

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Doutorado em Matemática

Instabilidade e bifurcação num problema de $n+1$ corpos

por

Gersonilo Oliveira da Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Recife - PE
Fevereiro/2011

Catálogo na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc L. Salvador, CRB 4-572

Silva, Gersonilo Oliveira da.

Instabilidade e bifurcação num problema de $N+1$ corpos / Gersonilo Oliveira da Silva.- Recife: O Autor, 85 f.: fig.

Orientador: Eduardo Shirlippe Góes Leandro.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2011.

Inclui bibliografia.

1.Mecânica celeste. 2.Teoremas de existência.
3.Teoria da bifurcação. I. Leandro, Eduardo Shirlippe Góes (orientador). II. Título.

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado:

Hildeberto Eulálio Cabral, UFPE

Co-Orientador

César Augusto Rodrigues Castilho, UFPE

Ramón Orestes Mendoza Ahumada, UFPE

Márcia Dantas Pragana, UFRPE

Eder Mateus de Souza, UFS

INSTABILIDADE E BIFURCAÇÃO NUM PROBLEMA DE $N+1$ CORPOS

Por

Gersonilo Oliveira da Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415 – Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Fevereiro – 2011

Resumo

Nosso objetivo central é a análise da configuração poligonal com massas iguais dispostas nos vértices do polígono e uma massa desprezível num dos eixos de simetria.

Fazemos no primeiro capítulo, a apresentação de conceitos e resultados que fundamentam nossa perspectiva à luz da Mecânica Celeste, incisivamente nas configurações centrais. Lá apresentamos as equações de Newton para o movimento, fazemos transferência destas para o formalismo Hamiltoniano, e expomos alguns resultados que evidenciam não só particularidades, como também a natureza destes sistemas, o que justifica seu uso no tratamento das equações de movimento.

No segundo capítulo, discutimos, sucintamente, a caracterização das soluções particulares, denominadas configurações centrais, que compõem o escopo de nosso trabalho.

No capítulo três, apresentamos o que seria uma possível cronologia do desenvolvimento matemático da análise das configurações poligonais e o estudo de sua estabilidade, adequando a exposição ao foco deste trabalho.

No quarto capítulo, descrevemos o uso do operador de Perron-Frobenius l -ádico, para representação de funções complexas, o qual usamos para nossas análises.

No quinto capítulo, fazemos uma dedução matemática das equações do problema de $n+1$ corpos, no caso em que os n corpos, denominados massas primárias, estão dispostos nos vértices de um polígono regular. Lá também apresentamos a estrutura da análise de estabilidade de um problema restrito. E apresentamos os resultados acerca da instabilidade da configuração provinda do problema restrito, para o primeiro eixo de simetria $[\theta = 0]$ e para o segundo eixo $[\theta = \frac{\pi}{n}]$, com restrições aos valores de r e n .

No sexto capítulo, apresentamos uma demonstração completa de um resultado de existência e unicidade para a posição de equilíbrio no problema restrito, para o primeiro eixo de simetria $[\theta = 0]$ e a análise da bifurcação para este eixo. Abordamos uma análise das bifurcações para o segundo eixo $[\theta = \frac{\pi}{n}]$, obtendo alguns fatos.

Exibimos no sétimo capítulo, uma análise numérica, feita com o auxílio do software Maple, onde são apresentados resultados bastante relevantes quanto a dinâmica das configurações quando usamos o valor de uma massa central à configuração como parâmetro, encontrando dois tipos de bifurcações. E também uma apresentação detalhada de estimativas que serviram de suporte no esclarecimento dos resultados apresentados nos capítulos anteriores.

Palavras Chave: Configurações Centrais, Estabilidade, Bifurcação.

Abstract

Our main objective is the analysis of polygonal configuration with equal masses placed at the vertices of the polygon and a massless one of the axes of symmetry.

We in the first chapter, the presentation of results and concepts that underlie our perspectiva the light of celestial mechanics, central configurations in sharply. Here we present the Newton's equations for the movement, we transfer these to the Hamiltonian formalism, and lays out some results which show not only particular but also the nature of these systems, which justifies its use in treating the equations of motion.

In the second chapter, we discuss briefly the characterization of particular solutions, called central configurations, which make up the scope of our work.

In chapter three, which would present a possible timeline for development of the mathematical analysis of polygonal configurations and study their stability, adjusting exposure to the focus of this work.

In the fourth chapter, we describe the use of Perron-Frobenius operator of l-adic, for representation of complex functions, which we used for our analysis.

In the fifth chapter, we make a mathematical deduction of the equations of the problem of $n + 1$ bodies, in the case where n bodies, called primary masses are arranged at the vertices of a regular polygon. There we also present the structure of the stability analysis of a restricted problem. And we present the results about the instability of the configuration of the problem stemmed restricted to the first axis of symmetry $[\theta = 0]$ and the second axis $[\theta = \frac{\pi}{n}]$, constrained to the values of r and n .

In the sixth chapter, we present a complete proof of a result of existence and uniqueness for the equilibrium position of the problem restricted to the first axis of symmetry $[\theta = 0]$ and the bifurcation analysis for this axis. We address an analysis of the bifurcations for the second axis $[\theta = \frac{\pi}{n}]$, getting some facts.

We display in the seventh chapter, a numerical analysis, performed with the aid of the Maple software, which presents results that are quite relevant as the dynamics of the settings used when the value of a central mass as a parameter to the setting, finding two types of bifurcations. Also a detailed presentation of estimates that would support clarification of results presented in previous chapters.

Keywords: Central Configurations, Stability, Bifurcation.

Agradecimentos

Há um meio bem mais eficaz de se agradecer as participações diversas recebidas enquanto a elaboração deste trabalho. Foram várias e indiscreíveis as experiências vividas neste tempo. Dificuldades que se assemelham a abismos. Tempo que cessa antes mesmo de começar. Pontos de partida que são inatingíveis. O alcance perceptivo do que se tem, com e sem, a percepção necessária, metamorfose absoluta.

Aqui sou agradecimentos, a:

Meu Orientador, Eduardo Shirlippe Goes Leandro, *sine qua non*. Por sua palavra, seu gesto, seu tom sempre certo, sua melodia cadêmica que me mostrava o ritmo e clareava o caminho por onde abria as trilhas. Meu muito obrigado.

Os professores que aceitaram participar da banca de defesa: Hildeberto Eulálio, Cesar Castilho, Eder Mateus, Marcia Pragana e Ramón Mendoza.

Minha mãe, que com a palavra certa sempre me tocou de longe, suavemente, deixando-me, sempre, renovado.

Meu pai, pela presença, distante como é de seu jeito ser, e efetiva.

Meus irmãos, que me entenderam antes de todos, e deixaram que eu fosse sempre eu, no meu espaço certo.

Meus amigos, da infância, quando o que queria era ser adulto, e viver eternamente como criança.

Meus amigos, irmãos, dos quais guardo sempre bons momentos.

Meus amigos, matemáticos, irmandade de alma e pensamento, erudita e vívida.

Meu caro Henrique Vitória, contraponto entre os eixos sob os quais me formo, este não tenho como classificar, nem tenho palavras para agradecer, posso apenas pedir que me desculpe por minha incapacidade.

Meu Professor, cânon, que me serve de medida estreita, para onde desejo caminhar, e quem me aconselha por sobre os ombros, Hildeberto Eulálio Cabral.

Meus queridos, os cem consciências, aos quais devo quem me transformei, a segurança e a certeza da dúvida, sem vocês sou quem era.

Minha música, que manteve minha sanidade; a voz de Bethânia e a letra de Chico, o gorjeio entorpecedor de Maria Callas, a harmonia de Tchaikovsky, e perfeita voz de Luciano. Que brilhem todos no meu céu particular.

Minha vida, sempre presente, mesmo nos momentos inesperados, quando achei que iria se esvair.

Meus momentos de solidão, sem os quais nada disso seria fato.

À tua palavra, teu olhar e tua força sempre constatemente em mim, maestro de minha vida, astrolábio meu para céu sem estrelas, a você meu eterno agradecimento. Meu mentor e chefe de meu destino, a você meus respeitos.

Meus outros eus, em especial a Octávio que me empresta sempre seu talento.

Por fim, agradeço a tempestade com quem desejo um dia tilintar taças de vinho.

Dedicatória

À minha mãe.

Sumário

Introdução	6
1 Sistemas Hamiltonianos	9
1.1 Sistemas Hamiltonianos	9
1.2 O Problema de n Corpos	9
1.2.1 Coordenadas Simpléticas	11
1.3 Estabilidade	12
1.3.1 Estabilidade em Sistemas Hamiltonianos	13
2 Configurações Centrais	14
2.1 Soluções de Equilíbrio	14
2.2 Equações para uma Configuração Central	14
3 Equilíbrios Relativos, Soluções Poligonais e Estabilidade	18
3.1 Soluções Poligonais Regulares do Problema de n Corpos	18
3.2 Estabilidade de Equilíbrios Relativos	19
3.3 Instabilidade Espectral de Equilíbrios Relativos no Problema de n Corpos Planar	25
4 Representação Integral de Funções Complexas	27
4.1 Preliminares	27
4.2 O Operador de Perron-Frobenius l -Ádico	27
5 O Problema de $n+1$ Corpos	37
5.1 Formulação	37
5.1.1 Linearização	38
5.1.2 Caracterização da Análise Linear	38
5.1.3 A matriz $D\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_\mu}(x)\right)$	39
5.2 Um Problema Restrito de $n+1$ Corpos	39
5.3 A Análise da Estabilidade	40
5.3.1 Primeiro eixo de simetria $[\theta = 0]$	40
5.3.2 Segundo eixo de simetria $[\theta = \frac{\pi}{n}]$	49

6	Existência de Equilíbrios Relativos e Bifurcações	53
6.1	Preliminares	53
6.2	Primeiro eixo de simetria $[\theta = 0]$	54
6.3	Segundo eixo de simetria $[\theta = \frac{\pi}{n}]$	59
6.4	Bifurcação no segundo eixo de simetria $[\theta = \frac{\pi}{n}]$	63
7	Estimativas Numéricas	65
7.1	Preliminares	65
7.2	Existência e Unicidade dos Equilíbrios Relativos	65
7.2.1	Primeiro eixo de simetria $[\theta = 0]$	65
7.2.2	Segundo eixo de simetria $[\theta = \frac{\pi}{n}]$	72
	Bibliografia	78

Introdução

O estudo das configurações centrais é de grande interesse desde antes dos trabalhos de Maxwell [30] - estas configurações já aparecem nos trabalhos de Euler [1767] e Lagrange [1873] - que com o objetivo de descrever um modelo que representasse o comportamento dos anéis de Saturno, estudou o problema poligonal de n corpos, analisando a estabilidade desta configuração com n massas iguais nos vértices de um polígono regular e uma massa central. Este trabalho foi completamente preenchido e corrigido por Moeckel [35], em 1994, quando mostrou que a configuração poligonal com massas iguais é instável sempre, e que a configuração poligonal com uma massa central é estável para n maior ou igual a 7 e para uma massa central suficientemente grande. Além destes resultados obtidos pelo Moeckel, tem-se também o resultado do Roberts [44], que dá uma estimativa assintótica para a massa central a fim de que se tenha a estabilidade da configuração. Em 1985, Perko e Walter [41], mostraram que um polígono com n massas iguais em um sistema de coordenadas rotacionais com velocidade estabelecida é uma configuração central para n maior ou igual a 3. Podemos facilmente observar que o polígono com n massas iguais e uma massa central também é uma configuração central pois a força resultante da massa central já é central.

No início do século XVII, o astrônomo e filósofo Kepler [18] descreveu as leis que regem o movimento do sistema solar, mas apenas no século XVII com Newton [38], cinquenta anos depois, é que tivemos a lei fundamental que rege tal movimento, denominada segunda lei da dinâmica. O próprio Newton foi responsável pela solução do problema de Kepler, que é o problema de 2 corpos sob a ação do campo gravitacional. No entanto, apenas no século XIX com Poincaré [42], é que tivemos avanços satisfatórios no que tange a solubilidade do problema dos 3-corpos, tendo este observado que tal problema é insolúvel, no sentido clássico. Buscando soluções especiais, Euler encontrou um tipo específico de solução, considerando que os corpos estão dispostos sobre uma reta. Tais soluções são denominadas colineares. Lagrange encontrou as soluções do triângulo equilátero, tendo tal configuração sido observada no Sistema Solar, estando Júpiter em um dos vértices e nos conjuntos de corpos do anel de asteróides que circunda o Sol.

Devido aos avanços ocorridos na Análise Matemática, na Álgebra e ao surgimento de novas técnicas de análise tais como: a Análise de Fourier, representação de funções em séries, representação algébrica de propriedades topológicas, consolidados a partir do século XVIII, é que se pôde obter avanços significativos na compreensão das técnicas de solubilidade de equações diferenciais, especificamente de Sistemas Hamiltonianos, que

comporta as equações do movimento dos n corpos. A Teoria das Matrizes, a Álgebra Linear, o aperfeiçoamento da Teoria da Estabilidade provinda dos trabalhos de Liapunov [24] deram a Análise Matemática os instrumentos que propiciam uma nova abordagem, tendo aí início uma nova matemática que na Mecânica Celeste veio pelo trabalho de Poincaré [42].

Assim, em 1922, o astrônomo Lindow [26] surge com uma abordagem de representação de funções complexas, usando a Teoria de Fourier e Análise Complexa, que possibilita uma transformação adequada das coordenadas e do tempo, no problema circular de $3 + 1$ corpos. Ele mesmo faz uso destas técnicas para construir um teorema de simetria que é até hoje utilizado. Tal teorema afirma que no problema restrito poligonal, a massa desprezível tem que estar nos eixos de simetria do polígono, isto é, nos eixos que passam pelos vértices e que passam nos pontos médios das arestas.

Em 2003, os métodos de representação de funções complexas desenvolvidos por Lindow, baseado nas teorias sobre funções elípticas [4], despertaram o interesse sobre o problema das configurações centrais, possibilitando a descoberta de uma gama de classes de configurações centrais, feita por Elmabsout e Bang [12].

Nosso objetivo central é a análise dessas configurações centrais, a saber, a configuração poligonal com massas iguais dispostas nos vértices do polígono e uma massa desprezível num dos eixos de simetria.

Fazemos no primeiro capítulo, a apresentação de conceitos e resultados que fundamentam nossa perspectiva à luz da Mecânica Celeste, incisivamente nas configurações centrais. Lá apresentamos as equações de Newton para o movimento, fazemos transferência destas para o formalismo Hamiltoniano, e expomos alguns resultados que evidenciam não só particularidades, como também a natureza destes sistemas, o que justifica seu uso no tratamento das equações de movimento.

No segundo capítulo, discutimos, sucintamente, a caracterização das soluções particulares, denominadas configurações centrais, que compõem o escopo de nosso trabalho.

No capítulo três, apresentamos o que seria uma possível cronologia do desenvolvimento matemático da análise das configurações poligonais e o estudo de sua estabilidade, adequando a exposição ao foco deste trabalho.

No quarto capítulo, descrevemos o uso do operador de Perron-Frobenius l -ádico, para representação de funções complexas, o qual usamos para nossas análises.

No quinto capítulo, fazemos uma dedução matemática das equações do problema de $n+1$ corpos, no caso em que os n corpos, denominados massas primárias, estão dispostos nos vértices de um polígono regular. Lá também apresentamos a estrutura da análise de estabilidade de um problema restrito. E apresentamos os resultados acerca da instabilidade da configuração provinda do problema restrito, para o primeiro eixo de simetria $[\theta = 0]$ e para o segundo eixo $[\theta = \frac{\pi}{n}]$, com restrições aos valores de r e n .

No sexto capítulo, apresentamos uma demonstração completa de um resultado de existência e unicidade para a posição de equilíbrio no problema restrito, para o primeiro eixo de simetria $[\theta = 0]$ e a análise da bifurcação para este eixo. Abordamos uma análise das bifurcações para o segundo eixo $[\theta = \frac{\pi}{n}]$, obtendo alguns fatos.

Exibimos no sétimo capítulo, uma análise numérica, feita com o auxílio do software Maple, onde são apresentados resultados bastante relevantes quanto a dinâmica das configurações quando usamos o valor de uma massa central à configuração como parâmetro,

encontrando dois tipos de bifurcação. E também uma apresentação detalhada de estimativas que serviram de suporte no esclarecimento dos resultados apresentados nos capítulos anteriores.

Capítulo 1

Sistemas Hamiltonianos

Aqui, tratamos da apresentação de conceitos e fundamentos da Mecânica Hamiltoniana, a qual usaremos para tratar o problema dos n corpos. Faremos nas próximas seções, de forma breve, a definição de Sistemas Hamiltonianos, e também exposição de alguns fatos que caracterizam a teoria usada nos próximos capítulos.

1.1 Sistemas Hamiltonianos

Temos inicialmente a seguinte definição:

Definição 1.1 *Um **Hamiltoniano** é uma função real $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um aberto do $\mathbb{R}^{2n}$, de classe C^2 . Escrevendo $(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dizemos que o sistema diferencial*

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

*de primeira ordem, é o **Sistema Hamiltoniano** associado a $H(q, p)$, que*

$$F_H(q, p) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}(q, p), -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \right),$$

*é o **campo Hamiltoniano** de H e que o fluxo ϕ_t gerado pelo Sistema Hamiltoniano é o **fluxo Hamiltoniano** de H .*

No contexto da definição 1.1, definimos que as variáveis q_i são *conjugadas* das variáveis p_i , e que estas são *conjugadas* daquelas. Faremos a seguir formalização do problema dos n corpos na forma Hamiltoniana.

1.2 O Problema de n Corpos

Consideremos n massas pontuais movendo-se num sistema referencial inercial, $\mathbb{R}^3$, em que as únicas forças agindo entre eles é a atração gravitacional.

Considerando os vetores posição q no *espaço das configurações* $X = \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$, onde $\Delta = \{q = (q_1, \dots, q_n) : q_i = q_j, i \neq j\}$ e $m_i > 0$, temos que as equações do movimento vindas da segunda lei de Newton são dadas por:

$$m_i \ddot{q}_i = \sum_{j=i}^n G \frac{m_i m_j (q_j - q_i)}{\|q_i - q_j\|^3} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (1.2)$$

onde $U(q) : X \rightarrow \mathbb{R}$, é a função *potencial newtoniano*, que é dada pela expressão

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{G m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}, \quad (1.3)$$

onde nas expressões (1.2) e (1.3), G representa a constante gravitacional.

Considerando $q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in X$, obtemos a forma vetorial da equação (1.2);

$$M \ddot{q} - \nabla U(q) = 0, \quad (1.4)$$

onde $M = \text{diag}[m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n]$.

A fim de obtermos a formulação Hamiltoniana do problema de n corpos, podemos proceder considerando o espaço de fase $T^*X = \{(q, p) : q \in X \text{ e } p \in T_q(X)\}$, e o momento linear definido da seguinte maneira:

$$p = M \dot{q}, \quad (1.5)$$

deste modo, as equações do movimento (1.2) tomam a forma:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= H_p = M^{-1} p, \\ \dot{p} &= -H_q = -\nabla U_q, \end{aligned} \quad (1.6)$$

ou, em componentes:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j (q_j - q_i)}{\|q_i - q_j\|^3}, \end{aligned}$$

onde o Hamiltoniano é:

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{\|p_i\|^2}{2m_i} - U(q). \quad (1.7)$$

O problema de n corpos é caracterizado por um sistema de $3n$ equações de 2º ordem na formulação Newtoniana, e por um sistema de $6n$ equações de 1º ordem na formulação Hamiltoniana. No entanto, mesmo tendo aumento no número de equações, podemos encontrar 10 integrais do movimento, que são denominadas as integrais clássicas do problema [ver [31]].

1.2.1 Coordenadas Simpléticas

A forma dos Sistemas Hamiltonianos é muito especial. Tal forma não é preservada mediante uma mudança arbitrária de coordenadas. Por este motivo, o estudo das tranformações que preservam tal estrutura é de vital importância na teoria.

Uma matriz $2n \times 2n$, S é denominada simplética se satisfaz:

$$S^T J S = J, \quad (1.8)$$

onde

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0 \end{bmatrix}.$$

Consideremos

$$\begin{aligned} F : O &\rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (t, z) &\rightarrow Z = F(t, z) \end{aligned}$$

uma função suave em O , um aberto em $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Definição 1.2 F é chamada uma **aplicação simplética**, se seu jacobiano, $\frac{\partial F}{\partial z}$, é uma matriz simplética para todo $(t, z) \in O$.

Considere o sistema

$$\dot{z} = J \nabla H(t, z), \quad (1.9)$$

onde $H : O \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$. Seja agora a transformação $z = F^{-1}(t, z)$, isto é,

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}.$$

Suporemos que F seja simplética, isto é, a matriz $(\frac{\partial F}{\partial z})$ é simplética. Consideremos então a função

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, z) : \mathbb{R}^{2n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{2n+1} \\ (t, z) &\rightarrow (t, F(t, z)) \end{aligned}$$

que tem por inversa a função dada por:

$$\tilde{F}^{-1}(t, Z) = (t, F^{-1}(t, z)),$$

temos então que

$$\left[D\tilde{F} \right]_{(t,z)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{bmatrix},$$

e equivalentemente

$$\left[D\tilde{F}^{-1} \right]_{(t,Z)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \frac{\partial F^{-1}}{\partial t} & \frac{\partial F^{-1}}{\partial Z} \end{bmatrix}.$$

É evidente que podemos fazer uso da projeção na segunda coordenada, considerando as coordenadas como sendo (t, z) e (t, Z) , com a conveniência necessária. Neste contexto, temos que: $Z = \Pi_2 \circ \tilde{F}(t, z)$ e $z = \Pi_2 \circ \tilde{F}^{-1}(t, Z)$. Logo, obtemos a seguinte expressão:

$$\dot{Z} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \dot{z}^1.$$

¹ $Z = \Pi_2 \circ \tilde{F}(t, z) \Rightarrow \dot{Z} = (D\Pi_2)_{(t,Z)} \circ (D\tilde{F})_{(t,z)} \cdot (t, \dot{z})$, logo, pelo fato de Π_2 ser linear, temos que $\dot{Z} = \Pi_2(D\tilde{F})_{(t,z)} \cdot (1, \dot{z})$

Denotando, $K(t, Z) = H(t, z(t, Z))$, temos que: $\nabla_Z K(t, Z) = \nabla_z H(t, z(t, Z)) \cdot \frac{\partial z}{\partial Z}$. Mas, como $Z = F(t, z)$, temos que: $1 = \frac{\partial F}{\partial z}(t, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial Z}$. Logo

$$\frac{\partial z}{\partial Z} = \left[\frac{\partial F}{\partial z}(t, z) \right]^{-1}.$$

Portanto,

$$\nabla_z H(t, z(t, Z)) = \left[\frac{\partial F}{\partial z}(t, z) \right] \nabla_Z K(t, Z),$$

donde

$$\dot{Z} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot J \frac{\partial F^T}{\partial z} \nabla_Z K(t, Z).$$

Por F ser simplética, teremos que

$$\dot{Z} = \frac{\partial F}{\partial t} + J \nabla_Z K(t, Z).$$

Fazendo, $\frac{\partial F}{\partial t}(t, z)|_{z=z(t, Z)} = J \nabla_Z R(t, Z)$, obtemos:

$$\dot{Z} = J \nabla_Z K(t, Z) + J \nabla_Z R(t, Z),$$

onde R é chamada a função resto. Note que, se a transformação não depende de t , então a função resto é nula. Como resultado direto dos fatos apresentados acima, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.3 *Uma mudança de variáveis simplética transforma um sistema Hamiltoniano em um sistema Hamiltoniano.*

1.3 Estabilidade

Seja z_0 uma posição de equilíbrio do sistema

$$\dot{z} = f(z), \tag{1.10}$$

onde $f(z)$, é definida em um aberto do $\mathbb{R}^{2n}$, de classe C^2 .

Definição 1.4 *Dizemos que z_0 é um **equilíbrio estável no sentido de Liapunov**, se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\phi(t)$ é uma solução do sistema com $\|\phi(0) - z_0\| < \delta$, então $\phi(t)$ é definida para todo o tempo e $\|\phi(t) - z_0\| < \epsilon$, para todo t .*

Definição 1.5 *Dizemos que um equilíbrio é **instável** se não for estável.*

Supondo $z_0 = 0$ e $f(z_0) = 0$ temos que o sistema (1.10) pode ser reescrito na forma

$$\dot{z} = Az + g(z),$$

onde $g(z)$ é uma função diferenciável e $A = D(f(z_0))$. Neste contexto, enunciamos os seguintes resultados devidos a Liapunov. Para sua demonstração indicamos a referência [12].

Teorema 1.6 *Se $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ para todo λ autovalor de A , então o equilíbrio é estável.*

Teorema 1.7 *Se existir um autovalor λ de A com $\operatorname{Re}(\lambda_A) > 0$, então o equilíbrio é instável.*

Definição 1.8 *O equilíbrio é **linearmente estável** se $z = 0$ for um equilíbrio estável do sistema linear $\dot{z} = Az$.*

1.3.1 Estabilidade em Sistemas Hamiltonianos

Continuamos esta seção com uma definição que servirá para introduzir os demais conceitos relacionados com a estabilidade de um sistema Hamiltoniano.

Seja o Sistema Hamiltoniano (1.1), e seja z_0 equilíbrio deste sistema. Suponhamos que $z_0 = 0$ e que $\nabla H(0) = 0$.

Então,

$$H(z) = H(0) + \nabla H(0)z + \frac{1}{2}z^T D^2 H(0)z + f(z),$$

onde $f(z) = \mathcal{O}(|z|^3)$. Assim, o sistema (1.1) pode ser reescrito na forma:

$$\dot{z} = JD^2 H(0)z + F(z),$$

onde $F = J\nabla f_0$. Fazendo $D^2 H(0) = G$, obtemos

$$\dot{z} = JGz + F(z).$$

Lema 1.1 *O polinômio característico de JG é par.*

Demonstração: Observando inicialmente que a matriz simplética canônica satisfaz as seguintes propriedades; $J^2 = -I$, $J^T = -J$ e que a Hessiana é simétrica, ou seja, $G^T = G$, obtemos a sequência de identidades:

$$(\lambda I - JG)^T = (\lambda I)^T - (JG)^T = \lambda I - G^T J^T = \lambda I + GJ = J(-\lambda I - JG)J,$$

onde esta última sentença é facilmente obtida pelo uso das duas propriedades da matriz J citadas acima. E, desta forma, temos o lema, visto que o determinante de uma matriz é igual ao de sua transposta.

QED.

Assim, se λ é autovalor de JG , então $-\lambda$ também é. Logo, se existe um autovalor λ de JG com $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$, existirá um com parte real positiva. Assim, pelo teorema de Liapunov temos imediatamente o seguinte teorema:

Teorema 1.9 *Se existe λ , autovalor da matriz A , com $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$, então o equilíbrio é instável.*

No entanto, nem todo sistema possui um equilíbrio nas coordenadas em que se apresenta, podendo este equilíbrio aparecer devido a uma mudança de coordenadas. Sendo assim, precisamos definir um outro tipo de equilíbrio.

Definição 1.10 *$q^* = 0$ é dito um **equilíbrio relativo** do sistema (1.1), se for estacionário em um sistema rotacional, ou seja, se devido a uma mudança de coordenadas simplética for um equilíbrio do sistema nestas novas coordenadas.*

Capítulo 2

Configurações Centrais

O problema de n corpos para $n > 2$ tem resistido às tentativas de solução. Ao longo dos anos, alguns tipos de solução tem sido encontrados. A configuração inicial de uma solução homográfica denominada por Wintner *configurações centrais*, é importante em Mecânica Celeste por várias razões. Aqui fazemos uma introdução a estes tipos de configurações.

2.1 Soluções de Equilíbrio

O mais simples tipo de solução pode ser pensado como sendo uma *solução de equilíbrio*. Consideremos estas soluções para (1.2):

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Contudo, U é homogêneo de grau -1 , e então pelo teorema de Euler para funções homogêneas temos:

$$\sum q_i \frac{\partial U}{\partial q_i} = -U. \quad (2.2)$$

No entanto, U é a soma de termos positivos, logo U é positiva, mas o lado esquerdo de (2.2) é nulo, uma contradição, portanto o problema de n corpos não possui solução de equilíbrio no sentido clássico.

2.2 Equações para uma Configuração Central

Para procurar soluções homotéticas de (1.2), propomos $q_i(t) = \phi(t)a_i$, onde os a_i 's são vetores constantes e $\phi(t)$ é uma função escalar constante. Substituindo em (1.2), obtemos:

$$|\phi|^3 \phi^{-1} \ddot{\phi} m_i a_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (a_j - a_i)}{\|a_j - a_i\|^3}, \quad (2.3)$$

como o primeiro membro da equação acima é constante, terá de ser também segundo membro. Portanto, (2.3) tem uma solução se existir uma função escalar $\phi(t)$, uma constante λ

e vetores constantes a_i tais que

$$\ddot{\phi} = -\frac{\lambda\phi}{|\phi|^3}, \quad (2.4)$$

$$-\lambda m_i a_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (a_j - a_i)}{\|a_j - a_i\|^3}, \quad (2.5)$$

a equação (2.4) é uma equação diferencial ordinária (o problema de Kepler unidimensional) e então tem muitas soluções.

Por exemplo, uma solução é

$$\phi(t) = \alpha t^{\frac{2}{3}},$$

onde $\alpha^3 = \frac{9\lambda}{2}$. Esta solução vai de zero a infinito conforme t vai de zero a infinito. A equação (2.5) é um sistema não-trivial de equações algébricas. As soluções completas são conhecidas para $n = 2$ e $n = 3$ porém, existem várias soluções especiais conhecidas. Consideremos o problema de n corpos planar, então todos os vetores estão em $\mathbb{R}^2$. Identificando $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, considerando q_i, p_i , como números complexos, procuramos soluções homográficas de (1.2). Seja

$$q_i(t) = \phi(t)a_i,$$

onde os a_i 's são números complexos constantes e $\phi(t)$ é uma função complexa. Geometricamente a multiplicação de números complexos é uma rotação seguida de uma dilatação ou expansão, isto é, uma homografia. Assim procuramos uma solução tal que a configuração das partículas é sempre homograficamente equivalente a uma configuração fixada. Substituindo esta suposta solução em (1.2) encontramos (2.4), que agora é o problema de Kepler bidimensional, e a equação (2.5). Isto é, se nós tivermos solução de (2.5) em que os a_i 's são planares, então esta é uma solução do problema de n corpos da forma $q_i = \phi(t)a_i$, onde $\phi(t)$ é qualquer solução do problema de Kepler planar, que pode ser qualquer seção cônica, degenerada ou não.

Definição 2.1 *Um configuração das n partículas dadas por vetores constantes $a_1, \dots, a_n$ satisfazendo (2.5) para algum λ é chamada **configuração central**.*

Definição 2.2 *No caso especial quando os a_i 's são coplanares, uma configuração central é também chamada de **equilíbrio relativo**.*

Esta última definição vem do fato que configurações centrais são soluções de equilíbrio em um sistema de coordenadas rotacionais. Configurações centrais são importantes no estudo dos colapsos totais do problema de n corpos, porque pode-se mostrar que a configuração limite das n partículas quando elas tendem a um colapso total é uma configuração central.

Para medir o tamanho do sistema de n corpos, definimos o momento de inércia do sistema da seguinte forma:

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|q_i\|^2.$$

Agora (2.5) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial U}{\partial q} + \lambda \frac{\partial I}{\partial q}(a) = 0, \quad (2.6)$$

onde $q = (q_1, \dots, q_n)$ e $a = (a_1, \dots, a_n)$.

A constante λ pode ser considerada como um multiplicador de Lagrange, e neste contexto uma configuração central é um ponto crítico do potencial U restrito à variedade momento de inércia constante $I = I_0$. Seja a uma configuração central. U é homogêneo de grau -1 e I é homogêneo de grau 2. Da equação (2.6), temos

$$\sum a_i \frac{\partial U}{\partial q_i}(a) + \lambda a_i \frac{\partial I}{\partial q_i}(a) = 0,$$

por esta equação, temos

$$-U + 2\lambda I = 0,$$

donde

$$\lambda = \frac{U(a)}{2I(a)} > 0.$$

Podemos obter uma informação de grande relevância da equação (2.5) quando efetuamos a soma em i :

$$\sum_i m_i a_i = 0,$$

isto é, o centro de massa está na origem.

Uma vez que temos caracterizado este tipo de solução, podemos buscar propriedades simétricas das mesmas. Neste sentido encontramos que as configurações centrais são invariantes por rotações ou translações. Seja $A \in SO(2, \mathbb{R})$ (ou $A \in SO(3, \mathbb{R})$ em geral), se a é uma configuração central, então Aa também o é, com o mesmo λ . De fato, se substituirmos Aa na equação (2.5), temos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (Aa_j - Aa_i)}{\|Aa_j - Aa_i\|^3} &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j A(a_j - a_i)}{\|A(a_j - a_i)\|^3} \\ &= A \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (a_j - a_i)}{\|a_j - a_i\|^3} \right) \\ &= A(-\lambda m_i a_i) \\ &= -\lambda m_i Aa_i. \end{aligned}$$

Se $\tau \in \mathbb{R}$ e $\tau \neq 0$, então τa é uma configuração central, se a o for, com λ trocado por $\frac{\lambda}{\tau^3}$. De fato, se substituirmos τa na equação (2.5) obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j (\tau a_j - \tau a_i)}{\|(\tau a_j - \tau a_i)\|^3} &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j \tau (a_j - a_i)}{|\tau|^3 \|a_j - a_i\|^3} \\ &= -\frac{\lambda}{|\tau|^3} m_i a_i. \end{aligned}$$

Portanto, quando estamos contando configurações centrais, contamos apenas suas classes de similaridade.

Uma cronologia do desenvolvimento do estudo das configurações centrais até 2002 está feito em [3], com muita precisão e clareza, onde é posto de forma direta quais os

problemas que tem movimentado a Mecânica Celeste, especificamente em torno das configurações centrais. Nosso trabalho complementa esta cronologia seguindo os trabalhos feitos em 2004 [13], quando é considerado o problema tratado pelo Lindow em [25]. Nos próximos capítulos iniciamos a construção do contexto no qual se coloca nosso trabalho.

Capítulo 3

Equilíbrios Relativos, Soluções Poligonais e Estabilidade

Uma forma de encontrar solução para o problema de n corpos, é considerar casos particulares, como visto. Soluções homográficas, foram encontradas e estão apresentadas em vários textos, expostas de formas diferentes nos trabalhos [10], [34], [35], [43], [44], [45]. Neste capítulo faremos uma apresentação de alguns resultados que serão relevantes para o desenvolvimento de nosso trabalho, apresentando um formato novo para alguns fatos.

3.1 Soluções Poligonais Regulares do Problema de n Corpos

Em busca de soluções especiais para o problema de n corpos, foi encontrada a solução poligonal regular, que é um tipo de solução homográfica, tendo em vista que é um equilíbrio relativo. Tal solução foi explicitada no trabalho de Perko e Walter [41], onde podemos encontrar a demonstração dos seguintes fatos:

Considerando n massas m_k dispostas nos vértices de um polígono regular. Temos seu centro de massa dado por: $z_0 = \sum_j m_j \omega_j / M$, onde ω_j são as n -ésimas raízes da unidade, e M é a massa total. Com esta notação apresentamos o primeiro resultado:

Teorema 3.1 *Se, para $n \geq 2$, as funções $z_k(t) = (\omega_j - z_0)e^{i\omega t}$ são solução do problema de n corpos, isto é, da equação (1.2), segue que*

$$\omega^2 = \frac{M\gamma}{n},$$

$$\text{onde } \gamma = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \csc \frac{\pi j}{n}.$$

Deste teorema segue a clássica solução de Lagrange:

Corolário 3.2 *Para $n = 3$, as funções $z_k(t) = (\omega_j - z_0)e^{i\omega t}$ são solução das equações do problema de 3 corpos se, e somente se, $\omega^2 = M/3\sqrt{3}$.*

Com as mesmas notações acima, temos o resultado que apresenta a condição que garante quando uma configuração poligonal é solução do problema de n corpos:

Teorema 3.3 *Para $n \geq 4$ e $m_k > 0$, as funções $z_k(t) = (\omega_j - z_0)e^{i\omega t}$, são solução do problema de n corpos se, e somente se, $m_1 = m_2 = \dots = m_n$.*

Em [53], são encontradas demonstrações simples destes resultados.

3.2 Estabilidade de Equilíbrios Relativos

Para tratar a estabilidade de equilíbrios relativos, usamos a teoria feita em [35], por Moeckel.

Consideremos a equação (1.6). Sem perda de generalidade, podemos supor uma rotação sobre um dos eixos de $\mathbb{R}^3$. Consideremos a matriz em blocos $R(\theta)$, $3n \times 3n$, com blocos

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então, definindo a nova coordenada $x \in \mathbb{R}^{3n}$ por:

$$q(t) = R(\omega t)x(t), \quad (3.1)$$

onde ω é dada pelo teorema 3.1. As equações do movimento tomam a forma:

$$M\ddot{x} + 2\omega\hat{J}M\dot{x} = \nabla U(x) + \omega^2 M\hat{I}x. \quad (3.2)$$

A equação (3.2) é facilmente obtida bastando derivar (3.1), usar a invariância da função potencial por rotações e o fato que as matrizes $\hat{J}$ e $\hat{I}$ que são:

$$\begin{aligned} \hat{J} &= R^{-1}(\theta)R'(\theta) \text{ e} \\ \hat{I} &= R^{-1}(\theta)R''(\theta), \end{aligned}$$

comutam com M . Considerando que a configuração x seja um equilíbrio relativo, teremos $\dot{x} = 0$ e $\ddot{x} = 0$, logo (3.2) fica na forma:

$$\nabla U(x) + \omega^2 M\hat{I}x = 0. \quad (3.3)$$

Consideraremos a linearização deste sistema. Denotando $h(x) = \nabla U(x) + \omega^2 M\hat{I}x$, temos:

- (i) $h(x) = 0$, para x equilíbrio relativo;
- (ii) A linearização de $h(x)$ é $h(x + \xi) = h(x) + D_x h(x) \cdot \xi$.

Usando estes fatos temos as igualdades

$$\begin{aligned} M\ddot{\xi} + 2\omega\hat{J}M\dot{\xi} &= \nabla U(x + \xi) + \omega^2 M\hat{I}(x + \xi) \\ &= h(x + \xi) = (Dh)_x \cdot \xi \\ &= (D\nabla U(x) + \omega^2 M\hat{I}) \cdot \xi. \end{aligned}$$

Portanto, a linearização de (3.2) é:

$$M\ddot{\xi} + 2\omega\hat{J}M\dot{\xi} = (D\nabla U(x) + \omega^2 M\hat{I}) \cdot \xi. \quad (3.4)$$

Considerando solução da forma $\xi = \xi_0 e^{\lambda t}$, obtemos:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} M \xi_0 + 2\omega \lambda e^{\lambda t} \hat{J} M \xi_0 = (D\nabla U(x) + \omega^2 M\hat{I}) \cdot \xi_0 e^{\lambda t}.$$

Pelo fato de $\xi_0 \neq 0$, procuramos os valores de λ tais que:

$$\det \left[M^{-1} D\nabla U(x) + \omega^2 \hat{I} - \lambda^2 I - 2\omega \lambda \hat{J} \right] = 0.$$

Definição 3.4 *Estes tais λ 's serão denominados **autovalores** do equilíbrio relativo.*

Uma condição necessária para que x seja linearmente estável é que todos os seus autovalores sejam imaginários puros.

Definição 3.5 *Quando esta condição for satisfeita diremos que x é **espectralmente estável**.*

Consideremos a normalização dos autovalores: $\mu = \lambda/|\omega|$, que não altera a condição de estabilidade tendo em vista que o fator de normalização é real e positivo. Estes autovalores satisfazem a equação:

$$\det \left[\omega^{-2} M^{-1} D\nabla U(x) + \hat{I} - \mu^2 I - 2\mu \hat{J} \right] = 0. \quad (3.5)$$

Vamos mostrar o seguinte:

Proposição 3.6 *A função determinante é par em μ , para a equação (3.5).*

Antes de passar a demonstração, apresentaremos alguns elementos.

Definição 3.7 *Sejam M e N matrizes de mesma ordem (quadradas), então diremos que N é **simétrica com relação a M** se, e somente se,*

$$\langle Nv, Mu \rangle = \langle v, MNu \rangle,$$

isto é, $N^T M = MN$.

Lema 3.1 *As matrizes $\hat{J}$ e $M^{-1} D\nabla U(x)$ são, repectivamente, antisimétrica e simétrica com relação a M .*

Demonstração: De fato, pois $\hat{J}^T M = M \hat{J}^T = -M \hat{J}$. E

$$\begin{aligned} (M^{-1} D\nabla U(x))^T M &= (D\nabla U(x))^T (M^{-1})^T M \\ &= D\nabla U(x) \\ &= M(M^{-1} D\nabla U(x)). \end{aligned}$$

QED.

Voltamos a demonstração da proposição 3.6.

Demonstração: Considerando o produto interno:

$$\langle u, v \rangle = u^T M v,$$

obtemos que $\hat{J}$ e $M^{-1}D\nabla U(x)$ são antissimétrica e simétrica com respeito a uma base M -ortonormal. Considerando uma base M -ortonormal, temos:

$$\left(\omega^2 M^{-1} D\nabla U(x) + \hat{I} - \mu^2 I - 2\mu \hat{J} \right)^T = \left(\omega^2 M^{-1} D\nabla U(x) + \hat{I} - \mu^2 I + 2\mu \hat{J} \right).$$

agora usamos o fato: $\det A = \det A^T$ e concluímos a demonstração.

QED.

Consideremos $z = \mu^2$, que define implicitamente μ como função de z . Seja $F(z)$ o único polinômio de grau $3n$ tal que:

$$F(z) = \det \left[\omega^2 M^{-1} D\nabla U(x) + \hat{I} - \mu^2 I - 2\mu \hat{J} \right],$$

então x é espectralmente estável se, e somente se, todas as raízes de $F(z)$ são reais e negativas.

Definição 3.8 $F(z)$ é denominado *polinômio de estabilidade* de x .

Até então, usamos a derivada $D\nabla U(x)$ sem mencionar sua expressão. Apresentamos uma proposição que determina tal expressão:

Proposição 3.9 A matriz $D\nabla U(x)$ pode ser representada como uma matriz, $3n \times 3n$, em blocos:

$$D\nabla U(x) = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

onde os elementos fora da diagonal são dados por:

$$A_{jk} = \frac{m_j m_k}{d_{jk}^3} [I - 3u_{jk} u_{jk}^T],$$

onde $u_{jk} = \frac{x_k - x_j}{d_{jk}}$ é o vetor unitário na direção da massa m_j a m_k . Os blocos da diagonal são dados por:

$$A_{kk} = - \sum_{j \neq k} A_{jk}.$$

Demonstração: A fim de demonstrar este fato, precisamos entender como calcular a derivada de uma função da forma:

$$F(z) = f(z) \cdot z,$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Para todo $v \in \mathbb{R}^3$, temos:

$$DF_x(v) = Df_x(v) \cdot x + f(x) \cdot v,$$

por outro lado,

$$Df_x(v) \cdot x = \langle \nabla f_x, v \rangle \cdot x = (v^T \nabla f_x) \cdot x = (x \cdot \nabla f_x) \cdot v,$$

donde

$$DF_x(v) = (x \cdot \nabla f_x^T + f(x)) \cdot v.$$

Passemos a expressão de $D\nabla U(x)$. A função $U(x)$ é dada por:

$$U(x) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|x_j - x_i\|},$$

logo

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{\|x_j - x_k\|^3} (x_j - x_k).$$

Tomaremos a derivada em x_j com $j \neq k$, e como nesta soma o termo em j aparece uma única vez, podemos considerar que $\frac{\partial U}{\partial x_k}$ é da forma $F(z) = f(z) \cdot z$. Logo

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} = (x_j - x_k) \cdot D_{x_j} \left(\frac{m_j m_k}{\|x_j - x_k\|^3} \right)^T + \frac{m_j m_k}{\|x_j - x_k\|^3} I_{3 \times 3}.$$

O termo

$$D_{x_j} \left(\frac{m_j m_k}{\|x_j - x_k\|^3} \right) = \frac{3m_j m_k}{\|x_j - x_k\|^6} (x_j - x_k)^T.$$

portanto,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{3m_j m_k}{\|x_j - x_k\|^6} (x_j - x_k) (x_j - x_k)^T + \frac{m_j m_k}{\|x_j - x_k\|^3} I_{3 \times 3}.$$

E desta forma temos claramente o afirmado, visto que pela expressão de $U(x)$, a derivada

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} = - \sum_{j \neq k} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k}.$$

QED.

Uma consequência direta desta proposição e do fato de que as configurações são planares, isto é, $x_{k3} = 0$, é que:

$$A_{jk} = \begin{bmatrix} B_{jk} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde B_{jk} é um bloco 2×2 , com entradas definidas tal como para a matriz A_{jk} . Observamos que multiplicação por M^{-1} , $\hat{I}$, $\hat{J}$ não altera esta forma, e portanto, obtemos que o problema de estabilidade espectral divide-se em uma parte planar e uma parte normal. Neste sentido encontramos o seguinte resultado que segue direto da proposição 3.9:

Corolário 3.10 *A matriz $D\nabla U(x)$ pode ser escrita na forma de blocos*

$$D\nabla U(x) = \begin{bmatrix} B & 0_{2n \times n} \\ 0_{n \times 2n} & C \end{bmatrix},$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix},$$

onde

$$B_{jk} = \frac{m_j m_k}{d_{jk}^3} [I - 3u_{jk}u_{jk}^T], \quad j \neq k,$$

com $u_{jk} \in \mathbb{R}^2$ e

$$B_{kk} = -\sum_{j \neq k} B_{jk}.$$

E a matriz C é dada por

$$C = \begin{bmatrix} -\sum_{k \neq 1} \frac{m_k}{d_{1k}^3} & \frac{m_2}{d_{12}^3} & \cdots & \frac{m_n}{d_{1n}^3} \\ \frac{m_1}{d_{12}^3} & -\sum_{k \neq 2} \frac{m_k}{d_{2k}^3} & \cdots & \frac{m_n}{d_{2n}^3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{m_1}{d_{n1}^3} & \frac{m_2}{d_{n2}^3} & \cdots & -\sum_{k \neq n} \frac{m_k}{d_{nk}^3} \end{bmatrix}.$$

Demonstração: Para mostrar esta decomposição é suficiente usar o fato de que os blocos da matriz $D\nabla U(x)$ são da forma

$$A_{jk} = \begin{bmatrix} B_{jk} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_j m_k}{d_{jk}^3} \end{bmatrix},$$

e portanto, podemos expandir esta decomposição por transformações elementares para a matriz $D\nabla U(x)$, que toma a forma

$$\begin{bmatrix} B & 0_{2n \times n} \\ 0_{n \times 2n} & C \end{bmatrix},$$

onde claramente as matrizes B e C são como descritas acima.

QED.

Por este colorário podemos estruturar a análise de estabilidade de equilíbrios relativos pela decomposição do polinômio de estabilidade, descrita no corolário a seguir:

Corolário 3.11 *O polinômio de estabilidade*

$$F(z) = \det [\omega^2 M^{-1} D\nabla U(x) + \hat{I} - \mu^2 I - 2\mu \hat{J}],$$

pode ser fatorado na forma

$$F(z) = G(z) \cdot H(z),$$

onde

$$H(z) = \det[\omega^{-2} M^{-1} B + (1 - \mu^2)I - 2\mu J],$$

e

$$G(z) = \det[\omega^{-2} C - \mu^2 I].$$

Demonstração: Esta fatoração segue direto da decomposição da matriz $D\nabla U(x)$, dada pelo corolário 3.10, e das definições das matrizes $\hat{I}$, I , J e $\hat{J}$.

QED.

Por estes resultados é natural fazer as seguintes definições:

Definição 3.12 O *polinômio de estabilidade planar* de grau $2n$ é

$$H(z) = \det[\omega^{-2}M^{-1}B + (1 - \mu^2)I - 2\mu J].$$

Definição 3.13 Diremos que x será **espectralmente estável no plano** se, todas as raízes de $H(z)$ são reais e negativas.

Definição 3.14 O *polinômio de estabilidade normal* de grau n é

$$G(z) = \det[\omega^{-2}C - \mu^2 I].$$

Definição 3.15 Diremos que x será **normalmente espectralmente estável** se todas as raízes de $G(z)$ forem reais e negativas.

Se considerarmos o vetor $v = (1, 1, \dots, 1)$, pela forma de C , é fácil verificar que

$$C \cdot v = 0 \cdot v.$$

Este fato sugere a seguinte definição

Definição 3.16 O *equilíbrio relativo* x será dito **não-degenerado** se todos os outros autovalores de C forem estritamente negativos.

Após a construção destes fatos podemos apresentar a seguinte proposição:

Proposição 3.17 *Todo equilíbrio relativo é normalmente espectralmente estável e não-degenerado.*

Demonstração: Considerando a matriz $M = \text{diag}[m_1 \dots m_n]$ é fácil verificar que $C^T M = MC$ e portanto, C é simétrica com respeito ao produto interno definido por M , e pelo teorema espectral todos os seus autovalores são reais. Mostraremos que são negativos. Consideremos ς um autovalor de C e v_ς seu autovetor. O vetor $v_\varsigma \in \mathbb{R}^n$. Sem perda de generalidade podemos supor que $v_k > 0$ e que é maior em módulo que as outras componentes de v_ς . Pela definição da matriz C sabemos que

$$C_{kk} = - \sum_{j \neq k} C_{jk} = - \sum_{j \neq k} C_{kj}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \varsigma \cdot v_\varsigma &= \sum_{j=1}^n C_{kj} v_j \\ &= \sum_{j \neq k} C_{kj} v_j + C_{kk} v_k \\ &= \sum_{j \neq k} C_{kj} v_j - \sum_{j \neq k} C_{jk} v_k \\ &= \sum_{j \neq k} C_{kj} (v_j - v_k). \end{aligned}$$

No entanto, pela hipótese de que $v_k > v_j$ para $j \neq k$ temos $v_j - v_k < 0$, portanto, concluímos que $\varsigma v_k < 0$, e assim obtemos que x é normalmente espectralmente estável. Para ver que x é também não-degenerado basta observar que se $v_\varsigma \in \text{Ker}(C)$, então $v_j = v_k$ para todo j logo $v_\varsigma = (1, 1, \dots, 1)$.

QED.

Usando estes resultados, em [35], Moeckel desenvolve uma teoria de estabilidade planar para equilíbrios relativos, com resultados de decomposição baseados na simetria com respeito à matriz das massas M . Mostra os seguintes teoremas:

Teorema 3.18 *O equilíbrio relativo polígono regular de n lados é instável para todo $n \geq 4$.*

Teorema 3.19 *O equilíbrio relativo polígono regular de n lados com a massa central m_0 suficientemente grande é linearmente estável para $n \geq 7$. Para $n \leq 6$ é instável para qualquer valor da massa central. Se todas as massas são iguais, então o polígono regular de n lados com a massa central m_0 é instável para todo $n \geq 3$.*

Este último teorema foi melhorado pelo Roberts em [44], onde ele faz uma estimativa para o valor da massa central a fim de que se tenha estabilidade linear do equilíbrio, obtendo o seguinte resultado

Teorema 3.20 *O equilíbrio relativo $1 + n$ -polígono é linearmente estável desde que a massa central tenha valor assintótico a τn^3 , onde*

$$\tau = \frac{13 + 4\sqrt{10}}{2\pi^3} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3}.$$

3.3 Instabilidade Espectral de Equilíbrios Relativos no Problema de n Corpos Planar

Apresentamos nesta seção fatos presentes em [43]. Suponha que v é um autovetor de A com autovalor λ , e escreva $v = (v_1, v_2)$ com $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^{2n}$. A equação dos autovetores $Av = \lambda v$, reduz-se a

$$\begin{aligned} v_2 &= M(\lambda I - \omega K)v_1, \\ Bv_1 &= 0, \end{aligned}$$

onde $B = M^{-1}D\nabla U(x) + (\omega^2 - \lambda^2)I + 2\lambda\omega K$. Portanto, para obter os autovalores de A , precisamos apenas calcular o determinante de B , e encontrar as raízes, λ . Em outras palavras, $P(\lambda) = \det B$. Usamos a estrutura da matriz B que é a soma de três matrizes já caracterizadas. B é uma matriz em blocos, 2×2 , ao longo da diagonal da forma:

$$\begin{bmatrix} b_{ii} + \omega^2 - \lambda^2 & b_{ii+1} + 2\lambda\omega \\ b_{i+1i} - 2\lambda\omega & b_{i+1i+1} + \omega^2 - \lambda^2 \end{bmatrix},$$

onde os b_{ij} 's são as entradas da matriz B_{ij} que surge da decomposição dos blocos A_{ij} como aplicação da proposição 3.9. Podemos observar facilmente que os blocos de B que contem

o termo λ estão todos ao longo da diagonal. Calculemos inicialmente o determinante de uma matriz protótipo dos blocos diagonais de B :

$$\det(B_{ii}) = \lambda^4 + (2\omega^2 - b_{ii} - b_{i+1i+1}) \lambda^2 + (b_{ii} + \omega^2) (b_{i+1i+1} + \omega^2),$$

usando o fato que $b_{ii+1} = b_{i+1i}$. Este fato pode ser usado para encontrar a expressão de $P(\lambda)$. Para o propósito em questão precisamos do segundo termo desta expressão que será dado pelo produto dos n blocos diagonais, que tem cada qual determinante dado acima, portanto os dois primeiros termos são:

$$P(\lambda) = \lambda^{4n} + (2n\omega^2 - \text{tr}(M^{-1}\nabla U(x))) \lambda^{4n-2} + \dots$$

Sabemos que este polinômio é par, logo fazendo a mudança de variável $y = \lambda^2$, obtemos o polinômio

$$P(\lambda) = y^{2n} + (2n\omega^2 - \text{tr}(M^{-1}\nabla U(x))) y^{2n-2} + \dots$$

Usamos as relações de Girard para este último polinômio, obtendo que

$$\sum_i^{2n} y_i = -2 [2n\omega^2 - \text{tr}(M^{-1}\nabla U(x))].$$

Portanto, usando que $y_i = \lambda_i^2$, temos a fórmula para soma do quadrado dos autovalores da matriz A :

$$\sum_i^{2n} \lambda_i^2 = -2 [2n\omega^2 - \text{tr}(M^{-1}\nabla U(x))].$$

Usando a proposição 3.9, obtemos que

$$\text{tr}(M^{-1}D\nabla U(x)) = \sum_{i < j}^n \frac{m_i + m_j}{d_{ij}^3}.$$

Por estes fatos segue o seguinte teorema:

Teorema 3.21 *Seja x um equilíbrio relativo com velocidade rotacional ω dada pelo teorema 3.1. Então a metade da soma dos quadrados dos autovalores de x é:*

$$\sum_{i < j} \frac{m_i + m_j}{d_{ij}^3} - 2n\omega^2.$$

Usando este teorema, é possível encontrar uma condição necessária de estabilidade espectral para um equilíbrio relativo que pode ser enunciada como segue:

Corolário 3.22 *Uma condição necessária para que um equilíbrio relativo, x , seja espectralmente estável é:*

$$\sum_{i < j} \frac{m_i + m_j}{d_{ij}^3} < (2n - 3) \frac{U(x)}{2I(x)}.$$

Usando esta condição em [43], Roberts mostra o seguinte lema:

Lema 3.2 *O polígono regular é espectralmente instável para $n \geq 7$.*

E um resultado geral sobre a instabilidade espectral de equilíbrios relativos.

Teorema 3.23 *Todo equilíbrio relativo de n massas iguais é espectralmente instável para $n \geq 24306$.*

Capítulo 4

Representação Integral de Funções Complexas

4.1 Preliminares

Em [15], Ferrario e Portaluri desenvolvem uma teoria de representação integral de funções complexas, usando o operador de Perron-Frobenius l -ádico. Eles fazem uso destas ferramentas para tratar o problema diedral de n corpos. Aqui apresentamos demonstrações detalhadas dos teoremas que fazem estas representações e expandimos estes resultados para adequação a nossas considerações nos capítulos 5 e 6.

4.2 O Operador de Perron-Frobenius l -Ádico

Consideremos o espaço das funções complexas $\mathcal{F}(\mathbb{C})$. Consideremos o subespaço $\bar{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}(\mathbb{C})$, definido por

$$\bar{\mathcal{F}} := \{f : \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}.$$

Vamos definir o operador de Perron-Frobenius l -ádico como segue:

Definição 4.1 Para toda $f \in \bar{\mathcal{F}}$, e $l \in \mathbb{N}$ consideremos as l -ésimas raízes de ξ , denotemos tal conjunto por S , então o **operador de Perron-Frobenius l -ádico** é definido por

$$P_l(f)(\xi) = \frac{1}{l} \sum_{y \in S} f(y).$$

Usando a notação polar, temos $\xi = e^{i\theta}$, logo $\xi = y^l$, o que implica $y = e^{i(\frac{2\pi j + \theta}{l})}$, com $j = 0, \dots, l-1$. Portanto, podemos escrever o operador na forma:

$$P_l(f)(\xi) = \frac{1}{l} \sum_{j=0}^{l-1} f\left(e^{i(\frac{2\pi j + \theta}{l})}\right).$$

Antes de prosseguir, será conveniente compreender a expressão do operador de Perron-Frobenius l -ádico para a função

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ \xi &\rightarrow \xi^k, \end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Temos

$$P_l(\xi^k)(\xi) = \frac{1}{l} \sum_{j=0}^{l-1} e^{ik\left(\frac{2\pi j+\theta}{l}\right)},$$

deste modo, por tratar-se de uma soma de raízes complexas, podemos usar da simetria para avaliar a soma. Caso $k = \beta l$ temos

$$\begin{aligned} e^{i\beta l\left(\frac{2\pi j+\theta}{l}\right)} &= e^{i\beta(2\pi j+\theta)} \\ &= \xi^\beta = \xi^{\frac{k}{l}}, \end{aligned}$$

e assim

$$\frac{1}{l} \sum_{j=0}^{l-1} e^{ik\left(\frac{2\pi j+\theta}{l}\right)} = \xi^{\frac{k}{l}}.$$

No caso de $k = \beta l + \eta$, com $0 < \eta < l$, temos:

$$\begin{aligned} e^{i(\beta l + \eta)\left(\frac{2\pi j+\theta}{l}\right)} &= e^{i\beta(2\pi j+\theta)} \times e^{i\eta\left(\frac{2\pi j+\theta}{l}\right)} \\ &= e^{i(\beta + \frac{\eta}{l})\theta} \times e^{i(\beta + \frac{\eta}{l})2\pi j}, \end{aligned}$$

então

$$\sum_{j=0}^{l-1} e^{i(\beta l + \eta)\left(\frac{2\pi j+\theta}{l}\right)} = e^{i(\beta + \frac{\eta}{l})\theta} \sum_{j=0}^{l-1} e^{i(\beta + \frac{\eta}{l})2\pi j}.$$

Consideremos o termo $\sum_{j=0}^{l-1} e^{i(\beta + \frac{\eta}{l})2\pi j}$. Temos que este termo é uma soma geométrica

com $x = e^{i(\frac{\beta l + \eta}{l})2\pi}$, logo

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{l-1} e^{i(\beta + \frac{\eta}{l})2\pi j} &= \sum_{j=0}^{l-1} x^j \\ &= \frac{1 - x^l}{1 - x} \\ &= \frac{1 - e^{i(\beta l + \eta)2\pi}}{1 - e^{i(\frac{\beta l + \eta}{l})2\pi}}, \end{aligned}$$

portanto,

$$\sum_{j=0}^{l-1} e^{i(\beta + \frac{\eta}{l})2\pi j} = 0.$$

Por estes fatos temos:

$$P_l(\xi^k)(\xi) = \begin{cases} \xi^{\frac{k}{l}}, & k \equiv 0 \pmod{l}, \\ 0, & k \not\equiv 0 \pmod{l}. \end{cases}$$

Considerando $\xi = e^{i\theta}$, temos

$$\frac{1}{|1 - r\xi|^\alpha} = \frac{1}{(1 + r^2 - 2r \cos \theta)^\alpha}.$$

Mostraremos o seguinte lema:

Lema 4.1 Para todo $0 < r < 1$ e $\alpha > 0$ temos:

$$\frac{1}{|1 - r\xi|^\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \xi^n,$$

com

$$b_n = b_{-n} = \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} r^n \int_0^1 \frac{t^{\beta-1}}{(1-t)^\beta} \frac{t^n}{(1-r^2t)^\beta} dt,$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Considerando $\xi = e^{i\theta}$, podemos usar o teorema binomial para escrever

$$\frac{1}{(1 - r\xi)^\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\beta}{k} (-r\xi)^k,$$

$$\frac{1}{(1 - r\xi^{-1})^\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\beta}{k} (-r\xi^{-1})^k,$$

logo

$$(1 - r\xi)^{-\beta} (1 - r\xi^{-1})^{-\beta} = |1 - r\xi|^{-2\beta} = |1 - r\xi|^{-\alpha},$$

e portanto,

$$\begin{aligned} |1 - r\xi|^{-\alpha} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\beta}{k} (-r\xi)^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\beta}{k} (-r\xi^{-1})^k \right) \\ &= \sum_{k,l=0}^{\infty} \binom{-\beta}{k} \binom{-\beta}{l} (-r)^{k+l} \xi^{k-l}. \end{aligned}$$

Denotando $n = k - l$, obtemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \xi^n,$$

onde

$$b_n = (-1)^n \sum_{k-l=n}^{\infty} \binom{-\beta}{k} \binom{-\beta}{l} r^{k+l}.$$

Precisamos construir uma representação para o termo $\binom{-\beta}{k}$. Para tal, consideraremos a função $\Gamma(x)$, que satisfaz

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-,$$

logo

$$\Gamma(x+N) = (x+N-1) \dots x\Gamma(x),$$

e como $\Gamma(N+1) = N!$, $\forall N \in \mathbb{N}$, temos

$$(-1)^N \frac{\Gamma(x+N)}{\Gamma(x)\Gamma(N+1)} = \binom{-x}{N}.$$

Buscaremos então uma outra forma de representação para a função $\Gamma(x)$. Neste sentido temos o seguinte teorema de representação integral:

Teorema 4.2 Se $\operatorname{Re} z > 0$, então

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Demonstração: Ver [11] p. 176.

QED.

Assim, se considerarmos $u > 0$ e $v > 0$, temos

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-t} t^{u-1} dt,$$

$$\Gamma(v) = \int_0^\infty e^{-s} s^{v-1} ds,$$

logo

$$\Gamma(u) \cdot \Gamma(v) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)} t^{(u-1)} s^{(v-1)} dt ds.$$

Fazendo a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} t &= r \cos^2(\theta), & 0 \leq r \leq \infty. \\ s &= r \sin^2(\theta), & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

a jacobiana é

$$\begin{vmatrix} \cos^2(\theta) & -2r \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \sin^2(\theta) & 2r \sin(\theta) \cos(\theta) \end{vmatrix} = 2r \sin(\theta) \cos(\theta),$$

logo

$$\begin{aligned} \Gamma(u)\Gamma(v) &= 2 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r} r^{(u+v)-1} (\cos(\theta))^{2u-1} (\sin(\theta))^{2v-1} dr d\theta \\ &= 2 \left(\int_0^\infty e^{-r} r^{(u+v)-1} dr \right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2u-1} (\sin(\theta))^{2v-1} d\theta \right), \end{aligned}$$

mas, pelo fato de

$$\Gamma(u+v) = \int_0^\infty e^{-r} r^{(u+v)-1} dr,$$

temos

$$\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2u-1} (\sin(\theta))^{2v-1} d\theta.$$

Fazendo $\tau = \cos^2(\theta)$, temos

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2u-1} (\sin(\theta))^{2v-1} d\theta = \int_0^1 \tau^{u-1} (1-\tau)^{v-1} d\tau,$$

logo

$$\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} = \int_0^1 \tau^{u-1} (1-\tau)^{v-1} d\tau. \quad (4.1)$$

A função beta é definida por

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \quad (4.2)$$

Voltamos a demonstração do lema.

Pela equação (4.2), podemos associar a função beta com o binomial observando que:

$$\begin{aligned} \binom{-\beta}{N} &= \frac{-\beta \cdot (-\beta - 1) \dots (-\beta - N + 1)}{N!} \\ &= (-1)^N \frac{\beta \cdot (\beta + 1) \dots (\beta + N - 1)}{N!} \\ &= (-1)^N \frac{\Gamma(\beta + N)}{\Gamma(\beta)\Gamma(N + 1)}. \end{aligned}$$

Mas, por $\alpha = 2\beta > 0$, podemos considerar $\beta \neq 1$, logo teremos definido $\Gamma(1 - \beta)$, e assim:

$$\begin{aligned} \binom{-\beta}{N} &= (-1)^N \frac{\Gamma(\beta + N)\Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(N + 1)\Gamma(1 - \beta)} \\ &= \frac{(-1)^N}{\Gamma(\beta)\Gamma(1 - \beta)} \frac{\Gamma(\beta + N)\Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(N + 1)}. \end{aligned}$$

fazendo $u = \beta + N$ e $v = 1 - \beta$, temos $u + v = N + 1$, logo

$$\frac{\Gamma(\beta + N)\Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(N + 1)} = B(\beta + N, 1 - \beta).$$

Portanto,

$$\binom{\beta}{N} = \frac{(-1)^N}{\Gamma(\beta)\Gamma(1 - \beta)} B(\beta + N, 1 - \beta),$$

por (4.1), temos então

$$\binom{-\beta}{N} = \frac{(-1)^N}{\Gamma(\beta)\Gamma(1 - \beta)} \int_0^1 \tau^{\beta+N-1} (1 - \tau)^{-\beta} d\tau.$$

Agora vamos usar estes fatos para reescrever b_n . Fazendo $k = n + l$, temos

$$b_n = (-1)^n \sum_{l=0}^{+\infty} \binom{-\beta}{n+l} \binom{-\beta}{l} r^{n+2l},$$

donde

$$b_n = (-1)^n \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n+l}}{\Gamma(\beta)\Gamma(1 - \beta)} \int_0^1 \tau^{b+n+l-1} (1 - \tau)^{-\beta} d\tau \right) \binom{-\beta}{l} r^{n+2l},$$

como a integral e a série são em variáveis distintas, temos

$$b_n = \frac{(-1)^n (-1)^n}{\Gamma(\beta)\Gamma(1 - \beta)} r^n \int_0^1 \tau^{\beta+n-1} (1 - \tau)^{-\beta} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{-\beta}{l} r^{2l} \tau^l d\tau.$$

Mas, $\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{-\beta}{l} (\tau r^2)^l = (1 - r^2 \tau)^{-\beta}$. Portanto,

$$b_n = \frac{r^n}{\Gamma(\beta)\Gamma(1 - \beta)} \int_0^1 \frac{\tau^{\beta+n-1}}{(1 - \tau)^{\beta}(1 - r^2 \tau)^{\beta}} d\tau.$$

QED.

Fazemos uma extensão do lema 4.1, construindo uma representação para $r > 1$:

Lema 4.2 Para $r > 1$ e $\alpha = 2\beta > 0$, temos

$$|1 - r\xi|^{-\alpha} = \frac{1}{r^\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \xi^n,$$

onde

$$b_n = b_{-n} = \frac{1}{r^n \Gamma(\beta) \Gamma(1-\beta)} \int_0^1 \frac{\tau^{\beta+n-1}}{(1-\tau)^\beta (r^2 - \tau)^\beta} d\tau.$$

Demonstração: Considerando $s = 1/r$, temos $0 < s < 1$, valendo o lema 4.1. E como

$$\frac{1}{(1 + s^2 - 2s \cos \theta)^\alpha} = \frac{r^{2\alpha}}{(1 + r^2 - 2r \cos \theta)^\alpha},$$

temos

$$\frac{1}{|1 - s\xi|^\alpha} = \frac{r^{2\alpha}}{|1 - r\xi|^\alpha}.$$

Pelo lema 4.1, temos

$$\frac{1}{|1 - s\xi|^\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{s^n}{\Gamma(\beta) \Gamma(1-\beta)} \int_0^1 \frac{\tau^{\beta+n-1}}{(1-\tau)^\beta (1 - s^2 \tau)^\beta} \right) \xi^n,$$

logo

$$\frac{r^{2\alpha}}{|1 - r\xi|^\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{r^n \Gamma(\beta) \Gamma(1-\beta)} \int_0^1 \frac{r^\alpha \tau^{\beta+n-1}}{(1-\tau)^\beta (r^2 - \tau)^\beta} \right) \xi^n,$$

donde

$$\frac{1}{|1 - r\xi|^\alpha} = \frac{1}{r^\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{r^n \Gamma(\beta) \Gamma(1-\beta)} \int_0^1 \frac{\tau^{\beta+n-1}}{(1-\tau)^\beta (r^2 - \tau)^\beta} \right) \xi^n.$$

QED.

Lema 4.3 Para cada $\beta \in (0, 1)$, $r \in (0, 1]$ e inteiros $l \geq 2$

$$P_l(|1 - r\xi|^{-\alpha}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{ln} \xi^n.$$

Demonstração: Do lema 4.1, sabemos que

$$|1 - r\xi|^{-\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \xi^n,$$

onde

$$b_n = \frac{r^n}{\Gamma(\beta) \Gamma(1-\beta)} \int_0^1 \frac{\tau^{\beta+n-1}}{(1-\tau)(1 - r^2 \tau)^\beta} d\tau.$$

Sabemos também que

$$P_l(f)(\xi) = \frac{1}{l} \sum_{j=0}^{l-1} f\left(e^{i\left(\frac{2\pi j + \theta}{l}\right)}\right),$$

assim

$$\begin{aligned}
 P_l(|1 - r\xi|^{-\alpha}) &= P_l\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \xi^n\right) \\
 &= \frac{1}{l} \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{i\frac{n}{l}(2j\pi+\theta)} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \left(\frac{1}{l} \sum_{j=0}^{l-1} e^{i\frac{n}{l}(2j\pi+\theta)}\right),
 \end{aligned}$$

como vimos antes

$$\frac{1}{l} \sum_{j=0}^{l-1} e^{i\frac{n}{l}(2j\pi+\theta)} = \begin{cases} \xi^{\frac{k}{l}} & k \equiv 0 \pmod{l} \\ 0 & k \not\equiv 0 \pmod{l} \end{cases}$$

logo $n = kl$ com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$P_l(|1 - r\xi|^{-\alpha}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{kl} \xi^k.$$

Para cada $l \geq 2$, $b_{kl} = b_n$. Para $r \in (0, 1]$, temos a convergência garantida.

QED.

De acordo com os lemas 4.1, 4.2 e 4.3 temos o seguinte resultado:

Lema 4.4 Para cada $\beta \in (0, 1)$, $r > 1$ e inteiro $l \geq 2$, temos

$$P_l(|1 - r\xi|^{-\alpha}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{ln} \xi^n,$$

onde

$$b_{ln} = \frac{1}{r^{ln} \Gamma(\beta) \Gamma(1 - \beta)} \int_0^1 \frac{\tau^{\beta+nl-1}}{(1 - \tau)^\beta (r^2 - \tau)^\beta} d\tau.$$

Com o uso do lema 4.3, temos um teorema de representação integral para o operador de Perron-Frobenius l -ádico aplicado a função complexa $|1 - r\xi|^{-\alpha}$, que surge naturalmente pela simetria da configuração poligonal.

Teorema 4.3 Para cada $\beta \in (0, 1)$ e $r \in (0, 1]$ e inteiro $l \geq 2$. Temos

$$P_l(|1 - r\xi|^{-\alpha}) = \frac{1}{\Gamma(\beta) \Gamma(1 - \beta)} \int_0^1 \frac{\tau^{\beta-1}}{(1 - \tau)^\beta (1 - \tau r^2)^\beta} \frac{1 - (\tau r)^{2l}}{|1 - (\tau r)^l \xi|^2} d\tau.$$

Demonstração: Pelo lema 4.3, temos

$$P_l(|1 - r\xi|^{-\alpha}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{ln} \xi^n,$$

onde

$$b_{ln} = b_{-ln} = \frac{r^{ln}}{\Gamma(\beta) \Gamma(1 - \beta)} \int_0^1 \frac{\tau^{\beta+ln-1}}{(1 - \tau)^\beta (1 - r^2 \tau)^\beta} d\tau.$$

Podemos reescrever a série na forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{ln} \xi^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_{ln} \xi^n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_{ln} \xi^{-n}.$$

Por este fato segue que

$$\begin{aligned} P_l(|1 - r\xi|^{-\alpha}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r^{ln}}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 \frac{\tau^{\beta+ln-1}}{(1-\tau)^\beta(1-r^2\tau)^\beta} d\tau \right) \xi^n \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r^{ln}}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 \frac{\tau^{\beta+ln-1}}{(1-\tau)^\beta(1-r^2\tau)^\beta} d\tau \right) \xi^{-n}, \end{aligned}$$

portanto,

$$P_l(|1 - r\xi|^{-\alpha}) = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 \frac{\tau^{\beta-1}}{(1-\tau)^\beta(1-r^2\tau)^\beta} \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (r\tau)^{ln} \xi^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (r\tau)^{ln} \xi^{-n} \right) d\tau.$$

Fazendo $\lambda = r^l \tau^l$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\lambda\xi)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \xi^n, \\ \frac{1}{(1-\lambda\xi^{-1})} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \xi^{-n} + 1, \end{aligned}$$

assim,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \xi^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \xi^{-n} = \frac{1}{(1-\lambda\xi)} + \frac{1}{(1-\lambda\xi^{-1})} - 1,$$

portanto,

$$P_l(|1 - r\xi|^{-\alpha}) = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 \frac{\tau^{\beta-1}}{(1-\tau)^\beta(1-r^2\tau)^\beta} \frac{1 - (\tau r)^{2l}}{|1 - (\tau r)^l \xi|^2} d\tau.$$

QED.

Com o uso deste teorema de representação integral, produzimos um resultado geral de caracterização de certa família de funções complexas.

Proposição 4.4 Para $0 \leq x \leq 1$, $0 < \alpha < 1$ e $n \geq 3$ temos

$$\gamma(x, n, \alpha) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(1 + x^2 - 2x \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right)^\alpha},$$

é uma função analítica e crescente em n .

Demonstração: Considerando $\xi = e^{i\theta}$ temos, fazendo $\theta = 0$, que

$$P_n(|1 - x\xi|^{-\alpha}) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1 + x^2 - 2x \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right)^\alpha}$$

donde

$$\gamma(x, n, \alpha) = P_n(|1 - x\xi|^{-\alpha}) - \frac{1}{n} \frac{1}{(1 + x^2 - 2x)^\alpha}$$

Portanto, pelo lema 4.5 temos

$$\gamma(x, n, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 \frac{\tau^{\beta-1}}{(1-\tau)^\beta(1-x^2\tau)^\beta} \left(\frac{1-(\tau x)^{2n}}{|1-(\tau x)^n|^2} - \frac{1}{n} \frac{1+\tau x}{|1-\tau x|} \right) d\tau,$$

visto que, pelo lema 4.1, temos

$$\frac{1}{|1-x\xi|^\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \xi^n,$$

com $b_n = b_{-n}$.

Logo, para $\xi = 1$, temos

$$\frac{1}{(1-x)^{2\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 \frac{\tau^{\beta-1}}{(1-\tau)^\beta(1-x^2\tau)^\beta} \frac{1+\tau x}{1-\tau x} d\tau.$$

A analiticidade da função $\gamma(x, n, \alpha)$ em n , segue diretamente do fato da função

$$f_n(x, \tau) = \frac{1-(\tau x)^{2n}}{(1-(\tau x)^n)^2} - \frac{1}{n} \frac{1+\tau x}{1-\tau x},$$

ser a composição de funções analíticas em n .

Quanto ao comportamento crescente em n , devemos mostrar que $\frac{\partial \gamma}{\partial n} > 0$ para todo $0 \leq x \leq 1$, $0 < \alpha < 1$ e $n \geq 3$. Neste sentido, observamos que

$$A = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)} = \frac{\text{sen}(\pi\beta)}{\pi} > 0,$$

pois $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

$$B = \frac{\tau^{\beta-1}}{(1-\tau)^\beta(1-x^2\tau)^\beta} > 0.$$

Então

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = A \cdot \int_0^1 B \cdot \frac{\partial}{\partial n} (f_n(x, \tau)) d\tau.$$

Deste modo, mostrar que $\frac{\partial \gamma}{\partial n} > 0$ é equivalente a mostrar que $\frac{\partial}{\partial n} (f_n(x, \tau))$ é positiva.

A expressão de $\frac{\partial}{\partial n} (f_n(x, \tau))$ é obtida como segue: fazendo $x\tau = y$ e $z = (x\tau)^2 = y^2$, temos

$$f_n(y, z) = \frac{1-z^n}{(1-y^n)^2} - \frac{1}{n} \frac{1+y}{1-y}.$$

Logo

$$\frac{\partial}{\partial n} (f_n(y, z)) = \frac{(-\ln z \cdot z^n)(1-y^n) - 2(1-y^n)(-\ln y \cdot y^n)(1-z^n)}{(1-y^n)^4} + \frac{1}{n^2} \frac{1+y}{1-y}.$$

Como $z = y^2$, temos $\ln z = 2 \ln y$ e como $0 < z < 1$ e $0 < y < 1$, então $\ln z < 0$ e $\ln y < 0$. Denotando $-\ln y = a$, teremos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}(f_n(x, \tau)) &= \frac{-2ay^n}{(1-y^n)^2} + \frac{1}{n^2} \frac{1+y}{1-y} \\ &= \frac{(1+y)(1-y^n)^2 - 2an^2y^n(1-y)}{n^2(1-y)(1-y^n)^2}.\end{aligned}$$

Desta última expressão observamos que o sinal de $\frac{\partial}{\partial n}(f_n(x, \tau))$ é dado pelo numerador, por isto consideremos a seguinte função

$$\phi(n, y) = (1+y)(1-y^n)^2 - 2an^2y^n(1-y),$$

com domínio

$$R = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 / n \geq 3 \text{ e } 0 < y < 1\}.$$

Queremos mostrar que $\phi(n, y) > 0$, em R .

Condiremos então a função $\frac{\phi(n, y)}{n^2(1+y)}$, observamos que o sinal continua o mesmo, visto que $n^2 > 9$ e $1+y \geq 1$, temos

$$\frac{\phi(n, y)}{n^2(1+y)} = \left(\frac{1-y^n}{n}\right)^2 + 2 \ln y \cdot y^n \left(\frac{1-y}{1+y}\right).$$

Para mostrar que esta expressão é positiva, basta mostrar que é não nula, pela continuidade da função em n e em r . Considerando que esta seja nula temos

$$\ln y = \frac{(1-y^n)^2 \cdot (1+y)}{y^n \cdot n^2 \cdot (1-y)}.$$

Mas, como $0 < y < 1$, o que implica que $\ln y \in [-\infty, 0)$, portanto, temos uma contradição por assumir a nulidade da expressão e assim temos que $\phi(n, y) > 0$.

QED.

Capítulo 5

O Problema de $n+1$ Corpos

5.1 Formulação

Consideremos n massas $m_1, m_2, \dots, m_n$ positivas e uma massa μ desprezível, isto é, arbitrariamente pequena. Nosso interesse é descrever as equações newtonianas do movimento desses corpos por ação das forças gravitacionais.

Seja $q = (q_\mu, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n)$, com $q_j \in \mathbb{R}^3$. Sabemos que as equações do movimento tem a seguinte expressão:

$$M\ddot{q} = \nabla U(q),$$

onde $M = \text{diag} [m_1 m_1 m_1 \dots m_n m_n m_n]$ e

$$U(q) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|} + \sum_{i=1}^n \frac{\mu m_i}{\|q_\mu - q_i\|}.$$

Denotaremos

$$U_1(q) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|} \quad \text{e} \quad U_2(q) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu m_i}{\|q_\mu - q_i\|}.$$

Fazendo a mudança de coordenadas,

$$q(t) = R(\omega t)x(t),$$

onde ω é dado pelo teorema 3.1, temos que a equação do movimento

$$M\ddot{q} = \nabla U(q),$$

toma a forma

$$\omega^2 R^{-1} R'' x + 2\omega R^{-1} R' \dot{x} + \ddot{x} = M^{-1} \nabla \tilde{U}(x),$$

onde

$$R^{-1} R'' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R^{-1} R' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{x} + 2\omega K \dot{x} = M^{-1} \nabla \tilde{U}(x) + \omega^2 \hat{I}x,$$

que define o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \ddot{x}_\mu + 2\omega K \dot{x}_\mu &= \frac{\partial U_2}{\partial x_\mu}(x) + \omega^2 \hat{I}x_\mu, \\ \ddot{x}_i + 2\omega K \dot{x}_i &= \frac{\partial U_1}{\partial x_i}(x) + \omega^2 \hat{I}x_i. \end{cases}$$

Nosso interesse é em estudar a estabilidade linear de μ pela influência dos demais corpos. Portanto, analisaremos a linearização da primeira equação do sistema acima.

5.1.1 Linearização

Consideremos a função

$$h(x_\mu) = \frac{\partial U_2}{\partial x_\mu}(x) + \omega^2 \hat{I}x_\mu.$$

Sabemos que $x\tilde{x}_\mu$ é equilíbrio relativo, e assim: $h(\tilde{x}_\mu) = 0$. Fazendo a expansão de Taylor em torno de $\tilde{x}_\mu$, encontramos:

$$\ddot{\xi} + 2\omega K \dot{\xi} = h(\xi + \tilde{x}_\mu) = D_{x_\mu} h \cdot \xi + O(\xi^2),$$

portanto,

$$\ddot{\xi} + 2\omega K \dot{\xi} = \left(D \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_\mu}(x) \right) + \omega^2 I \right) \cdot \xi.$$

Pelo teorema 3.1, temos

$$D \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_\mu}(x) \right) = - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{d_{\mu j}^3} [I_{3 \times 3} - 3u_{\mu j} u_{\mu j}^T],$$

e deste modo encontramos a forma linear da equação do movimento para μ .

5.1.2 Caracterização da Análise Linear

Considerando uma solução da forma $\xi = \xi_0 e^{\lambda t}$, temos:

$$\lambda^2 \xi_0 e^{\lambda t} + 2\lambda \xi_0 \omega K e^{\lambda t} = \left(D \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_\mu}(x) \right) + \omega^2 \hat{I} \right) \xi_0 e^{\lambda t},$$

e deste modo temos definida a seguinte equação

$$D \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_\mu}(x) \right) \xi_0 + \omega^2 \hat{I} \xi_0 - \lambda^2 I \xi_0 - 2\lambda \omega K \xi_0 = 0,$$

donde

$$\left[\omega^{-2} D \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_\mu}(x) \right) + \hat{I} - \mu^2 I - 2\mu K \right] \xi_0 = 0,$$

com $\mu = \frac{\lambda}{|\omega|}$.

Portanto, fazendo

$$F(\mu^2) = \det \left[\omega^2 D \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_\mu}(x) \right) + \hat{I} - \mu^2 I - 2\mu K \right],$$

encontramos o polinômio de estabilidade linear.

5.1.3 A matriz $D\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_\mu}(x)\right)$

O potencial U_2 tem a expressão

$$U_2(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu m_i}{\|x_\mu - x_i\|},$$

donde

$$D\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_\mu}(x)\right) = - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{d_{\mu j}^3} [I_{3 \times 3} - 3u_{\mu j} u_{\mu j}^T],$$

o termo $u_{\mu j} u_{\mu j}^T$ é da forma:

$$u_{\mu j} = \frac{x_j - x_\mu}{d_{\mu j}},$$

onde $x_j = (x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, x_j^{(3)})$, $x_\mu = (x_\mu^{(1)}, x_\mu^{(2)}, x_\mu^{(3)})$. Assim

$$u_{\mu j} = \frac{(x_j^{(1)} - x_\mu^{(1)}, x_j^{(2)} - x_\mu^{(2)}, x_j^{(3)} - x_\mu^{(3)})}{d_{\mu j}},$$

desta forma

$$u_{\mu j} u_{\mu j}^T = \frac{1}{d_{\mu j}^2} \begin{bmatrix} (x_j^{(1)} - x_\mu^{(1)})^2 & (x_j^{(1)} - x_\mu^{(1)})(x_j^{(2)} - x_\mu^{(2)}) & \dots \\ (x_j^{(2)} - x_\mu^{(2)})(x_j^{(1)} - x_\mu^{(1)}) & (x_j^{(2)} - x_\mu^{(2)})^2 & \dots \\ \dots & \dots & (x_j^{(3)} - x_\mu^{(3)})^2 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$(u_{\mu j} u_{\mu j}^T)_{sl} = \left(\frac{(x_j^{(s)} - x_\mu^{(s)})(x_j^{(l)} - x_\mu^{(l)})}{d_{\mu j}^2} \right).$$

5.2 Um Problema Restrito de $n+1$ Corpos

Em [25] Lindow apresenta a formalização e análise de um problema restrito, que representa a dinâmica de uma partícula de massa desprezível relativo às massas dispostas em um anel poligonal. Neste artigo, ele apresenta a análise feita para determinação dos pontos de libração e usa uma teoria desenvolvida por Tisserand para representação das funções que aparecem naturalmente pela disposição e simetria do problema. Devido a esta representação, Lindow consegue mostrar um teorema de simetria. Este foi melhorado pelo Bang, em sua tese de doutorado, onde ele desenvolveu uma generalização das técnicas usadas pelo Lindow, para potenciais com expoentes reais. O Lindow considera apenas o potencial Newtoniano, e obtém o seguinte resultado:

Teorema 5.1 *Sejam n massas iguais dispostas nos vértices de um polígono regular, girando em torno do seu centro com velocidade angular ω constante. Consideremos a adição de uma partícula μ , de massa desprezível. A fim de que a configuração seja um equilíbrio relativo é necessário e suficiente que a partícula μ esteja em um eixo de simetria, numa linha ortogonal a uma aresta, ou numa linha que passa pelo centro e um dos vértices.*

Este é um forte teorema de simetria para a teoria das configurações centrais. Foi usado em outros trabalhos recentes, como por exemplo, em [21]. E serviu para inspiração e elucidação do trabalho de tese do Bang, que usou de suas modificações na teoria de representação para obter mais informações a respeito da simetria. Ele determinou a posição relativa da massa desprezível com respeito ao polígono de massas.

Teorema 5.2 *Sejam n massas iguais dispostas nos vértices de um polígono regular, girando em torno do seu centro com velocidade angular ω constante. Consideremos a adição de uma partícula μ , de massa desprezível. A fim de que a configuração seja um equilíbrio relativo, é necessário e suficiente que a partícula μ esteja em um eixo de simetria, numa linha ortogonal a uma aresta, ou numa linha que passa pelo centro e um dos vértices. Onde μ está no eixo $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{n}$ (a menos de rotações de $\frac{2\pi}{n}$).*

- No caso $\theta = 0$, existem duas soluções $\rho = 0$ e $\rho = R_1 > 0$.
- No caso $\theta = \frac{\pi}{n}$, existem duas soluções $\rho = R_2$, $0 < R_2 < 1$ e $\rho = R_3 > 1$.

Temos como objetivo analisar a estabilidade linear da partícula μ relativo aos demais corpos. Observando que em todos os casos a configuração é instável, visto que o polígono é instável, como pode ser visto em [33].

5.3 A Análise da Estabilidade

Consideremos n massas iguais, $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$, dispostas nos vértices de um polígono regular. Sejam as posições dadas por:

$$q_j = (\cos(\theta_j), \sin(\theta_j), 0),$$

onde $\theta_j = \frac{2j\pi}{n}$.

Como vimos as configurações que são equilíbrios relativos são as planares. Usaremos o teorema 5.2 para fazer nossas análises. Consideremos inicialmente o eixo de simetria $\theta = 0$.

5.3.1 Primeiro eixo de simetria [$\theta = 0$]

Considerando a massa desprezível, μ , em coordenadas polares, $(r, 0)$, obtemos:

$$q_\mu = r q_0.$$

Por estas considerações o vetor unitário é:

$$u_{\mu j} = \frac{(\cos(\theta_j) - r, \sin(\theta_j), 0)}{d_{\mu j}},$$

onde $d_{\mu j} = \sqrt{(\cos(\theta_j) - r)^2 + \sin(\theta_j)^2}$.

Logo

$$u_{\mu j} u_{\mu j}^T = \frac{1}{d_{\mu j}^2} \begin{bmatrix} (\cos(\theta_j) - r)^2 & (\cos(\theta_j) - r)\sin(\theta_j) & 0 \\ (\cos(\theta_j) - r)\sin(\theta_j) & \sin(\theta_j)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz $D\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_\mu}(x)\right)$, fazendo $c_j = \cos(\theta_j)$ e $s_j = \sin(\theta_j)$, tem a forma:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_\mu}(x)\right) &= -\sum_{j=1}^n \frac{m}{d_{\mu j}^3} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{d_{\mu j}^2} \begin{bmatrix} (c_j - r)^2 & (c_j - r)s_j & 0 \\ (c_j - r)s_j & s_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= -\sum_{j=1}^n \frac{m}{d_{\mu j}^3} \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{(c_j - r)^2}{d_{\mu j}^2} & -3\frac{(c_j - r)s_j}{d_{\mu j}^2} & 0 \\ -3\frac{(c_j - r)s_j}{d_{\mu j}^2} & 1 - 3\frac{s_j^2}{d_{\mu j}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos escrever o polinômio de estabilidade na forma:

$$F(\mu^2) = \det \left[\omega^{-2} D\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_\mu}(x)\right) + \hat{I} - \mu^2 I - 2\mu K \right],$$

onde I é a identidade 3×3 e

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, fazendo $z = \mu^2$, encontramos:

$$F(z) = \det \begin{bmatrix} a(n, r) + (1 - \mu^2) & e(n, r) + 2\mu & 0 \\ e(n, r) - 2\mu & b(n, r) + (1 - \mu^2) & 0 \\ 0 & 0 & d(n, r) \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} a(n, r) &= -\sum_{j=1}^n \frac{m\omega^{-2}}{d_{\mu j}^3} \left(1 - 3\frac{(c_j - r)^2}{d_{\mu j}^2} \right), \\ b(n, r) &= -\sum_{j=1}^n \frac{m\omega^{-2}}{d_{\mu j}^3} \left(1 - 3\frac{s_j^2}{d_{\mu j}^2} \right), \\ e(n, r) &= 3 \sum_{j=1}^n \frac{m\omega^{-2}}{d_{\mu j}^5} (c_j - r)s_j, \\ d(n, r) &= -\sum_{j=1}^n \frac{m\omega^{-2}}{d_{\mu j}^3} - \mu^2. \end{aligned}$$

Deste modo, encontramos a expressão do polinômio $F(z)$:

$$F(z) = d(n, r) \cdot [(a(n, r) + (1 - \mu^2))(b(n, r) + (1 - \mu^2)) - (e(n, r) - 2\mu)(e(n, r) + 2\mu)].$$

portanto, as raízes são encontradas fazendo $d(n, r) = 0$ e

$$a(n, r) \cdot b(n, r) + (a(n, r) + b(n, r))(1 - \mu^2) + (1 - \mu^2)^2 - (e(n, r)^2 - 4\mu^2) = 0.$$

No caso $d(n, r) = 0$, temos

$$-\sum_{j=1}^n \frac{m\omega^{-2}}{d_{\mu j}^3} - \mu^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu^2 = -\sum_{j=1}^n \frac{m\omega^{-2}}{d_{\mu j}^3},$$

como $d_{\mu j} > 0$ para todo n, r e $m > 0$. Então $-\sum_{j=1}^n \frac{m\omega^{-2}}{d_{\mu j}^3} \in \mathbb{R}_-^*$. Logo

$$\mu = \pm \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{m\omega^{-2}}{d_{\mu j}^3}} \right) i.$$

Por estas observações, vemos aqui aplicada a proposição 3.17 sobre a estabilidade normal dos equilíbrios relativos. Para nossa análise sobre a estabilidade planar iremos considerar, sem perda de generalidade, $m = 1$.

Fazendo $z = \mu^2$, obtemos:

$$z^2 + [2 - [a(n, r) + b(n, r)]]z + [(a(n, r) + b(n, r)) + a(n, r) \cdot b(n, r) + 1 - e(n, r)^2].$$

Para que z seja real e negativo temos que ter:

- (i) $2 - [a(n, r) + b(n, r)] > 0$;
- (ii) $a(n, r) + b(n, r) + a(n, r) \cdot b(n, r) + 1 - e(n, r)^2 > 0$;
- (iii) $(a(n, r) - b(n, r))^2 - 8(a(n, r) + b(n, r)) + 4e(n, r)^2 \geq 0$.

Encontraremos um intervalo onde a condição (i) é satisfeita e mostraremos que neste intervalo a condição (iii) não é satisfeita. Para passarmos a esta análise consideremos inicialmente o seguinte lema:

Lema 5.1 *Para todo $n \geq 3$ e $r > 0$, temos $e(n, r) \equiv 0$.*

Demonstração: A expressão de $e(n, r)$ é:

$$e(n, r) = \sum_{j=1}^n \frac{\left(\cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right) - r \right) \sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right)}{\left(1 + r^2 - 2 \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Observamos que para n ímpar temos:

- (i) $\sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow j = n$;
- (ii) $\sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right) = -\sin\left(\frac{2(n-l)\pi}{n}\right)$;
- (iii) $\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2(n-l)\pi}{n}\right)$,

para todo $l \in \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$. Logo por simetria, temos $e(n, r) \equiv 0$. Para n par, temos:

- (i) $\sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow j = n \text{ ou } \frac{n}{2}$;
- (ii) $\sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right) = -\sin\left(\frac{2(n-l)\pi}{n}\right)$;
- (iii) $\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2(n-l)\pi}{n}\right)$,

para todo $l \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$. E assim concluímos a demonstração.

QED.

Por este lema, as condições ficam na forma:

$$2 - [a(n, r) + b(n, r)] > 0, \quad (5.1)$$

$$a(n, r) + b(n, r) + a(n, r) \cdot b(n, r) + 1 > 0, \quad (5.2)$$

$$(a(n, r) - b(n, r))^2 - 8[a(n, r) + b(n, r)] \geq 0. \quad (5.3)$$

Vamos inicialmente considerar a condição $2 - [a(n, r) + b(n, r)] > 0$, sabendo que

$$(a + b)(n, r) = \sum_{j=1}^n \frac{\omega^{-2}}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mostraremos o seguinte lema:

Lema 5.2 *Para todo $n \geq 3$ existe $r > 1$ tal que $2 - [a(n, r) + b(n, r)] > 0$.*

Demonstração: Observamos *a priori* que

$$(a + b)(n, r) = f(n) \cdot g(n, r),$$

onde $f(n) = \omega^{-2}$. Por esta decomposição a condição é reescrita sob a forma:

$$g(n, r) < \frac{2}{f(n)} = 2 \cdot \omega^2. \quad (5.4)$$

Considerando a desigualdade (5.4), o lema é equivalente a mostrar:

- (i) $\frac{\partial}{\partial r} g(n, r) < 0$;
- (ii) $\lim_{r \rightarrow +\infty} g(n, r) = 0$.

A igualdade (ii) segue facilmente da expressão de $g(n, r)$. Para a desigualdade (i) consideramos a expressão da derivada, dada por:

$$\frac{\partial}{\partial r} g(n, r) = \sum_{j=1}^n \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{2r - 2 \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}}} \right). \quad (5.5)$$

Observamos que

$$0 \leq \left| \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \right| \leq 1,$$

logo

$$r - \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right) > 0,$$

para $j \in \{1, \dots, n\}$. Portanto,

$$\sum_{j=1}^n \frac{2r - 2 \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}}} > 0.$$

e deste modo, segue que $\frac{\partial}{\partial r} g(n, r) < 0$, para todo $n \geq 3$ e $r > 1$.

QED.

Uma vez que temos a existência de um $r \in \mathbb{R}$, podemos indexar tal r ao valor de n e investigar qual o comportamento a medida que o n varia. Neste sentido temos o seguinte lema:

Lema 5.3 *Para todo $n \geq 3$ e $r > 1$, a função $g(n, r)$ é decrescente em n .*

Demonstração: Considerando n uma variável contínua, temos que $g(n, r)$ é diferenciável, logo

$$\frac{\partial}{\partial n} g(n, r) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{6\pi r}{n^2} \frac{j \cdot \sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Para $n = 2k$, temos

$$\sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right) = 0,$$

para $j = \frac{n}{2}$. Podemos reescrever a soma na forma:

$$\sum_{j=1}^{\frac{n-2}{2}} \frac{j \cdot \sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}}} + \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \frac{j \cdot \sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Como sabemos

$$1 \leq j \leq \frac{n-2}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right) > 0,$$

$$\frac{n}{2} + 1 \leq j \leq n-1 \Rightarrow \sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right) < 0.$$

Além do mais, para $1 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$, temos pela simetria que:

$$\sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right) = -\sin\left(\frac{2(n-j)\pi}{n}\right),$$

$$\cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2(n-j)\pi}{n}\right).$$

Portanto

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{j \cdot \sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}}} = - \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{(n-2j) \left|\sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right|}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Logo $\frac{\partial}{\partial n} g(n, r) < 0$. O caso $n = 2k + 1$ é semelhante.

QED.

Usando o lema 5.3, o fato que

$$\gamma(1, n, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(\frac{\pi j}{n})}$$

é crescente em n , ver proposição 4.4, e

$$\omega^2 = \gamma(1, n, \frac{1}{2}),$$

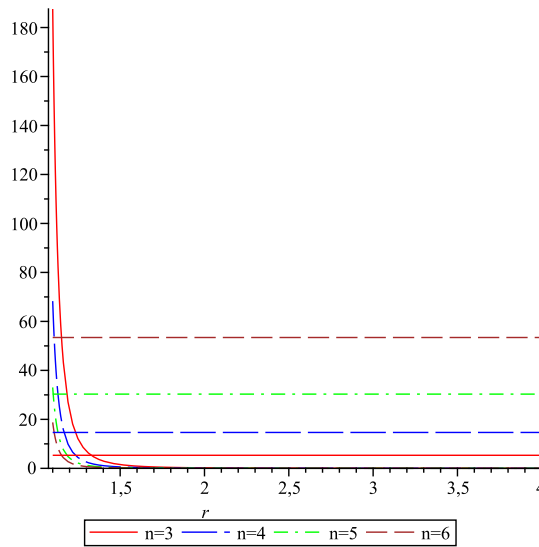
podemos representar a condição de estabilidade por:

$$g(n, r) < 2\omega^2. \quad (5.6)$$

Mas, pelo lema 5.3 a equação (5.6) será sempre satisfeita para $r > r_n$, e estes resultados nos dão o seguinte corolário:

Corolário 5.3 *Para todo $n \geq 3$, temos a equação (5.6) satisfeita para $r \in [r_n, +\infty)$.*

Representamos o comportamento descrito pelo corolário 5.3, na figura:



Deste modo o corolário 5.3, dá-nos o comportamento de variação da equação (5.6) em função da variação de n . Usaremos a restrição ao intervalo $[r_n, \infty)$ para mostrar o seguinte resultado:

Proposição 5.4 *Para todo $n \geq 3$ e $r \in [r_n, \infty)$ temos*

$$(a(n, r) - b(n, r))^2 - 8[a(n, r) + b(n, r)] < 0.$$

Para construção da demonstração desta proposição, iremos descrever dois resultados preliminares.

Lema 5.4 *Para todo $n \geq 3$, temos*

$$\tilde{a}(n, r) > 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial r} \tilde{a}(n, r) < 0,$$

para $r > 1$.

Demonstração: Analisaremos a expressão:

$$\tilde{a}(n, r) = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{d_{\mu j}^3} \left(1 - \frac{3 \left(\cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) - r \right)^2}{d_{\mu j}^2} \right).$$

Observamos inicialmente que:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{a}(n, r) \approx \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{4}{r^3} = 0.$$

Calculando a derivada em r , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{a}(n, r) = & - \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{-3 \left(1 - \frac{3 \left(\cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) - r \right)^2}{d_{\mu j}^2} \right) \left(2r - 2 \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)^{\frac{5}{2}}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{6 \frac{\left(\cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) - r \right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)} + \frac{3 \left(\cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) - r \right)^2 \left(2r - 2 \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)^2}}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \right]. \end{aligned}$$

O termo

$$\left(1 - \frac{3 \left(\cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) - r \right)^2}{d_{\mu j}^2} \right) < 0.$$

De fato, pois seu caso extremo ocorre quando $\cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) = 0$, e por estarmos considerando $r > 1$ temos

$$1 - 3 \frac{r^2}{1 + r^2} = \frac{1 - 2r^2}{1 + r^2} < 0.$$

Uma consequência direta deste fato é que $\tilde{a}(n, r) > 0 \ \forall n \geq 3$.

Podemos reescrever a derivada como

$$\frac{\partial}{\partial r} \tilde{a}(n, r) = - \sum_{j=1}^n A(n, r) + B(n, r),$$

com $A(n, r) > 0$ e $B(n, r) < 0$, $\forall n \geq 3$, e com expressões:

$$\begin{aligned} A(n, r) &= \frac{-3}{2} \frac{\left(1 - \frac{3 \left(\cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) - r \right)^2}{d_{\mu j}^2} \right) \left(2r - 2 \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)^{\frac{5}{2}}}, \\ B(n, r) &= \frac{6 \frac{\left(\cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) - r \right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)} + \frac{3 \left(\cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) - r \right)^2 \left(2r - 2 \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)^2}}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Mostraremos que $A(n, r) + B(n, r) > 0$, $\forall n \geq 3$. Para tal é suficiente mostrar que

$$\frac{|A(n, r)|}{|B(n, r)|} > 1.$$

não é difícil observar que este quociente é equivalente ao quociente:

$$\frac{\left| \left(1 + 4r \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right) - 3 \left(r^2 + \cos^2 \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right) \right|}{\left| 2(1 - \cos^2 \left(\frac{2j\pi}{n} \right)) \right|} > 1.$$

Visto que o denominador atinge seu valor máximo para $\cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) = 0$. Temos

$$\frac{|1 - 3r^2|}{2} > 1, \text{ pois } r > 1.$$

QED.

Agora consideraremos o seguinte lema:

Lema 5.5 *Para todo $n \geq 3$, temos*

$$\tilde{b}(n, r) < 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial r} \tilde{b}(n, r) > 0,$$

para $r > 1$.

Demonstração: Mostraremos inicialmente que $\tilde{b}(n, r) < 0$, $\forall n \geq 3$ e $r > 1$. Claramente temos a seguinte equivalência:

$$\begin{aligned} \tilde{b}(n, r) < 0 &\leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 1^+} \tilde{b} = -\infty, \\ &\lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{b}(n, r) = 0, \\ &\tilde{b}(n, r) \neq 0, \forall n \geq 3 \text{ e } r > 1. \end{aligned}$$

Considerando n ímpar podemos reescrever a função $\tilde{b}(n, r)$ na forma:

$$\tilde{b}(n, r) = -\frac{1}{(1 + r^2 - 2r)^{\frac{1}{2}}} + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) - 3 \sin^2 \left(\frac{2j\pi}{n} \right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Por esta expressão vemos naturalmente que $\lim_{r \rightarrow 1^+} \tilde{b} = -\infty$ e $\lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{b}(n, r) = 0$. Restamos mostrar que $\tilde{b}(n, r) \neq 0$. Mas vemos claramente que

$$\frac{1}{(1 + r^2 - 2r)^{\frac{1}{2}}} \neq 2 \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) - 3 \sin^2 \left(\frac{2j\pi}{n} \right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pois mesmo que o numerador da soma seja 1, o que é improvável, o numerador da soma é certamente distinto de $(1 + r^2 - 2r)^{\frac{1}{2}}$, visto que este tem raiz 1, e os demais não. O caso n par é equivalente.

Mostraremos agora que $\frac{\partial}{\partial r} \tilde{b}(n, r) > 0$. Usaremos o mesmo argumento acima, mostrando as equivalências:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{b}(n, r) > 0 &\leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 1^+} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{b}(n, r) = \infty, \\ &\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{b}(n, r) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial r} \tilde{b}(n, r) \neq 0. \end{aligned}$$

Mais uma vez consideraremos n ímpar, sendo equivalente o caso n par. A derivada toma a forma:

$$\frac{\partial}{\partial r} \tilde{b}(n, r) = \frac{-\frac{3}{2}(2r-2)}{(1+r^2-2r)^{\frac{5}{2}}} + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \bar{A}(n, r) \left(2r - 2 \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right),$$

onde

$$\bar{A}(n, r) = \frac{\frac{-3}{2}}{\left(1 + r^2 - 2 \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{15 \sin^2 \left(\frac{2j\pi}{n} \right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)^{\frac{7}{2}}}.$$

É fácil ver que $\lim_{r \rightarrow 1^+} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{b}(n, r) = \infty$ e $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{b}(n, r) = 0$, restando mostrar que $\frac{\partial}{\partial r} \tilde{b}(n, r) \neq 0$. Mas este fato é verificado ao observarmos que

$$\frac{\frac{3}{2}(2r-2)}{(1+r^2-2r)^{\frac{5}{2}}} \neq 2 \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \bar{A}(n, r) \left(2r - 2 \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right).$$

Pois o denominador da soma é o produto dos polinômios $\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{2j\pi}{n} \right) \right)^{\frac{7}{2}}$ com $j = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$, e portanto, polinômios distintos. Mas estes polinômios não se anulam em $r = 1$. E portanto a desigualdade se caracteriza.

QED.

Agora podemos exibir a demonstração da proposição 5.4:

Demonstração: Trataremos a desigualdade de forma direta usando os lemas 5.4 e 5.5. Observamos os seguintes fatos:

- (i) $(a+b)(n, r) > 0$, $a(n, r) > 0$ e $b(n, r) < 0 \forall n \geq 3$ e $r > 1$, donde $a(n, r) > |b(n, r)|$;
- (ii) $(a+b)(n, r) < 2\omega^2$ para $r \in [r_n, \infty)$.

Temos também que

$$(a-b)(n, r) < (a+a)(n, r) < (a+a)(n, r) + 2(a+b)(n, r) + (|b|+|b|)(n, r) = 4(a+b)(n, r).$$

para todo $n \geq 3$ e $r \in [r_n, \infty)$.

Temos que $(a-b)(n, r) < 2\omega^2$, pois

$$\frac{\partial}{\partial r} (a-b)(n, r) < 0,$$

e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (a-b)(n, r) = 0.$$

Portanto,

$$[(a-b)(n, r)] \cdot [(a-b)(n, r)] < 4(a+b)(n, r) \cdot 2\omega^2.$$

QED.

A proposição 5.4 mostra que a condição (5.3) não é satisfeita para os valores de $r \in [r_n, \infty)$, e deste modo obtemos o resultado central desta seção:

Teorema 5.5 *Para a configuração poligonal com n massas iguais nos vértices, as posições de equilíbrio para uma massa desprezível no eixo de simetria $\theta = 0$ são instáveis, para todo $n \geq 3$.*

5.3.2 Segundo eixo de simetria $[\theta = \frac{\pi}{n}]$

Passemos ao segundo eixo de simetria, onde a posição da massa desprezível, μ , representada em coordenadas polares toma a forma:

$$q_\mu = r \left(\cos \left(\frac{\pi}{n} \right), \sin \left(\frac{\pi}{n} \right), 0 \right).$$

Deste modo

$$u_{\mu j} = \frac{\left(\cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - r \cos \left(\frac{\pi}{n} \right), \sin \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - r \sin \left(\frac{\pi}{n} \right), 0 \right)}{d_{\mu j}},$$

onde

$$d_{\mu j} = \sqrt{\left(\cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - r \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \right)^2 + \left(\sin \left(\frac{2\pi j}{n} \right) - r \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) \right)^2},$$

ou seja,

$$d_{\mu j}^2 = \left(1 + r^2 - 2 \cos \left(\frac{2j\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \right) \right).$$

$$u_{\mu j} u_{\mu j}^T = \frac{1}{d_{\mu j}^2} \begin{bmatrix} (c_j - r c_{\frac{\pi}{n}})^2 & (c_j - r c_{\frac{\pi}{n}})(s_j - r s_{\frac{\pi}{n}}) & 0 \\ (c_j - r c_{\frac{\pi}{n}})(s_j - r s_{\frac{\pi}{n}}) & (s_j - r s_{\frac{\pi}{n}})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $c_j = \cos(\theta_j)$, $s_j = \sin(\theta_j)$, $s_{\frac{\pi}{n}} = \sin(\frac{\pi}{n})$ e $c_{\frac{\pi}{n}} = \cos(\frac{\pi}{n})$. Portanto, a matriz $D \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_\mu}(x) \right)$, tem a forma:

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^n \frac{m}{d_{\mu j}^3} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{d_{\mu j}^2} \begin{bmatrix} (c_j - r c_{\frac{\pi}{n}})^2 & (c_j - r c_{\frac{\pi}{n}})(s_j - r s_{\frac{\pi}{n}}) & 0 \\ (c_j - r c_{\frac{\pi}{n}})(s_j - r s_{\frac{\pi}{n}}) & (s_j - r s_{\frac{\pi}{n}})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ & = - \sum_{j=1}^n \frac{m}{d_{\mu j}^3} \begin{bmatrix} 1 - 3 \frac{(c_j - r c_{\frac{\pi}{n}})^2}{d_{\mu j}^2} & -3 \frac{(c_j - r c_{\frac{\pi}{n}})(s_j - r s_{\frac{\pi}{n}})}{d_{\mu j}^2} & 0 \\ -3 \frac{(c_j - r c_{\frac{\pi}{n}})(s_j - r s_{\frac{\pi}{n}})}{d_{\mu j}^2} & 1 - 3 \frac{(s_j - r s_{\frac{\pi}{n}})^2}{d_{\mu j}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos escrever o polinômio de estabilidade na forma:

$$F(\mu^2) = \det \left[\omega^{-2} D \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_\mu}(x) \right) + \hat{I} - \mu^2 I - 2\mu K \right],$$

com as mesmas notações usadas na seção anterior. Temos:

$$F(\mu^2) = \det \begin{bmatrix} A(n, r) + (1 - \mu^2) & E(n, r) + 2\mu & 0 \\ E(n, r) - 2\mu & B(n, r) + (1 - \mu^2) & 0 \\ 0 & 0 & D(n, r) \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned}
A(n, r) &= -\sum_{j=1}^n \frac{m\omega^{-2}}{d_{\mu j}^3} \left(1 - 3 \frac{(c_j - rc_{\frac{\pi}{n}})^2}{d_{\mu j}^2} \right), \\
B(n, r) &= -\sum_{j=1}^n \frac{m\omega^{-2}}{d_{\mu j}^3} \left(1 - 3 \frac{(s_j - rs_{\frac{\pi}{n}})^2}{d_{\mu j}^2} \right), \\
E(n, r) &= 3 \sum_{j=1}^n \frac{m\omega^{-2}}{d_{\mu j}^5} (c_j - rc_{\frac{\pi}{n}}) (s_j - rs_{\frac{\pi}{n}}), \\
D(n, r) &= -\sum_{j=1}^n \frac{m\omega^{-2}}{d_{\mu j}^3} - \mu^2.
\end{aligned}$$

Calculando o determinante da matriz acima, obtemos o polinômio de estabilidade com expressão:

$$F(z) = D(n, r) \cdot [(A(n, r) + (1 - \mu^2))(B(n, r) + (1 - \mu^2)) - (E(n, r) - 2\mu)(E(n, r) + 2\mu)].$$

Do mesmo modo que foi feito no primeiro eixo, por termos a decomposição do polinômio, obtemos a estabilidade normal por fazer $D(n, r) = 0$, uma vez que esta expressão é igual a expressão de $d(n, r)$, e novamente vemos aplicado o resultado geral sobre estabilidade normal de equilíbrios relativos.

Seguimos nossa análise fazendo o outro termo igual a zero:

$$[(A(n, r) + (1 - \mu^2))(B(n, r) + (1 - \mu^2)) - (E(n, r) - 2\mu)(E(n, r) + 2\mu)] = 0.$$

Encontrando assim o polinômio de estabilidade planar, que nos dá as condições de estabilidade. Com cálculos simples encontramos a expressão deste polinômio na forma, fazendo $z = \mu^2$:

$$z^2 + [2 - [A(n, r) + B(n, r)]]z + [A(n, r) + B(n, r) + A(n, r) \cdot B(n, r) + 1 - E(n, r)^2].$$

Deste modo as condições de estabilidade são dadas pelas desigualdades:

- (i) $2 - [A(n, r) + B(n, r)] > 0$;
- (ii) $A(n, r) + B(n, r) + A(n, r) \cdot B(n, r) + 1 - E(n, r)^2 > 0$;
- (iii) $(A(n, r) - B(n, r))^2 - 8(A(n, r) + B(n, r)) + 4E(n, r)^2 \geq 0$.

Para este eixo de simetria faremos a análise para as posições de equilíbrio com $0 < r < 1$.

Segundo eixo de simetria para $0 < r < 1$

Faremos uma abordagem direta a primeira desigualdade, que traz consigo a determinação da instabilidade por indícios numéricos. Observamos que a função $(A + B)(n, r)$ que tem expressão:

$$(A + B)(n, r) = \sum_{j=1}^n \frac{\omega^{-2}}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)\right)^{3/2}},$$

é positiva para todo $n \geq 3$ e $r \in \mathbb{R}$. Pelo comportamento conhecido da função ω^2 , podemos reescrever a primeira condição na forma:

$$2\omega^2 - (\bar{A} + \bar{B})(n, r) > 0,$$

onde

$$(\bar{A} + \bar{B})(n, r) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)\right)^{3/2}}.$$

Temos o seguinte lema, que caracteriza esta função:

Lema 5.6 Para todo $n \geq 3$ e $0 < r < 1$, $(\bar{A} + \bar{B})(n, r)$ é crescente em r .

Demonstração: Consideraremos o teorema 4.3 para representar a função $(\bar{A} + \bar{B})(n, r)$ como uma integral e poder fazer uma análise direta. Tomando $\xi = e^{i\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)}$ temos

$$\begin{aligned} (\bar{A} + \bar{B})(n, r) &= P_n \left(|1 - r\xi|^{-\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 \frac{\tau^{\beta-1}}{(1-\tau)^\beta(1-r^2\tau)^\beta} \frac{1 - (\tau r)^{2n}}{|1 - (\tau r)^n \xi|^2} d\tau. \end{aligned}$$

Claramente a integral é uma função diferenciável em r . E portanto, precisaremos derivar apenas a função

$$\phi(n, r) = \frac{1 - (\tau r)^{2n}}{(1 - r^2\tau)^\beta |1 - (\tau r)^n \xi|^2}.$$

Substituindo nesta função os valores relativos a função $(\bar{A} + \bar{B})(n, r)$, encontramos

$$\phi(n, r) = \frac{1 - (\tau r)^{2n}}{(1 - r^2\tau)^{\frac{3}{4}} \left(1 - (\tau r)^n \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right) + (\tau r)^{2n}\right)}.$$

Calculando a derivada desta função em r , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial r} \phi(n, r) = \frac{-2n\tau(\tau r)^{2n-1} + \left[\frac{3}{2}r\tau \frac{(1-(\tau r)^{2n})}{(1-\tau r^2)} + n \cdot \frac{(1-(\tau r)^{2n})}{|1-(\tau r)^n \xi|^2} \tau(\tau r)^n \left(\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right) - 2(\tau r)^{n-1} \right) \right]}{(1 - r^2\tau)^{\frac{3}{4}} |1 - (r\tau)^n \xi|^2}. \quad (5.7)$$

Faremos uma análise de alguns termos, para tal consideremos:

$$n \cdot (\tau r)^n, \frac{1 - (\tau r)^{2n}}{|1 - (\tau r)^n \xi|^2} \text{ e } \left(\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right) - 2(\tau r)^{n-1} \right).$$

Fazendo $y = \tau r$, temos $n \cdot (\tau r)^n = n \cdot y^n$, faremos a derivada em n . Considerando que $0 < y < 1$, temos

$$\frac{d}{dn} (n \cdot y^n) = y^n + n \cdot \ln(y) \cdot y^n < 0.$$

Como $|\xi| = 1$, segue que

$$\frac{1 - (\tau r)^{2n}}{|1 - (\tau r)^n \xi|^2} \approx 1.$$

Claramente o termo $\left| \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right) - 2(\tau r)^{n-1} \right| < 2$.

Portanto, quando consideramos a expressão (5.7), temos que os termos

$$n \cdot \frac{(1 - (\tau r)^{2n})}{|1 - (\tau r)^n \xi|^2} \tau (\tau r)^n \left(\cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{n} \right) - 2(\tau r)^{n-1} \right),$$

e

$$-2n\tau(\tau r)^{2n-1},$$

vão para zero a medida que n cresce, prevalecendo o termo

$$\frac{3}{2} r \tau \frac{(1 - (\tau r)^{2n})}{(1 - \tau r^2)},$$

que é positivo. Portanto, por estes fatos segue que $\frac{\partial}{\partial r} \phi(n, r) > 0$. Por outro lado temos

$$\frac{\partial}{\partial r} (\bar{A} + \bar{B})(n, r) = A \cdot \int_0^1 B \cdot \frac{\partial}{\partial r} \phi(n, r) d\tau.$$

E, como $A > 0$ e $B > 0$, segue que o sinal de $\frac{\partial}{\partial r} (\bar{A} + \bar{B})(n, r)$ é dado pelo sinal de $\frac{\partial}{\partial r} \phi(n, r)$.

QED.

Temos o seguinte teorema:

Teorema 5.6 *Para $3 \leq n \leq 20$ e $0 < r < 1$, temos que considerando n massas iguais nos vértices de um polígono regular e uma massa desprezível no eixo de simetria $\theta = \frac{\pi}{n}$ as posições de equilíbrio relativo para a massa μ são instáveis.*

Demonstração: Observaremos que a condição

$$2\omega^2 - (\bar{A} + \bar{B})(n, r) > 0,$$

não é satisfeita para $3 \leq n \leq 20$ e $0 < r < 1$. Usando o lema 5.6, temos que $(\bar{A} + \bar{B})(n, r)$ é crescente para $0 < r < 1$. Observamos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\bar{A} + \bar{B})(n, r) = n.$$

Obteremos que $2\omega^2 < n$, para $3 \leq n \leq 20$. ω^2 é crescente em n , portanto é suficiente observar que $2\omega^2 < 20$, isto é,

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{19} \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi j}{n} \right)} < 20.$$

Esta desigualdade é satisfeita visto que

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{19} \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi j}{n} \right)} \approx 19,875.$$

Deste modo $(\bar{A} + \bar{B})(n, r) > 2\omega^2$ e portanto temos a instabilidade.

QED.

Capítulo 6

Existência de Equilíbrios Relativos e Bifurcações

6.1 Preliminares

Consideraremos as equações das configurações centrais expressas em [12], para fazermos uma análise das bifurcações que surgem quando consideramos a massa central como um parâmetro. Tomando a representação em coordenadas polares, (r, θ) , para a massa desprezível, e considerando as coordenadas rotacionais em torno da origem com velocidade ω dada pelo teorema 3.1, $q(t) = R(\omega t)x(t)$, obtemos a expressão das configurações centrais:

$$M^{-1}\nabla U(q) - \lambda q = 0, \quad (6.1)$$

na forma

$$\psi(r, \theta) = m_0(1 - r^3) + n \cdot \left(h_n \left(\frac{1}{r}, \theta \right) - r^3 h_n(1) \right), \quad (6.2)$$

onde

$$h_n \left(\frac{1}{r}, \theta \right) = \frac{1}{n} \sum_{\gamma=1}^n \frac{1 - \frac{1}{r} \cos \left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n} - \theta \right)}{\left(1 + \frac{1}{r^2} - 2\frac{1}{r} \cos \left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n} - \theta \right) \right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\text{e } h_n(1) = \frac{1}{4n} \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{1}{\sin \left(\frac{\gamma\pi}{n} \right)}.$$

Podemos verificar esta forma da equação para as configurações centrais partindo da equação dos equilíbrios relativos

$$M^{-1}\nabla U(x) + \omega^2 \hat{I}x = 0, \quad (6.3)$$

onde $U(x) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|} + \sum_{j=1}^n \frac{m_0 m_j}{\|x_j\|} + \sum_{j=0}^n \frac{m_\mu m_j}{\|x_\mu - x_j\|}$. Consideraremos $m_j = 1$, para $j = 1, \dots, n$. Deste modo, para o problema restrito estamos interessados na equação:

$$\frac{m_0 x_\mu}{||x_\mu||^3} + \sum_{j=1}^n \frac{x_\mu - x_j}{||x_\mu - x_j||^3} + \omega^2 \hat{I}x_\mu = 0. \quad (6.4)$$

Fazendo o produto interno desta equação com a posição x_μ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{m_0 r^2}{||x_\mu||^3} + \sum_{j=1}^n \frac{r^2 - \langle x_j, x_\mu \rangle}{||x_\mu - x_j||^3} - \omega^2 r^2 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{m_0}{r^3} + \sum_{j=1}^n \frac{1 - \frac{1}{r} \cos(\theta_j - \theta)}{||x_\mu - x_j||^3} - \omega^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Como pode ser visto em [35], a velocidade angular ω do problema poligonal com uma massa central m_0 está relacionada com a velocidade angular $\tilde{\omega}$ do problema poligonal por: $\omega^2 = \tilde{\omega}^2 + m_0$. E para manter um argumento único no parâmetro fazemos um ajuste no denominador $||x_\mu - x_j||^3$ que tem a expressão: $(1 + r^2 - 2r \cos(\theta_j - \theta))^{\frac{3}{2}}$, pondo r^2 em evidência. Deste modo se substituirmos estas novas expressões em 6.5 obtemos 6.2.

Como visto no capítulo 5, Lindow e Bang mostraram usando uma teoria de representação integral para funções complexas, que as soluções da equação

$$\psi(r, \theta) = 0,$$

estão nos eixos $\theta = 0 \bmod(\frac{\pi}{n})$. Exploraremos a expressão da função $\psi(r, \theta)$, buscando caracterizar seu comportamento.

6.2 Primeiro eixo de simetria [$\theta = 0$]

Aqui analisaremos o comportamento da expressão de $\psi(r, 0)$:

$$\psi(r, 0) = n \cdot \left(h_n \left(\frac{1}{r}, 0 \right) - h_n(1) r^3 \right).$$

Nosso objetivo é encontrar uma caracterização do comportamento desta família de funções parametrizada pela variação de n . Observamos que a expressão de $h_n(\frac{1}{r}, 0)$ tem como denominadores os polinômios da forma:

$$1 + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \cos \left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n} \right).$$

Deste modo, temos os limites:

- $\lim_{r \rightarrow 0^+} \psi(r, 0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sum_{\gamma=1}^n \frac{1 - \frac{1}{r} \cos \left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n} \right)}{\left(1 + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \cos \left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n} \right) \right)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} = \frac{-1}{\frac{1}{r^3}} = 0.$
- $\lim_{r \rightarrow 1^-} \psi(r, 0) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1 - \frac{1}{r}}{\left(1 + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \right)^{\frac{3}{2}}} = -\infty.$
- $\lim_{r \rightarrow 1^+} \psi(r, 0) = \lim_{r \rightarrow 1^+} \frac{1 - \frac{1}{r}}{\left(1 + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \right)^{\frac{3}{2}}} = +\infty.$

- $\lim_{r \rightarrow +\infty} \psi(r, 0) = \lim_{r \rightarrow +\infty} (n^2 - n \cdot h_n(1)r^3) = -\infty.$

Estes limites evidenciam um comportamento que caracteriza o seguinte resultado:

Proposição 6.1 *Para todo $n \geq 3$ e $r > 0$, $\frac{\partial}{\partial r} \psi(r, 0) < 0$.*

A expressão da derivada é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \psi(r, 0) = & \sum_{\gamma=1}^n \left[\frac{\frac{1}{r^2} \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \frac{\left(1 - \frac{1}{r} \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)\right) \left(\frac{-2}{r^3} + \frac{2}{r^2} \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)\right)}{\left(1 + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}}} \right] - \frac{3r^2}{4} \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi\gamma}{n}\right)}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Antes de demonstrar esta proposição, precisamos fazer algumas considerações, e por estas determinar um modo adequado de representar a expressão da derivada a ser analisada.

Consideremos a expressão, com $0 < r < 1$:

$$\frac{1}{(1 + r^2 - 2r \cos(\psi_\gamma))^{\frac{5}{2}}}. \quad (6.7)$$

Se considerarmos $z = e^{i\psi_\gamma}$, onde $\psi_\gamma = \frac{2(\gamma-1)\pi}{n} - \theta$, teremos que $z + z^{-1} = 2 \cos(\psi_\gamma)$. Usando as formas binomiais, para s racional:

$$\frac{1}{(1 - rz)^s} = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \prod_{k=1}^i (s + k - 1) r^i z^i \quad (6.8)$$

e

$$\frac{1}{(1 - rz^{-1})^s} = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \prod_{k=1}^i (s + k - 1) r^i z^{-i}, \quad (6.9)$$

e que

$$(1 - rz) \cdot (1 - rz^{-1}) = 1 + r^2 - 2r \cos(\psi_\gamma), \quad (6.10)$$

encontramos

$$\frac{1}{(1 + r^2 - 2r \cos(\psi_\gamma))^s} = \frac{1}{(1 - rz)^s (1 - rz^{-1})^s} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} B_s^{(\nu)} z^\nu. \quad (6.11)$$

Podemos demonstrar que esta expressão é a série de Fourier para a função

$$\frac{1}{(1 + r^2 - 2r \cos(\psi_\gamma))^s}, \quad (6.12)$$

que é 2π -periódica e é par. Portanto,

$$B_s^{(\nu)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \nu \phi}{(1 + r^2 - 2r \cos(\phi))^s} d\phi. \quad (6.13)$$

Como pode ser visto em [51], $B_s^{(\nu)} = B_s^{(-\nu)}$, tal propriedade segue da natureza dos coeficientes na série binomial, e será usada a seguir na obtenção da fórmula (6.14).

Esta série converge quando $0 < r < 1$. Deste modo, temos

$$\sum_{\gamma=1}^n \frac{1}{(1 + r^2 - 2r \cos(\psi_\gamma))^s} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{+\infty} B_s^{(\nu)} \sum_{\gamma=1}^n \cos(\nu \psi_\gamma). \quad (6.14)$$

Temos também

$$\sum_{\gamma=1}^n \cos[a + (\gamma - 1)b] = \cos \left[a + \frac{(n-1)b}{2} \right] \frac{\sin(\frac{nb}{2})}{\sin(\frac{b}{2})}, \quad (6.15)$$

então, fazendo $a = -\nu\theta$ e $b = \frac{2\pi\nu}{n}$, obtemos:

$$\sum_{\gamma=1}^n \cos \nu(\psi_\gamma) = n \cdot \cos(\nu\theta). \quad (6.16)$$

Portanto

$$\sum_{\gamma=1}^n \frac{1}{(1 + r^2 - 2r \cos(\psi_\gamma))^s} = \left[\frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{+\infty} n \cdot B_s^{(n\lambda)} \cos(n\lambda\theta) \right]. \quad (6.17)$$

Temos, por estes fatos, o seguinte resultado:

Proposição 6.2 Para todo $n \geq 3$, $s \in \mathbb{Q}$ e $\theta = 0 \bmod(\frac{\pi}{n})$, $\frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{+\infty} n \cdot B_s^{(n\lambda)} \cos(n\lambda\theta) > 0$.

Temos também o seguinte fato geral sobre a série $\frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{+\infty} n \cdot B_s^{(n\lambda)} \cos(n\lambda\theta)$:

Proposição 6.3 Para todo $n \geq 3$, $s \in \mathbb{Q}$ e $\theta = 0 \bmod(\frac{\pi}{n})$, $\frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{+\infty} n \cdot B_s^{(n\lambda)} \cos(n\lambda\theta)$ é decrescente em n .

Demonstração: Basta considerar a equação (6.17), e o lema 5.3.

QED.

Considerando $\rho = \frac{1}{r}$, teremos $\rho > 1$. Fazendo um ajuste na série para $\rho > 1$, obtemos:

$$\sum_{\gamma=1}^n \frac{1}{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi_\gamma))^s} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{+\infty} n \cdot B_s^{(n\lambda)} \cos(n\lambda\theta) \right].$$

Faremos uso desta representação em série para reescrever a derivada como segue:

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi(r, 0) \big|_{\rho=\frac{1}{r}} = -2\rho^2(1 + \rho^2) \sum_{\gamma=1}^n \frac{\cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)}{\left(1 + \rho^2 - 2\rho \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$+\rho^3 \sum_{\gamma=1}^n \frac{\cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)^2 + 3}{\left(1 + \rho^2 - 2\rho \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{4\rho^2} \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{1}{\sin\left(\frac{\gamma\pi}{n}\right)}. \quad (6.18)$$

Representaremos o termo $\sum_{\gamma=1}^n \frac{\cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)}{\left(1 + \rho^2 - 2\rho \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}}}$. Usando as fórmulas desenvolvidas acima teremos:

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma=1}^n \frac{\cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)}{\left(1 + \rho^2 - 2\rho \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}}} = \\ & \frac{1}{2s} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} B_{\frac{5}{2}}^{(\nu)} \sum_{\gamma=1}^n \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right) \cos\left(\nu \frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

Mas, sabemos que:

$$\cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right) \cos\left(\nu \frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right) = \frac{\cos\left(\frac{(\nu+1)2(\gamma-1)\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{(\nu-1)2(\gamma-1)\pi}{n}\right)}{2},$$

donde

$$\sum_{\gamma=1}^n \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right) \cos\left(\nu \frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right) = \sum_{\gamma=1}^n \cos\left(\nu \frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right) = n,$$

portanto,

$$\sum_{\gamma=1}^n \frac{\cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)}{\left(1 + \rho^2 - 2\rho \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\rho} \left[\sum_{\lambda=0}^{+\infty} n \cdot B_{\frac{5}{2}}^{(n\lambda)} \right].$$

Consideremos agora o termo

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma=1}^n \frac{\cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)^2 + 3}{\left(1 + \rho^2 - 2\rho \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} B_{\frac{5}{2}}^{(\nu)} \sum_{\gamma=1}^n \left(\cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)^2 + 3 \right) \cos\left(\nu \frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

No entanto,

$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)^2 + 3 = \frac{\cos\left(\frac{4(\gamma-1)\pi}{n}\right) + 7}{2} \Rightarrow \\ & \sum_{\gamma=1}^n \left(\cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)^2 + 3 \right) \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right) = \\ & \sum_{\gamma=1}^n \frac{\cos\left(\frac{4(\gamma-1)\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right)}{2} + \frac{7}{2} \sum_{\gamma=1}^n \cos\left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

donde,

$$\sum_{\gamma=1}^n \left(\cos \left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n} \right)^2 + 3 \right) \cos \left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n} \right) = \frac{15}{4} \cdot n.$$

Deste modo,

$$\sum_{\gamma=1}^n \frac{\cos \left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n} \right)^2 + 3}{\left(1 + \rho^2 - 2\rho \cos \left(\frac{2(\gamma-1)\pi}{n} \right) \right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{15}{8\rho} \left[\sum_{\lambda=0}^{+\infty} n \cdot B_{\frac{5}{2}}^{(n\lambda)} \right].$$

Por estes fatos temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \psi(r, 0) \big|_{\rho=\frac{1}{r}} &= \frac{-2\rho^2(1+\rho^2)}{\rho} \left[n \cdot \sum_{\lambda=0}^{+\infty} B_{\frac{5}{2}}^{(n\lambda)} \right] + \frac{15\rho^2}{8} \left[n \cdot \sum_{\lambda=0}^{+\infty} B_{\frac{5}{2}}^{(n\lambda)} \right] - \frac{3}{4\rho^2} \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(\frac{\gamma\pi}{n})} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \psi(r, 0) \big|_{\rho=\frac{1}{r}} &= \left(-2\rho^3 + \frac{15}{8}\rho^2 - 2\rho \right) \left[n \cdot \sum_{\lambda=0}^{+\infty} B_{\frac{5}{2}}^{(n\lambda)} \right] - \frac{3}{4\rho^2} \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(\frac{\gamma\pi}{n})}. \end{aligned}$$

Para todo $n \geq 3$, temos $n \cdot \sum_{\lambda=0}^{+\infty} B_{\frac{5}{2}}^{(n\lambda)} > 0$ e $-2\rho^3 + \frac{15}{8}\rho^2 - 2\rho < 0 \ \forall \rho \in \mathbb{R}$. Deste modo, temos mostrado

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi(r, 0) < 0, \ \forall n \geq 3, \ 0 < r < 1 \text{ e } m_0 = 0.$$

Para $r > 1$, temos

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi(r, 0) \big|_{\rho=\frac{1}{r}} = -2\rho^2(1+\rho^2) \left[n \cdot \sum_{\lambda=0}^{+\infty} B_{\frac{5}{2}}^{(n\lambda)} \right] + \frac{15\rho^3}{8} \left[n \cdot \sum_{\lambda=0}^{+\infty} B_{\frac{5}{2}}^{(n\lambda)} \right] - \frac{3}{4\rho^2} \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(\frac{\gamma\pi}{n})}.$$

Pelo mesmo argumento usado anteriormente, encontramos

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi(r, 0) < 0, \ \forall n \geq 3, \ r > 1 \text{ e } m_0 = 0.$$

Para o caso $\theta = 0$, $m_0 > 0$, a função $\psi(r, 0)$ toma a forma:

$$\psi(r, 0) = m_0 (1 - r^3) + n \left(h_n \left(\frac{1}{r}, 0 \right) - r^3 h_n(1) \right),$$

logo

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi(r, 0) = -3m_0 r^2 + \frac{\partial}{\partial r} \left(n \left(h_n \left(\frac{1}{r}, 0 \right) - r^3 h_n(1) \right) \right) < 0.$$

Portanto, temos demonstrado a proposição 6.1 para ambos os casos. Agora podemos apresentar o seguinte teorema:

Teorema 6.4 Para cada $n \geq 3$ temos:

- (i) Para $m_0 = 0$, $r = 0$ é solução da $\psi(r, 0) = 0$;
- (ii) Para $m_0 = 0$ e $r > 0$ existe única solução para a equação $\psi(r, 0) = 0$;
- (iii) Para $m_0 > 0$ e $0 < r < 1$ existe única solução para a equação $\psi(r, 0) = 0$;

(iv) Para $m_0 > 0$ e $r > 1$ existe única solução para a equação $\psi(r, 0) = 0$.

Demonstração: Basta usar a proposição 6.1 e os comportamentos assintóticos da função $\psi(r, 0)$, descritos no início da seção.

QED.

Como corolário do teorema 6.2 temos:

Corolário 6.5 Consideremos n massas dispostas nos vértices de um polígono regular e uma massa desprezível μ no eixo de simetria $\theta = 0$. Consideremos a posição da massa desprezível em coordenadas polares (r, θ) . Para uma massa central $m_0 = 0$, existe uma única posição de equilíbrio relativo para a massa desprezível μ , com $r > 1$, e a posição $r = 0$. Para uma massa central $m_0 > 0$, existem exatamente duas posições de equilíbrio relativo da massa desprezível μ , uma para $0 < r < 1$ e uma para $r > 1$.

6.3 Segundo eixo de simetria $[\theta = \frac{\pi}{n}]$

Consideraremos a função $\psi(r, \frac{\pi}{n})$. Iremos analisar a equação

$$\psi\left(r, \frac{\pi}{n}\right) = 0.$$

Neste sentido temos o seguinte teorema de existência:

Teorema 6.6 Para cada $n \geq 3$, temos

- (i) Para $m_0 = 0$, $r = 0$ é solução da equação $\psi(r, \frac{\pi}{n}) = 0$;
- (ii) Para $m_0 = 0$, $0 < r < 1$ existe solução para a equação $\psi(r, \frac{\pi}{n}) = 0$;
- (iii) Para $m_0 < \frac{r^3 h_n(1) - h_n(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n})}{1 - r^3}$, enquanto $\frac{r^3 h_n(1) - h_n(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n})}{1 - r^3} > 0$ para $0 < r < 1$, existem pelo menos duas soluções para a equação $\psi(r, \frac{\pi}{n}) = 0$;
- (iv) Para $m_0 > \frac{r^3 h_n(1) - h_n(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n})}{1 - r^3}$, $0 < r < 1$, não existe solução para a equação $\psi(r, \frac{\pi}{n}) = 0$;
- (v) Para $m_0 \geq 0$, existe solução para a equação $\psi(r, \frac{\pi}{n}) = 0$ que está no intervalo $(1, 1 + \sqrt[3]{4})$. E para $n \geq 21$ está no intervalo $(1, 1 + \sqrt[3]{\frac{2n}{n+1}})$.

Demonstração: Inicialmente mostraremos que: $\psi(1, \frac{\pi}{n}) > 0$ para $n \geq 3$. Temos

$$h_n\left(1, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right)},$$

logo mostrar que $\psi(1, \frac{\pi}{n}) > 0$, implica mostrar que

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right)} > \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right)},$$

e, como

$$\operatorname{sen} \left(\frac{(2j-1)\pi}{2n} \right) < \operatorname{sen} \left(\frac{j\pi}{n} \right),$$

segue que

$$h_n \left(1, \frac{\pi}{n} \right) > h_n(1).$$

Consideraremos agora o ítem (i). Pela expressão de $\psi \left(r, \frac{\pi}{n} \right)$ é natural que $r = 0$ seja solução da equação $\psi \left(r, \frac{\pi}{n} \right) = 0$. Agora consideremos o ítem (ii). O sinal da função $\psi \left(r, \frac{\pi}{n} \right)$ é dado pelo sinal de

$$\left[\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{4}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{n} \right) \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4}{r} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{n} \right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{n} \right) \right)^{\frac{3}{2}}} - \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} \left(\frac{j\pi}{n} \right)} - 1 \right].$$

Estimamos o sinal da função $\psi \left(r, \frac{\pi}{n} \right)$ para $0 < r < 1$, observando que para $r \approx 0$ o termo

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{n} \right) \right)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow 0,$$

enquanto que o termo

$$-\frac{1}{r} \sum_{j=1}^n \frac{\cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{n} \right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{n} \right) \right)^{\frac{3}{2}}},$$

crece em módulo. Portanto temos um intervalo $(0, r^*)$ onde $\psi \left(r, \frac{\pi}{n} \right)$ é negativa. Deste modo, encontramos a existência de um valor de $0 < r < 1$ tal que $\psi \left(r, \frac{\pi}{n} \right) = 0$, visto que $\psi \left(1, \frac{\pi}{n} \right) > 0$.

Consideraremos agora o ítem (iii). Considerando a massa m_0 positiva e $m_0 \approx 0$, mostraremos que $\psi \left(r, \frac{\pi}{n} \right)$ tem pelo menos duas variações de sinal para $0 < r < 1$. A expressão de $\psi \left(r, \frac{\pi}{n} \right)$ fica na forma

$$\psi \left(r, \frac{\pi}{n} \right) = m_0(1 - r^3) + r^3 \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{n} \right) \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n \frac{\cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{n} \right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{n} \right) \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\operatorname{sen} \left(\frac{j\pi}{n} \right)} \right].$$

É fácil observar que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \psi \left(r, \frac{\pi}{n} \right) = m_0.$$

Por outro lado, para $0 < m_0 < \frac{r^3 h_n(1) - h_n(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n})}{1 - r^3}$, temos $m_0 < h_n(1)$ para $r \approx r^*$. Portanto para $r \in (r^* - \epsilon, r^* + \epsilon)$ temos $\psi \left(r, \frac{\pi}{n} \right) < 0$. Deste modo, caracterizamos a dupla

variação de sinal da função no intervalo $0 < r < 1$ o que implica na existência de pelo menos duas soluções para a equação $\psi\left(r, \frac{\pi}{n}\right) = 0$.

Consideremos o item (iv). Para $m_0 > \frac{r^3 h_n(1) - h_n\left(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n}\right)}{1 - r^3}$, encontramos que

$$m_0(1 - r^3) > r^3 h_n(1) - h_n\left(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n}\right),$$

logo

$$m_0(1 - r^3) - r^3 h_n(1) + h_n\left(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n}\right) > 0,$$

ou seja,

$$\psi\left(r, \frac{\pi}{n}\right) > 0,$$

e por este fato encontramos a não existência de solução para tal estimativa de m_0 .

Consideremos agora o item (v). Mostraremos que: $\psi\left(r, \frac{\pi}{n}\right) < 0$ para $n \geq 3$ e $r \in (1 + \sqrt[3]{4}, \infty)$. Vamos reescrever a expressão de $\psi\left(r, \frac{\pi}{n}\right)$ como segue:

$$\begin{aligned} \psi\left(r, \frac{\pi}{n}\right) = r^3 & \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n \frac{\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)} \right]. \end{aligned}$$

Consideremos n par. Podemos usar da simetria do problema para reescrever a expressão de $\psi\left(r, \frac{\pi}{n}\right)$ na forma:

$$\begin{aligned} \psi\left(r, \frac{\pi}{n}\right) = 2r^3 & \left[\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{4}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ & \left. - \frac{4}{r} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} - \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Mostraremos a seguinte desigualdade:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Temos

$$\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right) = -\cos\left(\frac{(n - (2j-1))\pi}{n}\right),$$

para $l = 1, \dots, \frac{n}{2}$, deste modo,

$$\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)\right)^{-1} > \left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{(n - (2j-1))\pi}{n}\right)\right)^{-1},$$

portanto,

$$\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} \frac{\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} > \sum_{j=\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1}^{\frac{n}{2}} \frac{\cos\left(\frac{(n-(2j-1))\pi}{n}\right)}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{(n-(2j-1))\pi}{n}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Para n ímpar o argumento é semelhante. Consideremos as funções

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} \text{ e } \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)}.$$

Para $r > 1$, a primeira função é decrescente em r . Portanto o denominador de cada parcela da soma é crescente. Queremos encontrar estimativa para r tal que

$$\frac{4}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)\right)^{3/2}} < 1 < \frac{1}{\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)}.$$

É fácil ver que para $r > 1 + \sqrt[3]{4} \approx 2,59$, esta desigualdade é satisfeita para todo $j = 1, \dots, \frac{n}{2}$. Para $n \geq 21$ esta estimativa pode ser melhorada, pois $\frac{1}{\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)} > n$ e então temos a desigualdade

$$\frac{n}{2} \frac{4}{\left(1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right)\right)^{3/2}} < (n+1),$$

que é equivalente a: $r^2 - 2r + 1 - \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{2/3} > 0$, que é satisfeita para $r > 1 + \sqrt[3]{\frac{2n}{n+1}}$. Esta estimativa é assintótica a $r = 2,25$. Temos assim mostrado que $\psi\left(r, \frac{\pi}{n}\right)$ tem uma variação de sinal no intervalo $(1, 1 + \sqrt[3]{4})$ e para $n \geq 21$, no intervalo $\left(1, 1 + \sqrt[3]{\frac{2n}{n+1}}\right)$, onde está uma solução da equação $\psi\left(r, \frac{\pi}{n}\right) = 0$.

QED.

Como colorário do teorema 6.5 temos:

Corolário 6.7 *Consideremos n massas iguais dispostas nos vértices de um polígono regular e uma massa desprezível μ no eixo de simetria $\theta = \frac{\pi}{n}$ e uma massa central $m_0 \geq 0$. Consideremos a posição da massa desprezível μ em coordenadas polares (r, θ) . Temos*

- (i) *Para $m_0 = 0$ e $0 < r < 1$ existe posição de equilíbrio relativo;*
- (ii) *Para $0 < m_0 < \frac{r^3 h_n(1) - h_n\left(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n}\right)}{1 - r^3}$ e $0 < r < 1$ existem pelo menos duas posições de equilíbrio relativo;*
- (iii) *Para $m_0 > \frac{r^3 h_n(1) - h_n\left(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n}\right)}{1 - r^3}$ e $0 < r < 1$ não existe posição de equilíbrio relativo;*
- (iv) *Para $m_0 \geq 0$ e $r > 1$ existe posição de equilíbrio relativo que está no intervalo $(1, 1 + \sqrt[3]{4})$, e para $n \geq 21$ está no intervalo $(1, 1 + \sqrt[3]{\frac{2n}{n+1}})$.*

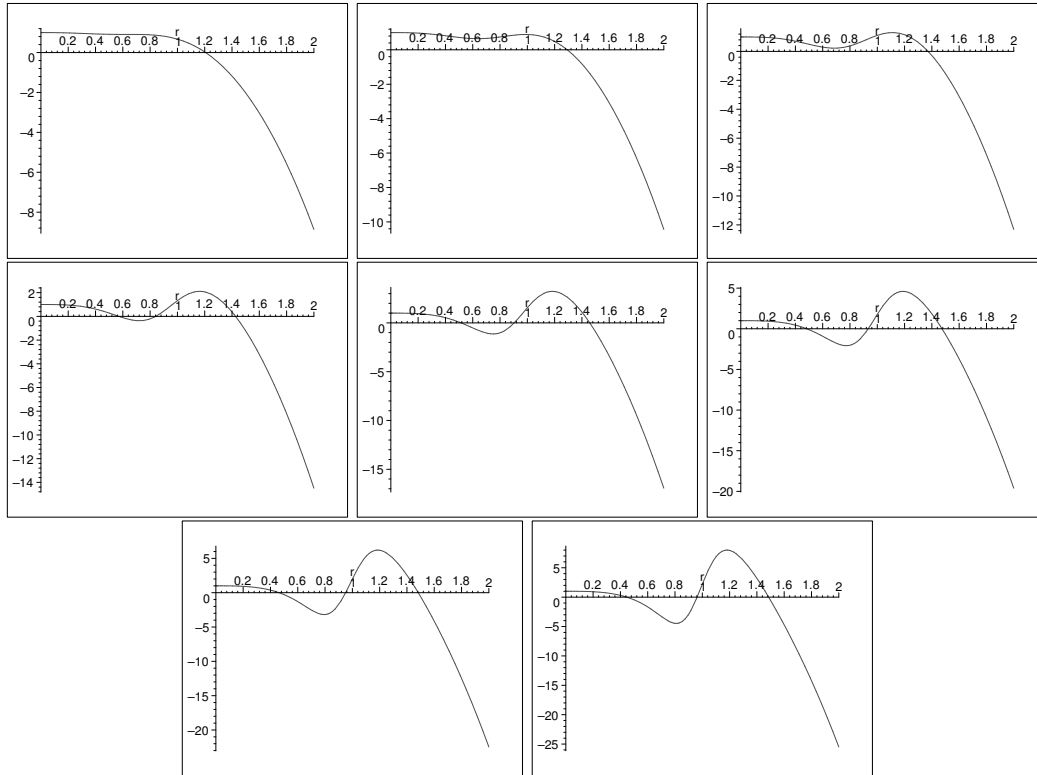


Figura 6.1: $m_0 = 1$, $r \in [0, 2]$ e $n \in \{3, 4, \dots, 10\}$.

6.4 Bifurcação no segundo eixo de simetria $[\theta = \frac{\pi}{n}]$

Trataremos como *bifurcação* o fato de surgir novas posições de equilíbrio pela variação de algum parâmetro. Considerando o eixo de simetria $[\theta = \frac{\pi}{n}]$ para o problema de $n+1$ corpos, encontramos o seguinte teorema

Teorema 6.8 *Para todo $n \geq 3$ temos bifurcação no segundo eixo de simetria $\theta = \frac{\pi}{n}$ da configuração poligonal com n massas iguais positivas m nos vértices, uma massa central $m_0 \geq 0$ e uma massa desprezível μ neste eixo.*

Demonstração: Segue direto da demonstração do teorema 6.5.

QED.

Para este eixo de simetria temos um comportamento distinto. Visto que para uma variação maior da massa central relativo ao número de massas nos vértices do polígono, podemos ter uma configuração sem posições internas. Este comportamento pode ser observado nos gráficos da figura 6.1, onde consideramos $m_0 = 1$, e fazemos variação de $3 \leq n \leq 10$, encontrando bifurcação para n de 5 a 6.

Teorema 6.9 *Consideremos n massas iguais dispostas nos vértices de um polígono regular, uma massa central $m_0 \geq 0$ e uma massa desprezível no eixo de simetria $[\theta = \frac{\pi}{n}]$. Existe bifurcação e o valor de bifurcação é dado pela equação*

$$m_0 = \frac{r^3 h_n(1) - h_n(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n})}{1 - r^3},$$

para variação de n e r que fazem

$$\frac{r^3 h_n(1) - h_n(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n})}{1 - r^3} \geq 0.$$

Demonstração: Basta considerar os itens (i), (ii) e (iii) do corolário 6.5.

QED.

Capítulo 7

Estimativas Numéricas

7.1 Preliminares

Com o uso do software Maple, fizemos uma análise da função que define a condição de existência das posições de equilíbrios relativos. Aqui apresentamos esta análise, apontando evidências de fatos prováveis.

7.2 Existência e Unicidade dos Equilíbrios Relativos

Faremos a análise a partir da determinação dos equilíbrios relativos para a massa desprezível μ . Localizamos μ em coordenadas polares por (r, θ) . Em um sistema rotacional em torno da origem com velocidade angular ω , μ é um equilíbrio quando está num eixo de simetria do polígono e satisfaz a seguinte equação, [ver [12]]:

$$m_0(1 - r^3) + n \cdot \left(h_n \left(\frac{1}{r}, \theta \right) - r^3 h_n(1) \right) = 0. \quad (7.1)$$

$$\text{onde } h_n \left(\frac{1}{r}, \theta \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1 - \frac{1}{r} \cos \left(\frac{2j\pi}{n} + \theta \right)}{\left(1 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \cos \left(\frac{2j\pi}{n} + \theta \right) \right)^{\frac{3}{2}}} \text{ e } h_n(1) = \frac{1}{4n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\operatorname{sen} \left(\frac{j\pi}{n} \right)}.$$

7.2.1 Primeiro eixo de simetria $[\theta = 0]$

Inicialmente faremos a análise gráfica para o primeiro eixo de simetria, buscando um comportamento para os zeros que são as posições de equilíbrio relativo para a massa μ . Consideremos a função:

$$\psi(r, 0) = m_0(1 - r^3) + n \left(h_n \left(\frac{1}{r}, 0 \right) - r^3 h_n(1) \right). \quad (7.2)$$

Fazendo m_0 variar de 0 a 1 em intervalos de 0.1. Observamos o comportamento das raízes nas figuras 7.1 e 7.2.

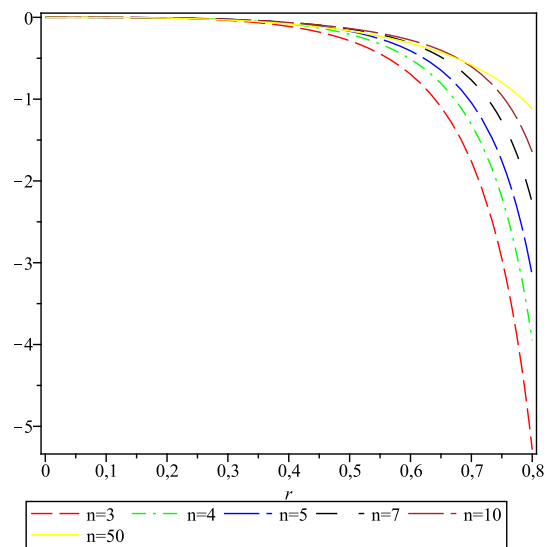


Figura 7.1: $m_0 = 0$, $r \in [0, 0.9]$ e $n \in \{3, 4, 5, 7, 10, 50\}$.

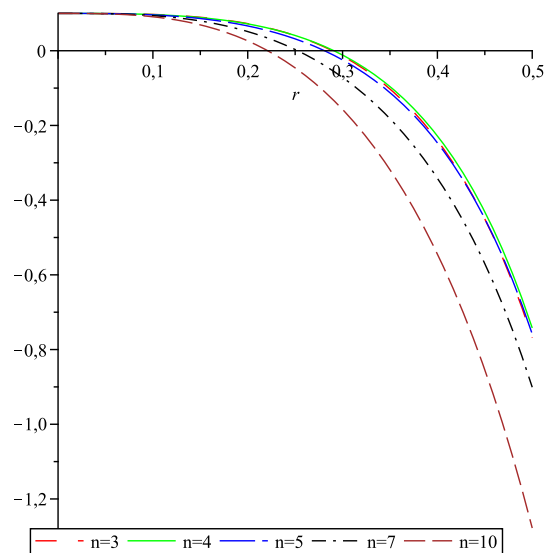


Figura 7.2: $m_0 = 0.1$, $r \in [0, 0.5]$ e $n \in \{3, 4, 5, 7, 10\}$.

Por estes gráficos podemos observar que para qualquer variação positiva da massa m_0 temos o surgimento de uma raiz para a função (7.2). E que estas raízes vão se aproximando do zero a medida que os valores de m_0 vão crescendo. Fisicamente isto representa a atração gravitacional que m_0 exerce na massa μ .

Passemos a analisar as raízes da função (7.2) no segmento $(1, +\infty)$. Observados nos gráficos nas figuras 7.3, 7.4 e 7.5:

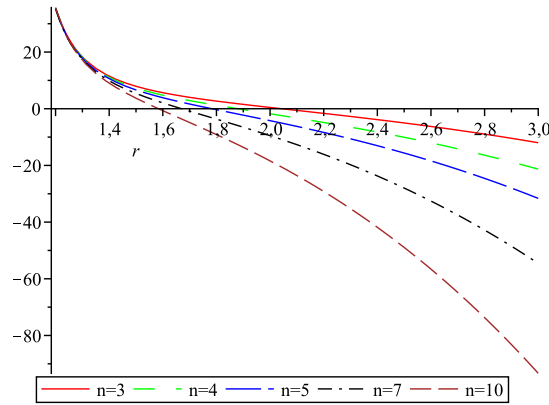


Figura 7.3: $m_0 = 0$, $r \in [1.2, 2]$ e $n \in \{3, 4, 5, 7, 10\}$.

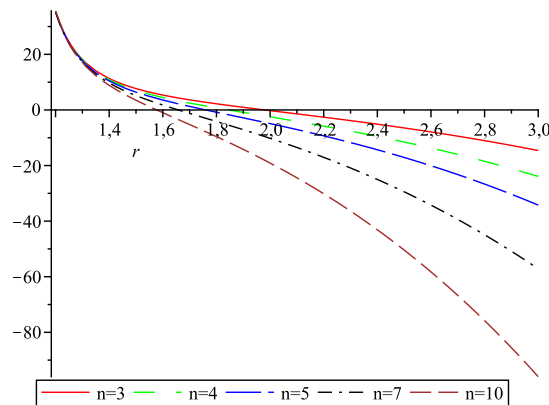


Figura 7.4: $m_0 = 0.1$, $r \in [1.2, 2]$ e $n \in \{3, 4, 5, 7, 10\}$.

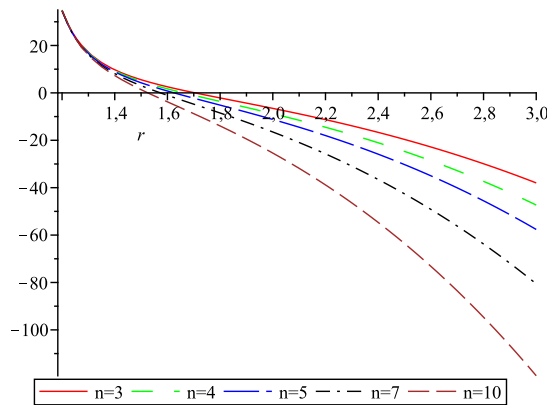


Figura 7.5: $m_0 = 0.5$, $r \in [1.2, 2]$ e $n \in \{3, 4, 5, 7, 10\}$.

Podemos perceber claramente uma semelhança nas curvas que são o gráfico da função (7.2), para cada n fixado. Mesmo quando variamos o valor da massa central m_0 , o comportamento geométrico das curvas permanece praticamente inalterado quando observadas para o mesmo valor de n , devido a pouca influência do termo $m_0(1 - r^3)$ para $r > 1$, visto que este termo tem derivada negativa em r e não depende de n , portanto, não contribui para a relação existente entre as curvas quando observadas como uma família parametrizada por n . Destes fatos podemos considerar o seguinte:

Conjectura 7.1 *Para todo $n \geq 3$, $r \in \mathbb{R} - \{1\}$ e para $\theta = 0$ e $m_0 \geq 0$. A família de curvas definidas por:*

$$\psi_n(r) = m_0(1 - r^3) + n \left(h_n \left(\frac{1}{r}, 0 \right) - r^3 h_n(1) \right), \quad (7.3)$$

satisfaz:

- (i) $\lim_{r \rightarrow 0} \psi_n(r) = m_0$;
- (ii) $\lim_{r \rightarrow 1^-} \psi_n(r) = -\infty$;
- (iii) $\lim_{r \rightarrow 1^+} \psi_n(r) = \infty$;
- (iv) $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi_n(r) = -\infty$;
- (v) $\frac{\partial}{\partial r} \psi_n(r) < 0$.

Indícios numéricos para o item v): para os limites é suficiente considerar o termo $h_n \left(\frac{1}{r}, 0 \right)$, tomando $j = n$, que é quando o denominador de $h_n \left(\frac{1}{r}, 0 \right)$, ver (7.2), assume sua indeterminação. Por estes fatos, temos:

$$h_n \left(\frac{1}{r}, 0 \right)_{(j=n)} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{\left(1 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (7.4)$$

E, portanto, os itens (ii), (iii), seguem naturalmente. O item (i), vem direto do cálculo do limite, fazendo a consideração acima, tal como o item (iv). Apenas o item (v)

exige um pouco mais de argumentos. Consideraremos a expressão da derivada de $\psi_n(r)$ em r , que é:

$$\frac{\partial}{\partial r}\psi(r, 0) = -3m_0r^2 + n \left(\frac{\partial}{\partial r}h_n\left(\frac{1}{r}, 0\right) - 3r^2h_n(1) \right), \quad (7.5)$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} & -3m_0r^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\frac{1}{r^2} \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3 \left(1 - \frac{1}{r} \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right) \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{2}{r^2} \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right)}{2 \left(1 + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right)^{\frac{5}{2}}} \right) \\ & - \frac{3}{4}r^2 \sum_{j=1}^{n-1} \csc\left(\frac{j\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Podemos observar que esta expressão tem o mesmo comportamento que a função (7.2) quando $r \approx 1$, visto que possuem o mesmo termo em suas expressões, ver (7.4), que causa o comportamento característico de (7.2).

Vamos observar a representação gráfica da expressão da derivada, a fim de obter o resultado esperado, a saber, a derivada negativa. As derivadas estão representadas nas figuras 7.6, 7.7, 7.8, 7.9 e 7.10:

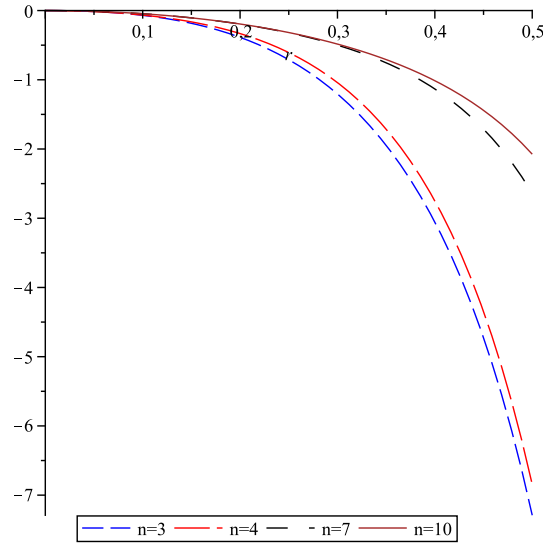


Figura 7.6: $m_0 = 0$, $r \in [0, 0.5]$, $n \in \{3, 4, 7, 10\}$.

Associado ao que podemos analisar nos gráficos, temos o fato de que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial r}\psi_n(r) = -\infty.$$

Por estes fatos, podemos concluir que para $\theta = 0$, as curvas definidas pela função $\psi_n(r)$, são sempre decrescentes em r , isto é, tem derivada negativa em r , para cada n e m_0 fixados.

Como consequência de tudo que fizemos até então, podemos conjecturar o que seria a síntese desta seção:

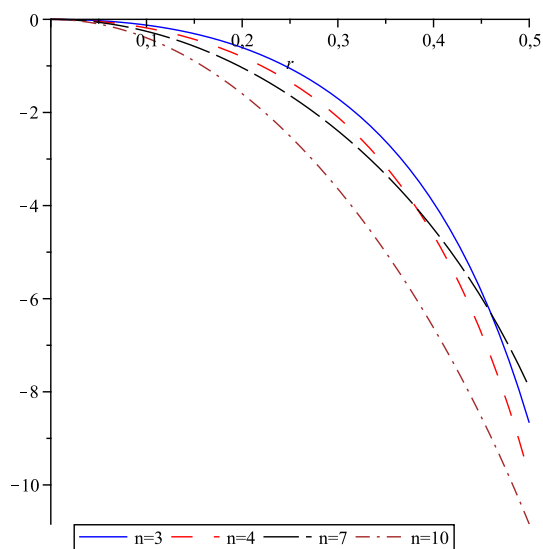


Figura 7.7: $m_0 = 0.1$, $r \in [0, 0.5]$, $n \in \{3, 4, 7, 10\}$.

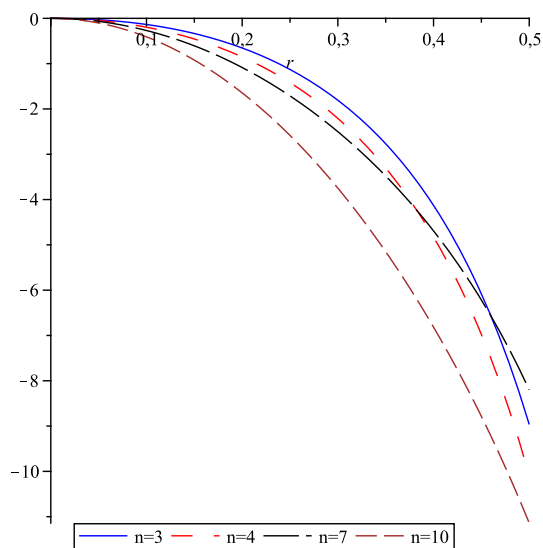


Figura 7.8: $m_0 = 0.5$, $r \in [0, 0.5]$, $n \in \{3, 4, 7, 10\}$.

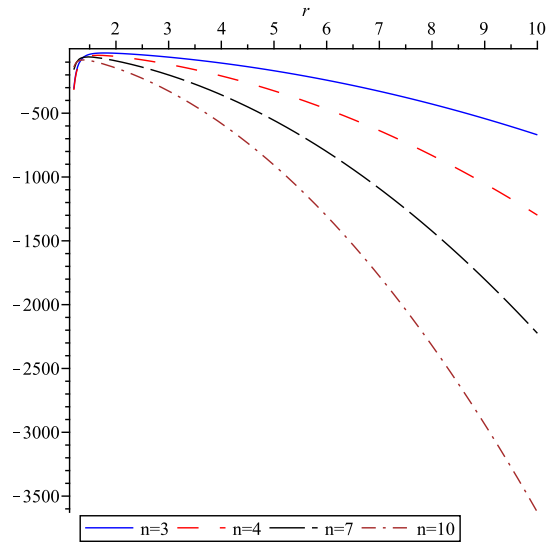


Figura 7.9: $m_0 = 0$, $r \in [1.2, 10]$, $n \in \{3, 4, 7, 10\}$.

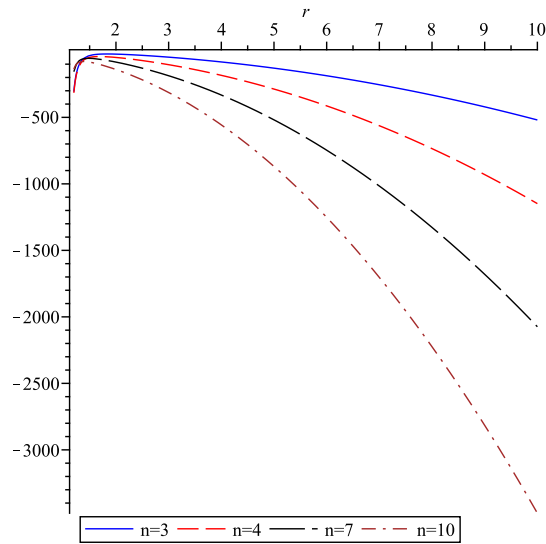


Figura 7.10: $m_0 = 0.5$, $r \in [1.2, 10]$, $n \in \{3, 4, 7, 10\}$.

Conjectura 7.2 Para cada $n \geq 3$, $m_0 \geq 0$ existe solução única para a equação:

$$\psi(r, 0) = 0. \quad (7.6)$$

Indícios numéricos: é suficiente reunir os fatos observados ao longo desta seção e assumir a conjectura 7.1.

7.2.2 Segundo eixo de simetria $[\theta = \frac{\pi}{n}]$

Consideraremos para nossas análises que $\theta = \frac{\pi}{n}$. Considerando a função:

$$\psi\left(r, \frac{\pi}{n}\right) = m_0(1 - r^3) + n\left(h_n\left(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n}\right) - r^3 h_n(1)\right), \quad (7.7)$$

iremos analisar o comportamento de seus gráficos a medida que variamos os valores de m_0 , r e n , tal como fizemos na seção anterior. Observemos os gráficos 7.11, 7.12, 7.13 e 7.14:

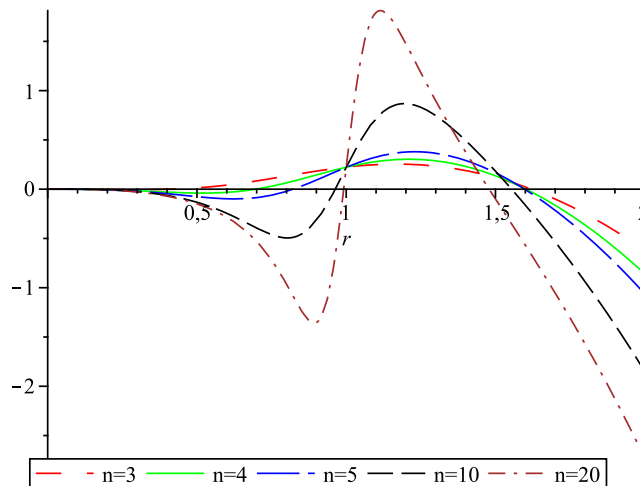


Figura 7.11: $m_0 = 0$, $r \in [0, 2]$, $n \in \{3, 4, 5, 10, 20\}$.

Com base no que observamos nos gráficos acima, podemos fazer a seguinte proposta de resultado, para $r > 1$:

Conjectura 7.3 Para todo $n \geq 3$, $r > 1$ e $m_0 \geq 0$, existe solução única para a equação:

$$\psi\left(r, \frac{\pi}{n}\right) = 0. \quad (7.8)$$

Indícios numéricos: observamos pela natureza das curvas da função que define a equação (7.8), que podemos concluir a existência, dado que estas curvas uma vez fixado n e m_0 têm para $r > 1$ são decrescentes. Este fato pode ser observado com a análise da derivada da função (7.8), em r . Que é equivalente a função (7.5). Tal fato pode ser observado na figura 7.15, onde estão plotados os gráficos da derivada de (7.8).

No entanto, para os valores de $r \in [0, 1]$, temos um comportamento distinto, visto que para $m_0 = 0$ temos raízes para a equação (7.8), e para uma variação do valor de n

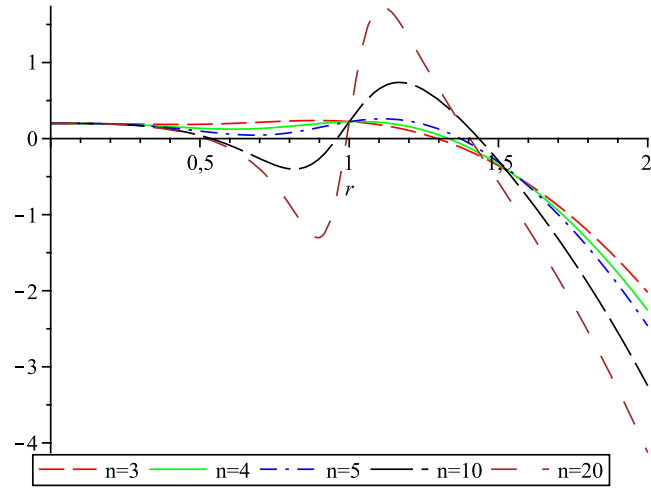


Figura 7.12: $m_0 = 0.2$, $r \in [0, 2]$, $n \in \{3, 4, 5, 10, 20\}$.

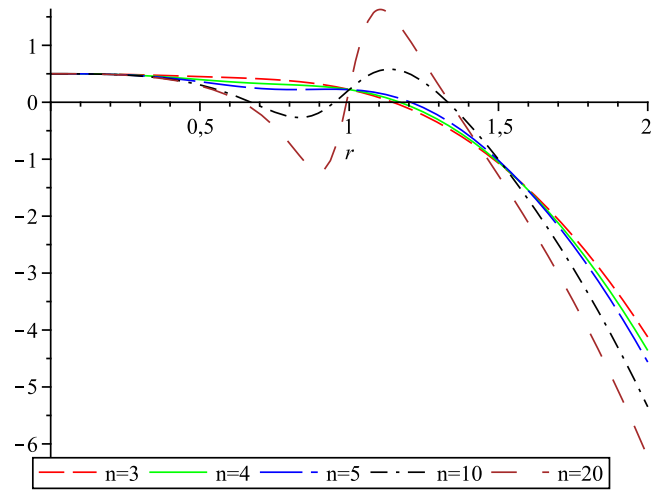


Figura 7.13: $m_0 = 0.5$, $r \in [0, 2]$, $n \in \{3, 4, 5, 10, 20\}$.

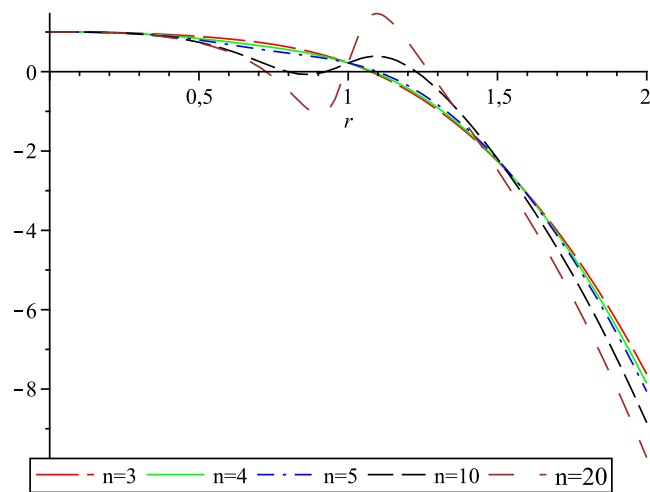


Figura 7.14: $m_0 = 1$, $r \in [0, 2]$, $n \in \{3, 4, 5, 10, 20\}$.

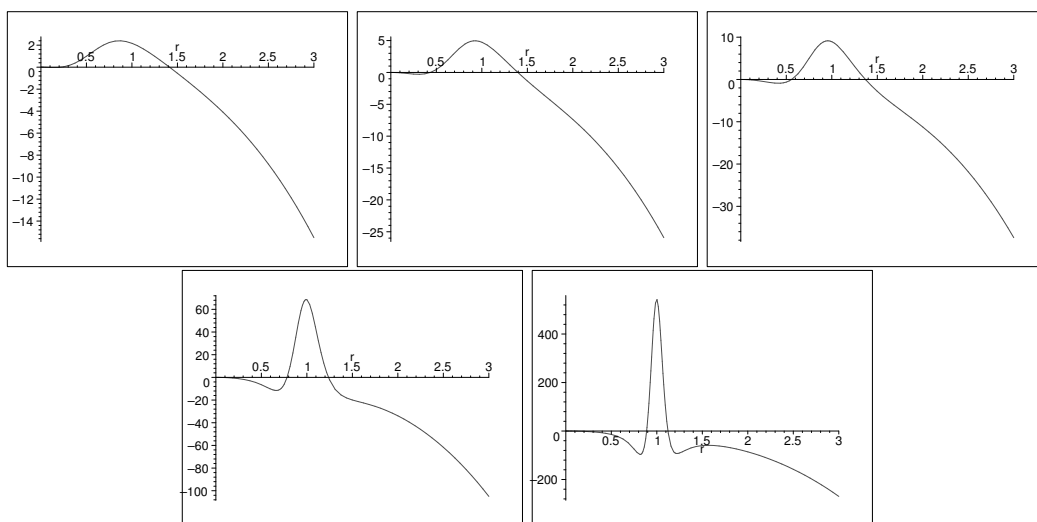


Figura 7.15: $m_0 = 0$, $r \in [0, 2]$ e $n \in \{3, 4, 5, 10, 20\}$.

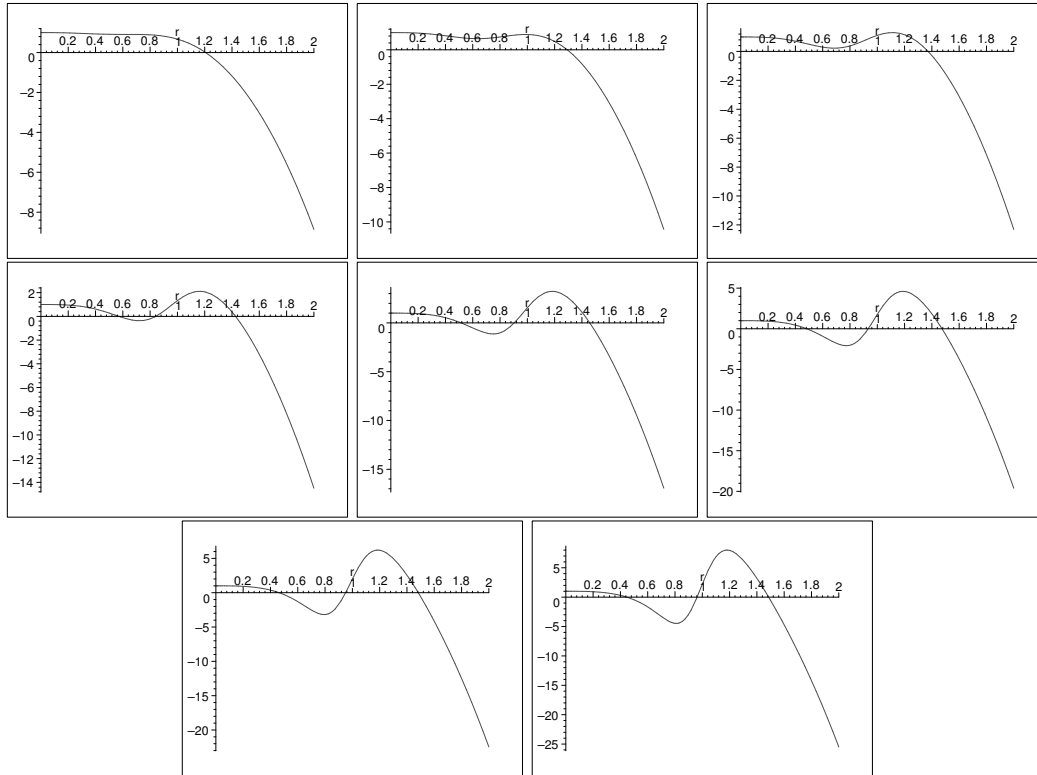


Figura 7.16: $m_0 = 1$, $r \in [0, 2]$ e $n \in \{3, 4, \dots, 10\}$.

relativo ao valor de m_0 podemos ter duas raízes ou nenhuma. Evidenciamos este comportamento claramente nos gráficos da figura 7.16.

Estes fatos leva-nos a questionar o seguinte: Para n fixado, para qual valor de m_0 teremos mudança de configurações? Neste sentido temos:

Afirmção 7.4 *Para $n = 3$ o valor de bifurcação, para m_0 , das raízes da equação (7.8) está no intervalo $(0.014, 0.015)$.*

Indício numérico: ver figura 7.17, e também o fato de que as curvas, com parâmetro em n , são crescentes.

A determinação da relação entre m_0 e n é de difícil contexto. Iremos nos deter na observação de tal relação. Nosso objetivo é determinar uma condição, parametrizada por n , para a determinação dos zeros da função (7.2). Da equação (7.8), obtemos a seguinte condição para a massa central:

$$m_0(n, r) = \frac{r^3 h_n(1) - h_n(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n})}{1 - r^3}. \quad (7.9)$$

Observamos facilmente que a condição (7.9), satisfaz:

- $\lim_{r \rightarrow 1^-} m_0(n, r) = -\infty$;
- $\lim_{r \rightarrow 0^+} m_0(n, r) = 0$.

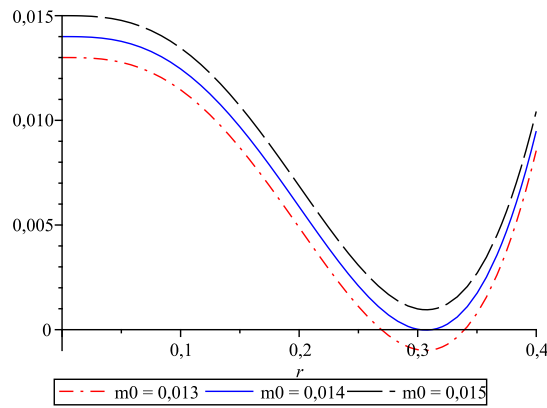


Figura 7.17: Para $n = 3$ e $r \in [0, 0.4]$.

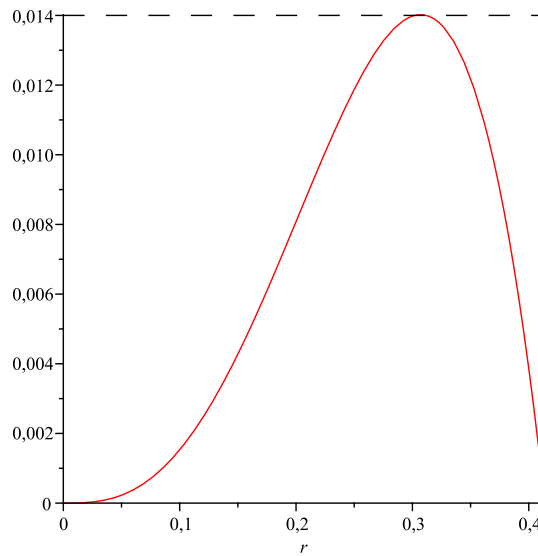


Figura 7.18: Para $n = 3$ e $r \in [0, 0.413]$

A fim de que se tenha solução para a equação (7.8) é necessario que o lado direito de (7.9) seja positivo, visto que a massa central é positiva. Por esta necessidade reencontramos a afirmação acima para $n = 3$, em função do uso da condição (7.9), observado na figura (7.18):

Pelo gráfico da figura 7.11, podemos estimar que para $0 < r < 1$ temos única solução para a equação (7.8). Pelo que observamos nos gráficos da figura 7.16, para valores de $m_0 < \frac{r^3 h_n(1) - h_n(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n})}{1 - r^3}$, onde esta expressão for positiva, teremos exatamente duas soluções para a equação (7.8) e $0 < r < 1$. Deste modo temos evidências para o seguinte:

Conjectura 7.5 Para todo $n \geq 3$ e $0 < r < 1$ temos

- (i) Para $m_0 = 0$, existe única solução para a equação $\psi(r, \frac{\pi}{n}) = 0$, e para $n \geq 21$ estas soluções estão no intervalo $[0.9, 1)$;
- (ii) Para $m_0 \approx 0$, existem duas soluções para a equação $\psi(r, \frac{\pi}{n}) = 0$;

(iii) Para $m_0 > \frac{r^3 h_n(1) - h_n(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n})}{1 - r^3}$, não existem soluções para a equação $\psi(r, \frac{\pi}{n}) = 0$

Assumindo este fato, temos o seguinte

Conjectura 7.6 Para n massas dispostas nos vértices de um polígono regular, uma massa central $m_0 \geq 0$ e uma massa desprezível μ em um eixo de simetria $\theta = 0 \pmod{\frac{\pi}{n}}$, temos

(i) Para $m_0 = 0$, temos $4n$ configurações centrais;

(ii) Para $0 < m_0 < \frac{r^3 h_n(1) - h_n(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n})}{1 - r^3}$, temos $5n$ configurações centrais;

(iii) Para $m_0 > \frac{r^3 h_n(1) - h_n(\frac{1}{r}, \frac{\pi}{n})}{1 - r^3}$, temos $3n$ configurações centrais.

Para demonstração desta conjectura falta apenas a unicidade para o eixo $\theta = \frac{\pi}{n}$.

Referências Bibliográficas

- [1] Andoyer, M. H. *Sur les solutions périodiques voisines des position d'équilibre relatif dans le probleme des n corps*. Bull. Astron., 23:129-146. 1906.
- [2] Albouy, A. *Symetrie des configurations centrales de quatre corps*, C. R. Acad. Sci Paris, t. 320, p. 1995.
- [3] Albouy, A. *On a paper of Moeckel on Central Configurations*, Regular & Chaotic Dynamics, volume 8, p 133-142. 2003.
- [4] Appel - Lacour. *Elliptic Functions*. 1890.
- [5] Arnold, V. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Springer. 2006.
- [6] Belbruno, E. *Capture Dynamics and Chaotic Motions in Celestial Mechanics*. 2004.
- [7] Bellman, R. *Introduction to Matrix Analysis*. McGraw Hill. 1960.
- [8] Brumberg, V. A. *Permanent configurations in the problem of four bodies and their stability*. Soviet. Astron., 1, 1:57-79. 1957.
- [9] Cabral, H. E. *Notas Sobre Sistemas Hamiltonianos*. Programa de verão, Departamento de Matemática, UFPE. 1995.
- [10] Cattani, Carlo and Prokopenya, Alexandrer N. *On the stability of the homographic polygon configuration in the many-body problem*. Physical, Mathematical, and Natural sciences, vol. 81-82. 2004.
- [11] Conway, J. B. *Functions of One Complex Variable*. 2nd ed. 1978.
- [12] Elmabsout, B. and Bang, D. *Configurations polygonaes en équilibre relative*. Dynamical Systems. 2001.
- [13] Elmabsout, B. and Bang, D. *Restricted $N+1$ body problem: existence and stability of relative equilibria*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 89: 305-318. 2004.
- [14] Euler, L. *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attahentium*, Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop, 11, p. 144-151. 1767.
- [15] Ferrario, D and Portaluri A. *On the dihedral n body problem*. Nonlinearity 21, 1307-1321. 2008.

- [16] Hall, G. R. *Central configurations in the planar $1+n$ body problem*. Boston University preprint. 1988.
- [17] Kurths, J. and Dvorak, R. *Chaos and Stability in planetary systems*. Springer Verlag. 2005.
- [18] Kepler, J. *Astronomia Nova e Harmonices Mundi. 1609 e 1619 respectivamente*.
- [19] Lagrange, J. *Oeuvres*, Gauthier - Villars, Paris, vol. 6. 1873.
- [20] Lang, Serge. *Complex Analysis*. Springer Verlag. 1999.
- [21] Leandro, E.S.G. *On the Central Configurations of the Planar Restricted Four-Body Problem*. J. Diff. Eq. 226, 323-351. 2006.
- [22] Leandro, E.S.G. *Bifurcations and Stability of Some Symmetrical Classes of Central configurations*, Thesis. 2001.
- [23] Lehmann-Filhés, R. *Astronomisch Nachrichten*. 1891.
- [24] Liapunov, A.M. *General problem about the stability of motion*, Gostekhizdat, Moscow. 1950.
- [25] Lindow, M. *Der Kreisfall im Problem der $N + 1$ Körper*. Astron. Nach. 228, 133-146. 1926.
- [26] Lindow, M. *Ein Spezialfall des VierKörperproblems*. Astron. Nach. 216, 390-412. 1922.
- [27] LLibre, J. *On the number of Central Configurations in the n -body problem*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 50:89-96,1991.
- [28] Mansilla, E. *Estabilidade de sistemas hamiltonianos com três graus de liberdade e o problema dos três corpos*. Tese de Doutorado. Departamento de Matemática. Universidade Federal de Pernambuco. 1999.
- [29] Martynyuk, A.A. *Stability by Liapunov's matrix function method with applications*. 1998.
- [30] Maxwell, J.C. *Stability of the Motion of Saturn's Rings*. In W.D. Niven, editor, The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. Cambridge University Press, Cambridge. 1890.
- [31] Meyer, K. and Hall, G.R. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N -Body Problem*, volum 90 of applied Mathematical sciences. Springer, New York. 1992.
- [32] Milnor, J. *Dynamics in one complex variable*. Princeton university. 2nd ed. 2006
- [33] Moeckel, R. *On Central configurations*. Math. Annalen, 205:499-517. 1990.
- [34] Moeckel, R. *Linear Stability of relative equilibria with a dominant mass*. Jour Dyn. Diff. Eq.. 1992.

- [35] Moeckel, R. *Linear Stability Analysis of some symmetrical Classes of Relative Equilibria*, IMA, vol. 63, Springer Verlag, NY. 1995.
- [36] Moulton, F. R. *The straight line solutions of the problem of n bodies*. Ann. of Math., 12, 1-17. 1910.
- [37] Narasimhan, R. and Nievergelt, Y. *Complex analysis in one variable*. Springer Verlag. 2001.
- [38] Newton, I. *Philosophia Naturalis Principia Mathematica*, Royal society, London. 1687.
- [39] Palmore, J. *Measure of degenerate relative equilibria*, I. annals of Math., 104: 421-429. 1976.
- [40] Pedersen, P. *Stabilitätsuntersuchung im restringierten vierkörperproblem*. Dan. Mat. Fys. Medd., 26, 16. 1952.
- [41] Perko, L. M. and Walter, E. L. *Regular polygon solutions of the n -body problem*. Proc. AMS, 94,2:301-309. 1985.
- [42] Poincaré, H. *Lês Méthodes nouvelles da mécanique celeste*. Paris. 1892.
- [43] Roberts, G.E. *Spectral instability of relative equilibria in the planar n -body problem*. Nonlinearity 12. 757-769. 1999.
- [44] Roberts, G.E. *Linear stability in the $(1+N)$ -gon relative equilibrium*. World Scientific. 2000.
- [45] Roberts, G.E. *Linear stability of the elliptic lagrangian triagle solutions in the three-body problem*. Journal of Differential Equations. vol 182, p 191-218. 2000.
- [46] Siegel, C. and Moser, J. *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer-Verlag, New York. 1971.
- [47] Simó, C. *Relative equilibria of the four body problem*. Cel. Mech., 18:165-184. 1978.
- [48] Smale, S. *Mathematical problems for the next century*, Mathematical Intelligencer 20, 7-15. 1998.
- [49] Smale-Hirsch. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York. 1974.
- [50] Sotomayor, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. 1979.
- [51] Tisserand, F. F. *Traité de Mécanique Céleste*. Éditions Jacques Gabay. 1990. Réimpression autorisée de l'édition originale publiée par Gauthier-Villars en 1889.
- [52] Uspensky, J. V. *Theory of Equations*. 1960.
- [53] Zhifu Xie, and Shiqing Zhang. *A simpler proof of regular polygon solutions of the n -body problem*. Physics letters. 2000.