$, $i = 1,2$ duas sequências positivas, e $a(n)$, $k(s)$, $b(n)$, $d(n,m)$ e $g(m)$ sequências de números complexos definidas para $n \geq n_o$, $s \in \mathbb{Z}^+$, $m \in \mathbb{Z}^-$, e seja $\alpha : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma sequência positiva crescente arbitrária tal que:

$$\sum_{s=0}^{\infty} (|g(-s)| + |k(s)|)\,\alpha(s) < +\infty.$$

Consideremos a seguinte equação em diferença de Volterra:

$$x(n+1) = \sum_{s=-\infty}^{n} a(n)\,k(n-s)\,x(s)\,,\ n \geq n_o \geq 0, \tag{2.9}$$

e sua equação perturbada:

$$\begin{aligned} y(n+1) = &\sum_{s=-\infty}^{n} \left\{ a(n)\,k(n-s) + a_2(n)^{1/p}\,b(n)\,g(s-n)\,y(0) \right\} y(s) \\ &+ \nu \sum_{s=-\infty}^{n} a_2(n)^{1/p}\,d(n,s)\,(y(s))^{\mu}\,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$n \geq n_o \geq 0$, com $\mu \in \mathbb{Z}^+$, $\nu \in \mathbb{R}$.

Introduzimos a seguinte notação:

$$\widetilde{a}_1(\tau) := \begin{cases} a_1(\tau)\,\alpha(0), & se\ \tau \geq n_o, \\ a_1(n_o)\,\alpha(n_o - \tau), & se\ \tau < n_o. \end{cases} \tag{2.11}$$

$$W(s) = \sum_{\tau=-\infty}^{s} |sd(s,\tau)|\,(\widetilde{a}_1(\tau))^{\mu}. \tag{2.12}$$

**Teorema 2.1.5.** *Sejam $p$ e $q$ expoentes conjugados. Suponhamos que as seguintes condições são satisfeitas:*

*($F_1$) A equação (2.9) satisfaz a condição $(D_1)^*$ do Teorema 1.3.1.*

*($F_2$) Seja $b : \mathbb{N}(n_o) \to \mathbb{C}$ uma sequência complexa tal que $\widetilde{b} \in \ell^1_{a_1^2\alpha}(\mathbb{N}(n_o))$, onde $\widetilde{b}(n) = nb(n)$.*

*($F_3$) $W \in \ell^q(\mathbb{N}(n_o))$, onde $W$ é a função definida em (2.12).*

*($F_4$) A constante $\nu$ da equação (2.10) é tal que $K\widetilde{K}\,\|W\|_q\,|\nu|^{\mu} < 1$.*

*Então, existem constantes positivas $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{M}$ tais que para cada $\varphi \in P(n_o)\mathfrak{B}_\alpha$, com $\|\varphi\|_{\mathfrak{B}_\alpha} \leq \nu_1(\widetilde{\gamma}\,|\nu|^{\mu} - \widetilde{\gamma}^{\mu})\,\widetilde{M}^{-1}$, onde $\nu_1 = K\widetilde{K}\,\|W\|_q\,|\nu|$, existe uma solução $y = y(\varphi)$ da equação (2.10) tal que o $a_1$-limite de $y$ é zero. Além disso, temos a fórmula assintótica (1.21) e a correspondência $y(\varphi) \to Z_\varphi$ é bicontínua e a aplicação $\varphi \to y(\varphi)$ é contínua (ver observação 1.3.2). O conjunto $\Omega$ de todas as soluções convergentes de (2.10) é equiconvergente em peso e o conjunto $\widetilde{\Omega}$ é relativamente compacto em $X_{\infty,a_1}$ (ver observação 1.3.5).*

**Demonstração:** Só indicamos que neste caso temos:

$$L(n,\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} a(n)\,k(j)\,\varphi(-j),$$

$$f_1(n,\varphi) = b(n)\,\varphi(-n)\,a_2(n)^{1/p} \sum_{s=-\infty}^{0} g(s)\,\varphi(s),$$

$$\begin{aligned} f_2(n,\xi) = {} & \nu a_2(n)^{1/p} \sum_{s=-\infty}^{n_o-1} d(n,s)\,(\xi(n_o)(s-n))^{\mu} \\ & + \nu a_2(n)^{1/p} \sum_{s=n_o}^{n} d(n,s)\,(\xi(s)(0))^{\mu}, \end{aligned}$$

e com isso é suficiente para concluir a prova. ∎

**Observação 2.1.6.** *Queremos mencionar que podemos facilmente obter o mesmo tipo de resultado dado no Teorema 2.1.5 para a equação (2.3).*

A continuação apresentamos um exemplo para ilustrar a utilidade do Teorema 2.1.1.

**Exemplo 2.1.7.** *Seja $\alpha(n)$ uma sequência positiva crescente em $\mathbb{Z}$ tal que $\alpha(n)\alpha(m) = \alpha(n+m)$. Sejam $a_1(n)$ e $a_2(n)$ duas sequências tais que*

$$\rho_i^* := \sup_{n\geq 0} \max_{-n\leq\theta\leq 0} \prod_{s=n+\theta}^{n-1} \left[ \frac{|a_i(s)|^{-1}}{\alpha(-\theta)} \right] < +\infty, \ i = 1, 2. \tag{2.13}$$

*Consideremos o seguinte sistema em diferenças não autônomo*

$$x(n+1) = A(n)\, x(n), \tag{2.14}$$

*onde $A(n) = diag(\ a_1(n), a_2(n))$.*

*Começamos com uma análise completa para checar as propriedades de dicotomia. Lembrar que $T(n,\tau)$, $n \geq \tau$, é um operador linear limitado no espaço de fase $\mathfrak{B}_\alpha$ definido por*

$$T(n,\tau)\,\varphi(\theta)$$
$$= \begin{cases} \left( \left( \prod_{s=\tau}^{n+\theta-1} a_1(s) \right) \varphi^1(0), \left( \prod_{s=\tau}^{n+\theta-1} a_2(s) \right) \varphi^2(0) \right), & se\ -(n-\tau) \leq \theta \leq 0, \\ \varphi(n-\tau+\theta), & se\ \theta < -(n-\tau). \end{cases}$$

*Um cálculo mostra que*

$$\begin{aligned} T(n,s)\,T(s,m) &= T(n,m), \ para\ n \geq s \geq m, \ e \\ T(n,n) &= I. \end{aligned}$$

*Necessitamos definir projeções apropriadas neste problema. Neste caso as projeções podem ser tomadas como $P(n) : \mathfrak{B}_\alpha \to \mathfrak{B}_\alpha$, dadas por:*

$$P(n)\,\varphi(\theta) = \begin{cases} \left( \varphi^1(\theta), \varphi^2(\theta) - \left( \prod_{s=n+\theta}^{n-1} a_2(s)^{-1} \right) \varphi^2(0) \right), & se\ -n \leq \theta \leq 0, \\ (\varphi^1(\theta), \varphi^2(\theta)), & se\ \theta < -n, \end{cases}$$

*e $Q(n) = I - P(n) : \mathfrak{B}_\alpha \to \mathfrak{B}_\alpha$, dadas por:*

$$Q(n)\,\varphi(\theta) = \begin{cases} \left( 0, \left( \prod_{s=n+\theta}^{n-1} a_2(s)^{-1} \right) \varphi^2(0) \right), & se\ -n \leq \theta \leq 0, \\ (0, 0), & se\ \theta < -n. \end{cases}$$

*Para $n \geq \tau$, observamos que $T(n,\tau) : Q(\tau)\mathfrak{B}_\alpha \to Q(n)\mathfrak{B}_\alpha$ é dado por:*

$$T(n,\tau)Q(\tau)\varphi(\theta) = \begin{cases} \left(0, \left(\prod_{s=\tau}^{n+\theta-1} a_2(s)\right)\varphi^2(0)\right), & se\ -(n-\tau) \leq \theta \leq 0, \\ \left(0, \left(\prod_{s=n+\theta}^{\tau-1} a_2(s)^{-1}\right)\varphi^2(0)\right), & se\ -n \leq \theta \leq -(n-\tau), \\ (0,0) & se\ \theta < -n. \end{cases}$$

*Podemos ver que para $n \geq \tau$:*

$$T(n,\tau)Q(\tau) = Q(n)T(n,\tau),$$
$$T(n,\tau)P(\tau) = P(n)T(n,\tau).$$

*Pode-se provar que $T(n,\tau)$, $n \geq \tau$, é um isomorfismo de $Q(\tau)\mathfrak{B}_\alpha$ sobre $Q(n)\mathfrak{B}_\alpha$. Definimos $T(\tau,n)$ como a aplicação inversa, a qual é dada por:*

$$T(\tau,n)Q(n)\varphi(\theta) = \begin{cases} \left(0, \left(\prod_{s=\tau+\theta}^{n-1} a_2(s)^{-1}\right)\varphi^2(0)\right), & se\ -\tau \leq \theta \leq 0, \\ (0,0) & se\ \theta < -\tau. \end{cases}$$

*Para continuar, precisamos da seguintes suposições: Sejam $\delta_i : \mathbb{Z}^+ \to (0,+\infty)$, $i = 1,2$ duas sequências e seja $\sigma$ uma constante positiva tal que*

*(i)* $\prod_{s=\tau}^{t} |a_1(s)| \leq \sigma \prod_{s=\tau}^{t} \delta_1(s)$, *para* $0 \leq \tau \leq t$.

*(ii)* $\prod_{s=\tau}^{t} |a_2(s)|^{-1} \leq \sigma \prod_{s=\tau}^{t} \delta_2(s)$, *para* $0 \leq \tau \leq t$.

*(iii)* $\lim_{n\to\infty} \prod_{s=\tau}^{n} \dfrac{|a_1(s)|}{\delta_1(s)} = 0$, *para* $\tau \geq 0$.

*(iv) Existe uma constante $C \geq 1$ tal que* $\prod_{s=\tau}^{t} [\delta_1(s)\delta_2(s)] \leq C$, *para* $t \geq \tau \geq 0$.

*As suposições anteriores são essencialmente tiradas de Pinto [29] que as introduz para construir sistemas em diferenças ordinários com $(k_1,k_2)$-dicotomia de tipo compensada. Porem, no nosso caso o problema de determinar quando uma equação em diferença funcional tem uma $(k_1,k_2)$-dicotomia a qual é compensada, resulta muito mais difícil, pois necessitamos construir certas projeções e dar alguma estimativa na norma do operador solução que age no espaço de fase com dimensão infinita.*

*Um exemplo concreto de funções* $a_1$ *e* $a_2$ *satisfazendo as suposições previas, é considerar* $a_1(n) := 1$, $a_2(n) := 2$, *e assim* $\rho_1^* = \rho_2^* = 1$. *É fácil ver que as condições (i), (ii), (iii) e (iv) são satisfeitas com* $\delta_1(n) := 3/2$, $\delta_2(n) := 1/2$ *e* $\sigma = C = 1$; *também poderíamos ter considerado* $\delta_1(n) := \delta_1$, $\delta_2(n) := \delta_2$, *com* $1 < \delta_1 \leq 2$, $1/2 \leq \delta_2 < 1$ *e* $1/2 < \delta_1\delta_2 \leq 1$. *Outro exemplo é considerar* $a_1(n)$ *e* $a_2(n)$ *tal que* $1 \leq |a_1(n)| \leq \lambda |a_2(n)|$, *para todo* $n \geq 0$, *onde* $\lambda \in (0,1)$. *Nesse caso, podemos escolher* $\delta_1(n) := |a_1(n)|$, $\delta_2(n) := |a_2(n)|^{-1}$ *e* $\sigma = C = 1$.

*Até o final deste exemplo assumimos que* $a_1$ *e* $a_2$ *são funções satisfazendo (i)-(iv) com* $\rho_j^* < +\infty$ *(ver (2.13)),* $j = 1, 2$. *Usando (i), (ii) e (iv), podemos assegurar que:*

$$\prod_{s=\tau}^{t} |a_2(s)|^{-1} \leq C\sigma^{-1} \prod_{s=\tau}^{t} |a_1(s)|^{-1}. \tag{2.15}$$

*Em virtude da estimativa precedente, temos que:*

$$\|T(n,\tau) P(\tau)\| \leq 6C\rho_1^* \left(\sigma^2 + 1\right) \left(\prod_{s=\tau}^{n-1} |a_1(s)|\right). \tag{2.16}$$

*Com efeito*

$$\begin{aligned}
&\|T(n,\tau) P(\tau)\| \\
&\quad \leq \max_{-(n-\tau)\leq\theta\leq 0} \prod_{s=\tau}^{n+\theta-1} \frac{|a_1(s)|}{\alpha(-\theta)} + 3 \max_{-n\leq\theta\leq-(n-\tau)} \prod_{s=n+\theta}^{\tau-1} \frac{|a_2(s)|^{-1}}{\alpha(-\theta)} \\
&\quad \leq \left[\prod_{s=\tau}^{n-1} |a_1(s)|\right] \max_{-(n-\tau)\leq\theta\leq 0} \prod_{s=n+\theta}^{n-1} \frac{|a_1(s)|^{-1}}{\alpha(-\theta)} \\
&\qquad +3C\sigma^2 \left[\prod_{s=\tau}^{n-1} |a_1(s)|\right] \max_{-n\leq\theta\leq-(n-\tau)} \prod_{s=n+\theta}^{n-1} \frac{|a_1(s)|^{-1}}{\alpha(-\theta)} \\
&\quad \leq 6C\rho_1^* (\sigma^2 + 1) \prod_{s=\tau}^{n-1} |a_1(s)|.
\end{aligned}$$

*Além disso, podemos verificar que*

$$\|T(n,\tau) Q(\tau)\| \leq \rho_2^* \prod_{s=\tau}^{n-1} |a_2(s)|^{-1}. \tag{2.17}$$

*Das estimativas (2.16) e (2.17) é fácil ver que o sistema (2.14) admite uma* $(k_1, k_2)$-*dicotomia a qual é compensada e satisfaz*

$$\lim_{n\to\infty} k_1(n)^{-1} T(n,m) P(m) = 0,$$

*onde* $k_1(n) := \prod_{s=0}^{n-1} \delta_1(s)$, $k_2(n) := \prod_{s=0}^{n-1} \delta_2(s)^{-1}$ *e* $M := 6C(\rho_1^* + \rho_2^*)(\sigma^2 + 1)\sigma$.

*A continuação consideramos a seguinte perturbação do sistema (2.14):*

$$y(n+1) = A(n)\,y(n) + D(n)\,R(n)\,|y(0)|\,y(n) + \nu \sum_{s=-\infty}^{n} D(n)\,R(s)\,|y(s)|\,y(0)\,, \tag{2.18}$$

*onde* $D(n)$ *e* $R(n)$ *são duas matrizes* $2 \times 2$ *tais que*

$$\begin{aligned}
\chi_1 &:= \sum_{\tau=-\infty}^{0} |R(\tau)|\,\alpha(-\tau)^2 < +\infty,\\
\chi_2 &:= \sum_{\tau=-\infty}^{0} |R(\tau)|\,k_2(\tau)^2 < +\infty,\\
\chi_3 &:= \sum_{\tau=-\infty}^{0} |\tau D(\tau)|\,\alpha(-\tau)^2 < +\infty,
\end{aligned}$$

*e* $\nu$ *é um número real suficientemente pequeno.*

*Podemos verificar que se* $\nu$ *satisfaz*

$$6\alpha(1)\,C^5\left(\rho_1^* + \rho_2^*\right)\left(\sigma^2 + 1\right)\left(\chi_1 + \chi_2\right)\chi_3\,|\nu| < 1$$

*então o Teorema 2.1.1 é aplicável ao sistema (2.14) e (2.18).*

A continuação fornecemos um exemplo para ilustrar a utilidade do Teorema 1.2.5. Seja $a$ um número positivo. Seja $(\beta_n)_n$ uma sequência tal que $\beta_n \geq 1$ e $\beta_n \to 1$. Notar que $\|\beta\|_\infty \geq 1$, onde temos denotado por $\|\cdot\|_\infty$ a norma do supremo para a sequência $(\beta_n)_n$ em $\mathbb{Z}^+$. Assumamos que $a^n/\beta_n$ é decrescente e seja $\alpha(n)$ uma sequência positiva crescente em $\mathbb{Z}^+$ tal que $\alpha(n)\,\alpha(m) = \alpha(n+m)$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{j\leq -n} \frac{a^j}{\alpha(-j)} = 0.$$

Um exemplo concreto onde tais condições são satisfeitas é o seguinte: Tomemos $a \in (0, 1/\|\beta\|_\infty)$ e $\alpha(n) = a^{-2n}$.

**Exemplo 2.1.8.** *Consideremos a seguinte equação em diferença linear homogênea:*

$$x(n+1) = ax(n)\,, \quad n \geq n_o \geq 0. \tag{2.19}$$

*Observamos que o operador solução* $T(n,m)$, $n \geq m$ *no espaço* $\mathfrak{B}_\alpha$ *é definido por:*

$$T(n,m)\,\varphi(\theta) = \begin{cases} a^{\theta+n-m}\varphi(0)\,, & \text{se } m-n \leq \theta \leq 0 \\ \varphi(n+\theta-m)\,, & \text{se } \theta < m-n. \end{cases}$$

*Um cálculo direto mostra que:*

$$T(n,s)\,T(s,\tau) = T(n,\tau)\,,\ n \geq s \geq \tau,\ \text{e}\ T(n,n) = I,\ n \geq 0.$$

*Além disso, se tomarmos $P(n) = I$, temos que a equação (2.19) tem uma $(a^n/\beta_n, 1)$-dicotomia, e as constantes $M$ e $C$ da Definição 1.2.1 são: $M = \|a^\bullet\|_{\mathfrak{B}_\alpha} \|\beta\|_\infty$ e $C = 1$.*

*Denotemos por $L(m)\varphi(\theta) = a^{\theta - m}\varphi(0)$. Não é difícil verificar que*

$$\lim_{n\to\infty} k_1(n)^{-1}\,T(n,m) = L(m)\,.$$

*De fato isto é uma consequência da seguinte estimativa:*

$$\left\|k_1(n)^{-1}\,T(n,m) - L(m)\right\| \leq \alpha(m)\left(|\beta_n - 1|\,\|a^\bullet\|^2_{\mathfrak{B}_\alpha} + 2\,\|\beta\|_\infty \sup_{j\leq -n} \tfrac{a^j}{\alpha(-j)}\right).$$

*A continuação consideramos a seguinte perturbação de (5.12):*

$$y(n+1) = ay(n) + b(n)\,y(0)\,y(n) + \nu c(n)\,|y(n)|\,y(n)\,, \tag{2.20}$$

*para $n \geq n_o \geq 0$, onde $b(n)$ e $c(n)$ são sequências de números complexos definidas para $n \geq n_o$, tais que:*

$$\rho_b := \sum_{s=n_o}^{\infty} |sb(s)|\,\alpha(2s) < +\infty,$$
$$\rho_c := \sum_{s=n_o}^{\infty} |sc(s)|\,\alpha(2s) < +\infty.$$

*Podemos ver que a condição $\rho_b < +\infty$ implica que (d-2) da suposição (D) vale. Seja $\nu$ um número real tal que*

$$\left(|\nu|\,\|a^\bullet\|^2_{\mathfrak{B}_\alpha}\,\|\beta\|^2_\infty\,\rho_c\right)/a < 1.$$

*Esta condição garante (d-4). Por outra parte, para a equação (1.12), podemos conseguir uma estimativa como em (2.16), e assim a condição ($D_2$) é satisfeita. Portanto, pelo Teorema 1.2.5, existe uma constante positiva $R$ suficientemente pequena tal que para cada $\varphi \in P(n_o)\,\mathfrak{B}_\alpha[R]$, existe uma solução $y = y(\varphi)$ da equação (1.12) tal que o $k_1$-limite de $y_\bullet(\varphi)$ existe e satisfaz a seguinte fórmula assintótica:*

$$y_n(\varphi) = Z_\varphi(n) + \sum_{s=n_o}^{n-1} \Gamma(n,s)\,E^o\left(f_1(s, y_s(\varphi)) + f_2(s, y_\bullet(\varphi))\right) + o(k_1)\,.$$

*Notamos que* $b_1 \leq \|a^\bullet\|_{\mathfrak{B}_\alpha}$, *onde* $b_1$ *é definida como no Teorema 1.2.5. Assim, o* $k_1$*-limite de* $y_\bullet$ *é dado por:*

$$Z_\infty^{k_1}(y_\bullet(\varphi)) = a^{\bullet - n_o}\varphi(0) + \sum_{s=n_o}^{\infty} a^{\bullet - s}\left(f_1(s, y_s(\varphi)) + f_2(s, y_\bullet(\varphi))\right).$$

*Por outra parte o conjunto* $\Omega$ *de todas as soluções convergentes* $y_\bullet(\varphi)$ *da equação (1.12) com* $\varphi \in P(n_o)\mathfrak{B}_\alpha[R]$, *é equiconvergente em* $\infty$ *em* $X_{\infty,k_1}$. *Além disso, é fácil ver que a condição* $(D_4)$ *(ver observação 3.2) e a condição* $(D_6)$ *(ver observação 3.4) são satisfeitas. Portanto a correspondência* $y(\varphi) \longleftrightarrow Z_\varphi$ *é bicontínua, a aplicação* $\varphi \to y_\bullet(\varphi)$ *é contínua e o conjunto* $\widetilde{\Omega}$ *é relativamente compacto em* $X_{\infty,k_1}$.

# Referências Bibliográficas

[1] R.P.Agarwal, *Difference Equations and Inequalities*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[2] B.Aulbach, *Continuos and Discrete Dynamics Near Manifolds of Equilibria*, Lectures and Notes in Mathematics 1058, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1984.

[3] C.Avramescu, *Sur l´existence des Solutions Convergentes d´equations Differentielles non Linéaires*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), **81**(1969), 147-168.

[4] S.S.Cheng, H.L.Li and W.Patula, *Bounded and Zero Convergent Solutions of Second Order Difference Equations*, J. Math. Anal. Appl., **5**(1999), 1-23.

[5] W.A.Coppel, *Dichotomies in Stability Theory*, Lectures and Notes in Mathematics 629, Springer-Verlag, 1978.

[6] C.Corduneanu, *Integral Equations and Stability of Feedback Systems*, Academic Press, 1973.

[7] C.Cuevas, *Weighted Convergent and Bounded Solutions of Volterra Difference Systems with Infinite Delay*, J. Diff. Eqs. Appl., **6**(2000), 461-480.

[8] C.Cuevas and M.Pinto, *Asymptotic Properties of Solutions to Nonautonomous Volterra Difference Systems with Infinite Delay*, Comput. Math. Appl., **42**(2001), 671-685.

[9] C.Cuevas and M.Pinto, *Convergent Solutions of Linear Functional Difference Equations in Phase Space*, J. Math. Anal. Appl., **277**(2003), 324-341.

[10] Ju.L.Daleckii and M.G.Krein, *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*, AMS, Providence, RI, 1978

[11] A.Drozdowicz and J.Popenda, *Asymptotic Behavior of the Solutions of the Second Order Difference Equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **99**(1)(1987), 135-140.

[12] S.Elaydi and O.Háyek, *Exponential Dichotomy and Trichotomy of Nonlinear Diferential Equations*, Differential and Integral Equations, **3**(6)(1990), 1201-1224.

[13] K.Gopalsamy, *Stability and Oscillations on Delay Differencial Equations of Population Dynamics*, Kluwer Academic, 1992.

[14] T.Hallam, *Convergence os Solutions of Perturbed Nonlinear Differential Equations*, Ann. Mat. Pura Appl.(IV), **94**(1972), 275-282.

[15] T.Hallam, *On Convergence os Solutions of Functional Differential Equations*, J.M.A.A., **48**(1974), 566-573.

[16] J.Hale and J.Kato, *Phase Space for Retarded Equations with Infinite Delay*, Funkialaj Ekvacioj, **21**(1978), 11-41.

[17] D.Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lectures and Notes in Mathematics 480, Springer-Verlag, New York, 1981.

[18] A.Kartsatos and G.Michaelides, *Existence of Convergent Solutions to Quasi-linear Systems and Asymtotic Equivalence*, J. Diff. Eqs., **13**(1973), 481-489.

[19] Y.Hino, S.Murakami and T.Naito, *Functional Differential Equations with Infinite Delay*, Lectures and Notes in Mathematics 1473, Springer-Verlag, 1991.

[20] C.S.Höning, *Aplicações da Topologia à Análise*, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[21] N.Levinson, *The Asymptotic Behavior of System of Linear Differential Equations*, Am. Math. J., **15**(1946), 1-6.

[22] N.Levinson, *The Asymptotic Nature of Solutions of Linear Systems of Differential Equations*, Duke Math J., **15**(1948), 129-139.

[23] J.L.Massera and J.J.Schäffer, *Linear Differential Equations and Functions Space*, Academic Press, New York, 1966.

[24] S.Murakami, *Representation of Solutions of Linear Functional Difference Equations in Phase Space*, Nonlinear Anal., **30**(1997), 1153-1164.

[25] K.J.Palmer, *Exponential Dichotomies and Transversal Points*, J. Diff. Eqs., **55**(1984), 225-256.

[26] O.Perron, *Ober Summengleichungen and Poincarésche Differenzengleichunger*, Math. Amm., **84**(1921), 1-15.

[27] O.Perron, *Die Stabilitätfrage bei Differentialgleinchungensysteme*, Math. Zeit., **32**(1930), 703-728.

[28] M.Pinto, *Weighted Convergent and Bounded Solutions of Difference System*, Adv. in Diff. Eqs. II, Comput. Math. Appl., **36**(1998), 391-400.

[29] M.Pinto, *Discrete Dichotomies*, Comp. Math. Anal., **28**(1994), 259-270.

[30] H.Poincare, *Sur les Équations Linéaires aux Différentielles Ordinaries et aux Differences Fines*, Am.J.Math., **7**(1885), 203-258.