Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Doutorado em Matemática

Ideais coerentes e compatíveis entre espaços de Banach

Joilson Oliveira Ribeiro

2011

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Doutorado em Matemática

Ideais coerentes e compatíveis entre espaços de Banach

por

Joilson Oliveira Ribeiro

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Dezembro de 2011

Recife-PE

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Ribeiro, Joilson Oliveira
Ideais coerentes e compatíveis entre espaços de Banach / Joilson Oliveira Ribeiro - Recife: O Autor, 2011.
xii, 112 folhas

Orientador: Daniel Marinho Pellegrino.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2011.

Inclui bibliografia.

1. Matemática. 2 Análise. 3. Análise funcional. I. Pellegrino, Daniel Marinho (orientador). II. Título.

510 CDD (22. ed.) MEI2011 – 186

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: ____

Daniel Marinho Pellegrino, *UFPB*

Orientador

____

Fágner Dias Araruna, UFPB

____

César Augusto Rodrigues Castilho, *UFPE*

____

Miguel Fidencio Loayza Lozano, *UFPE*

____

Geraldo Márcio de Azevedo Botelho, *UFU*

IDEAIS COERENTES E COMPATÍVEIS ENTRE ESPAÇOS DE BANACH

Por

Joilson Oliveira Ribeiro

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Dezembro – 2011

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

Ao meu Deus por me conceder mais essa vitória. A Ele todo o meu louvor.

À minha esposa por ter estado ao meu lado durante todo o meu doutorado, sendo uma esposa exemplar.

Aos meus pais, Joel e Raquel, e meus irmãos, Joelson (Sinho), Jonas (Nem) e Joilma (Ilma) por mim fazerem sentir orgulho de ser um dos membros dessa família, e ao longo desses seis anos não me deixar perder a vontade de retornar para o meu estado natal, algo que estarei fazendo em poucos dias. A Deise, por trazer ao mundo o meu sobrinho Arthur.

À minha família pernambucana, minha Sogra dona Ciada, seu marido José, meus cunhados Kekê e Elba e, a meu quase sobrinho Caio pelos momentos de refúgio que me propuseram, pela amizade verdadeira que, com certeza, levarei para sempre.

Ao meu orientador, professor Dr. Daniel Marinho Pellegrino por ter aceitado me orientar, antes mesmo de me conhecer, e por ter sido um orientador exemplar, sempre presente (mesmo estando distante), além de ter me ensinado muito mais que matemática.

Aos meus amigos e colegas da pós-graduação em especial à Abiel (grande amigo e irmão em Cristo), José Francisco, Zaqueu, Adecarlos, Marcelo, Allyson, Paulo, Bruno, Luiz, Eudes, Alejandro, Clessius, Fábio, Lucas, Ives, Isabelle, Crislene, Renata, Tarciana, Giovana, Bárbara, Danila por motivos diversos.

Aos meus colegas professores da Universidade Federal Rural de Pernambuco, na pessoa da professora Hebe, por ter me tratado tão bem durante todo o período em que estive servindo a essa instituição.

Aos professores da pós-graduação da UFPE, na pessoa do professor Hildeberto Cabral, e da graduação em matemática da UEFS, na pessoa do professor Claudiano Goulart.

À secretária da pós-graduação da UFPE, Tânia, por sua imensa gentileza.

Ao CNPq pelo indispensável apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma nova abordagem para avaliar extensões de ideais de operadores lineares para multi-ideais e ideais de polinômios. Nossa abordagem estende os conceitos de coerência e compatibilidade de ideais de polinômios. Além disso, mostramos que o nosso método é capaz de filtrar as principais extensões multilineares e polinomiais conhecidas e eliminar possíveis construções artificiais.

Estudamos ainda as aplicações multilineares e polinômios quase somantes em todo ponto, construindo uma norma para este espaço que torna tal classe um ideal de polinômios/multi-ideal de Banach. Mostramos ainda que esta construção fornece uma sequência de ideais coerentes e compatíveis.

Palavras-Chave:

Operadores quase somantes; Ideais de operadores; Ideais de polinômios; Espaços de Banach.

Abstract

This work presents a new approach to evaluate extensions of ideals of linear operators to multi-ideals and ideals of polynomials. Our approach extends the concepts of coherence and compatibility for ideals of polynomials. Furthermore, we show that our method is able to filter out the main multilinear and polynomials known extensions and eliminate possible artificial constructions.

Applications to everywhere almost summing polynomials and multilinear mappings have also been studied, building a norm on this space that makes this class a Banach ideal of polynomials/Banach multi-ideal. We also show that this construction provides a coherent and compatible sequence of ideals.

Key-Words:

Almost summing operators; Ideals of operators; Ideals of polynomials; Banach Spaces.

Sumário

Introdução

Os trabalhos de Alexandre Grothendieck [19, 20], na década de 50, são considerados o ponto de partida da teoria de ideais de operadores. Neste trabalho, ele apresenta uma demonstração diferente para o teorema de Aryeh Dvoretzky e Claude Ambrose Rogers, onde é mostrado que em todo espaço de Banach de dimensão infinita existem séries incondicionalmente convergentes que não são absolutamente convergentes, além de introduzir a essência do conceito de operador absolutamente somante. Porém, somente na década de 60, com os trabalhos de Albrecht Pietsch, Joram Lindenstrauss e Aleksander Pełczyński, as idéias de Grothendieck começaram a ser melhor compreendidas e reescritas de forma mais acessível. Desde então, essa teoria vem sendo de fundamental importância dentro da Análise Funcional.

Nos anos 70, A. Pietsch [42] introduziu a teoria abstrata de ideais de operadores, vindo em 1983 [43, 44] apresentar o conceito de ideais de aplicações multilineares cuja adaptação para polinômios é imediata.

O desenvolvimento das teorias das classes especiais de polinômios homogêneos e aplicações multilineares entre espaços de Banach tem-se mostrado bem sucedido, haja vista a quantidade delas já estudadas, cada uma com a sua particularidade. Neste trabalho estudamos os operadores quase somantes não lineares. Esta noção aparece na literatura nos trabalhos [6, 8]. Para a teoria linear, fazemos referência ao livro clássico [17].

Ao longo do texto estaremos interessados em explorar o conceito de operadores quase somantes em um dado ponto, obtendo uma norma com boas propriedades no espaço das aplicações quase somantes em todo ponto.

Para os nossos propósitos, uma norma bem comportada é de fundamental importância, pois ela é essencial para investigarmos o conceito de ideal de operadores. Com essa norma também exploramos a noção de tipo de holomorfia, devido a Nachbin [30]. Nessa direção, obtivemos sucesso ao mostrar que a classe em estudo de fato se trata de um ideal multilinear de operadores, e o ideal dos polinômios um tipo de holomorfia global, conceito esse introduzido por Botelho, Braunss, Junek e Pellegrino em [9].

No entanto, como sabemos que dado um ideal de operadores lineares $\mathcal{I}$, existem, em geral, vários ideais de polinômios e de aplicações multilineares associados ao mesmo ideal, como é o caso do ideal dos absolutamente somantes, é natural nos questionarmos sobre a qualidade desse novo ideal que estamos construindo.

Este fato serve de motivação para se criar mecanismos que apontem qual dessas extensões é a melhor, ou seja, está se buscando respostas para a questão natural: dado um ideal de operadores $\mathcal{I}$, como definir um multi-ideal e um ideal de polinômios que preserve o espírito de $\mathcal{I}$? Seguindo nessa direção, métodos abstratos de definir quando uma extensão multilinear (e polinomial) de um dado ideal de operadores é, em algum sentido, compatível com o ideal linear foram recentemente discutidos por vários autores.

A ideia é que, dados inteiros positivos n_1 e n_2, os respectivos níveis de n_1-linearidade e n_2-linearidade de um dado multi-ideal (ou ideal de polinômios) devem apresentar uma relevante inter-conexão e também manter o espírito do nível original ($n = 1$).

Seguindo nessa linha, destacamos os trabalhos [10] e [14]. No primeiro, foram introduzidos os conceitos de ideais de polinômios CUD e CSM. Esses conceitos são facilmente generalizados para multi-ideais, como podemos encontrar em [37], e eles têm como objetivo avaliar se uma determinada sequência de ideais de polinômios/multi-ideais tem um bom relacionamento entre os diferentes níveis de n-linearidades.

No segundo trabalho, Carando *et al* apresentam a noção de coerência e compatibilidade para um ideal de polinômios, onde uma sequência de ideais de polinômios é dita coerente se os ideais mantêm uma boa relação com os níveis imediatamente superior e inferior. Essa noção de ideais coerentes, assim como mencionado no trabalho original, é bastante semelhante à noção de ideais CUD/CSM. Já a compatibilidade diz respeito à relação de um ideal de polinômios com o ideal linear.

Sem dúvida, o conceito de coerência e compatibilidade tem acrescentado uma importante contribuição à teoria dos ideais dos polinômios. No entanto, algo parecia ainda incompleto, devido ao surgimento de um importante inconveniente. Isto é, a sequência canônica $(\mathcal{P}_k)_{k=1}^N$ composta de ideais de polinômios k-homogêneos com a norma do sup deixa de ser coerente quando considerada sobre o corpo dos números reais.

Sendo assim, um dos principais objetivos desse trabalho é a introdução de um critério geral claro para decidir se uma generalização multilinear e polinomial de um dado ideal de operadores tem um comportamento que possa ser considerado "adequado". Nosso critério será definido simultaneamente para pares de ideais de polinômios e multi-ideais.

Em resumo, os principais objetivos desse trabalho são:

(i) Apresentar uma nova noção de coerência e compatibilidade, onde são considerados uma sequência de pares composta por um ideal de polinômios n-homogêneos e um ideal de aplicações n-lineares. Além disso, verificamos que o nosso novo conceito consegue filtrar algumas extensões existentes na literatura que possuia boas propriedades.

(ii) Exibimos uma extensão multilinear e polinomial de um operador quase somante, caracterizamos esse espaço e introduzimos uma norma, além de mostrarmos que com essa norma, esse espaço se torna um espaço de Banach. Mostramos ainda que com essa norma, esse espaço é um multi-ideal normado e junto com o ideal de polinômios gerado por esse multi-ideal temos uma sequência coerente e compatível.

Capítulo 1

Ideais de aplicações n-lineares e polinômios entre espaços de Banach

Neste primeiro momento, apresentaremos algumas definições que serão utilizadas ao longo de todo o texto, e alguns resultados preliminares que servirão para que o leitor se familiarize com as ferramentas usadas nos capítulos subsequentes.

Dentre as definições e resultados apresentados, destacamos as aplicações n-lineares simétricas e os polinômios n-homogêneos contínuos, bem como as suas relações. Apresentamos ainda a noção de derivada de polinômio e os conceitos de polinômios e aplicações de tipo finito. Esses conceitos serão muito úteis durante a definição de ideais de operadores lineares, ideais de aplicações multilineares e ideais de polinômios que são definidos logo em seguida.

Ainda neste primeiro capítulo, introduzimos o conceito de ideal de polinômios gerado por um ideal de aplicações multilineares. Na realidade essa é apenas mais uma, dentre tantas maneiras de se gerar um ideal de polinômios. O mesmo acontece com um ideal de aplicações multilineares, ou seja, dado um ideal linear, podem existir diferentes maneiras de se gerar o ideal de aplicações multilineares. Dessa forma, fica evidente a necessidade da existência de uma teoria para avaliar essas possíveis extensões. Nesse sentido, existem na literatura diversos trabalhos que têm esse objetivo como uma das metas principais. Aqui, listamos as principais abordagens, como é o caso dos ideais coerentes/compatíveis, ideais CUD/CSM, tipos de holomorfia e tipos de holomorfia globais. Enunciamos ainda alguns resultados importantes desta teoria.

1.1 Aplicações n-lineares e polinômios

Ao longo deste trabalho $E, E_1, ..., E_n, F$ denotarão espaços de Banach sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e E' o dual topológico de E. A bola unitária fechada de E será representada por B_E. Dado um inteiro positivo $n \geq 2$, o espaço de Banach de todas as transformações n-lineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F com a norma do sup será denotado por $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n;F)$. Se $E_1 = \cdots = E_n = E$, escrevemos $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n;F) = \mathcal{L}(^nE;F)$, e $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n)$ representará $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$. Em alguns casos, e dependendo da conveniência, escrevemos $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n;F) = \mathcal{L}^n(E_1, ..., E_n;F)$ e $\mathcal{L}^n(^nE;F) = \mathcal{L}(^nE;F)$.

Definição 1.1.1 *Uma aplicação n-linear A é dita simétrica se $A(x_1, \ldots, x_n) = A\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right)$ para toda permutação σ de $\{1, \ldots, n\}$ e todos $x_1, \ldots, x_n$.*

Definição 1.1.2 *Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma aplicação $P : E \to F$ é um polinômio n-homogêneo contínuo se existe uma aplicação n-linear $A \in \mathcal{L}(^nE; F)$ tal que $P(x) = A(x, \ldots, x)$ para todo $x \in E$. Neste caso, dizemos que P é um polinômio associado a A, e denotamos $P = \hat{A}$. O conjunto de todos os polinômios n-homogêneos contínuos de E em F é denotado por $\mathcal{P}(^nE; F)$, que é um espaço de Banach quando munido com a norma*

$$\|P\| = \sup_{x \in B_E} \|P(x)\|.$$

Assim como no caso multilinear, as vezes escrevemos $\mathcal{P}^n(^nE; F) = \mathcal{P}(^nE; F)$.

Dado um polinômio n-homogêneo P existem muitas aplicações n-lineares que satisfazem a condição da definição acima, porém existe apenas uma que é simétrica. Esta aplicação n-

linear que é simétrica, denotada por $\overset{\vee}{P}$, pode ser obtida de P via Fórmula de Polarização (veja [22, 29]):

$$\overset{\vee}{P}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n P\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right).$$

Denotaremos por $\mathcal{L}_s\left({}^nE; F\right)$ o espaço das aplicações contínuas n-lineares simétricas de E em F. Este conjunto, quando equipado com a norma

$$\|A\| = \sup\left\{\|A(x_1, \ldots, x_n)\|; x_1, \ldots, x_n \in B_E\right\}$$

é um espaço de Banach. Por [30, Proposição 1, Cap 3] temos

$$\left\|\hat{A}\right\| \leq \|A\| \leq \frac{n^n}{n!}\left\|\hat{A}\right\|,$$

e isto implica que a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left({}^nE; F\right) &\to \mathcal{L}_s\left({}^nE; F\right) \\ P &\longmapsto \overset{\vee}{P} \end{aligned}$$

é um isomorfismo topológico de espaços vetoriais.

Dados $P \in \mathcal{P}\left({}^nE; F\right)$, $a \in E$ e $0 \leq k \leq n$, definimos o polinômio $P_{a^k} \in \mathcal{P}\left({}^{n-k}E; F\right)$ por

$$P_{a^k}(x) = \overset{\vee}{P}\left(a^k, x^{n-k}\right) = \overset{\vee}{P}\left(\overbrace{a, \ldots, a}^{k}, \overbrace{x, \ldots, x}^{n-k}\right),$$

e dizemos que o polinômio P_{a^k} é obtido de P fixando k variáveis iguais a a. Para $k = 1$, escrevemos P_a em vez de P_{a^1}. A k-ésima derivada de um polinômio P é a aplicação $\hat{d}{}^kP : E \to \mathcal{P}\left({}^kE; F\right)$ definida por

$$\frac{\hat{d}{}^kP(x)}{k!}(y) = \binom{n}{k} P_{x^{n-k}}(y),$$

de onde concluímos que

$$\overset{\wedge}{d^k} P \in \mathcal{P}\left({}^{n-k}E; \mathcal{P}\left({}^{k}E; F\right)\right).$$

De igual modo, podemos definir $d^k P : E \to \mathcal{L}_s\left({}^{k}E; F\right)$ por

$$\frac{d^k P\left(x\right)}{k!}\left(y_1, \ldots, y_k\right) = \binom{n}{k} \overset{\vee}{P}\left(x^{n-k}, y_1, \ldots, y_k\right),$$

e

$$d^k P \in \mathcal{P}\left({}^{n-k}E; \mathcal{L}_s\left({}^{k}E; F\right)\right)$$

para todo $k = 0, \ldots, n$.

Definição 1.1.3 *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços vetoriais, $\varphi_1 \in E_1', \ldots, \varphi_n \in E_n'$ e $b \in F$. A aplicação $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ definida por*

$$A\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \varphi_1\left(x_1\right) \cdots \varphi_n\left(x_n\right) b$$

é claramente n-linear. Uma combinação linear finita de aplicações n-lineares desse tipo é chamada de aplicação n-linear de tipo finito. A forma geral de uma aplicação n-linear de tipo finito de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F é então

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_1^i(x_1) \ldots \varphi_n^i(x_n) b_i,$$

onde $\varphi_j^i \in E_j'$ e $b_i \in F$ para $i = 1, \ldots, k$ e $j = 1, \ldots, n$. O conjunto de todas as aplicações n-lineares de tipo finito é denotado por $\mathcal{L}_f(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Definição 1.1.4 *Um polinômio $P \in \mathcal{P}({}^{n}E; F)$ é dito de tipo finito se existir $k \in \mathbb{N}$ tal que*

$$P\left(x\right) = \sum_{i=1}^{k} \left(\varphi_i\left(x\right)\right)^n b_i,$$

onde $\varphi_i \in E'$, $b_i \in F$ e $i = 1, \ldots, k$. O conjunto de todos os polinômios n-homogêneos contínuos de tipo finito será denotado por $\mathcal{P}_f({}^nE; F)$.

1.2 Ideais de aplicações multilineares

A teoria de ideais de operadores é essencialmente devida a A. Pietsch [44], cuja adaptação para polinômios é imediata. Para a teoria de polinômios e aplicações multilineares fazemos referência à bibliografia [22, 29].

Definição 1.2.1 *Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para quaisquer espaços de Banach E e F, sua componente*

$$\mathcal{I}(E; F) := \mathcal{L}(E; F) \cap \mathcal{I}$$

satisfaz:

(**Oa**) *$\mathcal{I}(E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; F)$ que contém os operadores de tipo finito;*

(**Ob**) *A propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(E; F)$, $v \in \mathcal{I}(F; G)$ e $t \in \mathcal{L}(G; H)$, então*

$$t \circ v \circ u \in \mathcal{I}(E; H).$$

Além disso, se existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to [0, \infty[$ tal que:

(**O1**) *A função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita à componente $\mathcal{I}(E; F)$ é uma norma para todos E e F espaços de Banach;*

(**O2**) *O funcional $\mathcal{I}_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ dado por $\mathcal{I}_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda$ é tal que $\|\mathcal{I}_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$;*

(**O3**) *Se $u \in \mathcal{L}(E; F)$, $v \in \mathcal{I}(F; G)$ e $t \in \mathcal{L}(G; H)$, então a composição satisfaz*

$$\|u \circ v \circ t\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\| \, \|v\|_{\mathcal{I}} \, \|t\| \, ;$$

o ideal $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ *é um ideal normado de operadores. Mais ainda, se todas as componentes* $\mathcal{I}(E;F)$ *são subespaços completos relativamente à norma* $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ *dizemos que* $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ *é um ideal de Banach.*

Dizemos que um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é um ideal fechado se todas as componentes $\mathcal{I}(E;F)$ são subespaços fechados em $\mathcal{L}(E;F)$ em relação a norma usual de operadores. Assim, se $\mathcal{I}$ é um ideal fechado, cada componente $\mathcal{I}(E;F)$ é um subespaço completo relativamente à norma induzida.

O conceito de multi-ideal é também devido a A. Pietsch [44]. Para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos denotar $\mathcal{L}_n$ como a classe de todos os operadores n-lineares contínuos entre espaços de Banach.

Definição 1.2.2 *Um ideal de aplicações multilineares (ou multi-ideal)* $\mathcal{M}$ *é uma subclasse da classe* $\mathcal{L} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n$ *de todas aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach, cujas componentes*

$$\mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_n; F) := \mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_n; F) \cap \mathcal{M}$$

satisfazem, para todos $E_1, \ldots, E_n$ *e* F*:*

(Ma) $\mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{L}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$ *que contém as aplicações* n*-lineares de tipo finito;*

(Mb) *A propriedade de ideal: se* $A \in \mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$*,* $u_j \in \mathcal{L}_1(X_j; E_j)$ *para* $j = 1, \ldots, n$ *e* $t \in \mathcal{L}_1(F; Y)$*, então*

$$tA(u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{M}_n(X_1, \ldots, X_n; Y).$$

Além disso, quando existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to [0, \infty[$ *que satisfaça*

(M1) $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ *restrito a* $\mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$ *é uma norma (respectivamente, quasi-norma) para quaisquer* $E_1, \ldots,$ E_n *e* F*, para todo número natural* n*;*

(M2) $\|A_n : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K};\ A_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n\|_{\mathcal{M}} = 1$ *para todo* n*;*

(M3) *Se* $A \in \mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$*,* $u_j \in \mathcal{L}_1(X_j; E_j)$ *para* $j = 1, \ldots, n$ *e* $t \in \mathcal{L}_1(F; Y)$ *então*

$$\|t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)\|_{\mathcal{M}} \leq \|t\| \, \|A\|_{\mathcal{M}} \, \|u_1\| \ldots \|u_n\| \, ,$$

$\mathcal{M}$ *é dito um ideal normado (respectivamente, quasi-normado) de aplicações multilineares. Quando todas as componentes* $\mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$ *são completas com essa (quasi-) norma* $\mathcal{M}$ *é dito um multi-ideal (quasi-) Banach.*

Para um ideal de aplicações multilineares fixado $\mathcal{M}$ e $n \in \mathbb{N}$, a classe

$$\mathcal{M}_n := \cup_{E_1, \ldots, E_n, F} \mathcal{M}\left(E_1, \ldots, E_n; F\right)$$

é chamado de ideal de aplicações n-lineares.

Um ideal de Banach de aplicações n-lineares, denotado por $\mathcal{M}_n$ é dito ser fechado se a sua norma é a norma usual do sup e cada componente $\mathcal{M}_n\left(E_1, \ldots, E_n; F\right)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}_n\left(E_1, \ldots, E_n; F\right)$. Um ideal de Banach $\mathcal{M}$ de aplicações multilineares é fechado se cada $\mathcal{M}_n$ é fechado.

1.3 Como criar ideais de aplicações multilineares e de polinômios a partir de um ideal de operadores

1.3.1 Multi-ideais vs ideais de operadores

Quando se define um ideal de aplicações multilineares a partir de um ideal de operadores, uma preocupação natural é que essa definição seja uma boa generalização do ideal original. Seguindo essa linha, existem na literatura [9, 10, 14] algumas características de ideais de aplicações multilineares que, sob determinados critérios, ajudam nessa avaliação, como por exemplo:

Definição 1.3.1 (Ideal CUD [37]) *Um ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$ é fechado para diferenciação (CUD) se, para todos n, $E_1, \ldots, E_n$, F e $T \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ tivermos que todo operador linear obtido fixando $n-1$ vetores $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n$ em T pertence a $\mathcal{M}(E_j; F)$, para todo $j = 1, \ldots, n$.*

Definição 1.3.2 (Ideal CSM [37]) *Um ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$ é fechado para multiplicação por escalar (CSM) se, para todo n, $E_1, \ldots, E_n$, F, $T \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\varphi \in E'_{n+1}$ a aplicação $\varphi T \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n, E_{n+1}; F)$.*

As definições acima têm o objetivo de determinar se os níveis de n-linearidades de um ideal $\mathcal{M}$ têm uma certa harmonia entre si.

1.3.2 Ideais de polinômios vs ideais de operadores

A definição de ideal de polinômios segue linhas análogas às da definição de multi-ideal. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $\mathcal{P}_n$ a classe de todos os polinômios n-homogêneos contínuos entre espaços de Banach.

Definição 1.3.3 (Ideal de Polinômios) *Um ideal de polinômios homogêneos, ou simplesmente ideal de polinômios, é uma subclasse $\mathcal{Q}$ da classe $\mathcal{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ de todos os polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos espaços de Banach E e F, as componentes*

$$\mathcal{Q}_n(^nE; F) := \mathcal{P}_n(^nE; F) \cap \mathcal{Q}$$

satisfazem:

(Pa) *$\mathcal{Q}_n(^nE; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_n(^nE; F)$ que contém os polinômios n-homogêneos de tipo finito.*

(**Pb**) *A propriedade de ideal: Se* $u \in \mathcal{L}_1(G;E)$, $P \in \mathcal{Q}_n({}^nE;F)$ *e* $t \in \mathcal{L}_1({}^nE;F)$, *então*

$$t \circ P \circ u \in \mathcal{Q}_n({}^nG;H).$$

Se existir uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \to [0,\infty[$ *satisfazendo*

(**P1**) *Para cada* n *existe* $0 < p_n \leq 1$ *tal que* $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ *restrito a* $\mathcal{Q}_n({}^nE;F)$ *é uma* p_n*-norma para todos espaços de Banach* E, F;

(**P2**) $\|P_n : \mathbb{K} \to \mathbb{K};\ P_n(\lambda) = \lambda^n\|_{\mathcal{Q}} = 1$ *para todo* n;

(**P3**) *Se* $u \in \mathcal{L}_1(G;E)$, $P \in \mathcal{Q}_n({}^nE;F)$ *e* $t \in \mathcal{L}_1(F;H)$, *então*

$$\|t \circ P \circ u\|_{\mathcal{Q}} \leq \|t\| \, \|P\|_{\mathcal{Q}} \, \|u\|^n,$$

então $\mathcal{Q}$ *é dito um ideal de polinômios quasi-normados (normado se* $p_n = 1$ *para todo* n*). Além disso, se todas as componentes* $\mathcal{Q}_n({}^nE;F)$ *são subespaços completos relativamente à quasi-norma* $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$, *dizemos que* $\left(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}\right)$ *é um ideal quasi-Banach (Banach, se para todo* n, $p_n = 1$*) de polinômios. Para um ideal de polinômios* $\mathcal{Q}$ *fixado e* $n \in \mathbb{N}$, *a classe*

$$\mathcal{Q}_n := \cup_{E,F} \mathcal{Q}({}^nE;F)$$

é chamada de um ideal de polinômios n*-homogêneos. Se* $\mathcal{Q}$ *é um ideal de polinômios, definimos*

$$\mathcal{Q}\left({}^0E;F\right) = F$$

para todos espaços de Banach E *e* F.

Ideais de polinômios fechados são definidos de uma maneira similar ao caso dos ideais das aplicações multilineares.

Definição 1.3.4 *Se* $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}$ *é um multi-ideal (quasi-) normado, pode-se definir*

$(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}^n)_{n=1}^{\infty}$ *dizendo que* $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}^n\,({}^nE;F)$ *se, e somente se,* $\overset{\vee}{P} \in \mathcal{M}_n\,({}^nE;F)$ *e*

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}^n} := \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{M}_n}.$$

Proposição 1.3.5 ([9, página 46]) *Se* $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}$ *é um multi-ideal (quasi-) Banach, então* $\mathcal{P}_{\mathcal{M}} : = \left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}^k\right)_{k=1}^{\infty}$ *é um ideal de polinômios de (quasi-) Banach, e é chamado de ideal de polinômios gerado por* $\mathcal{M}$*.*

A seguir destacamos propriedades que foram introduzidas nos últimos anos para, de certa forma, avaliar quando multi-ideais são boas generalizações de certos ideais de operadores.

Definição 1.3.6 (Propriedade (B))

- *Uma aplicação* $(n+1)$*-linear* $A \in \mathcal{L}({}^nE, G; F)$ *é dita simétrica nas primeiras* n *variáreis se*

$$A(x_1, \ldots, x_n, y) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y)$$

para toda permutação σ *do conjunto* $\{1, \ldots, n\}$ *e para todos* $x_1, \ldots, x_n \in E$ *e* $y \in G$*.*

- *Dados* $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *e* $a \in E_n$ *definimos* $A_a \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{n-1}; F)$ *por*

$$A_a(x_1, \ldots, x_{n-1}) = A(x_1, \ldots, x_{n-1}, a).$$

- *Seja* $\mathcal{I}$ *uma classe de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach tal que para todos* $n \in \mathbb{N}$ *e espaços de Banach* $E_1, \ldots, E_n$*,* F*, a componente*

$$\mathcal{I}(E_1, \ldots, E_n; F) := \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \cap \mathcal{I}$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *equipado com uma quasi-norma denotada por* $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$*. Dizemos que* $\mathcal{I}$ *tem a propriedade* (B) *se existe* $C \geq 1$ *tal que para cada*

$n \in \mathbb{N}$, e cada espaço de Banach E e F e todo $A \in \mathcal{I}(^n E, \mathbb{K}; F)$ simétrica nas primeiras n variáveis,

$$A_1 \in \mathcal{I}(^n E; F) \text{ e } \|A_1\|_{\mathcal{I}} \leq C\|A\|_{\mathcal{I}}.$$

A terminologia "propriedade B"foi introduzida em [9] e o termo "B"foi usado em homenagem a H.-A. Braunss que em sua tese de doutorado [12] trabalhou essencialmente com essa propriedade.

Definição 1.3.7 (Ideal CSM / CUD [10]) *Seja $\mathcal{Q}$ um ideal de polinômios. Dados $n \in \mathbb{N}$, E e F, dizemos que:*

(**i**) *$\mathcal{Q}$ é fechado com relação à diferenciação para n, E e F se $\hat{d}P(a) \in \mathcal{Q}(E; F)$ para todos $a \in E$ e $P \in \mathcal{Q}(^n E; F)$, onde $\hat{d}P(a)$ é a derivada do polinômio P no ponto a.*

(**ii**) *$\mathcal{Q}$ é fechado com relação à multiplicação por escalar para n, E e F se $\varphi P \in \mathcal{Q}(^{n+1} E; F)$ para todos $\varphi \in E'$ e $P \in \mathcal{Q}(^n E; F)$.*

Quando (**i**) *e/ou* (**ii**) *for verdadeiro para todos n, E e F diremos que $\mathcal{Q}$ é um ideal CUD e/ou CSM.*

Definição 1.3.8 (Ideais Compatíveis [14]) *Seja $\mathcal{U}$ um ideal quasi-normado de operadores lineares. Diremos que o ideal quasi-normado $\mathcal{U}_n$ de polinômios n-homogêneos é compatível com $\mathcal{U}$ (ou que $\mathcal{U}_n$ e $\mathcal{U}$ são compatíveis) se existem constantes positivas β_1 e β_2 tais que para todos espaços de Banach E e F, as seguintes condições são satisfeitas:*

(**i**) *Para todos $P \in \mathcal{U}_n(E; F)$ e $a \in E$, $P_{a^{n-1}}$ pertence a $\mathcal{U}(E; F)$ e*

$$\|P_{a^{n-1}}\|_{\mathcal{U}(E;F)} \leq \beta_1 \|P\|_{\mathcal{U}_n(E;F)} \|a\|^{n-1}.$$

(**ii**) *Para todos $T \in \mathcal{U}(E; F)$ e $\gamma \in E'$, $\gamma^{n-1}T$ pertence a $\mathcal{U}_n(E; F)$ e*

$$\left\|\gamma^{n-1}T\right\|_{\mathcal{U}_n(E;F)} \leq \beta_2 \|\gamma\|^{n-1} \|T\|_{\mathcal{U}(E;F)}.$$

Definição 1.3.9 (Ideais Coerentes [14]) *Considere a sequência $\{\mathcal{U}_k\}_{k=1}^N$, onde para cada k, $\mathcal{U}_k$ é um ideal quasi-normado de polinômios k-homogêneos quasi-normado e N é* *eventualmente infinito. Diremos que $\{\mathcal{U}_k\}_k$ é uma sequência coerente de ideais de polinômios se existem constantes positivas β_3 e β_4 tais que para quaisquer espaços de Banach E e F, as seguintes condições são satisfeitas para $k = 1, \ldots, N-1$:*

(**i**) *Para todos $P \in \mathcal{U}_{k+1}(E;F)$ e $a \in E$, P_a pertence a $\mathcal{U}_k(E;F)$ e*

$$\|P_a\|_{\mathcal{U}_k(E;F)} \leq \beta_3 \|P\|_{\mathcal{U}_{k+1}(E;F)} \|a\| .$$

(**ii**) *Para todos $P \in \mathcal{U}_k(E;F)$ e $\gamma \in E'$, γP pertence a $\mathcal{U}_{k+1}(E;F)$ e*

$$\|\gamma P\|_{\mathcal{U}_{k+1}(E;F)} \leq \beta_4 \|\gamma\| \|P\|_{\mathcal{U}_k(E;F)} .$$

O próximo resultado, que nos permite deduzir relações entre ideais de operadores a partir dos ideais de polinômios, foi provado por Carando, Dimant e Muro em [14] no ano de 2009. Este mesmo resultado aparece com uma terminologia diferente em [10].

Proposição 1.3.10 ([14], Proposição 1.6) (**a**) *Sejam $\mathcal{U}_n$ e $\mathcal{B}_n$ ideais normados de polinômios n-homogêneos compatíveis com $\mathcal{U}$ e $\mathcal{B}$ respectivamente. Se para alguns E e F, $\mathcal{U}_n(E;F) \subset \mathcal{B}_n(E;F)$, então $\mathcal{U}(E;F) \subset \mathcal{B}(E;F)$.*

(**b**) *Sejam $\{\mathcal{U}_k\}_k$ e $\{\mathcal{B}_k\}_k$ sequências coerentes. Se para alguns E e F e algum k_0, $\mathcal{U}_{k_0}(E;F) \subset \mathcal{B}_{k_0}(E;F)$, então $\mathcal{U}_k(E;F) \subset \mathcal{B}_k(E;F)$ para todo $k \leq k_0$.*

Os próximos dois resultados foram mostrados em [14] e são uma espécie de recíproca para as condições (**i**) e (**ii**) das definições 1.3.8 e 1.3.9.

Lema 1.3.11 ([14, Lema 1.4]) *Seja $\mathcal{U}_n$ um ideal normado de polinômios n-homogêneos contínuos compatível com $\mathcal{U}$ e seja $T \in \mathcal{L}(E;F)$. Então:*

(**a**) *$T \in \mathcal{U}(E;F)$ se, e somente se, $\gamma^{n-1}T$ pertence a $\mathcal{U}_n(E;F)$ para todo $\gamma \in E'$.*

(**b**) *$T \in \mathcal{U}(E;F)$ se, e somente se, existem $P \in \mathcal{U}_n(E;F)$ e $a \in E$ tais que $T = P_{a^{n-1}}$.*

Lema 1.3.12 ([14, Lema 1.5]) *Sejam $\{\mathcal{U}_k\}_k$ uma sequência coerente de ideais normados de polinômios homogêneos e $P \in \mathcal{P}^k(E;F)$. Então:*

(**a**) *$P \in \mathcal{U}_k(E;F)$ se, e somente se, γP pertence a $\mathcal{U}_{k+1}(E;F)$ para todo $\gamma \in E'$.*

(**b**) *$P \in \mathcal{U}_k(E;F)$ se, e somente se, existem $Q \in \mathcal{U}_{k+1}(E;F)$ e $a \in E$ tais que $P = Q_a$.*

O conceito de ideais compatíveis surge com o intuito de relacionar os ideais de polinômios com os ideais de operadores, enquanto que o conceito de ideais coerentes relaciona os ideais de polinômios de graus diferentes.

Os conceitos acima, de certa forma, remontam à ideia de tipos de holomorfia, devida a Leopoldo Nachbin:

Definição 1.3.13 (Tipo de Holomorfia [30]) *Sejam E e F espaços de Banach. Um tipo de holomorfia $\mathcal{P}_H$ entre E e F é uma classe de polinômios homogêneos entre E e F tal que para todo n natural, a componente*

$$\mathcal{P}_H(^nE;F) := \mathcal{P}(^nE;F) \cap \mathcal{P}_H$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^nE;F)$, que é um espaço de Banach quando munido com a norma $P \mapsto \|P\|_H$, e

(i) $\mathcal{P}_H(^0E;F) = F$, como um espaço vetorial normado,

(ii) Existe $\sigma \geq 1$ tal que para todos k, $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $a \in E$ e $P \in \mathcal{P}_H(^nE;F)$, $\hat{d}^kP(a) \in \mathcal{P}_H\left(^kE;F\right)$ e

$$\left\| \frac{1}{k!}\hat{d}^kP(a) \right\|_H \leq \sigma^n \|P\|_H \|a\|^{n-k},$$

onde $\hat{d}^kP(a)$ é a k-ésima derivada de P em a.

No contexto de ideais de polinômios, foi introduzida em [9] uma reformulação da definição acima. Para a definição de Nachbin [30], a noção de tipos de holomorfia baseava-se entre dois espaços de Banach E e F fixos, o que não é mais utilizado na nova abordagem.

Definição 1.3.14 (Tipo de Holomorfia Global [9]) *Um tipo de holomorfia global $\mathcal{P}_H$ é uma classe de polinômios homogêneos entre espaços de Banach tal que para todo n natural* *e quaisquer espaços de Banach E e F, a componente*

$$\mathcal{P}_H\left({}^nE;F\right) := \mathcal{P}\left({}^nE;F\right) \cap \mathcal{P}_H$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}\left({}^nE;F\right)$, que é um espaço de Banach quando munido com a norma $P \mapsto \|P\|_H$, e

(i) $\mathcal{P}_H\left({}^0E;F\right) = F$, como um espaço vetorial normado para todo E e F;

(ii) Existe $\sigma \geq 1$ tal que para todos espaço de Banach E e F, $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $a \in E$ e $P \in \mathcal{P}_H\left({}^nE;F\right)$, $\hat{d}^kP(a) \in \mathcal{P}_H\left({}^kE;F\right)$ e

$$\left\|\frac{1}{k!}\hat{d}^kP(a)\right\|_H \leq \sigma^n \|P\|_H \|a\|^{n-k},$$

onde $\hat{d}^kP(a)$ é a k-ésima derivada de P em a.

Observação 1.3.15 *Note que:*

(a) Se um ideal de polinômios possui a propriedade (**i**) *da Definição 1.3.8, então esse ideal é CSM.*

(b) Se um ideal de polinômios possui a propriedade (**ii**) *da Definição 1.3.9, então o ideal é CUD.*

(c) Se um ideal de polinômios possui a propriedade (**i**) *da Definição 1.3.9, então o ideal possui a propriedade (B).*

Além disso, sequências coerentes são sempre tipos de holomorfia global.

Foi provado em [9] que se um multi-ideal de Banach $\mathcal{M}$ tem a propriedade (B) com constante C, então o ideal de Banach $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ de polinômios é um tipo de holomorfia global com constante $\sigma = 2C$. Além disso, foi provado também que se $\mathcal{M}$ é um multi-ideal CSM, fechado e simétrico, então $\mathcal{M}$ tem a propriedade (B) (com constante $C = 1$) se, e somente se, $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ é um tipo de holomorfia global (com a melhor constante $\sigma \leq 2$). Além disso, foi provada em [9] uma série de resultados que relacionam tipos de holomorfia com a propriedade (B). São eles:

Proposição 1.3.16 ([9], Proposição 8.2) *Toda classe de polinômios homogêneos com a propriedade (B) com constante C tal que as componentes são espaços quasi-Banach é um tipo de quasi-holomorfia global (tipo de holomorfia global se as componentes são espaços de Banach) com constante $\sigma = 2C$.*

Proposição 1.3.17 ([9], Proposição 8.4) *Seja $\mathcal{Q}$ um ideal fechado de polinômios entre espaços de Banach complexos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\mathcal{Q}$ tem a propriedade (B) (com melhor constante $C = e$).

(b) $\mathcal{Q}$ é um tipo de holomorfia global (com melhor constante $\sigma \leq 2e$).

(c) Para todos n, E e F, $P_a \in \mathcal{Q}\left({}^{n-1}E; F\right)$ sempre que $P \in \mathcal{Q}\left({}^{n}E; F\right)$ e $a \in E$.

Proposição 1.3.18 ([9], Proposição 8.5) *Todo ideal fechado de polinômios entre espaços de Banach reais não possui a propriedade (B).*

Sabemos que dado um ideal linear, sempre é possível estendê-lo a um multi-ideal, pelo menos num sentido abstrato (para detalhes, veja [7]). Contudo, a construção adequada de uma extensão multilinear e polinomial inspira alguns cuidados, uma vez que existe uma preocupação natural de se indicar com precisão quando um dado ideal multilinear/polinomial é uma boa generalização do ideal linear. Essa preocupação basicamente se resume na seguinte questão: dados inteiros positivos n_1 e n_2, os respectivos níveis de n_1-linearidade e n_2-linearidade necessitam ter alguma interconexão e obviamente uma forte relação com o nível original ($n = 1$).

Nessa direção, têm sido desenvolvidos diversos trabalhos (veja por exemplo [9, 10, 14]), tendo sido criados os conceitos de ideais CUD, CSM, ideais coerentes/compatíveis e tipos de holomorfia globais que foram apresentados nessa seção.

Não há dúvidas que os conceitos de ideais de polinômios coerentes e compatíveis têm uma importante contribuição na teoria de ideais de polinômios. No entanto, como um ideal de operadores $\mathcal{I}$ pode ser sempre estendido a um multi-ideal e a um ideal de polinômios, concluímos que não há razões aparentes para se considerar os conceitos de compatibilidade e coerência apenas para polinômios (ou apenas para aplicações multilineares separadamente). Nesse sentido, apresentaremos no próximo capítulo uma proposta que oferece significantes variações dessas noções, considerando os pares $(\mathcal{U}_k, \mathcal{M}_k)_{k=1}^{\infty}$, onde $(\mathcal{U}_k)_{k=1}^{\infty}$ é um ideal de polinômios e $(\mathcal{M}_k)_{k=1}^{\infty}$ é um multi-ideal. Logo, esta nova abordagem trata simultaneamente de polinômios e operadores multilineares e, é claro, exige alguma harmonia entre $(\mathcal{U}_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(\mathcal{M}_k)_{k=1}^{\infty}$.

É muito importante destacar que, como enunciamos na Proposição 1.3.18, para o caso do corpo dos números reais, a sequência canônica $(\mathcal{P}_k)_{k=1}^{\infty}$, composta pelos ideais dos polinômios k-homogêneos contínuos com a norma do sup, não é coerente de acordo com a Definição 1.3.9 (esta observação aparece no artigo original [14] e é baseada em estimativas para as normas de certos polinômios homogêneos usados em [9, Proposição 8.5]). Este resultado parece ser desconfortável, uma vez que a sequência canônica $(\mathcal{P}_k)_{k=1}^{\infty}$ deveria ser um protótipo da essência da coerência. Usando a abordagem que será introduzida no próximo capítulo, será possível provar que o par $(\mathcal{P}_k, \mathcal{L}_k)_{k=1}^{\infty}$, composto por ideais de polinômios k-homogêneos contínuos e os operadores k-lineares contínuos com a norma do sup, é coerente e compatível com o ideal dos operadores lineares contínuos.

Capítulo 2

Coerência e Compatibilidade: uma nova abordagem

No presente capítulo oferecemos ao leitor uma nova abordagem para as noções de coerência e compatibilidade, considerando pares de ideais, compostos por ideais de polinômios e ideais de aplicações multilineares.

Segundo a nossa definição de coerência e compatibilidade, coerência não necessariamente implica em compatibilidade; além disso eliminamos um importante inconveniente que aparece no trabalho original: a sequência canônica dos polinômios contínuos não era coerente quando considerada sobre o corpo dos números reais.

Além disso, mostramos, através de exemplos concretos, que nossa nova abordagem parece exigir uma harmonia adequada entre os polinômios a as aplicações multilineares pertencentes aos pares de ideais.

No final do capítulo apresentamos uma versão mais forte da noção de coerência e compatibilidade, além de um exemplo onde fica claro que a nossa nova definição de coerência e compatibilidade em pares, além de selecionar os bons pares de extensões, elimina possíveis construções artificiais.

2.1 Coerência e compatibilidade para pares de ideais

De agora em diante $(\mathcal{U}_k, \mathcal{M}_k)_{k=1}^N$ é uma N-upla de pares, onde cada $\mathcal{U}_k$ é um ideal (quasi-) normado de polinômios k-homogêneos e cada $\mathcal{M}_k$ é um ideal (quasi-) normado de aplicações k-lineares. O parâmetro N pode ser eventualmente infinito. Motivado pelo argumento de que as noções de compatibilidade e coerência devem ser definidas simultaneamente para polinômios e aplicações multilineares, propomos a seguinte definição:

Definição 2.1.1 (Par de ideais compatíveis) *Sejam $\mathcal{U}$ um ideal normado de operadores e $N \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup \{\infty\}$. Uma sequência $(\mathcal{U}_n, \mathcal{M}_n)_{n=1}^N$, onde $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{U}$, é compatível com $\mathcal{U}$ se existem constantes positivas α_1, α_2, α_3 e α_4 tais que para quaisquer espaços de Banach $E, E_1, \ldots, E_k$ e F, as seguintes condições são verdadeiras para todo $n \in \{2, \ldots, N\}$:*

$(CP1)$ Se $k \in \{1, \ldots, n\}$, $T \in \mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $a_j \in E_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$, então

$$T_{a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_n} \in \mathcal{U}(E_k; F)$$

e

$$\left\|T_{a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_n}\right\|_{\mathcal{U}} \leq \alpha_1 \|T\|_{\mathcal{M}_n} \|a_1\| \ldots \|a_{k-1}\| \|a_{k+1}\| \ldots \|a_n\| .$$

$(CP2)$ Se $P \in \mathcal{U}_n({}^nE; F)$ e $a \in E$, então $P_{a^{n-1}} \in \mathcal{U}(E; F)$ e

$$\|P_{a^{n-1}}\|_{\mathcal{U}} \leq \alpha_2 \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{M}_n} \|a\|^{n-1} .$$

$(CP3)$ Se $u \in \mathcal{U}(E_n; F)$ e $\gamma_j \in E_j'$ para todo $j = 1, \ldots, n-1$, então

$$\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1} u \in \mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$$

e

$$\|\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1} u\|_{\mathcal{M}_n} \leq \alpha_3 \|\gamma_1\| \cdots \|\gamma_{n-1}\| \|u\|_{\mathcal{U}} .$$

$(CP4)$ *Se* $u \in \mathcal{U}(E;F)$, $\gamma \in E'$, *então* $\gamma^{n-1}u \in \mathcal{U}_n(^nE;F)$ *e*

$$\left\|\gamma^{n-1}u\right\|_{\mathcal{U}_n} \leq \alpha_4 \left\|\gamma\right\|^{n-1} \left\|u\right\|_{\mathcal{U}}.$$

$(CP5)$ P *pertence a* $\mathcal{U}_n(^nE;F)$ *se, e somente se,* $\overset{\vee}{P}$ *pertence a* $\mathcal{M}_n(^nE;F)$.

Definição 2.1.2 (Par de ideais coerentes) *Sejam* $\mathcal{U}$ *um ideal normado de operadores e* $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. *Uma sequência* $(\mathcal{U}_k, \mathcal{M}_k)_{k=1}^N$, *onde* $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{U}$, *é coerente se existem constantes positivas* β_1, β_2, β_3 *e* β_4 *tais que para quaisquer espaços de Banach* $E_1, \ldots, E_n$ *e* F *as seguintes condições são satisfeitas para* $k = 1, \ldots, N-1$:

$(CH1)$ *Se* $T \in \mathcal{M}_{k+1}(E_1, \ldots, E_{k+1}; F)$ *e* $a_j \in E_j$ *para* $j = 1, \ldots, k+1$, *então*

$$T_{a_j} \in \mathcal{M}_k(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_{k+1}; F)$$

e

$$\left\|T_{a_j}\right\|_{\mathcal{M}_k} \leq \beta_1 \left\|T\right\|_{\mathcal{M}_{k+1}} \left\|a_j\right\|.$$

$(CH2)$ *Se* $P \in \mathcal{U}_{k+1}\left(^{k+1}E;F\right)$ *e* $a \in E$, *então* $P_a \in \mathcal{U}_k\left(^kE;F\right)$ *e*

$$\left\|P_a\right\|_{\mathcal{U}_k} \leq \beta_2 \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{M}_{k+1}} \left\|a\right\|.$$

$(CH3)$ *Se* $T \in \mathcal{M}_k(E_1, \ldots, E_k; F)$ *e* $\gamma \in E'_{k+1}$, *então* $\gamma T \in \mathcal{M}_{k+1}(E_1, \ldots, E_{k+1}; F)$ *e*

$$\left\|\gamma T\right\|_{\mathcal{M}_{k+1}} \leq \beta_3 \left\|\gamma\right\| \left\|T\right\|_{\mathcal{M}_k}.$$

$(CH4)$ *Se* $P \in \mathcal{U}_k\left(^kE;F\right)$ *e* $\gamma \in E'$, *então* $\gamma P \in \mathcal{U}_{k+1}\left(^{k+1}E;F\right)$ *e*

$$\left\|\gamma P\right\|_{\mathcal{U}_{k+1}} \leq \beta_4 \left\|\gamma\right\| \left\|P\right\|_{\mathcal{U}_k}.$$

$(CH5)$ *Para cada* $k = 1, \ldots, N$, P *pertence a* $\mathcal{U}_k\left(^kE;F\right)$ *se, e somente se,* $\overset{\vee}{P}$ *pertence* *a* $\mathcal{M}_k\left({}^kE;F\right)$.

Observação 2.1.3 *Somos gratos às valiosas sugestões do Professor Geraldo Botelho, durante a confecção dos axiomas de par de ideais compatíveis e coerentes aqui apresentados.*

Observação 2.1.4 *Note que a Definição 2.1.1 é bastante diferente do conceito de compatibilidade introduzido por Carando et al. Por exemplo, a nossa abordagem exige constantes* α_1, α_2, α_3 *e* α_4 *universais (que não dependem de* n*). É também importante mencionar que uma sequência coerente* $(\mathcal{U}_k,\mathcal{M}_k)_{k=1}^N$ *não é necessariamente compatível com* $\mathcal{U}_1$*. Se* $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=1$*, então a coerência de uma sequência* $(\mathcal{U}_k,\mathcal{M}_k)_{k=1}^N$ *implica facilmente na compatibilidade com* $\mathcal{U}_1$*, como veremos na próxima proposição.*

Antes de enunciar tal resultado, provaremos um lema que será usado na demonstração.

Lema 2.1.5 *Se* $P\in\mathcal{P}\left({}^nE;F\right)$ *e* $a\in E$*, então* $\left(P_a\right)^\vee=\overset{\vee}{P}_a$.

Demonstração: Se $P,\ Q\in\mathcal{P}\left({}^nE;F\right)$ e $\overset{\vee}{P}(x,\ldots,x)=\overset{\vee}{Q}(x,\ldots,x)$ para todo $x\in E$, então $\overset{\vee}{P}=\overset{\vee}{Q}$. De fato, pela fórmula de polarização temos

$$\begin{aligned}\overset{\vee}{P}(x_1,\ldots,x_n)&=\frac{1}{2^nn!}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_nP\left(\sum_{\varepsilon_i=1}^n\varepsilon_ix_i\right)=\frac{1}{2^nn!}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_nQ\left(\sum_{\varepsilon_i=1}^n\varepsilon_ix_i\right)\\&=\overset{\vee}{Q}(x_1,\ldots,x_n).\end{aligned}$$

Assim, para concluir a demonstração, é suficiente observar que

$$\left(P_a\right)^\vee(x,\ldots,x)=P_a(x)=\overset{\vee}{P}(a,x,\ldots,x)=\overset{\vee}{P}_a(x,\ldots,x).$$

■

Proposição 2.1.6 *Se* $(\mathcal{U}_n, \mathcal{M}_n)_{n=1}^N$ *é coerente, com constantes* $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1$*, então é compatível com o ideal* $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{U}$*.*

Demonstração: Seja $T \in \mathcal{M}_n(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então por (CH1) temos que

$$T_{a_1} \in \mathcal{M}_{n-1}(E_2, \ldots, E_n; F)$$

e

$$\|T_{a_1}\|_{\mathcal{M}_{n-1}} \leq \|T\|_{\mathcal{M}_n} \|a_1\|.$$

Novamente, por (CH1), obtemos

$$\|T_{a_1 a_2}\|_{\mathcal{M}_{n-2}} \leq \|T_{a_1}\|_{\mathcal{M}_{n-1}} \|a_2\| \leq \|T\|_{\mathcal{M}_n} \|a_1\| \|a_2\|.$$

Dessa forma, a propriedade (CP1) pode ser obtida através de uma repetição desse argumento.

Para obtermos a propriedade (CP2), consideremos $P \in \mathcal{U}_n({}^nE; F)$ e $a \in E$. Assim, pela propriedade (CH2), $P_a \in \mathcal{U}_{n-1}({}^{n-1}E; F)$ e

$$\|P_a\|_{\mathcal{U}_{n-1}} \leq \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{M}_n} \|a\|.$$

Procedendo de igual modo, temos que

$$\begin{aligned}
\|P_{a^2}\|_{\mathcal{U}_{n-2}} &= \|(P_a)_a\|_{\mathcal{U}_{n-2}} \\
&\leq \left\|(P_a)^{\vee}\right\|_{\mathcal{M}_{n-1}} \|a\| \\
&\overset{2.1.5}{=} \left\|\overset{\vee}{P}_a\right\|_{\mathcal{M}_{n-1}} \|a\| \\
&\overset{(CP1)}{\leq} \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{M}_n} \|a\|^2.
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
\|P_{a^3}\|_{\mathcal{U}_{n-3}} &= \|(P_{a^2})_a\|_{\mathcal{U}_{n-3}} \\
&\leq \left\|(P_{a^2})^{\vee}\right\|_{\mathcal{M}_{n-2}} \|a\| \\
&= \left\|\overset{\vee}{P}_{a^2}\right\|_{\mathcal{M}_{n-2}} \|a\| \\
&\overset{(CP1)}{\leq} \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{M}_n} \|a\|^3 .
\end{aligned}$$

Prosseguindo dessa maneira, concluímos que

$$\|P_{a^{n-1}}\|_{\mathcal{U}} \leq \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{M}_n} \|a\|^{n-1} .$$

Agora, considere $u \in \mathcal{U}(E_n; F)$ e $\gamma_j \in E_j$ para todo $j = 1, \ldots, n-1$. Assim, por (CH3),

$$\gamma_1 u \in \mathcal{M}_2(E_1, E_n; F)$$

e

$$\|\gamma_1 u\|_{\mathcal{M}_2} \leq \|\gamma_1\| \|u\|_{\mathcal{U}} .$$

Analogamente,

$$\|\gamma_1\gamma_2 u\|_{\mathcal{M}_3} \leq \|\gamma_2\| \|\gamma_1 u\|_{\mathcal{M}_2} \leq \|\gamma_1\| \|\gamma_2\| \|u\|_{\mathcal{U}} .$$

Dessa forma, podemos concluir que (CP3) é válida, iterando esse procedimento $(n-1)$-vezes.

Com um argumento semelhante, mostramos (CP4) utilizando a propriedade (CH4). ■

Como mencionado no capítulo anterior, a sequência $(\mathcal{P}_k)_{k=1}^{\infty}$, no caso real, não é coerente segundo a definição original, devida a Carando, Dimant e Muro. O próximo teorema (Teorema 2.1.12), cuja demonstração é uma consequência imediata dos próximos lemas, mostra que a situação é diferente de acordo com a nova abordagem.

Lema 2.1.7 *Para cada $P \in \mathcal{P}_{k+1}\left({}^{k+1}E;F\right)$ e $a \in E$, P_a pertence a $\mathcal{P}_k\left({}^{k}E;F\right)$ e*

$$\|P_a\|_{\mathcal{P}_k} \leq \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{L}_{k+1}} \|a\| . \tag{2.1}$$

Demonstração: Por definição, temos

$$\|P_a(x)\| = \left\|\overset{\vee}{P}(a,x,\ldots,x)\right\| \leq \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{L}_{k+1}} \|a\| \|x\|^n$$

de onde segue imediatamente (2.1). ■

Lema 2.1.8 *Seja $j \in \{1,\ldots,k+1\}$. Se $T \in \mathcal{L}_{k+1}(E_1,\ldots,E_{k+1};F)$ e $a_j \in E_j$, então T_{a_j} pertence a $\mathcal{L}_k(E_1,\ldots,E_{j-1},E_{j+1},\ldots,E_{k+1};F)$ e*

$$\left\|T_{a_j}\right\|_{\mathcal{L}_k} \leq \|T\|_{\mathcal{L}_{k+1}} \|a_j\| . \tag{2.2}$$

Demonstração: Note que (2.2) é uma consequência imediata da seguinte observação:

$$\begin{aligned}\left\|T_{a_j}(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_{k+1})\right\| &= \|T(x_1,\ldots,x_{j-1},a_j,x_{j+1},\ldots,x_{k+1})\| \\ &\leq \|T\| \|a_j\| \|x_1\| \ldots \|x_{j-1}\| \|x_{j+1}\| \ldots \|x_{k+1}\| .\end{aligned}$$

■

Lema 2.1.9 *Se $P \in \mathcal{P}_k\left({}^{k}E;F\right)$ e $\gamma \in E'$, então γP pertence a $\mathcal{P}_{k+1}\left({}^{k+1}E;F\right)$ e*

$$\|\gamma P\|_{\mathcal{P}_{k+1}} \leq \|\gamma\| \|P\|_{\mathcal{P}_k} . \tag{2.3}$$

Demonstração: Observe também que a equação (2.3) é imediata a partir da simples desigualdade

$$\|\gamma(x) P(x)\| = |\gamma(x)| \|P(x)\| \leq \|\gamma\| \|x\| \|P\| \|x\|^k = \|\gamma\| \|P\| \|x\|^{k+1} .$$

■

Lema 2.1.10 *Se* $T \in \mathcal{L}_k(E_1, ..., E_k; F)$ *e* $\gamma \in E'_{k+1}$, *então* γT *pertence a* $\mathcal{L}_{k+1}(E_1, ..., E_{k+1}; F)$ *e*

$$\|\gamma T\|_{\mathcal{L}_{k+1}} \leq \|\gamma\| \, \|T\|_{\mathcal{L}_k}.$$

Demonstração: O resultado segue de

$$\begin{aligned} \|\gamma(x_{k+1}) T(x_1, \ldots, x_k)\| &\leq \|\gamma\| \, \|x_{k+1}\| \, \|T\|_{\mathcal{L}_k} \|x_1\| \ldots \|x_k\| \\ &= \|\gamma\| \, \|T\|_{\mathcal{L}_k} \|x_1\| \ldots \|x_k\| \, \|x_{k+1}\|. \end{aligned}$$

■

O próximo resultado é uma consequência imediata da Fórmula de Polarização.

Lema 2.1.11 *Seja* P *um polinômio algébrico.* P *pertence a* $\mathcal{P}_k\left({}^kE; F\right)$ *se, e somente se,* $\overset{\vee}{P}$ *pertence a* $\mathcal{L}_k\left({}^kE; F\right)$.

Segue da sequência de lemas acima, e da Proposição 2.1.6 o seguinte resultado:

Teorema 2.1.12 *O par* $(\mathcal{P}_k, \mathcal{L}_k)_{k=1}^{\infty}$ *(composto pelos ideais de polinômios* k*-homogêneos contínuos e operadores* k*-lineares contínuos, com a norma do sup) é coerente e compatível com o ideal dos operadores lineares contínuos.*

2.2 O método da fatoração

O método da fatoração é uma conhecida maneira abstrata de extensão de um ideal de operadores para ideais de polinômios e de aplicações multilineares. Nesta seção mostraremos que uma sequência de pares obtidos por esse método é coerente e compatível com o ideal original.

Dado um ideal completo de operadores $\mathcal{I}$, uma aplicação n-linear $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é do tipo $\mathcal{L}(^n\mathcal{I})$ se existem espaços de Banach $G_1, \ldots, G_n$, operadores lineares $u_j \in \mathcal{I}(E_j; G_j)$, $j = 1, \ldots, n$ e $B \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$ tais que

$$A = B \circ (u_1, \ldots, u_n). \tag{2.4}$$

Neste caso, escrevemos

$$A \in \mathcal{L}(^n\mathcal{I})(E_1, \ldots, E_n; F),$$

e definimos

$$\|A\|_{\mathcal{L}(^n\mathcal{I})} = \inf \|B\| \, \|u_1\|_{\mathcal{I}} \cdots \|u_n\|_{\mathcal{I}},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as possíveis fatorações da forma de (2.4).

Para todo n, $\mathcal{L}(^n\mathcal{I})$ é um ideal completo $\frac{1}{n}$-normado de aplicações n-lineares; consequentemente $(\mathcal{L}(^n\mathcal{I}))_{n=1}^{\infty}$ é um multi-ideal quasi-Banach e $\left(\mathcal{P}^n_{\mathcal{L}(^n\mathcal{I})}\right)_{n=1}^{\infty}$, construído como na Definição 1.3.4, é um ideal de polinômios quasi-Banach.

A demonstração de que o par $\left(\mathcal{P}^n_{\mathcal{L}(^n\mathcal{I})}, \mathcal{L}(^n\mathcal{I})\right)_{n=1}^{\infty}$ é coerente e compatível com o ideal $\mathcal{I}$ será uma consequência imediata dos próximos resultados.

Lema 2.2.1 *Se $P \in \mathcal{P}^{n+1}_{\mathcal{L}(^{n+1}\mathcal{I})}(^{n+1}E; F)$ e $a \in E$, então P_a pertence a $\mathcal{P}^n_{\mathcal{L}(^n\mathcal{I})}(^nE; F)$ e*

$$\|P_a\|_{\mathcal{P}^n_{\mathcal{L}(^n\mathcal{I})}} \leq \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{L}(^{n+1}\mathcal{I})} \|a\|.$$

Demonstração: Segue da definição que existem espaços de Banach $G_1, ..., G_{n+1}$, operadores lineares $u_j \in \mathcal{I}_j(E; G_j)$, $j = 1, \ldots, n+1$, e uma aplicação multilinear $B \in$

$\mathcal{L}(G_1, ..., G_{n+1}; F)$ tais que

$$\overset{\vee}{P}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = B(u_1(x_1), \ldots, u_{n+1}(x_{n+1})). \tag{2.5}$$

Logo

$$\begin{aligned}(P_a)^{\vee}(x_1, ..., x_n) &= \overset{\vee}{P}(x_1, \ldots, x_n, a) = B(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n), u_{n+1}(a)) \\ &= B_{u_{n+1}(a)}(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)).\end{aligned}$$

Portanto, como $\|u_{n+1}\| \leq \|u_{n+1}\|_{\mathcal{I}}$ (veja [17, página 131]), temos

$$\|P_a\|_{\mathcal{P}^n_{\mathcal{L}(^n\mathcal{I})}} = \left\|(P_a)^{\vee}\right\|_{\mathcal{L}(^n\mathcal{I})} \leq \left\|B_{u_{n+1}(a)}\right\| \prod_{j=1}^{n} \|u_j\|_{\mathcal{I}} \leq \|a\| \, \|B\| \prod_{j=1}^{n+1} \|u_j\|_{\mathcal{I}}.$$

para toda representação (2.5) e a demonstração é completada quando se considera o ínfimo sobre todas essas representações. ■

O próximo resultado é inspirado em [14, Proposição 3.1]:

Lema 2.2.2 *Se $P \in \mathcal{P}^n_{\mathcal{L}(^n\mathcal{I})}(^nE; F)$ e $\gamma \in E'$, então $\gamma P \in \mathcal{P}^{n+1}_{\mathcal{L}(^{n+1}\mathcal{I})}(^{n+1}E; F)$ e*

$$\|\gamma P\|_{\mathcal{P}^{n+1}_{\mathcal{L}(^{n+1}\mathcal{I})}} \leq \|\gamma\| \, \|P\|_{\mathcal{L}(^n\mathcal{I})}.$$

Demonstração: Podemos supor $\|\gamma\| = 1$. Dessa forma, existem espaços de Banach $G_1, \ldots, G_n$, uma aplicação multilinear $B \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$, e operadores lineares $u_j \in \mathcal{I}(E; G_j)$, $j = 1, \ldots, n$, tais que

$$\overset{\vee}{P} = B \circ (u_1, \ldots, u_n).$$

Agora, considere a aplicação $\tilde{B} \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n, \mathbb{K}; F)$ definida por

$$\tilde{B}(y_1, \ldots, y_n, \gamma(x)) = \gamma(x) B(y_1, \ldots, y_n).$$

Observe que $\tilde{B}$ está bem definida, e que

$$\begin{aligned}\tilde{B}\left(u_1\left(x_1\right),\ldots,u_n\left(x_n\right),\gamma\left(x_{n+1}\right)\right) &= \gamma\left(x_{n+1}\right)B\left(u_1\left(x_1\right),\ldots,u_n\left(x_n\right)\right)\\ &= \gamma\left(x_{n+1}\right)\overset{\vee}{P}\left(x_1,\ldots,x_n\right).\end{aligned}$$

Assim,

$$\gamma\overset{\vee}{P}\in\mathcal{L}\left({}^{n+1}\mathcal{I}\right)\left({}^{n+1}E;F\right).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{B}\right\| &= \sup_{\substack{\|y_j\|=1,\ j=1,\ldots,n\\ |\gamma(x)|=1}}\left\|\tilde{B}\left(y_1,\ldots,y_n,\gamma\left(x\right)\right)\right\|\\ &= \sup_{\substack{\|y_j\|=1,\ j=1,\ldots,n\\ |\gamma(x)|=1}}\left\|\gamma\left(x\right)B\left(y_1,\ldots,y_n\right)\right\|\\ &= \sup_{\left\|y_j\right\|=1,\ j=1,\ldots,n}\left\|B\left(y_1,\ldots,y_n\right)\right\|=\left\|B\right\|.\end{aligned}$$

Note ainda que o mesmo ocorre ao definirmos $\tilde{B}$ colocando γ em outras entradas. Dessa forma,

$$\left(\gamma P\right)^{\vee}\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right)=\frac{\gamma\left(x_1\right)\overset{\vee}{P}\left(x_2,\ldots,x_{n+1}\right)+\cdots+\gamma\left(x_{n+1}\right)\overset{\vee}{P}\left(x_1,\ldots,x_n\right)}{n+1},$$

temos que

$$\left\|\gamma P\right\|_{\mathcal{P}^{n+1}_{\mathcal{L}\left({}^{n+1}\mathcal{I}\right)}}=\left\|\left(\gamma P\right)^{\vee}\right\|_{\mathcal{L}\left({}^{n+1}\mathcal{I}\right)}\leq\frac{1}{n+1}\left(\left(n+1\right)\left\|\gamma\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{L}\left({}^{n+1}\mathcal{I}\right)}\right)\leq\left\|B\right\|\prod_{j=1}^{n}\left\|u_j\right\|_{\mathcal{I}}.$$

O resultado segue tomando o ínfimo sobre todas as representações de $\overset{\vee}{P}$. ■

Lema 2.2.3 *Seja* $k \in \{1, \ldots, n+1\}$. *Se* $T \in \mathcal{L}\left({}^{n+1}\mathcal{I}\right)(E_1, ..., E_{n+1}; F)$ *e* $a_k \in E_k$, *então*

$$T_{a_k} \in \mathcal{L}\left({}^{n}\mathcal{I}\right)(E_1, \ldots, E_{k-1}, E_{k+1}, \ldots, E_{n+1}; F)$$

e

$$\|T_{a_k}\|_{\mathcal{L}({}^n\mathcal{I})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}({}^{n+1}\mathcal{I})} \|a_k\|.$$

Demonstração: Existem espaços de Banach $G_1, \ldots, G_{n+1}$, operadores lineares $u_j \in \mathcal{I}(E_j; G_j)$, $j = 1, \ldots, n+1$, e $B \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_{n+1}; F)$ tais que

$$T(x_1, \ldots, x_{n+1}) = B(u_1(x_1), \ldots, u_{n+1}(x_{n+1})).$$

Assim,

$$\begin{aligned} & T_{a_k}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_{n+1}) \\ & = B_{u_k(a_k)}(u_1(x_1), \ldots, u_{k-1}(x_{k-1}), u_{k+1}(x_{k+1}), \ldots, u_{n+1}(x_{n+1})) \end{aligned}$$

e a demonstração pode ser concluída seguindo a linha da demonstração da Proposição 2.2.2.
■

Lema 2.2.4 *Se* $T \in \mathcal{L}\left({}^{n}\mathcal{I}\right)(E_1, \ldots, E_n; F)$ *e* $\gamma \in E'_{n+1}$, *então*

$$\gamma T \in \mathcal{L}\left({}^{n+1}\mathcal{I}\right)(E_1, ..., E_{n+1}; F) \text{ e } \|\gamma T\|_{\mathcal{L}({}^{n+1}\mathcal{I})} \leq \|\gamma\| \|T\|_{\mathcal{L}({}^n\mathcal{I})}.$$

Demonstração: Como $T \in \mathcal{L}\left({}^{n}\mathcal{I}\right)(E_1, ..., E_n; F)$, existem espaços de Banach $G_1, \ldots, G_n$, operadores lineares $u_j \in \mathcal{I}(E_j; G_j)$, $j = 1, \ldots, n$, e uma aplicação multilinear $B \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; F)$ tais que

$$T(x_1, \ldots, x_n) = B(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)).$$

Se definimos a aplicação $\tilde{B} \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n, \mathbb{K}; F)$ dada por

$$\tilde{B}(y_1, \ldots, y_n, \gamma(x)) = \gamma(x) B(y_1, \ldots, y_n),$$

torna-se fácil de ver que $\tilde{B}$ é bem definida e que

$$\begin{aligned}\tilde{B}(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n), \gamma(x_{n+1})) &= \gamma(x_{n+1}) B(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)) \\ &= \gamma(x_{n+1}) T(x_1, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Como $\gamma \in \mathcal{I}(E_{n+1}; \mathbb{K})$, concluímos que

$$\gamma T \in \mathcal{L}\left({}^{n+1}\mathcal{I}\right)(E_1, \ldots, E_{n+1}; F).$$

Para a desigualdade da norma, vamos considerar $\gamma \neq 0$ (se $\gamma = 0$ o resultado é imediato). Se fizermos $\|\gamma\| = 1$, obtemos

$$\left\|\tilde{B}\right\| = \|B\|$$

e que

$$\|\gamma T\| \leq \|B\| \|u_1\|_{\mathcal{I}} \ldots \|u_n\|_{\mathcal{I}}.$$

O resultado segue tomando o ínfimo sobre todas as representações de T. ■

A demonstração do próximo teorema é uma consequência imediata das Proposições 2.2.1 - 2.2.4 e a Proposição 2.1.6.

Teorema 2.2.5 *A sequência* $\left(\left(\mathcal{P}^n_{\mathcal{L}({}^n\mathcal{I})}, \|.\|_{\mathcal{P}^n_{\mathcal{L}({}^n\mathcal{I})}}\right), \left(\mathcal{L}({}^n\mathcal{I}), \|.\|_{\mathcal{L}({}^n\mathcal{I})}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ *é coerente e compatível com o ideal* $\mathcal{I}$.

2.3 Operadores lineares absolutamente somantes e quase somantes

Para $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial de todas as sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E tais que

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{1/p} < \infty$$

será denotado por de $\ell_p(E)$. Tais sequências são chamadas de *absolutamente p-somáveis.* Denotaremos por $\ell_p^w(E)$ o espaço vetorial formado pelas sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E tais que $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(\mathbb{K})$ para todo funcional linear contínuo $\varphi : E \to \mathbb{K}$. Estas sequências são denominadas *fracamente p-somáveis.* Também definimos a norma $\|\cdot\|_{w,p}$ em $\ell_p^w(E)$ por

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p\right)^{1/p}.$$

O subespaço vetorial de $\ell_p^w(E)$ constituído por todas as sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ tais que

$$\lim_{m\to\infty} \left\|(x_j)_{j=m}^{\infty}\right\|_{w,p} = 0$$

será denotado por $\ell_p^u(E)$. As sequências em $\ell_p^u(E)$ são chamadas de *incondicionalmente p-somáveis.*

A notação $Rad_p(F)$ denota o espaço vetorial formado pelas sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{n} r_j(\cdot)x_j$$

converge em $L_p([0,1], F)$, $0 < p < \infty$. O limite é denotado por $\sum_{j=1}^{\infty} r_j(\cdot)x_j$ e as funções $r_j(t)$ são as *funções de Rademacher* que são definidas do intervalo $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ por

$$r_j(t) := sign(\sin 2^n \pi t)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

O proximo resultado é trivial. Nós destacamos como lema apenas para facilitar referências posteriores.

Lema 2.3.1 *Se* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Rad_p(F)$, *então*

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\, x_j \right\|^p dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, x_j \right\|^p dt.$$

Demonstração: Como $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Rad_p(F)$, então $\sum\limits_{j=1}^{n} r_j(\cdot)\, x_j$ converge para $\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j(\cdot)\, x_j$ em $L_p([0,1],F)$. Isto implica que

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{m} r_j(\cdot)\, x_j \right\|_p = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(\cdot)\, x_j \right\|_p,$$

donde temos o resultado. ■

Teorema 2.3.2 (Desigualdade de Kahane I) *Se* $0 < p,q < \infty$, *então existe uma constante* $K_{p,q} > 0$ *tal que*

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{k\le n} r_k(t)\, x_k \right\|^q dt \right)^{1/q} \le K_{p,q} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k\le n} r_k(t)\, x_k \right\|^p dt \right)^{1/p} \tag{2.6}$$

para todo espaço de Banach E *e qualquer quantidade finita de vetores* $x_1, \ldots, x_n$ *em* E.

Este teorema se encontra em [17, Teorema 11.1].

A seguinte variação do Teorema 2.3.2 será útil:

Teorema 2.3.3 (Desigualdade de Kahane II) *Sejam* $0 < p,q < \infty$, *e suponha que a sequência*

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Rad_p(E).$$

Então

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Rad_q(E).$$

Além disso, existe uma constante $K_{p,q}$ onde a desigualdade abaixo é verdadeira.

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\, x_j\right\|^q dt\right)^{1/q} \leq K_{p,q} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\, x_j\right\|^p dt\right)^{1/p}$$

Demonstração: Mostraremos inicialmente que

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, x_j$$

converge em $L_q([0,1], E)$.

De fato, note que

$$\begin{aligned}
\|S_m - S_n\|_{L_q} &= \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=n+1}^{m} r_j(t)\, x_j\right\|^q dt\right)^{1/q} \\
&\overset{(2.6)}{\leq} K_{p,q} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=n+1}^{m} r_j(t)\, x_j\right\|^p dt\right)^{1/p} \\
&= K_{p,q} \|S_m - S_n\|_{L_p}.
\end{aligned}$$

Como $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é Cauchy em $L_p([0,1], E)$, segue que $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é Cauchy em $L_q([0,1], E)$ e, portanto, $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ converge em $L_q([0,1], E)$.

Passando o limite e utilizando o Lema 2.3.1, obtemos

$$\begin{gathered}
\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, x_j\right\|^q dt\right)^{1/q} \leq K_{p,q} \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, x_j\right\|^p dt\right)^{1/p} \\
\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\, x_j\right\|^q dt\right)^{1/q} \leq K_{p,q} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\, x_j\right\|^p dt\right)^{1/p}.
\end{gathered}$$

■

Este resultado nos garante que, se uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Rad_p(E)$ para um dado $0 < p < \infty$, então $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Rad_q(E)$ para todo $0 < q < \infty$. Motivado por esse resultado, faremos a seguinte definição:

Definição 2.3.4 *O espaço vetorial formado pelas sequências* $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ *tais que a soma*

$$\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, x_j$$

é convergente em E *para quase todo* $t \in [0,1]$ *(ou equivalentemente*

$$\sum_{j=1}^{n} r_j(\cdot)\, x_j$$

converge em $L_p([0,1], E)$ *para algum e, portanto, todo* $0 < p < \infty$ *[17, Teorema 12.3]) será denotado por* $Rad(E)$*.*

O espaço $Rad(E)$ é completo, e portanto Banach, se for munido com a norma

$$\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{Rad(X)} := \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\, x_j \right\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Neste caso, graças à desigualdade de Kahane, a convergência em $L_2([0,1], E)$ pode ser trocada por $L_p([0,1], E)$ onde $1 \leq p < \infty$. Os elementos em $Rad(E)$ são chamados de sequências quase incondicionalmente somáveis. Ainda de acordo com a nova definição, temos facilmente o seguinte lema:

Lema 2.3.5 *Se* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F)$*, então*

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\, x_j \right\|^2 dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, x_j \right\|^2 dt.$$

Agora, estamos aptos para mais algumas definições:

Definição 2.3.6 *Sejam $1 \leq p,q < \infty$ e $u : E \to F$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que u é absolutamente (p,q)-somante se existir um operador induzido $\hat{u} : \ell_q^w(E) \to \ell_p(F)$ definido por*

$$\hat{u}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) = (u(x_j))_{j=1}^{\infty}.$$

Denotamos por $\prod_{p,q}(E;F)$ o conjunto formado pelos operadores lineares absolutamente (p,q)-somantes de E em F.

O próximo resultado caracteriza tais aplicações:

Proposição 2.3.7 *[3, Proposição 3.1.4] Seja $u \in \mathcal{L}(E;F)$. São equivalentes:*

(i) u é absolutamente (p,q)-somante;

(ii) Existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p\right)^{1/p} \leq C \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q} \tag{2.7}$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n$ em E e n natural;

(iii) Existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|u(x_j)\|^p\right)^{1/p} \leq C \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$.

O ínfimo das constantes que satisfazem a desigualdade (2.7) define uma norma em $\prod_{p,q}(E;F)$, denotada por $\pi_{p,q}(u)$. Este ínfimo é atingido. Temos ainda o seguinte teorema:

Teorema 2.3.8 *Se $1 \leq q,p < \infty$, então $\left(\prod_{p,q}, \pi_{p,q}\right)$ é um ideal de Banach de operadores lineares.*

Alguns resultados dessa teoria são bastante conhecidos:

Teorema 2.3.9 (Grothendieck[17, Teorema 1.13]) *Todo operador linear contínuo* $u : \ell_1 \to \ell_2$ *é absolutamente somante.*

Teorema 2.3.10 (Versão fraca - Dvoretzky-Rogers [17, Teorema 10.5]) *Sejam* E *um espaço de Banach e* $1 \leq p < \infty$. *Então* id_E *é absolutamente* p*-somante se, e somente se,* $\dim(E) < \infty$.

A definição de operador linear quase p-somante é bastante próxima da definição de operador absolutamente (p,q)-somante.

Definição 2.3.11 *Sejam* $1 \leq p \leq 2$ *e* $u : E \to F$ *um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que* u *é quase* p*-somante se existir um operador induzido* $\hat{u} : \ell_p^u(E) \to Rad(F)$ *definido por*

$$\hat{u}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) = (u(x_j))_{j=1}^{\infty}.$$

Denotamos por $\prod_{as,p}(E;F)$ o conjunto formado pelos operadores lineares absolutamente p-somantes de E em F.

Neste contexto, também existe um resultado que caracteriza os operadores lineares quase p-somantes.

Proposição 2.3.12 *Seja* $u \in \mathcal{L}(E;F)$. *São equivalentes:*

(*i*) u *é quase* p*-somante;*

(*ii*) *Existe* $C > 0$ *tal que*

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, u(x_j)\right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq C \left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_{w,p} \tag{2.8}$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n$ *em* E *e* n *natural;*

(iii) Existe $C > 0$ *tal que*

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j (t)\, u (x_j) \right\|^2 dt \right)^{1/2} \leq C \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p},$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u (E)$.

A menor constante que satisfaz (2.8) define uma norma em $\prod_{as,p} (E; F)$, denotada por $\pi_{as,p} (u)$.

O próximo resultado é bastante importante, pois relaciona a conhecida teoria dos operadores lineares p-somantes com a teoria dos operadores lineares quase somantes.

Proposição 2.3.13 ([17, Proposição 12.5]) *Seja* $1 \leq p < \infty$*, e sejam* E *e* F *espaços de Banach. Então todo operador* p*-somante* $u : E \to F$ *é quase* 2*-somante. Além disso,* $\|u\|_{as,2} \leq B_p \|u\|_p$*, onde a constante* B_p *é fornecida pela desigualdade de Khinchin.*

Ainda sobre a teoria linear dos operadores quase somantes, destacamos a importante observação, que também chamaremos de Teorema de Dvoretzky–Rogers:

Teorema 2.3.14 ([17, 12.8]) *Seja* $1 < p \leq 2$*. O operador identidade em um espaço de Banach* E *é quase* p*-somante se, e somente se, a dimensão de* E *é finita.*

As próximas seções contém generalizações do conceito de operadores lineares absolutamente somantes e o capítulo 3 trata dos operadores multilineares e polinômios quase p-somantes.

2.4 Polinômios e operadores multilineares absolutamente somantes em todo ponto

Historicamente, uma das primeiras generalizações polinomiais do ideal dos operadores absolutamente somantes (veja [1]) é a seguinte:

Definição 2.4.1 *Se $0 < p, q < \infty$ e $p \geq nq$, um polinômio n-homogêneo $P \in \mathcal{P}({}^nE; F)$ é absolutamente $(p; q)$-somante se existe C tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(x_j)\|^p\right)^{1/p} \leq C \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}^n \tag{2.9}$$

para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$.

O ínfimo de todas as constantes C para as quais (2.9) é verdadeira define uma norma (p-norma se $0 < p < 1$), denotada por $\|\cdot\|_{as(p;q)}$, em $\mathcal{P}_{as(p;q)}^n({}^nE; F)$. Se $p = q$, escrevemos $\mathcal{P}_{as,p}^n({}^nE; F)$ em vez de $\mathcal{P}_{as(p;q)}^n({}^nE; F)$.

Não é difícil mostrar que a definição acima equivale a dizer que $(P(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$ para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$. Entretanto, em geral, este multi-ideal não é fechado por diferenciação (CUD) e não é um tipo de holomorfia (global). Além disso, o espírito do ideal linear é também destruído por vários teoremas de coincidência, que não têm relação com o caso linear. Por exemplo, usando que ℓ_p (para $1 \leq p \leq 2$) tem cotipo 2, segue da próxima proposição que

$$\mathcal{P}_{as,1}^n({}^n\ell_p; F) = \mathcal{P}^n({}^n\ell_p; F) \tag{2.10}$$

para todos $1 \leq p \leq 2$, $n \geq 2$ e todo F; este resultado não é verdadeiro para $n = 1$. Assim, é natural que $\left(\mathcal{P}_{as,1}^n, \|\cdot\|_{as,1}\right)$ não seja classificada como compatível com o ideal Π_1. Defeitos similares pode ser encontrado neste ideal para o caso geral de $\mathcal{P}_{as(p;q)}^n$.

O próximo resultado é bem conhecido na teoria (veja, por exemplo, [5, Teorema 2.2]). No entanto, faremos a demonstração para tornar o texto mais auto-suficiente.

Proposição 2.4.2 *Seja E um espaço de Banach de cotipo 2. Então, para todo espaço de Banach F e $n \geq 2$, temos que*

$$\mathcal{P}_{as,1}^n({}^nE; F) = \mathcal{P}^n({}^nE; F).$$

Demonstração: Sejam $P \in \mathcal{P}({}^{n}E;F)$ e $x_1,\ldots,x_k \in E$. Sabemos que (veja [17, Pag 218]) se E tem cotipo 2, então E tem cotipo q para todo $2 \leq q \leq \infty$. Dessa forma, temos pela Proposição 2.1 de [5], que o operador identidade em E (denotado por Id_E) é $(n,1)$-somante, uma vez que $n \geq 2$. Observando que $P = P \circ Id_E$, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\|P(x_j)\| = \sum_{j=1}^{k}\|P(Id_E(x_j))\| &\leq \|P\|\sum_{j=1}^{k}\|Id_E(x_j)\|^n \\ &\leq \|P\|\left(\|Id_E\|_{as,(n,1)}\right)^n \left\|(x_j)_{j=1}^{k}\right\|_{w,1}^{n}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{P}({}^{n}E;F) \subset \mathcal{P}^{n}_{as,1}({}^{n}E;F).$$

A inclusão contrária é imediata. ■

A versão n-linear da Definição 2.4.1 para operadores n-lineares absolutamente somantes é:

Definição 2.4.3 *Um operador n-linear $T \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é absolutamente $(p;q)$-somante se existe $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(n)}\right)\right\|^p\right)^{1/p} \leq C\prod_{k=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \tag{2.11}$$

para toda $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E_k)$, $k = 1,\ldots,n$. Além disso, o ínfimo de todas as constantes C que satisfazem a desigualdade (2.11) define uma norma (p-norma se $0 < p < 1$), denotada por $\|\cdot\|_{as(p;q)}$, para esta classe. Esta definição é equivalente a dizer que $\left(T\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$ para toda $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E_k)$, $k = 1,\ldots,n$.

Esta classe, denotada por $\mathcal{L}^{n}_{as(p;q)}$, forma um multi-ideal de Banach mas, deficiências similares às apresentadas em $\mathcal{P}^{n}_{as(p;q)}$ também podem ser encontradas. Logo, temos facilmente que:

A sequência $\left(\left(\mathcal{P}^{n}_{as(p;q)}, \|\cdot\|_{as(p;q)}\right), \left(\mathcal{L}^{n}_{as(p;q)}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ não é coerente nem compatível com $\Pi_{p,q}$.

Se u é um operador linear, então estimar $(u(a+x_j) - u(a))_{j=1}^{\infty}$ é o mesmo que estimar $(u(x_j))_{j=1}^{\infty}$. Contudo, para polinômios, em geral, $P(a+x_j) \neq P(a) + P(x_j)$, como também para operadores multilineares. Dessa forma, faz sentido estudar somabilidade absoluta, no caso não linear, em um ponto a. Essa ideia é creditada a Richard Aron, e apareceu pela primeira vez na literatura em um trabalho de M. C. Matos [26], sendo posteriormente desenvolvida em [27] e na tese de doutorado de D. Pellegrino [31]. Com isso, foi introduzido na literatura uma nova definição onde os principais problemas da classe acima desapareceram, como veremos nas próximas definições e teoremas.

Definição 2.4.4 *Seja $1 \leq q \leq p < \infty$. Um operador n-linear $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é absolutamente $(p;q)$-somante em todo ponto (notação $\mathcal{L}^{n,ev}_{as(p;q)}(E_1, \ldots, E_n; F)$) se existe $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, \ldots, a_n)\right\|^{p}\right)^{1/p} \leq C \prod_{k=1}^{\infty} \left(\|a_k\| + \left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)$$

para todos $(a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ e $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Além disso, o ínfimo de todas as constantes C que satisfazem a desigualdade acima define uma norma completa em $\mathcal{L}^{n,ev}_{as(p;q)}$ denotada por $\|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}$.

A definição acima é justificada pelo seguinte resultado:

Teorema 2.4.5 ([2], Teorema 4.1) *As seguintes afirmações são equivalentes para $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$:*

(a) $T \in \mathcal{L}^{n,ev}_{as(p;q)}\left(E_1, \ldots, E_n; F\right).$

(b) A sequência $\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T\left(a_1, \ldots, a_n\right)\right)_{j=1}^{\infty}$ *pertence a* $\ell_p\left(F\right)$ *para todo* $\left(x_j^{(k)}\right) \in \ell_q^u\left(E_k\right)$*,* $k = 1, \ldots, n$*, e todo* $\left(a_1, \ldots, a_n\right) \in E_1 \times \cdots \times E_n$*.*

A versão polinomial da Definição 2.4.4 é:

Definição 2.4.6 *Seja* $1 \leq q \leq p < \infty$*. Um polinômio* $P \in \mathcal{P}\left({}^nE; F\right)$ *é absolutamente* $(p;q)$*-somante em todo ponto (notação* $\mathcal{P}^{n,ev}_{as(p;q)}\left(E; F\right)$*) se existe* $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|P\left(a + x_j\right) - P\left(a\right)\right\|^p\right)^{1/p} \leq C\left(\|a\| + \left\|\left(x_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^n$$

para todo $a \in E$ *e* $\left(x_j\right) \in \ell_q^u\left(E\right)$*. Além disso, o ínfimo de todas as constantes* C *que satisfazem a desigualdade define uma norma em* $\mathcal{P}^{n,ev}_{as(p;q)}\left({}^nE; F\right)$ *denotada por* $\|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}$*.*

Como no caso dos operadores multilineares, existe a seguinte caracterização:

Teorema 2.4.7 ([2], Teorema 4.2) *As seguintes afirmações são equivalentes para* $P \in \mathcal{P}\left({}^nE; F\right)$ *:*

(a) $P \in \mathcal{P}^{n,ev}_{as(p;q)}\left({}^nE; F\right)$*.*

(b) A sequência $\left(P\left(a + x_j\right) - P\left(a\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p\left(F\right)$ *para toda* $\left(x_j\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u\left(E\right)$ *e todo* $a \in E$*.*

Foi ainda provado em [2, Proposição 4.3] que

$$\left\|A_n : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K} : A_n\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) = \lambda_1 \cdots \lambda_n\right\|_{ev^{(2)}(p;q)} = 1$$

para todos $1 \leq q \leq p$. Desta forma, não é difícil mostrar que

$$\left(\mathcal{L}^{n.ev}_{as(p;q)}, \|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}\right)_{n=1}^{\infty}$$

é um multi-ideal de Banach.

Proposição 2.4.8 $\left(\mathcal{L}^{n.ev}_{as(p;q)}, \|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}\right)_{n=1}^{\infty}$ *é um multi-ideal de Banach.*

Demonstração: Sejam $u_j \in \mathcal{L}(G_j, E_j)$, $j = 1, \ldots, n$, $T \in \mathcal{L}^{n,ev}_{as(p;q)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $w \in \mathcal{L}(F; G)$. Note que para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\| \begin{array}{c} w \circ T \circ (u_1, \ldots, u_n)\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) \\ -w \circ T \circ (u_1, \ldots, u_n)(a_1, \ldots, a_n) \end{array} \right\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \|w\| \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\| \begin{array}{c} T\left(u_1(a_1) + u_1(x_j^{(1)}), \ldots, u_n(a_n) + u_n(x_j^{(n)})\right) \\ -T(u_1(a_1), \ldots, u_n(a_n)) \end{array} \right\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \|w\| \|T\|_{ev^{(2)}(p;q)} \prod_{k=1}^{n}\left(\|u_k(a_k)\| + \left\|\left(u_k\left(x_j^{(k)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right) \\
&\leq \|w\| \|T\|_{ev^{(2)}(p;q)} \|u_1\| \cdots \|u_n\| \prod_{k=1}^{n}\left(\|a_k\| + \left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right),
\end{aligned}$$

e segue que

$$\|w \circ T \circ (u_1, \ldots, u_n)\|_{ev^{(2)}(p;q)} \leq \|w\| \|T\|_{ev^{(2)}(p;q)} \|u_1\| \cdots \|u_n\|.$$

As outras propriedades de multi-ideal são facilmente verificadas. ■

Em geral, o ideal $\left(\mathcal{P}^{n,ev}_{as(p;q)}, \|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}\right)_{n=1}^{\infty}$ tem boas propriedades (para detalhes, veja [37]). Também foi provado em [2, Proposição 4.4] que

$$\|P_n : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K} : P_n(\lambda) = \lambda^n\|_{ev^{(2)}(p;q)} = 1$$

para todos $p \geq q \geq 1$. Com isto, não é difícil mostrar que $\left(\mathcal{P}^{n,ev}_{as(p;q)}, \|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}\right)_{n=1}^{\infty}$ é um ideal de polinômios de Banach. Além disso, em [2, Proposição 4.9] foi provado que $\left(\mathcal{P}^{n,ev}_{as(p;q)}, \|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}\right)_{n=1}^{\infty}$ é um tipo de holomorfia global. O principal resultado dessa seção mostra que, ao contrário do que acontece para

$$\left(\left(\mathcal{P}^{n}_{as(p;q)}, \|\cdot\|_{as(p;q)}\right), \left(\mathcal{L}^{n}_{as(p;q)}, \|\cdot\|_{as(p;q)}\right)\right)_{n=1}^{\infty},$$

o par $\left(\left(\mathcal{P}^{n,ev}_{as(p;q)}, \|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}\right), \left(\mathcal{L}^{n,ev}_{as(p;q)}, \|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ é coerente e compatível com o ideal $\Pi_{p,q}$.

O próximo resultado é importante para nossos propósitos (note que este resultado é uma variação de [2, Proposição 3.5]):

Proposição 2.4.9 *Um polinômio P pertence a $\mathcal{P}^{n,ev}_{as(p;q)}\left({}^{n}E;F\right)$ se, e somente se, $\overset{\vee}{P}$ pertence a $\mathcal{L}^{n,ev}_{as(p;q)}\left({}^{n}E;F\right)$.*

Demonstração: Note que se $\overset{\vee}{P}$ pertence a $\mathcal{L}^{n,ev}_{as(p;q)}\left({}^{n}E;F\right)$, então é fácil ver que P pertence a $\mathcal{P}^{n,ev}_{as(p;q)}\left({}^{n}E;F\right)$. A implicação contrária (não trivial) é uma consequência da Fórmula de Polarização (veja [22, 29]), pois

$$\begin{aligned}
& n!\,2^{n}\left[\overset{\vee}{P}\left(b_1+x_j^{(1)},\ldots,b_n+x_j^{(n)}\right)-\overset{\vee}{P}(b_1,\ldots,b_n)\right] \\
&= \sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n P\left(\varepsilon_1(b_1+x_j^{(1)})+\cdots+\varepsilon_n(b_n+x_j^{(n)})\right) \\
&- \sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n P\left(\varepsilon_1 b_1+\cdots+\varepsilon_n b_n\right) \\
&= \sum_{\varepsilon_i=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\left[\begin{array}{c} P\left((\varepsilon_1 b_1+\cdots+\varepsilon_n b_n)+(\varepsilon_1 x_j^{(1)}+\cdots+\varepsilon_n x_j^{(n)})\right) \\ -P\left(\varepsilon_1 b_1+\cdots+\varepsilon_n b_n\right)\end{array}\right],
\end{aligned}$$

de onde o resultado segue facilmente. ■

Proposição 2.4.10 *Se $P\in\mathcal{P}^{n,ev}_{as(p;q)}\left({}^{n}E;F\right)$ e $\gamma\in E'$, então $\gamma P\in\mathcal{P}^{n+1,ev}_{as(p;q)}\left({}^{n+1}E;F\right)$ e*

$$\|\gamma P\|_{ev^{(2)}(p;q)}\le\|\gamma\|\,\|P\|_{ev^{(2)}(p;q)}\,. \tag{2.12}$$

Demonstração: Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$. Note que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\gamma(a+x_j)P(a+x_j) - \gamma(a)P(a)\|^p\right)^{1/p}$$
$$\leq |\gamma(a)| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(a+x_j) - P(a)\|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\gamma(x_j)P(a+x_j)\|^p\right)^{1/p}$$
$$\leq \|\gamma\| \, \|a\| \, \|P\|_{ev^{(2)}(p;q)} \left(\|a\| + \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^n + \|P\| \left(\sup_j \|a+x_j\|^n\right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\gamma(x_j)|^p\right)^{1/p}.$$

Como $q \leq p$,

$$\|P\|_{ev^{(2)}(p;q)} \geq \|P\| \text{ e } \sup_j \|a+x_j\| \leq \left(\|a\| + \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right),$$

temos que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\gamma(a+x_j)P(a+x_j) - \gamma(a)P(a)\|^p\right)^{1/p}$$
$$\leq \|\gamma\| \, \|a\| \, \|P\|_{ev^{(2)}(p;q)} \left(\|a\| + \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^n$$
$$+ \|P\|_{ev^{(2)}(p;q)} \left(\|a\| + \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^n \|\gamma\| \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}$$
$$= \|\gamma\| \, \|P\|_{ev^{(2)}(p;q)} \left(\|a\| + \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^{n+1},$$

de onde obtemos (2.12). ■

Proposição 2.4.11 *Se $P \in \mathcal{P}_{as(p;q)}^{n+1,ev}\left({}^{n+1}E;F\right)$ e $a \in E$, então $P_a \in \mathcal{P}_{as(p;q)}^{n,ev}\left({}^{n}E;F\right)$ e*

$$\|P_a\|_{ev^{(2)}(p;q)} \leq \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{ev^{(2)}(p;q)} \|a\|. \tag{2.13}$$

Demonstração: Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$ e $b \in E$. Note que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P_a(b+x_j) - P_a(b)\|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|\overset{\vee}{P}(a,(b+x_j)^n) - \overset{\vee}{P}(a,b^n)\right\|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|\overset{\vee}{P}(a+0,(b+x_j)^n) - \overset{\vee}{P}(a,b^n)\right\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{ev^{(2)}(p;q)} \left(\|a\| + \left\|(0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)\left(\|b\| + \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^n .
\end{aligned}$$

Daí, temos sem dificuldades (2.13). ■

Proposição 2.4.12 *Seja* $i \in \{1, \ldots, n+1\}$*. Se* $T \in \mathcal{L}_{as(p;q)}^{n+1,ev}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ *e* $a_i \in E_i$*, então* $T_{a_i} \in \mathcal{L}_{as(p;q)}^{n,ev}(E_1, \ldots, E_{i-1}, E_{i+1}, \ldots, E_{n+1}; F)$ *e*

$$\|T_{a_i}\|_{ev^{(2)}(p;q)} \leq \|T\|_{ev^{(2)}(p;q)} \|a_i\| . \tag{2.14}$$

Demonstração: Sejam $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E_k)$ e $a_j \in E_j$ para todo $j \neq i$. O resultado segue da desigualdade

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \begin{array}{c} T_{a_i}\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_{i-1} + x_j^{(i-1)}, a_{i+1} + x_j^{(i+1)}, \ldots, a_{n+1} + x_j^{(n+1)}\right) \\ -T_{a_i}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}) \end{array} \right\|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \begin{array}{c} T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_{i-1} + x_j^{(i-1)}, a_i + 0, a_{i+1} + x_j^{(i+1)}, \ldots, a_{n+1} + x_j^{(n+1)}\right) \\ -T(a_1, \ldots, a_{n+1}) \end{array} \right\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \|T\|_{ev^{(2)}(p;q)} \|a_i\| \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n+1} \left(\|a_k\| + \left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right).
\end{aligned}$$

■

Proposição 2.4.13 *Se* $T \in \mathcal{L}_{as(p;q)}^{n,ev}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *e* $\gamma \in E_{n+1}'$, *então*

$$\gamma T \in \mathcal{L}_{as(p;q)}^{n+1,ev}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F) \ \ e \ \ \|\gamma T\|_{ev^{(2)}(p;q)} \leq \|\gamma\| \, \|T\|_{ev^{(2)}(p;q)} \,. \tag{2.15}$$

Demonstração: Sejam $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E_k)$ e $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in E_1 \times \cdots \times E_{n+1}$. Então,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\gamma\left(a_{n+1}+x_j^{(n+1)}\right)T\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-\gamma\left(a_{n+1}\right)T\left(a_1,\ldots,a_n\right)\right\|^p\right)^{1/p}\\
&\leq\left|\gamma\left(a_{n+1}\right)\right|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-T\left(a_1,\ldots,a_n\right)\right\|^p\right)^{1/p}\\
&+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\gamma\left(x_j^{(n+1)}\right)T\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)\right\|^p\right)^{1/p}\\
&\leq\left|\gamma\left(a_{n+1}\right)\right|\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-T\left(a_1,\ldots,a_n\right)\right\|^p\right)^{1/p}\\
&+\|T\|\sup_j\prod_{k=1}^{n}\left(\left\|a_k+x_j^{(k)}\right\|\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\gamma\left(x_j^{(n+1)}\right)\right|^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Usando os mesmos argumentos da Proposição 2.4.10, temos que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\gamma\left(a_{n+1}+x_j^{(n+1)}\right)T\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-\gamma\left(a_{n+1}\right)T\left(a_1,\ldots,a_n\right)\right\|^p\right)^{1/p}\\
&\leq\|\gamma\|\,\|a_{n+1}\|\,\|T\|_{ev^{(2)}(p;q)}\prod_{k=1}^{n}\left(\|a_k\|+\left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)\\
&+\|T\|_{ev^{(2)}(p;q)}\prod_{k=1}^{n}\left(\|a_k\|+\left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)\|\gamma\|\left\|\left(x_j^{(n+1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\\
&=\|\gamma\|\,\|T\|_{ev^{(2)}(p;q)}\prod_{k=1}^{n+1}\left(\|a_k\|+\left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right),
\end{aligned}$$

e a demonstração pode ser facilmente concluída. ■

A coerência e a compatibilidade do par $\left((\mathcal{P}^{n,ev}_{as(p;q)}, \|.\|_{ev^{(2)}(p;q)}), (\mathcal{L}^{n,ev}_{as(p;q)}, \|.\|_{ev^{(2)}(p;q)})\right)_{n=1}^{\infty}$ são consequências imediatas dos resultados anteriores e da Proposição 2.1.6, ou seja,

Teorema 2.4.14 *A sequência de pares* $\left((\mathcal{P}^{n,ev}_{as(p;q)}, \|.\|_{ev^{(2)}(p;q)}), (\mathcal{L}^{n,ev}_{as(p;q)}, \|.\|_{ev^{(2)}(p;q)})\right)_{n=1}^{\infty}$ *é coerente e compatível com* $\Pi_{p,q}$.

2.5 Operadores multilineares e polinômios fortemente somantes

O multi-ideal dos operadores multilineares fortemente p-somantes é provavelmente a classe que melhor herda a natureza do ideal dos operadores lineares absolutamente p-somantes (para artigos comparando as diferentes extensões não lineares do ideal dos operadores lineares absolutamente somantes fazemos referência a [13, 37, 40]).

Se $p \geq 1$, $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é fortemente p-somante, neste caso escrevemos $T \in \mathcal{L}\Pi_p^{n,\text{str}}(E_1, \ldots, E_n; F)$, se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \| T(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}) \|^p\right)^{1/p} \leq C \left(\sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;\mathbb{K})}} \sum_{j=1}^{m} | \phi(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}) |^p\right)^{1/p} \tag{2.16}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$, $x_j^{(l)} \in E_l$, onde $l = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$.

Este conceito é devido a V. Dimant [21]. Nesse mesmo artigo, a autora propõe a seguinte definição para o caso polinomial.

Definição 2.5.1 *Um polinômio* $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ *é fortemente* p*-somante se existe uma constante* $K \geq 0$ *tal que, para quaisquer* $x_1, \ldots, x_m \in E$, *a desigualdade abaixo é satisfeita*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|P(x_j)\|^p\right)^{1/p} \leq K \sup_{q \in B_{\mathcal{P}(^nE)}} \left(\sum_{j=1}^{m} |q(x_j)|^p\right)^{1/p}.$$

Mas, como mencionado em [14], este conceito não gera um ideal de polinômios compatível com Π_p.

Não é difícil mostrar (veja [37, Seção 6]) que o ideal dos operadores multilineares fortemente p-somantes é fechado para diferenciação (CUD) e fechado para multiplicação por escalar (CSM). Além disso, para essa classe temos os seguintes teoremas:

Teorema 2.5.2 (do tipo Grothendieck [21]) *Todo $T \in \mathcal{L}\left({}^n\ell_1;\ell_2\right)$ é fortemente 1-somante.*

Teorema 2.5.3 (Dominação de Pietsch [21]) *$T \in \mathcal{L}\left(E_1,\ldots,E_n;F\right)$ é fortemente p-somante se, e somente se, existem uma medida de probabilidade μ em $B_{(E_1\otimes_\pi\cdots\otimes_\pi E_n)^*}$, com a topologia fraca estrela, e uma constante $C \geq 0$ tais que*

$$\left\|T\left(x_1,...,x_n\right)\right\| \leq C\left(\int_{B_{(E_1\otimes_\pi\cdots\otimes_\pi E_n)^*}}\left|\varphi\left(x_1\otimes\cdots\otimes x_n\right)\right|^p d\mu\left(\varphi\right)\right)^{1/p} \tag{2.17}$$

para todo $(x_1,...,x_n) \in E_1\times\cdots\times E_n$.

Como consequência, existe um Teorema de Inclusão natural (se $p \leq q$, então $\mathcal{L}\Pi_p^{n,\text{str}} \subset \mathcal{L}\Pi_q^{n,\text{str}}$). Vale destacar que mesmo o importante multi-ideal dos operadores multilineares múltiplo somantes (que abordaremos na próxima seção) não possui todas essas propriedades (por exemplo, o teorema de inclusão não é válido em geral, veja [39]). No artigo recente [37], uma noção de "generalização desejável de operadores absolutamente somantes"para a configuração multilinear foi discutida e a classe dos operadores multilineares fortemente p-somantes parecia ser uma das "mais próximas da perfeição", de acordo com a abordagem ali apresentada.

Diremos que um polinômio $P \in \mathcal{P}\left({}^nE;F\right)$ é fortemente p-somante (notação $\mathcal{P}\Pi_p^{n,\text{str}}\left({}^nE;F\right)$) se $\overset{\vee}{P}$ pertence a $\mathcal{L}\Pi_p^{n,\text{str}}\left({}^nE;F\right)$ e

$$\|P\|_{\mathcal{P}\Pi_p^{n,\text{str}}} := \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n,\text{str}}}.$$

Este conceito de polinômio fortemente p-somante é diferente do original apresentado em [14, 21]. Isto se justifica pois com essa nova abordagem $\left(\mathcal{P}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}}\right)_{n=1}^{\infty}$ é um ideal completo de polinômios e, além disso, não é difícil provar que a sequência $\left(\mathcal{P}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}}\right)_{n=1}^{\infty}$ é um tipo de holomorfia global (isto é consequência da Proposição 2.5.4 e do Teorema 3.2 de [9]). Como veremos no Teorema 2.5.8, a sequência $\left(\left(\mathcal{P}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}}\right), \left(\mathcal{L}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ é coerente e compatível com Π_p. Para provar esse resultado, precisamos antes provar quatro lemas:

Lema 2.5.4 *Seja $k \in \{1, \ldots, n+1\}$. Se $T \in \mathcal{L}\Pi_p^{n+1,str}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ e $a_k \in E_k$, então*

$$T_{a_k} \in \mathcal{L}\Pi_p^{n,str}(E_1, \ldots E_{k-1}, E_{k+1}, \ldots, E_{n+1}; F) \ \text{ e } \ \|T_{a_k}\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n,str}} \leq \|a_k\| \, \|T\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n+1,str}}.$$

Demonstração: O caso $a_k = 0$ é imediato. Vamos supor $a_k \neq 0$. É suficiente observar que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{m} \left\|T_{a_k}\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(k-1)}, x_j^{(k+1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right\|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} \left\|T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(k-1)}, a_k, x_j^{(k+1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \|T\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n+1,\mathrm{str}}} \|a_k\| \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{n+1}; \mathbb{K})}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(k-1)}, \frac{a_k}{\|a_k\|}, x_j^{(k+1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \|T\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n+1,\mathrm{str}}} \|a_k\| \sup_{\psi \in B_H} \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\psi\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(k-1)}, x_j^{(k+1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right|^p\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

onde $H = \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{k-1}, E_{k+1}, \ldots, E_{n+1}; \mathbb{K})$. ■

Lema 2.5.5 *Se $T \in \mathcal{L}\Pi_p^{n,str}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\gamma \in E'_{n+1}$, então*

$$\gamma T \in \mathcal{L}\Pi_p^{n+1,str}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F) \ \text{ e } \ \|\gamma T\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n+1,str}} \leq \|\gamma\| \, \|T\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n,str}}.$$

Demonstração: Sabemos que

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left\|T\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(n)}\right)\right\|^p\right)^{1/p} \leq \|T\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}}\left(\sup_{\phi\in B_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;\mathbb{K})}}\sum_{j=1}^{m}\left|\phi\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(n)}\right)\right|^p\right)^{1/p}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{m}\left\|T\left(x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(n)}\right)\gamma\left(x_j^{(n+1)}\right)\right\|^p\right)^{1/p}\\
&\leq \|T\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}}\left(\sup_{\phi\in B_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;\mathbb{K})}}\sum_{j=1}^{m}\left|\phi\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\gamma\left(x_j^{(n+1)}\right)\right|^p\right)^{1/p}\\
&\leq \|\gamma\|\,\|T\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}}\left(\sup_{\psi\in B_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_{n+1};\mathbb{K})}}\sum_{j=1}^{m}\left|\psi\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n+1)}\right)\right|^p\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

e a demonstração está concluída. ■

Lema 2.5.6 *Se $P\in\mathcal{P}\Pi_p^{n+1,str}\left({}^{n+1}E;F\right)$ e $a\in E$, então P_a pertence a $\mathcal{P}\Pi_p^{n,str}\left({}^{n}E;F\right)$ e*

$$\|P_a\|_{\mathcal{P}\Pi_p^{n,str}} \leq \|a\|\left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n+1,str}}$$

Demonstração: Como, pela definição, $\overset{\vee}{P}\in\mathcal{L}\Pi_p^{n+1,\mathrm{str}}\left({}^{n}E;F\right)$, segue da Proposição 2.5.4 que

$$\overset{\vee}{P}_a\in\mathcal{L}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}\left({}^{n}E;F\right)$$

e

$$\left\|\overset{\vee}{P}_a\right\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}} \leq \|a\|\left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n+1,\mathrm{str}}}.$$

Consequentemente

$$\|P_a\|_{\mathcal{P}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}} = \left\|(P_a)^{\vee}\right\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}} = \left\|\overset{\vee}{P}_a\right\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}} \leq \|a\|\left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n+1,\mathrm{str}}}.$$

■

Lema 2.5.7 *Se $P \in \mathcal{P}\Pi_p^{n,str}\left({}^nE;F\right)$ e $\gamma \in E'$, então γP pertence a $\mathcal{P}\Pi_p^{n+1,str}\left({}^{n+1}E;F\right)$ e*

$$\|\gamma P\|_{\mathcal{P}\Pi_p^{n+1,str}} \leq \|\gamma\| \left\| \overset{\vee}{P} \right\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n,str}}.$$

Demonstração: Note que

$$(\gamma P)^{\vee}\left(x_1,...,x_{n+1}\right) = \frac{\gamma(x_1)\overset{\vee}{P}(x_2,...,x_{n+1}) + ... + \gamma(x_{n+1})\overset{\vee}{P}(x_1,...,x_n)}{n+1}.$$

Logo, segue da Proposição 2.5.5 que

$$\|\gamma P\|_{\mathcal{P}\Pi_p^{n+1,\mathrm{str}}} = \left\|(\gamma P)^{\vee}\right\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n+1,\mathrm{str}}} \leq \left\|\gamma \overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n+1,\mathrm{str}}} \leq \|\gamma\| \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n,\mathrm{str}}}.$$

■

Como na seção anterior, o seguinte teorema é uma consequência das proposições prévias e da Proposição 2.1.6:

Teorema 2.5.8 *A sequência $\left(\left(\mathcal{P}\Pi_p^{n,str}, \|.\|_{\mathcal{P}\Pi_p^{n,str}}\right), \left(\mathcal{L}\Pi_p^{n,str}, \|.\|_{\mathcal{L}\Pi_p^{n,str}}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ é coerente e compatível com Π_p.*

2.6 Operadores multilineares e polinômios múltiplo somantes

Se $1 \leq q \leq p < \infty$ e n é um inteiro positivo, um operador n-linear $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é múltiplo (p,q)-somante ($T \in \mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}\left(E_1, \ldots, E_n; F\right)$) se existe $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty} \left\|T\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|^p\right)^{1/p} \leq C \prod_{k=1}^{n} \left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \quad (2.18)$$

para todas $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E_k)$, $k = 1, \ldots, n$. O ínfimo de todas as constantes $C \geq 0$ que satisfazem (2.18) define uma norma completa, denotada por $\|\cdot\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}}$, no espaço $\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Esta classe foi investigada por diversos autores nos últimos anos (veja, por exemplo, [11, 15, 16, 39, 45]).

O ideal dos polinômios múltiplo somantes é definido como na Definição 1.3.4 e denotado por $\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}$, e a norma é denotada por $\|\cdot\|_{\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}}$, isto é, $P \in \mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}({}^nE; F)$ se, e somente se, $\overset{\vee}{P} \in \mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}({}^nE; F)$ e

$$\|P\|_{\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}} := \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}}.$$

Assim como fizemos na seção anterior, demonstraremos alguns lemas que serão essencialmente a demonstração de que a sequência de pares de ideais

$$\left(\left(\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}}\right), \left(\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$$

é coerente e compatível com o ideal $\Pi_{p,q}$.

Lema 2.6.1 *Seja $k \in \{1, \ldots, n+1\}$. Se $T \in \mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n+1,mult}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ e $a_k \in E_k$, então T_{a_k} pertence a $\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,mult}(E_1, \ldots, E_{k-1}, E_{k+1}, \ldots, E_{n+1}; F)$ e*

$$\|T_{a_k}\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,mult}} \leq \|a_k\| \, \|T\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n+1,mult}}.$$

Demonstração: Seja $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E_i)$, $i = 1, \ldots, n+1$, $i \neq k$, e considere

$\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} = (a_k, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Como $T \in \mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n+1,\mathrm{mult}}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$, segue que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_{n+1}=1 \\ n\neq k}}^{\infty} \left\| T_{a_k}\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right\|^p \right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty} \left\| T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_{k-1}}^{(k-1)}, a_k, x_{j_{k+1}}^{(k+1)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right\|^p \right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty} \left\| T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_{k-1}}^{(k-1)}, x_{j_k}^{(k)}, x_{j_{k+1}}^{(k+1)}, \ldots, x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right\|^p \right)^{1/p} \\
&\leq \|T\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n+1,\mathrm{mult}}} \|(a_k, 0, 0, \ldots)\|_{w,q} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n+1} \left\| \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \\
&\leq \|T\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n+1,\mathrm{mult}}} \|a_k\| \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n+1} \left\| \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q}.
\end{aligned}$$

■

Lema 2.6.2 *Se $P \in \mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n+1,mult}({}^{n+1}E; F)$ e $a \in E$, então P_a pertence a $\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n,mult}({}^{n}E; F)$ e*

$$\|P_a\|_{\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n,mult}} \leq \|a\| \, \|P\|_{\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n+1,mult}}.$$

Demonstração: Note que, pelo Lema 2.1.5

$$(P_a)^{\vee} = \overset{\vee}{P}_a.$$

Assim,

$$\|P_a\|_{\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}} = \left\|(P_a)^{\vee}\right\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}} = \left\|\overset{\vee}{P}_a\right\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}} \leq \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n+1,\mathrm{mult}}} \|a\| = \|P\|_{\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n+1,\mathrm{mult}}} \|a\|,$$

onde a desigualdade acima é uma consequência do Lema 2.6.1. ■

Lema 2.6.3 *Se* $T \in \mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,mult}(E_1,\ldots,E_n;F)$ *e* $\gamma \in E'_{n+1}$, *então* γT *pertence a* $\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n+1,mult}(E_1,\ldots,E_{n+1};F)$ *e*

$$\|\gamma T\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n+1,mult}} \le \|\gamma\| \, \|T\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,mult}}.$$

Demonstração: Sejam $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E_r)$, $r = 1,\ldots,n+1$. Como $T \in \mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n+1,\mathrm{mult}}(E_1,\ldots,E_{n+1};F)$, segue que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty}\left\|\gamma\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)T(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)})\right\|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{j_1,\ldots,j_{n+1}=1}^{\infty}\left|\gamma\left(x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right|^p\left\|T(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)})\right\|^p\right)^{1/p} \\
&\le \|\gamma\|\sup_j\left\|x_j^{(n+1)}\right\|\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left\|T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|^p\right)^{1/p} \\
&\le \|T\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n+1,\mathrm{mult}}}\|\gamma\|\prod_{r=1}^{n+1}\left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\gamma T\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n+1,\mathrm{mult}}} \le \|\gamma\| \, \|T\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}}.$$

■

Lema 2.6.4 *Se* $P \in \mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n,mult}({}^nE;F)$ *e* $\gamma \in E'$, *então* γP *pertence a* $\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n+1,mult}({}^{n+1}E;F)$ *e*

$$\|\gamma P\|_{\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n+1,mult}} \le \|\gamma\| \, \|P\|_{\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n,mult}}.$$

Demonstração: Utilizando os argumentos da demonstração do Lema 2.2.2 e o Lema 2.6.3, segue que

$$\|\gamma P\|_{\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n+1,\mathrm{mult}}} = \left\|(\gamma P)^{\vee}\right\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n+1,\mathrm{mult}}} \le \left\|\gamma \overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n+1,\mathrm{mult}}} \le \|\gamma\|\left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}} = \|\gamma\| \, \|P\|_{\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n,\mathrm{mult}}}.$$

■

O próximo resultado, como havíamos anunciado antes, é uma consequência imediata dos lemas prévios desta seção e da Proposição 2.1.6.

Teorema 2.6.5 $\left(\left(\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n,mult}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}\Pi_{p,q}^{n,mult}}\right), \left(\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,mult}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}\Pi_{p,q}^{n,mult}}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ *é coerente e compatível com* $\Pi_{p,q}$.

2.7 Operadores multilineares e polinômios dominados

O conceito de aplicações multilineares dominadas (e polinômios dominados) é, cronologicamente, a primeira generalização do conceito do operador absolutamente somante. Esta noção, no caso multilinear foi primeiro esboçado por Pietsch [44] e depois explorada por vários autores [5, 13, 26]. Nesta seção, $1 \leq r < \infty$.

Definição 2.7.1 *Um operador multilinear* $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ *é* r*-dominado, neste caso escrevemos* $T \in \mathcal{L}_{d,r}^n (E_1, \ldots, E_n; F)$*, se existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \left\|T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right\|^{r/n}\right)^{n/r} \leq C \prod_{k=1}^{n} \left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,r}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ *e* $x_1^{(k)}, \ldots, x_m^{(k)} \in E_k$, $k = 1, \ldots, n$. *O ínfimo de todas as constantes* C *é denotado por* $\|T\|_{d,r}$.

É bem conhecido que $\left(\mathcal{L}_{d,r}^n, \|\cdot\|_{d,r}\right)$ é um ideal de aplicações multilineares quasi-Banach ($\|\cdot\|_{d,r}$ é uma norma em $\mathcal{L}_{d,r}^n$ se $r \geq n$ e uma $\frac{r}{n}$-norma se $r < n$).

Definição 2.7.2 *Um polinômio n-homogêneo $P : E \to F$ é r-dominado, neste caso escrevemos $P \in \mathcal{P}^n_{d,r}({}^nE; F)$, se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|P(x_j)\|^{r/n}\right)^{n/r} \leq C \left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,r}^n$$

para toda sequência finita $(x_k)_{k=1}^m \subset E$. O ínfimo das constantes C é denotado por $\|P\|_{d,r}$.

É bem conhecido que $\left(\mathcal{P}^n_{d,r}, \|\cdot\|_{d,r}\right)$ é um ideal de polinômios de Banach se $r \geq n$ (quasi-Banach se $r < n$).

A terminologia "dominado"é motivada pelo Teorema de Dominação de Pietsch:

Teorema 2.7.3 ([18]) *$T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é r-dominado se, e somente se, existem $C > 0$ e medidas de probabilidade μ_j, $j = 1, \ldots, n$, nas σ-álgebras de Borel de $B_{E'_j}$ equipadas com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\|T(x_1, \ldots, x_n)\| \leq C \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{B_{E'_j}} |\varphi(x_j)|^p \, d\mu_j(\varphi)\right)^{1/p}$$

para todos $x_j \in E_j$ e $j = 1, \ldots, n$. Além disso, o ínfimo de todas as constantes C que satisfazem a desigualdade acima é precisamente $\|T\|_{d,r}$.

Para generalizações recentes do Teorema de Dominação de Pietsch mencionamos os trabalhos [35, 36].

Nosso objetivo nesta seção é provar que a sequência de pares $\left(\left(\mathcal{P}^n_{d,r}, \|\cdot\|_{d,r}\right), \left(\mathcal{L}^n_{d,r}, \|\cdot\|_{d,r}\right)\right)_{n=1}^N$ é coerente e compatível com o ideal Π_r. Nessa direção, já temos que as propriedades $(CH2)$ e $(CH4)$ são verdadeiras conforme [14, página 1119]. Observe ainda que a propriedade $(CH5)$ pode ser obtida de maneira análoga à Proposição 2.4.9. Resta-nos mostrar $(CH1)$ e $(CH3)$ para obtermos a coerência da sequência. Porém, vamos mostrar apenas $(CH3)$ uma vez que a demonstração de $(CH1)$ é bastante análoga.

Proposição 2.7.4 *Para cada* $T \in \mathcal{L}_{d,r}^{n}(E_1,\ldots,E_n;F)$ *e* $\gamma \in E'_{n+1}$, $\gamma T \in \mathcal{L}_{d,r}^{n+1}(E_1,\ldots,E_{n+1};F)$ *e*

$$\|\gamma T\|_{d,r} \leq \|\gamma\| \, \|T\|_{d,r}\,.$$

Demonstração: Pelo Teorema de Dominação de Pietsch existem medidas de probabilidade $\mu_1,\ldots,\mu_n$ tais que

$$\|T(x_1,\ldots,x_n)\| \leq \|T\|_{d,r} \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{B_{E'_j}} |\varphi_j(x_j)|^r \, d\mu_j \right)^{1/r}.$$

Assim, se considerarmos a medida Dirac $\delta_{\gamma/\|\gamma\|}$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\|\gamma(x_{n+1})\, T(x_1,\ldots,x_n)\| \\
&\leq \|\gamma\| \, \|T\|_{d,r} \left| \frac{\gamma}{\|\gamma\|}(x_{n+1}) \right| \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{B_{E'_j}} |\varphi_j(x_j)|^r \, d\mu_j \right)^{1/r} \\
&= \|\gamma\| \, \|T\|_{d,r} \left(\int_{B_{E'_{n+1}}} |\varphi_{n+1}(x_{n+1})|^r \, d\delta_{\gamma/\|\gamma\|} \right)^{1/r} \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{B_{E'_j}} |\varphi_j(x_j)|^r \, d\mu_j \right)^{1/r},
\end{aligned}$$

e, novamente pelo Teorema de Dominação de Pietsch, segue que

$$\|\gamma T\|_{d,r} \leq \|\gamma\| \, \|T\|_{d,r}\,.$$

■

Como $\left(\left(\mathcal{P}_{d,r}^{n}, \|\cdot\|_{d,r} \right), \left(\mathcal{L}_{d,r}^{n}, \|\cdot\|_{d,r} \right) \right)_{n=1}^{N}$ é uma sequência coerente com constantes $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1$, temos pela Proposição 2.1.6 que a sequência é compatível com o ideal Π_r. Assim, temos o nosso principal resultado da seção:

Teorema 2.7.5 *A sequência de pares de ideais* $\left(\left(\mathcal{P}_{d,r}^{n}, \|\cdot\|_{d,r} \right), \left(\mathcal{L}_{d,r}^{n}, \|\cdot\|_{d,r} \right) \right)_{n=1}^{N}$ *é coerente e compatível com o ideal* Π_r.

2.8 Um conceito mais forte de coerência e compatibilidade

Uma noção de coerência e compatibilidade aparentemente mais forte pode ser considerada se trocarmos $(CP2)$ e $(CH2)$ por

$(CP2^*)$ Existe uma constante $\alpha_2 > 0$ tal que se $P \in \mathcal{U}_n\left({}^nE;F\right)$ e $a \in E$, então $P_{a^{n-1}} \in \mathcal{U}\left(E;F\right)$ e

$$\|P_{a^{n-1}}\|_{\mathcal{U}} \leq \alpha_2 \|P\|_{\mathcal{U}_n} \|a\|^{n-1}.$$

$(CH2^*)$ Existe uma constante $\beta_2 > 0$ tal que se $P \in \mathcal{U}_{k+1}\left({}^{k+1}E;F\right)$ e $a \in E$, então $P_a \in \mathcal{U}_k\left({}^kE;F\right)$ e

$$\|P_a\|_{\mathcal{U}_k} \leq \beta_2 \|P\|_{\mathcal{U}_{k+1}} \|a\|.$$

Esta abordagem é muito próxima do conceito original introduzido em [14] para ideais de polinômios. Para os casos investigados nas seções 2.2, 2.5, 2.6 e 2.7 não existe diferença alguma entre os conceitos, uma vez que

$$\|P\|_{\mathcal{U}_n} = \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{\mathcal{M}_n}.$$

Porém, acreditamos que esse não seria o melhor enfoque a ser empregado ao tema, dado que a sequência de pares "canônicos"$(\mathcal{P}_k, \mathcal{L}_k)_{k=1}^{\infty}$ (composta por ideais de polinômios k-homogêneos contínuos e operadores n-lineares contínuos, com a norma do sup) deixa de ser coerente e compatível quando os mesmos são considerados sobre o corpo dos números reais, conforme [9, Proposição 8.5].

Para mostramos que os conceitos de coerência e compatibilidade funcionam bem simultaneamente, apresentaremos um exemplo que consideramos bastante ilustrativo.

Exemplo 2.8.1 *Seja* $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_1 = \Pi_1$ *e considere, para todo* n*, a sequência artificial*

$(\mathcal{U}_n, \mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}$ *definida por*

$$(\mathcal{U}_{2n}, \mathcal{M}_{2n})_{n=1}^{\infty} = \left(\left(\mathcal{P}\Pi_1^{2n,mult}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}\Pi_1^{2n,mult}} \right), \left(\mathcal{L}\Pi_1^{2n,mult}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}\Pi_1^{2n,mult}} \right) \right)_{n=1}^{\infty}$$
$$(\mathcal{U}_{2n+1}, \mathcal{M}_{2n+1})_{n=1}^{\infty} = \left(\left(\mathcal{P}\Pi_1^{2n+1,str}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}\Pi_1^{2n+1,str}} \right), \left(\mathcal{L}\Pi_1^{2n+1,str}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}\Pi_1^{2n+1,str}} \right) \right)_{n=1}^{\infty}.$$

Pelas nossas prévias seções, é fácil ver que a sequência $(\mathcal{U}_n, \mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}$ *é compatível com o ideal* Π_1. *Por outro lado, não é difícil mostrar que* $(\mathcal{U}_n, \mathcal{M}_n)_{n=1}^{\infty}$ *não é coerente. Logo, a nossa abordagem em pares, além de filtrar sequências que mantém o espírito do ideal de operadores lineares, parece se mostrar um método adequado de evitar construções artificiais.*

No próximo capítulo introduziremos a noção de aplicações multilineares e polinômios quase somantes em todo ponto e definiremos uma norma natural que torna esta classe um ideal de polinômios/multilineares de Banach. Vamos ainda, neste novo capítulo, explorar os conceitos de coerência e compatibilidade que apresentamos neste capítulo, além de mostrar que o ideal de polinômios quase somantes é um tipo de holomorfia global.

Capítulo 3

Aplicações Quase Somantes

A ideia de considerar aplicações não-lineares quase somantes aparece pela primeira vez na literatura nos artigos [6] e [8], e foi posteriormente explorada em [32, 33, 38]. Para a teoria linear de operadores quase somantes, sugerimos [17]. Neste trabalho visamos explorar o conceito de aplicação quase somante em um dado ponto, tentando obter uma norma no espaço das aplicações quase somantes em todo ponto. Inicialmente, tentamos adaptar resultados similares (para aplicações absolutamente somantes) obtidos em [9, 27]; entretanto, o caso de aplicações quase somantes é mais delicado e, mesmo no caso linear, exige atenção especial (veja, por exemplo [6]).

Observação 3.0.2 *Os resultados do presente capítulo foram aceitos para publicação na revista Linear and Multilinear Algebra [34].*

3.1 Aplicações multilineares e polinômios quase somantes

3.1.1 Aplicações multilineares quase somantes

Sejam $1 \leq p_1, \ldots, p_n < \infty$. Uma aplicação n-linear $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é dita quase $(p_1, \ldots, p_n)$-somante no ponto $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ se

$$\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T\left(a_1, \ldots, a_n\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad\,(F)$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{p_i}^{u}\,(E_i)$, $1 \leq p_i < \infty$, $i = 1, \ldots, n$. O conjunto de todas as aplicações n-lineares que são quase $(p_1, \ldots, p_n)$-somantes em $a = (a_1, \ldots, a_n)$ será denotado por $\mathcal{L}_{al,(p_1,\ldots,p_n)}^{n,(a)}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Em particular, se T é uma aplicação n-linear contínua quase $(p_1, \ldots, p_n)$-somante em $a = 0$, ou seja,

$$\left(T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad\,(F)$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{p_i}^{u}\,(E_i)$ $i = 1, \ldots, n$, dizemos apenas que T é quase $(p_1, \ldots, p_n)$-somante e denotamos o conjunto de todos os operadores com essa propriedade por $\mathcal{L}_{al,(p_1,\ldots,p_n)}^{n}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Se $E_1 = \ldots = E_n = E$, escrevemos $\mathcal{L}_{al,p}^{n,(a)}({}^nE; F)$, e os elementos de $\mathcal{L}_{al,p}^{n,(a)}({}^nE; F)$ são chamados de *quase p-somantes em a*.

O espaço formado pelas aplicações n-lineares contínuas que são quase $(p_1, \ldots, p_n)$-somantes em todo ponto é denotado por $\mathcal{L}_{al,(p_1,\ldots,p_n)}^{n,ev}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Note que

$$\mathcal{L}_{al,(p_1,\ldots,p_n)}^{n,ev}(E_1 \times \ldots \times E_n; F) = \bigcap_{a \in E} \mathcal{L}_{al,(p_1,\ldots,p_n)}^{n,(a)}(E_1 \times \ldots \times E_n; F).$$

Se $n \geq 2$, o Corolário 3 de [32] nos garante que

$$\mathcal{L}_{al,2}^{n}\left({}^{n}c_0; c_0\right) = \mathcal{L}\left({}^{n}c_0; c_0\right).$$

Como, se $1 \leq p \leq 2$, então $l_p^u(E) \subseteq l_2^u(E)$, segue que

$$\mathcal{L}_{al,p}^{n}\left({}^{n}c_0; c_0\right) = \mathcal{L}\left({}^{n}c_0; c_0\right).$$

Além disso, o exemplo abaixo mostra que $\mathcal{L}_{al,2}^{2}$ não é um ideal CUD. De fato, considere a aplicação $R : c_0 \times c_0 \to c_0$ definida por

$$R(x, y) = \varphi(x)\, y,$$

onde $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$, que é quase 2-somante. Sabemos, pelo Teorema de Dvoretzky-Rogers 2.3.14, que

$$id : c_0 \to c_0$$

não é quase 2-somante. Assim, se fixarmos $a \in c_0$, onde $\varphi(a) = 1$, então

$$R(a, y) = y,$$

que não é quase 2-somante. Isto mostra que $\mathcal{L}_{al,2}^{2}$ não é um ideal CUD.

Estes resultados sugerem que este conceito que privilegia a origem não é muito adequado, uma vez que existem muitos resultados de coincidência.

3.1.2 Polinômios quase somantes

Um polinômio $P \in \mathcal{P}({}^{n}E; F)$ é quase p-somante em $a \in E$ se

$$\left(P(a + x_j) - P(a)\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F),$$

para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$, $1 \leq p < \infty$.

O espaço formado pelos polinômios n-homogêneos contínuos que são quase p-somantes em $a \in E$ será denotado por $\mathcal{P}_{al,p}^{n,(a)}({}^nE;F)$. Os polinômios n-homogêneos contínuos quase p-somantes em $a = 0$ são simplesmente chamados de quase p-somantes e o respectivo espaço é denotado por $\mathcal{P}_{al,p}^{n}({}^nE;F)$.

O espaço formado pelos polinômios n-homogêneos contínuos que são quase p-somantes em todo ponto é denotado por $\mathcal{P}_{al,p}^{n,ev}({}^nE;F)$. Note que

$$\mathcal{P}_{al,p}^{n,ev}({}^nE;F) = \bigcap_{a \in E} \mathcal{P}_{al,p}^{n,(a)}({}^nE;F).$$

No estudo dos polinômios quase somantes também existem muitos resultados que mostram a importância de estudarmos os polinômios quase somantes fora da origem. Uma boa justificativa dessa afirmação pode ser vista no exemplo abaixo, onde mostramos que $\mathcal{P}_{al,2}^{n}$ não é um tipo de holomorfia global. Resultados dessa natureza nos motivaram a trabalhar com um conceito diferente.

Exemplo 3.1.1 *Seja* $P \in \mathcal{P}({}^2c_0;c_0)$ *definido por*

$$P(x) = \varphi(x)\,x,\ \ 0 \neq \varphi \in E'$$

e seja $a \in c_0$ *tal que* $\varphi(a) = 1$. *Segue do Corolário* 3 *de [32] que*

$$P \in \mathcal{P}_{al,2}^{2}({}^2c_0;c_0).$$

Calculando a derivada de P, temos que

$$\begin{aligned} dP(a)(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{P(a+tx) - P(a)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(a+tx)(a+tx) - a}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(a+tx) + t\varphi(x)(a+tx) - a}{t} \\ &= x + \varphi(x)\, a. \end{aligned}$$

Como

$$id : c_0 \to c_0$$

não é quase 2*-somante, temos que $dP(a)$ não pertence a $\mathcal{L}_{al,2}(c_0; c_0)$ e, portanto, $\mathcal{P}^n_{al,2}$ não é tipo de holomorfia global.*

3.2 Teoremas do tipo Dvoretzky Rogers

Foi provado em [8, Proposição 3.1] o seguinte resultado:

Proposição 3.2.1 *Sejam E e F espaços de Banach e $n \in \mathbb{N}$.*

(**i**) *Todo polinômio n-homogêneo contínuo e toda aplicação n-linear contínua é quase* 1*-somante, isto é,*

$$\mathcal{P}^n_{al,1}(^nE; F) = \mathcal{P}(^nE; F) \text{ e } \mathcal{L}^n_{al,1}(^nE; F) = \mathcal{L}(^nE; F).$$

(**ii**) *Todo polinômio n-homogêneo contínuo de tipo finito é quase p-somante para $p \leq 2n$, isto é,*

$$\mathcal{P}_f(^nE; F) \subseteq \mathcal{P}^n_{al,p}(^nE; F)$$

(**iii**) *Para $p > 2n$, não existe polinômio n-homogêneo quase p-somante, com exceção do polinômio nulo.*

De acordo com este resultado, estaremos principalmente interessados em quase p-somabilidade com $1 < p \leq 2n$, onde n é o grau do polinômio ou n-linearidade. Sabe-se ainda que para $1 < p \leq 2$, temos (veja [32])

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(^nE;E) \neq \mathcal{P}_{al,p}^{n,ev}(^nE;E) \Leftrightarrow \dim E = \infty \text{ e} \\ \mathcal{L}(^nE;E) \neq \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(^nE;E) \Leftrightarrow \dim E = \infty. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nosso primeiro resultado é uma melhoria do resultado acima, qualificando pontos $(a_1,...,a_n) \in E^n$ para os quais

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(^nE;E) \neq \mathcal{L}_{al,p}^{n,(a)}(^nE;E) \text{ e} \\ \mathcal{P}\left(^nE;E\right) \neq \mathcal{P}_{al,p}^{n,(a)}\left(^nE;E\right). \end{aligned}$$

As técnicas usadas nessa seção foram inspiradas em [2].

3.2.1 Caso multilinear

Sejam $T \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e $a = (a_1,\ldots,a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Denotaremos por T_{a_1} a aplicação $(n-1)$-linear de $E_2 \times \cdots \times E_n$ em F definida por

$$T_{a_1}\left(x_2,\ldots,x_n\right) := T\left(a_1,x_2,\ldots,x_n\right).$$

Analogamente, definimos as aplicações $(n-1)$-lineares $T_{a_2},\ldots,T_{a_n}$, as aplicações $(n-2)$-lineares

$$\begin{aligned} T_{a_1,a_2} &:= T\left(a_1,a_2,\cdot,\ldots,\cdot\right) \\ &\vdots \\ T_{a_{n-1},a_n} &:= T\left(\cdot,\ldots,\cdot,a_{n-1},a_n\right) \end{aligned}$$

e as aplicações lineares

$$T_{a_1,\ldots,a_{n-1}} := T\left(a_1,\ldots,a_{n-1},\cdot\right)$$
$$\vdots$$
$$T_{a_2,\ldots,a_n} := T\left(\cdot,a_2,\ldots,a_n\right).$$

Proposição 3.2.2 *Sejam* $a=(a_1,\ldots,a_n)\in E_1\times\cdots\times E_n$ *e* $T\in\mathcal{L}^{n,(a)}_{al,(q_1,\ldots,q_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$. *Então:*
(a) A aplicação

$$T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_r}}$$

é quase $(q_{k_1},\ldots,q_{k_s})$*-somante na origem, sempre que*

$$\{1,\ldots,n\}=\{j_1,\ldots,j_r\}\cup\{k_1,\ldots,k_s\},$$

$$k_1\leq\ldots\leq k_s \text{ e } \{j_1,\ldots,j_r\}\cap\{k_1,\ldots,k_s\}=\emptyset.$$

Em particular, T *é quase* $(q_1,...,q_n)$*-somante na origem.*
(b) A aplicação

$$T\in\mathcal{L}^{n,(b)}_{al,(q_1,\ldots,q_n)}(E_1,\ldots,E_n;F),$$

para todo $b\in\{\lambda_1a_1,\ldots,\lambda_na_n\}$, $\lambda_j\in\mathbb{K}$, $j=1,\ldots,n$.

Demonstração: (a) Para o operador linear $T_{a_1,\ldots,a_{n-1}}$ é suficiente observar que

$$T_{a_1,\ldots,a_{n-1}}\left(x_j^{(n)}\right)=T\left(a_1+0,\ldots,a_{n-1}+0,a_n+x_j^{(n)}\right)-T(a_1,\ldots,a_n).$$

Portanto,

$$\left(T_{a_1,\ldots,a_{n-1}}\left(x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\in Rad(F)$$

para todo $\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_n}^u(E_n)$. Consequentemente,

$$T_{a_1,\ldots,a_{n-1}} \in \mathcal{L}_{al,q_n}^1(E_n, F).$$

Os outros casos de operadores lineares são análogos.

Para o caso bilinear, $T_{a_1,\ldots,a_{n-2}}$, notemos que

$$\begin{aligned} & T_{a_1,\ldots,a_{n-2}}\left(x_j^{(n-1)}, x_j^{(n)}\right) \\ = & \left[T\left(a_1+0,\ldots,a_{n-2}+0, a_{n-1}+x_j^{(n-1)}, a_n+x_j^{(n)}\right) - T(a_1,\ldots,a_n)\right] \\ & - T_{a_1,\ldots,a_{n-1}}\left(x_j^{(n)}\right) - T_{a_1,\ldots,a_{n-2}a_n}\left(x_j^{(n-1)}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como

$$\left(T\left(a_1+0,\ldots,a_{n-2}+0, a_{n-1}+x_j^{(n-1)}, a_n+x_j^{(n)}\right) - T(a_1,\ldots,a_n)\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F),$$

$$\left(T_{a_1\ldots a_{n-1}}\left(x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F)$$

e

$$\left(T_{a_1,\ldots,a_{n-2}a_n}\left(x_j^{(n-1)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F),$$

para todo $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_k}^u(E_k)$ com $k = n-1$, n, segue que $T_{a_1,\ldots,a_{n-2}} \in \mathcal{L}_{al,(q_{n-1},q_n)}^2(E_{n-1}, E_n; F)$.

Os outros casos bilineares são análogos. Usando esse raciocínio, podemos concluir que

$$T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_r}} \in \mathcal{L}_{al,(q_{k_1},\ldots,q_{k_s})}^s(E_{k_1},\ldots,E_{k_s}; F)$$

sempre que

$$\{1,\ldots,n\} = \{j_1,\ldots,j_r\} \cup \{k_1,\ldots,k_s\},$$

$$k_1 \leq \ldots \leq k_s \text{ e } \{j_1, \ldots, j_r\} \cap \{k_1, \ldots, k_s\} = \emptyset.$$

Sabemos ainda que

$$\begin{aligned}
&\left[T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T\left(a_1, \ldots, a_n\right)\right] \\
&= \left[\begin{array}{c}
T\left(x_j^{(1)}, a_2, \ldots, a_n\right) + T\left(a_1, x_j^{(2)}, \ldots, a_n\right) + \ldots + T\left(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_j^{(n)}\right) \\
+T\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \ldots, a_n\right) + \ldots + T\left(a_1, \ldots, a_{n-2}, x_j^{(n-1)}, x_j^{(n)}\right) \\
+ \ldots + \\
+T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n-1)}, a_n\right) + \ldots + T\left(a_1, x_j^{(2)}, \ldots, x_j^{(n)}\right) \\
+T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)
\end{array}\right],
\end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Desta forma, como

$$T \in \mathcal{L}_{al,(q_1,\ldots,q_n)}^{n,(a)}(E_1, \ldots, E_n; F)$$

e

$$T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_r}} \in \mathcal{L}_{al,(q_{k_1},\ldots,q_{k_s})}^{s}(E_{k_1}, \ldots, E_{k_s}; F),$$

segue que T é quase $(q_1, ..., q_n)$-somante na origem.

(b) Seja $b = (\lambda_1 a_1, \ldots, \lambda_n a_n)$. Se $\lambda_j \neq 0$ para todo j, note que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} r_j(t) \left(T\left(\lambda_1 a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, \lambda_n a_n + x_j^{(n)}\right) - T(\lambda_1 a_1, \ldots, \lambda_n a_n)\right) \\
=&\sum_{j=1}^{k} r_j(t) \left(T\left(\lambda_1 a_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1} x_j^{(1)}, \ldots, \lambda_n a_n + \frac{\lambda_n}{\lambda_n} x_j^{(n)}\right) - T(\lambda_1 a_1, \ldots, \lambda_n a_n)\right) \\
=&\lambda_1 \ldots \lambda_n \sum_{j=1}^{k} r_j(t) \left(T\left(a_1 + \frac{1}{\lambda_1} x_j^{(1)}, \ldots, a_n + \frac{1}{\lambda_n} x_j^{(n)}\right) - T(a_1, \ldots, a_n)\right).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Como

$$\left(T\left(a_1 + \frac{1}{\lambda_1} x_j^{(1)}, \ldots, a_n + \frac{1}{\lambda_n} x_j^{(n)}\right) - T(a_1, \ldots, a_n)\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F)$$

sempre que $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_k}^u(E_k)$, então de (3.3) segue que

$$\left(T\left(\lambda_1 a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, \lambda_n a_n + x_j^{(n)}\right) - T(\lambda_1 a_1, \ldots, \lambda_n a_n)\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F).$$

Se existir j tal que $\lambda_j = 0$, o resultado também é válido. Vamos demonstrá-lo apenas no caso $n = 3$, pois os outros casos são completamente similares.

Como $T \in \mathcal{L}_{al,(q_1,q_2,q_3)}^{3,(a)}$, onde $a = (a_1, a_2, a_3)$, então sabemos, pelo item (a), que

$$\begin{aligned}
T_{a_1} &\in \mathcal{L}_{al,(q_2,q_3)}^{2}(E_2, E_3; F)\\
T_{a_2} &\in \mathcal{L}_{al,(q_1,q_3)}^{2}(E_1, E_3; F)\\
T_{a_3} &\in \mathcal{L}_{al,(q_1,q_2)}^{2}(E_1, E_2; F)\\
T_{a_1 a_2} &\in \mathcal{L}_{al,q_3}^{1}(E_3; F)\\
T_{a_1 a_3} &\in \mathcal{L}_{al,q_2}^{1}(E_2; F)\\
T_{a_2 a_3} &\in \mathcal{L}_{al,q_1}^{1}(E_1; F)\\
T &\in \mathcal{L}_{al,(q_1,q_2,q_3)}^{3}(E_1, E_2, E_3; F). \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

A demonstração será dividida em casos:

- Caso $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_3 = 0$. Note que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} r_j(t)\left[T\left(\lambda_1 a_1 + x_j^{(1)}, \lambda_2 a_2 + x_j^{(2)}, x_j^{(3)}\right) - T\left(\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, 0\right)\right]\\
=&\lambda_1\lambda_2\left[\sum_{j=1}^{k} r_j(t)\left(T\left(a_1 + \frac{1}{\lambda_1}x_j^{(1)}, a_2 + \frac{1}{\lambda_2}x_j^{(2)}, x_j^{(3)}\right) - T\left(a_1, a_2, 0\right)\right)\right]\\
=&\lambda_1\lambda_2\left[\sum_{j=1}^{k} r_j(t)\left(\begin{array}{c} T\left(a_1, a_2, x_j^{(3)}\right) + T\left(\frac{1}{\lambda_1}x_j^{(1)}, a_2, x_j^{(3)}\right) + T\left(a_1, \frac{1}{\lambda_2}x_j^{(2)}, x_j^{(3)}\right)\\ +T\left(\frac{1}{\lambda_1}x_j^{(1)}, \frac{1}{\lambda_2}x_j^{(2)}, x_j^{(3)}\right)\end{array}\right)\right]\\
=&\lambda_1\lambda_2\left[\sum_{j=1}^{k} r_j(t)\left(\begin{array}{c} T_{a_1 a_2}\left(x_j^{(3)}\right) + T_{a_2}\left(\frac{1}{\lambda_1}x_j^{(1)}, x_j^{(3)}\right) + T_{a_1}\left(\frac{1}{\lambda_2}x_j^{(2)}, x_j^{(3)}\right)\\ +T\left(\frac{1}{\lambda_1}x_j^{(1)}, \frac{1}{\lambda_2}x_j^{(2)}, x_j^{(3)}\right)\end{array}\right)\right],
\end{aligned}$$

de onde segue facilmente que $T \in \mathcal{L}^{3,(b)}_{al,(q_1,q_2,q_3)}$, onde $b = (\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, 0)$.

- Os casos $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$ e $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$ são análogos.

- Caso $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Observe que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} r_j(t) \left(T\left(\lambda_1 a_1 + x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, x_j^{(3)}\right) - T\left(\lambda_1 a_1, 0, 0\right) \right) \\
=&\lambda_1 \sum_{j=1}^{k} r_j(t) \left(T\left(a_1, x_j^{(2)}, x_j^{(3)}\right) + T\left(\frac{1}{\lambda_1} x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, x_j^{(3)}\right) - T\left(a_1, 0, 0\right) \right) \\
=&\lambda_1 \sum_{j=1}^{k} r_j(t) \left(T_{a_1}\left(x_j^{(2)}, x_j^{(3)}\right) + T\left(\frac{1}{\lambda_1} x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, x_j^{(3)}\right) \right)
\end{aligned}$$

e novamente concluímos que $T \in \mathcal{L}^{3,(b)}_{al,(q_1,q_2,q_3)}$, onde $b = (\lambda_1 a_1, 0, 0)$.

- Os casos $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$ são análogos.

- Quando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, já sabemos que $T \in \mathcal{L}^{3}_{al,(q_1,q_2,q_3)}$.

$\blacksquare$

O lema seguinte será útil nos dois próximos teoremas.

Lema 3.2.3 *Sejam $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in E'$ e $b \in F$. Se $f_m(x) = \varphi_1(x) \ldots \varphi_m(x) b$ para cada $x \in E$, então f_n é quase p-somante em qualquer $a \in E$, $1 < p \leq 2$.*

Demonstração: Devemos mostrar que $(f_m(a + x_j) - f_m(a))_{j=1}^{\infty} \in Rad(F)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$, que por definição é equivalente a mostrar que

$$\sum_{j=1}^{k} r_j(t) \left(f_m(a + x_j) - f_m(a) \right)$$

é convergente em F para quase todo $t \in [0, 1]$.

Faremos o caso onde $m = 3$. O caso geral segue de maneira análoga.

Observe que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} r_j(t)\left[f_3\left(a+x_j\right)-f_3(a)\right] \\
&=\sum_{j=1}^{k} r_j(t)\left[\varphi_1\left(a+x_j\right)\varphi_2\left(a+x_j\right)\varphi_3\left(a+x_j\right)b-\varphi_1\left(a\right)\varphi_2\left(a\right)\varphi_3\left(a\right)b\right] \\
&=\sum_{j=1}^{k} r_j(t)b\begin{bmatrix}\varphi_1\left(a\right)\varphi_2\left(a\right)\varphi_3\left(x_j\right)+\varphi_1\left(a\right)\varphi_2\left(x_j\right)\varphi_3\left(a\right)+\varphi_1\left(x_j\right)\varphi_2\left(a\right)\varphi_3\left(a\right)\\ +\varphi_1\left(a\right)\varphi_2\left(x_j\right)\varphi_3\left(x_j\right)+\varphi_1\left(x_j\right)\varphi_2\left(x_j\right)\varphi_3\left(a\right)+\varphi_1\left(x_j\right)\varphi_2\left(x_j\right)\varphi_3\left(a\right)\\ +\varphi_1\left(x_j\right)\varphi_2\left(x_j\right)\varphi_3\left(x_j\right)\end{bmatrix} \\
&=\sum_{j=1}^{k} r_j(t)b\begin{bmatrix}\varphi_3\left(x_j\varphi_1\left(a\right)\varphi_2\left(a\right)\right)+\varphi_2\left(x_j\varphi_1\left(a\right)\varphi_3\left(a\right)\right)+\varphi_1\left(x_j\varphi_2\left(a\right)\varphi_3\left(a\right)\right)\\ +\varphi_2\left(x_j\varphi_1\left(a\right)\varphi_3\left(x_j\right)\right)+\varphi_1\left(x_j\varphi_2\left(a\right)\varphi_3\left(x_j\right)\right)+\varphi_1\left(x_j\varphi_2\left(x_j\right)\varphi_3\left(a\right)\right)\\ +\varphi_1\left(x_j\varphi_2\left(x_j\right)\varphi_3\left(x_j\right)\right)\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Como φ_i é quase somante, segue por [17, Proposição 12.5] que cada termo de (3.5) converge em $L_2([0,1];F)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2^u(E)$.

Como $1 < p \leq 2$, e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$, temos $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2^u(E)$, donde segue o resultado desejado. ■

Teorema 3.2.4 (Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers) *Sejam E um espaço de Banach, $n \geq 2$ e $1 < p \leq 2$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) E tem dimensão infinita.

(b) $\mathcal{L}_{al,p}^{n,(a)}(^nE;E) \neq \mathcal{L}(^nE;E)$ para todo $a = (a_1,\ldots,a_n) \in E^n$ com $a_i \neq 0$ para todo i ou $a_i = 0$ para apenas um i.

(c) $\mathcal{L}_{al,p}^{n,(a)}(^nE;E) \neq \mathcal{L}(^nE;E)$ para algum $a = (a_1,\ldots,a_n) \in E^n$ com $a_i \neq 0$ para todo i ou $a_i = 0$ para apenas um i.

Observação 3.2.5 *Como consequência de [8, Proposição* 3.1*] podemos mostrar que* $\mathcal{L}_{al,1}^{n,(a)}(^nE;E) = \mathcal{L}(^nE;E)$*, e isso mostra a importância de tomarmos* $1 < p \leq 2$ *no Teorema que acabamos de enunciar.*

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$

Seja $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$. Suponha que, para todo $i \neq k$, a_i seja diferente de zero. Então existe $\varphi_i \in E^{'}$ tal que $\varphi_i(a_i) = 1$. Com isto, definamos

$$T\left(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n\right) = \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_{k-1}(x_{k-1})\varphi_{k+1}(x_{k+1}) \ldots \varphi_n(x_n)x_k.$$

Mostraremos que tal operador não é quase somante em a. De fato, como

$$T_{a_1 \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_n}(x) := T(a_1, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_n) = x$$

e por hipótese $dim(E) = \infty$, temos por [17, Observação 12.8] que

$$T_{a_1 \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_n}(x) \notin \mathcal{L}_{al,p}^{1}(E, E).$$

Logo, pelo item (a) da Proposição 3.2.2, $T \notin \mathcal{L}_{al,p}^{n,(a)}(^nE, E)$.

$(b) \Rightarrow (c)$ é imediato.

$(c) \Rightarrow (a)$

Suponha que $dim(E) < \infty$. Então, existem uma base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de E e uma base $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ de E' tais que $\varphi_i(u_j) = \delta_{ij}$. Seja $A \in \mathcal{L}(^nE;E)$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} A(x_1, \ldots, x_n) &= A\left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x_1)u_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x_n)u_j\right) \\ &= \sum_{j_1 \ldots j_n} \varphi_{j_1}(x_1) \ldots \varphi_{j_n}(x_n) A(u_{j_1}, \ldots, u_{j_n}). \end{aligned}$$

Desta forma, segue pelo Lema 3.2.3 que $A \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(^nE;E)$ e isto contradiz (c). ■

3.2.2 Caso polinomial

Seguindo as técnicas usadas em [2], podemos demonstrar o seguinte lema:

Lema 3.2.6 *Se* $P \in \mathcal{P}_{al,p}^{n,(a)}({}^nE;F)$*, então* $P \in \mathcal{P}_{al,p}^{n,(\lambda a)}({}^nE;F)$ *para todo* $\lambda \neq 0$.

Demonstração: Sabemos que $P \in \mathcal{P}_{al,p}^{n,(a)}({}^nE;F)$ se, e somente se,

$$\sum_{j=1}^{k} r_j(t)\left[P(a+x_j)-P(a)\right]$$

converge em $L_2([0,1],F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$. Como $P \in \mathcal{P}_{al,p}^{n,(a)}({}^nE;F)$ e

$$P(\lambda a+x_j)-P(\lambda a)=\lambda^n\left[P\left(a+\frac{x_j}{\lambda}\right)-P(a)\right],$$

então

$$\sum_{j=1}^{k} r_j(t)\left[P(\lambda a+x_j)-P(\lambda a)\right]=\lambda^n\sum_{j=1}^{k} r_j(t)\left[P\left(a+\frac{x_j}{\lambda}\right)-P(a)\right]$$

converge em $L_2([0,1],F)$, pois $\left(\frac{x_j}{\lambda}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$. Portanto, $P \in \mathcal{P}_{al,p}^{n,(\lambda a)}$, para todo $\lambda \neq 0$. ■

O lema acima nos permitiu provar o seguinte resultado:

Proposição 3.2.7 *Se* $P \in \mathcal{P}({}^nE;F)$ *e* $a \in E$*. Então* P *é quase* p*-somante em* a *se, e somente se,* $\overset{\vee}{P}$ *é quase* p*-somante em* $(a,\ldots,a) \in E^n$*.*

Demonstração: Pela Fórmula de Polarização, devida a Mazur e Orlicz [28], temos que

$$\begin{aligned}
&m!\left[\overset{\vee}{P}\left(a+x_j^{(1)},\ldots,a+x_j^{(n)}\right)-\overset{\vee}{P}(a,\ldots,a)\right]\\
&=\sum_{\varepsilon_k=0,1}(-1)^{n-\sum\varepsilon_k}\left[P\left(x_0+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\left(a+x_j^{(k)}\right)\right)-P\left(x_0+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k a\right)\right]\\
&=\sum_{\varepsilon_k=0,1}(-1)^{n-\sum\varepsilon_k}\left[P\left(x_0+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k a+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k x_j^{(k)}\right)-P\left(x_0+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k a\right)\right]
\end{aligned}$$

Como x_0 é arbitrário, podemos escolher $x_0 = (n+1)a$, e portanto

$$x_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a \neq 0.$$

Por hipótese, $P \in \mathcal{P}_{al,p}^{n,(a)}(^nE;F)$; logo, pelo Lema 3.2.6 temos $P \in \mathcal{P}_{al,p}^{n,(\lambda a)}(^nE;F)$, para todo $\lambda \neq 0$. Como

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p^u(E),$$

então

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{s} r_j(t)\left[\overset{\vee}{P}\left(a + x_j^{(1)}, \ldots, a + x_j^{(n)}\right) - \overset{\vee}{P}(a, \ldots, a)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{s} r_j(t)\frac{1}{m!}\sum_{\varepsilon_k=0,1}(-1)^{n-\sum\varepsilon_k}\left[P\left(x_0 + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k a + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k x_j^{(k)}\right) - P\left(x_0 + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k a\right)\right] \quad (3.6)
\end{aligned}$$

converge em $L_2([0,1],F)$.

Para a recíproca, note que

$$P(a + x_j) - P(a) = \overset{\vee}{P}(a + x_j, \ldots, a + x_j) - \overset{\vee}{P}(a, \ldots, a),$$

para todo j. Desta forma,

$$\sum_{j=1}^{k} r_j(t)\left[P(a + x_j) - P(a)\right] = \sum_{j=1}^{k} r_j(t)\left[\overset{\vee}{P}(a + x_j, \ldots, a + x_j) - \overset{\vee}{P}(a, \ldots, a)\right]$$

converge em $L_2([0,1];F)$, para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$. ■

O próximo resultado é uma consequência da Proposição 3.2.7 e do item (b) da Proposição 3.2.2, como se pode ver em sua demonstração.

Proposição 3.2.8 *Se $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ é quase p-somante em $a \in E$, então P é quase p-somante na origem.*

Demonstração: Note que

$$P \in \mathcal{P}_{al,p}^{n,(a)}(^nE;F) \overset{Prop.3.2.7}{\Leftrightarrow} \overset{\vee}{P} \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,(a,\ldots,a)}(^nE;F) \overset{Prop.3.2.2(b)}{\Rightarrow} \overset{\vee}{P} \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,(\lambda_1 a,\ldots,\lambda_n a)}(^nE;F)$$

para todo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Tomando $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, temos que $\overset{\vee}{P} \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,(a)}(^nE;F)$ e novamente pela Proposição 3.2.7 segue que $P \in \mathcal{P}_{al,p}^{n,(a)}(^nE;F)$. ■

Teorema 3.2.9 *Sejam E um espaço de Banach, $n \geq 2$ e $1 < p \leq 2$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) E tem dimensão infinita.

(b) $\mathcal{P}_{al,p}^{n,(a)}(^nE;E) \neq \mathcal{P}(^nE;E)$ para todo $a \in E$, $a \neq 0$.

(c) $\mathcal{P}_{al,p}^{n,(a)}(^nE;E) \neq \mathcal{P}(^nE;E)$ para algum $a \in E$, $a \neq 0$.

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$ Suponha que $\mathcal{P}_{al,p}^{n,(a)}(^nE;E) = \mathcal{P}(^nE;E)$, e $a \neq 0$. Então escolha $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(a) = 1$ e defina $P \in \mathcal{P}(^nE;E)$ por

$$P(x) = \varphi(x)^{n-1}x.$$

Seja

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_{n-1})x_n + \ldots + \varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)x_1}{n}.$$

Assim,

$$A(x, \ldots, x) = \varphi(x)^{n-1}x = P(x).$$

Logo, $A = \overset{\vee}{P}$. Pela Proposição 3.2.7, como $P \in \mathcal{P}_{al,p}^{n,(a)}(^nE;E)$ temos que $\overset{\vee}{P}$ é quase p-somante em $(a, \ldots, a)$. Considere $P_{a^{n-1}} \in \mathcal{L}(E;E)$ definido por

$$P_{a^{n-1}}(x) = \overset{\vee}{P}(a, \ldots, a, x).$$

Assim,

$$P_{a^{n-1}}(x) = \overset{\vee}{P}(a+0, \ldots, a+0, a+x) - \overset{\vee}{P}(a, \ldots, a, a), \ \forall x \in E.$$

Desta forma, concluímos que $P_{a^{n-1}}(x)$ é quase p-somante.

Além disso, sabemos que

$$P_{a^{n-1}}(x) = \frac{n-1}{n}\varphi(x)a + \frac{1}{n}x, \ \forall x \in E,$$

de onde teríamos que a identidade em E é um operador quase p-somante, e isto implica que a $\dim(E) < \infty$.

$(b) \Rightarrow (c)$ é imediato.

A demonstração de $(c) \Rightarrow (a)$ é análoga à demonstração de $(c) \Rightarrow (a)$ do Teorema 3.2.4.

■

3.3 Caracterizações de $\mathcal{L}_{al,p}^{n,(a)}(^nE;F)$

A seguir apresentaremos uma sequência de lemas que serão úteis para caracterizar o espaço $\mathcal{L}_{al,p}^{n,(a)}(^nE;F)$.

Lema 3.3.1 *Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F)$, então $\|x_n\|_F \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{Rad(F)}$ para todo n.*

Demonstração: Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F)$, então

$$\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)x_j\right\|^2 dt < \infty.$$

Pelo Lema 2.3.5,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x_j\right\|^2 dt = \int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)x_j\right\|^2 dt.$$

Mas o Lema de Contração [17, 12.2] garante que essa convergência é crescente.

Desta forma, para cada n, temos que

$$\begin{aligned}\|x_n\| &= \left(\int_0^1 \|r_n(t)x_n\|^2\, dt\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x_j\right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)x_j\right\|^2 dt\right)^{1/2},\end{aligned}$$

e o resultado está provado. ■

Lema 3.3.2 *Sejam* $\left(y_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F)$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Se*

$$\lim_{n\to\infty} \left(y_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} = y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F),$$

então

$$\lim_{n\to\infty} y_j^{(n)} = y_j \text{ em } F$$

para todo natural j.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\left(y_j^{(n)} - y_j\right)\right\|^2 dt\right)^{1/2} = \left\|\left(y_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} - (y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{Rad(F)} < \varepsilon$$

sempre que $n > N$. Desta forma, segue do Lema 3.3.1 que, para cada j,

$$\left\|y_j^{(n)} - y_j\right\| \leq 2\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\left(y_j^{(n)} - y_j\right)\right\|^2 dt\right)^{1/2} < 2\varepsilon,$$

sempre que $n > N$ e o resultado está provado. ■

A partir do lema acima, podemos mostrar a seguinte caracterização de operadores multilineares quase somantes:

Proposição 3.3.3 *As seguintes afirmações para $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ são equivalentes:*

(i) T é quase p-somante.

(ii) A aplicação $\widetilde{T} : \ell_p^u(E_1) \times \cdots \times \ell_p^u(E_n) \to Rad(F)$ dada por

$$\widetilde{T}\left(\left(z_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, \ldots, \left(z_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(T\left(z_j^{(1)}, \ldots, z_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}$$

está bem definida e é contínua.

(iii) Existe $C \geq 0$ tal que

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right) \right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq C \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,.p} \cdots \left\| \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p}$$

para todo $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E_k)$, $k = 1, ..., n$.

(iv) Existe $C \geq 0$ tal que

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{m} r_j(t) T\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right) \right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq C \left\| (x_j^{(1)})_{j=1}^{m} \right\|_{w,p} \cdots \left\| (x_j^{(n)})_{j=1}^{m} \right\|_{w,p}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Da definição de T segue que $\widetilde{T}$ está bem definida. Para mostrar que $\widetilde{T}$ é contínua, utilizaremos o teorema do gráfico fechado para aplicações multilineares.

Seja

$$\left(\left((k)z_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, \ldots, \left((k)z_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}, \left(T\left((k)z_j^{(1)}, \ldots, (k)z_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right)_{k=1}^{\infty}$$

uma sequência convergente no gráfico de $\widetilde{T}$. Suponha que

$$\left((k)z_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \xrightarrow{k} \left(x_j^{(i)}\right); i = 1, \ldots, n \text{ e } T\left((k)z_j^{(1)}, \ldots, (k)z_j^{(n)}\right) \xrightarrow{k} (y_j)_{j=1}^{\infty}.$$

Para simplificar a notação, denotaremos

$$T\left((k)z_j^{(1)}, \ldots, (k)z_j^{(n)}\right) = a_j^{(k)}.$$

Assim,

$$\left(a_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \xrightarrow{k\to\infty} (y_j)_{j=1}^{\infty}.$$

Pelo Lema 3.3.2, como

$$\left(T\left((k)z_j^{(1)}, \ldots, (k)z_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \xrightarrow{k\to\infty} (y_j)_{j=1}^{\infty},$$

então

$$T\left((k)z_j^{(1)}, \ldots, (k)z_j^{(n)}\right) \xrightarrow{k\to\infty} y_j,$$

para todo j. Como T é contínua, temos que $T(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}) = y_j$. Dessa forma, o ponto

$$\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}, \left(T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right)$$

pertence ao gráfico de $\widetilde{T}$, e $\widetilde{T}$ é contínua.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ segue do fato de $\widetilde{T}$ ser contínua.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ é imediato.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Queremos mostrar que $S_m(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} r_j(t)T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)$ converge em F para quase todo $t \in [0,1]$.

De fato, se $m > k$, então

$$\begin{aligned}
\|S_m(t) - S_k(t)\|_{L_2([0,1],F)} &= \left\| \sum_{j=k+1}^{m} r_j(t)T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right) \right\|_{L_2([0,1],F)} \\
&\leq C \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=k+1}^{m} \right\|_{w,p} \cdots \left\| \left(x_j^{(n)}\right)_{j=k+1}^{m} \right\|_{w,p}.
\end{aligned}$$

Como cada $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E_i)$, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $k > n_0$, então

$$C \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=k+1}^{m} \right\|_{w,p} \cdots \left\| \left(x_j^{(n)}\right)_{j=k+1}^{m} \right\|_{w,p} < \varepsilon.$$

Consequentemente,

$$\|S_m(t) - S_k(t)\|_{L_2([0,1],F)} < \varepsilon.$$

Desta forma, $S_m(t)$ é de Cauchy. Como $L_2([0,1],F)$ é Banach, então $S_m(t)$ converge em F para quase todo $t \in [0,1]$. ■

No Teorema 3.3.5 demonstraremos uma caracterização similar à Proposição 3.3.3, mas para aplicação quase p-somante em todo ponto.

A seguir, provaremos um lema auxiliar:

Lema 3.3.4 *Se $T \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $(a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, então existe um número real $C_{a_1 \ldots a_n}$ tal que*

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, \ldots, a_n) \right) \right\|^2 dt \leq C_{a_1 \ldots a_n},$$

sempre que $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^u(E_k)}$, $k = 1, \ldots, n$.

Demonstração: Faremos a demonstração para $n = 2$. No caso geral, a demonstração segue de forma semelhante. Note que:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, a_2 + x_j^{(2)}\right) - T(a_1, a_2) \right) \right\|^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) T\left(a_1, x_j^{(2)}\right) \right\|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) T\left(x_j^{(1)}, a_2\right) \right\|^2 dt \right)^{1/2} \\
&+ \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) T\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right) \right\|^2 dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Pelo item (iii) da Proposição 3.3.3, existe $C_1 \geq 0$ tal que

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) T\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right)\right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq C_1 \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \left\| \left(x_j^{(2)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p}.$$

Como, pela Proposição 3.2.2, T_{a_1} e T_{a_2} são quase p-somantes na origem, existem C_2 e C_3 tais que

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) T\left(a_1, x_j^{(2)}\right)\right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq C_2 \left\| \left(x_j^{(2)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p}$$

e

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) T\left(x_j^{(1)}, a_2\right)\right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq C_3 \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p}.$$

Assim, basta tomar $C_{a_1 a_2} = C_1 + C_2 + C_3$ que o resultado segue. ■

De agora em diante, se $T \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, ..., E_n; F)$, considere a aplicação n-linear

$$\phi_T : G_1 \times \cdots \times G_n \to Rad(F)$$

dada por

$$\begin{aligned} &\phi_T\left(\left(a_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right), \ldots, \left(a_n, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right) \\ &= \left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T\left(a_1, \ldots, a_n\right)\right)_{j=1}^{\infty}, \end{aligned}$$

onde

$$G_s = E_s \times \ell_p^u\left(E_s\right),\ s = 1, \ldots, n,$$

é munido com a norma da soma

$$\left\|\left(a, (x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_{G_s} := \|a\| + \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}.$$

A caracterização a seguir foi inspirada em ideias de [2] e [27].

Teorema 3.3.5 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $T \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

(b) ϕ_T *é bem definida e contínua.*

(c) Existe $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, \ldots, a_n) \right) \right\|^2 dt \right)^{1/2} \tag{3.7}$$
$$\leq C \prod_{k=1}^{n} \left(\|a_k\| + \left\| \left(x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \right)$$

para todos $\left(x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E_k)$, $k = 1, ..., n$ *e* $(a_1, ..., a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

(d) Existe $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{m} r_j(t) \left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, \ldots, a_n) \right) \right\|^2 dt \right)^{1/2} \tag{3.8}$$
$$\leq C \prod_{k=1}^{n} \left(\|a_k\| + \left\| \left(x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{m} \right\|_{w,p} \right)$$

para todo positivo inteiro m, *todos* $x_j^{(k)} \in E_k$, $k = 1, \ldots, n$ *e quaisquer* $(a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$

A aplicação ϕ_T está bem definida devido à definição de $\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, ..., E_n; F)$. Mostremos agora que ϕ_T é contínua.

Inicialmente, mostraremos que o conjunto

$$F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}} = \left\{ \begin{array}{c} (a_1,\ldots,a_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n; \\ \left\| \phi_T\left(\left(a_1,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right),\ldots,\left(a_n,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\right)\right\|_{Rad(F)} \leq k \end{array} \right\}$$

é fechado para todo número natural k e $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in B_{l_p^u(E_r)}$. Para isto, considere o conjunto

$$F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m},\ldots,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m}} = \left\{(a_1,\ldots,a_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n; \left\|\varphi_m(T)\,(a_1,\ldots,a_n)\right\|_{Rad(F)} \leq k\right\},$$

onde $\varphi_m(T)$ é a função

$$\varphi_m\,(T) : E_1 \times \cdots \times E_n \to \left(Rad(F), \|\cdot\|_1\right),$$

definida por

$$\varphi_m\,(T)\,(a_1,\ldots,a_n) = \sum_{j=1}^{m} r_j\,(t)\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)},\ldots,a_n + x_j^{(n)}\right) - T\,(a_1,\ldots,a_n)\right)$$

que é uma função contínua. De fato, observe que

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{m} r_j\,(t) \left[\begin{array}{c} T\left(a_1 + x_j^{(1)},\ldots,a_n + x_j^{(n)}\right) - T\left(b_1 + x_j^{(1)},\ldots,b_n + x_j^{(n)}\right) \\ +T\,(b_1,\ldots,b_n) - T\,(a_1,\ldots,a_n) \end{array} \right] \right\| dt \\
&\leq \int_0^1 \sum_{j=1}^{m} \left\| r_j\,(t) \left[T\left(a_1 + x_j^{(1)},\ldots,a_n + x_j^{(n)}\right) - T\left(b_1 + x_j^{(1)},\ldots,b_n + x_j^{(n)}\right)\right]\right\| dt \\
&+ \int_0^1 \sum_{j=1}^{m} \left\| r_j\,(t)\left[T\,(b_1,\ldots,b_n) - T\,(a_1,\ldots,a_n)\right]\right\| dt \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left\| T\left(a_1 + x_j^{(1)},\ldots,a_n + x_j^{(n)}\right) - T\left(b_1 + x_j^{(1)},\ldots,b_n + x_j^{(n)}\right)\right\| \\
&+ \sum_{j=1}^{m} \left\| T\,(b_1,\ldots,b_n) - T\,(a_1,\ldots,a_n)\right\|.
\end{aligned}$$

Sabemos que T é contínua no ponto $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que, se $c = (c_1, \ldots, c_n)$ e $\|c - a\| < \tilde{\delta}$, então

$$\|T(a) - T(c)\| < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Além disso, T é contínua no ponto $\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right)$, $j = 1, \ldots, m$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe δ_j tal que

$$\|T(a + x_j) - T(d)\| < \frac{\varepsilon}{2m},$$

para todos $j = 1, \ldots, n$, $d = (d_1, \ldots, d_n) \in B_{\delta_j}(a + x_j)$, onde $x_j = \left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)$. Tome

$$\delta = min\{\tilde{\delta}, \delta_1, \ldots, \delta_m\}.$$

Daí, se $\|a - b\| < \delta$ e $\|(a + x_j) - (b + x_j)\| < \delta_j$ para $j = 1, \ldots, n$, então

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_m(T)(a_1, \ldots, a_n) - \varphi_m(T)(b_1, \ldots, b_n)\| \\
&= \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(t) \left[\begin{array}{c} T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T\left(b_1 + x_j^{(1)}, \ldots, b_n + x_j^{(n)}\right) \\ +T(b_1, ..., b_n) - T(a_1, ..., a_n) \end{array} \right] \right\| dt \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sendo assim, o conjunto

$$F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^m, \ldots, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^m}$$

é fechado.

Mostraremos agora que

$$F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^\infty, \ldots, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^\infty} = \bigcap_m F_{k,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^m, \ldots, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^m}.$$

Se $(a_1, \ldots, a_n) \in F_{k, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}}$, então

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \left[T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, ..., a_n) \right] \right\| dt \leq k.$$

Pelo Princípio de Contração [17, 12.2] e pelo Lema 2.3.5, temos que

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \bigcap_m F_{k, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}, \ldots, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m}}.$$

Reciprocamente, suponha que

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \bigcap_m F_{k, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}, \ldots, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m}}.$$

Pelo Lema 2.3.5,

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{m} r_j(t) \left[T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, ..., a_n) \right] \right\| dt$$
$$= \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \left[T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, ..., a_n) \right] \right\| dt.$$

Como

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{m} r_j(t) \left[T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, ..., a_n) \right] \right\| dt \leq k,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, temos o resultado desejado.

Assim, acabamos de mostrar que o conjunto $F_{k, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}}$ é fechado, pois é interseção de fechados.

Agora, definamos o conjunto

$$F_k := \bigcap F_{k, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}},$$

onde $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u\left(E_r\right)$ e $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^u(E_r)}, r = 1, \ldots, n$.

Assim, temos pelo Lema 3.3.4 que

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k.$$

Pelo Teorema de Baire, existe k_0 tal que F_{k_0} tem interior não vazio, isto é, existem $(b_1, \ldots, b_n)$ e $0 < \varepsilon < 1$ tais que

$$\left\| \phi_T \left(\left(c_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right), \ldots, \left(c_n, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \right) \right) \right\|_{Rad(F)} \leq k_0 \tag{3.9}$$

sempre que $\|c_r - b_r\| < \varepsilon$ e $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^u(E_r)}, r = 1, \ldots, n$.

Afirmamos que ϕ_T é limitada na bola de raio ε e centro no ponto

$$\left(\left(b_1, (0)_{j=1}^{\infty}\right), \ldots, \left(b_n, (0)_{j=1}^{\infty}\right) \right) \in G_1 \times \ldots \times G_n.$$

De fato, se

$$\left\| \left(v_i, \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \right) \right\| < \varepsilon$$

para todo $i = 1, \ldots, n$, temos

$$\|v_i\| < \varepsilon \text{ e } \left\| \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\| < \varepsilon < 1.$$

Logo, usando (3.9), segue que

$$\begin{aligned}
&\left\| \phi_T \left[\left(\left(b_1, (0)_{j=1}^{\infty}\right), \ldots, \left(b_n, (0)_{j=1}^{\infty}\right) \right) + \left(\left(v_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right), \ldots, \left(v_n, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \right) \right) \right] \right\|_{Rad(F)} \\
&= \left\| \phi_T \left[\left(b_1 + v_1, \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right), \ldots, \left(b_n + v_n, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \right) \right] \right\|_{Rad(F)} \leq k_0
\end{aligned}$$

pois

$$\|(b_j + v_j) - b_j\| = \|v_j\| < \varepsilon \text{ e } \left\| \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} < \varepsilon < 1.$$

Isto mostra que ϕ_T é limitada em uma vizinhança de um certo ponto. Logo, ϕ_T é contínua.

É imediato que $(b) \Rightarrow (c)$.

$(c) \Rightarrow (d)$ é imediato.

Resta mostrar apenas que $(d) \Rightarrow (a)$. De fato, seja $n = 2$. Basta mostrar que

$$\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, a_2 + x_j^{(2)}\right) - T\left(a_1, a_2\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F),$$

para todos $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ e $(x_j^{(i)})_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E_i)$.

Para tal, note que se fizermos $a_1 = a_2 = 0$ então, pelo mesmo argumento utilizado na demonstração da Proposição 3.3.3 ($(iv) \Rightarrow (i)$), a sequência

$$S_m(t) = \sum_{j=1}^{m} r_j\left(t\right) T\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right)$$

é de Cauchy e, portanto,

$$\left(T\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F). \tag{3.10}$$

Se $a_1 = 0$ e a_2 arbitrário, então

$$\left(T\left(0 + x_j^{(1)}, a_2 + x_j^{(2)}\right) - T(0, a_2)\right)_{j=1}^{\infty} = \left(T\left(x_j^{(1)}, a_2\right) + T\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}.$$

Como por hipótese,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{m} r_j\left(t\right)\left(T\left(0 + x_j^{(1)}, a_2 + x_j^{(2)}\right) - T(0, a_2)\right)\right\| dt \\ &\leq C\left(\left\|\left(x_j^1\right)_{j=1}^m\right\|_{w,p}\right)\left(\|a_2\| + \left\|\left(x_j^2\right)_{j=1}^m\right\|_{w,p}\right), \end{aligned}$$

então a sequência $S_m(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} r_j\left(t\right)\left(T\left(x_j^{(1)}, a_2\right) + T\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right)\right)$ é de Cauchy e, portanto,

$$\left(T\left(x_j^{(1)}, a_2\right) + T\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F).$$

Dessa forma, como

$$\left(T\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F),$$

segue que

$$\left(T\left(x_j^{(1)}, a_2\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F). \tag{3.11}$$

De maneira análoga, se a_1 é arbitrário e $a_2 = 0$, então

$$\left(T\left(a_1, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F) \tag{3.12}$$

Assim, temos de (3.10), (3.11) e (3.12) que

$$\begin{aligned}&\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, a_2 + x_j^{(2)}\right) - T\left(a_1, a_2\right)\right)_{j=1}^{\infty} \\ &= \left(T\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} + \left(T\left(x_j^{(1)}, a_2\right)\right)_{j=1}^{\infty} + \left(T\left(a_1, x_j^{(2)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F)\end{aligned}$$

Para $n > 2$ o raciocínio é semelhante. ■

3.4 Normas naturais para $\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, ..., E_n; F)$

Nesta seção estamos interessados na introdução de uma norma natural no espaço $\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, ..., E_n; F)$. Além disso, mostramos ainda que o espaço $\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é completo com a norma natural que foi introduzida e que $\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}$ é um ideal normalizado de aplicações multilineares.

Proposição 3.4.1 *A aplicação*

$$\begin{cases} \|\cdot\|_{al,p}^{ev} : \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, ..., E_n; F) \to [0, \infty[\\ \|T\|_{al,p}^{ev} = \|\phi(T)\| \end{cases}$$

é uma norma em $\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, ..., E_n; F)$.

Demonstração: É claro que $\|T\|_{al,p}^{ev} \geq 0$ e que se $\|T\|_{al,p}^{ev} = 0$ então $T = 0$.

Seja $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Então

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \left[\lambda T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - \lambda T(a_1, ..., a_n) \right] \right\|^2 dt \right)^{1/2}$$
$$= \left\| \left(\lambda \left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, ..., a_n) \right) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{Rad(F)}$$
$$= |\lambda| \left\| \left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, ..., a_n) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{Rad(F)}.$$

Portanto,

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \left[\lambda T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - \lambda T(a_1, ..., a_n) \right] \right\|^2 dt \right)^{1/2}$$
$$\leq |\lambda| \, \|T\|_{al,p}^{ev} \prod_{k=1}^{n} \left(\|a_k\| + \left\| \left(x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \right). \tag{3.13}$$

Sabemos ainda que

$$\left\| \left(\lambda T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - \lambda T(a_1, ..., a_n) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{Rad(F)}$$
$$\leq \|\lambda T\|_{al,p}^{ev} \prod_{k=1}^{n} \left(\|a_k\| + \left\| \left(x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \right).$$

Logo,

$$\left\| \left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, ..., a_n) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{Rad(F)}$$
$$\leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda T\|_{al,p}^{ev} \prod_{k=1}^{n} \left(\|a_k\| + \left\| \left(x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \right). \tag{3.14}$$

Assim, segue de 3.13 e 3.14 que $\|\lambda T\|_{al,p}^{ev} = |\lambda| \, \|T\|_{al,p}^{ev}$.

Sejam T_1 e $T_2 \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então,

$$\left(T_k\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T_k\left(a_1, \ldots, a_n\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in Rad(F), k = 1, 2.$$

Logo,
$\sum\limits_{j=1}^{m} r_j\left(\cdot\right)\left[T_k\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T_k\left(a_1, ..., a_n\right)\right]$ converge em $L_2([0,1], F)$ para

$$\sum_{j=1}^{\infty} r_j\left(\cdot\right)\left[T_k\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T_k\left(a_1, ..., a_n\right)\right].$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{m} r_j\left(\cdot\right)\left[T_1\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T_1\left(a_1, ..., a_n\right)\right]\\&+\sum_{j=1}^{m} r_j\left(\cdot\right)\left[T_2\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T_2\left(a_1, ..., a_n\right)\right]\end{aligned} \tag{3.15}$$

converge em $L_2([0,1], F)$ para

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{\infty} r_j\left(\cdot\right)\left[T_1\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T_1\left(a_1, ..., a_n\right)\right]\\&+\sum_{j=1}^{\infty} r_j\left(\cdot\right)\left[T_2\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - T_2\left(a_1, ..., a_n\right)\right].\end{aligned}$$

Mas,

$$(3.15) = \sum_{j=1}^{m} r_j\left(\cdot\right)\left[\left(T_1 + T_2\right)\left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) - \left(T_1 + T_2\right)\left(a_1, ..., a_n\right)\right]$$

converge em $L_2([0,1],F)$ para

$$\sum_{j=1}^{\infty} r_j(\cdot)\left[(T_1+T_2)\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-(T_1+T_2)(a_1,...,a_n)\right].$$

Daí, segue pela unicidade dos limites que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} r_j(\cdot)\left[T_1\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-T_1(a_1,...,a_n)\right]\\
&\quad+\sum_{j=1}^{\infty} r_j(\cdot)\left[T_2\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-T_2(a_1,...,a_n)\right]\\
&=\sum_{j=1}^{\infty} r_j(\cdot)\left[(T_1+T_2)\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-(T_1+T_2)(a_1,...,a_n)\right]
\end{aligned}\tag{3.16}$$

Além disso, pelo Teorema 3.3.5,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\left[T_r\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-T_r(a_1,...,a_n)\right]\right\|^2 dt\right)^{1/2}\\
&\leq \|T_r\|_{al,p}^{ev}\prod_{k=1}^{n}\left(\|a_k\|+\left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\right), r=1,2.
\end{aligned}\tag{3.17}$$

Logo, pela desigualdade de Minkowski,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\left[(T_1+T_2)\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-(T_1+T_2)(a_1,...,a_n)\right]\right\|^2 dt\right)^{1/2}\\
&\leq\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\left[T_1\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-T_1(a_1,...,a_n)\right]\right\|^2 dt\right)^{1/2}\\
&+\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\left[T_2\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-T_2(a_1,...,a_n)\right]\right\|^2 dt\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Desta forma, segue de 3.16 e 3.17 a desigualdade triangular.

Portanto, $\|T\|_{al,p}^{ev}$ é de fato uma norma em $\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1,\ldots,E_n;F)$. ■

Lema 3.4.2 *No espaço $\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1,...,E_n;F)$ vale $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{al,p}^{ev}$.*

Demonstração: Seja $T \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1,...,E_n;F)$, então

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^m r_j(t)\left[T\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-T(a_1,...,a_n)\right]\right\|^2 dt\right)^{1/2}$$
$$\leq \|T\|_{al,p}^{ev}\prod_{k=1}^n\left(\|a_k\|+\left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^m\right\|_{w,p}\right).$$

Assim, se tomarmos $m=1$ e $a_1=\ldots=a_n=0$, então

$$\left(\int_0^1 \left\|r_1(t)\,T\left(x_1^{(1)},\ldots,x_1^{(n)}\right)\right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq \|T\|_{al,p}^{ev}\left\|x_1^{(1)}\right\|_{E_1}\cdots\left\|x_1^{(n)}\right\|_{E_n}.$$

Logo,

$$\left\|T\left(x_1^{(1)},\ldots,x_1^{(n)}\right)\right\|_F \leq \|T\|_{al,p}^{ev}\left\|x_1^{(1)}\right\|_{E_1}\cdots\left\|x_1^{(n)}\right\|_{E_n}.$$

Portanto,

$$\|T\| \leq \|T\|_{al,p}^{ev}.$$

■

Proposição 3.4.3 *O operador linear $\phi : \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1,...,E_n;F) \to \mathcal{L}(G_1,...,G_n;Rad(F))$ dado por $\phi(T)=\phi_T$ é injetivo e sua imagem é fechada em $\mathcal{L}(G_1,...,G_n;Rad(F))$.*

Demonstração: ϕ está bem definida pelo Teorema 3.3.5. Além disso, é fácil ver que ϕ é linear e injetiva.

Seja $T_k \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1,...,E_n;F)$, $k\in\mathbb{N}$, tal que

$$\phi(T_k) \xrightarrow{\|\cdot\|} A.$$

Mostraremos que existe $T \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, ..., E_n; F)$ tal que $\phi(T) = A$. Definamos

$$T(x_1, \ldots, x_n) := \lim_{k \to \infty} T_k(x_1, \ldots, x_n)$$

e vejamos que T está bem definida.

De fato, como

$$\phi(T_k) \overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow} A,$$

então dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k > k_0$,

$$\|\phi(T_k) - A\| < \varepsilon.$$

Logo

$$\|\phi(T_k)(x) - A(x)\|_{Rad(F)} < \varepsilon \|x\|, \quad \forall x \in G_1 \times \cdots \times G_n.$$

Note que

$$\phi(T_k)((0, (x_1, 0, \cdots)), \ldots, (0, (x_n, 0, \cdots))) = (T_k(x_1, \ldots, x_n), 0, \cdots).$$

Seja π_j a projeção na j-ésima coordenada, para cada $j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{k \to \infty} T_k(x_1, \ldots, x_n) &= \lim_{k \to \infty} \pi_1((T_k(x_1, \ldots, x_n)), 0, \cdots) \\
&= \lim_{k \to \infty} \pi_1[\phi(T_k)((0, (x_1, 0, \cdots)), \ldots, (0, (x_n, 0, \cdots)))] \\
&= \pi_1 \lim_{k \to \infty} \phi(T_k)((0, (x_1, 0, \cdots)), \ldots, (0, (x_n, 0, \cdots))) \\
&= \pi_1 A((0, (x_1, 0, \cdots)), \ldots, (0, (x_n, 0, \cdots)))
\end{aligned}$$

Isto mostra que o $\lim_{k \to \infty} T_k(x_1, \ldots, x_n)$ existe, ou seja, T está bem definida. Além disso, é fácil ver que T é n-linear, e pelo teorema de Banach-Steinhaus para aplicações multilineares (veja [4]), T é contínua. Logo $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, porém queremos mostrar que $T \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Para isto, consideremos

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{m} r_j\left(t\right)\left[T\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-T\left(a_1,...,a_n\right)\right]\right\|^2 dt\right)^{1/2}\\
&=\lim_{k\to\infty}\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{m} r_j\left(t\right)\left[T_k\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-T_k\left(a_1,...,a_n\right)\right]\right\|^2 dt\right)^{1/2}\\
&=\lim_{k\to\infty}\left\|\phi(T_k)\left[\left(a_1,\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right),\ldots,\left(a_n,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m}\right)\right]\right\|_{Rad(F)}\\
&\leq \lim_{k\to\infty}\left\|\phi(T_k)\right\|_\infty \prod_{r=1}^{n}\left(\|a_r\|+\left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,p}\right)\\
&=\|A\|\prod_{r=1}^{n}\left(\|a_r\|+\left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,p}\right)\\
&\leq \|A\|\prod_{r=1}^{n}\left(\|a_r\|+\left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\right).
\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 3.3.5,

$$T\in\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1,\ldots,E_n;F).$$

Agora, observe que para todo $i\in\mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
&\pi_i \left[A \left(\left(a_1, \left(x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{\infty} \right), \ldots, \left(a_n, \left(x_j^{(n)} \right)_{j=1}^{\infty} \right) \right) \right] \\
&= \pi_i \left[\lim_{k\to\infty} \phi(T_k) \left(\left(a_1, \left(x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{\infty} \right), \ldots, \left(a_n, \left(x_j^{(n)} \right)_{j=1}^{\infty} \right) \right) \right] \\
&= \pi_i \left[\lim_{k\to\infty} \left(T_k \left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)} \right) - T_k \left(a_1, \ldots, a_n \right) \right)_{j=1}^{\infty} \right] \\
&= \lim_{k\to\infty} \left[\pi_i \left(T_k \left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)} \right) - T_k \left(a_1, \ldots, a_n \right) \right)_{j=1}^{\infty} \right] \\
&= \lim_{k\to\infty} \left[T_k \left(a_1 + x_i^{(1)}, \ldots, a_n + x_i^{(n)} \right) - T_k \left(a_1, \ldots, a_n \right) \right] \\
&= T \left(a_1 + x_i^{(1)}, \ldots, a_n + x_i^{(n)} \right) - T \left(a_1, \ldots, a_n \right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&A \left[\left(a_1, \left(x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{\infty} \right), \ldots, \left(a_n, \left(x_j^{(n)} \right)_{j=1}^{\infty} \right) \right] \\
&= \phi(T) \left[\left(a_1, \left(x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{\infty} \right), \ldots, \left(a_n, \left(x_j^{(n)} \right)_{j=1}^{\infty} \right) \right].
\end{aligned}$$

Logo, o operador $\phi(T) = \phi_T$ é injetivo e sua imagem é fechada em $\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, \ldots, E_n); Rad(F))$. ■

Proposição 3.4.4 *O espaço $\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, ..., E_n; F)$ é completo com a norma $\| \cdot \|_{al,p}^{ev}$.*

Demonstração: Seja $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, ..., E_n; F)$. Então, $(\phi(T_k))_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; Rad(F))$, pois

$$\|\phi(T_m) - \phi(T_n)\| = \|\phi(T_m - T_n)\| = \|(T_m - T_n)\|_{al,p}^{ev} \leq \varepsilon,$$

para m, n suficientemente grandes.

Assim, como $(\mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; Rad(F)), \|\cdot\|)$ é completo, então $\phi(T_k)$ converge, digamos, para $A \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_n; Rad(F))$.

Pela Proposição 3.4.3, a imagem de ϕ é fechada. Assim, existe $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ tal que $\phi(T) = A$. Logo, $\|\phi(T_k) - A\| \to 0$. Portanto,

$$\|\phi(T_k) - \phi(T)\| = \|\phi(T_k - T)\| = \|T_k - T\|_{al,p}^{ev} \to 0$$

mostrando que T_k converge para T. ■

Lema 3.4.5 *Para todo* $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$*, vale*

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{\infty} r_j\left(t\right) a_j \right|^2 dt = \sum_{j=1}^{\infty} \left|a_j\right|^2.$$

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{\infty} r_j\left(t\right) a_j \right|^2 dt &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j\left(\cdot\right) a_j \right\|_{L_2}^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} r_j\left(\cdot\right) a_j, \sum_{j=1}^{\infty} r_j\left(\cdot\right) a_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j \overline{a_j} \left\langle r_j\left(\cdot\right), r_j\left(\cdot\right)\right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \overline{a_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \left|a_j\right|^2.\end{aligned}$$

■

Observação 3.4.6 *A prova da próxima proposição é uma consequência do lema 3.4.5 e um argumento utilizado na prova da Proposição* 4.3 *de [2].*

Proposição 3.4.7 *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ *dada por* $A(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n$*. Então,*

$$\|A\|_{al,p}^{ev} = 1,$$

sempre que $1 < p \leq 2$.

Demonstração: Sabemos pelo Lema 3.4.2 que

$$\|A\|_{al,p}^{ev} \geq \|A\| = 1$$

Para mostrar a desigualdade contrária, observe que, como a dimensão de $\mathbb{K}$ é finita, então $\ell_p^u(\mathbb{K}) = \ell_p(\mathbb{K}) \subseteq \ell_2(\mathbb{K})$, uma vez que estamos considerando $1 \leq p \leq 2$.

Aqui, faremos apenas o caso $n = 3$, pois o caso geral seguirá analogamente. Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(\mathbb{K})$ e observe que:

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{\infty} r_j\left(t\right)\left[A\left(a_1 + x_j^{(1)}, a_2 + x_j^{(2)}, a_3 + x_j^{(3)}\right) - A\left(a_1, a_2, a_3\right)\right]\right|^2 dt\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{\infty} r_j\left(t\right)\left[\begin{array}{c} a_1 a_2 x_j^{(3)} + a_1 x_j^{(2)} a_3 + a_1 x_j^{(2)} x_j^{(3)} + x_j^{(1)} a_2 a_3 + x_j^{(1)} a_2 x_j^{(3)} \\ + x_j^{(1)} x_j^{(2)} a_3 + x_j^{(1)} x_j^{(2)} x_j^{(3)} \end{array}\right]\right|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Utilizando o Lema 3.4.5, obtemos

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\begin{array}{c} a_1 a_2 x_j^{(3)} + a_1 x_j^{(2)} a_3 + a_1 x_j^{(2)} x_j^{(3)} + x_j^{(1)} a_2 a_3 + x_j^{(1)} a_2 x_j^{(3)} + x_j^{(1)} x_j^{(2)} a_3 \\ + x_j^{(1)} x_j^{(2)} x_j^{(3)} \end{array}\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq |a_1 a_2| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^{(3)}\right|^2\right)^{1/2} + |a_1 a_3| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^{(2)}\right|^2\right)^{1/2} + |a_2 a_3| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^{(1)}\right|^2\right)^{1/2}$$

$$+ |a_1| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^{(2)} x_j^{(3)}\right|^2\right)^{1/2} + |a_2| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^{(1)} x_j^{(3)}\right|^2\right)^{1/2} + |a_3| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^{(1)} x_j^{(2)}\right|^2\right)^{1/2}$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^{(1)} x_j^{(2)} x_j^{(3)}\right|^2\right)^{1/2}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq |a_1a_2| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(3)} \right|^2 \right)^{1/2} + |a_1a_3| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(2)} \right|^2 \right)^{1/2} + |a_2a_3| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(1)} \right|^2 \right)^{1/2} \\
&+ |a_1| \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(2)} \right|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(3)} \right|^2 \right) \right]^{1/2} + |a_2| \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(1)} \right|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(3)} \right|^2 \right) \right]^{1/2} \\
&+ |a_3| \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(1)} \right|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(2)} \right|^2 \right) \right]^{1/2} + \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(1)} \right|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(2)} \right|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(3)} \right|^2 \right) \right]^{1/2} \\
&= \left[|a_1| + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(1)} \right|^2 \right)^{1/2} \right] \left[|a_2| + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(2)} \right|^2 \right)^{1/2} \right] \left[|a_3| + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_j^{(3)} \right|^2 \right)^{1/2} \right] - |a_1a_2a_3| \\
&\leq \left(|a_1| + \left\| \left(x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_2 \right) \left(|a_2| + \left\| \left(x_j^{(2)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_2 \right) \left(|a_3| + \left\| \left(x_j^{(3)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_2 \right) \\
&\leq \left(|a_1| + \left\| \left(x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_p \right) \left(|a_2| + \left\| \left(x_j^{(2)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_p \right) \left(|a_3| + \left\| \left(x_j^{(3)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_p \right) \\
&= \left(|a_1| + \left\| \left(x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \right) \left(|a_2| + \left\| \left(x_j^{(2)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \right) \left(|a_3| + \left\| \left(x_j^{(3)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \right).
\end{aligned}
$$

A última igualdade segue do fato de $\mathbb{K}$ ter dimensão finita. Com isto, segue que $\|A\|_{al,p}^{ev} \leq 1$, e o resultado é verdadeiro. ■

O lema seguinte será útil na demonstração do próximo resultado.

Lema 3.4.8 *Seja* $v : E \to F$. *Se* v *é linear, contínua e* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$, *então* $(v(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(F)$.

Demonstração: Seja $\varphi \in F'$, $\|\varphi\|_{F'} \leq 1$. Então,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=k}^{\infty} |\varphi \circ v(x_j)|^p \right)^{1/p} &\leq \|v\| \left(\sum_{j=k}^{\infty} \left| \frac{\varphi \circ v}{\|v\|}(x_j) \right|^p \right)^{1/p} \\
&\leq \|v\| \sup_{\|\psi\|_{E'} \leq 1} \left(\sum_{j=k}^{\infty} |\psi(x_j)|^p \right)^{1/p} \to 0,
\end{aligned}
$$

pois $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$. ■

Teorema 3.4.9 *$(\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}, \|.\|_{al,p}^{ev})$ é um ideal normalizado de aplicações multilineares.*

Demonstração: Sejam $u_j \in \mathcal{L}(N_j, E_j)$, $j = 1, \ldots, n$, $T \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $A \in \mathcal{L}(F; H)$. Queremos verificar que

$$A \circ T \circ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(N_1, \ldots, N_n; H).$$

Para isso, observe que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} r_j(t) \left[\begin{array}{c} A \circ T \circ (u_1, \ldots, u_n) \left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)}\right) \\ -A \circ T \circ (u_1, \ldots, u_n)(a_1, \ldots, a_n) \end{array} \right] \\
=&\sum_{j=1}^{m} r_j(t) \left[\begin{array}{c} A \circ T \left(u_1(a_1) + u_1\left(x_j^{(1)}\right), \ldots, u_n(a_n) + u_n\left(x_j^{(n)}\right)\right) \\ -A \circ T (u_1(a_1), \ldots, u_n(a_n)) \end{array} \right] \\
=&A\sum_{j=1}^{m} r_j(t) \left[T\left(u_1(a_1) + u_1\left(x_j^{(1)}\right), \ldots, u_n(a_n) + u_n\left(x_j^{(n)}\right)\right) - T(u_1(a_1), \ldots, u_n(a_n))\right].
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Como $\left(v\left(x_j^{(i)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p^u(E_i)$, devido ao Lema 3.4.8, então 3.18 converge para quase todo t. Logo,

$$A \circ T \circ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(N_1, \ldots, N_n; H).$$

Desta forma, temos que

$$
\left\| \begin{pmatrix} A \circ T \circ (u_1, \ldots, u_n) \left(a_1 + x_j^{(1)}, \ldots, a_n + x_j^{(n)} \right) \\ -A \circ T \circ (u_1, \ldots, u_n) (a_1, \ldots, a_n) \end{pmatrix}_{j=1}^{\infty} \right\|_{Rad(H)}
$$

$$
= \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \begin{bmatrix} A \circ T \left(u_1(a_1) + u_1\left(x_j^{(1)}\right), \ldots, u_n(a_n) + u_n\left(x_j^{(n)}\right) \right) \\ -A \circ T \left(u_1(a_1), \ldots, u_n(a_n) \right) \end{bmatrix} \right\|^2 dt \right)^{1/2}
$$

$$
= \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} A \left(r_j(t) \begin{bmatrix} T \left(u_1(a_1) + u_1\left(x_j^{(1)}\right), \ldots, u_n(a_n) + u_n\left(x_j^{(n)}\right) \right) \\ -T \left(u_1(a_1), \ldots, u_n(a_n) \right) \end{bmatrix} \right) \right\|^2 dt \right)^{1/2}
$$

$$
= \left(\int_0^1 \left\| A \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \begin{bmatrix} T \left(u_1(a_1) + u_1\left(x_j^{(1)}\right), \ldots, u_n(a_n) + u_n\left(x_j^{(n)}\right) \right) \\ -T \left(u_1(a_1), \ldots, u_n(a_n) \right) \end{bmatrix} \right\|^2 dt \right)^{1/2}
$$

$$
\leq \left(\|A\|^2 \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \begin{bmatrix} T \left(u_1(a_1) + u_1\left(x_j^{(1)}\right), \ldots, u_n(a_n) + u_n\left(x_j^{(n)}\right) \right) \\ -T \left(u_1(a_1), \ldots, u_n(a_n) \right) \end{bmatrix} \right\|^2 dt \right)^{1/2}
$$

$$
\leq \|A\| \, \|T\|_{al,p}^{ev} \left(\|u_1(a_1)\|_{E_1} + \left\| \left(u_1\left(x_j^{(1)}\right) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \right) \cdots \left(\|u_n(a_n)\|_{E_n} + \left\| \left(u_n\left(x_j^{(n)}\right) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \right)
$$

$$
\leq \|A\| \, \|T\|_{al,p}^{ev} \, \|u_1\| \cdots \|u_n\| \left(\|(a_1)\|_{N_1} + \left\| \left(x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \right) \cdots \left(\|(a_n)\|_{N_n} + \left\| \left(x_j^{(n)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \right).
$$

Logo,

$$
\|A \circ T \circ (u_1, \ldots, u_n)\|_{al,p}^{ev} \leq \|A\| \, \|T\|_{al,p}^{ev} \, \|u_1\| \cdots \|u_n\| .
$$

Juntando-se esse resultado às Proposições 3.4.1 e 3.4.7, temos que $(\mathcal{L}_{al,p}^{ev}, \|\cdot\|_{al,p}^{ev})$ é um ideal normalizado de aplicações multilineares, visto que são satisfeitas as hipóteses da Definição 1.2.2. ■

3.5 Uma norma natural para $\mathcal{P}_{al,p}^{n,ev}\left({}^{n}E;F\right)$ e tipos de holomorfia

Tipos de holomorfia foram introduzidos por L. Nachbin [30] em 1969 e recentemente, em [9], essa noção foi modificada e chamada de tipo de holomorfia global. A relação entre ideais de aplicações multilineares e tipos de holomorfia foram investigadas em [9].

De [32, Proposição 4], sabe-se que

$$P \in \mathcal{P}_{al,p}^{n,ev}({}^{n}E;F) \Leftrightarrow \overset{\vee}{P} \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}({}^{n}E;F).$$

Agora, consideremos a função

$$\|\cdot\|_{al,p}^{ev} : \mathcal{P}_{al,p}^{n,ev}({}^{n}E;F) \to [0,+\infty)\,,$$

definida por

$$\|P\|_{al,p}^{ev} := \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{al,p}^{ev}.$$

Desta forma, temos uma norma natural no espaço $\mathcal{P}_{al,p}^{n,ev}\left({}^{n}E;F\right)$. Com esta norma, a Proposição 1.3.5 nos garante que $\left(\mathcal{P}_{al,p}^{n,ev}, \|\cdot\|_{al,p}^{ev}\right)$ é um ideal de Banach de polinômios. Utilizando esse fato, mostraremos que $\left(\mathcal{P}_{al,p}^{n,ev}, \|\cdot\|_{al,p}^{ev}\right)$ é um tipo de holomorfia global. As técnicas foram adaptadas de [9, Teorema 9.6]. Nessa direção, faremos antes a seguinte proposição.

Proposição 3.5.1 *O ideal* $\left(\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}, \|\cdot\|_{al,p}^{ev}\right)$ *possui a propriedade* $(\mathbf{B})$.

Demonstração: Seja $A \in \mathcal{L}_{al,p}^{n+1,ev}(E_1,\ldots,E_{n+1};F)$. Como

$$\begin{aligned}&A_a\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-A_a(a_1,\ldots,a_n)\\&=A\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)},a+0\right)-A(a_1,\ldots,a_n,a),\end{aligned}$$

então

$$\left(A_a\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-A_a\left(a_1,\ldots,a_n\right)\right)_{j=1}^{\infty}$$
$$=\left(A\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)},a+0\right)-A(a_1,\ldots,a_n,a)\right)_{j=1}^{\infty}\in Rad(F),$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\in\ell_p^u(E_i)$.

Logo,

$$A_a\in\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1,\ldots,E_n;F).$$

Além disso, note que:

$$\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^{\infty}r_j(t)\left(A_a\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-A_a\left(a_1,\ldots,a_n\right)\right)\right\|^2dt\right)^{1/2}$$
$$\leq\|A_a\|_{al,p}^{ev}\prod_{i=1}^{n}\left(\|a_i\|+\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\right).$$

Como

$$\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^{\infty}r_j(t)\left(A_a\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-A_a(a_1,\ldots,a_n)\right)\right\|^2dt\right)^{1/2}$$
$$=\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^{\infty}r_j(t)\left(A\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)},a+0\right)-A(a_1,\ldots,a_n,a)\right)\right\|^2dt\right)^{1/2}$$
$$\leq\|A\|_{al,p}^{ev}\prod_{i=1}^{n}\left(\|a_i\|+\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\right)\|a\|,$$

segue que

$$\|A_a\|_{al,p}^{ev}\leq\|A\|_{al,p}^{ev}\,\|a\|.$$

Portanto, $\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}$ tem a propriedade (**B**). ■

O próximo teorema é fundamental para os nossos propósitos, e se encontra provado em [9, Teorema 3.2].

Teorema 3.5.2 ([9, Teorema 3.2]) *Se o ideal de Banach $\mathcal{M}$ de aplicações multilineares possui a propriedade* $(\mathbf{B})$ *com constante C, então o ideal de polinômios de Banach $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ é um tipo de holomorfia global com constante $\sigma = 2C$.*

O próximo resultado é uma consequência imediata da Proposição 3.5.1 e do Teorema 3.5.2.

Teorema 3.5.3 $\left(\mathcal{P}_{al,p}^{n,ev}, \|.\|_{al,p}^{ev}\right)$ *é um tipo de holomorfia global.*

3.6 Coerência e compatibilidade

Para finalizar este capítulo, mostraremos que a sequência de pares de ideais $\left(\left(\mathcal{P}_{al,p}^{n,ev}, \|\cdot\|_{al,p}^{ev}\right), \left(\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}, \|\cdot\|_{al,p}^{ev}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ é coerente e compatível com o ideal $\Pi_{al,p}$, de acordo com a nossa abordagem apresentada no capítulo anterior. Para tal, fazemos uma sequência de proposições que nos conduzirão ao nosso objetivo.

Note que a próxima proposição é ligeiramente diferente da Proposição 3.2.7 e a demonstração é análoga à demonstração da Proposição 2.4.9.

Proposição 3.6.1 *Seja $P \in \mathcal{P}(^nE, F)$. Então $P \in \mathcal{P}_{al,p}^{n,ev}(^nE; F)$ se, e somente se, $\overset{\vee}{P} \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(^nE; F)$.*

Proposição 3.6.2 *Se $P \in \mathcal{P}_{al,p}^{n+1,ev}(^{n+1}E; F)$ e $a \in E$, então $P_a \in \mathcal{P}_{al,p}^{n,ev}(^nE; F)$ e*

$$\|P_a\|_{al,p}^{ev} \leq \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{al,p}^{ev} \|a\| .$$

Demonstração: Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$, e $b \in E$. Observe que, por definição,

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\left(P_a(b+x_j)-P_a(b)\right)\right\|^2 dt\right)^{1/2}$$
$$=\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\left(\overset{\vee}{P}(a,b+x_j,\ldots,b+x_j)-\overset{\vee}{P}(a,b,\ldots,b)\right)\right\|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Como por hipótese, $P \in \mathcal{P}_{al,p}^{n+1,ev}\left({}^{n+1}E;F\right)$ segue da Proposição 3.6.1 que $\overset{\vee}{P} \in \mathcal{L}_{al,p}^{n+1,ev}\left({}^{n+1}E;F\right)$ e, consequentemente,

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\left(P_a(b+x_j)-P_a(b)\right)\right\|^2 dt\right)^{1/2}$$
$$\leq \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{al,p}^{ev}\|a\|\left(\|b\|+\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\right)^n.$$

Logo,

$$\|P_a\|_{al,p}^{ev} \leq \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{al,p}^{ev}\|a\|.$$

■

Proposição 3.6.3 *Se* $T \in \mathcal{L}_{al,p}^{n+1,ev}(E_1,\ldots,E_{n+1};F)$ *e* $a_k \in E_k$ *para algum* $k=1,\ldots,n+1$, *então* $T_{a_k} \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1,\ldots,E_{k-1},E_{k+1},\ldots,E_{n+1};F)$ *e*

$$\|T_{a_k}\|_{al,p}^{ev} \leq \|T\|_{al,p}^{ev}\|a_k\|.$$

Demonstração: Sejam $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E_i)$ e $b_i \in E_i$. Note que o resultado segue de

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \left[\begin{array}{c} T_{a_k} \left(\begin{array}{c} b_1 + x_j^{(1)}, \ldots, b_{k-1} + x_j^{(k-1)}, b_{k+1} + x_j^{(k+1)}, \ldots, \\ b_{n+1} + x_j^{(n+1)} \end{array} \right) \\ -T_{a_k}(b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots, b_{n+1}) \end{array} \right] \right\|^2 dt \right)^{1/2}$$
$$= \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \left[\begin{array}{c} T \left(\begin{array}{c} b_1 + x_j^{(1)}, \ldots, b_{k-1} + x_j^{(k-1)}, a_k + 0, b_{k+1} + x_j^{(k+1)}, \\ \ldots, b_{n+1} + x_j^{(n+1)} \end{array} \right) \\ -T(b_1, \ldots, b_{k-1}, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_{n+1}) \end{array} \right] \right\|^2 dt \right)^{1/2}$$
$$\leq \|T\|_{al,p}^{ev} \|a_k\| \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \left(\|b_i\| + \left\| \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \right).$$

■

Proposição 3.6.4 *Se* $T \in \mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}(E_1, \ldots, E_n; F)$ *e* $\gamma \in E'_{n+1}$, *então* $\gamma T \in \mathcal{L}_{al,p}^{n+1,ev}(E_1, \ldots, E_{n+1}; F)$ *e*

$$\|\gamma T\|_{al,p}^{ev} \leq \|\gamma\| \|T\|_{al,p}^{ev}.$$

Demonstração: Sejam $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E_k)$ e $a_k \in E_k$ para todo $k = 1, \ldots, n+1$. Note que

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\left[\begin{array}{c}\gamma\left(a_{n+1}+x_j^{(n+1)}\right)T\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)\\ -\gamma\left(a_{n+1}\right)T\left(a_1,\ldots,a_n\right)\end{array}\right]\right\|^2 dt\right)^{1/2}$$
$$\leq \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\,\gamma\left(a_{n+1}\right)\left(T\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)-T\left(a_1,\ldots,a_n\right)\right)\right\|^2 dt\right)^{1/2}$$
$$+\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\,\gamma\left(x_j^{(n+1)}\right)T\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)\right\|^2 dt\right)^{1/2}$$
$$\leq \|\gamma\|\,\|a_{n+1}\|\,\|T\|_{al,p}^{ev}\prod_{k=1}^{n}\left(\|a_k\|+\left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\right)$$
$$+\|\gamma\|\left\|\left(x_j^{(n+1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\|T\|\sup_j\prod_{k=1}^{n}\left(\left\|a_k+x_j^{(k)}\right\|\right)$$

Como

$$\|T\|_{al,p}^{ev}\geq\|T\|$$

e

$$\sup_j\left\|a_k+x_j^{(k)}\right\|\leq\left(\|a_k\|+\left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\right),$$

segue da última desigualdade que

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\left[\begin{array}{c}\gamma\left(a_{n+1}+x_j^{(n+1)}\right)T\left(a_1+x_j^{(1)},\ldots,a_n+x_j^{(n)}\right)\\ -\gamma\left(a_{n+1}\right)T\left(a_1,\ldots,a_n\right)\end{array}\right]\right\|^2 dt\right)^{1/2}$$
$$\leq \|\gamma\|\,\|a_{n+1}\|\,\|T\|_{al,p}^{ev}\prod_{k=1}^{n}\left(\|a_k\|+\left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\right)$$
$$+\|\gamma\|\left\|\left(x_j^{(n+1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\|T\|_{al,p}^{ev}\prod_{k=1}^{n}\left(\|a_k\|+\left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\right)$$
$$=\|\gamma\|\,\|T\|_{al,p}^{ev}\prod_{k=1}^{n+1}\left(\|a_k\|+\left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\right),$$

e o resultado está provado. ■

Proposição 3.6.5 *Se $P \in \mathcal{P}_{al,p}^{n,ev}\left({}^{n}E;F\right)$ e $\gamma \in E'$, então $\gamma P \in \mathcal{P}_{al,p}^{n+1,ev}\left({}^{n+1}E;F\right)$ e*

$$\|\gamma P\|_{al,p}^{ev} \leq \|\gamma\| \, \|P\|_{al,p}^{ev}.$$

Demonstração: Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$ e $a \in E$. Note que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \left[\gamma(a+x_j) P(a+x_j) - \gamma(a) P(a)\right] \right\|^2 dt\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \gamma(a) \left[P(a+x_j) - P(a)\right] \right\|^2 dt\right)^{1/2} \\
&+ \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \gamma(x_j) P(a+x_j) \right\|^2 dt\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \gamma(a) \left[\overset{\vee}{P}(a+x_j, \ldots, a+x_j) - \overset{\vee}{P}(a, \ldots, a)\right] \right\|^2 dt\right)^{1/2} \\
&+ \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \gamma(x_j) P(a+x_j) \right\|^2 dt\right)^{1/2} \\
&\leq \|\gamma\| \, \|a\| \left\|\overset{\vee}{P}\right\|_{al,p}^{ev} \left(\|a\| + \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\right)^n + \|\gamma\| \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p} \|P\| \sup_j \|a+x_j\|^n \\
&= \|\gamma\| \, \|a\| \, \|P\|_{al,p}^{ev} \left(\|a\| + \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\right)^n + \|\gamma\| \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p} \|P\| \sup_j \|a+x_j\|^n.
\end{aligned}$$

O resultado segue utilizando os mesmos argumentos utilizados na demonstração da Proposição 3.6.4. ■

Fazendo uso das Proposições 3.6.1 a 3.6.5 e da Proposição 2.1.6, obtemos o principal resultado dessa seção, apresentado no próximo teorema:

Teorema 3.6.6 *A sequência* $\left(\left(\mathcal{P}_{al,p}^{n,ev}, \|\cdot\|_{al,p}^{ev}\right), \left(\mathcal{L}_{al,p}^{n,ev}, \|\cdot\|_{al,p}^{ev}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ *é coerente e compatível com o ideal* $\Pi_{al,p}$.

Referências Bibliográficas

[1] R. Alencar and M. C. Matos, Some Classes of multilinear mappings between Banach spaces, Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático 12, Universidad Complutense Madrid, (1989).

[2] J. Barbosa, G. Botelho, D. Diniz and D. Pellegrino, Spaces of absolutely summing polynomials, Math. Scand. **101** (2007), 219-237.

[3] A.T. Bernardino, Ideais de Aplicações Multilineares e Polinômios entre Espaços de Banach, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.

[4] A. T. Bernadino, A simple natural approach to the uniform boundedness principle for multilinear mappings, Proyecciones **28** (2009) 203-207.

[5] G. Botelho, Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials, Math. Proc. R. Ir. Acad. **97** (1997), 145-153.

[6] G. Botelho, Almost summing polynomials, Math. Nachr. **211** (2000), 25-36.

[7] G. Botelho, Ideals of polynomials generated by weakly compact operators, Note Mat. **25** (2005), 69-102.

[8] G. Botelho, H.-A. Braunss and H. Junek, Almost p-summing polynomials and multilinear mappings, Arch. Math. **76** (2001), 109-118.

[9] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek and D. Pellegrino, Holomorphy types and ideals of multilinear mappings, Studia Math. **177** (2006), 43-65.

[10] G. Botelho and D. Pellegrino, Two new properties of ideals of pollynomials and aplications. Indag. Math. **16** (2005), 157-169.

[11] G. Botelho and D. Pellegrino, When every multilinear mappings is multiple summing, Math. Nachr. **282** (2009), 1414-1422.

[12] H.-A. Braunss, Ideale multilinearer Abbildungen und Räume holomorpher Funktionen, Dissertation (A), Pädagogische Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam, 1984.

[13] E. Caliskan and D. Pellegrino, On the multilinear generalizations of the concept of absolutely summing operators, Rocky Mountain J. Math. **37** (2007), 1137-1154.

[14] D. Carando, V. Dimant, S. Muro, Coherent sequences of polinomial ideals on Banach spaces. Math. Nachr. 282 (2009), 1111-1133.

[15] A. Defant and D. Pérez-García, A tensor norm preserving unconditionality for L_p-spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 3287-3306.

[16] A. Defant, D. Popa and U. Schwarting, Coordenatewise multiple summing operators on Banach spaces, J. Funct. Anal. **259** (2010), 220-242.

[17] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, Absolutely summing operators, Cambridge University Press, 1995.

[18] S. Geiss, Ideale multilinearer Abbildungen, Diplomarbeit, Brandenburgische Landeshochschule, 1985.

[19] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc. **16**, 1955.

[20] A. Grothendieck, Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Mat. São Paulo. **8** (1956), 1-79.

[21] V. Dimant, Strongly p-summing multilinear operators, J. Math. Anal. Appl. **278** (2003), 182-193.

[22] S. Dineen, Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, Springer-Velarg, London, 1999.

[23] A. Dvoretzky and C. Rogers, Absolutely and unconditional convergence in normed linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **36** (1950), 192-197.

[24] H. Junek, M.C. Matos and D. Pellegrino, Inclusion theorems for absolutely summing holomorphic mappings, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 3983-3991.

[25] J. Lindenstrauss e A. Pełczyński, Absolutely summing operator in L_p spaces and their applications, Studia Math. 29 (1968), 275-326.

[26] M. Matos, Absolutely summing holomorphic mappings, An. Acad. Brasil. Ciênc. **68** (1996), 1-13.

[27] M.C. Matos, Nonlinear absolutely summing mappings, Math. Nachr. **258** (2003), 71-89.

[28] S. Mazur and W. Orlicz, Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen, Studia Math. **5** (1934), 50-68.

[29] J. Mujica, Complex Analysis in Banach Spaces, Dover Publications, New York, 2010.

[30] L. Nachbin, Topology on Spaces of Holomorphic Mappings, Springer, New York, 1969.

[31] D. Pellegrino, Aplicações entre espaços de Banach relacionadas à convergências de séries, Tese de doutorado, UNICAMP, 2002.

[32] D. Pellegrino, Almost summing mappings, Arch. Math. **82** (2004), 68-80.

[33] D. Pellegrino, Strongly almost summing holomorphic mappings, J. Math. Anal Appl. **287** (2003), 246-254.

[34] D. Pellegrino and J. Ribeiro, On almost summing polynomials and multilinear mappings, a aparecer em Linear Multilinear Algebra.

[35] D. Pellegrino and J. Santos, A general Pietsch Domination Theorem, J. Math. Anal. Appl. **375** (2011), 371-374.

[36] D. Pellegrino and J. Santos, On summability of nonlinear mappings: a new approach, a aparecer em Math. Z. doi: 10.1007/s00209-010-0792-4.

[37] D. Pellegrino and J. Santos, Absolutely summing operators: a panorama, a aparecer em Quaest. Math.

[38] D. Pellegrino and M. L. V. Souza, Fully and strongly almost summing multilinear mappings. Rocky Mountain J. Math. **36** (2006), 683-698.

[39] D. Pérez-García, The inclusion theorem for multiple summing operators, Studia Math. **165** (2004), 275-290.

[40] D. Pérez-García, Comparing different classes of absolutely summing multilinear operators, Arch. Math. **85** (2005), 258-267.

[41] A. Pietsch, Absolut p-summierende Abbildungen in normieten Räumen, Studia Math. **27** (1967), 333-353.

[42] A. Pietsch, Operator Ideals, Deustscher Verlag der Wiss, 1978 and North Holland, Amsterdam, 1980.

[43] A. Pietsch, Ideals of multilinear functionals, Forschungsergebnisse, Frierich Schiller Universität, Jena, 1983.

[44] A. Pietsch, Ideals of multilinear functionals, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, Teubner-Texte, Leipzig, 1983, 185-199.

[45] D. Popa, Reverse inclusions for multiple summing operators, J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), 360-368.

[46] J. Santos, Resultados de coincidência para polinômios absolutamente somantes, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.