Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Pós-Graduação em Matemática

Introdução a Sistemas Competitivos e Cooperativos e uma de suas Aplicações: um Modelo de Disseminação da Dengue

Hélio Porto

Dissertação de Mestrado

Recife
Fevereiro de 2005

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Hélio Porto

Introdução a Sistemas Competitivos e Cooperativos e uma de suas Aplicações: um Modelo de Disseminação da Dengue

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *César Augusto Rodrigues Castilho*

Recife
Fevereiro de 2005

Porto Neto, Hélio Machado da Silva
Introdução a sistemas competitivos e cooperativos e uma de suas aplicações: um modelo de disseminação da dengue / Hélio Machado da Silva Porto Neto. - Recife: O Autor, 2005.
vii, 63 folhas

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2005.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Equações diferenciais ordinárias. I. Título.

515.352 CDD (22. ed.) MEI2009 - 157

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado: ______________________________

César Augusto Rodrigues Castilho, DMAT-UFPE
Orientador

____

Eduardo Shirlippe Góes Leandro , DMAT-UFPE

____

Teresinha de Jesus Stuchi, IF - UFRJ

INTRODUÇÃO A SISTEMAS COMPETITIVOS E COOPERATIVOS E UMA DE SUAS APLICAÇÕES : UM MODELO DE DISSEMINAÇÃO DA DENGUE

Por
Hélio Machado da Silva Porto Neto

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE - BRASIL

Fevereiro - 2005

À Leticia

Agradecimentos

PRIMEIRAMENTE agradeço a Deus, pois sem Ele este trabalho não teria sido realizado.

Ao meu orientador e amigo César Castilho agradeço pelo estímulo e companheirismo.

Aos professores Cláudio Vidal, Marcus Vinícius, Henrique Araújo e Paulo Santiago, agradeço pelas disciplinas ministradas ao longo deste mestrado.

Agradeço também aos funcionários do DMAT e da biblioteca do CCEN, sempre prestativos e eficientes. Meus agradecimentos à Tânia, Fátima, Cláudia, Antônio, Manuel Ronaldo, Oscar, Carlos, Jane e Raquel.

Durante minha graduação fiz vários amigos que contribuíram direta ou indiretamente com a minha formação. Agradeço aos amigos Cícero, Cau, Cristian, Eduardo, Elias, Marcelo, Getúlio, Ella, Andréia, Pedro, Léo e Kleber.

Minha turma de mestrado foi fundamental para a conclusão deste curso. Agradeço aos amigos Éder, Almir, Davy e Steve pelos bons momentos de estudo e descontração que passamos juntos.

Agradeço também aos amigos da pós-graduação em matemática. Meus agradecimentos a Fábio Santos, Rodrigo Gondim, Adriano Regis, Walisson Rosa e Humberto.

Ao amigo Cláudio agradeço em especial pelo desprendimento e dedicação em me ajudar com o LaTeX.

À minha família, agradeço pelo apoio e afeto.

Meus agradecimentos à CAPES, pelo financiamento deste curso.

Resumo

O presente trabalho tem basicamente dois objetivos. O primeiro é introduzir o conceito de sistemas competitivos e cooperativos através da exposição do artigo "Systems of Differential Equations Which are Competitive or Cooperative. I: Limit Sets"de Morris W. Hirsch [6]. Esses sistemas são sistemas de equações diferenciais ordinárias bastante particulares muito utilizados em biologia e em epidemiologia como tentativa de modelagem de dinâmicas nessas áreas.

O segundo objetivo, desenvolvido no capítulo 2, é aplicar a teoria de sistemas competitivos exposta no capítulo 1, assim como a teoria de estabilidade de órbitas periódicas, a um modelo dinâmico relativo à transmissão do vírus da doença dengue. Neste modelo é consoderado uma população humana constante e uma população variável de mosquito. O referido capítulo consiste basicamente na exposição do artigo "Analysis of a Dengue Disease Transmission Model"de Lourdes Esteva e Cristobal Vargas [1].

Palavras-chave: Sistemas competitivos; Sistemas cooperativos; Estabilidade global; Epidemiologia.

Abstract

THIS work has basically two goals. The first one is to introduce the concept of competitive and cooperative dynamical systems by the exhibition of the article "Systems of Differential Equations which are Competitive or Cooperative. I: Limit Sets"by Morris W. Hirsch [6]. Those systems are systems of ordinary differential equations used mainly in population biology and in ecology. Most of the theorems introduced in the paper are proved with details.

The second goal, developed on chapter 2, is to apply the theory of competitive systems exposed on chapter 1 to an epidemiology model, namely, a model for the transmission of dengue fever in a constant human population and variable mosquito population. The main point here is to prove the global asymptotic stability of an equilibrium. For such, we need use of theory of compound matrices. The mentioned chapter is basically an exposition of the article "Analysis of a Dengue Disease Transmission Model"by Lourdes Esteva and Cristobal Vargas [1].

Keywords: Competitive systems; Cooperative systems; Global stability; Epidemiology.

Sumário

Introdução

O presente trabalho tem basicamente dois objetivos. O primeiro é introduzir o conceito de sistemas competitivos e cooperativos através da exposição do artigo "Systems of Differential Equations Which are Competitive or Cooperative. I: Limit Sets"de Morris W. Hirsch [6]. Esses sistemas são sistemas de equações diferenciais ordinárias bastante particulares muito utilizados em biologia e em epidemiologia como tentativa de modelagem de dinâmicas nessas áreas.

O segundo objetivo, desenvolvido no capítulo 2, é aplicar a teoria de sistemas competitivos exposta no capítulo 1, assim como a teoria de estabilidade de órbitas periódicas, a um modelo dinâmico relativo á transmissão do vírus da doença dengue em uma população humana constante e uma população variável de mosquito. O referido capítulo consiste basicamente na exposição do artigo "Analysis of a Dengue Disease Transmission Model"de Lourdes Esteva e Cristobal Vargas [1].

O teorema de Kamke provado em 1932 serve de base para todo o capítulo 1 deste trabalho. Neste capítulo é introduzido o conceito de sistemas competitivos e cooperativos que são sistemas que satisfazem as hipóteses exigidas por este teorema. Como conseqüência disto, temos que o fluxo destes sistemas preservam uma certa ordem parcial em $\mathbb{R}^n$ quando os valores de

t, a variável real do fluxo, cresce. Isto permite a prova de resultados qualitativos bastante relevantes. Por exemplo, no teorema 1.0.25 é mostrado que o fluxo de um sistema competitivo ou cooperativo de dimensão n restrito a um conjunto limite compacto é topologicamente equivalente ao fluxo de um sistema Lipschitz de dimensão $n-1$ restrito a um conjunto compacto invariante. Isto mostra que em dimensão dois estes sistemas possuem órbitas triviais, ou seja, quando $t \to \infty$ uma solução tende para um equilíbrio ou a norma desta solução tende para infinito. Desta forma, em dimensão dois, esses sistemas não possuem órbitas periódicas. Já em dimensão três, é mostrado no teorema 1.0.31 que tais sistemas possuem a propriedade de Poincaré-Bendixson, isto é, se um conjunto limite compacto não possui um equilíbrio, então este é uma órbita periódica.

No capítulo 2 é apresentado um modelo da dengue. A dengue é uma doença viral que é transmitida aos humanos principalmente pelo mosquito *Aedes aegypti*. Esta doença possui quatro sorotipos. A pessoa infectada por um destes desenvolve imunidade permanente a este tipo de vírus e imunidade apenas temporária aos demais. O mosquito, por possuir um curto tempo de vida, permanece infectado até a morte. O modelo da dengue aqui apresentado é um sistema competitivo de dimensão 5 que possui as seguintes variáveis: população humana suscetível, população humana infectada, população humana imune, população de mosquito suscetível e população de mosquitos infectados. É considerado também que a população humana é constante possuindo taxa de natalidade igual a taxa de mortalidade, enquanto que a população de mosquito é variável possuindo um recrutamento constante e uma certa taxa de mortalidade. Com estas hipóteses nas populações o sistema cai de dimensão 5 para dimensão 3. Neste sistema reduzido é mostrado que o domínio de interesse biológico é positivamente invariante, o que nos dá credibilidade nas equações que definem o sistema. É mostrado também que dependendo dos valores dos parâmetros que existem no modelo, surge um equilíbrio endêmico neste domínio. Um parâmetro dado no modelo, por exemplo, é a quantidade de picadas que um mosquito dá por dia. O resultado principal neste capítulo é que o domínio de interesse biológico, com exceção de uma das suas arestas, está contido na bacia de atração deste equilíbrio endêmico.

CAPÍTULO 1

Sistemas competitivos e cooperativos

NESTE capítulo é apresentado alguns resultados de sistemas competitivos e cooperativos. Estes sistemas são caracterizados da seguinte forma:

Definição 1.0.1. *Seja $F : \Gamma \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. O sistema autônomo definido por*

$$x' = F(x) \tag{1.1}$$

é dito competitivo se $\partial F_i/\partial x_j \leq 0$ para todo $i \neq j$, e é dito cooperativo se $\partial F_i/\partial x_j \geq 0$ para todo $i \neq j$.

Definição 1.0.2. *Denota-se a solução de* (1.1) com condição inicial x em $t = 0$ como sendo $\varphi(t,x)$.

Definição 1.0.3. *Denota-se por $I(x)$ o intervalo máximo de definição da solução $\varphi(t,x)$, $t_+(x) = \sup\{t : t \in I(x)\}$ e $t_-(x) = \inf\{t : t \in I(x)\}$.*

Definição 1.0.4. *A órbita de um ponto $x \in \Gamma$ é o conjunto $\gamma(x) = \{\varphi(t,x) : t \in I(x)\}$. A semi-órbita positiva é o conjunto $\gamma^+(x) = \{\varphi(t,x) : t \in I(x) \text{ e } t > 0\}$. Analogamente a semi-órbita negativa de x é o conjunto $\gamma^-(x) = \{\varphi(t,x) : t \in I(x) \text{ e } t < 0\}$.*

Definição 1.0.5. *Denota-se por $\omega(x)$ o conjunto $\{y \in \Gamma : \exists \{t_n\}$ com $t_n \to t_+(x)$ e $\varphi(t_n,x) \to y\}$. Analogamente denota-se por $\alpha(x)$ o conjunto $\{y \in \Gamma : \exists \{t_n\}$ com $t_n \to t_-(x)$ e $\varphi(t_n,x) \to y\}$.*

Sistema competitivos e cooperativos induzem fluxos em $\mathbb{R}^n$ com propriedades interessantes em relação ao ordenamento parcial em $\mathbb{R}^n$ definido a seguir.

Definição 1.0.6. *Dizemos que $x < y$, em que $x, y \in \mathbb{R}^n$ se $x_i < y_i$ para todo $i = 1, ..., n$. Da mesma forma, dizemos que $x \leq y$ se $x_i \leq y_i$ para todo $i = 1, ..., n$. Se $x < y$ dizemos que x e y são relacionados.*

Consideraremos sistemas competitivos e cooperativos definidos por um campo de vetores C^1, $F : \Gamma \to \mathbb{R}^n$, em que Γ é a intersecção de um aberto de $\mathbb{R}^n$ com um fechado de $\mathbb{R}^n$. Uma última condição para Γ é que seja $p - convexo$.

Definição 1.0.7. *Γ é $p - convexo$ se para todo $a, b \in \Gamma$ e $a \geq b$ então Γ contém o segmento de reta entre a e b.*

Definição 1.0.8. *Dizemos que $f = (f_1, ..., f_n) : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é do tipo K em Γ se para cada i, $f_i(a) \leq f_i(b)$ para qualquer $a, b \in \Gamma$ satisfazendo $a \leq b$ e $a_i = b_i$.*

Note que se F define um sistema cooperativo então F é do tipo K. De fato, seja $a, b \in \Gamma$ tal que $a \leq b$ e $a_i = b_i$, como Γ é $p - convexo$ então $a + t(b - a) \in \Gamma$ para todo $t \in [0, 1]$. Como

$$\frac{\partial}{\partial t} F(a + t(b - a)) = DF(a + t(b - a))(b - a)$$

então

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} F(a + t(b - a))dt = \int_0^1 DF(a + t(b - a))(b - a)dt.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo

$$F(b)-F(a)=\int_0^1 DF(a+t(b-a))(b-a)dt.$$

Mas como $a_i=b_i$ então

$$F_i(b)-F_i(a)=\int_0^1 \sum_{j\neq i}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a+t(b-a))(b_j-a_j)dt\geq 0$$

pois $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\geq 0$.

Uma ferramenta essencial para o estudo do fluxo de sistemas competitivos e cooperativos é dado pelo teorema de Kamke que será enunciado a seguir. Neste teorema usaremos a notação D_+ e D_- para designar a derivada à direita e à esquerda respectivamente.

Teorema 1.0.9. *[Kamke 1932] Seja $f(t,x)$ do tipo K para cada t e seja $x(t)$ uma solução de $x'=f(t,x)$ em $[a,b]$. Se $y(t)$ é contínua em $[a,b]$ satisfazendo $D_+y(t)\geq f(t,y)$ para todo $t\in[a,b]$ e $y(a)\geq x(a)$ então $y(t)\geq x(t)$ para $a\leq t\leq b$. Se $z(t)$ é contínua em $[a,b]$ satisfazendo $D_-z(t)\leq f(t,z)$ para todo $t\in[a,b]$ e $z(a)\leq x(a)$ então $z(t)\leq x(t)$ para $a\leq t\leq b$.*

Prova: Provaremos apenas que $z(t)\leq x(t)$ para todo $t\in[a,b]$, pois o resultado em que $y(t)\geq x(t)$ para todo $t\in[a,b]$ segue similarmente. Primeiramente mostraremos o caso da desigualdade estrita. Neste caso temos que $D_-z(t)<f(t,z)$ para todo $t\in[a,b]$ e $z(a)<x(a)$. Suponha, para efeito de contradição, que $z(t)>x(t)$ para algum $t\in[a,b]$. Seja c o menor número em $[a,b]$ tal que $z(t)<x(t)$ para $a\leq t<c$ e $z(c)\leq x(c)$, $z_i(c)=x_i(c)$ para algum $1\leq i\leq n$. Então, como f é do tipo K, segue que

$$D_-z_i(c)<f_i(c,z(c))\leq f_i(c,x(c))=x_i'(c).$$

Como $z_i(c) = x_i(c)$, segue que $z_i(t) > x_i(t)$ para uma vizinhança à esquerda de c, o que contradiz a definição de c.

Assuma agora que $D_{-}z(t) \leq f(t,z)$ e $z(a) \leq x(a)$. Queremos mostrar que $z(t) \leq x(t)$ para $a \leq t \leq b$. Seja c o maior valor de t tal que $z(s) \leq x(s)$ para $a \leq s \leq c$ e suponha o contrário do teorema, que $c < b$. Fixe um vetor $v > 0$ e seja $\varphi_n(t)$ a solução do seguinte problema de valor inicial

$$w' = f_n(t,w) \Leftrightarrow f(t,w) + \frac{v}{n}$$

$$w_n(c) = x(c) + \frac{v}{n},\ c \leq t \leq c + \delta,\ \text{para } \delta > 0 \text{ tal que } c + \delta < b.$$

Então pelo lema 1.0.10, enunciado a seguir, existe $n_0(c,\delta)$ tal que $\varphi_n(t)$ está definida em $[c, c+\delta]$ para todo $n > n_0$ e $\varphi_n(t) \to x(t)$ uniformemente sobre $[c, c+\delta]$ quando $n \to \infty$. Note que $D_{-}z(t) \leq f(t,z) < f_n(t,z)$ e $z(c) \leq x(c) < x(c) + \frac{v}{n} = \varphi_n(c)$, então pelo que acabamos de mostrar acima, $z(t) < \varphi_n(t)$ em $[c, c+\delta]$ para todo $n > n_0$. Como $\varphi_n(t) \to x(t)$ quando $n \to \infty$ então $z(t) \leq x(t)$ em $[c, c+\delta]$, mas isto contradiz a definição de c. Portanto $c = b$ e $z(t) \leq x(t)$ em $[a,b]$. □

Lema 1.0.10. *Seja $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $n = 0, 1, \ldots$ uma seqüência de funções contínuas no aberto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tal que f_n converge para f_0, uniformemente em cada parte compacta de Ω. Seja (x_n, t_n) uma seqüência de pontos de Ω que converge para (x_0, t_0). Suponhamos que*

$$x' = f_n(t,x),\ x(t_n) = x_n,\ n = 0, 1, \ldots$$

tem uma única solução máxima φ_n no seu intervalo máximo $I_n = (t_-(n), t_+(n))$. Seja $[a,b] \subset I_0 = (t_-(0), t_+(0))$. Então existe $n_0 = n_0(a,b)$ tal que para $n > n_0$, $[a,b] \subset I_n$ e

$\varphi_n|_{[a,b]} \to \varphi_0|_{[a,b]}$ *uniformimente.*

Prova: Ver página 35 de [13]. □

A seguir, mostraremos que dois pontos de uma órbita fechada de um sistema cooperativo não podem estar relacionados, e desta forma, em dimensão 3, órbitas fechadas não podem ter nós. O mesmo acontece com sistemas competitivos, pois se $F(x)$ define um sistema competitivo, então $H(x) = -F(x)$ define um sistema cooperativo, já que

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \geq 0.$$

Mais ainda, se $\varphi(t,x)$ é solução do sistema competitivo $x' = F(x)$, então $y(t) = \varphi(-t,x)$ é solução do sistema cooperativo $x' = H(x)$. De fato, $y'(t) = -\varphi'(-t,x) = -F(\varphi(-t,x)) = H(y(t))$. Note que se $\varphi(t,x)$ está definida para todo $t > 0$, então $y(t) = \varphi(-t,x)$ está definida para todo $t < 0$.

Definição 1.0.11. *Um ponto $x \in \Gamma$ é um equilíbrio do sistema* (1.1) se $F(x) = 0$.

Definição 1.0.12. *Uma órbita fechada γ de período $T > 0$ é a imagem de uma solução $\varphi(\cdot,x) : \mathbb{R} \to \Gamma$ tal que $\varphi(t+T,x) = \varphi(t,x)$ para todo t.*

O teorema a seguir nos informa sobre convergência de soluções. Este teorema pode ser visto como um critério de existência de alguns tipos de equilíbrios.

Teorema 1.0.13. *Assuma que* (1.1) é cooperativo. Seja $\varphi(\cdot,x) : [0,\infty) \to \Gamma$ uma solução cuja imagem tem fecho compacto em Γ. Se $\varphi(0,x)$ se relaciona com $\varphi(T,x)$ para algum $T > 0$, então $\varphi(t,x)$ converge para um equilíbrio quando $t \to \infty$.

Para provar o teorema (1.0.13) precisaremos da seguinte proposição.

Proposição 1.0.14. *Assuma que* (1.1) é cooperativo e $\varphi(\cdot,x) : [0,\infty) \to \Gamma$ uma solução. Seja $T > 0$ tal que $\varphi(T,x) \geq \varphi(0,x)$ ou $\varphi(T,x) \leq \varphi(0,x)$. Seja $p \in \Gamma$ um ponto limite de $\{\varphi(kT,x) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ com $T \in I(p)$. Então p está em uma órbita fechada γ de período T e $\omega(x) = \gamma$.

Prova: Basta mostrar o caso $\varphi(T,x) \geq \varphi(0,x)$, o outro caso é similar. Note que

$$\varphi(t+T,x) \geq \varphi(t,x) \text{ para todo t} > 0.$$

De fato, defina $y_1(t)$ como sendo $\varphi(t+T,x)$ e $y_2(t)$ como sendo $\varphi(t,x)$. Como o sistema (1.1) é autônomo então $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções. Note que $y_1(0) = \varphi(T,x)$ e $y_2(0) = \varphi(0,x)$, e por hipótese

$$y_1(0) = \varphi(T,x) \geq \varphi(0,x) = y_2(0).$$

Pelo teorema de Kamke

$$y_1(t) \geq y_2(t),$$

ou seja,

$$\varphi(t+T,x) \geq \varphi(t,x).$$

Em particular,

$$\varphi((k+1)T,x) \geq \varphi(kT,x) \text{ para todo k} \in \mathbb{Z}_+.$$

Decorre daí que a seqüência $\{\varphi(kT,x)\}$ é monótona. Como p é um ponto de acumulação desta seqüência e o fluxo é uma função contínua, segue que

$$p = \lim_{k\to\infty} \varphi(kT,x) = \lim_{k\to\infty} \varphi((k+1)T,x) = \lim_{k\to\infty} \varphi(T,\varphi(kT,x))$$

$$= \varphi(T, \lim_{k\to\infty} \varphi(kT,x)) = \varphi(T,p), k \in \mathbb{Z}_+.$$

Portanto, p está em uma órbita fechada γ de período T, pois $p = \varphi(0,p) = \varphi(T,p)$ e pelo teorema de existência e unicidade de soluções $\varphi(t,p) = \varphi(t+T,p)$ para todo t.

Falta apenas mostrar que $\gamma = \omega(x)$. Suponha que $q \in \gamma$, então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $q = \varphi(s,p)$. Defina a seqüência real $\{t_k\}$ da seguinte forma $t_k = s + kT$. Logo $t_k \to \infty$ quando $k \to \infty$ e

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k,x) = \lim_{k\to\infty} \varphi(s+kT,x) = \lim_{k\to\infty} \varphi(s,\varphi(kT,x)) =$$

$$\varphi(s, \lim_{k\to\infty} \varphi(kT,x)) = \varphi(s,p) = q,$$

ou seja, $q \in \omega(x)$. Suponha agora $q \in \omega(x)$. Então existe uma seqüência real $\{t_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n,x) = q$ e $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Defina $[t_n] = \sup\{kT : k \in \mathbb{Z}_+ \ e \ kT \leq t_n\}$ e $s_n = t_n - [t_n]$. Logo

$$q = \lim_{n\to\infty} \varphi(s_n + [t_n],x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(s_n, \varphi([t_n],x)) =$$

$$\varphi(\lim_{n\to\infty} s_n, \lim_{n\to\infty} \varphi([t_n],x)) = \varphi(\lim_{n\to\infty} s_n, p) = \lim_{n\to\infty} \varphi(s_n,p)$$

e como p está em uma órbita fechada γ de período T, segue que

$$\varphi(s_n,p) = \varphi(s_n + [t_n],p),$$

ou seja

$$q = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n,p)$$

e assim $q \in \omega(p)$, pois $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Como $\omega(p) = \gamma$ já que γ é periódica, segue que $q \in \gamma$. $\square$

Observação 1.0.15. *Note que o conjunto dos períodos de γ, acrescentado do 0, é um subgrupo fechado de $\mathbb{R}$. De fato, seja $\{p_n\}$ seqüência real de períodos da solução $\varphi(t,x)$ tal que $\{p_n\}$ converge para p. Então*

$$\varphi(p_n + t, x) = \varphi(t,x) \text{ para todo } t.$$

Tomando o limite em ambos os lados desta igualdade e usando o fato que o fluxo é contínuo temos que

$$\varphi(t,x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(p_n + t, x) = \varphi(\lim_{n\to\infty} p_n + t, x) = \varphi(p+t,x) \text{ para todo } t.$$

Ou seja, p pertence ao subgrupo dos períodos de γ.

Proposição 1.0.16. *Seja G um subgrupo fechado de $\mathbb{R}$. Se G possui um ponto de acumulação então $G = \mathbb{R}$.*

Prova: Seja p ponto de acumulação de G, então existe seqüência $\{p_n\} \subset G$ tal que $\{p_n\}$ converge para p. Defina uma seqüência $\{s_n\} \subset G$ tal que $s_n = p - p_n$, logo $\{s_n\}$ converge para 0 e assim existe subseqüência $\{s_{n_i}\}$ tal que $\{s_{n_i}\}$ converge para 0 e $s_{n_i} < 0$ ou $s_{n_i} > 0$. Sem perda de generalidade suponha que $s_{n_i} > 0$. Dado $r \in \mathbb{R}$ seja $\bar{r} = \sup\{g \in G : g \leq r\}$, como G é fechado segue que $\bar{r} \in G$. Se $r = \bar{r}$ então $G = \mathbb{R}$, suponha que $\bar{r} < r$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{r} + \varepsilon < r$ e existe também j tal que $0 < s_{n_j} < \varepsilon$. Como $s_{nj}, \bar{r} \in G$ temos que $\bar{r} + s_{n_j} = g \in G$, ou seja existe $g \in G$ tal que $\bar{r} < g < r$, o que é um absurdo pois $\bar{r} = \sup\{g \in G : g \leq r\}$, logo $r = \bar{r}$ e assim $G = \mathbb{R}$. $\square$

Agora podemos terminar a demonstração do teorema 1.0.13.

Prova: Seja $\varphi(\cdot,x) : \mathbb{R} \to \Gamma$ como no enunciado. Suponha sem perda de generalidade que $\varphi(T,x) > \varphi(0,x)$, então existe um aberto $S \subset \mathbb{R}$ tal que $T \in S$ e $\varphi(s,x) > \varphi(0,x)$ para todo $s \in S$. Como a curva $\varphi(t,x)$ tem fecho compacto, então, pelos mesmos argumentos utilizados na prova da proposição anterior, temos que para todo $s \in S$ existe $p(s)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(ks,x) = p(s) \text{ e } s \in I(p(s)).$$

Logo, pela proposição 1.0.14, $p(s)$ está contido em uma órbita fechada $\gamma(s)$ de período s.

Afirmação 1.0.17. *$p(s) \in \gamma(T)$ para todo $s \in S$, ou seja, $\gamma = \gamma(T)$ tem período s para todo $s \in S$.*

De fato, seja $s \in S$ então

$$p(s) = \lim_{k\to\infty} \varphi(ks,x) =$$

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(kT + k(s-T),x) = \lim_{k\to\infty} \varphi(k(s-T), \lim_{k\to\infty} \varphi(kT,x)) =$$

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(k(s-T), p(T)).$$

Como $p = p(T)$ está em uma órbita fechada γ de período T, então $\omega(p) = \gamma$, ou seja, $p(s) \in \gamma$ e assim segue a afirmação.

Como S possui um ponto de acumulação então pela proposição 1.0.16, γ tem período r para todo $r \in \mathbb{R}$, logo γ é um ponto de equilíbrio. $\square$

O próximo teorema garante limitações importantes na geometria dos conjuntos limites.

Teorema 1.0.18. *Suponha que* (1.1) é competitivo ou cooperativo. Então dois pontos de um conjunto limite não podem ser relacionados. Mais ainda, se y é um ponto limite então o vetor $F(y)$ não se relaciona com o vetor nulo.

A prova do teorema 1.0.18 requer o resultado seguinte, proposição 1.0.21, a qual tem o seguinte interesse particular: soluções de (1.1) não podem oscilar em relação a ordem parcial $<$. A próxima proposição necessita de um lema e da seguinte definição.

Definição 1.0.19. *Seja $y(t)$ uma curva em $\mathbb{R}^n$ definida em algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Um subintervalo $[a,b] \subset I$ é chamado de intervalo up se $y(a) < y(b)$ e de um intervalo down se $y(a) > y(b)$.*

Lema 1.0.20. *Seja $\varphi(t,x)$ solução de um sistema cooperativo definida em I. Se $[a,b]$ é um intervalo down, então qualquer translação à direita de $[a,b]$ ainda é um intervalo down, desde que esta translação esteja contida em $I(x)$.*

Prova: Seja $r > 0$ e $[a+r, b+r] \subset I(x)$ uma translação à direita de $[a,b]$. Defina $y_1(t) = \varphi(t+a,x)$ e $y_2(t) = \varphi(t+b,x)$, como o sistema cooperativo é autônomo, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ também são soluções, em que $y_1(0) = \varphi(a,x) > \varphi(b,x) = y_2(0)$. Logo, pelo teorema de Kamke $y_1(r) > y_2(r)$ ou seja $\varphi(r+a,x) > \varphi(r+b,x)$. $\square$

Proposição 1.0.21. *Suponha que* (1.1) é competitivo ou cooperativo. Então a solução $\varphi(\cdot,x) : I \to \Gamma$ não pode ter um intervalo up e um intervalo down que sejam disjuntos.

Prova: Provaremos o caso cooperativo; o caso competitivo segue por reversão do tempo.

Suponha que existe um intervalo up K e um intervalo down J com $J \cup K \subset I$, $J \cap K = \emptyset$. Assumiremos que $J < K$ (i.e., $u < v$ para todo $u \in J$, $v \in K$), o outro caso segue de forma similar. Considere

$$J = [a,r], \qquad K = [s,b], \qquad a < r < s < b.$$

Podemos assumir que $\varphi(s,x) \leq \varphi(t,x)$ para todo $t \in K$, pois caso isto não seja verdade podemos encontrar um conjunto $K' \subset K$ em que $K' = [s',b']$ e $\varphi(s',x) \leq \varphi(t,x)$ para todo $t \in K'$.

Provaremos esta proposição mostrando que nem $r-a \leq b-s$ nem $r-a > b-s$. Assuma que $r-a \leq b-s$. Então $s < s+r-a \leq b$. Como $[s,s+r-a]$ é uma translação à direita de $[a,r]$ segue que $[s,s+r-a]$ é um intervalo down. E assim

$$\varphi(s,x) > \varphi(s-a+r,x) \quad \text{e} \quad s+r-a \in K$$

o que contradiz o fato de que $\varphi(s,x) \leq \varphi(t,x)$ para todo $t \in K$.

Assuma agora que $r-a > b-s$. Então $a < a+b-r < s < b$. Como $[a+b-r,b]$ é uma translação à direita de $[a,r]$ segue que $[a+b-r,b]$ é um intervalo down. Portanto

$$\varphi(a+b-r,x) > \varphi(b,x) > \varphi(s,x).$$

Defina $c \in [a+b-r,s]$ como o maior número tal que $\varphi(c,x) \geq \varphi(b,x)$, com $c < s < b$. Então $\varphi(c,x) > \varphi(s,x)$, i.e.,$[c,s]$ é um intervalo down.

Suponha $s-c \leq b-s$, segue que $2s-c \leq b$. Então transladando $[c,s]$ por $s-c$ geramos o seguinte intervalo down $[s,2s-c] \subset [s,b]$, logo $\varphi(s,x) > \varphi(2s-c,x)$ contrariando o fato que

$\varphi(s,x) \leq \varphi(t,x)$ para todo $t \in K$. Finalmente, suponha $s-c > b-s$. Então $c < c+b-s < s$; como $[c+b-s,b]$ é uma translação à direita do intervalo down $[c,s]$ temos que

$$\varphi(c+b-s,x) > \varphi(b,x).$$

Mas isto contradiz a definição de c. Com isto está completa a prova da proposição 1.0.21. $\square$

Agora podemos completar a demonstração do Teorema 1.0.18.

Prova: Sejam p e q pontos de um conjunto limite de um sistema competitivo ou cooperativo, tal que $p < q$. Então existe vizinhança V_p de p, e vizinhança V_q de q, tal que $x < y$ para todo $x \in V_p$ e $y \in V_q$. Da definição de conjunto limite existem $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ com $\varphi(t_1,x), \varphi(t_4,x) \in V_p$, e $\varphi(t_2,x), \varphi(t_3,x) \in V_q$, logo $\varphi(t_1,x) < \varphi(t_2,x)$ e $\varphi(t_3,x) > \varphi(t_4,x)$. Portanto $[t_1,t_2]$ é um intervalo up, o qual é disjunto do intervalo down $[t_3,t_4]$, contradizendo a proposição 1.0.21.

Seja $y \in \omega(x)$ tal que $F(y) > 0$. Então $\varphi'(0,y) = F(\varphi(0,y)) = F(y) > 0$, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi(\varepsilon,y) > y$ e como $\varphi(\varepsilon,y), y \in \omega(x)$ isto contradiz o que acabamos de provar. Se considerarmos $F(y) < 0$ o resultado segue analogamente. $\square$

Proposição 1.0.22. *Seja $\{\varphi_t\}$ o fluxo de um sistema cooperativo definido em um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, não necessariamente p-convexo. Então $D\varphi_t(x)$ é uma matriz não negativa para todo $t \geq 0$, $x \in \Gamma$.*

Prova: Aplicaremos o teorema de Kamke na seguinte equação variacional e ao longo de uma solução fixa $\varphi_t(x) = \varphi(t,x)$:

$$\frac{dA}{dt} = DF(\varphi_t(x))A. \tag{1.2}$$

em que $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ e $F : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ é a função que define o sistema cooperativo. Note que o lado direito de (2.12), que é a função matricial

$$G(t,A) = DF(\varphi_t(x))A,$$

satisfaz

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial A_{rs}} \geq 0 \ \text{ para } (i,j) \neq (r,s).$$

De fato, considerando que $A = [a_{ij}]$ e $DF(\varphi_t(x)) = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\varphi_t(x))\right]$ $(i,j = 1,\cdots,n)$ segue que

$$DF(\varphi_t(x))A = [c_{ij}] \ \text{ em que } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(\varphi_t(x))A_{kj}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial A_{rs}} = \frac{\partial c_{ij}}{\partial A_{rs}} = \begin{cases} 0, \ se \ j \neq s \\ \\ \dfrac{\partial F_i}{\partial x_r}(\varphi_t(x)), \ se \ j = s \end{cases},$$

ou seja, para $(i,j) \neq (r,s)$, temos o seguinte:

se $j \neq s$ então

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial A_{rs}} = 0.$$

Se $j = s$ e $i \neq r$ então

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial A_{rs}} = \frac{\partial F_i}{\partial x_r}(\varphi_t(x)),$$

como o sistema é cooperativo, então

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_r} \geq 0,$$

logo,

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial A_{rs}} \geq 0 \text{ para } (i,j) \neq (r,s).$$

Então o teorema de Kamke se aplica à soluções de (2.12). A solução $B(t)$ de (2.12) com condição inicial $B(0) = 0$ é a solução constante $B(t) = 0$, enquanto que a solução com condição inicial $A(0) = I$ é $D\varphi_t(x)$. De fato, $\varphi_0(x) = x$ logo $D\varphi_0(x) = I$, e como

$$D\varphi_t(x) = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(t,x)\right] \text{ e } \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(t,x) = F_i(\varphi(t,x)) \ \ (i = 1,\cdots,n),$$

então

$$\varphi_i(t,x) = \int_{t_0}^{t} F_i(\varphi(s,x))ds,$$

logo,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\int_{t_0}^{t} F_i(\varphi(s,x))ds$$

e assim, pela regra da derivação de Leibniz,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(t,x) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\varphi(s,x))ds.$$

Ou seja,

$$\frac{\partial D\varphi}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(t,x)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{t_0}^{t} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\varphi(s,x))ds\right),$$

e, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\frac{\partial D\varphi}{\partial t}(t,x) = \left[\frac{\partial F_i(\varphi(t,x))}{\partial x_j}\right] = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(\varphi(t,x))\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(t,x)\right] =$$

$$DF(\varphi(t,x))D\varphi(t,x) = G(t, D\varphi(t,x)).$$

Como $B(0) = 0 \leq I = D\varphi(0,x)$ então pelo teorema de Kamke $B(t) \leq D\varphi(t,x)$ para todo $t \geq 0$, isto é, $D\varphi(t,x) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. $\square$

Em dimensão dois, sistemas competitivos e cooperativos possuem dinâmicas triviais, como afirma o próximo teorema.

Teorema 1.0.23. *Assuma que* (1.1) é cooperativo ou competitivo e n=2. Seja $\varphi(\cdot,x) : [0,\tau) \to \Gamma$ uma solução em que $t_+(x) = \tau$. Então $|\varphi(t,x)| \to \infty$ quando $t \to \tau$ ou então $\varphi(t,x)$ converge para algum ponto de $\overline{\Gamma}$ quando $t \to \tau$. De fato $[0,\tau)$ é a união de dois intervalos com $\varphi_1(t,x)$ e $\varphi_2(t,x)$ monótonas em cada um desses intervalos.

Prova: Por reversão do tempo podemos assumir que (1.1) é cooperativo. Assumiremos também que $\varphi(t,x)$ não é constante. O intervalo $I = \{t \geq 0 \colon t \in I(x)\}$ é a união dos seguintes conjuntos:

$$A_1 = \{t \in I : F_i(\varphi(t,x)) \geq 0, i = 1,2\},$$

$$A_2 = \{t \in I : F_2(\varphi(t,x)) > 0 > F_1(\varphi(t,x)), i = 1,2\},$$

$$A_3 = \{t \in I : F_i(\varphi(t,x)) \leq 0, i = 1,2\},$$

$$A_4 = \{t \in I : F_2(\varphi(t,x)) < 0 < F_1(\varphi(t,x)), i = 1,2\},$$

Suponha $s > t$ e $s,t \in I$. Como o sistema (1.1) é autônomo então

$$\varphi(s-t, \varphi(t,x)) = \varphi(s,x).$$

Derivando com respeito à t temos que

$$D\varphi(s-t,\varphi(t,x))\varphi'(t,x)-\varphi'(s-t,\varphi(t,x))=0.$$

Logo

$$D\varphi(s-t,\varphi(t,x))F(\varphi(t,x))=F(\varphi(s-t,\varphi(t,x)))=F(\varphi(s,x)). \tag{1.3}$$

Como pela proposição (1.0.22) $D\varphi(r,x)\geq 0$ para todo $x\in\Gamma$ e $r\in I(x)$, segue que se $t\in A_1$, $s\in I$ e $s>t$ então $s\in A_1$. Da mesma forma se $t\in A_3$, $s\in I$ e $s>t$ então $s\in A_3$. Logo, A_1 ou A_3 é vazio, portanto A_i $(i=1,\cdots,4)$ são dois a dois disjuntos. Seja $k\in\{1,2,3,4\}$ tal que $0\in A_k$. Se $k=1$ ou $k=3$ então $I\subset A_k$, e assim $\varphi_i(t,x)$ é monótona com $i=1,2$. Se $|\varphi(t,x)|\leq C$ para todo $t\in I$, então $\varphi(t,x)$ converge. Se $k=2$ ou $k=4$ temos duas possibilidades.

1) $I=A_k$, neste caso $\varphi_i(t,x)$ é monótona para $i=1,2$ logo, se $|\varphi(t,x)|\leq C$ para todo $t\in I$, então $\varphi(t,x)$ converge.

2) $I\not\subseteq A_k$, então existe um menor número $t_0\in I$ tal que $t_0\in A_j$ com $j=1$ ou $j=3$. Então $I\subset A_k\cup A_j$. Ou seja, $\varphi_i(t,x)$ é monótona para $i=1,2$ e para todo $t>t_0$ e assim, se $|\varphi(t,x)|\leq C$ para todo $t>t_0$, então $\varphi(t,x)$ converge. Isto prova a última afirmação do Teorema. □

Definição 1.0.24. *Seja $L\subset\mathbb{R}^n_+$ um conjunto qualquer. Seja $E^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ o hiperplano ortogonal a um vetor v. Defina $\pi:\mathbb{R}^n\to E^{n-1}$ a projeção ortogonal. Dizemos que L é comprimível ao longo de v se $\pi|L$ é um homeomorfismo com inversa Lipschitz, e π mapeia L equivariantemente respeitando o fluxo de algum campo vetorial localmente Lipschitz Y em E^{n-1}. (Equivariantemente significa que π leva trajetórias de* (1.1) em trajetórias de Y, respeitando a parametrização)

Teorema 1.0.25. *Seja L um conjunto limite de um sistema competitivo ou cooperativo. Então L é comprimível ao longo de qualquer vetor positivo.*

Prova: É suficiente considerar apenas vetores unitários v. Seja $\pi_v : \mathbb{R}^n \to E^{n-1} = v^\perp$ uma projeção ortogonal sobre o hiperplano ortogonal à v. Primeiro mostraremos que $\pi_v|L$ é injetiva.

Suponha que $p, q \in L$ e $\pi_v(p) = \pi_v(q)$. Então $p - q = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $p \neq q$ então $\lambda \neq 0$ e como $v > 0$ segue que p e q são relacionados. Mas isto contradiz o teorema 1.0.18; logo $\pi_v|L$ é injetiva. Portanto $\pi|L$ é um homeomorfismo com inversa Lipschitz, pois $(\pi|L)^{-1}$ é linear, logo contínua e Lipschitz.

Seja $\pi_v = \pi$ e defina

$$H : \pi(L) \to E^{n-1}, \qquad H = \pi \circ F \circ (\pi|L)^{-1}.$$

Note que F, π e $(\pi|L)^{-1}$ são funções localmente Lipschitz pois π e $(\pi|L)^{-1}$ são transformações lineares e F é de classe C^1. Portanto H é localmente Lipschitz. Por um resultado de McShane [10] H pode ser extendido à um campo vetorial localmente Lipschitz em E^{n-1}. Pelo teorema 1.0.18 $H \circ \pi(x) = 0$ se e somente se $F(x) = 0$. De fato, se $H \circ \pi(x) = 0$ então $\pi \circ F(x) = 0$ e assim $F(x) = \lambda v$, ou seja, se $F(x) \neq 0$ então $F(x)$ se relaciona com v, o que contradiz o teorema 1.0.18. E se $F(x) = 0$ claramente $H \circ \pi(x) = 0$.

Dizer que $\pi : L \to E^{n-1}$ é equivariante, significa que se $\varphi(t,x)$ é uma curva integral de F em L então $\pi \circ \varphi(t,x)$ é uma curva integral de H. Seja $\varphi(t,x)$ uma curva integral em L. Defina

$y(t) = \pi \circ \varphi(t,x)$, então

$$y'(t) = \pi \circ \varphi'(t,x) = \pi \circ F \circ \varphi(t,x) = \pi \circ F \circ (\pi|L)^{-1} \circ \pi \circ \varphi(t,x) = H \circ y(t).$$

Logo, $\pi : L \to E^{n-1}$ é equivariante. □

Definição 1.0.26. *Seja A um conjunto compacto e invariante em relação ao fluxo ψ_t. Dados dois pontos z e y em A e números positivos ε e t, uma $(\varepsilon,t)-$chain de z à y em A é um conjunto ordenado*

$$\{z = x_1, x_2, ..., x_{n+1} = y; t_1, t_2, ..., t_n\} \tag{1.4}$$

de pontos $x_i \in A$ e tempos $t_i \geq t$ tais que

$$|\psi(t_i, x_i) - x_{i+1}| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.5}$$

Um ponto $x \in A$ é dito chain recurrent se para todo $\varepsilon > 0$, $t > 0$ existe uma $(\varepsilon,t)-$chain de x à x em A. Dizemos que um conjunto A é chain recurrent se todo ponto de A é chain recurrent em A.

Teorema 1.0.27. *Seja L um conjunto (omega ou alfa) limite de um órbita (positiva ou negativa) do fluxo ψ que tem fecho compacto em Γ. Então L é chain recurrente.*

Prova: Ver página 163 de [11]. □

Teorema 1.0.28. *Suponha $n = 3$, seja L um conjunto limite compacto de um sistema competitivo ou cooperativo o qual não contém ponto de equilíbrio. Então:*

(a) L é uma órbita fechada ou um cilindro de órbitas fechadas.

(b) L é uma órbita fechada se o sistema é cooperativo e L é um conjunto $\omega-$limite.

Prova: Seja $\pi : \mathbb{R}^3 \to E^2$ a projeção ortogonal sobre o plano perpendicular a um vetor positivo. Pelo teorema 1.0.25 π mapeia L homeomorficamente e equivariantemente sobre um conjunto invariante de algum campo vetorial Y localmente Lipschitz em E^2. $\pi(L)$ é invariante, pois se $y \in \pi(L)$ e ψ_t denota o fluxo de Y então $\psi(t,y) = \pi \circ \varphi(t,x)$, em que $\pi(x) = y$. De fato,

$$\psi'(t,y) = \pi \circ \varphi'(t,x) = \pi \circ F \circ \varphi(t,x) = \pi \circ F \circ (\pi|L)^{-1} \circ \pi \circ \varphi(t,x) = Y \circ \psi(t,y)$$

e como $\varphi(t,x) \in L$ para todo t então $\psi(t,y) \in \pi(L)$ para todo t.

Claramente $\pi(L)$ é conexo e compacto, já que π é contínua. Como vimos na demonstração do teorema 1.0.25, $Y \circ \pi(x) = 0$ se e somente se $F(x) = 0$ e como $F(x) \neq 0$ segue que $\pi(L)$ não contém equilíbrios em Y. Portanto, pelo teorema de Poincaré-Bendixson, se tomarmos $y \in \pi(L)$, então o $\omega(y)$ e o $\alpha(y)$ são órbitas periódicas. Logo, $\pi(L)$ é uma união de órbitas fechadas e de órbitas que tendem espiraladamente para órbitas fechadas quando o tempo tende para $+\infty$ e para $-\infty$. Vamos mostrar através do teorema 1.0.27 que $\pi(L)$ é uma união de órbitas fechadas. Por este teorema L é chain recurrent, portanto $\pi(L)$ também é pois se $\{z = x_1, x_2, ..., x_{n+1} = z; t_1, t_2, ..., t_n\}$ é uma $(\varepsilon, t)-$chain de z à z em L então $\{\pi(z) = \pi(x_1), \pi(x_2), ..., \pi(x_{n+1}) = \pi(z); t_1, t_2, ..., t_n\}$ é uma $(\varepsilon, t)-$chain de $\pi(z)$ à $\pi(z)$ em $\pi(L)$. De fato

$$|\psi(t_i, \pi(x_i)) - \pi(x_{i+1})| = |\pi(\varphi(t_i, x_i)) - \pi(x_{i+1})| \leq |\varphi(t_i, x_i) - x_{i+1}| < \varepsilon, \;\; i = 1, 2, ..., n.$$

Suponha que existe $y \in \pi(L)$ tal que $\omega(y) = \gamma$ em que γ é uma órbita fechada e $y \notin \gamma$. Suponha que y está no interior da componente B de $\mathbb{R}^2 | \gamma$ tal que $\psi(t,y)$ espirala para γ em B. Através de argumentos de transversalidade, mostra-se que existem vizinhanças compactas positivamente invariantes de γ, U_1 e U_2 tais que $U_2 \subset int_B U_1$, y não pertence à U_1 e existe $t_0 > 0$ para o qual $\psi(t,U_1) \subset U_2$ para todo $t \geq t_0$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que a 2ε-vizinhança de U_2 em B está contida em U_1. Escolha t_0 grande o necessário para que $\psi(t,y) \in U_2$ para todo $t \geq t_0$. Isto pode ser feito pois $\omega(y) = \gamma$. Então qualquer (ε,t_0)-chain em $\pi(L)$ começando em $x_1 = y$ satisfaz $\psi(t_1,x_1) \in U_2$, por (1.5) e pelo fato que 2ε-vizinhança de U_2 está contida em U_1, $x_2 \in U_1$. Como $t_2 \geq t_0$ segue que $\psi(t_2,x_2) \in U_2$ e (1.5) implica novamente que $x_3 \in U_1$. Continuando este argumento torna-se claro que a $(\varepsilon,t_0)-$chain não pode retornar à y. Ou seja, não existe uma $(\varepsilon,t_0)-$chain em $\pi(L)$ de y à y. Isto contradiz o fato que $\pi(L)$ é chain recurrent. Logo $\psi(t,y)$ é uma órbita fechada. Como $\pi(L)$ é conexo então $\pi(L)$ é uma única órbita fechada ou um anel de órbitas fechadas. Isto prova o ítem (a).

Assuma agora que o sistema é cooperativo e $L = \omega(x)$. Suponha por absurdo que L é um cilindro de órbitas fechadas. Então $\pi(L)$ contém um 2-disco D. Seja $p \in L$ tal que $\pi(p)$ é o centro de D. Então existe $t_0 > 0$ tal que $\pi(\varphi(t_0,x)) \in \text{Int}D$. Seja $q \in L$ tal que $\pi(\varphi(t_0,x)) = \pi(q)$, então $\varphi(t_0,x)$ está relacionado com q. Como $q \in L$ então existe $t_1 > t_0$ tal que $\varphi(t_1,x)$ está relacionado com $\varphi(t_0,x)$. Pelo teorema (1.0.13) segue que L é um equilíbrio. Esta contradição completa a prova do ítem (b). $\square$

Definição 1.0.29. *Dizemos que $x \prec y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$. Dizemos também que um conjunto $C \in \mathbb{R}^3$ é fortemente equilibrado se não existem pontos $x,y \in C$ tais que $x \prec y$.*

Para provar o próximo teorema, o qual afirma que em dimensão três sistema competitivos e cooperativos possuem a propriedade de Poincaré-Bendixson, precisaremos da seguinte proposição.

Proposição 1.0.30. *Toda órbita fechada é fortemente equilibrada.*

Prova: É suficiente considerar o caso em que o sistema é cooperativo. Seja C uma órbita fechada e $\lambda > 0$ o período mínimo de C. Suponha que existam $x, y \in C$ tais que $x \leq y$. Então podemos encontrar $0 \leq t < \lambda$ tal que $\varphi(t,x) = y$. Queremos mostrar que $t = 0$. Suponha por absurdo que $0 < t < \lambda$. Como $x \leq y$, então $\varphi(0,x) = \varphi(t,x)$ ou $\varphi(0,x) < \varphi(t,x)$. Como λ é o período mínimo então $\varphi(0,x) \neq \varphi(t,x)$. Se $\varphi(0,x) < \varphi(t,x)$ então pelo teorema 1.0.13 C é um equilíbrio, absurdo. Portanto $t = 0$, ou seja $x = y$. □

Teorema 1.0.31. *Suponha $n = 3$ e L é um conjunto limite compacto de (*1.1) que não possui equilíbrio, então L é uma órbita fechada.

Prova: Assumiremos que F é cooperativo caso contrário substitua F por $-F$. De acordo com o teorema (1.0.28), se L não é uma órbita fechada então L é um conjunto α-limite, $\alpha(x)$, que consiste de um cilindro de órbitas fechadas. Vamos assumir que L possui essas propriedades e extrair daí uma contradição.

Seja v um vetor positivo, $E = v^{\perp}$ e $\pi : \mathbb{R}^3 \to E$ a projeção ortogonal. Então pelo teorema (1.0.25) π mapeia L homeomorficamente sobre um conjunto compacto de E homeomorfo a um anel. Seja $C \subset L$ uma órbita fechada tal que $\pi(C)$ está no interior de $\pi(L)$. A curva de Jordan $\pi(C)$, separa $\pi(L)$ em duas componentes conexas. Fixe pontos a e b em $L|C$ tais que $\pi(a)$ e $\pi(b)$ estão em diferentes componentes conexas de $\pi(L)|\pi(C)$.

Quando $t \to \infty$ a semi-órbita negativa $\varphi_{-t}(x)$ de x visita repetidamente todas as vizinhanças de a e de b, segue que $\pi(\varphi_{-t}(x))$ intercepta $\pi(C)$ em uma seqüência de tempo $-t_k \to -\infty$. Isto significa que existem pontos $z_k \in C$ relacionados com $\varphi_{-t_k}(x)$ por $>$ ou $<$ para todo k. Logo existe uma subseqüência k_i tal que $\varphi_{-t_{k_i}}(x) > z_{k_i}$ ou $\varphi_{-t_{k_i}}(x) < z_{k_i}$ para todo k_i. Para simplificar a notação suponha que $\varphi_{-t_k}(x) < z_k$ para todo k, o outro caso segue similarmente. Para todo $s > 0$ existe $w \in C$ tal que $\varphi_{-s}(x) < w$. De fato, escolha k tal que $t_k > s$ então

$$\varphi_{-s}(x) = \varphi_{t_k - s}(\varphi_{-t_k}(x)) < \varphi_{t_k - s}(z_k) \in C$$

já que $\varphi_{-t_k}(x) < z_k$. Note que $\varphi_{t_k - s}(z_k) \in C$, pois $z_k \in C$ e C é invariante pelo fluxo φ_t.

Afirmação 1.0.32. *Como $L = \alpha(x)$, então dado $l \in L$ existe $w \in C$ tal que $l \leq w$.*

De fato, seja $l \in L$ então existe $\{t_k\}$ tal que $t_k \to \infty$ quando $k \to \infty$ e $\varphi_{-t_k}(x) \to l$ quando $k \to \infty$. Como C é compacto e para todo t_k existe $w_k \in C$ tal que $\varphi_{-t_k}(x) < w_k$ e como C é compacto, então existe subseqüência w_{k_i} tal que $w_{k_i} \to w \in C$ quando $k_i \to \infty$. Logo $l = \lim_{k_i \to \infty} \varphi_{-t_{k_i}}(,x) \leq w$, pois $\varphi_{-t_{k_i}}(x) \leq w_{k_i}$ para todo k_i.

Note que se tivéssemos suposto que $\varphi_{-t_k}(x) > z_k$ para todo k então a afirmação acima seria a seguinte: Como $L = \alpha(x)$, então dado $l \in L$ existe $w \in C$ tal que $l \geq w$.

Pela afirmação acima segue que para toda órbita fechada $C' \subset L$ tal que $\pi(C')$ está contido no interior de $\pi(L)$, acontece o seguinte: ou todo ponto de L é menor ou igual que algum ponto de C' ou todo ponto de L é maior ou igual que algum ponto de C'.

Como podemos encontrar três órbitas fechadas distintas em L tais que sua projeção ortogonal sobre E estão contidas no interior de $\pi(L)$ então existem duas dessas órbitas, digamos C_1 e C_2, tais que a relação com os pontos de L é a mesma, ou seja, todo ponto de L é menor ou igual que algum ponto de C_1 e algum ponto de C_2, ou todo ponto de L é maior ou igual que algum ponto de C_1 e algum ponto de C_2. Suponha que todo ponto de L é menor ou igual que algum ponto de C_1 e menor ou igual também que algum ponto de C_2 . Então dado $u \in C_1$ existe $w \in C_2$ e $z \in C_1$ tais que $u \prec w \prec z$, o que é um absurdo pela proposição (1.0.30). Esta contradição completa a prova do teorema. $\square$

CAPÍTULO 2

Modelo da dengue

2.1 Formulação do modelo

A dengue é uma doença viral comum em regiões tropicais. Atualmente são conhecidos quatro sorotipos que são transmitidos para os humanos através de vetores transmissores. O vetor mais importante é o mosquito *Aedes aegypti*. A pessoa infectada por um desses sorotipos, desenvolve imunidade permanente a esse sorotipo e imunidade apenas temporária aos outros três. Enquanto que o mosquito, por possuir um curto tempo de vida, permanece infectado até a morte.

No presente modelo é considerado apenas um sorotipo. A população humana N_H é considerada constante, com taxa de nascimento per capita μ_H igual à taxa de morte. Como apenas uma fração da quantidade de ovos de mosquito chega a fase adulta e este processo depende de fatores climáticos, mas não diretamente do número de mosquitos adultos N_V, assumiremos uma taxa de recrutamento constante A, independente do atual número de mosquitos adultos. O número total de mortes na população de mosquito acontece a uma taxa de $\mu_V N_V$, em que μ_V é a taxa de mortalidade per capita. A equação diferencial que rege a dinâmica da população de mosquitos é dada por

$$N_V' = A - \mu_V N_V.$$

Desta equação obtém-se diretamente que o equilíbrio $\dfrac{A}{\mu_V}$ é um equilíbrio assintoticamente estável.

Usaremos $\overline{S}_H$, $\overline{I}_H$ e $\overline{R}_H$ para denotar o número de humanos suscetíveis, infectados e imunes respectivamente. Para os vetores transmissores, mosquito *Aedes aegypti*, usaremos $\overline{S}_V$ e $\overline{I}_V$ para denotar o número de suscetíveis e infectados respectivamente. A passagem de suscetíveis para a classe de infectados, em cada espécie, depende da taxa de picadas dos mosquitos, da probabilidade de transmissão e do número de suscetíveis e infectados de cada espécie. A taxa de picadas b é o número aproximado de picadas que um mosquito dá por dia, esta taxa depende de vários fatores, mas neste modelo ela será considerada constante. A probabilidade de transmissão é a probabilidade de uma picada infectar um ser de outra espécie, ou seja a probabilidade de um mosquito infectado infectar um humano ao picá-lo, e a probabilidade de um humano infectado infectar um mosquito que o pica. O modelo considera também o fato que dentre as picadas que um mosquito dá por dia, algumas não são em humanos. Por exemplo, em áreas rurais os mosquitos têm várias fontes de sangue entre os animais. Denotaremos por m o número de alternativas disponíveis como fonte de sangue. Então a probabilidade de um mosquito picar um humano é de $N_H/(N_H+m)$. Portanto um humano recebe $b(N_V/N_H)N_H/(N_H+m)$ picadas por unidade de tempo, e um mosquito se alimenta de sangue humano $bN_H/(N_H+m)$ vezes por unidade de tempo. Logo a taxa de infecção por humanos suscetíveis e vetores suscetíveis é dada respectivamente por

$$\beta_H b \frac{N_V}{N_H} \frac{N_H}{N_H+m} \frac{\bar{I}_V}{N_V} = \frac{\beta_H b}{N_H+m} \bar{I}_V,$$

$$\beta_V b \frac{N_H}{N_H+m} \frac{\bar{I}_H}{N_H} = \frac{\beta_V b}{N_H+m} \bar{I}_H,$$

em que β_H é a probabilidade de transmissão de um vetor para um humano, e β_V é a probabilidade de transmissão de um humano para um vetor. Assumiremos também que humanos infectados se recuperam a uma taxa constante γ_H.

Respeitando as considerações feitas acima, o modelo é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
\overline{S}'_H(t) &= \mu_H N_H - \frac{\beta_H b}{N_H+m} \overline{S}_H \bar{I}_V - \mu_H \overline{S}_H, \\
\bar{I}'_H(t) &= \frac{\beta_H b}{N_H+m} \overline{S}_H \bar{I}_V - (\mu_H + \gamma_H) \bar{I}_H, \\
\overline{R}'_H(t) &= \gamma_H \bar{I}_H - \mu_H \overline{R}_H, \\
\overline{S}'_V(t) &= A - \frac{\beta_V b}{N_H+m} \overline{S}_V \bar{I}_H - \mu_V \overline{S}_V, \\
\bar{I}'_V(t) &= \frac{\beta_V b}{N_H+m} \overline{S}_V \bar{I}_H - \mu_V \bar{I}_V,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

com duas condições

$$N_H = \overline{S_H} + \bar{I}_H + \overline{R}_H \text{ e } N_V = \overline{S}_V + \bar{I}_V.$$

O primeiro octante do espaço $\overline{S}_H \bar{I}_H \overline{R}_H \overline{S}_V \bar{I}_V$ é positivamente invariante em relação ao sistema (2.1), pois, na fronteira deste octante, o campo de vetores não aponta para o exterior. Desta forma, vemos que o modelo está bem posto, pois não teria nenhum sentido prático se uma solução com condição inicial no primeiro octante passasse a ter alguma coordenada negativa, já que essas coordenadas representam números de humanos ou mosquitos. Considere o seguinte conjunto

$$\overline{S}_H + \overline{I}_H + \overline{R}_H = N_H,$$

$$\overline{S}_V + \overline{I}_V = \frac{A}{\mu_V}$$

o qual denotaremos por T. Note que ele é invariante, pois qualquer solução começando em T satisfaz

$$(\overline{S}_H + \overline{I}_H + \overline{R}_H)' = \overline{N}'_H = 0,$$

$$(\overline{S}_V + \overline{I}_V)' = \left(\frac{A}{\mu_V}\right)' = 0.$$

Como em nosso modelo N_H permanece constante e $N_V \to \frac{A}{\mu_V}$, então todas as soluções tendem para T. Portanto para estudar o comportamento assintótico das soluções do sistema (2.1), basta estudar o comportamento delas em T. Já que em T as populações de humanos e de mosquitos permanecem constantes. Sem perda de generalidade, podemos trabalhar com as proporções

$$S_H = \frac{\overline{S}_H}{N_H}, \;\; I_H = \frac{\overline{I}_H}{N_H}, \;\; R_H = \frac{\overline{R}_H}{N_H}, \;\; S_V = \frac{\overline{S}_V}{A/\mu_V}, \;\; I_V = \frac{\overline{I}_V}{A/\mu_V}.$$

Nessas novas coordenadas temos que $R_H = 1 - S_H - I_H$ e $S_V = 1 - I_V$. E o sistema (2.1) em T pode ser determinado pelo sistema equivalente de equações diferenciais ordinárias não lineares em dimensão três, descrito a seguir

$$S'_H(t) = \mu_H(1 - S_H) - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V,$$

$$I'_H = b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V - (\gamma_H + \mu_H) I_H, \tag{2.2}$$

$$I'_V = b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m}(1 - I_V) I_H - \mu_V I_V.$$

Com o intuito de provar que a região de interesse biológico

$$\Gamma = \{(S_H, I_H, I_V) : 0 \leq I_V \leq 1,\ 0 \leq S_H,\ 0 \leq I_H,\ S_H + I_H \leq 1\}$$

é positivamente invariante, provaremos a seguinte proposição.

Proposição 2.1.1. *Se $x \in \partial\Gamma|eixo\ S_H$ então existe vizinhança V de 0 tal que para todo $\varepsilon \in V$ $\varphi(\varepsilon, x) \in \text{int}(\Gamma)$ se $\varepsilon > 0$ e $\varphi(\varepsilon, x) \in \text{ext}(\Gamma)$ se $\varepsilon < 0$.*

Prova: Suponha $(S_H, I_H, I_V) \in \partial\Gamma$ tal que $S_H = 0$, então

$$S'_H = \mu_H > 0$$

e assim segue a proposição nesta região.

Suponha que $(S_H, I_H, I_V) \in \partial\Gamma$ em que $S_H \neq 0$, $I_H = 0$ e $I_V \neq 0$, então,

$$I'_H = b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V > 0.$$

Logo, o campo de vetores é transversal nesta região e assim segue a proposição nesta região.

Suponha agora que $(S_H, I_H, I_V) \in \partial\Gamma$ com $I_H \neq 0$ e $I_V = 0$, então,

$$I_V' = b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} I_H > 0,$$

ou seja, o campo de vetores é transversal nesta região e assim segue a proposição nesta região.

Tome agora a região de Γ tal que $I_V = 1$. Então,

$$I_V' = -\mu_V < 0,$$

portanto segue a proposição nesta região.

Considere agora a região de Γ em que $S_H + I_H = 1$, $0 < I_V < 1$ e $I_H \neq 0$. Para provar a proposição nesta região, considere a seguinte função

$$V = S_H + I_H,$$

os conjuntos de nível de V,

$$S_H + I_H = c,$$

são planos paralelos ao plano $S_H + I_H = 1$. Ao longo das soluções, temos que

$$\dot{V} = \mu_H(1 - S_H) - (\gamma_H + \mu_H) I_H.$$

Portanto, se $S_H + I_H = 1$, temos que

$$\dot{V} = -\gamma_H I_H < 0,$$

assim, segue a proposição nesta região e portanto em toda $\partial\Gamma | eixo\ S_H$. $\square$

Observação 2.1.2. *Note que o eixo S_H é invariante em relação ao sistema (*2.2), pois considerando que F é a função que define o sistema (2.2), então $F(S_H,0,0) \subset (S_H,0,0)$. Ainda mais, no eixo S_H o sistema (2.2) se reduz à

$$S_H' = \mu_H(1-S_H).$$

Logo, o retrato de fase do sistema (2.2) restrito ao eixo S_H é bastante simples, composto de duas órbitas, $(S_H,0,0)$ em que $S_H < 1$ e $(S_H,0,0)$ em que $S_H > 1$, e o equilíbrio $(1,0,0)$ assintoticamente estável.

Com esta observação podemos provar o que queríamos.

Proposição 2.1.3. Γ *é positivamente invariante.*

Prova: Suponha para efeito de contradição, que existe $x \in \Gamma$ e $t_0 > 0$ tal que $\varphi(t_0,x)$ não pertence à Γ, então existe $t_1 > 0$ e vizinhança V de 0 tal que $t_0 > t_1$, $y = \varphi(t_1,x) \in \partial\Gamma$ e $\varphi(t_1+\varepsilon,x) = \varphi(\varepsilon,y) \in ext(\Gamma)$ para todo $\varepsilon \in V$ tal que $\varepsilon > 0$. Note que pela observação 2.1.2 $y \notin$eixo S_H, pois se $y \in$eixo S_H então $\varphi(t_0,x) \in \Gamma$. Logo $y \in \partial\Gamma|$eixoS_H, mas isto contraria a proposição 2.1.1, e assim Γ é positivamente invariante. $\square$

2.1.1 Pontos de equilíbrio do modelo

Agora estamos interessados em encontrar os pontos de equilíbrio do sistema (2.2) e determinar sua estabilidade. Igualando a zero o lado direito do primeira e da terceira equação de (2.2), vemos que um ponto de equilíbrio deve satisfazer as seguintes relações:

$$S_H = \frac{\beta I_H + 1}{(\beta + MR_0)I_H + 1} \quad , \tag{2.3}$$

$$I_V = \frac{\beta I_H}{\beta I_H + 1} \quad , \tag{2.4}$$

em que

$$\beta = \frac{b\beta_V N_H}{\mu_V(N_H + m)},\ M = \frac{\gamma_H + \mu_H}{\mu_H},\ R_0 = \frac{b^2\beta_H\beta_V N_H A/\mu_V}{(N_H + m)^2\mu_V(\gamma_H + \mu_H)} \tag{2.5}$$

Substituindo as equações (2.3), (2.4) e fazendo $(\beta b\beta_H A/\mu_V)/(N_h + m) = R_0(\gamma_H + \mu_H)$ na segunda equação de (2.2), temos que I_H deve ser solução da seguinte equação do segundo grau:

$$-(\beta + MR_0)I_H^2 + (R_0 - 1)I_H = 0. \tag{2.6}$$

Então as únicas soluções possíveis para I_H são $I_H = 0$ ou $I_H = (R_0 - 1)/(\beta + MR_0)$. Substituindo esses valores nas equações (2.3) e (2.4) obtemos os pontos de equilíbrio do sistema (2.2):

$$E_1 = (1,0,0)\ e\ E_2 = (S_H^*, I_H^*, I_V^*),$$

em que

$$S_H^* = \frac{\beta + M}{\beta + MR_0},\ I_H^* = \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0},\ I_V^* = \frac{\beta(R_0 - 1)}{R_0(\beta + M)}.$$

Temos pelas coordenadas de E_1 e E_2 que se $R_0 \leq 1$, então E_1 é o único equilíbrio em Γ, e se $R_0 > 1$, então E_2 também está em Γ. O equilíbrio E_1 é chamado de equilíbrio livre de doença e o equilíbrio E_2 é chamado de equilíbrio endêmico.

Seja F o campo vetorial definido pelo lado direito da equação (2.2), então a estabilidade local do equilíbrio E_1 é determinada pela parte real dos autovalores da seguinte matriz

$$DF(E_1) = \begin{pmatrix} -\mu_H & 0 & -\frac{b\beta_H A/\mu_V}{N_H+m} \\ 0 & -(\gamma_H + \mu_H) & \frac{b\beta_H A/\mu_V}{N_H+m} \\ 0 & \frac{b\beta_V N_H}{N_H+m} & -\mu_V \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Seus autovalores são dados por

$$-\mu_H, \ \frac{-(\gamma_H + \mu_H + \mu_V) \pm \sqrt{(\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 - 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0)}}{2} \tag{2.8}$$

Se $R_0 < 1$ então todos os autovalores de $DF(E_1)$ têm parte real negativa, e assim E_1 é localmente assintoticamente estável. Queremos mostrar agora que se $R_0 \leq 1$, então E_1 é globalmente assintoticamente estável. Para isto, usaremos a seguinte função de Liapunov

$$V = \left(\frac{b\beta_H A/\mu_V}{(N_H + m)\mu_V} \right) I_V + I_H. \tag{2.9}$$

Derivando V ao longo das soluções, temos que

$$\dot{V} = -\frac{b\beta_H A/\mu_V}{N_H + m}(1 - S_H)I_V - (\gamma_H + \mu_H)[1 - R_0(1 - I_V)]I_H,$$

que é menor ou igual a zero em Γ. O subconjunto de Γ em que $\dot{V}=0$, é definido pelas seguintes equações

$$(1-S_H)I_V = 0,\ I_H = 0 \text{ se } R_0 < 1,$$

$$(1-S_H)I_V = 0,\ I_V I_H = 0 \text{ se } R_0 = 1.$$

Analisando o sistema (2.2), podemos ver que E_1 é o único conjunto invariante de Γ contido em $\dot{V}=0$. Portanto do Teorema de LaSalle-Liapunov enunciado a seguir segue que E_1 é localmente estável e que cada solução com condição inicial em Γ tendem para E_1 quando t tende à infinito. Ou seja E_1 é globalmente assintoticamente estável para $R_0 \leq 1$.

Teorema 2.1.4. *Se V é uma função de Liapunov em $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ e $\gamma^+(x_0) = \{\varphi(t,x_0) : t \in I(x_0)\}$ é uma órbita limitada de $x' = f(x)$, em Γ. Então $\varphi(t,x_0) \to M$ quando $t \to \infty$, em que M é o maior conjunto invariante de $x' = f(x)$ em $S = \{x \in \Gamma : \dot{V}(x) = 0\}$.*

Prova: Ver página 296 de [5]. □

Analisando novamente a equação (2.8), temos que para $R_0 > 1$ o equilíbrio E_1 é instável, pois pelo menos um dos seus autovalores terá parte real positiva. No entanto, para $R_0 > 1$ o equilíbrio E_2 está em Γ e sua estabilidade local é determinada pela seguinte matriz

$$DF(E_2)=\begin{pmatrix} -\mu_H\left(\frac{\beta+MR_0}{\beta+M}\right) & 0 & -\frac{\mu_H MR_0}{\beta}\left(\frac{\beta+M}{\beta+MR_0}\right) \\ \\ \frac{\mu_H M(R_0-1)}{\beta+M} & -\mu_H M & \frac{\mu_H MR_0}{\beta}\left(\frac{\beta+M}{\beta+MR_0}\right) \\ \\ 0 & \frac{\mu_V\beta}{R_0}\left(\frac{\beta+MR_0}{\beta+M}\right) & -\mu_V R_0\left(\frac{\beta+M}{\beta+MR_0}\right) \end{pmatrix}$$

em que β e M são dados pela equação (2.5). O polinômio característico de $DF(E_2)$ é dado por

$$p(\lambda)=\lambda^3+P\lambda^2+Q\lambda+R, \tag{2.10}$$

em que

$$P=-Tr(DF(E_2)),\;\; Q=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$R=-\det(DF(E_2)).$$

Após alguns cálculos obtemos que

$$P=\frac{\mu_H(\beta+MR_0)}{\beta+M}+\mu_H M+\frac{\mu_V R_0(\beta+M)}{\beta+MR_0},$$

$$Q=\frac{\mu_H^2 M(\beta+MR_0)}{\beta+M}+\mu_H\mu_V R_0+\frac{\mu_V\mu_H M\beta(R_0-1)}{\beta+MR_0},$$

$$R=\mu_V\mu_H^2 M(R_0-1).$$

Note que para $R_0>1$ os coeficientes da equação (2.10) são positivos. Note também que

$$PQ>\mu_V\mu_H^2 MR_0>R,$$

então pelo critério de Routh-Hurwitz enunciado a seguir, todas as raízes da equação (2.10) têm parte real negativa. Logo E_2 é localmente assintoticamente estável.

Critério de Routh-Hurwitz ($n = 3$): A equação

$$p(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + p_2\lambda^2 + p_3\lambda^3$$

tem todas as raízes com parte real negativa se, e somente se, $p_0 > 0$, $p_1 > 0$, $p_1 p_2 > p_0 p_3$ e $p_3 > 0$.

A versão mais geral deste critério, que permite saber se um polinômio de grau n possui parte real negativa de todas as suas raízes, pode ser encontrada em ([14], p.304).

2.1.2 Estabilidade global do equilíbrio endêmico

Nesta seção provaremos o resultado mais importante deste capítulo, a saber, que se $R_0 > 1$ então $\Gamma | eixoS_H$ é uma região assintoticamente estável do equilíbrio E_2.

Definição 2.1.5. *Dizemos que um sistema $x' = f(x)$ possui a propriedade de estabilidade de órbitas periódicas se a órbita de qualquer solução periódica $\gamma(t)$, se existir, é orbitalmente assintoticamente estável.*

Teorema 2.1.6. *Considere o sistema*

$$x' = F(x), \tag{2.11}$$

em que $F : \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é C_1 e Γ convexo e limitado. Suponha que o sistema (2.11) é competitivo, possui a propriedade de estabilidade de órbitas periódicas, que int(Γ) é um conjunto positivamente invariante e que para todo $x \in \text{int}(\Gamma)$, $\omega(x)$ não pertence a $\partial\Gamma$. Se p é o único ponto de equilíbrio no int(Γ), e se p for localmente assintoticamente estável, então p é globalmente assintoticamente estável em int(Γ).

Prova: Seja U a bacia de atração do equilíbrio p. Como p é localmente assintoticamente estável, segue que U é aberto. De fato, como p é localmente assintoticamente estável, existe uma vizinhança V de p tal que $\lim_{t\to\infty} \varphi(t,x) = p$ para todo $x \in V$. Seja $x \in U$, então existe $t' > 0$ tal que $\varphi(t',x) \in V$, como o fluxo $\varphi : \mathbb{R} \times \Gamma \to \Gamma$ é uma função contínua, então dada uma vizinhança $W \subset V$ de $\varphi(t',x)$, existe vizinhança $I \times Z$ de (t',x) tal que $\varphi(t,z) \in W$ para todo $(t,z) \in I \times Z$, logo, dado $x \in U$ existe vizinhança Z de x tal que $Z \subset U$.

O teorema é provado se mostrarmos que U contém int(Γ). Assumindo que o contrário é verdade, então ∂U tem interseção não vazia com o int(Γ) (denotaremos esta interseção por Σ). De fato, fazendo uso da forma contra-positiva suponha que $\text{int}(\Gamma) \cap \partial U = \emptyset$ então $\text{int}(\Gamma) \subset \text{int}(U) \cup ext(U)$, mas como int($\Gamma$) é conexo e $\text{int}(\Gamma) \cap U \neq \emptyset$ então $\text{int}(\Gamma) \subset \text{int}(U)$.

Note que Σ é invariante, pois se $x \in \text{int}(\Gamma)$ então por hipótese $\varphi(t,x) \in \text{int}(\Gamma)$ para todo t. Se $x \in \partial U$, suponha para efeito de contradição, que $\varphi(t',x)$ não pertence à ∂U para algum t', então $\varphi(t',x) \in \text{int}(U)$ ou $\varphi(t',x) \in ext(U)$. Como $\varphi(t',x) \notin \text{int}(U)$, pois caso contrário $x \in U$, então $\varphi(t',x) \in ext(U)$. O exterior de U é um conjunto aberto e o fluxo é uma função contínua, logo, existe uma vizinhança $I \times Z$ de (t',x) tal que $\varphi(t,z) \in ext(U)$ para todo $(t,z) \in I \times Z$, mas como $x \in \partial U$ existe $(t,z') \in I \times Z$ tal que $z' \in U$, absurdo, pois se $z \in U$ então $\varphi(t,z) \in U$ para todo $t > 0$.

Como Σ é invariante e $\overline{\Sigma}$ é compacto, então se $x \in \overline{\Sigma}$ então $\omega(x) \neq \emptyset$. Como $p \notin \omega(x)$, pois $x \in \partial U$, segue pelo teorema 1.0.31 que $\omega(x)$ é uma órbita fechada γ não trivial. Por hipótese γ é orbitalmente assintoticamente estável. Então existe vizinhança V de γ tal que para todo $y \in V$ $d(\varphi(t,y),\gamma) \to 0$ quando $t \to \infty$ ($d(\varphi(t,y),\gamma)$ denota a distância de $\varphi(t,y)$ à γ). Mas isto é um absurdo, pois $d(p,\gamma) > 0$ e como $\gamma \subset \partial U$ então para toda vizinhança W de γ existe $y \in W$ tal que $\varphi(y,t) \to p$ quando $t \to \infty$. Esta contradição termina a prova do teorema. $\square$

Note que Γ no sistema (2.2) é convexo e limitado. Logo, com o intuito de utilizar o teorema 2.1.6, precisamos mostrar que $\text{int}(\Gamma)$ é positivamente invariante, que o sistema (2.2) é competitivo e que possui a propriedade de estabilidade de órbitas periódicas.

Proposição 2.1.7. *Em relação ao sistema (*2.2*),* $\text{int}(\Gamma)$ é positivamente invariante.

Prova: Suponha para efeito de contradição que $\text{int}(\Gamma)$ não é positivamente invariante, então existe $x \in \text{int}(\Gamma)$ e $t_0 > 0$ tal que $\varphi(t_0,x) \in \partial\Gamma$. Como vimos na observação 2.1.2 o eixo S_H é invariante, então $\varphi(t_0,x) \notin$ eixo S_H já que $x \in \text{int}(\Gamma)$. Portanto $\varphi(t_0,x) \in \partial\Gamma|$eixo S_H, logo pela proposição 2.1.1 existe $\varepsilon < 0$ tal que $\varphi(t_0+\varepsilon,x) \in ext(\Gamma)$, mas pela proposição 2.1.3 Γ é positivamente invariante. Esta contradição completa a prova. $\square$

Os sistemas competitivos podem ser generalizados (ver [12]), a generalização é a seguinte

Definição 2.1.8. *Seja* $F : \Gamma \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *uma função de classe* C^1*. O sistema autônomo definido* *por*

$$x' = F(x)$$

é dito competitivo se existe alguma matriz diagonal $H = diag(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_2)$, *em que* ε_i *é* 1 *ou* -1, *e a matriz* $HDF(x)H$ *não possui elementos positivos fora de sua diagonal para todo* $x \in \Gamma$.

Ainda é mostrado em [12] que se Γ é convexo, então o fluxo deste sistema preserva, para $t < 0$, a ordem parcial em $\mathbb{R}^n$ definida pelo octante

$$K = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_i x_i \geq 0\}.$$

Esta ordem funciona da seguinte forma, $x \leq_K y$, em que $x, y \in \Gamma$, se $\varepsilon_i x_i \leq \varepsilon_i y_i$ para todo $i = 1, ..., n$ e $\varepsilon_i \in diag(H)$. E assim todos os resultados do capítulo 1 são válidos para esta generalização.

Seja F a função que define o sistema (2.2), escolhendo $H = diag(1, -1, 1)$ temos que $HDF(S_H, I_H, I_V)H =$

$$\begin{pmatrix} -\mu_H - b\beta_H \dfrac{A/\mu_V}{N_H + m} I_V & 0 & -b\beta_H \dfrac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H \\ \\ -b\beta_H \dfrac{A/\mu_V}{N_H + m} I_V & -(\gamma_H + \mu_H) & -b\beta_H \dfrac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H \\ \\ 0 & -b\beta_V \dfrac{N_H}{N_H + m}(1 - I_V) & -b\beta_V \dfrac{N_H}{N_H + m} I_H - \mu_V \end{pmatrix}.$$

Portanto o sistema (2.2) é competitivo em Γ.

Para mostrar que o sistema (2.2) possui a propriedade das órbitas periódicas precisaremos dos dois resultados que seguem.

Proposição 2.1.9. *Na fronteira de* Γ, *o sistema (*2.2) possui um único ponto omega limite que é o equilíbrio E_1. Mais ainda, para $R_0 > 1$, E_1 não pode ser o omega limite de qualquer órbita no int(Γ).

Prova: Suponha, para efeito de contradição, que existe $y \in \partial\Gamma|$eixo$-S_H$ tal que y é $\omega(x)$ para algum $x \in \Gamma$. Então, como conseqüência da proposição 2.1.1, existe $\varepsilon < 0$ tal que $\varphi(\varepsilon, y)$ não pertence à Γ. Seja $\{t_k\}$ seqüência tal que $\lim_{t_k \to \infty} \varphi(t_k, x) = y$ então $\lim_{t_k \to \infty} \varphi(t_k + \varepsilon, x) = \varphi(\varepsilon, y)$. Mas isto é um absurdo pois pela proposição 2.1.3 Γ é positivamente invariante e $\varphi(\varepsilon, y)$ não pertence à Γ. Suponha agora que existe $y \in$ eixo$-S_H \cap \Gamma|(1,0,0)$ tal que y é $\omega(x)$ para algum $x \in \Gamma$. Então $\gamma(y) \subset \omega(x)$, mas isto é um absurdo, pois pela observação 2.1.2 $\gamma(y) = (S_H, 0, 0)$ em que $S_H < 1$, e assim existe $z \in \omega(x)$ tal que z não pertence a Γ, o que implica a existência de $t > 0$ tal que $\varphi(t, x)$ não pertence a Γ, mas isto contraria a proposição 2.1.3. Com isto conclui-se a primeira parte da proposição.

Para provar a segunda parte da proposição considere a seguinte função

$$V = I_V + \frac{\mu_V(N_H + m)(1 + R_0)}{2b\beta_H A/\mu_V} I_H.$$

logo

$$\dot{V} = I'_V + \frac{\mu_V(N_H + m)(1 + R_0)}{2b\beta_H A/\mu_V} I'_H$$

e assim, ao longo das soluções

$$\dot{V} = b\beta_V \frac{N_H}{N_H+m}(1-I_V)I_H - \mu_V I_V \ +$$

$$\frac{\mu_V(N_H+m)(1+R_0)}{2b\beta_H A/\mu_V}[b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} S_H I_V - (\gamma_H+\mu_H)I_H]$$

ou seja

$$\dot{V} = [(1-I_V) - \frac{1}{2}(\frac{1}{R_0}+1)]b\beta_V \frac{N_H}{N_H+m} I_H + [S_H - \frac{2}{1+R_0}]\frac{\mu_V(1+R_0)}{2} I_V.$$

Como $R_0 > 1$, então $\frac{1}{2}(\frac{1}{R_0}+1) < 1$ e $\frac{2}{(1+R_0)} < 1$. Portanto existe uma vizinhança U de E_1 tal que para todo $(S_H, I_H, I_V) \in U \bigcap \mathrm{int}(\Gamma)$ a expressão dentro dos colchetes é positiva, e conseqüentemente $\dot{V} > 0$ nesses pontos exceto no ponto $(1,0,0)$. Note que os conjuntos de nível de V são os planos

$$I_V + \frac{\mu_V(N_H+m)(1+R_0)}{2b\beta_H A/\mu_V} I_H = c,$$

os quais se afastam do eixo S_H quando c cresce. Como V cresce ao longo das órbitas começando em $U \cap \mathrm{int}(\Gamma)$, podemos concluir que essas órbitas se afastam de E_1 quando t cresce. Isto prova a proposição. $\square$

Teorema 2.1.10. *Uma condição suficiente para uma órbita periódica $\gamma = \{p(t) : 0 \leq t \leq \omega\}$ de $x' = f(x)$ em que $f \in C^1$ $(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$ ser assintoticamente estável é que o sistema linear*

$$y' = \frac{df}{dx}^{[2]}(p(t))y \tag{2.12}$$

seja assintoticamente estável.

Prova: Ver apêndice. □

Agora estamos prontos para provar que o sistema (2.2) possui a propriedade das órbitas periódicas.

Proposição 2.1.11. *O sistema (*2.2) possui a propriedade das órbitas periódicas.

Prova: Seja $p(t)$ uma órbita periódica do sistema (2.2). Se provarmos que o sistema

$$y' = \frac{dF^{[2]}}{dx}(p(t))y \tag{2.13}$$

é assintoticamente estável então pelo teorema 2.1.10, segue que $p(t)$ é assintoticamente estável. A matriz jacobiana da equação (2.2) é dada por

$$DF = \begin{pmatrix} -(\mu_H + a_H b\beta_H I_V) & 0 & -a_H b\beta_H S_H \\ a_H b\beta_H I_V & -(\gamma_H + \mu_H) & a_H b\beta_H S_H \\ 0 & a_V b\beta_V (1 - I_V) & -(\mu_V + a_V b\beta_V I_H) \end{pmatrix},$$

em que

$$a_H = \frac{A/\mu_V}{N_H + m}, \quad a_V = \frac{N_H}{N_H + m}.$$

Segue pela equação (A.2), ver apêndice, que a primeira coluna da matriz $DF^{[2]}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} -(2\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H) \\ a_V b\beta_V(1-I_V) \\ 0 \end{pmatrix},$$

a segunda coluna da matriz $DF^{[2]}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} a_H b\beta_H S_H \\ -(\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \mu_V + a_V b\beta_V I_H) \\ a_H b\beta_H I_V \end{pmatrix}$$

e a terceira coluna da matriz $DF^{[2]}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} a_H b\beta_H S_H \\ 0 \\ -(\gamma_H + \mu_H + \mu_V + a_V b\beta_V I_H) \end{pmatrix}.$$

Portanto em $p(t)$ a equação (2.13) torna-se

$$\begin{aligned} X' &= -(\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H + \mu_H)X + a_H b\beta_H S_H Y + a_H b\beta_H S_H Z, \\ Y' &= a_V b\beta_V(1-I_V)X - (\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \mu_V + a_V b\beta_V I_H)Y, \\ Z' &= a_H b\beta_H I_V Y - (\gamma_H + \mu_H + \mu_V + a_V b\beta_V I_H)Z. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Para provar que a equação (2.14) é assintoticamente estável usaremos a seguinte função de

Liapunov

$$V(X(t),Y(t),Z(t),S_H(t),I_H(t),I_V(t)) = \|(X(t),\frac{I_H(t)}{I_V(t)}Y(t),\frac{I_H(t)}{I_V(t)}Z(t))\|,$$

em que $\|\cdot\|$ é a norma em R^3 definida por

$$\|(X,Y,Z)\| = \sup\{|X|,|Y|+|Z|\}.$$

Como $p(t)$ é uma curva fechada então todos os pontos da órbita de $p(t)$ são pontos omega-limite. Logo, pela proposição (2.1.9), $p(t)$ está a uma distancia positiva da fronteira de Γ, e assim, existe $0 < K < 1$ tal que

$$I_V(t) \geq K \text{ e } I_H(t) \geq K.$$

Portanto V está bem definida ao longo de $p(t)$. Como

$$I_V(t) \geq K \text{ e } I_H(t) \geq K$$

em $p(t)$ então

$$\frac{I_H}{I_V} \geq \frac{K}{I_V} \geq K,$$

pois $0 < I_V \leq 1$. Logo

$$V(X,Y,Z,S_H,I_H,I_V) = \|(X,\frac{I_H}{I_V}Y,\frac{I_H}{I_V}Z)\|$$

$$= \sup\{|X|,\frac{I_H}{I_V}(|Y|+|Z|)\}$$

$$\geq \sup\{|X|,K(|Y|+|Z|)\}$$

ou seja

$$V(X,Y,Z,S_H,I_H,I_V) \geq K\sup\{|X|,(|Y|+|Z|)\}. \tag{2.15}$$

Ao longo de $(X(t),Y(t),Z(t))$, solução da equação (2.14), temos que

$$V(t) = \sup\{|X(t)|, \frac{I_H(t)}{I_V(t)}(|Y(t)|+|Z(t)|)\}.$$

Note que

$$D_+|X(t)| \leq -(\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H + \mu_H)|X(t)| + a_H b\beta_H S_H(|Y(t)|+|Z(t)|)$$

e assim

$$D_+|X(t)| \leq -(\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H + \mu_H)|X(t)| + a_H b\beta_H S_H \frac{I_V}{I_H}(\frac{I_H}{I_V}(|Y(t)|+|Z(t)|)). \quad (2.16)$$

De fato, suponha que $X(t) > 0$, então existe vizinhança U de 0 tal que $X(t+h) > 0$ para todo $h \in U$. Portanto

$$\begin{aligned} D_+|X(t)| &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|X(t+h)| - |X(t)|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \\ &= X'(t). \end{aligned}$$

Pela equação (2.14)

$$X'(t) = -(\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H + \mu_H)X(t) + a_H b\beta_H S_H(Y(t)+Z(t)),$$

logo

$$D_+|X(t)| = -(\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H + \mu_H)X(t) + a_H b\beta_H S_H(Y(t)+Z(t))$$

$$\leq -(\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H + \mu_H)|X(t)| + a_H b\beta_H S_H \frac{I_V}{I_H}(\frac{I_H}{I_V}(|Y(t)|+|Z(t)|)).$$

Suponha agora que $X(t) < 0$, então existe vizinhança U de 0 tal que $X(t+h) < 0$ para todo $h \in U$. Portanto

$$\begin{aligned}
D_+|X(t)| &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|X(t+h)| - |X(t)|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{-(X(t+h) - X(t))}{h} \\
&= -X'(t).
\end{aligned}$$

Pela equação (2.14)

$$-X'(t) = (\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H + \mu_H)X(t) - a_H b\beta_H S_H(Y(t) + Z(t)),$$

logo

$$D_+|X(t)| = (\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H + \mu_H)X(t) - a_H b\beta_H S_H(Y(t) + Z(t))$$

$$\leq -(\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H + \mu_H)|X(t)| + a_H b\beta_H S_H \frac{I_V}{I_H}(\frac{I_H}{I_V}(|Y(t)| + |Z(t)|)).$$

Finalmente suponha que $X(t) = 0$. Como $X(t)$ é analítica, pois a função que define o sistema (2.14) é analítica, temos duas possibilidades:

1) Existe vizinhança U de 0 em que $X(t+h) > 0$ para todo $h > 0$ tal que $h \in U$. Então

$$\begin{aligned}
D_+|X(t)| &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|X(t+h)| - |X(t)|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{X(t+h) - X(t)}{h}
\end{aligned}$$

$$= X'(t).$$

Pela equação (2.14)

$$X'(t) = -(\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H + \mu_H)X(t) + a_H b\beta_H S_H(Y(t) + Z(t)),$$

logo

$$D_+|X(t)| = -(\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H + \mu_H)X(t) + a_H b\beta_H S_H(Y(t) + Z(t))$$

$$\leq -(\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H + \mu_H)|X(t)| + a_H b\beta_H S_H \frac{I_V}{I_H}(\frac{I_H}{I_V}(|Y(t)| + |Z(t)|)).$$

2) Existe vizinhança U de 0 em que $X(t+h) < 0$ para todo $h > 0$ tal que $h \in U$. Portanto

$$\begin{aligned} D_+|X(t)| &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|X(t+h)| - |X(t)|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{-(X(t+h) - X(t))}{h} \\ &= -X'(t). \end{aligned}$$

Pela equação (2.14)

$$-X'(t) = (\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H + \mu_H)X(t) - a_H b\beta_H S_H(Y(t) + Z(t)),$$

logo

$$D_+|X(t)| = (\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H + \mu_H)X(t) - a_H b\beta_H S_H(Y(t) + Z(t))$$

$$\leq -(\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H + \mu_H)|X(t)| + a_H b\beta_H S_H \frac{I_V}{I_H}(\frac{I_H}{I_V}(|Y(t)| + |Z(t)|)).$$

De forma análoga mostra-se que

$$D_+|Y(t)| \leq a_V b\beta_V(1-I_V)|X(t)| - (\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \mu_V + a_V b\beta_V I_H)|Y(t)| \tag{2.17}$$

e

$$D_+|Z(t)| \leq = a_H b\beta_H I_V|Y(t)| - (\gamma_H + \mu_H + \mu_V + a_V b\beta_V I_H)|Z(t)|. \tag{2.18}$$

Das equações (2.17) e (2.18), temos

$$D_+[|Y(t)|+|Z(t)|] \leq -(\mu_V + \mu_H + a_V b\beta_V I_H)(|Y(t)|+|Z(t)|) + a_V b\beta_V(1-I_V)|X(t)|,$$

portanto

$$D_+[\frac{I_H}{I_V}(|Y(t)|+|Z(t)|)] = (\frac{I_H'}{I_H} - \frac{I_V'}{I_V})\frac{I_H}{I_V}(|Y(t)|+|Z(t)|) + \frac{I_H}{I_V}D_+(|Y(t)|+|Z(t)|)$$

$$\leq \frac{I_H}{I_V}a_V b\beta_V(1-I_V)|X(t)| + (\frac{I_H'}{I_H} - \frac{I_V'}{I_V} - \mu_H - \mu_V - a_V b\beta_V I_H)\frac{I_H}{I_V}(|Y(t)|+|Z(t)|). \tag{2.19}$$

Das equações (2.16) e (2.19) temos

$$D_+V(t) \leq \sup\{h_1(t), h_2(t)\}V(t),$$

em que

$$\begin{aligned} h_1(t) &= -(\mu_H + a_H b\beta_H I_V + \gamma_H + \mu_H) \\ h_2(t) &= \tfrac{I_H}{I_V}a_V b\beta_V(1-I_V) + \tfrac{I_H'}{I_H} - \tfrac{I_V'}{I_V} - \mu_H - \mu_V - a_V b\beta_V I_H. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Podemos reescrever as duas últimas equações do sistema (2.14) como

$$a_H b\beta_H S_H \tfrac{I_V}{I_H} = \tfrac{I'_H}{I_H} + \gamma_H + \mu_H,$$

$$a_V b\beta_V (1 - I_V)\tfrac{I_H}{I_V} = \tfrac{I'_V}{I_V} + \mu_V. \tag{2.21}$$

Das equações (2.21) e (2.20) segue que

$$\sup\{h_1(t), h_2(t)\} \leq -\mu_H + \frac{I'_H}{I_H},$$

logo

$$D_+V(t) \leq (-\mu_H + \frac{I'_H}{I_H}).$$

Como a equação que define o sistema (2.14) é analítica, segue que as soluções desse sistema são analíticas. Portanto, existem intervalos (t_i, t_{i+1}) tal que $V(t)$ é diferenciável. E assim, nesses intervalos

$$\frac{V'(t)}{V(t)} \leq -\mu_H + \frac{I'_H}{I_H}$$

$$\ln\left(\frac{V(t)}{V(0)}\right) \leq -\mu t + \ln\left(\frac{I_H(t)}{I_H(0)}\right)$$

$$V(t) \leq V(0)e^{-\mu t}\frac{I_H(t)}{I_H(0)} \leq \frac{V(0)}{I_H(0)}e^{-\mu t}.$$

Isto nos diz que $V(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, conseqüentemente, pela equação (2.15), temos que

$$(X(t), Y(t), Z(t)) \to 0 \text{ quando } t \to \infty.$$

□

Finalmente podemos mostrar o próximo teorema.

Teorema 2.1.12. *Considere o sistema* (2.2). Se $R_0 > 1$, então $\Gamma|\text{eixo}-S_H$ é uma região assintoticamente estável do equilíbrio endêmico E_2. Mais ainda, toda trajetória começando no eixo S_H se aproxima do equilíbrio livre de doença E_1.

Prova: Para a primeira parte do teorema considere $x \in \Gamma|\text{eixo-}S_H$, logo $x \in \text{int}(\Gamma)$ ou $x \in \partial\Gamma|\text{eixo-}S_H$. Se $x \in \text{int}(\Gamma)$, então o resultado segue pelo teorema 2.1.6. E se $x \in \partial\Gamma|\text{eixo-}S_H$, então pela proposição 2.1.1 existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi(\varepsilon, x) \in \text{int}(\Gamma)$, e assim o resultado também segue pelo teorema 2.1.6. Quanto a segunda parte do teorema, vimos na observação 2.1.2 que o eixo S_H é invariante e que o equilíbrio E_1 é assintoticamente estável, isto completa a prova do teorema. □

APÊNDICE A

Matrizes Compostas

SEJA A uma matriz 3×3 real ou complexa, e seja $a_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$ o menor determinado pelas linhas (i_1, i_2) e pelas colunas (j_1, j_2), em que $1 \leq i_1 < i_2 \leq 3$ e $1 \leq j_1 < j_2 \leq 3$. A segunda composição multiplicativa $A^{(2)}$ de A, é uma matriz 3×3 cujas entradas são $a_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$ na ordem lexicográfica. Ou seja, se $A = a_i^j$ então

$$A = \begin{pmatrix} a_{12}^{12} & a_{12}^{13} & a_{12}^{23} \\ \\ a_{13}^{12} & a_{13}^{13} & a_{13}^{23} \\ \\ a_{23}^{12} & a_{23}^{13} & a_{23}^{23} \end{pmatrix}.$$

em que $a_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} - a_{i_2}^{j_1} a_{i_1}^{j_2}$. O termo multiplicativo é usado, pois através de longos cálculos mostra-se que

$$(AB)^{(2)} = A^{(2)} B^{(2)} \tag{A.1}$$

Desta forma, se P é uma matriz 3×3 inversível então $P^{(2)}$ é inversível e $P^{(2)}(P^{-1})^{(2)} = I$.

Definição A.0.13. *Definimos a segunda composição aditiva $A^{[2]}$ da matriz A da seguinte forma:*

$$A^{[2]} = D(I + hA)^{(2)}|_{h=0}$$

em que D denota a derivada com respeito a h.

Como

$$I+hA=\begin{pmatrix} 1+ha_1^1 & ha_1^2 & ha_1^3 \\ \\ ha_2^1 & 1+ha_2^2 & ha^3 \\ \\ ha_3^1 & ha_3^2 & 1+ha_3^3 \end{pmatrix}$$

então$(I+hA)^{(2)}$ é uma matriz que possui primeira coluna

$$\begin{pmatrix} 1+ha_1^1+ha_2^2+h^2a_1^1a_2^2-h^2a_2^1a_1^2 \\ \\ ha_3^2+h^2a_1^1a_3^2-h^2a_3^1a_1^2 \\ \\ h^2a_2^1a_3^2-h^2a_3^1a_2^2-ha_3^1 \end{pmatrix},$$

segunda coluna

$$\begin{pmatrix} ha_2^3+h^2a_1^1a_2^3-h^2a_2^1a_1^3 \\ \\ 1+ha_1^1+ha_3^3+h^2a_1^1a_3^3-h^2a_3^1a_1^3 \\ \\ ha_2^1+h^2a_2^1a_3^3-h^2a_3^1a_2^3 \end{pmatrix},$$

e terceira coluna

$$\begin{pmatrix} h^2a_1^2a_2^3 - ha_1^3 - h^2a_2^2a_1^3 \\ \\ ha_1^2 + h^2a_1^2a_3^3 - h^2a_3^2a_1^3 \\ \\ 1 + ha_2^2 + ha_3^3 + h^2a_2^2a_3^3 - h^2a_3^2a_1^3 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$A^{[2]} = \begin{pmatrix} a_1^1 + a_2^2 & a_2^3 & -a_1^3 \\ \\ a_3^2 & a_1^1 + a_3^3 & a_1^2 \\ \\ -a_3^1 & a_2^1 & a_2^2a_3^3 \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

A conexão entre matrizes compostas e equações diferenciais é dada pela seguinte proposição.

Proposição A.0.14. *Seja $X(t)$ uma matriz 3×3 solução do sistema*

$$x' = A(t)x, \tag{A.3}$$

em que $A(t)$ é uma função matricial a valores reais ou complexos C^1 em relação a variável t. Então $Y(t) = X^{(2)}(t)$ é uma matriz solução do sistema

$$y' = A^{(2)}(t)y.$$

Prova: Como $A(t)$ é C^1 então $X(t)$ também. Logo

$$X(t+h) = X(t) + X'(t)h + O(h^2)$$

para uma vizinhança de 0. Mas como $X(t)$ é solução do sistema (A.3) então

$$X(t+h) = (I + hA(t))X(t) + O(h^2)$$

então pela equação (A.1)

$$X^{(2)}(t+h) = (I + hA(t))^{(2)}X^{(2)}(t) + O(h^2)$$

e assim, aplicando a regra do produto

$$D(X^{(2)}(t+h))|_{h=0} = D((I + hA(t))^{(2)}X^{(2)}(t))|_{h=0}$$

$$(X^{(2)})'(t) = D((I + hA(t)))^{(2)}|_{h=0}X^{(2)}(t) = A^{[2]}(t)X^{(2)}(t)$$

□

Como consequência temos que

$$(e^A)^{(2)} = e^{A^{[2]}}, \tag{A.4}$$

pois a matriz solução de

$$y' = A^{[2]}y$$

por um lado é $e^{tA^{[2]}}$ e por outro, como acabamos de mostrar pela proposição A.0.14, é $(e^tA)^{(2)}$. Logo, pelo teorema de existência e unicidades de solução de uma EDO, $(e^A)^{(2)} = e^{A^{[2]}}$.

Considere o seguinte sistema

$$x' = A(t)x, \tag{A.5}$$

em que $A(t)$ é uma matriz $n \times n$, T periódica na variável t e C^1 nesta mesma variável.

Teorema A.0.15 (Teorema de Floquet)**.** *Seja $X(t)$ uma matriz fundamental da equação (*A.5*).* Então existem matrizes $n \times n$ B e $Q(t)$, com B constante e $Q(t)$ T-periódica, tais que

$$X(t) = Q(t)e^{tB}.$$

Prova: Ver página 118 de [5]. □

Definição A.0.16. *Os autovalores $\rho_1, ..., \rho_2$ da matriz e^{TB} são chamados de multiplicadores característicos de $A(t)$ e os expoentes $\lambda_1, ..., \lambda_2$, em $\rho_i = e^{\lambda_i T}$, que são determinados apenas módulo $\frac{2\pi i}{T}$, são chamados de expoentes característicos de $A(t)$.*

Proposição A.0.17. *A solução nula do sistema (*A.5*)* é assintoticamente estável se, e somente se, os expoentes característicos de $A(t)$ têm parte real negativa.

Prova: Ver página 120 de [5]. □

Teorema A.0.18. *[Andronov e Witt] A solução periódica $p(t)$ de um sistema*

$$x' = f(x)$$

em que f é uma função C^1 definida em um aberto de $\mathbb{R}^n$, é estável no sentido de Liapunov e orbitalmente assintoticamente estável, se a equação variacional

$$y' = \frac{df}{dx}(p(t))y$$

tem $n-1$ multiplicadores característicos com valor absoluto menor que 1 (ou, equivalentemente, possui $n-1$ expoente característicos com parte real negativa).

Prova: Ver página 422 de [4]. $\square$

Proposição A.0.19. *Sejam ρ_i os multiplicadores característicos de $A(t)$ do sistema* (A.5) e sejam λ_i os expoentes, com $\rho_i = e^{\lambda_i T}$, $i = 1, \ldots, n$. Então um número complexo λ é um expoente característico de $A(t)$ se, e somente se, existe uma solução não trivial de (A.5) da forma $e^{\lambda t} p(t)$ em que $p(t+T) = p(t)$. Em particular existe uma solução periódica de período T (ou $2T$) se, e somente se, existe um multiplicador igual a 1 ou -1 (ou, equivalentemente, um expoente característico nulo).

Prova: Se $p(t+T) = p(t) \neq 0$ e $e^{\lambda t} p(t)$ é solução de (A.5) então, pelo teorema de Floquet, existe $x_0 \neq 0$ tal que

$$e^{\lambda t} p(t) = Q(t) e^{tB} x_0.$$

Portanto

$$p(t) = e^{-\lambda t} Q(t) e^{tB} x_0 = e^{-\lambda (t+T)} Q(t) e^{(t+T)B} x_0 = p(t+T).$$

Ou seja

$$Q(t) e^{tB} [e^{TB} - e^{\lambda T} I] x_0 = 0.$$

Logo

$$\det(e^{TB} - e^{\lambda T} I) = 0.$$

Isto mostra que λ é um expoente característico. Reciprocamente, se λ é um expoente característico, então existe vetor não nulo x_0 tal que $Bx_0 = \lambda x_0$. Como

$$e^{tB}x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tB)^n}{n!}x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B^n x_0}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda^n x_0}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^n}{n!}x_0 = e^{\lambda t}x_0$$

para todo t, então $Q(t)e^{tB}x_0 = Q(t)x_0e^{\lambda t}$ é a solução desejada com $p(t) = Q(t)x_0$. $\square$

Proposição A.0.20. *Se A é uma matriz 3×3, com autovalores α, β e δ, então $\alpha+\beta$, $\alpha+\delta$ e $\beta+\delta$ são autovalores de $A^{[2]}$.*

Prova: Seja

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix},$$

pelo teorema espectral existe matriz inversível P tal que $PB = AP$. Então

$$P(I+hB) = (i+hA)P.$$

pela equação (A.1)

$$P^{(2)}(I+hB)^{(2)} = (i+hA)^{(2)}P^{(2)}$$

logo

$$P^{(2)}D((I+hB)^{(2)})|_{h=0} = D((i+hA)^{(2)})|_{h=0}P^{(2)},$$

ou seja

$$P^{(2)}B^{[2]} = A^{[2]}P^{(2)}.$$

Como comentamos anteriormente $P^{(2)}$ é inversível, portanto $A^{[2]}$ é semelhante a $B^{[2]}$. Pela equação (A.2)

$$B^{[2]} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\delta & 0 \\ 0 & 0 & \beta+\delta \end{pmatrix}$$

Portanto $\alpha+\beta$, $\alpha+\delta$ e $\beta+\delta$ são autovalores de $A^{[2]}$. $\square$

Teorema A.0.21. *Uma condição suficiente para que uma órbita periódica $\gamma = \{p(t) : 0 \leq t \leq \omega\}$ de $x' = f(x)$ em que $f \in C^1(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$ ser assintoticamente estável é que o sistema linear*

$$y' = \frac{df}{dx}^{[2]}(p(t))y \tag{A.6}$$

seja assintoticamente estável.

Prova: A equação variacional

$$y' = \frac{df}{dx}(p(t))y \tag{A.7}$$

é um sistema linear com matriz $\frac{df}{dx}(p(t))$ $\omega-$periódica. Pelo teorema de Floquet uma matriz fundamental $Y(t)$ deste sistema pode ser escrita da seguinte forma

$$Y(t) = Q(t)e^{tB},$$

em que $Q(t)$ é uma matriz 3×3 $\omega-$periódica e B é uma matriz 3×3 constante. Note que $y = p'(t)$ é uma solução não trivial de (A.7), pois como $p'(t) = f(p(t))$ então

$$p''(t) = \frac{df}{dx}(p(t))p'(t).$$

Do fato que $p(t)$ é ω-periódica, segue pela proposição A.0.19, que a matriz $\frac{df}{dx}(p(t))$ possui um expoente característico igual a zero. Pelo teorema A.0.18, γ é assintoticamente estável se os dois expoentes característicos restantes de $\frac{df}{dx}(p(t))$, α e β, têm parte real negativa. Como $Y(t)$ é matriz solução de (A.7), segue, pela proposição A.0.14, que $Y^{(2)}(t)$ é matriz solução de (A.6). Das equações (A.1),(A.4) e (A.6) temos que

$$Y^{(2)}(t) = Q^{(2)}(t)e^{tB^{[2]}}.$$

Como consequência da proposição A.0.20 os expoentes característicos de $\frac{df}{dx}^{[2]}(p(t))$, que são autovalores de $B^{[2]}$, são α, β e $\alpha+\beta$. Se o sistema (A.6) é assintoticamente estável, então pela proposição A.0.17 α, β e $\alpha+\beta$ têm parte real negativa, logo, pelo teorema A.0.18 γ é assintoticamente estável em relação ao sistema (A.7). $\square$

Referências Bibliográficas

[1] L. Esteva and C. Vargas, *Analysis of a Dengue Disease Transmission Model*, Mathematical Biosciences, **150**, 131-151 (1998).

[2] M. Y. Li and J. S. Muldowney, *Global Stability for the SEIR Model i Epidemiology*, Mathematical Biosciences, **125**, 155-164 (1995).

[3] J. S. Muldowney, *Compound Matrices and Ordinary Differential Equations*, J. Math., **20**, number 4, 857-872 (1990).

[4] W. Haln, *Stability of Motion*, Springer-Verlag, New York (1967).

[5] , J. K. Hale, *Ordinary Differential Equation*, Wiley-Interscience New York, 1969.

[6] M. W. Hirsch, *Systems of Differential Equations Which Are Competitive or Cooperative. I: Limit Sets*, SIAM J. Math. Anal., **13**, 167-179 (1982).

[7] M. W. Hirsch, *Systems of Differential Equations Which Are Competitive or Cooperative. II: Convergence almost everywhere*, SIAM J. Math. Anal., **16**, 423-439.

[8] M. W. Hirsch, *Systems of Differential Equations Which Are Competitive or Cooperative. III: Competing Species*, Nonlinearity, **1**, 051-71 (1988).

[9] M. W. Hirsch, *Systems of Differential Equations Which Are Competitive or Cooperative. IV: Structural Stability in Three-Dimensional Systems*, SIAM J. Math. Anal., **21**, 1225-1234 (1990).

[10] S. Smale, *On the Differential Equations of Species in Competition*, J., Math., Biol., **3**, 4-7 (1976).

[11] H. L. Smith, *Monotone Dynamical Systems: An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems*, Mathematical surveys and monographs, **41**, AMS, Providence, Rhode Island (1995).

[12] H. L. Smith, *Systems of Differential Equations Wich Generate a Order Preserving Flow. A Survey of Results*, SIAM Rev. **30**, number 1 (1998).

[13] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (1942).

[14] J. V. Uspensky, *Theory of Equations*, McGraw, New York (1948).