

**Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática**

Pós-Graduação em Matemática

**Modelo Sigma Não-linear
e Função de Partição**

Ediel Azevedo Guerra

Recife
03 de julho de 2000

**Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática**

Ediel Azevedo Guerra

Modelo Sigma Não-linear e Função de Partição

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Ramón Mendoza Ahumada

Recife
3 de Julho de 2000

Guerra, Ediel Azevedo

Modelo Sigma Não-linear e Função de Partição
/ Ediel Azevedo Guerra — Recife: O autor, 2000.
54 folhas: il., fig.

Tese (doutorado) — Universidade Federal de
Pernambuco. CIN. Ciência da computação, 2000.

Inclui bibliografia.

1. Integração. 2. Função de Partição. 3.
Renormalização. 4. Regularização Zeta. 5.
Operador de Dirac. I.Título

515.43

CDD (22.ed.)

MEI2007-067

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Ciências.

Aprovado: Ramón Mendonça
Orientador

[Assinatura]

Levi Lopes de Lima

[Assinatura]

Fernando Moraes

**MODELO SIGMA NÃO-LINEAR E
FUNÇÃO DE PARTIÇÃO**
por
Ediel Azevedo Guerra

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 271-8410 – Fax: (081) 271-1833
RECIFE – BRASIL

Julho - 2000

Resumo

Os modelos sigma não-lineares são modelos matemáticos de sistemas físicos nos quais se consideram interações entre campos gravitacionais, bosônicos e fermiônicos. Apesar desses modelos serem comumente definidos sobre Superfícies de Riemann, neste trabalho consideramos alguns modelos sigma não-lineares sobre variedades unidimensionais, visando à compreensão e à formalização matemática de alguns conceitos elaborados nessa teoria, de modo especial o de Função de Partição. Após estabelecer notações, conceitos e alguns resultados básicos, calculamos, em um primeiro momento, a função de partição renormalizada para um modelo sigma definido sobre um intervalo fechado da reta numérica real; mostramos nesse contexto, por intermédio de procedimentos de renormalização e de aproximação semiclássica, que a função de partição apresenta valores finitos em várias situações. Em um segundo momento, e o principal dessa dissertação de doutorado, consideramos modelos sigma sobre a circunferência unitária; nesse novo contexto, apresentamos valores explícitos para a função de partição renormalizada quando o espaço alvo são as seguintes variedades riemannianas: a esfera euclidiana no espaço euclidiano usual e o toro plano. **Palavras-chave:** Função de Partição; Renormalização; Regularização Zeta; Operador de Dirac; Integração.

Abstract

The non-linear sigma models are mathematical models of physical systems in which interactions amongst gravitation, bosonic and fermionic fields are considered. In spite of the fact that such models are commonly defined on Riemann Surfaces, in this work we have considered some non-linear sigma models on unidimensional manifold, aiming at understanding and the mathematical formulation of some concepts formulated within this theory, specially the Partition Function. After establishing notations, concepts and some basic results, we have calculated, at first, the renormalized partition function for a sigma model define on a closed interval of the real numeric straight line; we have presented within this context, through renormalization and semi-classical approximation procedures, that the partition function presents definite values in various situations. At a second moment, and the main one in this doctoral thesis, we have considered sigma models on a unitary circumference; within this new context, we have shown explicit values for the renormalized partition function when the target space are the following riemannian manifolds: the euclidean sphere within the usual euclidean space and the flat torus. **Keywords:** Partition Function; Renormalization; Zeta regularization; Dirac operator; Integration.

Conteúdo

Introdução	5
1 Preliminares	10
1.1 Preliminares algébricos	11
1.1.1 Álgebras de Grassmann	11
1.1.2 Derivação em álgebras de Grassmann	12
1.1.3 Integração sobre álgebras de Grassmann	12
1.1.4 Álgebras de Clifford	13
1.2 Preliminares geométricos	13
1.2.1 Fibrado de Clifford	13
1.2.2 Operador de Dirac e o laplaciano generalizado	14
1.2.3 Operações elementares com fibrados	14
1.2.4 Volume do fibrado tangente unitário	15
1.2.5 Número de intersecção e dualidade de Poincaré	15
2 Função de partição	17
2.1 Renormalização	18
2.2 Regularização de determinantes	23
2.3 A Supermétrica sobre $Met(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma, X)$	25
2.4 Aproximação semiclássica	25
3 A Função de Partição de um σ-modelo sobre um intervalo fechado	29
3.1 Preliminares	29
3.2 Cálculo da Função de Partição	32
4 O modelo e a função de partição	38
4.1 O modelo	38
4.2 A função de partição para o modelo	39
4.3 Cálculo da função de partição	40
4.3.1 Z_{ren}^{SC} restrita à classe de homotopia das aplicações constantes	40
4.3.2 A esfera S^2 como variedade alvo	43
4.3.3 O toro plano como espaço alvo	49

Introdução

Os σ -modelos dizem respeito a sistemas físicos em que interagem campos gravitacionais, campos bosônicos e/ou campos fermiônicos. Apesar desses modelos serem comumente definidos sobre superfícies de Riemann, consideraremos o estudo da função de partição para alguns σ -modelos definidos sobre variedades unidimensionais visando à formalização e ‘a “*experimentação*” de alguns conceitos matemáticos fundamentais utilizados nessa teoria em um contexto mais simples que o usual. Seguimos o seguinte itinerário: após estabelecer nos capítulos 1 e 2 as notações, conceitos e resultados básicos que precisaremos nos dois capítulos posteriores, nos fixamos, no capítulo 3, em um σ -modelo formulado na teoria do campo bosônico livre sobre um intervalo. Em seguida, no capítulo 4, tratamos de um σ -modelo não-linear fermiônico definido sobre a circunferência S^1 .

O primeiro problema que abordamos aqui é o da determinação da função de partição para um σ -modelo sobre um intervalo fechado da reta. Esse problema foi motivado em sua origem pelos artigos [P1] e [W2]. Em [P1], artigo em que Polyakov trata da teoria das cordas bosônicas, considera-se o estudo da integral

$$Z_\gamma = \int_{Met(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}^D)} e^{-\beta E(g, \phi)} dg d\phi,$$

onde Σ é uma superfície de Riemann de gênero γ , $C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}^D)$ é o conjunto das aplicações de classe C^∞ de Σ em $\mathbb{R}^D$, $D=26$, $\beta = \frac{1}{kT}$ (aqui k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura do sistema físico em questão) e

$$E(g, \phi) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_\Sigma s(g) \nu_g + \frac{\lambda}{2} \int_\Sigma \langle \Delta_g \phi, \phi \rangle \nu_g,$$

onde α e λ são constantes de acoplamento, $s(g)$ é a curvatura gaussiana de Σ na métrica g e ν_g é o elemento de volume de g . Note que se Σ é uma variedade compacta, então, pelo teorema de Gauss-Bonnet, temos que

$$\frac{1}{4\pi} \int_\Sigma s(g) \nu_g = \chi(\Sigma),$$

onde $\chi(\Sigma)$ é a característica de Euler de Σ , um número inteiro que depende apenas da topologia de Σ .

Em [W2], artigo apresentado por Witten no Congresso Internacional de Matemática de 1986, em Zürich, define-se um modelo sigma não-linear como a teoria do campo quântico relativa ao estudo da função

$$Z_f(\Sigma, X) = \int_{\Omega_f(\Sigma, X)} e^{-\beta E} d\phi,$$

onde Σ é uma superfície de Riemann com bordo, X é uma variedade riemanniana com tensor métrico h , $\Omega_f(\Sigma, X)$ é o espaço das funções contínuas de Σ em X que coincidem com f sobre o bordo de Σ , e E é um funcional definido sobre $\Omega_f(\Sigma, X)$.

Motivados pelos artigos ([P1],[W2]), os autores em [MGM] consideram o problema de definir e calcular a função de partição

$$Z(\beta) = \int_{Met(S^1) \times C^\infty(S^1, \mathbb{R}^D)} e^{-\beta E} dg d\phi,$$

onde $E : Met(S^1) \times C^\infty(S^1, \mathbb{R}^D) \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função dada por

$$E(g, \phi) = l_g^2 + \frac{1}{2} \langle \Delta_g \phi, \phi \rangle.$$

O valor encontrado pelos autores para a função de partição, após um procedimento de renormalização, é dado por

$$Z(\beta)_{ren} = \frac{1}{2} \beta^{3D/4} \Gamma(-D/4),$$

onde Γ denota a função complexa Gama de uma variável complexa.

No mesmo espírito de [MGM], consideramos inicialmente o problema de definir e calcular a função de partição

$$Z(\beta) = \int_{Met(I) \times C_0^\infty(I, \mathbb{R}^D)} e^{-\beta E} dg d\phi,$$

onde I é um intervalo $[a, b]$ da reta, $Met(I)$ é o espaço das métricas sobre I , $C_0^\infty(I, \mathbb{R}^D)$ é o conjunto das aplicações de I no espaço euclidiano D -dimensional $\mathbb{R}^D$ que se anulam nas extremidades de I e $E : Met(I) \times C_0^\infty(I, \mathbb{R}^D) \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função dada por

$$E(g, \phi) = l_g^2 + \frac{1}{2} \langle \Delta_g \phi, \phi \rangle.$$

Utilizando o procedimento de renormalização descrito no capítulo 2, obtemos uma expressão $Z_{ren}(\beta)$ para a função de partição cujo valor pode ser determinado explicitamente. O resultado obtido, contido no capítulo 3 adiante, é o seguinte:

Teorema 1. *Se $\mathcal{S} = Met(I) \times C_0^\infty(I, \mathbb{R}^D)$ e $E : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função dada por $E(g, \phi) = l_g^2 + \frac{1}{2} \langle \Delta_g \phi, \phi \rangle$, então o valor da função de partição renormalizada é dado por*

$$Z_{ren}(\beta) = \beta^{\frac{D-1}{2}} \cdot 2^{-\frac{D}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{-D+2}{4}\right).$$

Aqui Γ denota a função Gama da teoria das funções de uma variável complexa.

O segundo problema aqui abordado, objeto do capítulo 4, diz respeito aos modelos sigma não-lineares supersimétricos, atualmente um campo de interesse central em física teórica (Cf. [V]). Vários conceitos surgidos no estudo de tais modelos têm sido aplicados em diferentes áreas da matemática permitindo, por exemplo, novas interpretações da teoria de Morse (Cf. [W1], [HS], [Ch]) ou novas informações acerca das curvas racionais sobre as variedades de Calabi-Yau (Cf. [COGP], [AM]).

Em sua formulação geral, os modelos sigma não-lineares supersimétricos tratam do conjunto das aplicações $\phi : \Sigma \longrightarrow X$, onde Σ é uma superfície de Riemann, X é uma variedade riemanniana ou uma variedade complexa de Kähler cujas únicas 2-formas fechadas são do tipo (1,1) (Cf. [AM],[W]). A variedade Σ é denominada *espaço fonte* e a variedade X é denominada *espaço alvo*. O funcional energia é definido levando-se em conta as contribuições dos campos gravitacionais, bosônicos, fermiônicos do sistema físico considerado, e, além disso, de um termo adicional topologicamente invariante, que depende apenas da classe de homotopia de $\phi \in C^\infty(\Sigma, X)$, da classe de cohomologia de uma forma em $H_{DR}^{dim\Sigma}(X)$ no caso riemanniano (ou de uma (1,1)-forma em $H^{1,1}(X)$, no caso de uma variedade complexa) e da classe de homologia da imagem de Σ em X (Cf. [AM]).

O modelo que trataremos aqui é aquele proposto em [MRM], definido no contexto mais simples em que Σ é a circunferência S^1 . Para descrever esse modelo considere duas variedades riemannianas (Σ, g) e (X, h) conexas, compactas, sem bordo, orientáveis, de dimensões m e n , respectivamente. Denote por $Cl_g(\Sigma)$ o fibrado de Clifford de (Σ, g) . Dada uma aplicação diferenciável $\phi : \Sigma \longrightarrow X$ de classe C^∞ , seja ϕ^*TX o fibrado induzido sobre Σ por ϕ .

Considere o fibrado de módulos à esquerda $Cl_g(\Sigma) \otimes \phi^*TX$ sobre $Cl_g(\Sigma)$ (isto é, $Cl_g(\Sigma) \otimes \phi^*TX$ é um fibrado sobre Σ cuja fibra sobre $p \in \Sigma$ é um módulo à esquerda sobre a álgebra de Clifford $Cl(T_p\Sigma, g_p)$). Seja $\mathcal{D}_{(g,\phi)}$ o operador de Dirac de $Cl_g(\Sigma) \otimes \phi^*TX$, e denote por $\mathcal{E}_{(g,\phi)}$ a álgebra de Grassmann gerada pelas autofunções normalizadas de $\mathcal{D}_{(g,\phi)}$. Obtemos desse modo um novo fibrado $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{B} \equiv Met(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma, X)$ cuja fibra sobre (g, ϕ) é dada por $\mathcal{E}_{(g,\phi)}$.

A *superenergia* $\hat{E}$ associada ao fibrado $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{B}$ é definida como sendo

$$\hat{E}(\psi) = \alpha \int_{\Sigma} s(g) \nu_g + \beta \int_{\Sigma} tr_g \phi^* h \nu_g + \gamma \mathcal{D}_{(g,\phi)} \psi \cdot \psi + \delta \int_{\Sigma} \phi^* \omega,$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são constantes de acoplamento, $s(g)$ é a curvatura escalar da métrica g , ν_g é o elemento de volume de g , e $\omega \in H_{DR}^{dim\Sigma}(X, \mathbb{Z})$. Se e_a , $a = 1, 2, \dots, k$ é um conjunto de geradores de $H_{DR}^{dim\Sigma}(X)$, então $[\omega] = \sum_{a=1}^k c^a [e_a]$, onde c^a são números reais. Denotando o último termo de $\hat{E}(\psi)$ por E_t , obtemos que $E_t = \sum_{a=1}^k c^a m_a$, onde $m_a = \int_{\Sigma} \phi^* e_a$. Pelo teorema da dualidade de Poincaré (Cf. [GH]) temos que

$$m_a = \int_{\Sigma} \phi^* e_a = \int_{\phi(\Sigma)} e_a = \# ([\phi(\Sigma)] \cdot [PD(e_a)]),$$

onde $PD(e_a) \in H_{dimX-dim\Sigma}(X)$ é o ciclo dual de Poincaré de e_a , e $\#([\phi(\Sigma)] \cdot [PD(e_a)])$ é o número de intersecção da classe de homologia de $\phi(\Sigma)$ com a classe de homologia do ciclo $PD(e_a)$. Desse modo, os m_a são números inteiros que dependem da classe de homologia de $\phi(\Sigma)$.

O problema proposto em [MRM] é o de definir e obter um valor explícito para a função

$$Z\left(\frac{\alpha}{kT}, \frac{\beta}{kT}, \frac{\gamma}{kT}, \frac{\delta}{kT}\right) = \int e^{-\frac{1}{kT} \hat{E}(\psi)}.$$

Isso é feito por intermédio dos procedimentos de aproximação semiclássica e de renormalização descritos no capítulo 2, obtendo uma expressão calculável para a função de partição clássica Z que denotamos por Z_{ren}^{SC} . Como E_t é um

invariante topológico, o cálculo de Z_{ren}^{SC} pode ser feito considerando uma soma discreta sobre as classes de homotopia $[\Sigma, X]$ das aplicações de Σ em X . Convém observar aqui, que se ϕ e $\tilde{\phi}$ são aplicações homotópicas de Σ em X , então ϕ^*TX e $\tilde{\phi}^*TX$ são fibrados isomorfos. Temos, portanto,

$$Z_{ren}^{SC} = \sum_{[\phi] \in [\Sigma, X]} Z_{ren}^{SC}|_{[\phi]}.$$

No que se segue assumiremos que $kT = 1$, a menos que se diga explicitamente o contrário.

Em [MRM] os autores consideraram o caso em que $\Sigma = (S^1, g)$ e $X = (S^1, h)$, e obtiveram o valor de Z_{ren}^{SC} restrita à classe de homotopia das aplicações constantes:

$$Z_{ren}^{SC}|_{[\phi=cte]} = \frac{1}{2} \alpha^{-\frac{3}{4}} \beta^{\frac{1}{2}} \gamma^{-2} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \text{vol}(S^1, h).$$

O problema que abordamos no capítulo 4 é o de definir e calcular $Z = \int_{\mathcal{E}} e^{-\hat{E}(\psi)}$ nos casos em que $\Sigma = S^1$ e X é o toro flat ou a esfera S^2 equipada com a métrica induzida pela métrica euclidiana do $\mathbb{R}^3$. Os resultados encontrados estão descritos nos teoremas 2 e 3 abaixo.

Teorema 2. *Sejam Σ a circunferência S^1 com uma métrica riemanniana g e X uma variedade riemanniana n -dimensional compacta com uma métrica h . Então o valor da função de partição Z_{ren}^{SC} restrita à classe de homotopia das aplicações constantes é dado por*

$$Z_{ren}^{SC}|_{[\phi=cte]} = \frac{1}{2} \alpha^{-\frac{3n}{4}} \beta^{\frac{n}{2}} \gamma^{-2n} \Gamma\left(\frac{3n}{4}\right) \text{vol}(X, h).$$

Seja (S^2, can) a esfera munida da métrica riemanniana induzida pela métrica canônica do $\mathbb{R}^3$. A imagem de uma aplicação harmônica $\phi : S^1 \rightarrow (S^2, can)$ é um círculo máximo de S^2 . Desse modo, podemos olhar para ϕ como sendo uma aplicação de S^1 em $\phi(S^1) \equiv S^1$. Definimos o *grau* da aplicação harmônica $\phi : S^1 \rightarrow (S^2, can)$ como sendo o número de vezes que ela cobre sua imagem.

Teorema 3. *Sejam Σ a circunferência S^1 munida de uma métrica riemanniana g e X a esfera S^2 equipada com a métrica induzida pela métrica euclidiana do $\mathbb{R}^3$. Então o valor da função de partição Z_{ren}^{SC} restrita à classe de homotopia das aplicações harmônicas $[\phi]_1 \in [S^1, S^2]$ de grau 1 é dado por*

$$Z_{ren}^{SC}|_{[\phi]_1} = 2\pi^2 \gamma^{-4} \beta^{-1} \int_0^\infty \frac{e^{-[\alpha l_g^2 + \beta \frac{(2\pi)^2}{l_g}]}}{\sinh(l_g/2)} l_g^{\frac{7}{2}} dl_g,$$

onde l_g é o comprimento de S^1 na métrica g .

Observe que na expressão obtida para $Z_{ren}^{SC}|_{[\phi]_1}$ não consta a constante de acoplamento δ . Isso se deve ao fato de E_t ser nula para S^2 , uma vez que $H_{DR}^1(S^2) = 0$.

Para o toro plano obtivemos o resultado seguinte:

Teorema 4. *Sejam $\Sigma = (S^1, g)$ e $X = S^1 \times S^1$ o toro flat com métrica h . Seja $\phi_{m_1, m_2} : S^1 \rightarrow X$ a aplicação $\phi_{m_1, m_2}(z) = (\alpha z^{m_1}, \beta z^{m_2})$, com $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se $E_t = \int_{S^1} \phi_{m_1, m_2}^* w$, $w = c^1 d\theta_1 + c^2 d\theta_2 \in H_{DR}^1(X, \mathbb{Z})$, então*

$$Z_{m_1, m_2} := Z_{ren}^{SC}|_{[\phi_{m_1, m_2}]} = \alpha^{3/2} \beta \gamma^{-4} \left(\int_0^\infty e^{-[x^2 + \frac{h}{x}(m_1^2 + m_2^2)]} x^2 dx \right) \text{vol}(X, h) q_1^{m_1} q_2^{m_2},$$

onde $b = 4\pi^2\beta\sqrt{\alpha}$ e $q_i = e^{-\delta c_i}$, $i \in \{1, 2\}$.

Capítulo 1

Preliminares

No estudo das partículas elementares da matéria, os físicos têm distinguido dois tipos básicos de partículas: os *férmions*, que obedecem o princípio de exclusão de Pauli e podem ser descritos pela estatística de Fermi; e os *bósons*, que não obedecem àquele princípio, e cujo comportamento pode ser descrito pela estatística de Bose. O modelo que estudaremos nos capítulos subseqüentes, pretende incorporar esses dois tipos de partículas por intermédio dos conceitos de campo bosônico e de campo fermiônico.

Um *campo* sobre uma variedade diferenciável Σ é uma seção de um fibrado E sobre Σ , de fibra F . Um *campo bosônico* sobre Σ é uma seção de um fibrado trivial cuja base Σ e cuja fibra X são variedades riemannianas; devido ao caráter trivial do fibrado E é conveniente identificar o espaço das seções $\Gamma(E)$ de E com o espaço $C^\infty(\Sigma, X)$ das aplicações de classe C^∞ de Σ em X . Um *campo fermiônico* sobre Σ é uma seção de um fibrado cuja base é uma variedade riemanniana e cuja fibra é um módulo sobre uma álgebra de Clifford. Os *campos gravitacionais* são seções do fibrado $S^2\Sigma$ das aplicações bilineares simétricas sobre Σ .

Neste trabalho, entendemos por *modelo* um par $(\mathcal{S}, E)$, onde $\mathcal{S}$ é um conjunto definido a partir de um dado sistema físico, e $E : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que descreve a energia de cada $s \in \mathcal{S}$. O espaço $\mathcal{S}$ é denominado *espaço de configurações* do modelo.

Um modelo que tem sido amplamente estudado em Relatividade Geral é aquele em que a energia E_G é definida sobre o conjunto $Met(\Sigma)$ de todas as métricas sobre uma variedade diferenciável compacta orientável pela seguinte expressão:

$$E_G(g) = \int_{\Sigma} s(g) \nu_g,$$

onde $s(g)$ é a curvatura escalar de Σ na métrica g e ν_g é o elemento de volume de g . Sabe-se que os pontos críticos de E_G são exatamente as métricas de Einstein sobre Σ .

Outros modelos bastante difundidos, e que têm sido objeto de investigação nas últimas décadas pelas suas conexões com o problema da unificação da forças elementares, são os σ -modelos. Esses modelos tratam de sistemas físicos em que se consideram as interações entre os campos gravitacionais e os campos bosônicos e/ou fermiônicos. Os *modelos sigma não-lineares* referem-se a sistemas físicos em que se consideram as interações dos campos gravitacionais e dos campos bosônicos $C^\infty(\Sigma, X)$, onde X é uma variedade riemanniana de dimensão finita

sem estrutura de espaço vetorial. Nesse tipo de modelo os campos fermiônicos não são considerados. Um exemplo de um tal modelo é aquele em que o espaço de configurações é constituído pelos campos bosônicos ϕ sobre uma variedade riemanniana (Σ, g) compacta orientável, sem bordo, e a função energia E é a função que a cada campo ϕ associa o número

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \text{tr}_g \phi^* h \nu_g,$$

onde h é a métrica sobre a fibra X , $\phi^* h$ é o pull-back de h pela aplicação ϕ , e $\text{tr}_g \phi^* h$ é o traço de $\phi^* h$ com respeito à métrica g . Os pontos críticos desse funcional são denominados aplicações harmônicas.

Um *modelo sigma não-linear supersimétrico*, por sua vez, é um modelo definido a partir de um sistema físico em que interagem campos gravitacionais, bosônicos e fermiônicos. O modelo supersimétrico que trataremos neste trabalho é aquele proposto em [MRM] obtido a partir de um fibrado $\mathcal{E}$ cuja base é dada por $\mathcal{B} = \text{Met}(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma, X)$ e cujas fibras são as álgebras de Grassmann geradas pelas autofunções de um operador de Dirac $\mathcal{D}_{(g, \phi)}$ convenientemente definido. Estaremos particularmente interessados nos casos em que $\Sigma = S^1$ e X é o toro plano $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ou a esfera S^2 . Para estabelecer precisamente esse modelo, o que será feito no capítulo 2, é necessário fixar notações, introduzir alguns conceitos e resultados básicos; esse é o objetivo deste capítulo.

1.1 Preliminares algébricos

O tratamento matemático dos campos fermiônicos requer a introdução de duas noções fundamentais: álgebra de Grassmann e álgebra de Clifford; duas álgebras associativas com produtos anticomutativos. O objetivo desta seção é introduzir esses dois conceitos, ressaltando suas propriedades mais elementares que serão necessárias nos capítulos subseqüentes.

1.1.1 Álgebras de Grassmann

A *álgebra de Grassmann* $\mathcal{G}_N$ é a álgebra associativa, com unidade 1, gerada sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ por N símbolos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ sujeitos à seguinte regra de multiplicação

$$\theta_i \theta_j + \theta_j \theta_i = 0, \quad 1 \leq i, j \leq N$$

Note que quando $i = j$, obtém-se $\theta_i^2 = 0$ para $i = 1, 2, 3, \dots, N$.

Uma base da álgebra $\mathcal{G}_N$, vista como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, é dada pelos monômios

$$1, \theta_1, \dots, \theta_N, \theta_i \theta_j (i < j), \theta_i \theta_j \theta_k (i < j < k), \dots, \theta_1 \theta_2 \dots \theta_N$$

Desse modo, a dimensão de $\mathcal{G}_N$ é igual a $\sum_{p=0}^N \binom{N}{p} = 2^N$.

Um elemento $f \in \mathcal{G}_N$ arbitrário, pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} f = f(\theta) &\equiv f_0 1 + \sum_{i < 1} f_{ij} \theta_i \theta_j + \sum_{i < j < k} f_{ijk} \theta_i \theta_j \theta_k + \dots + f_{12 \dots N} \theta_1 \dots \theta_N \\ &= \sum_{0 \leq k \leq N} \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1 \dots i_k} \theta_{i_1} \theta_{i_2} \dots \theta_{i_k}, \end{aligned}$$

onde $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq N$.

Note que essa expansão de f pode ser posta na seguinte forma:

$$f = \sum_{n_i \in \{0,1\}} f_{n_1, \dots, n_N} \theta_1^{n_1} \theta_2^{n_2} \dots \theta_N^{n_N}$$

Os inteiros $n_i \in \{0,1\}$ podem ser pensados como os números de ocupação dos estados descritos pelos θ_i . Esse ponto de vista traz à tona as relações subjacentes entre as álgebras de Grassmann e a estatística de Fermi.

1.1.2 Derivação em álgebras de Grassmann

A *derivada à esquerda* $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$ é definida sobre os monômios $\theta_{i_1} \theta_{i_2} \dots \theta_{i_N}$ da seguinte maneira: a derivada $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$ de um monômio que não contém θ_i é igual a zero; a derivada $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$ de um monômio que contém θ_i é calculado movendo-se o θ_i para a esquerda obedecendo a anticomutação até que ele ocupe a primeira posição do monômio, quando então é suprimido. Essa operação é estendida por linearidade para qualquer elemento da álgebra. Analogamente define-se *derivada à direita*. Verifica-se facilmente que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_i} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_j + \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_i} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \theta_j \right\} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

1.1.3 Integração sobre álgebras de Grassmann

As *integrais de Berezin* são operações lineares sobre funções $f(\theta_1, \dots, \theta_N)$ dos geradores $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ de $\mathcal{G}_N$, dadas por

$$\begin{aligned} \int f(\theta_1, \dots, \theta_N) d\theta_i &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} f(\theta_1, \dots, \theta_N), \\ \int f(\theta_1, \dots, \theta_N) d\theta_i d\theta_j &= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_i} f(\theta_1, \dots, \theta_N), \dots \\ \int f(\theta_1, \dots, \theta_N) d\theta_1 \dots d\theta_N &= \frac{\partial}{\partial \theta_1} \dots \frac{\partial}{\partial \theta_N} f(\theta_1, \dots, \theta_N). \end{aligned}$$

Valem as seguintes proposições (Cf. Berezin[B], Itzykson e Drouffe[ID]):

Proposição 1. *Sejam $\theta_1, \dots, \theta_N$ os geradores de uma álgebra de Grassmann $\mathcal{G}_N$ e a_{ij} números reais tais que $a_{ij} = -a_{ji}$, para $0 \leq i, j \leq N$. Então,*

$$\int \exp\left(\frac{1}{2} \sum a_{ij} \theta_i \theta_j\right) d\theta_N \dots d\theta_1 = [\det(a_{ij})]^{\frac{1}{2}}$$

Proposição 2. *Se o conjunto de geradores de uma álgebra de Grassmann pode ser decomposto em dois conjuntos conjugados θ_k e $\bar{\theta}_k$, $k = 1, 2, 3, \dots, N$, e se $A = (a_{ij})$ é uma matriz anti-simétrica, então*

$$\int \exp\left(\sum_{i,j} a_{ij} \theta_i \bar{\theta}_j\right) d\theta_1 d\bar{\theta}_1 \dots d\theta_N d\bar{\theta}_N = \det A$$

1.1.4 Álgebras de Clifford

Classicamente, a álgebra de Clifford Cl_N é conhecida como a álgebra associativa, com unidade 1, gerada por N elementos $e_1, e_2, \dots, e_N$ sujeitos às seguintes relações:

$$e_i^2 = -1, \\ e_i e_j + e_j e_i = 0, \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

Note que Cl_1 é o conjunto dos números complexos, e que Cl_2 é a álgebra dos quatérnions de Hamilton.

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K , e seja $q : V \longrightarrow K$ uma forma quadrática sobre V . A *álgebra de Clifford* $Cl(V, q)$ é a álgebra associativa sobre K , com unidade 1, gerada por V sujeito à relação

$$v \cdot v = -q(v) \cdot 1, \quad v \in V.$$

Quando a característica de K é diferente de 2, temos que

$$v \cdot w + w \cdot v = -2q(v, w)1,$$

onde $q(v, w) = \frac{1}{2}[q(v + w) - q(v) - q(w)]$.

Observação: Quando a dimensão de V é finita igual a N e q é uma forma quadrática degenerada (isto é, $q(v, v) = 0, \forall v \in V$), a álgebra de Clifford $Cl(V, q \equiv 0)$ coincide com a álgebra de Grassmann $\mathcal{G}_N$.

O leitor interessado em mais informações sobre este tópico, pode consultar as referências [LM] e [BGV].

1.2 Preliminares geométricos

Nosso objetivo nesta seção é introduzir algumas noções de geometria diferencial que usaremos posteriormente, principalmente na descrição do modelo que apresentaremos no capítulo 4. Aqui colecionamos apenas alguns conceitos e fatos elementares com o enfoque que utilizaremos no corpo deste trabalho. Mais informações acerca dos tópicos apenas aludidos nesta seção podem ser obtidos em [LM], [BGV], [GH], [B] e [EL].

1.2.1 Fibrado de Clifford

Um fibrado vetorial $\pi : E \longrightarrow M$ é *riemanniano* quando em cada fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$ existe um produto interno positivo definido $\langle, \rangle_x$ que varia diferencivelmente com x .

Seja $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial riemanniano com métrica $\langle, \rangle$. Considerando para cada $p \in M$ a álgebra de Clifford $Cl(\pi^{-1}(p), \langle, \rangle_p)$ obtém-se um novo fibrado sobre M cujas fibras são álgebras de Clifford. Este fibrado é denominado *fibrado de Clifford* de E e é denotado por $Cl(E)$. O *fibrado de Clifford* $Cl(M)$ de uma variedade riemanniana (M, g) é o fibrado de Clifford de seu fibrado tangente TM .

1.2.2 Operador de Dirac e o laplaciano generalizado

Uma *conexão sobre um fibrado vetorial* $\pi : E \longrightarrow M$ é uma aplicação $\mathbb{R}$ -bilinear

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

que satisfaz os seguintes axiomas (onde $\nabla_X s \equiv \nabla(X, s)$) :

$$(i) \nabla_{fX} s = f \nabla_X s;$$

$$(ii) \nabla_X f s = X(f)s + f \nabla_X s,$$

onde $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. A seção $\nabla_X s$, é denominada *derivada covariante* de s na direção X .

Seja $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial riemanniano com métrica $\langle, \rangle$. Uma *conexão riemanniana* ∇ sobre E é uma conexão sobre E que satisfaz a igualdade

$$X \langle s, t \rangle = \langle \nabla_X s, t \rangle + \langle s, \nabla_X t \rangle$$

para todos $X \in \Gamma(TM)$, e $s, t \in \Gamma(E)$.

Seja (M, g) uma variedade riemanniana orientada com fibrado de Clifford $Cl(M)$, e seja S qualquer fibrado de módulos à esquerda sobre $Cl(M)$ (isto é, S é um fibrado sobre M tal que em cada ponto $p \in M$ a fibra S_p é um módulo à esquerda sobre a álgebra de Clifford $Cl(T_p M, g_p)$). Supondo que S é riemanniano e é dado com uma conexão riemanniana ∇ , definimos o *operador de Dirac* de S como o operador diferencial de primeira ordem $\mathcal{D} : \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S)$ dado, em $p \in M$, por $\mathcal{D}(s) = \sum_{k=1}^m E_k \cdot \nabla_{E_k} s$, onde $\{E_1, \dots, E_m\}$ é um referencial ortonormal local em um aberto em torno de p , e onde o ponto “ $\cdot$ ” denota a multiplicação do módulo de Clifford. A definição independe do referencial ortonormal adotado.

O operador de Dirac $\mathcal{D}$ é um operador formalmente autoadjunto com espectro real não limitado inferiormente e superiormente (Cf. [LM]). No capítulo 4 encontram-se alguns exemplos de operadores de Dirac.

Sejam M uma variedade riemanniana com métrica g e ∇ uma conexão sobre um fibrado vetorial $E \longrightarrow M$. O *laplaciano generalizado* (ou de uma conexão) é o operador que a cada seção $s \in \Gamma(E)$ associa a seção $\tilde{\Delta}s$ definida como

$$(\tilde{\Delta}s)(p) = - \sum_{i=1}^m (\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} - \nabla_{\nabla_{E_i} E_i}) s(p),$$

onde $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ é um referencial ortonormal local em um aberto U em torno de p . O laplaciano generalizado independe do referencial ortonormal escolhido.

1.2.3 Operações elementares com fibrados

Se $E \longrightarrow M$ e $F \longrightarrow M$ são dois fibrados vetoriais, denotaremos por: (1) E^* o *fibrado dual* de E ; (2) $E \oplus F$ a *soma direta* (ou de *Whitney*) de E e F ; (3) $E \otimes F$ o *produto tensorial* de E e F .

Se $\phi : M \longrightarrow N$ é uma aplicação diferenciável e $\pi : E \longrightarrow M$ é um fibrado vetorial sobre M , denotaremos por ϕ^*E o fibrado induzido sobre N por ϕ . A fibra de ϕ^*E sobre $p \in N$ é $E_{\phi(p)}$, a fibra de E sobre $\phi(p)$.

Se ∇^E e ∇^F são conexões sobre os fibrados $E \longrightarrow M$ e $F \longrightarrow N$, podemos definir conexões sobre os fibrados mencionados acima:

(1) a *conexão dual* ∇^* sobre E^* é dada por

$$(\nabla_X^* \theta)(s) = X(\theta(s)) - \theta(\nabla_X s),$$

onde $\theta \in \Gamma(E^*)$ e $s \in \Gamma(E)$;

(2) a *conexão soma direta* ∇ sobre $E \oplus F$ é dada por

$$\nabla_X(r \oplus s) = \nabla_X^E r \oplus \nabla_X^F s;$$

(3) a *conexão produto tensorial* é dada por

$$\nabla_X(r \otimes s) = (\nabla_X^E r) \otimes s + r \otimes (\nabla_X^F s);$$

(4) a *conexão pull-back* é a única conexão ∇ sobre ϕ^*E tal que para cada $p \in M$, com $q = \phi(p)$, $X \in T_p M$ e $s \in \Gamma(E)$ temos que

$$\nabla_X(\phi^* s) = \phi^* \nabla_{\phi_* X}^E(s),$$

onde ϕ_* é a derivada de ϕ e $\phi^* s = s \circ \phi \in \Gamma(\phi^* E)$.

1.2.4 Volume do fibrado tangente unitário

Seja M uma variedade riemanniana com métrica g . O fibrado tangente de M é o conjunto $TM = \{(p, v) | p \in M, v \in T_p M\}$. Dados $(p, v) \in TM$ e V, W vetores tangentes a TM em (p, v) , escolha curvas $\alpha(t) = (p(t), v(t))$ e $\beta(s) = (q(s), w(s))$ com $p(0) = q(0) = p$, $v(0) = w(0) = v$ e $V = (p'(0), v'(0)) = \alpha'(0)$, $W = (q'(0), w'(0)) = \beta'(0)$. Podemos introduzir uma métrica g_1 em TM definindo

$$g_1(V, W) = g(\pi_* V, \pi_* W) + g\left(\frac{DV}{dt}(0), \frac{DW}{dt}(0)\right),$$

onde π_* é a diferencial da projeção canônica $\pi : TM \longrightarrow M$ e $\frac{D}{dt}$ é a derivada covariante.

Note que a métrica g_1 induz no fibrado tangente unitário $UM = \{(p, v) \in TM | g(v, v) = 1\}$ uma métrica riemanniana que ainda denotaremos por g_1 .

Em Besse ([B], pp. 51-2), demonstra-se o seguinte resultado: Se (M, g) é uma variedade riemanniana compacta d -dimensional, então

$$\text{vol}(UM, g_1) = \text{vol}(S^{d-1}, \text{can}) \text{vol}(M, g),$$

onde UM é o fibrado tangente unitário de M , g_1 é a métrica do fibrado tangente de M , e S^{d-1} é a esfera de dimensão $d - 1$ munida da métrica canônica.

1.2.5 Número de intersecção e dualidade de Poincaré

Suponha que M é uma n -variedade orientada, A, B são dois ciclos em M de dimensões k e $n - k$, respectivamente, e $p \in A \cap B$ é um ponto da intersecção transversal de A e B . Sejam $v_1, \dots, v_k \in T_p A \subset T_p M$ uma base orientada de $T_p A$, e $w_1, \dots, w_{n-k} \in T_p B \subset T_p M$ uma base orientada de $T_p B$. Definimos o *índice de intersecção* $i_p(A \cdot B)$ de A e B em p como sendo $+1$ se $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}$ é uma base de orientação positiva para $T_p M$, e sendo -1 em caso contrário. Se A e B intersectam-se transversalmente em todos os pontos de intersecção, definimos o *número de intersecção* de A e B como sendo

$$\#(A \cdot B) = \sum_{p \in A \cap B} i_p(A \cdot B).$$

Em sua versão fraca (cf. [GH]), o Teorema da Dualidade de Poincaré diz que se M é uma n -variedade compacta orientada, então a aplicação

$$P : H_k(M, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_{n-k}(\mathbb{Q})^* \cong H^{n-k}(M, \mathbb{Q})$$

dada por

$$P(A)(B) = \# (A \cdot B),$$

é um isomorfismo. Pelo isomorfismo de de Rham $H^{n-k}(M, \mathbb{Q})$ é isomorfo a $H_{DR}^{n-k}(M, \mathbb{Q})$; desse modo, o Teorema de Dualidade de Poincaré assegura que para qualquer k -ciclo A sobre M existe uma $(n-k)$ -forma fechada φ tal que para qualquer $(n-k)$ -ciclo B sobre M , temos

$$\int_B \varphi = \# (A \cdot B).$$

Essa $(n-k)$ -forma φ é denominada *dual de Poincaré* de A . Usaremos a seguinte notação: $\varphi = PD(A)$.

Se $f : M \longrightarrow N$ é uma aplicação não-singular sobre o ciclo $A \subset N$, então com a orientação apropriada o ciclo $f^{-1}(A)$ é o dual de Poincaré para o pull-back via f do dual de Poincaré de A . Para ver isso, observe que se $B \subset M$ é qualquer ciclo sobre M encontrando $f^{-1}(A)$ transversalmente, temos que $f(B)$ intersecta A transversalmente em $f(B \cap f^{-1}(A))$; assim,

$$\int_B f^*(PD(A)) = \int_{f(B)} PD(A) = \# (f(B) \cdot A) = \# (B \cdot f^{-1}(A)).$$

Portanto, $f^{-1}(A)$ é o dual de Poincaré de $f^*(PD(A))$.

Capítulo 2

Função de partição

Seja S o conjunto dos estados acessíveis a um sistema físico $\mathcal{F}$ em equilíbrio a uma dada temperatura T . Boltzmann descobriu, partindo de estudos anteriores de Maxwell, que a probabilidade $P(s, T)$ de ocorrência de um dado estado acessível s ao sistema $\mathcal{F}$ é proporcional ao fator exponencial $e^{-E(s)/kT}$, onde $E(s)$ é a energia da configuração s e k é a constante de Boltzmann. Fazendo $\beta = \frac{1}{kT}$, podemos escrever

$$P(s, T) = C e^{-\beta E(s)},$$

onde C é uma constante a ser determinada. Usando a condição de normalização $\sum_{s \in S} P(s, T) = 1$, obtemos que

$$C = \frac{1}{\sum_{s \in S} e^{-\beta E(s)}}.$$

Logo, fazendo $Z(\beta) = \sum_{s \in S} e^{-\beta E(s)}$, obtemos que

$$P(s, T) = \frac{e^{-\beta E(s)}}{Z(\beta)}.$$

Definição: Seja S o conjunto de todos estados acessíveis a um dado sistema físico $\mathcal{F}$ em equilíbrio a uma dada temperatura T . Seja $E : S \rightarrow \mathbb{R}$ a função que a cada estado $s \in S$ associa sua energia. A *função de partição* Z associada ao par (S, E) é dada por

$$Z(\beta) = \sum_{s \in S} e^{-\beta E(s)},$$

onde $\beta = 1/kT$, sendo k a constante de Boltzmann.

Observação:

- (1) A letra Z vem da palavra alemã *Zustandsumme*, que significa *soma sobre estados*.
- (2) Alternativamente, podemos definir função de partição no contexto da teoria da medida. Para isso, considere um sistema físico $\mathcal{F}$ em equilíbrio a uma dada temperatura T . Seja $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra de subconjuntos do

conjunto S , de todos estados acessíveis a $\mathcal{F}$. Se $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ é uma medida e $E : S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, então a *função de partição* associada ao par (S, E) é dada por

$$Z(\beta) = \int_S e^{-\beta E} d\mu ,$$

onde $\beta = 1/kT$, k é a constante de Boltzmann.

- (3) A importância do conhecimento da função de partição, reside no fato de que as propriedades termodinâmicas de um sistema físico podem ser expressas em termos de $\ln Z$. Por exemplo, a energia, a entropia e a pressão de um sistema físico são dadas, respectivamente, por:

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z , S = \beta E + \ln Z , P = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial V} \ln Z .$$

Mais considerações acerca da função de partição podem ser encontradas nas referências ([R], [MB], [Ha], [ID]).

2.1 Renormalização

Em vários problemas físicos, o espaço de configurações $\mathcal{S}$ é uma variedade riemanniana de dimensão infinita. Então, o primeiro problema com o qual nos defrontamos é o de dar sentido matemático à função de partição $Z(\beta)$. Um segundo problema é o de obter valores explícitos para $Z(\beta)$. Há dois procedimentos que utilizaremos para esse fim: o de renormalização e o de aproximação semiclássica.

O procedimento de renormalização da função de partição é utilizado quando é possível identificar um grupo de simetrias G que age sobre $\mathcal{S}$, deixando a energia do sistema invariante, e de modo que o quociente $\mathcal{S}/G$ tenha uma estrutura de variedade riemanniana de dimensão finita. Nesse caso, redefine-se a função de partição por intermédio de uma integração sobre a variedade quociente $\mathcal{S}/G$. Essa redefinição é motivada por um resultado válido para o caso em que $\mathcal{S}$ e G têm dimensão finita. Para enunciar esse resultado, precisaremos de algumas definições e observações preliminares.

Nos deteremos inicialmente no caso mais simples em que $\mathcal{S}$ é um conjunto e G é um grupo finito que age sobre $\mathcal{S}$ de modo que o conjunto quociente $\mathcal{S}/G$ é finito. Dado $s \in \mathcal{S}$, o *grupo de isotropia* (ou *estabilizador*) de s é o subgrupo de G dado por

$$K_s = \{g \in G | g \cdot s = s\}.$$

Dado $s \in \mathcal{S}$, temos que os grupos de isotropia K_s e $K_{g \cdot s}$ são isomorfos; para ver isso, basta observar que a aplicação $i_a : K_s \rightarrow K_{g \cdot s}$, dada por $i_a(x) = gxg^{-1}$, é um isomorfismo. Por conseguinte, podemos definir o número de elementos no grupo de isotropia da órbita $[s]$ de $s \in \mathcal{S}$ como

$$\#K_{[s]} = \#K_s,$$

para qualquer $s \in [s]$.

Quando o espaço quociente $\mathcal{S}/G$ é finito, podemos reescrever a função de partição $Z(\beta) = \sum_{s \in \mathcal{S}} e^{-\beta E(s)}$ em termos de uma soma sobre as órbitas $[s] \in \mathcal{S}/G$. Isso é feito no teorema seguinte.

Proposição 3. *Seja $A : G \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ uma ação de um grupo finito G sobre um conjunto $\mathcal{S}$, denotada por $A(g, s) = g \cdot s$, tal que o conjunto quociente $\mathcal{S}/G$ é finito. Se $E : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{R}$ é uma função constante ao longo das órbitas da ação (isto é, $E(g, s) = s, \forall g \in G$), então*

$$Z(\beta) = \sum_{s \in \mathcal{S}} e^{-\beta E(s)} = \left(\sum_{[s] \in \mathcal{S}/G} e^{-\beta \bar{E}([s])} \cdot \frac{1}{\#K_{[s]}} \right) \#G.$$

Demonstração: Fixado $s \in \mathcal{S}$, considere a aplicação $A_s : G \longrightarrow [s] \subset \mathcal{S}$ dada por $A_s(g) = g \cdot s$. Observe que A_s não é injetiva, pois

$$(gh) \cdot s = g \cdot (h \cdot s) = g \cdot s,$$

para todo $h \in K_s$. Considere então a aplicação $\bar{A}_s : G/K_s \longrightarrow [s] \subset \mathcal{S}/G$ dada por $\bar{A}_s([g]) = g \cdot s$. Note, agora, que $\bar{A}_s$ é bijetiva, pois

$$\bar{A}_s([g]) = \bar{A}_s([gh]),$$

para todo $h \in K_s$. Temos então que $\#G/K_s = \#[s]$. Pelo Teorema de Lagrange, concluímos que

$$\#[s] = \frac{\#G}{\#K_s}.$$

Desse modo, obtemos que

$$Z(\beta) = \sum_{s \in \mathcal{S}} e^{-\beta E(s)} = \sum_{[s] \in \mathcal{S}/G} \left[\sum_{s \in [s]} e^{-\beta E(s)} \right] = \sum_{[s] \in \mathcal{S}/G} \left[\#[s] \cdot e^{-\beta \bar{E}([s])} \right],$$

onde $\bar{E}$ é tal que $\bar{E} \circ \pi = E$.

Daí segue-se, finalmente, que

$$Z = \left(\sum_{[s] \in \mathcal{S}/G} e^{-\beta \bar{E}([s])} \cdot \frac{1}{\#K_s} \right) \#G.$$

□

Observação: Podemos obter uma medida μ em $\mathcal{S}/G$ definindo

$$\mu([s]) = \frac{1}{\#K_s}.$$

Isso permite reescrever a função de partição obtida na proposição acima como

$$Z = Z_{ren}(\beta) \#G,$$

onde

$$Z_{ren}(\beta) = \int_{\mathcal{S}/G} e^{-\beta \bar{E}} \frac{1}{\#K_s} d\mu.$$

Consideraremos, agora, o caso em que $\mathcal{S}$ é uma variedade riemanniana de dimensão finita orientável, e G um grupo de Lie compacto. Seja $A : G \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ uma ação diferenciável. Para $s \in \mathcal{S}$ fixado, considere a aplicação $A_s : G \longrightarrow \mathcal{S}$ dada por $A_s(a) = A(a, s)$. Defina $A'_{s,a}$ como sendo a restrição da derivada $A'_s(a)$ ao subespaço $(\text{Ker} A'_s(a))^\perp$. Denote por $A'^*_{s,a}$ a adjunta de $A'_{s,a}$.

O determinante de Fadeev-Popov da ação de G sobre $\mathcal{S}$ é a função

$$FP : G \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$$

dada por

$$FP(a, s) = \sqrt{\det(A'^*_{s,a} \circ A_{s,a'})}.$$

Teorema 5. *Sejam $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ uma variedade riemanniana e (G, h) um grupo de Lie com uma métrica bi-invariante h . Se G atua sobre $\mathcal{S}$ por isometrias, então o determinante de Fadeev-Popov tem as seguintes propriedades:*

- (i) $FP(a, s) = FP(e, s)$
- (ii) $FP(e, s) = FP(e, as)$.

Demonstração: Para demonstrar (i), considere as aplicações $l_a : G \longrightarrow G$, $l_a(x) = ax$; $L_a : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$, $L_a(s) = a \cdot s$; e $A_s : G \longrightarrow \mathcal{S}$, dada por $A_s(y) = y \cdot s$. É imediato verificar que

$$A_s \circ l_a = L_a \circ A_s.$$

Derivando os termos desta igualdade na identidade, obtemos que

$$A'_s(a) \circ l'_a(e) = L'_a \circ A'_s(e).$$

Temos que l_a e L_a são isometrias, pois h é uma métrica biinvariante sobre G e G age sobre $\mathcal{S}$ por isometrias; desse modo,

$$\det A'_{s,a} = \pm \det A'_{s,e}.$$

Concluimos daí que

$$FP(a, s) = FP(e, s).$$

Para demonstrar (ii), considere as aplicações $i_a : G \longrightarrow G$, $i_a(x) = axa^{-1}$, $A_{a \cdot s} : G \longrightarrow \mathcal{S}$, $A_{a \cdot s}(x) = xas$, e $L_a : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ dada por $L_a(s) = a \cdot s$. É imediato verificar que $L_a \circ A_s = A_{as} \circ i_a$. Derivando os termos dessa igualdade na identidade e $e \in G$, obtemos que

$$L'_a \circ A'_s(e) = A'_{as}(e) \circ Ad_a.$$

Como L'_a e Ad_a são isometrias, pois G atua por isometrias e h é uma métrica biinvariante, segue-se que

$$\det A'_{s,e} = \pm \det A'_{as,e}.$$

Portanto,

$$FP(e, as) = \sqrt{\det A'^*_{as,e} \circ A'_{as,e}} = \sqrt{\det A'^*_{s,e} \circ A'_{s,e}} = FP(e, s)$$

□

Observação: Segue-se da proposição que FP é constante ao longo das órbitas da ação. Portanto, tem sentido definir o determinante de Fadeev-Popov da órbita $[s]$ de $s \in \mathcal{S}$, como sendo $FP([s]) = FP(e, s)$.

Observe que se $Ad(a)$ é uma transformação ortogonal para todo $a \in G$, então o isomorfismo $i_a : K_s \rightarrow K_{a \cdot s}$ dado por $i_a(x) = axa^{-1}$ é uma isometria. Portanto, tem sentido definir o volume do estabilizador de $[s]$ como sendo o volume do estabilizador de qualquer $s \in [s]$; ou seja, $vol(K_{[s]}) = vol(K_s)$.

Podemos agora enunciar o teorema que prometemos.

Teorema 6. *Sejam $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ uma variedade riemanniana orientável de dimensão finita, e (G, h) um grupo de Lie compacto com métrica biinvariante. Se G atua sobre $\mathcal{S}$ por isometrias e $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável sobre $\mathcal{S}$ tal que $f(a \cdot s) = f(s), \forall a \in G$, então*

$$\int_{\mathcal{S}} f(s) \nu_{\mathcal{G}} = \left(\int_{\mathcal{S}/G} f([s]) FP([s]) \frac{1}{vol(K_{[s]})} \nu_{\tilde{\mathcal{G}}} \right) \int_G \nu_h$$

onde $\nu_{\mathcal{G}}, \nu_h$ e $\nu_{\tilde{\mathcal{G}}}$ são as formas de volume de $\mathcal{S}, G$ e $\mathcal{S}/G$, respectivamente.

Para demonstrar esse teorema necessitaremos do resultado seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada na referência [Hel]; para mais detalhes, o leitor interessado pode também consultar [R].

Teorema 7. ([Hel]) *Seja G um grupo de Lie e K um subgrupo fechado. A relação*

$$|\det Ad_G(k)| = |\det Ad_K(k)|, k \in K,$$

é uma condição necessária e suficiente para a existência de uma medida G -invariante positiva sobre G/K . Essa medida dg_K é única (a menos de um fator constante) e

$$\int_G f(a) dg = \int_{G/K} \left(\int_K f(a \cdot k) dk \right) dg_K,$$

onde f é contínua de suporte compacto em G , se as medidas invariantes à esquerda dg e dk estão adequadamente normalizadas.

Corolário: Sejam G um grupo de Lie compacto e K um subgrupo fechado de G . Se $|\det Ad_G(k)| = |\det Ad_K(k)|$, então

$$vol(G/K) = \frac{vol(G)}{vol(K)}.$$

Demonstração (do corolário): Tomando $f \equiv 1$ no Teorema, obtemos que

$$\int_G dg = \int_{G/K} (vol K) dg_K,$$

donde se conclue que

$$vol(G) = vol(K) \cdot vol(G/K).$$

Logo,

$$vol(G/K) = \frac{vol(G)}{vol(K)}.$$

□

Observação: O corolário generaliza o Teorema de Lagrange para grupos finitos.

Demonstração (do teorema 6):

Aplicando o Teorema de Fubini localmente e usando uma partição da unidade, obtemos que

$$\int_{\mathcal{S}} f(s) v_{\mathcal{G}} = \int_{\mathcal{S}/G} \left(\int_{[s]} f(s) v_{\tilde{\mathcal{G}}} \right) v_{\tilde{\mathcal{G}}},$$

onde $\tilde{\mathcal{G}}$ é a métrica sobre $\mathcal{S}/G$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ é a métrica induzida sobre $[s]$ vista como subvariedade de $\mathcal{S}$.

Como f é constante em $[s]$, concluímos que

$$\int_{\mathcal{S}} f(s) v_{\mathcal{G}} = \int_{\mathcal{S}/G} f([s]) \left(\int_{[s]} v_{\tilde{\mathcal{G}}} \right) v_{\tilde{\mathcal{G}}}.$$

Seja $A_s : G/K_s \rightarrow [s]$ dada por $A_s(\bar{a}) = a \cdot s$. Então, pela fórmula da mudança de variáveis, temos que

$$\int_{[s]} v_{\tilde{\mathcal{G}}} = \int_{G/K_s} A_s^* v_{\tilde{\mathcal{G}}} = \int_{G/K_s} \det A'_s(a) v_{\bar{h}} = \int_{G/K_s} FP(a, s) v_{\bar{h}},$$

onde nesta última igualdade usamos o seguinte resultado de álgebra linear: se L é um operador linear de $(V, <, >)$ que preserva orientação, então $\det L = \sqrt{\det(L^*L)}$. Usando o teorema 4 obtemos que

$$\int_{G/K_s} FP(a, s) v_{\bar{h}} = \int_{G/K_s} FP([s]) v_{\bar{h}}$$

A última igualdade decorre do corolário enunciado anteriormente. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} f(s) v_{\mathcal{G}} &= \int_{\mathcal{S}/G} f(s) \cdot FP([s]) \cdot v_{\tilde{\mathcal{G}}} \\ &= \left(\int_{\mathcal{S}/G} f([s]) \cdot FP([s]) \cdot \frac{1}{\text{vol}(K_{[s]})} \cdot v_{\tilde{\mathcal{G}}} \right) \cdot \int_G v_h. \end{aligned}$$

□

Definição: Quando $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ é uma variedade riemanniana de dimensão infinita e G é um grupo de simetrias que age sobre $\mathcal{S}$ por isometrias deixando uma função $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ invariante, e, além disso, o quociente $\mathcal{S}/G$ tem dimensão finita, definimos, com a notação acima e motivados pelo teorema anterior, a *função de partição renormalizada*:

$$Z_{ren}(\beta) = \int_{\mathcal{S}/G} f([s]) FP([s]) \frac{1}{\text{vol} K_{[s]}} \nu_{\tilde{\mathcal{G}}},$$

onde f é a função induzida no quociente por f , $K_{[s]}$ é o grupo de isotropia de $s \in [s]$, $\tilde{\mathcal{G}}$ é a métrica induzida sobre $\mathcal{S}/G$ e $FP([s]) = \sqrt{\det P}$, com $P = A_{s,e}'^* \circ A_{s,e}' : (Ker A_{s,e}'(e))^{\perp} \rightarrow (Ker A_{s,e}'(e))^{\perp}$.

2.2 Regularização de determinantes

A noção de regularização de determinantes é necessária quando se deseja definir o determinante de um operador que atua sobre um espaço vetorial de dimensão infinita. Na parte inicial desta seção, adotaremos [T] como referência básica.

Dada uma seqüência $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ de números reais positivos, considere a função

$$\zeta_\Lambda(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^s}.$$

suponha que $\zeta_\Lambda(s)$ converge para parte real de s suficientemente grande. Observe que

$$\prod_{n=1}^N \lambda_n = \exp \left(-\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n^s} \right).$$

Tendo isso em vista, e supondo que $\zeta_\Lambda(s)$ é uma função que pode ser prolongada analiticamente, sendo analítica em $s = 0$, define-se o produto regularizado da seqüência Λ como

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right)_\zeta = \exp(-\zeta'_\Lambda(0))$$

Neste caso diz-se que a seqüência Λ é *zeta multiplicável*. **Exemplo:** Para $\Lambda = \{1, 2, 3, \dots\}$, tem-se que $\zeta_\Lambda(s)$ coincide com a função Zeta de Riemann,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

para $\text{Re } s > 1$. A função Zeta de Riemann pode ser estendida analiticamente a todo o plano complexo. Da teoria das funções de uma variável complexa, sabe-se que $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, $\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \ln 2\pi$. Decorre dessas propriedades que

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty} n \right)_\zeta = \sqrt{2\pi}.$$

A seguir enumeramos algumas propriedades do produtório acima definido, que decorrem diretamente da definição.

Proposição 4. *Seja $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ uma seqüência de números reais positivos. Então:*

a) para um número real positivo α , tem-se que

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\alpha \right)_\zeta = \left(\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right)_\zeta^\alpha$$

b) para um número real positivo μ , tem-se que

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\mu \right)_\zeta = \left(\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right)_\zeta^{\mu \zeta_\Lambda(0)}$$

Proposição 5. *Seja $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ uma seqüência zeta multiplicável de números reais positivos e seja $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ uma seqüência de números reais positivos tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln \alpha_n|$ existe. Então a seqüência*

$$\Lambda \cdot A = \{\lambda_1 \alpha_1, \lambda_2 \alpha_2, \dots\}$$

é zeta multiplicável e vale a seguinte identidade:

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \right)_{\zeta} = \left(\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right)_{\zeta} \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

Considere agora um operador pseudo-diferencial essencialmente autoadjunto positivo P de ordem $k \geq 1$, atuando sobre as seções de um fibrado vetorial $E \longrightarrow M$, onde M é uma variedade riemanniana compacta, de dimensão m , com autovalores $0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_n \leq \dots$. A função ζ de Riemann generalizada de P é definida como

$$\zeta_P(s) = \sum_{E_n \neq 0} E_n^{-s}, s \in \mathbb{C}.$$

Seeley [S], usando o cálculo de operadores pseudo-diferenciais dependentes de um parâmetro complexo, demonstra que $\zeta_P(s)$ é uma função meromorfa para $\operatorname{Re}(s) > \frac{m}{k}$ com apenas pólos isolados fora da origem $s = 0$. Assim $\zeta_P(0)$ e $\zeta'_P(0)$ estão bem definidos.

O *determinante regularizado* de P é definido como sendo

$$\det P = \exp(-\zeta'_P(0)).$$

Mostra-se (Cf. [E]) que

$$\det(\beta P) = \beta^{\zeta_P(0)} \det P.$$

Para introduzir a noção de determinante regularizado no caso em que P é um operador autoadjunto com autovalores λ positivos e negativos, do tipo Dirac, e $Q = P^* \circ P$ é um operador com autovalores não-negativos, recordamos a definição do *invariante eta*:

$$\eta_P(z) = \sum_{\lambda \neq 0} (|\lambda|^{-z} \operatorname{sgn} \lambda) \dim E(\lambda, P) + \dim E(0, P),$$

onde $E(\lambda, P)$ é o autoespaço gerado pelas autofunções de P associadas ao autovalor λ . Essa função foi introduzida em [APS] no estudo de assimetria espectral. Observe que, formalmente,

$$\eta_P(0) = (\text{No. de autovalores positivos}) - (\text{No. de autovalores negativos}).$$

Vale notar que $\eta_P(0)$ pode não ser um número inteiro (Cf. [A],[GLP]). Definimos, então, o determinante regularizado de P como sendo

$$\det P = \sqrt{\det Q} (-1)^{\alpha_o},$$

onde

$$\alpha_z = \sum_{\lambda < 0} (|\lambda|^{-z} \operatorname{sgn} \lambda).$$

2.3 A Supermétrica sobre $Met(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma, X)$

Sejam Σ e X variedades diferenciáveis orientadas e compactas, de dimensões finitas. Denote por $Met(\Sigma)$ o conjunto de todas as métricas riemannianas sobre Σ , e por $C^\infty(\Sigma, X)$ o conjunto de todas as aplicações de classe C^∞ de Σ em X . Dados $\phi \in C^\infty(\Sigma, X)$ e $g \in Met(\Sigma)$ mostra-se que os espaços tangentes $T_\phi(C^\infty(\Sigma, X))$, $T_g(Met(\Sigma))$ podem ser identificados com os espaços das seções $\Gamma(\phi^*TX)$ e $\Gamma(S^2\Sigma)$, respectivamente (Cf. [H]), onde ϕ^*TX é o fibrado induzido sobre Σ por ϕ e $S^2\Sigma$ é o fibrado dos tensores bilineares simétricos sobre Σ .

A supermétrica sobre $\mathcal{B} = Met(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma, X)$ é a métrica riemanniana $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{B}$ obtida a partir das formas quadráticas $\mathcal{G}_{(g,\phi)}$ dadas por

$$\mathcal{G}_{(g,\phi)}((\delta g, \delta \phi)) = \int_{\Sigma} tr(\hat{\delta g} \circ \hat{\delta g}) \nu_g + \int_{\Sigma} h \circ \phi(\delta \phi, \delta \phi) \nu_g,$$

onde $\delta g \in T_g(Met(\Sigma))$, $\delta \phi \in T_\phi(C^\infty(\Sigma, X))$, $\hat{\delta g}$ é a única aplicação linear que satisfaz

$$\delta g(u, v) = g(\hat{\delta g}u, v), \forall u, v \in \Gamma(T\Sigma),$$

e tr denota o traço de um operador linear.

Seja $\mathcal{D}^+(\Sigma)$ o grupo dos difeomorfismos de Σ que preservam orientação. A aplicação

$$A : \mathcal{B} \times \mathcal{D}^+(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{B}$$

dada por $A((g, \phi), f) = (f^*g, f^*\phi) \equiv f^*(g, \phi)$, onde f^*g é o pull-back de g por f e $f^*\phi = f \circ \phi$, define uma ação de $\mathcal{D}^+(\Sigma)$ sobre $\mathcal{B}$ pela direita.

Mostra-se (Cf. [M,G]) que:

(1) $\mathcal{D}^+(\Sigma)$ age isometricamente sobre $\mathcal{B}$, isto é, para cada $f \in \mathcal{D}^+(\Sigma)$ fixado a aplicação

$$(A_f)_{*s} : (T_s\mathcal{B}, \mathcal{G}_s) \longrightarrow (T_{f^*s}\mathcal{B}, \mathcal{G}_{f^*s})$$

é uma isometria.

(2) A supermétrica $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{B}$ induz uma métrica riemanniana $\overline{\mathcal{G}}$ no quociente $\mathcal{B}/\mathcal{D}^+(\Sigma)$.

2.4 Aproximação semiclássica

O cálculo de um valor explícito para a função de partição pressupõe a definição de uma medida sobre a variedade $\mathcal{S}$, o que nem sempre é possível. O método de aproximação semiclássica visa à obtenção de valores aproximados para aquela função, transferindo a integração sobre $\mathcal{S}$ para uma integração sobre os pontos críticos da energia.

O conjunto dos *pontos críticos* da função energia $E : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$\mathcal{PC}(E) = \{s \in \mathcal{S} | E_{*s} = 0\},$$

onde $E_{*s} : T_s\mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a derivada de E no ponto $s \in \mathcal{S}$.

O *hessiano* de E em um ponto crítico $s \in \mathcal{S}$ é a aplicação bilinear simétrica

$$Hess_s(E) : T_s\mathcal{S} \times T_s\mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida como

$$Hess_s(E)(v, w) = v(w(E))(s).$$

Se tivermos uma métrica $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{S}$, podemos obter um operador autoadjunto $\mathcal{H}^E$ que satisfaz a identidade

$$Hess_s(E)(v, w) = \mathcal{G}(\mathcal{H}^E v, w), \quad \forall v, w \in T_s \mathcal{S}.$$

Denotemos ainda por $\mathcal{H}^E$ o operador obtido pela restrição de $\mathcal{H}^E$ ao espaço $[T_s \mathcal{PC}(E)]^\perp$. O método da aproximação semiclássica consiste em assumir a seguinte aproximação:

$$Z(\beta) \cong Z^{SC} = \int_{\mathcal{PC}(E)} e^{-\beta E} \frac{1}{\sqrt{\det \mathcal{H}^{\beta E}}} \nu_{\mathcal{G}_c},$$

onde $\nu_{\mathcal{G}_c}$ é o elemento de volume induzido por $\mathcal{G}$ sobre a subvariedade $\mathcal{PC}(E)$.

A proposição seguinte é um exemplo simples de aproximação semiclássica em que $E(v) = \frac{1}{2} \langle Hv, v \rangle$, onde H é um operador autoadjunto, e $\mathcal{PC}(E) = \{0\}$.

Proposição 6. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se $H : V \rightarrow V$ é um operador positivo autoadjunto, então*

$$\int_V e^{-\frac{1}{2} \langle Hv, v \rangle} \frac{\nu_g}{(2\pi)^{n/2}} = \frac{1}{\sqrt{\det H}},$$

onde ν_g é o elemento de volume de V na métrica riemanniana g associada a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Demonstração: *Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de V tal que $He_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, n$. Temos que $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Segue-se que $\langle Hv, v \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$. A integral dada pode ser calculada facilmente:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2)} \frac{dx}{(2\pi)^{n/2}} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} = \frac{1}{\sqrt{\det H}}.$$

□

Consideremos o caso em que o espaço de configurações $\mathcal{S}$ é o conjunto

$$C^\infty(\Sigma, X) = \{\phi : \Sigma \rightarrow X \mid \phi \in C^\infty\},$$

onde (Σ, g) e (X, h) são variedades riemannianas compactas, orientáveis, sem bordo, e a energia $E_b : C^\infty(\Sigma, X) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$E_b(\phi) = \frac{1}{2} \int_\Sigma \text{tr}_g \phi^* h \nu_g.$$

Na determinação dos pontos críticos de E_b é útil ter em mente a identificação $T_\phi(C^\infty(\Sigma, X)) \equiv \phi^* TX$. Para calcular a derivada $(E_b)_* \phi \cdot V$ de E_b no ponto $\phi \in C^\infty(\Sigma, X)$ na direção de $V \in \phi^* TX$, toma-se uma curva $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow C^\infty(\Sigma, X)$ tal que $c(0) = \phi$ e $c'(0) = V$ (por exemplo, $c(t)(\sigma) = \exp_{\phi(\sigma)} \cdot t(V(t))$; então

$$(E_b)_* \cdot V = \frac{d}{dt} (E_b \circ c(t)(\cdot))|_{t=0}$$

A determinação dos pontos críticos de E_b é feita por intermédio do teorema da primeira variação (Cf. [EL]):

$$(E_b)_*\phi \cdot V = - \int_{\Sigma} h(V, \tau(\phi)) \nu_g,$$

onde

$$\tau(\phi)(p) = \sum_{i=1}^m (\tilde{\nabla}_{E_i} \phi_* E_i - \phi_* \nabla_{E_i} E_i)(p);$$

aqui $\tilde{\nabla}$ é a conexão de ϕ^*TX , ∇ é a conexão de Σ e $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ é um referencial ortonormal em uma vizinhança de $p \in \Sigma$, com respeito a g .

Os pontos críticos de E_b são as aplicações $\phi \in C^\infty(\Sigma, X)$ tais que $\tau(\phi) = 0$. Essas aplicações são denominadas *aplicações harmônicas* de Σ em X .

Proposição 7. *Seja (X, h) uma variedade riemanniana e $\exp_1^g$ a aplicação exponencial de (S^1, g) no ponto 1. Uma aplicação $\phi : (S^1, g) \rightarrow X$ é harmônica se, e somente se, $\dot{\phi} = \phi \circ \exp_1^g$ é uma geodésica de X .*

Demonstração: *Seja E o campo tangente unitário à circunferência (S^1, g) . Note que $E = (\exp_1^g)_*(\lambda \frac{d}{dx})$. Desse modo,*

$$\tau(\phi) = (\tilde{\nabla}_E \phi_* E - \phi_* \nabla_E E) = \nabla_{(\phi \circ \exp_1^g)_*(\lambda \frac{d}{dx})} (\phi \circ \exp_1^g)_*(\lambda \frac{d}{dx}) = \lambda^2 \nabla_{\tilde{\phi}_* \frac{d}{dx}} \tilde{\phi}_* \frac{d}{dx} = \lambda^2 \nabla_{\tilde{\phi}'} \tilde{\phi}'.$$

Logo, $\tau(\phi) = 0$ se, e somente se, $\nabla_{\tilde{\phi}'} \tilde{\phi}' = 0$, o que mostra o que queríamos.

□

A determinação do hessiano da função E_b em um ponto crítico $\phi \in C^\infty(\Sigma, X)$ é feita mediante a fórmula da segunda variação (Cf. [EL]):

$$Hess_\phi^E(V, W) = \int_{\Sigma} h(J_{(g, \phi)} V, W) \nu_g = \mathcal{G}(J_{(g, \phi)} V, W), V, W \in \Gamma(\phi^*TX).$$

Aqui, $J_{(g, \phi)}$ é o operador diferencial elíptico de segunda ordem atuando sobre o espaço das seções $\Gamma(\phi^*TX)$, dado por

$$J_{(g, \phi)} V = - \sum_{i=1}^m (\tilde{\nabla}_{E_i} \tilde{\nabla}_{E_i} - \tilde{\nabla}_{\nabla_{E_i} E_i}) V - \sum_{i=1}^m R^X(V, \phi_* E_i) \phi_* E_i$$

onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão de ϕ^*TX , R^X é o tensor curvatura de X e $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ é um conjunto ortonormal de seções em $\Gamma(T\Sigma)$.

Observação: Note que $\Delta_\phi = - \sum_{i=1}^m (\tilde{\nabla}_{E_i} \tilde{\nabla}_{E_i} - \tilde{\nabla}_{\nabla_{E_i} E_i})$ é o laplaciano generalizado de ϕ^*TX . Fazendo $\mathcal{R}_\phi(V) = \sum_{i=1}^m R^X(V, \phi_* E_i) \phi_* E_i$, podemos escrever $J_\phi = \Delta_\phi - \mathcal{R}_\phi$.

Observação: Usando o operador $J_{(g, \phi)}$ obtemos a seguinte fórmula para a aproximação semiclássica:

$$Z(\beta) \cong Z^{SC} = \int_{\mathcal{PC}(E)} e^{-\beta E} \frac{1}{\sqrt{\det \beta J_{(g, \phi)}}} \nu_{\mathcal{G}_c}.$$

Observação: Como o operador $J_{(g,\phi)}$ é um operador diferencial elíptico autoajunto atuando sobre as seções do fibrado ϕ^*TX induzido sobre uma variedade compacta Σ , decorre do teorema de Hodge que o espectro de $J_{(g,\phi)}$ consiste de um conjunto discreto infinito de autovalores com multiplicidades finitas

$$\lambda_1(\phi) \leq \lambda_2(\phi) \leq \dots \lambda_n(\phi) \leq \dots$$

Seja $V_\lambda(\phi) = \{V \in \Gamma(\phi^*TX) | J_{(g,\phi)} = \lambda V\}$. O *índice* e a *nulidade* de uma aplicação harmônica $\phi : (\Sigma) \longrightarrow (X, h)$ são definidos por

$$ind(\phi) = \sum_{\lambda < 0} \dim V_\lambda(\phi),$$

e

$$nul(\phi) = \dim V_0(\phi) = \dim Ker J_{(g,\phi)}.$$

O estudo da estabilidade de uma aplicação harmônica está associada à determinação do seu índice. Uma aplicação é denominada (*fracamente*) *estável* quando $ind(\phi) = 0$.

Capítulo 3

A Função de Partição de um σ -modelo sobre um intervalo fechado

Em [MMG] os autores obtiveram o valor da função $Z_{ren}(\beta)$ no caso em que o espaço de configurações S é o espaço $\text{Met}(I)$ das métricas riemannianas sobre o intervalo unitário $I = [0, 1]$ e a energia $E : S \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $E(g) = l_g^2$ (onde l_g é o comprimento de I na métrica g); o grupo G usado no método de renormalização foi o grupo dos difeomorfismos de I que preservam orientação. Nesse contexto o valor obtido para a função de partição renormalizada foi

$$Z_{ren}(\beta) = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}.$$

Nesse mesmo artigo, considera-se também, o caso em que $S = \text{Met}(S^1) \times C^\infty(S^1, \mathbb{R}^D)$ e $E(g, \phi) = l_g^2 + \frac{1}{2} \langle \Delta_g \phi, \phi \rangle$. Nestas condições, o valor encontrado para a função de partição renormalizada foi

$$Z_{ren}(\beta) = \frac{1}{2} \beta^{\frac{3D}{4}} \Gamma\left(-\frac{D}{4}\right).$$

Neste capítulo consideraremos o caso em que $S = \text{Met}(I) \times C_0^\infty(I, \mathbb{R}^D)$, onde $\text{Met}(I)$ é o conjunto das métricas riemannianas sobre um intervalo $I = [a, b]$, e $C_0^\infty(I, \mathbb{R}^D)$ é o conjunto das funções de classe C^∞ de I em $\mathbb{R}^D$, D inteiro positivo, que se anulam na fronteira de I ; $E : S \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$E(g, \phi) = l_g^2 + \frac{1}{2} \langle \Delta_g \phi, \phi \rangle,$$

onde l_g é o comprimento de I na métrica g e Δ_g é o laplaciano de g . Nosso objetivo é obter um valor explícito para a função de partição renormalizada $Z_{ren}(\beta)$. O resultado que obtivemos se encontra no teorema ().

3.1 Preliminares

Seja V uma variedade diferenciável. Nesta seção denotaremos por $\mathcal{D}^+(V)$ o conjunto dos difeomorfismos de V que preservam orientação, e por $\text{Met}(V)$ o

conjunto das métricas riemannianas sobre V . No caso em que V é compacta com bordo C^∞ podemos identificar $T_{id}(\mathcal{D}^+(V))$ com o conjunto $\Gamma_0(TV)$ dos campos tangentes a V que se anulam na fronteira, e $T_g(\text{Met}(V))$ com o conjunto $\Gamma(S^2V)$ dos tensores simétricos de ordem 2 sobre V . Temos, então, o seguinte resultado.

Proposição 8. *Sejam V uma variedade diferenciável compacta com bordo de classe C^∞ , e $g \in \text{Met}(V)$. Considere a aplicação*

$$A_g : \mathcal{D}^+(V) \longrightarrow \text{Met}(V),$$

*dada por $A_g(f) = f^*g$, onde $*$ denota a operação de pullback. Então*

$$A'_g(id) : \Gamma_0(TV) \longrightarrow \Gamma(S^2V)$$

é dada por

$$A'_g(id) \cdot X = g(\nabla \cdot X, \cdot) + g(\cdot, \nabla \cdot X),$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de g .

Demonstração: *Seja $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{D}^+(V)$ uma curva $\sigma(t) = X^t$ tal que $\sigma(0) = id$ e $\sigma'(0) = X$. Então,*

$$\begin{aligned} A'_g(id) \cdot X &= \frac{d}{dt}(A_g \circ \sigma)(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(A_g \circ X^t)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}((X^t)^*g)|_{t=0} = L_X g, \end{aligned}$$

onde $L_X g$ é a derivada de Lie de g com relação ao campo vetorial X . Sabemos que

$$\begin{aligned} L_X g(Y, Z) &= X(g(Y, Z)) - g(L_X Y, Z) - g(Y, L_X Z) \\ &= X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]). \end{aligned}$$

Usando a simetria de ∇ , e a compatibilidade de ∇ com g , obtemos que

$$L_X g(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X),$$

donde segue-se o resultado que queríamos.

□

Considere a ação de $\mathcal{D}^+(V)$ sobre $\text{Met}(V)$ definida por $A(f, g) = f^*g$, onde $*$ denota a operação de pull-back. Se V é compacta com fronteira não-vazia, mostra-se que o espaço de órbitas é uma variedade diferenciável de dimensão finita se, e somente se, a dimensão de V é igual a 1 ([T],[FM]).

O conjunto $\text{Met}(V)$ admite uma métrica riemanniana $\mathcal{G}$. Para ver isso, fixe $g \in \text{Met}(V)$, e identifique o espaço tangente $T_g(\text{Met}(V))$ com o conjunto $\Gamma(S^2V)$ dos tensores simétricos de ordem 2. Defina, então,

$$\mathcal{G}_g(m, n) = \int_V \text{tr}(\hat{m} \circ \hat{n}) \nu_g,$$

onde $\hat{m}$ e $\hat{n}$ satisfazem $m(X, Y) = g(\hat{m}X, Y)$ e $n(X, Y) = g(\hat{n}X, Y)$. A métrica $\mathcal{G}$ assim obtida é denominada *supermétrica*. O espaço das órbitas $\text{Met}(V)/\mathcal{D}^+(V)$ também admite uma métrica riemanniana $\hat{\mathcal{G}}$. Para ver isso, considere uma curva $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \text{Met}(V)/\mathcal{D}^+(V)$ tal que $\sigma(0) = [g]$, e o levantamento $\tilde{\sigma}$ de

σ a $Met(V)$ tal que $\tilde{\sigma}(0) = g$ e $\tilde{\sigma}'(0) \in (T_g[g])^\perp$, onde $[g] = \{f^*g | f \in \mathcal{D}^+(V)\}$. Defina, então,

$$\tilde{\mathcal{G}}_{[g]}(\sigma'(0), \sigma'(0)) = \mathcal{G}_g(\tilde{\sigma}'(0), \tilde{\sigma}'(0)).$$

Mostra-se ([G], p.39) que $\tilde{\mathcal{G}}$ é uma métrica riemanniana que está bem definida.

Seja (V, g) uma variedade riemanniana. Podemos também obter uma métrica riemanniana h_g sobre $\mathcal{D}^+(V)$ definindo

$$h_g(X, Y) = \int_V g(X, Y) \nu_g, X, Y \in \Gamma(TV) \equiv T_{id}(\mathcal{D}^+(V)).$$

A seguir demonstramos um resultado enunciado em [MMG] que trata do volume do grupo de isotopia de $g \in Met(S^1)$ visto como subconjunto de $(\mathcal{D}^+(S^1), h_g)$.

Proposição 9. *Seja $A : \mathcal{D}^+(S^1) \times Met(S^1) \longrightarrow Met(S^1)$ a ação dada por $A(f, g) = f^*g$. Então o volume do estabilizador K_g de uma métrica $g \in Met(S^1)$ é dado por*

$$Vol(K_g, h_g) = l_g^{3/2}.$$

Demonstração: Note que K_g é o grupo $Iso(g)$ das isometrias de g . Desse modo, temos que

$$Vol(K_g, h_g) = \int_{Iso(g)} \nu_{h_g},$$

onde ν_{h_g} é o elemento de volume da métrica g .

Suponhamos inicialmente que g é a métrica usual u sobre a circunferência S^1 . Considere o difeomorfismo $F : S^1 \longrightarrow Iso(u)$, $F(z) = \hat{z}$, onde $\hat{z} : S^1 \longrightarrow S^1$ é a aplicação $\hat{z}(w) = zw$. Então temos que $F^*\nu_{h_u} = cd\theta$, onde c é uma constante e $d\theta$ é a forma dual do campo unitário ∂_θ com respeito a métrica u . Assim,

$$\int_{Iso(g)} \nu_{h_u} = \int_{S^1} F^*\nu_{h_u} = \int_{S^1} cd\theta = 2\pi c.$$

Para determinar c , observe que $h_u(\partial_\theta, \partial_\theta) = 2\pi$; logo, $E = \frac{\partial_\theta}{2\pi}$ é um campo unitário com respeito à métrica h_u . Note também que $F^*\nu_{h_u}(\partial_\theta) = cd\theta(\partial_\theta)$, donde segue-se que $c = \nu_{h_u}(F_*\partial_\theta)$.

Seja e^{it} uma curva que passa por $1 \in S^1$ com velocidade $\partial_\theta|_1$. Temos que $F(e^{it}) = \widehat{e^{it}}$. Então

$$F_*\partial_\theta = \frac{d}{dt}(\widehat{e^{it}})|_{t=0} = \partial_\theta.$$

Logo, temos que

$$c = \nu_{h_u}(F_*\partial_\theta) = \nu_{h_u}(\partial_\theta) = \sqrt{2\pi}.$$

Portanto,

$$Vol(K_u, h_u) = (2\pi)^{3/2}.$$

No caso em que $g = \lambda u$, um argumento análogo mostra que

$$Vol(K_{\lambda u}, h_{\lambda u}) = (2\pi\lambda^{-1/2})^{3/2}.$$

Para uma métrica qualquer $g \in Met(S^1)$ temos que existe um difeomorfismo $f \in \mathcal{D}^+(S^1)$ tal que $f^*g = \lambda u$, com $\lambda = (\frac{2\pi}{l_g})^2$, (Cf. [A]). Decorre daí que

$$Vol(K_g, h_g) = Vol(K_{\lambda u}, h_{\lambda u}) = l_g^{3/2}.$$

□

3.2 Cálculo da Função de Partição

Com a notação estabelecida na introdução, considere $S = \text{Met}(I) \times C_0^\infty(I, \mathbb{R}^D)$ e $E : S \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$E(g, \varphi) = l_g^2 + \frac{1}{2} \langle \Delta_g \varphi, \varphi \rangle. \quad (2.1)$$

A função de partição associada ao sistema (S, E) é, então, dada por

$$Z(\beta) = \int_S e^{-\beta E(g, \varphi)} dg d\varphi, \quad (2.2)$$

onde $dg d\varphi$ é uma “medida” sobre S .

Introduzindo (2.1) em (2.2), obtemos que

$$Z(\beta) = \int_{\text{Met}(I)} e^{-\beta l_g^2} \left(\int_{C_0^\infty(I, \mathbb{R}^D)} e^{-\beta(\frac{1}{2} \langle \Delta_g \varphi, \varphi \rangle)} d\varphi \right) dg. \quad (2.3)$$

Seja $Z(\beta)|^g$ a contribuição de $C_0^\infty(I, \mathbb{R}^D)$ para a função de partição, i.e.,

$$Z(\beta)|^g = \int_{C_0^\infty(I, \mathbb{R}^D)} e^{-\beta(\frac{1}{2} \langle \Delta_g \varphi, \varphi \rangle)} d\varphi. \quad (2.4)$$

Note que não explicitamos a “medida” $d\varphi$. Assim essa expressão carece de um sentido matemático preciso. Inspirados na proposição () do capítulo 1, que é um resultado válido para espaços vetoriais de dimensão finita, definimos

$$Z(\beta)|^g := \frac{1}{\sqrt{\det \beta \Delta_g}}, \quad (2.5)$$

onde Δ_g é o laplaciano de g atuando sobre $C_0^\infty(I, \mathbb{R}^D)$. O determinante que aparece nessa definição deve ser entendido no sentido da teoria da regularização ζ , visto que o laplaciano é um operador que, nesse caso, atua em um espaço de dimensão infinita. Desse modo temos que

$$\det \beta \Delta_g = \beta^{\zeta_g(0)} \cdot \exp(-\zeta'_g(0)).$$

Nesta expressão, $\zeta_g(s)$ é a função ζ de Riemann generalizada, isto é,

$$\zeta_g(s) = \sum_{E_n \neq 0} E_n^{-s}, \quad s \in \mathbb{C},$$

onde $E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_n \leq \dots$ são os autovalores de Δ_g . Quando quisermos explicitar o operador Δ_g ao qual $\zeta_g(s)$ está associado escreveremos $\zeta_{\Delta_g}(s)$.

(a) Cálculo de $Z(\beta)|^g$

Para calcular $Z(\beta)|^g$ precisaremos de alguns resultados preliminares.

Lema 1. *Seja u a métrica euclidiana sobre o intervalo $I = [a, b]$. Se g é uma métrica riemanniana sobre I , então existe um único $f \in \mathcal{D}^+(I)$ que deixa o bordo de I fixado e satisfaz $f^*(\lambda u) = g$, onde $\lambda = (\frac{lg}{b-a})^2$.*

Demonstração: Podemos escrever $g = \alpha u$, onde $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva de classe C^∞ . Se existe f tal que $f^*(\lambda u) = g$, então $\lambda(f'(x))^2 = \alpha(x)$. Donde segue-se que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^x \sqrt{\alpha(t)} dt + a,$$

É imediato verificar que f tem as propriedades requeridas no lema. □

Seja V uma variedade compacta orientável de dimensão n e fronteira C^∞ . Para cada $g \in \text{Met}(V)$ associamos o operador de Laplace-Beltrami Δ_g . Esse operador é um endomorfismo do espaço das p -formas diferenciais sobre V , definido por

$$\Delta_g = \delta^{p+1} d^p + d^{p-1} \delta^p, \quad 0 \leq p \leq n,$$

onde d é a derivada exterior, e δ o adjunto com respeito ao produto escalar

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_V \alpha \wedge \star \beta, \quad \alpha, \beta \in \Omega^p(V).$$

Aqui $\Omega^p(V)$ é o espaço das p -formas diferenciais e $\star$ a estrela de Hodge. Note que em $\Omega^0(V)$, o laplaciano se escreve como $\Delta_g = \delta d$, onde d é a diferencial atuando sobre funções.

Lema 2. Se $f \in \mathcal{D}^+(V)$ e $g \in \text{Met}(V)$, então $\Delta_{f^*g} = (f^*)\Delta_g(f^*)^{-1}$, onde $*$ denota a operação de pull-back.

Demonstração: Use os seguintes fatos:

$$\star(f^*g) = f^* \circ \star g \circ (f^{-1})^*, \quad \int_V f^* \omega = \int_V \omega, \quad \nu_{f^*g} = f^* \nu_g. \quad \square$$

Lema 3. Seja $Z(\beta, D)$ o valor de $Z(\beta)|^g$ para Δ_g atuando sobre $C_0^\infty(I, \mathbb{R}^D)$. Então, temos que

$$Z(\beta, D) = Z(\beta, 1)^D.$$

Demonstração: O conjunto $C_0^\infty(I, \mathbb{R}^D)$ admite uma estrutura de espaço normado. Identifiquemos, então, $C_0^\infty(I, \mathbb{R}^D)$ com a soma direta $C_0^\infty(I, \mathbb{R}) \oplus \dots \oplus C_0^\infty(I, \mathbb{R})$, de D parcelas. Para $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_D)$ em $C_0^\infty(I, \mathbb{R}^D)$ defina $\tilde{\Delta}_g \varphi := (\Delta_g \varphi_1, \dots, \Delta_g \varphi_D)$. Então temos que $\text{Spec}(\tilde{\Delta}_g) = \{(\lambda_i, Dm_i) | \lambda_i \text{ é autovalor de } \Delta_g \text{ de multiplicidade } m_i, i=1,2,3,\dots\}$. Então segue-se que $\zeta_{\tilde{\Delta}_g}(s) = D\zeta_{\Delta_g}(s)$. Observando que $\zeta_{\tilde{\Delta}_g}(0) = D\zeta_{\Delta_g}(0)$ e $\zeta'_{\tilde{\Delta}_g}(0) = D\zeta'_{\Delta_g}(0)$, obtemos que $\det \tilde{\Delta}_g = \exp(D\zeta'_{\tilde{\Delta}_g}(0)) = (\det \Delta_g)^D$, donde segue-se o resultado desejado. □

Proposição 10. Se $g \in \text{Met}(I)$, onde $I = [a, b]$, então

$$Z(\beta)|^g = \left(\frac{\beta^{1/2}}{2l_g} \right)^{D/2},$$

onde l_g é o comprimento de I na métrica g .

Demonstração: Pelo Lema 1, existe $f \in \mathcal{D}^+(I)$ tal que $f^*g = \lambda u$, onde $\lambda = (\frac{l_g}{(b-a)})^2$ e u é a métrica euclidiana usual. Suponhamos, inicialmente, que $D = 1$. Pelo Lema 2, temos que os autovalores de Δ_g coincidem com aqueles de $\Delta_{f^*g} = \Delta_{\lambda u}$, com as mesmas multiplicidades. Segue-se, então, que $\zeta_g = \zeta_{\lambda u}$. Mas $\Delta_{\lambda u} = \frac{1}{\lambda} \Delta_u = -\frac{1}{\lambda} \frac{d^2}{dx^2}$. Considere, então, o seguinte problema de autovalores,

$$\begin{cases} \Delta_{\lambda u} \varphi = E \varphi \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \end{cases}$$

Esse problema é equivalente ao seguinte:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \varphi = -\lambda E \varphi \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \end{cases}$$

Uma solução para este último problema é dada por $\varphi_n(x) = \sin[\frac{n\pi(x-a)}{(b-a)}]$, $n = 1, 2, 3, \dots$, com os autovalores correspondentes dados por $\mu_n = -\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$. Decorre daí que os autovalores E_n do operador $\Delta_{\lambda u}$ são dados por $E_n = \frac{n^2 \pi^2}{l_g^2}$, todos de multiplicidade 1. Segue-se, então, que

$$\zeta_g(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n^{-s} = \left(\frac{l_g}{\pi}\right)^{2s} \zeta(2s).$$

Usando o fato bem conhecido que a função ζ de Riemann usual satisfaz $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ e $\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \ln 2\pi$, obtemos que

$$Z(\beta)|^g = \frac{1}{\sqrt{\det(\beta \Delta_g)}} = \frac{\beta^{1/4}}{2^{1/2} \cdot l_g^{1/2}} = \left(\frac{\beta^{1/2}}{2l_g}\right)^{1/2}.$$

No caso em que $D > 1$, obtemos, usando o lema 3, que

$$Z(\beta)|^g = \left(\frac{\beta^{1/2}}{2l_g}\right)^{D/2}. \quad \square$$

(b) O Cálculo de $Z(\beta)_{ren}$

Usando a fórmula (2.3) e a Proposição 8, obtemos que

$$Z(\beta) = \int_{\text{Met}(I)} e^{-\beta l_g^2} \cdot \beta^{D/4} \cdot 2^{D/2} \cdot l_g^{-D/2} \cdot dg. \quad (2.6)$$

Denotemos o integrando nesta fórmula por $\Phi(g)$. Consideremos a ação do grupo $G = \mathcal{D}^+(I)$ sobre $\text{Met}(I)$, dada por $A(f, g) = f^*g$. Do Teorema 5 do capítulo 1, decorre que

$$\int_{\text{Met}(I)} \Phi(g) \nu_G = \left(\int_{\text{Met}(I)/G} \bar{\Phi}(\bar{g}) \cdot FP(\bar{g}) \cdot \frac{1}{\text{vol}(K_{\bar{g}})} \cdot \nu_{\bar{G}} \right) \cdot \int_G \nu_h, \quad (2.7)$$

onde $\tilde{G}$ denota a métrica induzida no espaço das órbitas, obtida conforme indicado na seção 3.1.

Nosso próximo objetivo é determinar o grupo de isotropia K_g , $g \in \text{Met}(I)$.

Proposição 11. *Seja G o grupo $\mathcal{D}^+(I)$ dos difeomorfismos do intervalo I que preservam orientação. Se G atua sobre $\text{Met}(I)$ mediante a ação dada por $A(f, g) = f^*g$, então $\dim \text{Met}(I)/G = 1$.*

Demonstração: Basta observar que $\bar{c} : \text{Met}(I)/G \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $\bar{c}(\bar{g}) = l_g$ é bijetiva, pelo lema 1; logo, uma carta global. □

Corolário: Seja K_g o estabilizador da ação $A(f, g) = f^*g$ dada acima. Então o grupo de isotropia de g é dada por $K_g = \{id\}$.

Passemos ao cálculo do determinante de Fadeev-Popov. Para isso considere a aplicação $A_g : \mathcal{D}^+(I) \longrightarrow \text{Met}(I)$ dada por $A_g(f) = f^*g$. Já vimos na Proposição 7 que $(A'_g)(id) : \Gamma_0(TI) \longrightarrow \Gamma(S^2I)$ é dada por

$$(A'_g)(id) \cdot X = g(\nabla \cdot X, \cdot) + g(\cdot, \nabla \cdot X).$$

Para obtermos o adjunto de $(A'_g)(id)$, devemos introduzir métricas nos espaços $\Gamma_0(TI)$ e $\Gamma(S^2I)$. Para isso, fixe $g \in \text{Met}(I)$. Em $\Gamma_0(TI)$ defina

$$h_g(X, Y) = \int_I g(X, Y) \nu_g,$$

e, em $\Gamma(S^2I)$ defina

$$\langle\langle m, n \rangle\rangle = \int_I \text{tr}(\hat{m} \circ \hat{n}) \nu_g,$$

onde $\hat{m}$ e $\hat{n}$ satisfazem $m(X, Y) = g(\hat{m}X, Y)$ e $n(X, Y) = g(\hat{n}X, Y)$.

Proposição 12. *Seja $A'_g{}^*$ a adjunta de (A'_g) . Então $A'_g{}^* \circ A'_g(\varphi E) = (4\Delta_g \varphi)E$, onde E é um campo unitário na métrica g , e $\varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^D)$.*

Demonstração: Como a dimensão do intervalo I é igual a 1, temos que $A'_g(\varphi E) = \mu g$, onde μ é uma função $\mu : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Pela Proposição 6, avaliando em E , obtemos que

$$g(\nabla_E(\varphi E), E) + g(E, \nabla_E(\varphi E)) = \mu,$$

donde

$$\mu = 2g(\nabla_E(\varphi E), E).$$

Mas

$$\nabla_E(\varphi E) = E(\varphi)E.$$

Logo,

$$\mu = 2E(\varphi).$$

Assim temos que $A'_g(\varphi E) = 2E(\varphi)g$. Dados X, Y em $\Gamma(I)$, temos que $X = \varphi E$ e $Y = \psi E$. Então,

$$\begin{aligned} h_g(A'_g{}^* A'_g X, Y) &= \langle\langle A'_g X, A'_g Y \rangle\rangle = \int_I 4E(\varphi)E(\psi) \nu_g \\ &= h_g(4\Delta_g X, Y), \quad \forall Y \in \Gamma(I), \end{aligned}$$

donde segue-se o resultado desejado. □

Proposição 13. *O determinante de Fadeev-Popov da ação $A(f, g) = f^*g$ de $G = \mathcal{D}^+(I)$ sobre $S = \text{Met}(I)$ é dado por $FP(\bar{g}) = \sqrt{l_g}$.*

Demonstração: *Seja $P = A'_g{}^* \circ A_g$. Então,*

$$\zeta_P(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_n^s},$$

onde $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots$ são os autovalores de P . Por definição, $FP(\bar{g}) = \sqrt{\exp(-\zeta'_P(0))}$. Consideremos, então, o problema de autovalores

$$\begin{cases} P(\varphi E) = \mu(\varphi E) \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \end{cases}$$

Pela proposição anterior, esse problema é equivalente ao seguinte:

$$\begin{cases} \Delta_g \varphi = \left(\frac{\mu}{4}\right) \varphi \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \end{cases}$$

Uma solução para esse problema é dada por $\varphi_n(x) = \text{sen}\left[\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right]$ com autovalor $\mu_n = n^2 \left(\frac{2\pi}{l_g}\right)^2$.

Então temos que

$$\zeta_P(s) = \left(\frac{2\pi}{l_g}\right)^{-2s} \zeta(2s),$$

donde segue-se que

$$\zeta'_P(0) = -\ln l_g.$$

É imediato, agora, verificar que

$$FP(\bar{g}) = \sqrt{l_g}.$$

□

Proposição 14. *O elemento de volume $\nu_{\bar{g}}$ do espaço de órbitas é dado por $\nu_{\bar{g}} = c^*\left(\frac{2}{\sqrt{t}}dt\right)$, onde $c : \text{Met}(I)/\mathcal{D}^+(I) \rightarrow \mathbb{R}^+$ é a aplicação dada por $c(\bar{g}) = l_g$.*

Demonstração: *Seja $\bar{\sigma} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \text{Met}([a, b])/\mathcal{D}^+(I)$ uma curva tal que $\bar{\sigma}(0) = [g]$. Afirmamos inicialmente que*

$$\tilde{\mathcal{G}}_{[g]}(\bar{\sigma}'(0), \bar{\sigma}'(0)) = \frac{4}{l_g}.$$

Para ver isso, considere o levantamento $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \text{Met}([a, b])$ de $\bar{\sigma}$ dado por

$$\sigma(s) = \left(\frac{l_g + s}{b-a}\right)^2 dt^2.$$

Note que $\sigma(0) = \left(\frac{l_g}{b-a}\right)^2 dt^2$ e que $\int_a^b \nu_{\sigma(0)} = l_g$. Assim temos que $[\sigma(0)] = [g]$. Pela definição temos que

$$\tilde{\mathcal{G}}_{[g]}(\bar{\sigma}'(0), \bar{\sigma}'(0)) = \mathcal{G}_g(\sigma'(0), \sigma'(0)).$$

Mas

$$\sigma'(0) = \frac{2l_g}{(b-a)^2} dt^2 = \frac{2}{l_g} \sigma(0) = \frac{2}{l_g} g.$$

Assim

$$\tilde{\mathcal{G}}_{[g]}(\sigma'(0), \sigma'(0)) = \mathcal{G}_g\left(\frac{2}{l_g} g, \frac{2}{l_g} g\right) = \frac{4}{l_g}.$$

Isso prova o que havíamos afirmado.

Seja μ uma constante tal que $c^*(\mu dt^2) = \tilde{\mathcal{G}}$. Afirmamos que $\mu = \frac{4}{l_g}$. Para ver isso, observe que

$$c^*(\mu dt^2)(\sigma'(0), \sigma'(0)) = (\mu dt^2)(c_*\sigma'(0), c_*\sigma'(0)) = \tilde{\mathcal{G}}_{[g]}(\sigma'(0), \sigma'(0)).$$

Por outro lado, temos que

$$c_*\sigma'(0) = \frac{d}{ds} c \circ \sigma(s)|_{s=0} = \frac{d}{ds} (l_{\sigma(s)})|_{s=0}.$$

Mas

$$l_{\sigma(s)} = \int_a^b \frac{l_g + s}{b-a} du = l_g + s.$$

Segue-se daí que $c_*\sigma'(0) = 1$. Portanto, obtemos que $\mu = \frac{4}{l_g}$, como havíamos afirmado.

Desse modo, $\tilde{\mathcal{G}} = c^*(\frac{4}{t} dt^2)$, donde segue-se que $\nu_{\tilde{\mathcal{G}}} = c^*(\frac{2}{\sqrt{t}} dt)$.

□

Podemos, agora, obter um valor explícito para $Z_{ren}(\beta)$.

Teorema 8. Se $S = Met(I) \times C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ e $E : S \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $E(g, \varphi) = l_g^2 + \frac{1}{2} < \Delta_g \varphi, \varphi >$, então

$$Z_{ren}(\beta) = \beta^{\frac{D-1}{2}} \cdot 2^{-\frac{D}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{-D+2}{4}\right)$$

Demonstração: Substitua na fórmula (2.7), os valores encontrados nas proposições 11 e 12, e defina $vol(K_g) = 1$. Fazendo $t = l_g$, temos que

$$Z_{ren}(\beta) = \beta^{D/4} \cdot 2^{-D/2} \cdot 2 \int_0^{+\infty} e^{-\beta t^2} \cdot t^{-D/2} dt,$$

donde segue-se o resultado desejado.

Observação: Visto que a função Gama é meromorfa no plano complexo, com pólos simples em 0, -1, -2, -3, ..., concluímos que uma condição necessária e suficiente para que $Z_{ren}(\beta)$ seja finita é que $D \not\equiv 2 \pmod{4}$. A introdução de campos fermiônicos sobre I permite o procedimento de renormalização para D arbitrário.

Capítulo 4

O modelo e a função de partição

Na seção 4.1 deste capítulo apresentamos o σ -modelo proposto em [MRM], que será nosso objeto de estudo. Na seção 4.2, definimos, seguindo [MRM], a função de partição do modelo usando os resultados enunciados sobre as álgebras de Grassmann e os procedimentos de renormalização e aproximação semi-clássica apresentados no capítulo 2. Nas seções 4.3 e 4.4 estão contidos os principais resultados que obtivemos neste trabalho: a generalização do resultado obtido em [MRM] e o cálculo da função de partição Z_{ren}^{SC} para o caso em que o espaço alvo é a esfera.

4.1 O modelo

Sejam (Σ, g) e (X, h) variedades riemannianas conexas, compactas, sem bordo, orientáveis, de dimensões m e n , respectivamente. Denote por $Cl_g(\Sigma)$ o fibrado de Clifford de (Σ, g) . Dada uma aplicação diferenciável $\phi : \Sigma \longrightarrow X$ de classe C^∞ , seja ϕ^*TX o fibrado induzido sobre Σ por ϕ .

Considere o fibrado de módulos à esquerda $Cl_g(\Sigma) \otimes \phi^*TX$ sobre $Cl_g(\Sigma)$ (isto é, $Cl_g(\Sigma) \otimes \phi^*TX$ é um fibrado sobre Σ cuja fibra sobre $p \in \Sigma$, é um módulo à esquerda sobre a álgebra de Clifford $Cl(T_p\Sigma, g_p)$). Seja $\mathcal{D}_{(g,\phi)}$ o operador de Dirac de $Cl_g(\Sigma) \otimes \phi^*TX$, e denote por $\mathcal{E}_{(g,\phi)}$ a álgebra de Grassmann gerada pelas autofunções de $\mathcal{D}_{(g,\phi)}$. Obtemos desse modo um novo fibrado $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{B} \equiv Met(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma, X)$ cuja fibra sobre (g, ϕ) é dada por $\mathcal{E}_{(g,\phi)}$.

A *superenergia* $\hat{E}$ associada ao fibrado $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{B}$ é dada por

$$\hat{E}(\psi) = \alpha \int_{\Sigma} s(g) \nu_g + \frac{1}{2} \beta \int_{\Sigma} tr_g \phi^* h \nu_g + \gamma \mathcal{D}_{(g,\phi)} \psi \cdot \psi + \delta \int_{\Sigma} \phi^* \omega.$$

As constantes de acoplamento $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são introduzidas nessa expressão com um duplo objetivo: o de ajuste dimensional, e o de refletir o peso da contribuição de cada campo presente no modelo. O termo $E_G = \int_{\Sigma} s(g) \nu_g$ na primeira parcela dessa soma está associada à energia gravitacional do sistema físico considerado; $s(g)$ denota a curvatura escalar da métrica g . O termo $E_b = \int_{\Sigma} tr_g \phi^* h \nu_g$ na segunda parcela é denominada *energia bosônica* do campo ϕ acoplado ao campo

gravitacional g . O termo $E_f = \mathcal{D}_{(g,\phi)}\psi \cdot \psi$ é a *energia fermiônica* e é dado explicitamente por

$$\mathcal{D}_{(g,\phi)}\psi \cdot \psi = \sum_i \{\lambda_i^+ \psi_i^+ \overline{\psi_i^+} + \lambda_i^- \psi_i^- \overline{\psi_i^-}\},$$

onde λ_i^+ e λ_i^- são os autovalores positivos e negativos, respectivamente, de $\mathcal{D}_{(g,\phi)}$ e ψ_i^+, ψ_i^- são as autofunções desse operador. A quarta parcela, que denotaremos por E_t , é um invariante topológico que depende apenas da classe de cohomologia da 2-forma fechada $\omega \in H_{DR}^2(X)$ e da classe de homologia de $\phi(\Sigma)$ (Cf.[AM]).

Se e_a , $a = 1, 2, \dots, k$ é um conjunto de geradores de $H_{DR}^{dim\Sigma}(X)$, então $[\omega] = \sum_{a=1}^k c^a [e_a]$, onde c^a são números reais. Denotando o último termo de $\hat{E}(\psi)$ por E_t , obtemos que $E_t = \sum_{a=1}^k c^a m_a$, onde $m_a = \int_{\Sigma} \phi^* e_a$. Pelo teorema da dualidade de Poincaré (Cf. [GH] ou a subseção 1.2.5) temos que

$$m_a = \int_{\Sigma} \phi^* e_a = \int_{\phi(\Sigma)} e_a = \#([\phi(\Sigma)] \cdot PD(e_a)),$$

onde $PD(e_a) \in H_{dimX-dim\Sigma}(X)$ é o ciclo dual de Poincaré de e_a , e $\#([\phi(\Sigma)] \cdot PD(e_a))$ é o número de intersecção da classe de homologia de $\phi(\Sigma)$ com o ciclo $PD(e_a)$. Desse modo, os m_a são números inteiros que dependem da classe de homologia de $\phi(\Sigma)$.

Por conseguinte, obtemos que $E_t = \sum_{a=1}^k c^a m_a$, onde m_a são inteiros dados pela classe de homologia de $\phi(\Sigma)$. Fazendo $q_a = e^{-\frac{c^a \delta}{kT}}$, podemos escrever

$$e^{-\frac{\delta}{kT} E_t} = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_k^{m_k}.$$

4.2 A função de partição para o modelo

A função de partição associada ao modelo $(\mathcal{E}, \hat{E})$ é dada, formalmente, por

$$\begin{aligned} Z(\frac{\alpha}{kT}, \frac{\beta}{kT}, \frac{\gamma}{kT}, \frac{\delta}{kT}) &\equiv \int_{\mathcal{E}} e^{-\frac{1}{kT} \hat{E}(\psi)} \equiv \\ &\equiv \sum_{[\phi] \in [\Sigma, X]} \left[\int_{Met(\Sigma) \times [\phi]} \left(\int_{\mathcal{E}_{(g,\phi)}} e^{-\frac{1}{kT} E_f} d\psi \right) e^{\frac{1}{kT} (\alpha E_g + \beta E_b)} dg d\phi \right] e^{-\frac{\delta}{kT} E_t}, \end{aligned}$$

onde $[\Sigma, X]$ é o conjunto das classes de homotopia das aplicações $\phi : \Sigma \longrightarrow X$. Usando nessa expressão formal os procedimentos de aproximação semiclássica e de renormalização vistos no capítulo 2, e a proposição [*] da seção [*], obtemos a função

$$Z_{ren}^{SC}(\frac{\alpha}{kT}, \frac{\beta}{kT}, \frac{\gamma}{kT}, \frac{\delta}{kT}) = \sum_{[\phi] \in [\Sigma, X]} Z_{ren}^{SC}|_{[\phi]},$$

onde

$$Z_{ren}^{SC}|_{[\phi]} = e^{-\frac{1}{kT} E_t} \int_{\mathcal{M}/\mathcal{D}^+} e^{-\frac{\alpha}{kT} E_g} \frac{1}{vol(K_{[g]})} \left[\int_{\mathcal{PC}(E_b) \cap [\phi]} e^{-\frac{\beta}{kT} E_b} \frac{\det(\frac{\gamma}{kT} \mathcal{D}_{(g,\phi)})}{\sqrt{\det \frac{\beta}{kT} J_{(g,\phi)}}} \nu_{\mathcal{G}_c} \right] FP([g]) \nu_{\overline{\mathcal{G}}}$$

De agora em diante assumiremos que $kT = 1$, salvo em menção contrária.

O objetivo deste trabalho é obter valores explícitos para $Z_{ren}^{SC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ nos seguintes casos:

- (1) $\Sigma = S^1$ e X é o toro plano;
- (2) $\Sigma = S^1$ e X é a esfera unitária S^2 .

Quando Σ é uma variedade unidimensional, segue-se diretamente da definição que $E_G = 0$. Como estamos também interessados em averiguar a contribuição da métrica no modelo proposto neste trabalho redefiniremos a componente gravitacional da superenergia, conforme é feito em [MMG], pondo $E_G(g) = l_g^2$, onde l_g é o comprimento da circunferência S^1 na métrica g .

Quando Σ é a circunferência, o fator de Fadeev-Popov da ação do grupo de difeomorfismos que preservam orientação $\mathcal{D}^+$ sobre a circunferência é dado por $FP([g]) = \frac{1}{2}l_g$, $vol(K_g) = l_g^{3/2}$, e $\nu_{\mathcal{G}} = 2l_g^{-\frac{1}{2}}dl_g$ (Cf. [MGM]). Um cálculo simples, utilizando esses dados, mostra que a função de partição possui a seguinte aproximação semiclássica:

$$Z_{ren}^{SC} = \sum_{[\phi] \in [\Sigma, X]} \left[\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{\kappa T} E_G} l_g^{-1} \left(\int_{\mathcal{PC}(E_b) \cap [\phi]} e^{-\beta E_b} \frac{\det(\gamma \mathcal{D}_{(g, \phi)})}{\sqrt{\det \beta J_{(g, \phi)}}} \nu_{\mathcal{G}_c} \right) dl_g \right] e^{-\delta E_t}$$

Assim para chegarmos a um valor explícito aproximado para a função de partição, teremos que calcular a integral

$$I = \int_{\mathcal{PC}(E_b) \cap [\phi]} e^{-\beta E_b} \frac{\det(\gamma \mathcal{D}_{(g, \phi)})}{\sqrt{\det \beta J_{(g, \phi)}}} \nu_{\mathcal{G}_c},$$

onde $\mathcal{G}_c$ é a métrica induzida sobre $\mathcal{PC}(E_b) \cap [\phi]$ pela supermétrica $\mathcal{G}$.

Observe que os elementos do conjunto $\mathcal{PC}(E_b) \cap [\phi]$ são as aplicações harmônicas $\phi : S^1 \rightarrow X$, que são exatamente as geodésicas fechadas da variedade riemanniana X . Portanto, $\phi : S^1 \rightarrow X$, é um ponto ou o recobrimento de uma geodésica de X .

4.3 Cálculo da função de partição

4.3.1 Z_{ren}^{SC} restrita à classe de homotopia das aplicações constantes

Nesta seção obteremos o valor explícito de Z_{ren}^{SC} restrita à classe de homotopia das aplicações $\phi : S^1 \rightarrow X$ constantes, onde X é uma variedade riemanniana n -dimensional.

Proposição 15. *Sejam $\Sigma = (S^1, g)$ e (X, h) uma variedade riemanniana n -dimensional. Seja $\phi : S^1 \rightarrow X$ uma aplicação constante. Então,*

(a) *O determinante do operador de Dirac $\mathcal{D}_{(g, \phi)}$ do fibrado $Cl_g(\Sigma) \otimes \phi^*TX$ é dado por*

$$\det \mathcal{D}_{(g, \phi)} = (\det \Delta_g)^n;$$

(b) *Se c é uma constante positiva, então*

$$\det(c\mathcal{D}_{(g, \phi)}) = c^{-2n}(\det \Delta_g)^n;$$

Demonstração: (a) Seja E um campo tangente sobre Σ tal que $g(E, E) = 1$. Suponha que $\phi(p) = q$ para todo $p \in \Sigma$, e tome uma base $\{F_1, \dots, F_n\}$ de $T_q X$. Uma seção $s \in \Gamma(Cl_g(\Sigma) \otimes \phi^* TX)$ tem a seguinte representação local:

$$s = \sum_{i=1}^n a_i 1 \otimes \tilde{F}_i + \sum_{i=1}^n b_i E \otimes \tilde{F}_i$$

onde $\{1, E\}$ é uma base de $Cl_g(S^1)$ e $\{\tilde{F}_1 = F_1 \circ \phi, \dots, \tilde{F}_n = F_n \circ \phi\}$ é um referencial ortonormal local de $\phi^* TX$. Observando que

$$\tilde{\nabla}_E \tilde{F}_i = (\nabla_{\phi_* E} F_i) \circ \phi = 0,$$

pois ϕ é constante, obtemos então que

$$\mathcal{D}_{(g, \phi)}(s) = -\sum_{i=1}^n E(b_i) 1 \otimes \tilde{F}_i + \sum_{i=1}^n E(a_i) E \otimes \tilde{F}_i.$$

Seja $P = \mathcal{D}_{(g, \phi)}^* \circ \mathcal{D}_{(g, \phi)}$. Segue-se que

$$P(s) = \sum_{i=1}^n \Delta_g a_i 1 \otimes \tilde{F}_i + \sum_{i=1}^n \Delta_g b_i E \otimes \tilde{F}_i.$$

Usando a teoria de regularização ζ obtemos que

$$\det P = (\det \Delta_g)^{2n}.$$

Resulta daí e da teoria da regularização de determinantes que

$$\det \mathcal{D}_{(g, \phi)} = (\det \Delta_g)^n.$$

(b) Seja $\mathcal{D}_c = c\mathcal{D}_{(g, \phi)}$ e $P_c = \mathcal{D}_c \circ \mathcal{D}_c$. Observe que $P_c = c^2 P$. Daí segue-se, usando a teoria de regularização de determinantes, que

$$\det P_c = c^{-4n} (\det \Delta_g)^{2n}.$$

Portanto,

$$\det \mathcal{D}_c = c^{-2n} (\det \Delta_g)^n.$$

□

Lema 4. Sejam (M^m, g) e (N^n, h) variedades riemannianas compactas. Se $\phi : M \rightarrow N$ é uma aplicação constante, então

$$\det J_\phi = (\det \Delta_g)^n.$$

Além disso, se c é uma constante positiva, então

$$\det(cJ_{(g, \phi)}) = c^{-n} (\det \Delta_g)^n.$$

Demonstração: Suponha que $\phi(p) = q$. Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de $T_q N$. Então uma base para $\phi^* TN$ pode ser obtida, tomando-se os campos $\{\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_n\}$, onde $\tilde{V}_i = v_i \circ \phi$, $i=1, \dots, n$. Assim, dado $\tilde{V} \in \phi^* TN$, temos que $\tilde{V} = \sum_{j=1}^n f_j \tilde{V}_j$, onde f_j são funções definidas sobre M , $\forall j$.

Temos que $J_\phi \tilde{V} = (\tilde{\Delta}_\phi - \mathcal{R}_\phi) \tilde{V}$, como observado no fim do capítulo 1. Observe agora que $\mathcal{R}_\phi \tilde{V} = 0$, pois ϕ é constante. Um cálculo simples mostra que o laplaciano generalizado de $\phi^* TN$ é dado por $\tilde{\Delta}_\phi = \sum_{j=1}^n \Delta_g f_j \tilde{V}_j$. Segue-se,

então, que $\text{spec}(J_\phi) = n\text{spec}(\Delta_g)$, donde, usando a teoria da regularização zeta, conclui-se a primeira afirmação do lema.

Seja $J_c = cJ_{(g,\phi)}$. Então

$$\det J_c = e^{\zeta_{J_{(g,\phi)}}(0)} \det J_{(g,\phi)}.$$

Notando que $\zeta_{J_{(g,\phi)}}(0) = n\zeta_{\Delta_g}(0)$, segue-se o resultado desejado.

□

Cálculo de $Z_{ren}^{SC}|_{[\phi=cte]}$.

Temos que $[\phi = cte] = \{\phi : \Sigma \longrightarrow X | \phi \text{ é constante}\}$. Note que $E_b(\phi) = 0, \forall \phi \in [\phi_{0,0}]$. Segue-se daí que

$$I = \int_{[\phi=cte]} \nu_{\mathcal{G}_c}.$$

A integral I é determinada no lema seguinte.

Lema 5. *Seja $\Sigma = (S^1, g)$ e seja (X, h) uma variedade riemanniana n -dimensional. Considere a aplicação $\hat{x}: \Sigma \longrightarrow X$ dada por $\hat{x}(\sigma) = x, \forall \sigma \in \Sigma$. Se $\mathcal{G}_c$ a métrica induzida sobre $C^\infty(\Sigma, X) \cap [\phi = cte]$ pela supermétrica $\mathcal{G}$ e $f: X \longrightarrow C^\infty(\Sigma, X)$ é a aplicação $f(x) = \hat{x}$, então $f^*\mathcal{G}_c = l_g h$, onde l_g é o comprimento de S^1 na métrica g . Além disso, se o volume $\text{vol}(X, h)$ de X na métrica h é finito tem-se que*

$$I = l_g^{n/2} \text{vol}(X, h).$$

Demonstração: *Considere a aplicação $F: X \longrightarrow C^\infty(\Sigma, X)$ dada por $F(x) = \hat{x}$. Afirmamos que $F^*\mathcal{G}_c = l_g h$. Para ver isso, mostraremos que $F^*\mathcal{G}_c(v_x, v_x) = l_g h(v_x, v_x)$ para todo $v_x \in T_x X$ tal $h(v_x, v_x) = 1$. Observe que F_{*x} aplica $T_x X$ em $T_{\hat{x}} C^\infty(\Sigma, X) \equiv \Gamma(\hat{x}^* T X)$. Considere uma curva $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = v_x$. Então,*

$$F_{*x} \cdot v_x = \frac{d}{dt}(F \circ \alpha(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\hat{\alpha}(t))|_{t=0},$$

notando que $\hat{\alpha}(t)(\sigma) = \alpha(t)$, concluímos que $F_{*x} \cdot v_x = v_x$. Daí segue-se que

$$F^*\mathcal{G}_c(v_x, v_x) = \mathcal{G}_c(F_{*x} \cdot v_x) = \int_{\Sigma=S^1} h \circ \hat{x}(v_x, v_x) = l_g h(v_x, v_x),$$

o que mostra o que havíamos afirmado.

Então, temos que

$$\int_{[\phi=cte]} \nu_{\mathcal{G}_c} = \int_X F^* \nu_{\mathcal{G}_c} = \int_X \nu_{F^*\mathcal{G}_c} = \int_X l_g^{n/2} \nu_h = l_g^{n/2} \text{vol}(X, h)$$

.

□

Podemos agora obter Z_{ren}^{SC} restrita à classe de homotopia das aplicações constantes .

Teorema 9. *Sejam Σ a circunferência S^1 com uma métrica riemanniana g e X uma variedade riemanniana n -dimensional compacta com uma métrica h .*

Então o valor da função de partição Z_{ren}^{SC} restrita à classe de homotopia das aplicações constantes é dado por

$$Z_{ren}^{SC}|_{[\phi=cte]} = \alpha^{-\frac{3n}{4}} \beta^{\frac{n}{2}} \gamma^{-2n} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3n}{4}\right) \text{vol}(X, h).$$

Demonstração: Substituindo na expressão encontrada para $Z_{ren}^{SC}|_{[\phi=cte]}$ acima, o valor da integral I encontrado no Lema (), e usando a identidade

$$\int_0^\infty x^s e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) a^{-\frac{s+1}{2}}, a > 0,$$

obtemos que

$$Z_{ren}^{SC}|_{[\phi=cte]} = \alpha^{-\frac{3n}{4}} \beta^{\frac{n}{2}} \gamma^{-2n} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3n}{4}\right) \text{vol}(X, h).$$

□

Observe que esse teorema se aplica nos casos em que X é o toro plano ou a esfera.

4.3.2 A esfera S^2 como variedade alvo

Nesta seção consideraremos o caso em que Σ é a circunferência (S^1, g) , e a variedade X é a esfera S^2 em $\mathbb{R}^3$ com a métrica induzida. Nosso objetivo aqui, será determinar o valor de Z_{ren}^{SC} restrita à classe das aplicações harmônicas $\phi : S^1 \rightarrow S^2$ de grau 1.

Lema 6. *Sejam Σ e X variedades riemannianas com métricas g, h , respectivamente, e seja Y uma variedade diferenciável. Se $f : Y \rightarrow X$ é um difeomorfismo, então os operadores de Dirac dados abaixo satisfazem a seguinte relação*

$$\mathcal{D}_{(g, f^{-1} \circ \phi, f^* h)} = A^{-1} \circ \mathcal{D}_{(g, \phi, h)} \circ A,$$

onde $A : \Gamma(Cl_g(\Sigma) \otimes (f^{-1} \circ \phi)^* TY) \rightarrow \Gamma(Cl_g(\Sigma) \otimes (\phi)^* TX)$ é uma aplicação linear sobre o anel das funções de classe C^∞ sobre Σ .

Demonstração: Para simplificar a notação, suporemos que $\dim \Sigma = \dim X = 1$; o argumento no caso geral é o mesmo.

Sejam $\{E\}$ e $\{F\}$ campos ortonormais sobre Σ e X , respectivamente. Então uma seção $s \in \Gamma(Cl_g(\Sigma) \otimes (\phi)^* TX)$ se escreve como

$$s = a1 \otimes \tilde{F} + bE \otimes \tilde{F}$$

onde $\tilde{F} = F \circ \phi$ é uma base de $\phi^* TX$ e a, b são funções de classe C^∞ sobre Σ . É fácil ver que

$$\mathcal{D}_{(g, \phi, h)} s = -E(b)1 \otimes \tilde{F} + -E(a)E \otimes \tilde{F}.$$

Por outro lado, temos que uma seção $t \in \Gamma(Cl_g(\Sigma) \otimes (f^{-1} \circ \phi)^* TY)$ pode ser escrita como

$$t = a1 \otimes \tilde{G} + bE \otimes \tilde{G},$$

onde $\tilde{G} = f_*^{-1} \circ F \circ \phi = f_*^{-1} \circ \tilde{F}$ é uma base de $(f^{-1} \circ \phi)^* TY$, e a, b são funções de classe C^∞ sobre Σ . Usando diretamente a definição, obtemos que

$$\mathcal{D}_{(g, f^{-1} \circ \phi, f^* h)} t = -E(b)1 \otimes \tilde{G} + -E(a)E \otimes \tilde{G}.$$

A aplicação $A : \Gamma(Cl_g(\Sigma) \otimes (f^{-1} \circ \phi)^*TY) \longrightarrow \Gamma(Cl_g(\Sigma) \otimes (\phi)^*TX)$ dada sobre uma base por $A(1 \otimes \tilde{G}) = 1 \otimes f_*\tilde{G}$ e $A(E \otimes \tilde{G}) = E \otimes f_*\tilde{G}$ satisfaz a propriedade enunciada no lema. $\square$

Lema 7. *Seja $\phi : S^1 \longrightarrow S^2$ a aplicação harmônica $\phi(e^{i\theta}) = (e^{i\theta}, 0)$. Seja $\{F_1, F_2\}$ um referencial ortonormal ao longo de $\phi(S^1)$, com $F_1 = \frac{\partial}{\partial \theta}$. Então o determinante do operador de Dirac $\mathcal{D}_{(g, \phi, u)} : \Gamma(Cl_g(S^1) \otimes \phi^*TS^2) \longrightarrow \Gamma(Cl_g(S^1) \otimes \phi^*TS^2)$ é dado por*

$$\det \mathcal{D}_{(g, \phi, u)} = (\det \Delta_g)^2.$$

Demonstração: Qualquer seção s em $\Gamma(Cl_g(S^1) \otimes \phi^*TS^2)$ pode ser escrita na forma

$$s = a1 \otimes \tilde{F}_1 + b1 \otimes \tilde{F}_2 + cE \otimes \tilde{F}_1 + dE \otimes \tilde{F}_2,$$

onde E é um campo sobre Σ satisfazendo $g(E, E) = 1$, $\{\tilde{F}_1 = F_1 \circ \phi, \tilde{F}_2 = F_2 \circ \phi\}$ é uma base de ϕ^*TS^2 , e a, b, c, d são funções reais sobre Σ .

Note que

$$\nabla_E \tilde{F}_1 = (\nabla_{\phi_* E} F_1) \circ \phi = (\nabla_{\lambda F_1} F_1) = 0,$$

e que

$$\nabla_E \tilde{F}_2 = (\nabla_{\phi_* E} F_2) \circ \phi = (\nabla_{\lambda F_1} F_2).$$

Observe, agora, que

$$\nabla_{F_1} F_2 = \langle \nabla_{F_1} F_2, F_1 \rangle F_1 + \langle \nabla_{F_1} F_2, F_2 \rangle F_2.$$

Como $\langle F_2, F_2 \rangle = 1$ ao longo do equador, temos que $F_1 \langle F_2, F_2 \rangle = 0$, donde segue-se que $\langle \nabla_{F_1} F_2, F_2 \rangle = 0$.

Temos também que $\langle F_1, F_2 \rangle = 0$ ao longo do equador. Então

$$\langle \nabla_{F_1} F_1, F_2 \rangle + \langle F_1, \nabla_{F_1} F_2 \rangle = 0.$$

Como $\nabla_{F_1} F_1 = 0$, obtemos que $\langle F_1, \nabla_{F_1} F_2 \rangle = 0$. Resulta dessas considerações que $\nabla_{\lambda F_1} F_2 = 0$. Levando isso em conta, segue-se diretamente da definição de um operador de Dirac que

$$\mathcal{D}_{(g, \phi, u)} = -E(c)1 \otimes \tilde{F}_1 - E(c)1 \otimes \tilde{F}_2 + E(a)E \otimes \tilde{F}_1 + E(b)E \otimes \tilde{F}_2$$

Considerando o operador $P = \mathcal{D}_{(g, \phi, u)}^2$, obtemos que

$$Ps = \Delta_g(a)1 \otimes \tilde{F}_1 + \Delta_g(b)1 \otimes \tilde{F}_2 + \Delta_g(c)E \otimes \tilde{F}_1 + \Delta_g(d)E \otimes \tilde{F}_2,$$

donde segue-se o resultado que queríamos. $\square$

Proposição 16. *Sejam $\Sigma = (S^1, g)$ e $X = S^2$ a esfera com a métrica euclidiana induzida do $\mathbb{R}^3$.*

(a) *O determinante do operador de Dirac $\mathcal{D}_{(g, \phi)}$ do fibrado $Cl_g(\Sigma) \otimes \phi^*TX$ é dado por*

$$\det \mathcal{D}_{(g, \phi)} = (\det \Delta_g)^2;$$

(b) Se c é uma constante positiva, então

$$\det(c\mathcal{D}_{(g,\phi)}) = c^{-4}(\det\Delta_g)^2;$$

(c) Seja $\{V_1, V_2\}$ uma base ortonormal ao longo da geodésica $\phi : S^1 \longrightarrow S^2$, $\phi(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, tal que $V_1 = \frac{\partial}{\partial \theta}$. Seja $\tilde{V} = f_1 \tilde{V}_1 + f_2 \tilde{V}_2$ uma seção de ϕ^*TS^2 . O operador de Jacobi $J_{(g,\phi)}$, é dado por

$$J_{(g,\phi)}\tilde{V} = \Delta_g(f_1)\tilde{V}_1 + (\Delta_g + 1)f_2\tilde{V}_2.$$

(d) O determinante do operador de Jacobi no item (c) é dado por

$$\det J_{(g,\phi)} = (\det \Delta_g)^2 4l_g^{-2} \sinh^2(l_g/2),$$

onde l_g é o comprimento de S^1 na métrica g .

(e) Se c é uma constante positiva, então

$$\det cJ_{(g,\phi)} = c^{-2}(\det J_{(g,\phi)}).$$

Demonstração: (a) Pelo lema 4, basta calcular o determinante de $\mathcal{D}_{(g,\phi)}$ para o caso em que $\phi : S^1 \longrightarrow S^2$ é a aplicação harmônica que manda S^1 no equador $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. O resultado segue-se do lema 5.

(b) Demonstração análoga à do caso (b) da proposição 12, seção 3.3.

(c) Seja $\tilde{V} = f_1 \tilde{V}_1 + f_2 \tilde{V}_2$ uma seção de ϕ^*TS^2 . Por definição temos que $J_{(g,\phi)} = \tilde{\Delta}_\phi - \mathcal{R}_\phi$. Um cálculo direto mostra que

$$\tilde{\Delta}_\phi \tilde{V} = \Delta_g(f_1)\tilde{V}_1 + \Delta_g(f_2)\tilde{V}_2.$$

Por outro lado, denotando por R a curvatura de S^2 , temos que

$$\mathcal{R}_\phi = R(f_1 \tilde{V}_1 + f_2 \tilde{V}_2, \phi_* E) \phi_* E.$$

Note que $\phi_* E = \tilde{V}_1$. Segue-se então que

$$\mathcal{R}_\phi \tilde{V} = f_2 R(\tilde{V}_2, \tilde{V}_1) \tilde{V}_1.$$

Assim obtemos que

$$\mathcal{R}_\phi \tilde{V} = \langle \mathcal{R}_\phi \tilde{V}, \tilde{V}_1 \rangle \tilde{V}_1 + \langle \mathcal{R}_\phi \tilde{V}, \tilde{V}_2 \rangle \tilde{V}_2.$$

Usando as propriedades de simetria da curvatura temos que

$$\mathcal{R}_\phi \tilde{V} = f_2 \langle R(\tilde{V}_2, \tilde{V}_1) \tilde{V}_1, \tilde{V}_2 \rangle \tilde{V}_2 = -f_2 \tilde{V}_2$$

(d) Os autovalores de Δ_g são dados por $\lambda_n = \left(\frac{2\pi}{l_g}\right)^2 n^2$. Considerando a multiplicidade dos autovalores e as propriedades operatórias da regularização dos determinantes, obtemos que

$$\det(\Delta_g + 1) = \prod_{\lambda_n \neq 0} (1 + \lambda_n)^2 = (\det \Delta_g) \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{\lambda_n}\right)^2.$$

Usando a identidade

$$\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{e^{\pi z} - e^{-\pi z}}{2\pi z} = \frac{\sinh(\pi z)}{\pi z},$$

obtemos que

$$\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{\lambda_n^2}\right) = \frac{\sinh(l_g/2)}{l_g/2}.$$

Agora é fácil ver que

$$\det J_{(g,\phi)} = \det \Delta_g \det(\Delta_g + 1) = (\det \Delta_g)^2 l_g^{-2} \sinh^2(l_g/2).$$

(e) Demonstração análoga à do caso (d) da proposição 12, seção 3.3.

□

O Lema que vem a seguir, será utilizado na demonstração da próxima proposição.

Lema 8. *Sejam g e h produtos internos sobre um espaço vetorial V de dimensão finita n , tais que $g(v, w) = 0 \Rightarrow h(v, w) = 0$. Se $\{E_1, \dots, E_n\}$ é uma base de ortonormal de V com respeito à métrica g , então os elementos de volume de g e h satisfazem a identidade:*

$$\nu_h = |E_1|_h \dots |E_n|_h \nu_g,$$

onde $|\cdot|_h$ denota a norma que provém da métrica h .

Demonstração: Observe que $\mathcal{B} = \{\frac{E_1}{|E_1|_h}, \dots, \frac{E_n}{|E_n|_h}\}$ é uma base ortonormal de V na métrica h . Seja $\{E_1^*, \dots, E_n^*\}$ a base dual de $\{E_1, \dots, E_n\}$, então $\{|E_1|_h E_1^*, \dots, |E_n|_h E_n^*\}$ é a base dual da base $\mathcal{B}$. Usando as propriedades do produto exterior obtém-se o resultado.

□

Proposição 17. *Seja US^2 o fibrado tangente unitário de S^2 . Considere a aplicação*

$$F : US^2 \longrightarrow \{\text{geodesicas em } S^2\} \subset C^\infty(S^1, S^2) \hookrightarrow \{g\} \times C^\infty(S^1, S^2)$$

dada por $F(p, v) = \phi_{p,v}$, onde $\phi_{p,v}$ é a única geodésica que passa pelo ponto p na direção v . Sejam $\mathcal{G}_c = \mathcal{G}|_{\{g\} \times C^\infty(S^1, S^2)}$, onde $\mathcal{G}$ é a supermétrica sobre $\text{Met}(S^1) \times C^\infty(S^1, S^2)$, e g_1 a métrica em US^2 . Então verifica-se a seguinte relação entre os elementos de volume de $F^*\mathcal{G}_c$ e g_1 :

$$\nu_{F^*\mathcal{G}} = \frac{1}{2} l_g^{3/2} \nu_{g_1}.$$

Demonstração:

Dado $V \in T_{(p,v)}(US^2)$, temos que

$$(F^*\mathcal{G})_{(p,v)}(V) = \mathcal{G}_{\phi_{p,v}}(F_{*(p,v)} \cdot V).$$

Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow US^2$ uma curva $\alpha(t) = (p(t), q(t))$ tal que $\alpha(0) = (p, v)$ e $\alpha'(0) = V$. Então

$$F_{*(p,v)} \cdot V = \frac{d}{dt}(F \circ \alpha)(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi_{p(t),v(t)}(s))|_{t=0}.$$

Temos que

$$\phi_{p(t),v(t)}(s) = \cos sp(t) + \sin sv(t).$$

Sem perda de generalidade podemos supor que $p = p(0) = (1, 0, 0)$ e $v = v(0) = (0, 1, 0)$. Desse modo, obtemos que

$$\frac{d}{dt}\phi_{p(t),v(t)}(s)|_{t=0} = \cos sp'(0) + \sin sv'(0),$$

onde $p'(0) = \alpha e_2 + \beta e_3$ e $v'(0) = a e_1 + c e_3$, com $a = \alpha$. Assim,

$$F_{*(p,v)} \cdot V = (a \sin s, \alpha \cos s, \beta \cos s + c \sin s).$$

Então,

$$\mathcal{G}_{\phi_{p,v}}(F_{*(p,v)} \cdot V) = \int_{S^1} h \circ \phi_{p,v}(F_{*(p,v)} \cdot V) = \int_{S^1} [(a^2 \sin^2(s) + \alpha^2 \cos^2(s) + (\beta \cos s + c \sin s)^2] \nu_g.$$

Para $g = u$ obtemos,

$$\mathcal{G}_{\phi_{p,v}}(F_{*(p,v)} \cdot V) = \int_0^{2\pi} [(a^2 \sin^2(s) + \alpha^2 \cos^2(s) + (\beta \cos s + c \sin s)^2] \nu_u = \pi(|p'(0)|^2 + |v'(0)|^2).$$

Por outro lado, um cálculo simples mostra que

$$g_1(V, V) = |p'(0)|^2 + c^2.$$

Observe que $F^*\mathcal{G}$ não é múltiplo de g_1 . No entanto temos que $F^*\mathcal{G}(V, W) = 0 \Rightarrow g_1(V, W) = 0$. Tomando referenciais adequados obtemos que

$$\nu_{F^*\mathcal{G}} = \pi^{3/2} 2^{1/2} \nu_{g_1}.$$

Suponhamos, agora, que $g = \lambda u$. Então temos que

$$\nu_{\lambda u} = \sqrt{\lambda} \nu_u.$$

Segue-se daí que

$$\mathcal{G}_{\phi_{p,v}}(F_{*(p,v)} \cdot V) = \pi \sqrt{\lambda} (|p'(0)|^2 + |v'(0)|^2).$$

Dada uma métrica riemanniana g qualquer sobre S^1 , existe um difeomorfismo f da circunferência tal que $f^*g = (\frac{l_g}{2\pi})^2 u$, onde l_g é o comprimento de S^1 na métrica g e u é a métrica usual sobre S^1 (Cf.[A]). Desse modo, temos que

$$(F^*\mathcal{G})_{(p,v)}(V) = \frac{l_g}{2} (|p'(0)|^2 + |v'(0)|^2).$$

Tomando referenciais ortonormais adequados, concluímos que

$$\nu_{F^*\mathcal{G}} = \frac{1}{2} l_g^{3/2} \nu_{g_1}.$$

□

Proposição 18. Considere S^1 com uma métrica riemanniana g e S^2 com a métrica induzida da métrica canônica do $\mathbb{R}^3$. Sejam $[\phi]_1$ a classe de homotopia das aplicações harmônicas de grau 1 em $[S^1, S^2]$, e $\mathcal{G}_c = \mathcal{G}|_{[\phi]_1}$ a restrição da supermétrica $\mathcal{G}$ ao espaço $[\phi]_1$. Então

$$\int_{[\phi]_1} \mathcal{G}_c = 4\pi^2 l_g^{3/2}.$$

Demonstração: considere a aplicação

$$F : US^2 \longrightarrow \{\text{geodesicas em } S^2\} \subset C^\infty(S^1, S^2) \hookrightarrow \{g\} \times C^\infty(S^1, S^2).$$

Pela proposição anterior temos que

$$\nu_{F^*\mathcal{G}} = \frac{1}{2} l_g^{3/2} \nu_{g_1}.$$

Assim obtemos que

$$\int_{[\phi]_1} \mathcal{G}_c = \int_{US^2} \nu_{F^*\mathcal{G}} = \int_{US^2} \frac{1}{2} l_g^{3/2} \nu_{g_1}.$$

Pela fórmula do volume do fibrado unitário dada na subseção 1.3.4, do capítulo 1, obtemos que

$$\int_{[\phi]_1} \mathcal{G}_c = \frac{1}{2} l_g^{3/2} \text{vol}(S^1, \text{can}) \text{vol}(S^2, \text{can}),$$

donde segue-se o resultado que queríamos. □

Seja (S^2, can) a esfera munida da métrica riemanniana induzida pela métrica canônica do $\mathbb{R}^3$. A imagem de uma aplicação harmônica $\phi : S^1 \longrightarrow (S^2, \text{can})$ é um círculo máximo de S^2 . Desse modo, podemos olhar para ϕ como sendo uma aplicação de S^1 em $\phi(S^1) \equiv S^1$. Definimos o *grau* da aplicação harmônica $\phi : S^1 \longrightarrow (S^2, \text{can})$ como sendo o número de vezes que ela cobre sua imagem.

Teorema 10. Sejam Σ a circunferência S^1 munida de uma métrica riemanniana g e X a esfera S^2 equipada com a métrica h induzida pela métrica euclidiana do $\mathbb{R}^3$. Então o valor da função de partição Z_{ren}^{SC} restrita à classe de homotopia das aplicações harmônicas $[\phi]_1 \in [S^1, S^2]$ de grau 1 é dada por

$$Z_{ren}^{SC}|_{[\phi]_1} = 2\pi^2 \gamma^{-4} \beta \int_0^\infty \frac{e^{-[\alpha l_g^2 + \beta \frac{(2\pi)^2}{l_g}]}}{\sinh(l_g/2)} l_g^{7/2} dl_g$$

Demonstração: Observe inicialmente que a energia topológica E_t é nula, visto que o grupo de cohomologia $H_{DR}^1(S^2) = 0$. Afirmamos que a energia bosônica de uma aplicação harmônica $\phi \in [S^1, S^2]$ de grau n é dada por $E_b = \frac{(2\pi n)^2}{l_g}$. Para ver isso, considere um campo F ao longo de $\phi(S^1)$ tal que $h(F, F) = 1$. Podemos então escrever $\phi_* E = cF \circ \phi$, onde c é uma constante. Segue-se diretamente da definição da energia bosônica que $E_b(\phi) = c^2 l_g$. Olhando para ϕ como uma aplicação de S^1 em $\phi(S^1) \equiv S^1$, temos que

$$\deg \phi = n = \int_{S^1} \phi^* \left(\frac{\nu_h}{2\pi} \right) \nu_g = \frac{c}{2\pi} l_g.$$

Aqui ν_h denota o elemento de volume da esfera restrito a $\phi(S^1)$. Daí segue-se nossa afirmação.

Substituindo na fórmula [] os dados obtidos nos lemas e proposições desta seção, lembrando que nesse contexto $\text{vol}(K_g) = l_g^{3/2}$, $FP([g]) = \frac{1}{2}l_g$, $\nu_{\bar{g}} = \frac{2dl_g}{\sqrt{l_g}}$, (Cf.[MGM]), obtemos o valor de $Z_{ren}^{SC}|_{[\phi]_1}$ dado no enunciado do teorema.

□

4.3.3 O toro plano como espaço alvo

Observe que no caso em que X é o toro plano, $\mathcal{PC}(E_b) \cap [\phi]$ é o conjunto das geodésicas periódicas do toro plano.

Seja $\phi_{m_1, m_2} : S^1 \rightarrow X$ a aplicação

$$\phi_{m_1, m_2}(z) = (\alpha z^{m_1}, \beta z^{m_2})$$

cujas imagens em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong S^1 \times S^1$ é a reta que passa por (α, β) de inclinação racional m_1/m_2 . Temos, então, a seguinte decomposição:

$$\mathcal{PC}(E_b) \cap [\Sigma, X] = [\phi_{0,0}] \cup [\phi_{1,0}] \cup \{[\phi_{m_1, m_2}] | m_2 \neq 0\}$$

onde $[\phi_{0,0}]$ é a classe das geodésicas constantes, e $[\phi_{1,0}]$ é a classe das geodésicas (isto é, retas) de inclinação infinita e $[\phi_{m_1, m_2}]$ são as classes das geodésicas de inclinação racional m_1/m_2 .

No que se segue, adotaremos a seguinte notação:

$$Z_{m_1, m_2} = Z_{ren}^{SC}|_{[\phi_{m_1, m_2}]} = \left[\int_0^\infty e^{-\alpha E_G} l_g^{-1} \left(\int_{\mathcal{PC}(E_b) \cap [\phi_{m_1, m_2}]} e^{-\beta E_b} \frac{\det(\gamma \mathcal{D}_{(g, \phi)})}{\sqrt{\det \beta J_{(g, \phi)}}} \nu_{g_c} \right) dl_g \right] q_1^{m_1} q_2^{m_2}$$

com $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $q_i = e^{-\delta c_i}$, $i \in \{1, 2\}$.

Note que o valor de $Z_{0,0}$ já foi obtido na subseção 4.3.1. A seguir faremos algumas observações que são úteis ao considerarmos o cálculo de Z_{m_1, m_2} , para m_1 e m_2 inteiros arbitrários.

O Primeiro passo em direção à obtenção de um valor explícito de Z_{m_1, m_2} , é descrever explicitamente E_G , E_t e E_b . Pela mesma razão de antes (seção 4.2), redefinimos $E_G(l_g) = l_g^2$. Determinemos, então, a energia topológica E_t . Para isso, tome $[\omega] \in H^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$. então $\omega = ad\theta_1 + bd\theta_2$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. pelo teorema da dualidade de Poincaré temos que

$$\int_{S^1} \phi^* d\theta_1 = [\phi(S^1)] \cap PD(dx) = m_2$$

e

$$\int_{S^1} \phi^* d\theta_2 = [\phi(S^1)] \cap PD(dy) = m_1.$$

Desse modo, obtemos que $E_t = c^1 m_2 + c^2 m_1$.

Determinemos agora a energia bosônica $E_b = \int_{S^1} \text{tr}_g \phi^* h \nu_g$. Note que $\text{tr}_g \phi^* h = h(\phi_* E, \phi_* E)$, $g(E, E) = 1$. Consideremos inicialmente o caso em que $g = u$, onde u é a métrica euclidiana usual sobre o círculo. Note que $E = \frac{\partial}{\partial \theta}$, é um campo unitário sobre S^1 . Daí segue-se que a derivada de ϕ_{m_1, m_2} aplicada em E é dada por

$$\phi_{m_1, m_2*}(E) = (m_1 \partial_1, m_2 \partial_2).$$

Concluimos então que

$$E_b(\phi_{m_1, m_2}) = (m_1^2 + m_2^2)2\pi.$$

Se $g = \lambda u$, então $E = \frac{\partial \theta}{\sqrt{\lambda}}$ é um campo unitário com respeito a g . A energia bosônica, neste caso, é dada por

$$E_b(\phi_{m_1, m_2}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(m_1^2 + m_2^2)2\pi.$$

Quando g é uma métrica riemanniana arbitrária sobre S^1 , existe (Cf.[A]) um difeomorfismo f de S^1 tal que $f^*g = \lambda u$, onde $\lambda = \left(\frac{l_g}{2\pi}\right)^2$. Obtemos, portanto, que a energia bosônica é dada, para uma métrica arbitrária g sobre S^1 , por

$$E_b(\phi_{m, n}) = \frac{(2\pi)^2(m^2 + n^2)}{l_g}.$$

Um outro passo necessário para a obtenção de Z_{m_1, m_2} é a determinação da métrica induzida sobre ϕ_{m_1, m_2} pela supermétrica. Isso é feito na proposição seguinte.

Proposição 19. *Seja $S^1 \times S^1$ o toro flat com métrica h . Considere a aplicação*

$$F : X \longrightarrow [\phi_{m_1, m_2}] \in C^\infty(S^1, X) \hookrightarrow \{g\} \times C^\infty(S^1, X)$$

dada por $F(\alpha, \beta) = \widehat{(\alpha, \beta)}$, onde $\widehat{(\alpha, \beta)}$ é a aplicação de S^1 em X dada por $\widehat{(\alpha, \beta)}(z) = (\alpha z^{m_1}, \beta z^{m_2})$. Seja $\mathcal{G}_c = \mathcal{G}|_{\{g\} \times C^\infty(S^1, X)}$, onde $\mathcal{G}$ é a supermétrica sobre $Met(S^1) \times C^\infty(S^1, X)$. Então verifica-se a seguinte relação entre os elementos de volume

$$\nu_{F^*\mathcal{G}_c} = l_g \nu_h.$$

Demonstração: *Sejam $1 \in S^1 \times S^1$ e $h = d\theta_1^2 + d\theta_2^2$. Faça $\partial_1 = \partial_{\theta_1}|_1$ e $\partial_2 = \partial_{\theta_2}|_1$. Temos que*

$$F^*\mathcal{G}_c(\partial_1, \partial_2) = \mathcal{G}_c(F_*\partial_1, F_*\partial_2).$$

Considere a curva $\alpha(t) = (e^{it}, 1)$ tal que $\alpha(0) = 1$ e $\alpha'(0) = \partial_1$. Então

$$F_*\partial_1 = \frac{d}{dt}(F \circ \alpha(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\widehat{\alpha(t)}|_{t=0}.$$

Mas $\widehat{\alpha(t)}(z) = (e^{it}z^{m_1}, z^{m_2})$. Então $\frac{d}{dt}\widehat{\alpha(t)}|_{t=0} = \partial_1 \circ \phi_{m_1, m_2}$. Obtemos daí que

$$\mathcal{G}_c(F_*\partial_1, F_*\partial_2) = \int_{S^1} h(\partial_1, \partial_2) \nu_g = l_g.$$

Logo. $F^\mathcal{G}_c = l_g h$. Donde segue-se que*

$$\nu_{F^*\mathcal{G}_c} = l_g \nu_h.$$

□

A seguir determinamos os operadores de Dirac $\mathcal{D}_{g,\phi}$ e o operador $J_{g,\phi}$.

Proposição 20. *Sejam $\Sigma = (S^1, g)$ e $X = S^1 \times S^1$ o toro flat com métrica h .*

(a) *O determinante do operador de Dirac $\mathcal{D}_{(g,\phi)}$ do fibrado $Cl_g(\Sigma) \otimes \phi^*TX$ é dado por*

$$\det \mathcal{D}_{(g,\phi)} = (\det \Delta_g)^2;$$

(b) *Se c é uma constante positiva, então*

$$\det(c\mathcal{D}_{(g,\phi)}) = c^{-4}(\det \Delta_g)^2;$$

(c) *O determinante do operador de Dirac $J_{(g,\phi)}$ é dado por*

$$\det J_{(g,\phi)} = (\det \Delta_g)^2;$$

(d) *Se c é uma constante positiva, então*

$$\det(cJ_{(g,\phi)}) = c^{-2}(\det \Delta_g)^2;$$

Substituindo os valores encontrados nesta seção, na fórmula dada acima para Z_{m_1, m_2} obtemos o teorema seguinte.

Teorema 11. *Sejam $\Sigma = (S^1, g)$ e $X = S^1 \times S^1$ o toro flat com métrica h . Então,*

$$Z_{m_1, m_2} = \beta \gamma^{-4} \left(\int_0^\infty l_g^{5/2} e^{-(\alpha l_g^2 + \frac{\beta(2\pi)^2(m_1^2 + m_2^2)}{l_g})} dl_g \right) \text{vol}(X, h) q_1^{m_1} q_2^{m_2}.$$

Capítulo 5

Referências

- [A] Alves A.O. *Mecânica Estatística, funções de correlação e partição*, Tese de Mestrado UFPE, 1998.
- [AM] Aspinwall P.S. and Morrison D.R. *Topological Field Theory and Rational Curves*, Comm. Math Phys., 151, 245-62, 1993.
- [A] Atiyah M. *The Geometry and Physics of Knots*. Cambridge University Press, 1990.
- [APS] Atiyah M.F., Patodi V.K. and Singer I.M. *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 77(1975), 43-69.
- [BGV] Berline N., Getzler E. and Vergne M. *Heat Kernel and Dirac Operators*, Springer Verlag, 1992.
- [B] Besse A. *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer Verlag, 1978.
- [BM] Baez, J. e Muniain, J.P. *Gauge Fields, Knots and Gravity*, World Scientific, 1994.
- [Ba] Barreto, R.S. *O Funcional de Polyakov*, Tese de Mestrado, UFPE, 1994.
- [Be] Berezin F.A. *The Method of Second Quantization*, Series Pure and Applied Physics, vol. 24 ACADEMIC PRESS INC., 1966.
- [B] Bost, J-B. *Fibrés déterminants régularisés et mesures sur les espaces de modules de courbes complexes*, Astérisque 152-153(1987).
- [Br] Brush, S.G. *The kind of motion we call heat*, North-Holland Publ. Comp., 1976.
- [C] Chang *Infinite dimensional Morse theory and multiple solution problems* Birkhäuser, 1993
- [COGP] Candelas, P., de la Ossa, X.C., Green, P.S., Parkes, L. *A pair of Calabi-Yau Manifolds as an exactly soluble superconformal theory* Nucl. Phys. B359, 21-74.
- [EL] Eels J. and Lemaire L. *Selected topics in harmonic maps*. Conference board of the mathematical sciences RSCM, number 50.

- [E] Elizalde, E. et al. *Zeta Regularization Techniques with Applications*, World Scientific, Singapore, 1994.
- [FM] Fischer, A.E. e Moncrief, V. *Hamiltonian reduction of Einstein's equations of general relativity*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 57, 142-161, August 1997.
- [FGR] Fröhlich J., Grandjean O. and Recknagel A. *Supersymmetric Quantum Theory, Non-Commutative Geometry and Gravitation*, Lectures Notes Les Houches, 1995, Hep-th/9706132/18 Jun 1997.
- [GH] Griffiths P. e Harris J. *Principles of Algebraic Geometry*, John Willey and sons, 1978.
- [GLP] Gilkey, P.B., Leahy, J.V. e Park, J. *Spectral Geometry, Riemannian Submersions, and the Gromov-Lawson conjecture*, Chapman and Hall/CRC, 1999.
- [H1] Hawking, S.W. *Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime*, Comm. Math. Physics (60),917-1066,1988.
- [Hel] Helgason, S.W. *Geometry Lie Groups and Symetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.
- [HS] Helffer and Sjöstrand. *Puits multiples en mécanique semiclassique IV. Etude du complexe de Witten*, Comm. PDE 10(1985),245-340.
- [ID] Itzykson C. and Drouffe J-M. *Statistical Field Theory, vol.1*, Cambridge University Press, 1989.
- [LM] Lawson, Blaine and Michelsoh, M.L. *Spin geometry*. Princeton Univ. Press, New Jersey, 1989.
- [MC] Mendoza R. e Cardoso F. *On the hyperbolic Dirichlet to Neumann functional*, Comm. in PDE, 21(7 e 8), 1235-52(1996)
- [MG] Mendoza R. and Guerra E. *Función de Partición y Renormalización*, Preprint,1998.
- [MMG] Mendoza R., Moraes F. and Gómez P. *Fluctuating metrics in one-dimensional manifolds*, J. Math. Phys. 38(10), October 1997
- [MRM] Mendoza R., Rojas J. and Moraes F. *Partition function For A Non linear Supersymmetric Model*, Preprint, 1999.
- [MP] Minakshisundaia, S. e Pleijel, A. *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds*, Can. J. of Math. vol.1, 1(1949).
- [MS] McDuff, D. e Salamon, D. *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, Amer. Math. Soc. Providence, 1996.
- [RS] Ray D.B., Singer I.M. *R-torsion and Laplacian on Riemannian manifolds*, Adv. Math. 145-210 (1971).
- [R1] Reif, F. *Física Estadística* Editorial Reverté,S.A.,Barcelona,1969.

- [R2] Reif, F. *Fundamentals of statistical and thermal physics*, McGraw-Hill, Inc
- [R] Rodrigo *Integração invariante sobre grupos de Lie* Tese de Mestrado, UFPB, 1999.
- [S] Seeley, R.T. *Complex Powers of an Elliptic Operator*, Proceedings Symp. in Pure and Math. volume X, 288-307(1967)
- [SBB] de Siqueira A., Bezerra de Mello E. and Bezerra V. *Bosonic and fermionic partition functions on S^3* , Modern Phys. letters A, Vol. 13, No. 11, 899-909(1998).
- [SS] Sears, F. W. e Salinger, S. *Termodinâmica, Teoria Cinética e Termodinâmica Estatística*, Guanabara Dois, 1979.
- [T] Tromba, A. *Teichmüller theory in Riemannian Geometry* Birkhäuser, 1992.
- [V] Vafa, C. *Proceedings of the Intern. Cong. of Math.*, vol.1, Berlin, 1998.
- [W1] Witten, E. *Supersimetry and Morse Theory* J. Diff. Geom. 17, 661-692, 1982.
- [W2] Witten, Edward. *Physics and geometry*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, California, USA, 1986.