Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Doutorado em Matemática

Aplicações absolutamente somantes e generalizações do Teorema da Dominação de Pietsch

Joedson Silva dos Santos

Recife 2011

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Doutorado em Matemática

Aplicações absolutamente somantes e generalizações do Teorema da Dominação de Pietsch

*Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade
Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do
título de Doutor em Matemática.*

Joedson Silva dos Santos

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Agosto de 2011

Recife-PE

Catálogo na fonte
Biblioteca Jane Souto Maior, CRB4-571

Santos, Joedson Silva dos
Aplicações absolutamente somantes e generalizações
do teorema da dominação de Pietsch / Joedson Silva dos
Santos - Recife: O Autor, 2011.
xi, 73 folhas

Orientador: Daniel Marinho Pellegrino.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco.
CCEN, Matemática, 2011.

Inclui bibliografia.
1. Análise funcional. I. Pellegrino, Daniel Marinho
(orientador) II. Título.

515.7

CDD (22. ed.)

MEI2011 – 124

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado:

Daniel Marinho Pellegrino *UFPB*
Orientador

Claudio Rodrigo Cuevas Hénríquez, *UFPE*

Geraldo Márcio de Azevedo Botelho, *UFU*

Valdir Antonio Menegatto, *USP*

Jorge Julio Mujica Ascui, *UNICAMP*

**APLICAÇÕES ABSOLUTAMENTE SOMANTES E
GENERALIZAÇÕES DO TEOREMA DA DOMINAÇÃO DE PIETSCH.**

Por

Joedson Silva dos Santos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415 – Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Agosto – 2011

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente aos meus familiares, em especial à minha esposa, Joilma, por simplesmente existir e estar ao meu lado.

Ao meu orientador Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino, por quem tenho um sincero respeito e uma imensa admiração, que me ajudou de várias maneiras diferentes, não só na matemática.

Aos professores da pós-graduação da UFPE, especialmente a Fernando Cardoso, Aron, Ramon e Hildeberto.

Aos colegas da pós-graduação, em especial, aos amigos Adecarlos, Alejandro, André Ventura, Bruno, Joilson, Lucas, Paulo, Thiago e Zaqueu pelas valiosas experiências que pudemos compartilhar, não somente nos estudos diários, como também em todos os outros momentos que estivemos juntos.

Ao meu colega de graduação Ailton por até hoje mantermos uma grande amizade e pelos conselhos que ele sempre tem me dado.

Ao casal Thiago e Tatiane por terem me acolhido em Recife.

A todos os meus colegas da Universidade Federal de Sergipe, Campus Itabaiana, em particular ao rubro-negro Éder Mateus, grande companheiro e conselheiro.

À Escola Dom Bosco da cidade de Santa Rita, Paraíba, onde tive o prazer de estudar. Em especial à diretora, Tia Penhinha, a quem sempre serei grato.

Aos meus colegas do ensino médio Helton Queen, Osmar Queiroz, Vinícius, Hugo, Maxuel e Fabian. Em particular, a Joab que, além de amigo, é como um irmão.

À Capes e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho avaliamos várias extensões multilineares do conceito de operadores absolutamente somantes segundo algumas propriedades que consideramos importantes; demonstramos que existem classes maximais e minimais com as propriedades destacadas. Em outra direção, caracterizamos as aplicações arbitrárias não-lineares $f : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Y$ entre espaços de Banach que satisfazem um teorema de dominação do tipo Pietsch em torno de um ponto arbitrário $(a_1, \dots, a_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$. Além disso, demonstramos uma nova versão do Teorema de Dominação de Pietsch, que generaliza abordagens recentes e mostra que o Teorema da Dominação de Pietsch Unificado apresentado em [20] é ainda válido com duas hipóteses a menos.

Palavras-Chave:

Operadores absolutamente somantes, ideais de operadores, Teorema da Dominação de Pietsch, aplicações absolutamente somantes, espaços de Banach.

Abstract

In this work we evaluate various multilinear extensions of the concept of absolutely summing operators by considering some properties we believe are important; we prove there are maximal and minimal classes with such properties. In another direction, we characterize the arbitrary nonlinear mappings $f : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Y$ between Banach spaces that satisfy a quite natural Pietsch Domination-type theorem around a given point $(a_1, \dots, a_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$. We also prove a new version of the Pietsch Domination Theorem which generalizes recent approaches and shows that the Unified Pietsch Domination Theorem presented in [20] holds true with two hypotheses less.

Key-Words:

Absolutely summing operators, operator ideals, Pietsch Domination Theorem, absolutely summing mappings, Banach spaces.

Sumário

1	Generalizações multilineares do conceito de operadores absolutamente somantes	1
1.1	Teoria linear dos operadores absolutamente somantes	1
1.2	Extensões multilineares do conceito de operadores absolutamente somantes .	6
1.3	Extensões desejáveis do ideal dos operadores absolutamente somantes . . .	16
1.4	Anexo: Algumas propriedades dos operadores quase-absolutamente p -somantes	28
2	Generalizações do Teorema da Dominação de Pietsch	36
2.1	Somabilidade de aplicações não-lineares	37
2.2	O Teorema da Dominação de Pietsch Generalizado (TDPG)	45
2.3	Anexo: A compacidade do conjunto das medidas regulares de probabilidade .	51
3	Recuperando Teoremas da Dominação de Pietsch	55
3.1	O TDP Unificado	55
3.2	Revisitando o Teorema da Dominação de Pietsch Unificado (TDPU)	57
3.3	O TDP para aplicações multilineares dominadas	60
3.4	O TDP para operadores multilineares Cohen fortemente q -somantes	61
3.5	O TDP para polinômios m -homogêneos Cohen fortemente q -somantes	64
3.6	Uma aplicação do TDPG para aplicações arbitrárias	66

Introdução

Em 1950, A. Dvoretzky e C. A. Rogers [28] resolveram um problema de longa data na Teoria dos Espaços de Banach: mostraram que em todo espaço de Banach de dimensão infinita existem séries incondicionalmente convergentes que não são absolutamente convergentes. Este resultado resolveu o Problema 122 do livro *The Scottish book* [42] (o problema foi levantado por S. Banach em [6, p. 40]).

Este resultado despertou o interesse de A. Grothendieck que, em [31], apresentou uma demonstração diferente para o Teorema de Dvoretzky-Rogers. O “Résumé de la théorie des Produits métrique tensoriels topologiques” de Grothendieck, juntamente com a sua tese de doutorado, podem ser considerados, em certo sentido, como o berço da teoria dos ideais de operadores.

O conceito de operadores lineares absolutamente p -somantes é devido a A. Pietsch [54] e a noção de operadores (p, q) -somantes é devida a B. Mitiagin e A. Pełczyński [43]. Outro marco desta teoria foi o trabalho de J. Lindenstrauss e A. Pełczyński [37], que traduziu as idéias de Grothendieck, que estavam numa linguagem tensorial, para a linguagem de operadores somantes e mostrou a beleza intrínseca da teoria e a riqueza de suas aplicações.

Com base na teoria linear, é natural que imaginemos uma teoria multilinear construída indutivamente a partir da teoria linear clássica; porém a extensão de técnicas lineares para o ambiente não-linear é, em muitos casos, uma tarefa bastante desafiadora, pois os argumentos lineares são às vezes ineficazes em um contexto mais geral.

Os operadores multilineares absolutamente somantes e os polinômios homogêneos entre

espaços de Banach foram inicialmente concebidos por A. Pietsch [55, 56] na década de 80. O trabalho de Pietsch e o relatório de pesquisa de R. Alencar e M. C. Matos [3] são normalmente citados como os precursores da teoria não-linear dos operadores absolutamente somantes. Na última década, este tema atraiu a atenção de muitos autores e vários conceitos relacionados à somabilidade de operadores não-lineares foram introduzidos; esta linha de pesquisa, além de seus interesses intrínsecos, destacou novas questões na teoria de multi-ideais, o que contribuiu para a revitalização do tema (veja [10, 11, 14, 22, 23]).

Nas últimas décadas, várias classes de operadores multilineares têm sido investigadas como extensões do conceito linear dos operadores absolutamente somantes (para trabalhos comparando essas diferentes classes, veja [21, 51]). Dependendo das propriedades que uma determinada classe possui, esta classe é geralmente comparada com o ideal linear original e, em certo sentido, qualificada como uma boa (ou má) extensão do ideal linear. Nesse sentido, os ideais de operadores multilineares dominados e múltiplo somantes são em geral classificados como boas generalizações dos operadores lineares absolutamente somantes. É claro que, a avaliação de quais propriedades são importantes ou não tem um fator subjetivo, mas algumas propriedades clássicas dos operadores absolutamente somantes são naturalmente esperadas no contexto de uma generalização multilinear minimamente razoável.

Um dos teoremas centrais da teoria linear de operadores absolutamente somantes é o Teorema da Dominação de Pietsch, demonstrado por A. Pietsch em 1967, que caracteriza os operadores absolutamente p -somantes.

Sejam $1 \leq p < \infty$ e $u : E \rightarrow F$ um operador linear entre espaços de Banach. Dizemos que u é **absolutamente p -somante** se $(u(x_n))_{n=1}^{\infty} \in l_p(F)$ sempre que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p^w(E)$.

Teorema da Dominação de Pietsch - Se E e F são espaços de Banach, um operador linear $T : E \rightarrow F$ é absolutamente p -somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade μ na σ -álgebra dos borelianos da bola unitária fechada do dual de E com a topologia fraca estrela, $(B_{E^*}, \sigma(E^*, E))$, tal que

$$\|T(x)\| \leq C \left(\int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $x \in E$.

O avanço da teoria não-linear dos operadores absolutamente somantes leva à busca de versões não-lineares do Teorema da Dominação de Pietsch- TDP (às vezes descrito como Teorema da Fatorização de Pietsch), reconhecido também por estabelecer uma surpreendente conexão entre a teoria de operadores somantes e a teoria da medida. Devido à sua grande importância na Teoria dos Espaços de Banach, o TDP foi redescoberto em diferentes contextos (por exemplo [1, 18, 21, 27, 29, 30, 38, 40, 44]) e, por esta razão, em [20], uma abordagem unificada do TDP foi apresentada como uma tentativa de mostrar que todos os teoremas conhecidos do tipo Pietsch eram casos particulares de uma versão unificada. A contribuição do presente trabalho no contexto não-multilinear visa caracterizar aplicações arbitrárias não-multilineares que satisfazem um teorema de dominação do tipo Pietsch bastante natural em um determinado ponto, assim como generalizar o Teorema da Dominação de Pietsch, melhorando a versão unificada do TDP recentemente obtida em [20].

Em resumo, este trabalho tem dois objetivos distintos principais:

(i) eleger propriedades que consideramos importantes para os multi-ideais relacionados ao conceito de operador absolutamente somante e investigar a existência de classes (maximais e minimais) que satisfazem essas propriedades.

(ii) generalizar versões recentes do Teorema da Dominação de Pietsch para um contexto completamente não-linear.

Capítulo 1

Generalizações multilineares do conceito de operadores absolutamente somantes

1.1 Teoria linear dos operadores absolutamente somantes

Em todo este texto, $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Os espaços vetoriais sempre serão considerados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. O dual topológico de um espaço de Banach E será denotado por E^* e a bola unitária fechada de E é denotada por B_E .

Definição 1.1.1 *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e E um espaço de Banach. Uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é **fortemente p -somável** se a seqüência de escalares correspondente $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ estiver em l_p .*

Denotamos por $l_p(E)$ o espaço vetorial de todas as seqüências fortemente p -somáveis em E . Em $l_p(E)$ definimos naturalmente a seguinte norma

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p := \left(\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $p = \infty$ definimos

$$l_\infty(E) := \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}; \sup_n \|x_n\| < \infty \right\},$$

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty := \sup_n \|x_n\|.$$

O espaço $l_p(E)$ com esta norma torna-se um espaço de Banach.

Definição 1.1.2 *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e E um espaço de Banach. Uma seqüência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E é **fracamente p -somável** se a seqüência de escalares $(\varphi(x_n))_{n=1}^\infty$ estiver em l_p para todo $\varphi \in E^*$.*

Denotamos por $l_p^w(E)$ o conjunto de todas as seqüências fracamente p -somáveis. Também temos uma norma natural em $l_p^w(E)$ que é dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.1)$$

Se $p = \infty$, definimos

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{w,\infty} = \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \|(\varphi(x_n))_{n=1}^\infty\|_\infty.$$

Não é difícil mostrar que $l_\infty^w(E) = l_\infty(E)$.

O espaço $l_p^w(E)$ com esta norma também é um espaço de Banach.

Se $1 \leq p < \infty$, muitas vezes é útil trabalhar com o espaço

$$l_p^u(E) = \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in l_p^w(E); \lim_{n \rightarrow \infty} \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{w,p} = 0 \right\}.$$

Não é difícil mostrar que $l_p^u(E)$ é um subespaço fechado de $l_p^w(E)$ e portanto $l_p^u(E)$ é um espaço de Banach. No caso em que $p = 1$ é um fato conhecido da teoria que $l_1^u(E)$ é, precisamente, o espaço vetorial formado pelas seqüências incondicionalmente somáveis em E (veja [24, 59]).

Definição 1.1.3 *Sejam $1 \leq p, q < \infty$ e $u : E \rightarrow F$ um operador linear entre espaços de Banach. Dizemos que u é **absolutamente $(p; q)$ -somante** (ou **$(p; q)$ -somante**) se $(u(x_n))_{n=1}^\infty \in l_p(F)$ sempre que $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_q^w(E)$.*

Neste caso, é possível definir o operador induzido

$$\begin{aligned} \hat{u} : l_q^w(E) &\longrightarrow l_p(F) \\ (x_n)_{n=1}^\infty &\longmapsto (u(x_n))_{n=1}^\infty. \end{aligned}$$

Denotamos por $\prod_{p,q}(E; F)$ o espaço vetorial formado por todos os operadores $(p; q)$ -somantes de E em F , o qual é um espaço de Banach com a norma $\pi_{p,q}(u) := \|\hat{u}\|$. Quando $p = q$, escrevemos $\prod_p(E; F)$ no lugar de $\prod_{p,p}(E; F)$ e $\pi_p(u)$ no lugar de $\pi_{p,p}(u)$.

O próximo resultado traz algumas caracterizações bastante úteis para operadores absolutamente $(p; q)$ -somantes (veja [24, 25, 59]).

Proposição 1.1.1 *Seja $u \in \mathcal{L}(E; F)$. São equivalentes:*

- (i) u é $(p; q)$ -somante;
- (ii) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.2)$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_n$ em E e n natural;

- (iii) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^\infty \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^\infty |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^\infty \in l_q^w(E)$.

(iv) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^\infty \in l_q^u(E)$.

(v) $(u(x_k))_{k=1}^\infty \in l_p(F)$ sempre que $(x_k)_{k=1}^\infty \in l_q^u(E)$.

Além disso, $\pi_{p,q}(u)$ é o ínfimo dos K tais que a desigualdade (1.2) continua válida.

Definição 1.1.2 Um **ideal de operadores** $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$, formada por todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach, tal que, para quaisquer espaços de Banach E e F , a componente $\mathcal{I}(E; F) := \mathcal{L}(E; F) \cap \mathcal{I}$ satisfaz:

(i) $\mathcal{I}(E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; F)$ que contém os operadores de posto finito.

(ii) A propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(E; F)$, $v \in \mathcal{I}(F; G)$ e $t \in \mathcal{L}(G; H)$, então a composição tvu está em $\mathcal{I}(E; H)$.

Definição 1.1.3 Um **ideal normado de operadores** $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de operadores $\mathcal{I}$ munido da função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)$ tal que:

(i) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita a $\mathcal{I}(E; F)$ é uma norma para quaisquer espaços de Banach E e F .

(ii) $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$, com $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $id_{\mathbb{K}}(x) = x$.

(iii) Se $u \in \mathcal{L}(E; F)$, $v \in \mathcal{I}(F; G)$, e $t \in \mathcal{L}(G; H)$, então $\|tvu\|_{\mathcal{I}} \leq \|t\| \|v\|_{\mathcal{I}} \|u\|$.

Um ideal normado é um **ideal de Banach** (ou **ideal completo**) se, para todos espaços de Banach E e F , as componentes $(\mathcal{I}(E; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ forem completas.

Para maiores detalhes da teoria de ideais de operadores, veja [26, 54].

O espaço vetorial dos operadores lineares absolutamente (p, q) -somantes é um ideal completo (veja [25, p. 198]):

Teorema 1.1.4 Se $1 \leq q \leq p < \infty$, então $(\prod_{p,q}, \pi_{p,q})$ é um ideal de Banach.

Para um panorama completo da teoria linear dos operadores absolutamente somantes, sugerimos como referência o excelente livro [25]. A seguir vamos mencionar alguns dos principais resultados desta teoria: Teorema de Dvoretzky-Rogers, Teorema de Inclusão, Teorema l_1 - l_2 de Grothendieck (Lindenstrauss-Pełczyński) e o Teorema da Dominação de Pietsch.

O Teorema de Dvoretzky-Rogers pode ser visto no contexto dos operadores absolutamente somantes da seguinte forma:

Teorema 1.1.5 (Dvoretzky-Rogers, 1950) *Se $p \geq 1$, então $\prod_p (E; E) = \mathcal{L}(E; E)$ se, e somente se, $\dim E < \infty$.*

De acordo com o resultado acima, é natural indagar sobre a existência de algum p e espaços de Banach E e F de dimensão infinita para os quais

$$\prod_p (E; F) = \mathcal{L}(E; F).$$

O próximo resultado clássico, devido a A. Grothendieck responde à pergunta acima para $E = l_1$ e $F = l_2$. O enunciado abaixo, devido a J. Lindenstrauss e A. Pełczyński [37], é diferente da versão original de Grothendieck:

Teorema 1.1.6 (Teorema de Grothendieck l_1 - l_2) *Todo operador linear contínuo $u : l_1 \rightarrow l_2$ é absolutamente $(1, 1)$ -somante, isto é,*

$$\mathcal{L}(l_1; l_2) = \prod_1 (l_1; l_2).$$

Este tipo de resultado é conhecido como “teorema da coincidência”. As classes de operadores absolutamente (p, q) -somantes obedecem a uma certa hierarquia de inclusão, baseada nos parâmetros p, q , como mostra o seguinte resultado essencialmente devido a Kwapien [36]:

Teorema 1.1.7 (Teorema de Inclusão - Kwapien, 1968) *Sejam E e F espaços de*

Banach. Suponha que $1 \leq q_j \leq p_j < \infty$ ($j = 1, 2$) satisfazem

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 \leq q_2 \\ p_1 \leq p_2 \\ \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2} \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Então

$$\prod_{p_1, q_1} (E; F) \subset \prod_{p_2, q_2} (E; F)$$

e, para cada $u \in \prod_{p_1, q_1} (E; F)$, temos $\pi_{p_2, q_2}(u) \leq \pi_{p_1, q_1}(u)$.

Finalmente, enunciamos o Teorema da Dominação de Pietsch, que caracteriza os operadores absolutamente somantes através de medidas de probabilidade:

Teorema 1.1.4 (Teorema da Dominação de Pietsch, 1967) *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $u : E \rightarrow F$ um operador linear entre espaços de Banach. Então u é absolutamente p -somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade μ sobre a σ -álgebra de Borel de B_{E^*} , com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.4)$$

para todo $x \in E$. Neste caso, $\pi_p(u)$ é a menor das constantes C tais que (1.4) ocorre.

1.2 Extensões multilineares do conceito de operadores absolutamente somantes

Sejam n um número inteiro positivo e $E_1, \dots, E_n, F$ espaços de Banach. O espaço de todas as aplicações n -lineares contínuas $T : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$, denotado por $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, é um espaço de Banach com a norma natural

$$\|T\| = \sup\{\|T(x_1, \dots, x_n)\| : \|x_j\| \leq 1, j = 1, \dots, n\}.$$

Se $E_1 = \dots = E_n = E$ escrevemos $\mathcal{L}(^n E; F)$.

Definição 1.2.1 Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é dita de **tipo finito** se puder ser escrita como

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^m \varphi_j^{(1)}(x_1) \cdots \varphi_j^{(n)}(x_n) b_j,$$

com $b_j \in F$, $\varphi_j^{(k)} \in E_k^*$ e $(j, k) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$.

Definição 1.2.2 Um **ideal de aplicações multilineares (ou multi-ideal)** $\mathcal{M}$ é uma subclasse da classe de todas as aplicações multilineares entre espaços de Banach tal que para todo n e $E_1, \dots, E_n, F$ as componentes $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F) := \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \cap \mathcal{M}$ satisfazem:

(i) $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ que contém as aplicações n -lineares de tipo finito.

(ii) Se $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ para $j = 1, \dots, n$ e $\varphi \in \mathcal{L}(F; H)$, então $\varphi \circ A \circ (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{M}(G_1, \dots, G_n; H)$.

Quando existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty[$ satisfazendo

(i') $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ restrito a $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é uma norma (resp. quase-norma) para todo $E_1, \dots, E_n, F$ e todo número natural n ,

(ii') $\|A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}; A(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n\|_{\mathcal{M}} = 1$ para todo n ,

(iii') Se $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ para $j = 1, \dots, n$ e $\varphi \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$\|\varphi \circ A \circ (u_1, \dots, u_n)\|_{\mathcal{M}} \leq \|\varphi\| \|A\|_{\mathcal{M}} \|u_1\| \dots \|u_n\|,$$

$\mathcal{M}$ é chamado de **ideal normado (resp. quase-normado) de aplicações multilineares**. Um **ideal normado** é um ideal de Banach, ou ideal completo, (resp. quase-Banach) se, para todos espaços de Banach $E_1, \dots, E_n$ e F , as componentes $(\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ forem completas.

Para mais detalhes da teoria, mencionamos [11, 22, 23].

A seguir vamos apresentar várias classes de aplicações multilineares relacionadas com o conceito de operadores absolutamente somantes.

Definição 1.2.3 Se $p \geq 1$, uma aplicação n -linear $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é dita **p -dominada** se $\left(T\left(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{\frac{p}{n}}(F)$ sempre que $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(E_k)$ e $k = 1, \dots, n$. Neste caso escrevemos $T \in \mathcal{L}_{d,p}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Este conceito foi essencialmente introduzido por Pietsch e explorado em seguida em [3, 40, 60] e tem forte semelhança com o ideal linear original dos operadores absolutamente somantes. Durante algum tempo (antes do surgimento da classe operadores multilineares múltiplo somantes), essa classe era considerada como a abordagem multilinear mais natural do conceito de operador absolutamente somante (no entanto, como ficará claro em breve, essa classe é, em certo sentido, muito pequena). A terminologia “ p -dominada” justifica-se pelo Teorema da Dominação de Pietsch, que também vale nesse contexto (uma demonstração detalhada pode ser encontrada em [48]) :

Teorema 1.2.4 (Pietsch, Geiss, 1985) ([30]) $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é p -dominada se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e medidas regulares de probabilidade de Borel μ_k em $B_{X_k^*}$ (com a topologia fraca estrela), tais que

$$\|T(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})\| \leq C \prod_{k=1}^n \left(\int_{B_{X_k^*}} |\varphi(x^{(k)})|^p d\mu_k(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todos $x^{(k)} \in E_k$ e $k = 1, \dots, n$.

Corolário 1.2.1 Se $1 \leq p \leq q < \infty$, então $\mathcal{L}_{d,p} \subset \mathcal{L}_{d,q}$.

É um fato bem conhecido da teoria que as aplicações multilineares p -dominadas satisfazem um teorema do tipo Dvoretzky-Rogers ($\mathcal{L}_{d,p}({}^n E; E) = \mathcal{L}({}^n E; E)$ se, e somente se, $\dim E < \infty$). Resultados recentes mostram que esta classe é muito pequena, no sentido de que situações de coincidência são quase impossíveis de ocorrer:

Teorema 1.2.5 (Jarchow, Palazuelos, Pérez-García e Villanueva, 2007)

([34]) Para todo $n \geq 3$, todo $p \geq 1$ e todo espaço de Banach de dimensão infinita E existe $T \in \mathcal{L}({}^n E; \mathbb{K})$ que não é p -dominada.

Definição 1.2.6 Se $p \geq 1$, uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é dita **p -semi-integral** (e escrevemos $T \in \mathcal{L}_{si,p}(E_1, \dots, E_n; F)$) se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^m \left\| T \left(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)} \right) \right\|^p \right)^{1/p} \leq C \left(\sup_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*}} \sum_{j=1}^m \left| \varphi_1 \left(x_j^{(1)} \right) \dots \varphi_n \left(x_j^{(n)} \right) \right|^p \right)^{1/p} \quad (1.5)$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_j^{(l)} \in E_l$ com $l = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. O ínfimo dos C que satisfaz (1.5) define uma norma em $\mathcal{L}_{si,p}(E_1, \dots, E_n; F)$, representada por $\|\cdot\|_{si,p}$.

Esse ideal é proveniente do relatório de pesquisa de R. Alencar e M. C. Matos [3] e foi explorado em [21]. Como no caso dos operadores multilineares p -dominados, um Teorema de Dominação de Pietsch é válido neste contexto (para uma demonstração veja [21]):

Teorema 1.2.7 (Alencar, Matos, 1989 e Çaliskan, Pellegrino, 2007) Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é **p -semi-integral** se existem uma constante $C \geq 0$ e uma medida de probabilidade μ sobre a σ -álgebra de Borel de $B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*}$, com a topologia fraca estrela, tais que

$$\|T(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})\| \leq C \left(\int_{B_{E_1^*} \times \dots \times B_{E_n^*}} |\varphi_1(x^{(1)}) \dots \varphi_n(x^{(n)})|^p d\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \right)^{1/p} \quad (1.6)$$

para todos $x^{(j)} \in E_j$ e $j = 1, \dots, n$.

Definição 1.2.8 Se $p \geq 1$, uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é dita **múltiplo p -somante** se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j_1, \dots, j_n=1}^m \left\| T \left(x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_n}^{(n)} \right) \right\|^p \right)^{1/p} \leq C \prod_{k=1}^n \left\| \left(x_j^{(k)} \right)_{j=1}^m \right\|_{p,w} \quad (1.7)$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ e $x_j^{(k)} \in E_k$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$. Neste caso escrevemos $T \in \mathcal{L}_{m,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ e o ínfimo dos C que satisfazem (1.7) define uma norma em $\mathcal{L}_{m,p}(E_1, \dots, E_n; F)$, representada por $\|\cdot\|_{m,p}$.

O conceito de aplicações múltiplo p -somantes foi introduzido em um relatório de pesquisa do Mário Carvalho de Matos, em 1992 [39], sob a terminologia de “*aplicações multilineares estritamente absolutamente somantes*”. A motivação de Matos era uma questão de Pietsch sobre a eventual coincidência dos funcionais n -lineares de Hilbert-Schmidt e dos espaços dos funcionais n -lineares absolutamente $(s; r_1, \dots, r_n)$ -somantes para certos valores de s e r_k , $k = 1, \dots, n$. Neste relatório são introduzidas as primeiras propriedades dessa classe, bem como as relações com os operadores multilineares de Hilbert-Schmidt e uma solução para a questão de Pietsch no contexto das aplicações multilineares estritamente absolutamente somantes.

Porém, este relatório de pesquisa não foi publicado e só em 2003 Matos [41] publicou uma versão melhorada deste relatório, agora usando a terminologia de *aplicações multilineares completamente p -somantes (fully p -summing)*. Ao mesmo tempo, e de forma independente, Fernando Bombal, David Pérez-García e Ignacio Villanueva [9, 52] apresentaram e exploraram o mesmo conceito, sob a terminologia de *operadores multilineares múltiplo p -somantes (multiple p -summing)*.

Desde então essa classe tem recebido atenção especial, sendo considerada por diversos autores como a generalização multilinear mais importante do ideal dos operadores absolutamente somantes. A razão para o sucesso desta generalização dos operadores absolutamente somantes é, talvez, a combinação de boas propriedades não triviais, como teoremas de coincidência semelhantes aos da teoria linear (veja [9, 12, 17]), e problemas desafiadores como o teorema de inclusão (veja [12, 13, 49, 50]).

Contribuições importantes para a teoria dos operadores multilineares múltiplo somantes foram dadas nas teses de David Pérez-García e Marcela Souza, ambas defendidas em 2003. A seguir, definiremos cotipo e listaremos alguns resultados importantes da teoria.

Definição 1.2.9 *Sejam $2 \leq q \leq \infty$ e $(r_j)_{j=1}^\infty$ as funções de Rademacher. Um espaço de Banach X tem cotipo q se existir uma constante $C \geq 0$ tal que para qualquer escolha $n \in \mathbb{N}$*

e $x_1, \dots, x_n \in X$, tivermos

$$\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) x_j \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.8)$$

Quando $q = \infty$ substituímos $\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}}$ por $\max_{1 \leq j \leq n} \|x_j\|$.

Teorema 1.2.10 (Pérez-García e Souza, 2003) ([49, 61]) *Se $n \geq 2$ e F tem cotipo finito q , então*

$$\mathcal{L}_{m,(q,1)}(E_1, \dots, E_n; F) = \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$$

para todos espaços de Banach $E_1, \dots, E_n$.

Teorema 1.2.11 (Pérez-García, 2003) ([49, 50]) *Se $n \geq 2$ e $1 \leq p \leq q < 2$, então*

$$\mathcal{L}_{m,p}(E_1, \dots, E_n; F) \subset \mathcal{L}_{m,q}(E_1, \dots, E_n; F).$$

Pérez-García também mostra que o resultado acima não pode ser ampliado no sentido de que para cada $q > 2$ existe $T \in \mathcal{L}_{m,p}({}^2l_1; \mathbb{K})$, para $1 \leq p \leq 2$, que não pertence a $\mathcal{L}_{m,q}({}^2l_1; \mathbb{K})$.

Quando F tem cotipo 2, o resultado pode ser um pouco melhorado:

Teorema 1.2.12 (Pérez-García, 2003) ([49, 50]) *Se $n \geq 2$ e $1 \leq p \leq q \leq 2$, então*

$$\mathcal{L}_{m,p}(E_1, \dots, E_n; F) \subset \mathcal{L}_{m,q}(E_1, \dots, E_n; F)$$

para todo espaço de Banach F de cotipo 2 e quaisquer espaços de Banach $E_1, \dots, E_n$.

Quando os espaços do domínio têm cotipo 2, as inclusões do Teorema 1.2.11 tornam-se coincidências (para uma demonstração simples citamos [13, 16]):

Teorema 1.2.13 (Botelho, Pellegrino, 2008 e Popa, 2009) ([16, 57]) *Se $n \geq 2$ e $1 \leq p, q < 2$, então*

$$\mathcal{L}_{m,p}(E_1, \dots, E_n; F) = \mathcal{L}_{m,q}(E_1, \dots, E_n; F)$$

para quaisquer espaços de Banach $E_1, \dots, E_n$ com cotipo 2 e todo espaço de Banach F .

A próxima definição é devida Lindenstrauss e Pełczyński.

Definição 1.2.14 ([37]) *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq \lambda < \infty$. Um espaço de Banach X é um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ se para cada subespaço de X de dimensão finita E , existe um subespaço de X de dimensão finita F , contendo E , tal que $d(E, l_p^{\dim F}) \leq \lambda$. Diremos que X é um espaço $\mathcal{L}_p$ se X for um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ para algum $\lambda \geq 1$.*

Recentemente, em [13] foi mostrado (usando interpolação complexa e um argumento de complexificação) que uma versão mais geral do Teorema 1.2.12 é válida quando os espaços do domínio são espaços $\mathcal{L}_\infty$:

Teorema 1.2.15 (Botelho, Michels, Pellegrino, 2010) *Seja $n \geq 2$ e sejam $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e $E_1, \dots, E_n$ espaços $\mathcal{L}_\infty$. Então*

$$\mathcal{L}_{m,p}(E_1, \dots, E_n; F) \subset \mathcal{L}_{m,q}(E_1, \dots, E_n; F)$$

para todo espaço de Banach F .

Teoremas de coincidência também são assuntos fecundos no contexto dos operadores múltiplos somantes. Por exemplo, D. Pérez-García mostrou que o Teorema de Grothendieck é válido para os operadores multilineares múltiplos somantes:

Teorema 1.2.16 (Pérez-García, 2003) ([49]) *Se $1 \leq p \leq 2$ e $n \geq 2$, então*

$$\mathcal{L}_{m,p}({}^n l_1; l_2) = \mathcal{L}({}^n l_1; l_2).$$

Definição 1.2.17 *Se $p \geq 1$, uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é dita **fortemente p -somante** se existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^m \left\| T \left(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)} \right) \right\|^p \right)^{1/p} \leq C \left(\sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})}} \sum_{j=1}^m \left| \phi \left(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)} \right) \right|^p \right)^{1/p} \quad (1.9)$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_j^{(k)} \in E_k$ com $k = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Neste caso escrevemos $T \in \mathcal{L}_{ss,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ e o ínfimo dos C que satisfaz (1.9) define uma norma em $\mathcal{L}_{ss,p}(E_1, \dots, E_n; F)$, representada por $\|\cdot\|_{ss,p}$.

O multi-ideal dos operadores multilineares fortemente p -somantes é devido a V. Dimant [27] e talvez seja a classe que melhor traduz as propriedades do ideal de operadores original para o contexto multilinear. Por exemplo, um teorema do tipo Grothendieck e um teorema do tipo Pietsch são válidos:

Teorema 1.2.18 (Dimant, 2003) ([27]) *Se $n \geq 2$, então*

$$\mathcal{L}(^n l_1; l_2) = \mathcal{L}_{ss,1}(^n l_1; l_2).$$

Teorema 1.2.19 (Dimant, 2003) ([27]) *$T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é fortemente p -somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel μ em $B_{(E_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} E_n)^*}$ (com a topologia fraca estrela), tais que*

$$\|T(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})\| \leq C \left(\int_{B_{(E_1 \otimes_{\pi} \dots \otimes_{\pi} E_n)^*}} |\varphi(x^{(1)} \otimes \dots \otimes x^{(n)})|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todos $x^{(k)} \in E_k$ e $k = 1, \dots, n$.

Definição 1.2.20 *Se $p \geq 1$, uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é dita **absolutamente p -somante no ponto** $(a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ se existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\left(T(a_1 + x_j^{(1)}, \dots, a_n + x_j^{(n)}) - T(a_1, \dots, a_n) \right)_{j=1}^{\infty} \in l_p(F) \quad (1.10)$$

sempre que $(x_j^{(k)})_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(E_k)$. O espaço vetorial formado pelas aplicações multilineares $T : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ que são absolutamente p -somantes no ponto $a = (a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ é denotado por $\mathcal{L}_{as,p}^{(a)}(E_1, \dots, E_n; F)$. Quando $a = 0$ denominamos T simplesmente de absolutamente p -somante e o respectivo espaço será representado por $\mathcal{L}_{as,p}(E_1, \dots, E_n; F)$.

O espaço vetorial formado pelas aplicações multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F que são absolutamente p -somantes em todo ponto $a \in E_1 \times \cdots \times E_n$ é denotado por $\mathcal{L}_{as,p}^{ev}(E_1, \dots, E_n; F)$.

À primeira vista, o conceito de operador multilinear absolutamente p -somante (tomando $a = 0$) parece ser uma generalização multilinear bastante natural dos operadores absolutamente somantes. No entanto, é fácil encontrar propriedades indesejáveis que fazem com que este ideal seja muito diferente do ideal linear.

A classe das aplicações multilineares absolutamente p -somantes, $\mathcal{L}_{as,p}$, apresenta muitas situações de coincidência e, em certo sentido, perde a essência do ideal de operadores lineares original. Por exemplo, o Teorema de Grothendieck é válido, mas há várias outras situações de coincidência sem um resultado análogo linear, como

$$\mathcal{L}_{as,1}({}^n l_2; F) = \mathcal{L}({}^n l_2; F) \quad (1.11)$$

para todo F e todo $n \geq 2$. Uma vez que (1.11) não é verdadeira para $n = 1$, chamaremos, a partir de agora, situações como esta de “situação de coincidência artificial”. Acreditamos que em uma extensão multilinear razoável do conceito linear dos operadores absolutamente somantes tal comportamento não deve ocorrer.

Outro fato surpreendentemente desta classe é que um teorema de inclusão é válido na direção oposta do que o esperado (ou seja, se p aumenta, o ideal diminui). O seguinte resultado é uma combinação de resultados de [35, Theorem 3 and Remark 2], [58, Corollary 4.6] e [13, Theorem 3.8 (ii)]:

Se $s > 1$, denotamos seu conjugado por s^* , isto é, $1 = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^*}$.

Teorema 1.2.21 (Junek et al., 2008, Botelho et al. 2010, Popa, 2010) *Sejam*

$E_1, \dots, E_n$ *espaços de Banach com cotipo s e $n \geq 2$ um inteiro positivo:*

(i) *Se $s = 2$, então*

$$\mathcal{L}_{as,q}(E_1, \dots, E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as,p}(E_1, \dots, E_n; F) \quad (1.12)$$

para quaisquer $1 \leq p \leq q \leq 2$ e todo espaço de Banach F .

(ii) Se $s > 2$, então

$$\mathcal{L}_{as,q}(E_1, \dots, E_n; F) \subset \mathcal{L}_{as,p}(E_1, \dots, E_n; F) \quad (1.13)$$

para quaisquer $1 \leq p \leq q < s^*$ e todo espaço de Banach F .

Em 2011 um resultado obtido independentemente por O. Blasco et al. ([8]) e A.T. Bernardino ([7]) generaliza substancialmente o resultado acima:

Teorema 1.2.22 (Blasco et al., 2011 e Bernardino, 2011) *Se $n \geq 2$ e $E_1, \dots, E_n$ têm cotipo s e*

$$1 \leq p \leq q < s^* \text{ se } s > 2$$

ou

$$1 \leq p \leq q \leq 2 \text{ se } s = 2,$$

então

$$\mathcal{L}_{as,q}(E_1, \dots, E_n; F) = \mathcal{L}_{as,(\frac{qp}{n(q-p)+p}; p, \dots, p)}(E_1, \dots, E_n; F)$$

para todo espaço de Banach F .

Definição 1.2.23 *Se $p \geq 1$, uma aplicação n -linear $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é dita **fortemente múltiplo p -somante** se existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j_1, \dots, j_n=1}^m \left\| T \left(x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_n}^{(n)} \right) \right\|^p \right)^{1/p} \leq C \left(\sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})}} \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^m \left| \phi \left(x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_n}^{(n)} \right) \right|^p \right)^{1/p} \quad (1.14)$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_{j_k}^{(k)} \in E_k$ com $k = 1, \dots, n$ e $j_k = 1, \dots, m$. Neste caso escrevemos $T \in \mathcal{L}_{sm,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ e o ínfimo dos C que satisfazem (1.14) define uma norma em $\mathcal{L}_{sm,p}(E_1, \dots, E_n; F)$, representada por $\|\cdot\|_{sm,p}$.

O multi-ideal dos operadores multilineares fortemente múltiplo p -somantes foi introduzido em [15], e contém os ideais $\mathcal{L}_{ss,p}$ e $\mathcal{L}_{m,p}$. Todas as boas propriedades de $\mathcal{L}_{ss,p}$

também são válidas nesta classe, exceto possivelmente versões do Teorema da Dominação de Pietsch (e teorema de inclusão), que são desconhecidas nesse contexto. O “tamanho” desta classe é potencialmente melhor do que os “tamanhos” de $\mathcal{L}_{ss,p}$ e $\mathcal{L}_{m,p}$ pois, apesar de conter essas duas classes, também é sabido que os teoremas de coincidência para a classe $\mathcal{L}_{sm,p}$ implicam em teoremas de coincidência para o caso linear.

Em [15, 21] são estabelecidas as seguintes relações de inclusão

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{d,p} &\subset \mathcal{L}_{si,p} \subset \mathcal{L}_{m,p} \subset \mathcal{L}_{as,p}^{ev} \subset \mathcal{L}_{as,p}, & (1.15) \\ \mathcal{L}_{d,p} &\subset \mathcal{L}_{si,p} \subset \mathcal{L}_{ss,p} \subset \mathcal{L}_{sm,p}, \\ \mathcal{L}_{d,p} &\subset \mathcal{L}_{si,p} \subset \mathcal{L}_{m,p} \subset \mathcal{L}_{sm,p}, \end{aligned}$$

todas elas de norma ≤ 1 .

1.3 Extensões desejáveis do ideal dos operadores absolutamente somantes

Dados E e F espaços de Banach e uma aplicação n -linear contínua $T \in \mathcal{L}(^n E; F)$, a aplicação

$$P : E \longrightarrow F : P(x) = T(x, x, \dots, x),$$

para todo $x \in E$, é chamada de **polinômio n -homogêneo contínuo**. O espaço de todos polinômios n -homogêneos contínuos de E em F será denotada por $\mathcal{P}(^n E; F)$, e torna-se uma espaço de Banach com a norma

$$\|P\| = \sup\{\|P(x)\| : \|x\| \leq 1\} = \inf\{C : \|P(x)\| \leq C \cdot \|x\|^n, \forall x \in E\}.$$

Definição 1.3.1 *Um ideal de polinômios (homogêneos) $\mathcal{Q}$ é uma subclasse da classe de todos polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todos os espaços de Banach E, F , as componentes $\mathcal{Q}(^n E; F) := \mathcal{P}(^n E; F) \cap \mathcal{Q}$ satisfazem:*

(i) $\mathcal{Q}(^n E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^n E; F)$ que contém os polinômios de tipo finito,

(ii) Se $P \in \mathcal{Q}(^n E; F)$, $\varphi_1 \in \mathcal{L}(G; E)$ e $\varphi_2 \in \mathcal{L}(F; H)$, então $\varphi_2 \circ P \circ \varphi_1 \in \mathcal{Q}(^n G; H)$.

Quando existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty[$ satisfazendo:

(i') $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ restrita a $\mathcal{Q}(^n E; F)$ é uma norma (resp. quase-norma) para todo espaço de Banach E and F e todo n ,

(ii') $\|P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}; P(x) = x^n\|_{\mathcal{Q}} = 1$ para todo n ,

(iii') Se $P \in \mathcal{Q}(^n E; F)$, $u \in \mathcal{L}(G; E)$ e $\varphi \in \mathcal{L}(F; H)$, então $\|\varphi \circ P \circ u\|_{\mathcal{Q}} \leq \|\varphi\| \|P\|_{\mathcal{Q}} \|u\|^n$,

$\mathcal{Q}$ é chamado de ideal normado (resp. quase-normado) de polinômios.

Para $n = 1$, escrevemos $\mathcal{M}(E; F)$ e $\mathcal{Q}(E; F)$ em vez de $\mathcal{M}(^1 E; F)$ e $\mathcal{Q}(^1 E; F)$.

Em [14] foi introduzida a noção de ideais de polinômios **fechados sob a diferenciação** (**closed under differentiation, cud**) e de **fechados para a multiplicação por escalares** (**closed for scalar multiplication, csm**). Esses conceitos podem ser naturalmente estendidos para ideais de aplicações multilineares:

Definição 1.3.2 Um ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$ é **cud** se para todos n , $E_1, \dots, E_n, F$ e $T \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, tem-se que todo operador obtido fixando-se $n - 1$ vetores $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n$ pertence a $\mathcal{M}(E_j; F)$ para todo $j = 1, \dots, n$.

Definição 1.3.3 Um ideal de aplicações multilineares $\mathcal{M}$ é **csm** se para todos n , $E_1, \dots, E_n, E_{n+1}, F$, $T \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\varphi \in E_{n+1}^*$, tem-se $\varphi T \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n, E_{n+1}; F)$.

Nesta seção vamos identificar e explorar as propriedades que consideramos desejáveis nas extensões multilineares do conceito de operadores absolutamente somantes.

É fácil verificar que os ideais de aplicações multilineares p -dominadas, p -semi-integrais, fortemente p -somantes, múltiplo p -somantes e fortemente múltiplo p -somante são cud e csm. Portanto, é de certa forma natural que estas propriedades sejam esperadas para uma generalização multilinear do conceito de operadores absolutamente somantes. Além disso,

as propriedades cud e csm foram criadas precisamente com o intuito de relacionar ideais de operadores lineares com suas generalizações multilineares naturais.

Sabemos também que o Teorema de Dvoretzky-Rogers e Teorema da Dominação Pietsch (e, é claro, o teorema de inclusão) são ainda válidos na classe $\mathcal{L}_{d,p}$. Por outro lado, como já dissemos antes, esta classe é, em certo sentido, pequena e o Teorema de Grothendieck não é válido. De acordo com (1.15) vemos, por outro lado, que a classe $\mathcal{L}_{sm,p}$ aparenta ser satisfatoriamente grande e, de [15], sabemos que os Teoremas de Dvoretzky-Rogers e de Grothendieck (l_1 - l_2) são válidos. Mais geralmente, esta classe contém a classe dos operadores multilineares múltiplo p -somantes e, portanto, herda todos os teoremas de coincidência conhecidos para essa última classe. Nesse sentido, parece ser razoável esperar que todas as extensões multilineares razoáveis $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_p)_{p \geq 1}$ do ideal dos operadores absolutamente somantes devem satisfazer $\mathcal{L}_{d,p} \subset \mathcal{M}_p \subset \mathcal{L}_{sm,p}$.

A seguir, listamos as propriedades estruturais das famílias mais comuns de ideais que generalizam a família $(\Pi_p)_{p \geq 1}$ para o ambiente multilinear.

Propriedade/ Classe	$\mathcal{L}_{d,p}$	$\mathcal{L}_{si,p}$	$\mathcal{L}_{ss,p}$	$\mathcal{L}_{m,p}$	$\mathcal{L}_{sm,p}$	$\mathcal{L}_{as,p}$	$\mathcal{L}_{as,p}^{ev}$
cud	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim
csm	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Teorema de Grothendieck	Não	Não	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Teorema de Inclusão	Sim	Sim	Sim	Não	?	Não	Não
Teorema de Dvoretzky-Rogers	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim
$\mathcal{L}_{d,p} \subset \cdot \subset \mathcal{L}_{sm,p}$	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	?

Com base nas propriedades que consideramos desejáveis para uma família que estende a família $(\Pi_p)_{p \geq 1}$ consideremos a seguinte definição:

Definição 1.3.4 *Uma família de ideais normados de aplicações multilineares $(\mathcal{M}_p)_{p \geq 1}$ é uma **extensão desejável** da família $(\Pi_p)_{p \geq 1}$ se*

- (i) $\mathcal{L}_{d,p} \subset \mathcal{M}_p \subset \mathcal{L}_{sm,p}$ para todo p e as inclusões têm norma ≤ 1 .
- (ii) $\mathcal{M}_p$ é csm para todo p .

- (iii) $\mathcal{M}_p$ é *cud* para todo p .
- (iv) $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}_q$ sempre que $p \leq q$.
- (v) O Teorema de Grothendieck e o Teorema de Dvoretzky-Rogers são válidos.

Observação 1.3.5 Observe que se $\mathcal{L}_{d,p} \subset \mathcal{M}_p \subset \mathcal{L}_{sm,p}$, então o Teorema de Dvoretzky-Rogers é válido para $\mathcal{M}_p$.

Note que $(\mathcal{L}_{ss,p})_{p \geq 1}$ é uma extensão desejável da família $(\Pi_p)_{p \geq 1}$.

A partir de agora uma extensão desejável da família $(\Pi_p)_{p \geq 1}$ será chamada de **família desejável**. Seja D a classe de todas as famílias desejáveis de aplicações multilineares.

Definição 1.3.1 Dizemos que uma família desejável de aplicações multilineares $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_p)_{p \geq 1}$ é **maximal** se

$$[\mathcal{M}_p \subset \mathcal{I}_p \text{ para todo } p \text{ (com norma } \leq 1) \text{ e } (\mathcal{I}_p)_{p \geq 1} \in D] \Rightarrow (\mathcal{M}_p)_{p \geq 1} = (\mathcal{I}_p)_{p \geq 1}, \text{ com } \|\cdot\|_{\mathcal{M}_p} = \|\cdot\|_{\mathcal{I}_p}.$$

Analogamente, dizemos que uma família desejável de aplicações multilineares $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_p)_{p \geq 1}$ é **minimal** se

$$[\mathcal{I}_p \subset \mathcal{M}_p \text{ para todo } p \text{ (com norma } \leq 1) \text{ e } (\mathcal{I}_p)_{p \geq 1} \in D] \Rightarrow (\mathcal{M}_p)_{p \geq 1} = (\mathcal{I}_p)_{p \geq 1}, \text{ com } \|\cdot\|_{\mathcal{M}_p} = \|\cdot\|_{\mathcal{I}_p}.$$

Diante do exposto acima, levantamos os seguintes questionamentos:

- Será que existe uma família desejável maximal?
- Será que existe uma família desejável minimal?
- Será que a família $(\mathcal{L}_{ss,p})_{p \geq 1}$ é maximal ou minimal?

As duas primeiras perguntas serão respondidas positivamente.

Teorema 1.3.2 ([47]) Existe uma família desejável maximal de aplicações multilineares.

Demonstração. Indexaremos D por um conjunto de índices Λ :

$$D = \{ \mathcal{M}^\lambda = (\mathcal{M}_p^\lambda)_{p \geq 1} : \mathcal{M}^\lambda \text{ é uma família desejável com } \lambda \in \Lambda \}.$$

Em D consideramos a seguinte relação de ordem:

$$\mathcal{M}^{\lambda_1} \leq \mathcal{M}^{\lambda_2} \Leftrightarrow \mathcal{M}_p^{\lambda_1} \subset \mathcal{M}_p^{\lambda_2} \text{ e } \|\cdot\|_{\mathcal{M}_p^{\lambda_2}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{M}_p^{\lambda_1}} \text{ para todo } p \geq 1.$$

Usaremos o Lema de Zorn na classe D . Note que $D \neq \emptyset$ pois $(\mathcal{L}_{ss,p})_{p \geq 1} \in D$. Sejam $O \subset D$ totalmente ordenado e

$$\Lambda_O = \{ \lambda \in \Lambda : \mathcal{M}^\lambda = (\mathcal{M}_p^\lambda)_{p \geq 1} \in O \}.$$

Defina

$$\mathcal{U} = (\mathcal{U}_p)_{p \geq 1}$$

onde, para cada $p \geq 1$,

$$\mathcal{U}_p = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_O} \mathcal{M}_p^\lambda.$$

Em Λ_O definimos a seguinte direção

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \Leftrightarrow \mathcal{M}^{\lambda_1} \leq \mathcal{M}^{\lambda_2}.$$

É fácil notar que, para cada p e quaisquer espaços de Banach $E_1, \dots, E_n$, o conjunto $\mathcal{U}_p(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial, com as operações usuais. De fato, dados $T, R \in \mathcal{U}_p(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ temos:

Se $T \in \mathcal{M}_p^{\lambda_1}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\alpha R \in \mathcal{M}_p^{\lambda_2}(E_1, \dots, E_n; F)$, então como O é totalmente ordenado temos que ou $\mathcal{M}_p^{\lambda_1} \subset \mathcal{M}_p^{\lambda_2}$ ou $\mathcal{M}_p^{\lambda_2} \subset \mathcal{M}_p^{\lambda_1}$. De qualquer modo, $T + \alpha R \in \mathcal{M}_p^{\lambda_i}(E_1, \dots, E_n; F)$ para $i = 1$ ou $i = 2$. Portanto, $T + \alpha R \in \mathcal{U}_p(E_1, \dots, E_n; F)$.

Agora, vamos mostrar que, para cada $p \geq 1$, a aplicação

$$T \in \mathcal{U}_p(E_1, \dots, E_n; F) \mapsto \|T\|_{\mathcal{U}_p} = \inf_{\lambda \in \Lambda_O} \|T\|_{\mathcal{M}_p^\lambda}, \quad (1.16)$$

define uma norma em $\mathcal{U}_p(E_1, \dots, E_n; F)$. Note que, para cada $T \in \mathcal{M}_p^\lambda(E_1, \dots, E_n; F)$, esse ínfimo existe, pois $\{\|T\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} : \lambda \in \Lambda_O\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente (por zero). Sendo assim, $\|T\|_{\mathcal{U}_p} \geq 0$ para todo $T \in \mathcal{U}_p^\lambda(E_1, \dots, E_n; F)$. E, como $\|T\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} \geq \|T\|$ para todo $\lambda \in \Lambda_O$, temos $\|T\|_{\mathcal{U}_p} \geq \|T\|$ e daí

$$\|T\|_{\mathcal{U}_p} = 0 \text{ se, e somente se, } T = 0.$$

Temos também

$$\|\alpha T\|_{\mathcal{U}_p} = \inf_{\lambda \in \Lambda_O} \|\alpha T\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} = \inf_{\lambda \in \Lambda_O} |\alpha| \|T\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} = |\alpha| \inf_{\lambda \in \Lambda_O} \|T\|_{\mathcal{M}_p^\lambda}$$

e, como

$$\|T + R\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} \leq \|T\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} + \|R\|_{\mathcal{M}_p^\lambda}$$

para todo $\lambda \in \Lambda_O$ e quaisquer $T, R \in \mathcal{M}_p^\lambda(E_1, \dots, E_n; F)$, segue que

$$\|T + R\|_{\mathcal{U}_p} \leq \|T\|_{\mathcal{U}_p} + \|R\|_{\mathcal{U}_p}$$

para quaisquer $T, R \in \mathcal{U}_p(E_1, \dots, E_n; F)$. Assim, concluímos que $(\mathcal{U}_p(E_1, \dots, E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{U}_p})$ é um espaço normado.

Afirmção 1: $(\mathcal{U}_p, \|\cdot\|_{\mathcal{U}_p})$ é um ideal normado.

(i) $\mathcal{U}_p(E_1, \dots, E_n; F)$ contém os operadores n -lineares de tipo finito.

É claro, pois cada $\mathcal{M}_p^\lambda(E_1, \dots, E_n; F)$ contém os operadores de tipo finito e $\mathcal{U}_p(E_1, \dots, E_n; F)$ contém cada $\mathcal{M}_p^\lambda(E_1, \dots, E_n; F)$.

(ii) Sejam $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$, com $j = 1, 2, \dots, n$, $T \in \mathcal{U}_p(E_1, \dots, E_n; F)$ e $v \in \mathcal{L}(F; H)$. Vamos mostrar que

$$v \circ T \circ (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{U}_p(G_1, \dots, G_n; H). \quad (1.17)$$

Com efeito, como $T \in \mathcal{M}_p^\lambda(E_1, \dots, E_n; F)$ para algum $\lambda \in \Lambda_O$, segue que

$$v \circ T \circ (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{M}_p^\lambda(G_1, \dots, G_n; H)$$

e obtemos (1.17).

(iii) Como a aplicação $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $A(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$ tem norma $\|A\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} = 1$ para todo $\lambda \in \Lambda_O$, temos

$$\|A\|_{\mathcal{U}_p} = \inf_{\lambda \in \Lambda_O} \|A\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} = 1.$$

(iv) Sejam $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$, com $j = 1, 2, \dots, n$, $T \in \mathcal{U}_p(E_1, \dots, E_n; F)$ e $v \in \mathcal{L}(F; H)$. Como $T \in \mathcal{M}_p^{\lambda'}(E_1, \dots, E_n; F)$ para algum $\lambda' \in \Lambda_O$ segue que $v \circ T \circ (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{M}_p^{\lambda'}(G_1, \dots, G_n; H)$. Daí

$$\|v \circ T \circ (u_1, \dots, u_n)\|_{\mathcal{M}_p^{\lambda'}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{M}_p^{\lambda'}} \|u_1\| \dots \|u_n\|. \quad (1.18)$$

Então

$$\|v \circ T \circ (u_1, \dots, u_n)\|_{\mathcal{U}_p} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{U}_p} \|u_1\| \dots \|u_n\|.$$

Portanto $(\mathcal{U}_p, \|\cdot\|_{\mathcal{U}_p})$ é um ideal normado.

Afirmção 2: $\mathcal{L}_{d,p} \subset \mathcal{U}_p \subset \mathcal{L}_{sm,p}$ para todo $p \geq 1$.

De fato, dado $\lambda \in \Lambda_O$ temos

$$\mathcal{L}_{d,p} \subset \mathcal{M}_p^\lambda \subset \mathcal{L}_{sm,p} \text{ para todo } p \geq 1.$$

Daí

$$\mathcal{L}_{d,p} \subset \mathcal{U}_p = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_O} \mathcal{M}_p^\lambda \subset \mathcal{L}_{sm,p} \text{ para todo } p \geq 1.$$

E, conseqüentemente, o Teorema de Dvoretzky-Rogers é válido.

Afirmção 3: $\mathcal{U}_p$ é csm para todo $p \geq 1$.

Com efeito, dado $\lambda \in \Lambda_O$, como $\mathcal{M}_p^\lambda$ é csm para todo $p \geq 1$, segue-se facilmente que

$$\mathcal{U}_p = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_O} \mathcal{M}_p^\lambda$$

é csm para todo $p \geq 1$.

Afirmção 4: $\mathcal{U}_p$ é cud para todo $p \geq 1$.

De modo similar, dado $\lambda \in \Lambda_O$, como $\mathcal{M}_p^\lambda$ é cud para todo $p \geq 1$, concluímos que

$$\mathcal{U}_p = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_O} \mathcal{M}_p^\lambda$$

é cud para todo $p \geq 1$.

Afirmção 5: $\mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}_q$ quando $p \leq q$.

É clara, pois dado $\lambda \in \Lambda_O$, temos $\mathcal{M}_p^\lambda \subset \mathcal{M}_q^\lambda$ quando $p \leq q$. Logo

$$\mathcal{U}_p = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_O} \mathcal{M}_p^\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_O} \mathcal{M}_q^\lambda = \mathcal{U}_q$$

quando $p \leq q$.

Afirmção 6: O Teorema de Grothendieck é válido em $\mathcal{U}$.

De fato, como Teorema de Grothendieck é válido para todo $\mathcal{M}^\lambda \in O$, segue que $\mathcal{M}_1^\lambda(nl_1, l_2) = \mathcal{L}(nl_1, l_2)$ para todo $\lambda \in \Lambda_O$, e conseqüentemente $\mathcal{U}_1(nl_1, l_2) = \mathcal{L}(nl_1, l_2)$.

Essas seis afirmações nos garantem que $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_p)_{p \geq 1} \in D$ e que $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_p)_{p \geq 1}$ é uma cota superior para O . Pelo Lema de Zorn, D tem um elemento maximal. ■

O próximo teorema irá garantir a existência de uma família desejável minimal de aplicações multilineares. A demonstração é similar à anterior, mas preferimos não omiti-la.

Teorema 1.3.3 ([47]) *Existe uma família desejável minimal de aplicações multilineares.*

Demonstração. Como no teorema anterior, indexamos D por um conjunto de índices Λ :

$$D = \{\mathcal{M}^\lambda = (\mathcal{M}_p^\lambda)_{p \geq 1} : \mathcal{M}^\lambda \text{ é uma família desejável com } \lambda \in \Lambda\}.$$

Em D consideramos a seguinte relação de ordem:

$$\mathcal{M}^{\lambda_1} \leq \mathcal{M}^{\lambda_2} \Leftrightarrow \mathcal{M}_p^{\lambda_2} \subset \mathcal{M}_p^{\lambda_1} \text{ e } \|\cdot\|_{\mathcal{M}_p^{\lambda_1}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{M}_p^{\lambda_2}} \text{ para todo } p \geq 1.$$

Note que $D \neq \emptyset$, pois $(\mathcal{L}_{ss,p})_{p \geq 1} \in D$. Sejam $O \subset D$ totalmente ordenado e

$$\Lambda_O = \{\lambda \in \Lambda : \mathcal{M}^\lambda = (\mathcal{M}_p^\lambda)_{p \geq 1} \in O\}.$$

Considere

$$\mathcal{I} = (\mathcal{I}_p)_{p \geq 1}$$

onde, para cada $p \geq 1$,

$$\mathcal{I}_p = \bigcap_{\lambda \in \Lambda_O} \mathcal{M}_p^\lambda.$$

Note que, para cada p e quaisquer espaços de Banach $E_1, \dots, E_n$, o conjunto $\mathcal{I}_p(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial, com as operações usuais. Agora vamos mostrar que, para cada $p \geq 1$, a aplicação

$$T \in \mathcal{I}_p(E_1, \dots, E_n; F) \mapsto \|T\|_{\mathcal{I}_p} = \sup_{\lambda \in \Lambda_O} \|T\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} \quad (1.19)$$

define uma norma em $\mathcal{I}_p(E_1, \dots, E_n; F)$. Por hipótese, para cada $p \geq 1$, a inclusão

$$inc : \mathcal{L}_{d,p}(E_1, \dots, E_n; F) \rightarrow \mathcal{M}_p^\lambda(E_1, \dots, E_n; F)$$

tem norma menor ou igual a 1 para todo $\lambda \in \Lambda_O$ e assim segue que $\{\|T\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} : \lambda \in \Lambda_O\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente por $\|T\|_{d,p}$, e portanto o supremo em (1.19) é finito.

Também, por hipótese, sabemos que para cada $p \geq 1$, a inclusão

$$inc : \mathcal{M}_p^\lambda(E_1, \dots, E_n; F) \rightarrow \mathcal{L}_{sm,p}(E_1, \dots, E_n; F)$$

tem norma menor ou igual a 1 para todo $\lambda \in \Lambda_O$. Logo

$$\|T\|_{\mathcal{I}_p} \geq \|T\|_{sm,p} \geq 0 \text{ para todo } T \in \mathcal{I}_p^\lambda(E_1, \dots, E_n; F)$$

e daí

$$\|T\|_{\mathcal{I}_p} = 0 \text{ se, e somente se, } T = 0.$$

E ainda

$$\|\alpha T\|_{\mathcal{I}_p} = \sup_{\lambda \in \Lambda_O} \|\alpha T\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} = \sup_{\lambda \in \Lambda_O} |\alpha| \|T\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} = |\alpha| \sup_{\lambda \in \Lambda_O} \|T\|_{\mathcal{M}_p^\lambda}.$$

Como $\|T + R\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} \leq \|T\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} + \|R\|_{\mathcal{M}_p^\lambda}$ para todo $\lambda \in \Lambda_O$ segue que

$$\|T + R\|_{\mathcal{I}_p} = \sup_{\lambda \in \Lambda_O} \|T + R\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} \leq \sup_{\lambda \in \Lambda_O} \|T\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} + \sup_{\lambda \in \Lambda_O} \|R\|_{\mathcal{M}_p^\lambda} = \|T\|_{\mathcal{I}_p} + \|R\|_{\mathcal{I}_p}.$$

Logo, $(\mathcal{I}_p(E_1, \dots, E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}_p})$ é um espaço normado.

As Afirmações de 1 a 6 feitas no teorema anterior podem ser provadas, neste contexto, de forma semelhante. Portanto podemos concluir, pelo Lema de Zorn, que D tem um elemento maximal. E, pela escolha da ordem parcial em D , este elemento maximal é uma família desejável minimal. ■

A seguir listamos alguns problemas, para os quais não temos solução e que acreditamos serem interessantes para o desenvolvimento da teoria:

Problema 1 $(\mathcal{L}_{sm,p})_{p \geq 1}$ é um ideal desejável?

Conjecturamos que a resposta ao problema anterior é “NÃO”. Entretanto, se a resposta for “SIM”, a classe $(\mathcal{L}_{sm,p})_{p \geq 1}$ será maximal.

Problema 2 $(\mathcal{L}_{ss,p})_{p \geq 1}$ é um ideal desejável maximal ou minimal?

A resposta para o próximo problema também parece ser “NÃO”, mas não temos uma demonstração.

Problema 3 $(\mathcal{L}_{ss,p})_{p \geq 1} = (\mathcal{L}_{sm,p})_{p \geq 1}$? (ou melhor, $\mathcal{L}_{sm,p} \subset \mathcal{L}_{ss,p}$?)

Para o próximo problema que vamos propor, precisamos de definições auxiliares.

Sejam n um inteiro positivo, $k \in \{1, \dots, n\}$ e $p \geq 1$. Uma aplicação n -linear $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ será dita **k -quase absolutamente p -somante** se existir uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j_k=1}^{\infty} \|T(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}, \dots, x_{j_n})\|^p \right)^{1/p} \leq C \left\| (x_{j_k})_{j_k=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \prod_{l \neq k} \|x_{j_l}\| \quad (1.20)$$

para cada $x_{j_i} \in E_i$ com $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ e para toda $(x_{j_k})_{j_k=1}^{\infty} \in l_p^w(E_k)$. Neste caso escrevemos $T \in \mathcal{L}_{s,p}^k(E_1, \dots, E_n; F)$ e o ínfimo dos C que satisfazem (1.20) define uma norma em $\mathcal{L}_{s,p}^k(E_1, \dots, E_n; F)$, representada por $\|\cdot\|_{ks,p}$.

Essas aplicações foram introduzidas em [15] como um exemplo de uma generalização artificial dos operadores absolutamente somantes. Não é difícil provar que $(\mathcal{L}_{s,p}^k, \|\cdot\|_{ks,p})$ é uma ideal normado de aplicações multilineares.

Agora, consideremos a nova classe, $\mathcal{L}_{qs,p}$, cujas componentes chamaremos de *quase-absolutamente p -somantes*:

$$\mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n; F) := \bigcap_{k=1}^n \mathcal{L}_{s,p}^k(E_1, \dots, E_n; F).$$

Definindo

$$\|T\|_{qs,p} := \max_k \|T\|_{ks,p}, \quad (1.21)$$

temos uma norma para $\mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $(\mathcal{L}_{qs,p}, \|\cdot\|_{qs,p})$ é uma ideal normado (veja o Anexo 1.4).

O próximo resultado mostra a relação entre as classes $\mathcal{L}_{sm,p}$ e $\mathcal{L}_{qs,p}$:

Proposição 1.3.6 $\mathcal{L}_{sm,p} \subset \mathcal{L}_{qs,p}$ e esta inclusão tem norma ≤ 1 .

Demonstração: Sejam $T \in \mathcal{L}_{sm,p}(E_1, \dots, E_n; F)$, $m \in \mathbb{N}$ com $m \geq n$, $k \in \{1, \dots, n\}$ e $(x_{j_k}^{(k)})_{j_k=1}^m \in l_p^w(E_k)$. Então, para cada $x_l \in E_l$ com $l = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$, considere

$$\left(x_{j_l}^{(l)}\right)_{j_l=1}^m = (0, \dots, \underbrace{x_l}_{l\text{-ésimo termo}}, \dots, 0).$$

Assim

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j_k=1}^m \|T(x_1, \dots, x_{j_k}^{(k)}, \dots, x_n)\|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{j_1, \dots, j_n=1}^m \|T(x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_k}^{(k)}, \dots, x_{j_n}^{(n)})\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \|T\|_{sm,p} \left(\sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})}} \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^m |\phi(x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_k}^{(k)}, \dots, x_{j_n}^{(n)})|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \|T\|_{sm,p} \|x_1\|^{[k]} \|x_n\| \\ &\left(\sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})}} \sum_{j_k=1}^m \left| \frac{\phi}{\|x_1\|^{[k]} \|x_n\|} (x_1, \dots, x_{j_k}^{(k)}, \dots, x_n) \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \|T\|_{sm,p} \|x_1\|^{[k]} \|x_n\| \left(\sup_{\varphi_k \in B_{E_k^*}} \sum_{j_k=1}^m |\varphi_k(x_{j_k}^{(k)})|^p \right)^{1/p} \\ &= \|T\|_{sm,p} \|x_1\|^{[k]} \|x_n\| \left\| \left(x_{j_k}^{(k)}\right)_{j_k=1}^m \right\|_{w,p}. \end{aligned}$$

Logo $T \in \mathcal{L}_{s,p}^k(E_1, \dots, E_n; F)$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Portanto, $T \in \mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ com

$$\|T\|_{qs,p} \leq \|T\|_{sm,p}.$$

■

Como veremos no Apêndice 1.4, $(\mathcal{L}_{qs,p}, \|\cdot\|_{qs,p})$ é um ideal normado. Claramente, esse não é um ideal interessante, pois não passa de uma espécie de disfarce multilinear do ideal dos operadores absolutamente p -somantes. Assim, nos parece interessante mostrar que essa

classe não é uma família desejável. Uma resposta ao próximo problema esclareceria a questão:

Problema 4 $(\mathcal{L}_{sm,p})_{p \geq 1} = (\mathcal{L}_{qs,p})_{p \geq 1}$? (ou melhor, $\mathcal{L}_{qs,p} \subset \mathcal{L}_{sm,p}$?)

Qualquer resposta para o problema acima levará a conclusões importantes:

- Se a resposta para o problema acima for **SIM** (conjecturamos que não é), então temos várias informações pertinentes:

(i) a igualdade não é trivial e o resultado vai ser interessante por si próprio;

(ii) concluiremos que $(\mathcal{L}_{sm,p})_{p \geq 1}$ é um ideal desejável (maximal) e (o mais importante) que $(\mathcal{L}_{sm,p})_{p \geq 1}$ tem propriedades ainda melhores que as já conhecidas. Por exemplo, além do teorema de inclusão (que era desconhecido para essa classe), concluiremos também que como toda situação de coincidência linear $\Pi_p(E; F) = \mathcal{L}(E; F)$ é naturalmente estendida para $\mathcal{L}_{qs,p}(^n E; F) = \mathcal{L}(^n E; F)$, seria estendida também para $\mathcal{L}_{sm,p}(^n E; F) = \mathcal{L}(^n E; F)$; com todas essas informações em mãos, seria natural considerar $(\mathcal{L}_{sm,p})_{p \geq 1}$ como a generalização mais “perfeita” de $(\Pi_p)_{p \geq 1}$, dentro dos nossos parâmetros.

- Se a resposta para o problema acima for **NÃO** (que acreditamos ser o caso), então concluiremos que $(\mathcal{L}_{qs,p})_{p \geq 1}$ não é uma classe desejável, que é o que imaginamos que deve ocorrer, já que a classe $(\mathcal{L}_{qs,p})_{p \geq 1}$ é construída artificialmente.

Observação 1.3.7 *Nos parece pertinente observar que a nossa definição de classe desejável é uma proposta que pode ser alterada com a inclusão, subtração ou alteração das propriedades desejáveis. Acreditamos que a ideia da demonstração do Teorema 1.3.2 (e Teorema 1.3.3) pode ser adaptada para contextos diferentes. Nos parece ainda razoável tentar uma abordagem onde se exija que os ideais desejáveis sejam completos.*

1.4 Anexo: Algumas propriedades dos operadores quase-absolutamente p -somantes

Sejam $E, E_1, \dots, E_n, E_{n+1}, F$ espaços de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $p \geq 1$. Como vimos no final da seção anterior um operador n -linear $T \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é k -absolutamente

p -somante se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j_k=1}^{\infty} \|T(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}, \dots, x_{j_n})\|^p \right)^{1/p} \leq C \left\| (x_{j_k})_{j_k=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \prod_{l \neq k} \|x_{j_l}\| \quad (1.22)$$

para todo $x_{j_i} \in E_i$ com $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ e toda $(x_{j_k})_{j_k=1}^{\infty} \in l_p^w(E_k)$. Neste caso escrevemos $T \in \mathcal{L}_{s,p}^k(E_1, \dots, E_n; F)$ e

$$\|T\|_{ks,p} = \inf\{C; C \text{ satisfaz (1.22)}\}$$

define uma norma em $\mathcal{L}_{s,p}^k(E_1, \dots, E_n; F)$.

Com isso, definimos a classe das aplicações quase absolutamente p -somantes como sendo a intersecção das k -quase absolutamente p -somantes:

$$\mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n; F) = \bigcap_{k=1}^n \mathcal{L}_{s,p}^k(E_1, \dots, E_n; F).$$

Note que $\mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial. Observe que, quando $n = 1$, temos $k = 1$, e $\mathcal{L}_{qs,p}(E; F) = \mathcal{L}_{s,p}^1(E; F) = \mathcal{L}_{as,p}(E; F)$ para todos espaços de Banach E, F .

Vejamos que (1.21) define uma norma para essa classe e que, com tal norma, $\mathcal{L}_{qs,p}$ é um multi-ideal normado.

Proposição 1.4.1 *Para cada $p \geq 1$,*

$$\|T\|_{qs,p} = \max_k \|T\|_{ks,p}, \quad (1.23)$$

define uma norma em $\mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Demonstração: É claro que $\|T\|_{qs,p} \geq 0$ para todo $T \in \mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n; F)$. E, como $\|T\|_{qs,p} \geq \|T\|_{ks,p}$ para todo $k = 1, \dots, n$, temos

$$\|T\|_{qs,p} = 0 \text{ se, e somente se, } T = 0.$$

Temos ainda

$$\|\alpha T\|_{qs,p} = \max_k \|\alpha T\|_{ks,p} = \max_k |\alpha| \|T\|_{ks,p} = |\alpha| \max_k \|T\|_{ks,p} = |\alpha| \|T\|_{qs,p},$$

e como $\|T + R\|_{ks,p} \leq \|T\|_{ks,p} + \|R\|_{ks,p}$ para todo $k = 1, \dots, n$, segue que

$$\|T + R\|_{qs,p} = \max_k \|T + R\|_{ks,p} \leq \max_k \|T\|_{ks,p} + \max_k \|R\|_{ks,p} = \|T\|_{qs,p} + \|R\|_{qs,p}.$$

Logo, $(\mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n; F), \|\cdot\|_{qs,p})$ é um espaço normado. ■

Proposição 1.4.2 $\mathcal{L}_{qs,p}$ é um multi-ideal.

Demonstração: • $\mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ que contém os operadores n -lineares de tipo finito. De fato, pois interseção de subespaços é um subespaço e, como cada $\mathcal{L}_{s,p}^k(E_1, \dots, E_n; F)$ contém os operadores de tipo finito, segue que $\mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ também contém os operadores de tipo finito.

• Sejam $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$, com $j = 1, 2, \dots, n$, $T \in \mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $v \in \mathcal{L}(F; H)$. Como $T \in \mathcal{L}_{s,p}^k(E_1, \dots, E_n; F)$ para todo $k = 1, \dots, n$ segue que

$$v \circ T \circ (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{L}_{s,p}^k(G_1, \dots, G_n; H)$$

para todo $k = 1, \dots, n$. Logo

$$v \circ T \circ (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{L}_{qs,p}(G_1, \dots, G_n; H).$$

■

Proposição 1.4.3 $(\mathcal{L}_{qs,p}, \|\cdot\|_{qs,p})$ é um multi-ideal normado.

Demonstração: Já sabemos que $(\mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n; F), \|\cdot\|_{qs,p})$ é um espaço normado. Agora, como a aplicação $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $A(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$ tem norma $\|A\|_{ks,p} = 1$

para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ temos que

$$\|A\|_{qs,p} = \max_k \|A\|_{ks,p} = 1.$$

Sejam $u_j \in \mathcal{L}(X_j; E_j)$, com $j = 1, 2, \dots, n$, $T \in \mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $v \in \mathcal{L}(F; H)$. Como $T \in \mathcal{L}_{s,p}^k(E_1, \dots, E_n; F)$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ segue que $v \circ T \circ (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{L}_{s,p}^k(X_1, \dots, X_n; H)$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Daí

$$\|v \circ T \circ (u_1, \dots, u_n)\|_{ks,p} \leq \|v\| \|T\|_{ks,p} \|u_1\| \dots \|u_n\|$$

para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Logo

$$\|v \circ T \circ (u_1, \dots, u_n)\|_{qs,p} \leq \|v\| \|T\|_{qs,p} \|u_1\| \dots \|u_n\|.$$

Portanto $(\mathcal{L}_{qs,p}, \|\cdot\|_{qs,p})$ é um ideal normado. ■

Proposição 1.4.4 $(\mathcal{L}_{qs,p}, \|\cdot\|_{qs,p})$ é *cud* para todo p .

Demonstração: Dados $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n, F$ e $T \in \mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n; F)$. Fixando $x_{j_1}, \dots, x_{j_{i-1}}, x_{j_{i+1}}, \dots, x_{j_n}$, o operador

$$\bar{T} : E_i \rightarrow F$$

definido por

$$\bar{T}(x_{j_i}) = T(x_{j_1}, \dots, x_{j_{i-1}}, x_{j_i}, x_{j_{i+1}}, \dots, x_{j_n})$$

pertence a $\mathcal{L}_{qs,p}(E_i; F)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. De fato, dado $i \in \{1, \dots, n\}$, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j_i=1}^{\infty} \|\bar{T}(x_{j_i})\|^p \right)^{1/p} &= \left(\sum_{j_i=1}^{\infty} \|T(x_{j_1}, \dots, x_{j_i}, \dots, x_{j_n})\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq C \left\| (x_{j_i})_{j_i=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \prod_{l \neq i} \|x_{j_l}\| = C_1 \left\| (x_{j_i})_{j_i=1}^{\infty} \right\|_{w,p}. \end{aligned}$$

Logo

$$\overline{T} \in \mathcal{L}_{as,p}(E_i; F) = \mathcal{L}_{s,p}^1(E_i; F) = \mathcal{L}_{qs,p}(E_i; F)$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Portanto, $\mathcal{L}_{qs,p}$ é cud para todo p . ■

Proposição 1.4.5 $(\mathcal{L}_{qs,p}, \|\cdot\|_{qs,p})$ é csm para todo p .

Demonstração: Dados $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n, E_{n+1}, F$, $T \in \mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\varphi \in E_{n+1}^*$ temos, para $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j_i=1}^{\infty} \|\varphi T(x_{j_1}, \dots, x_{j_i}, \dots, x_{j_n}, x_{j_{n+1}})\|^p \right)^{1/p} &= \left(\sum_{j_i=1}^{\infty} \|\varphi(x_{j_{n+1}})T(x_{j_1}, \dots, x_{j_i}, \dots, x_{j_n})\|^p \right)^{1/p} \\ &= |\varphi(x_{j_{n+1}})| \left(\sum_{j_i=1}^{\infty} \|T(x_{j_1}, \dots, x_{j_i}, \dots, x_{j_n})\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq C |\varphi(x_{j_{n+1}})| \left\| (x_{j_i})_{j_i=1}^{\infty} \right\|_{w,p} \prod_{l \neq i} \|x_{j_l}\|. \end{aligned}$$

Logo

$$\varphi T \in \mathcal{L}_{s,p}^i(E_1, \dots, E_n, E_{n+1}; F)$$

para $i = 1, \dots, n$. Para $i = n + 1$, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j_{n+1}=1}^{\infty} \|\varphi T(x_{j_1}, \dots, x_{j_i}, \dots, x_{j_n}, x_{j_{n+1}})\|^p \right)^{1/p} &= \left(\sum_{j_{n+1}=1}^{\infty} \|\varphi(x_{j_{n+1}})T(x_{j_1}, \dots, x_{j_i}, \dots, x_{j_n})\|^p \right)^{1/p} \\ &= \|T(x_{j_1}, \dots, x_{j_i}, \dots, x_{j_n})\| \left(\sum_{j_{n+1}=1}^{\infty} |\varphi(x_{j_{n+1}})|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \|T\| \|x_{j_1}\| \cdots \|x_{j_n}\| \|\varphi\| \left\| (x_{j_{n+1}})_{j_{n+1}=1}^{\infty} \right\|_{w,p}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi T \in \mathcal{L}_{s,p}^{n+1}(E_1, \dots, E_n, E_{n+1}; F).$$

Portanto $\varphi T \in \mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n, E_{n+1}; F)$ e, conseqüentemente, $\mathcal{L}_{qs,p}$ é csm para todo p . ■

Proposição 1.4.6 $\mathcal{L}_{qs,p} \subset \mathcal{L}_{qs,r}$ para todo $p \leq r$.

Demonstração: Para mostrar que

$$\mathcal{L}_{qs,p}(E_1, \dots, E_n; F) = \bigcap_{k=1}^n \mathcal{L}_{s,p}^k(E_1, \dots, E_n; F) \subset \mathcal{L}_{qs,r}(E_1, \dots, E_n; F) = \bigcap_{k=1}^n \mathcal{L}_{s,r}^k(E_1, \dots, E_n; F)$$

para todo $p \leq r$, basta mostrarmos que

$$\mathcal{L}_{s,p}^k(E_1, \dots, E_n; F) \subset \mathcal{L}_{s,r}^k(E_1, \dots, E_n; F)$$

para todos $p \leq r$ e $k \in \{1, \dots, n\}$. Para cada $x_{j_i} \in E_i$ com $i = 1, \dots, n$ e para toda $(x_{j_k})_{j_k=1}^\infty \in l_p^w(E_k)$ tome

$$\alpha_{j_k} = \|T(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}, \dots, x_{j_n})\|^{\frac{r}{p}-1},$$

então

$$\|T(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}, \dots, x_{j_n})\|^r = \|T(x_{j_1}, \dots, \alpha_{j_k} x_{j_k}, \dots, x_{j_n})\|^p.$$

Se $T \in \mathcal{L}_{s,p}^k(E_1, \dots, E_n; F)$, temos que

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j_k=1}^\infty \|T(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}, \dots, x_{j_n})\|^r \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\sum_{j_k=1}^\infty \|T(x_{j_1}, \dots, \alpha_{j_k} x_{j_k}, \dots, x_{j_n})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \|T\|_{ks,p} \sup_{\varphi \in B_{E'_k}} \left(\sum_{j_k=1}^\infty |\alpha_{j_k}|^p \|\varphi(x_{j_k})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{l \neq k} \|x_{j_l}\| \\ & \leq \|T\|_{ks,p} \left(\sum_{j_k=1}^\infty |\alpha_{j_k}|^{\frac{rp}{r-p}} \right)^{\frac{r-p}{rp}} \sup_{\varphi \in B_{E'_k}} \left(\sum_{j_k=1}^\infty \|\varphi(x_{j_k})\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \prod_{l \neq k} \|x_{j_l}\| \\ & = \|T\|_{ks,p} \left(\sum_{j_k=1}^\infty \|T(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}, \dots, x_{j_n})\|^r \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \sup_{\varphi \in B_{E'_k}} \left(\sum_{j_k=1}^\infty \|\varphi(x_{j_k})\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \prod_{l \neq k} \|x_{j_l}\|, \end{aligned}$$

e segue que

$$\left(\sum_{j_k=1}^{\infty} \|T(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}, \dots, x_{j_n})\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \|T\|_{k,s,p} \sup_{\varphi \in B_{E'_k}} \left(\sum_{j_k=1}^{\infty} \|\varphi(x_{j_k})\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \prod_{l \neq k} \|x_{j_l}\|,$$

isto é,

$$T \in \mathcal{L}_{s,r}^k(E_1, \dots, E_n; F)$$

como queríamos. ■

Proposição 1.4.7 *O Teorema de Grothendieck é válido, isto é, $\mathcal{L}_{qs,1}(^n l_1; l_2) = \mathcal{L}(^n l_1; l_2)$ para todo $n \geq 2$.*

Demonstração: Sejam $k \in \{1, \dots, n\}$ e $(x_{j_k})_{j_k=1}^{\infty} \in l_1^w(l_1)$. Fixados

$$x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}, x_{j_{k+1}}, \dots, x_{j_n} \in l_1$$

não nulos, seja $T \in \mathcal{L}(^n l_1; l_2)$. Defina $T^{(k)} : l_1 \rightarrow l_2$ por

$$T^{(k)}(x) = T \left(\frac{x_{j_1}}{\|x_{j_1}\|_1}, \dots, x, \dots, \frac{x_{j_n}}{\|x_{j_n}\|_1} \right).$$

Logo, pelo Teorema de Grothendieck, temos que

$$T^{(k)} \in \mathcal{L}(l_1; l_2) = \mathcal{L}_{as,1}(l_1; l_2),$$

ou seja,

$$\sum_{j_k=1}^{\infty} \|T^{(k)}(x_{j_k})\|_2 \leq \pi_1(T^{(k)}) \left\| (x_{j_k})_{j_k=1}^{\infty} \right\|_{w,1},$$

ou ainda,

$$\sum_{j_k=1}^{\infty} \left\| T \left(\frac{x_{j_1}}{\|x_{j_1}\|_1}, \dots, x_{j_k}, \dots, \frac{x_{j_n}}{\|x_{j_n}\|_1} \right) \right\|_2 \leq \pi_1(T^{(k)}) \left\| (x_{j_k})_{j_k=1}^{\infty} \right\|_{w,1}.$$

Logo

$$\sum_{j_k=1}^{\infty} \|T(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}, \dots, x_{j_n})\|_2 \leq \pi_1(T^{(k)}) \left\| (x_{j_k})_{j_k=1}^{\infty} \right\|_{w,1} \prod_{l \neq k} \|x_{j_l}\|$$

e, portanto,

$$T \in \mathcal{L}_{s,1}^k({}^n l_1; l_2).$$

Como $k \in \{1, \dots, n\}$ é arbitrário, temos

$$T \in \mathcal{L}_{s,1}^k({}^n l_1; l_2)$$

para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ e o resultado segue. ■

Capítulo 2

Generalizações do Teorema da Dominação de Pietsch

O seguinte teorema é conhecido como Teorema da Dominação de Pietsch:

Teorema 2.0.8 (Pietsch, 1967) *Se E e F são espaços de Banach, um operador linear contínuo $T : E \rightarrow F$ é absolutamente p -somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade μ na σ -álgebra dos borelianos da bola unitária fechada do dual de E com a topologia fraca estrela, $(B_{E^*}, \sigma(E^*, E))$, tal que*

$$\|T(x)\| \leq C \left(\int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para todo } x \in E.$$

O Teorema da Dominação de Pietsch tem um papel central na teoria de operadores absolutamente somantes (veja os livros [25, 54]). Tendo em vista a importância do Teorema da Dominação de Pietsch (TDP) na teoria linear, vários autores começaram a investigar teoremas do tipo Pietsch no contexto de aplicações multilineares e de polinômios homogêneos (citamos, por exemplo, [1, 18, 21, 27, 29, 30, 38, 40, 44]). Em [19], o TDP foi estendido para uma classe de aplicações não-multilineares (e não polinomiais). Por esses motivos, em [20], uma abordagem unificada ao TDP foi apresentada como uma tentativa de mostrar que todos os teoremas conhecidos do tipo Pietsch eram casos particulares de uma versão única. Porém,

em pelo menos um caso, a abordagem abstrata apresentada em [20] parece ineficaz:

Definição 2.0.1 *Sejam $p_1, \dots, p_n > 0$, com $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n}$, $X_1, \dots, X_n$ e Y espaços de Banach. Uma aplicação arbitrária $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ é dita $(p_1, \dots, p_n)$ -dominada em $(a_1, \dots, a_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ se existem uma constante $C > 0$ e medidas regulares de probabilidade de Borel μ_k em $B_{X_k^*}$, $k = 1, \dots, n$,*

$$\|f(a_1 + x^{(1)}, \dots, a_n + x^{(n)}) - f(a_1, \dots, a_n)\| \leq C \prod_{k=1}^n \left(\int_{B_{X_k^*}} |\varphi(x^{(k)})|^{p_k} d\mu_k \right)^{1/p_k} \quad (2.1)$$

para todo $x^{(j)} \in X_j$, $j = 1, \dots, n$.

Problema 5 *Se $(a_1, \dots, a_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ e $p_1, \dots, p_n > 0$, que tipo de aplicação $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ satisfaz, para algum $C > 0$ e medidas regulares de probabilidade de Borel μ_k em $B_{X_k^*}$, $k = 1, \dots, n$, a desigualdade (2.1) para todo $x^{(j)} \in X_j$, $j = 1, \dots, n$?*

2.1 Somabilidade de aplicações não-lineares

Responder o Problema 5 nada mais é do que demonstrar um teorema do tipo Pietsch para a classe das aplicações $(p_1, \dots, p_n)$ -dominadas em $(a_1, \dots, a_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$. Vale ressaltar que a demonstração original que Pietsch deu ao seu teorema linear de dominação usa o Lema de Ky Fan (veja [54, p. 40]) ao invés do teorema de separação de Hahn-Banach (posteriormente usado em outras demonstrações). O uso do teorema de separação de Hahn-Banach não parece ser suficiente para demonstrar uma versão geral do TDP que solucione o Problema 5; para esta tarefa a idéia original de Pietsch, usando o Lema de Ky Fan, será muito útil. É, em certo sentido, uma surpresa agradável que o primeiro argumento que Pietsch concebeu para as aplicações lineares tenha se mostrado o mais adequado quando se trata de um contexto mais geral e totalmente não-linear.

Definição 2.1.1 *Uma família $\mathcal{F}$ de funções reais $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é côncava se, para todo inteiro*

positivo n , $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{F}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ tais que $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$, existe $\psi \in \mathcal{F}$ satisfazendo

$$\psi(x) \geq \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x)$$

para todo $x \in K$.

A demonstração do resultado principal da presente seção é baseada em dois lemas:

Lema 2.1.2 (Ky Fan) *Seja K um espaço topológico de Hausdorff compacto e $\mathcal{F}$ uma família côncava de funções $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ que são convexas e semicontínuas inferiormente. Se para cada $f \in \mathcal{F}$ existir um $x_f \in K$ tal que $f(x_f) \leq 0$, então existe um $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) \leq 0$ para todo $f \in \mathcal{F}$.*

Lema 2.1.3 (Desigualdade generalizada entre as médias geométrica e aritmética)

Sejam $0 < p_1, \dots, p_n, p < \infty$ tais que

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n}.$$

Então

$$\frac{1}{p} \prod_{j=1}^n q_j^p \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} q_j^{p_j}$$

independentemente da escolha de $q_1, \dots, q_n \geq 0$.

A demonstração do Lema de Ky Fan pode ser encontrada no livro de Pietsch [54] e a demonstração da desigualdade generalizada entre as médias geométrica e aritmética pode ser encontrada no livro clássico [33, p. 17] (para uma abordagem mais moderna, sugerimos [62, p. 23]). Agora estamos prontos para responder o Problema 5.

Teorema 2.1.4 ([46]) *Uma aplicação arbitrária $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ é $(p_1, \dots, p_n)$ -dominada em $(a_1, \dots, a_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal*

que

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^m \left(|b_j^{(1)} \dots b_j^{(n)}| \left\| f(a_1 + x_j^{(1)}, \dots, a_n + x_j^{(n)}) - f(a_1, \dots, a_n) \right\| \right)^p \right)^{1/p} \\ & \leq C \prod_{k=1}^n \sup_{\varphi \in B_{X_k^*}} \left(\sum_{j=1}^m \left(|b_j^{(k)}| \left| \varphi(x_j^{(k)}) \right| \right)^{p_k} \right)^{1/p_k} \end{aligned} \quad (2.2)$$

para todo inteiro positivo m , $(x_j^{(k)}, b_j^{(k)}) \in X_k \times \mathbb{K}$, com $(j, k) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$.

Demonstração: A fim de simplificar a notação, a partir de agora vamos escrever

$$f(b^{(k)}, x^{(k)})_{k=1}^n := \left(|b^{(1)} \dots b^{(n)}| \left\| f(a_1 + x^{(1)}, \dots, a_n + x^{(n)}) - f(a_1, \dots, a_n) \right\| \right)^p.$$

Admita a existência de tais medidas $\mu_1, \dots, \mu_n$ satisfazendo (2.1). Então, dados $m \in \mathbb{N}$, $x_j^{(l)} \in X_l$ e $b_j^{(l)} \in \mathbb{K}$, com $(j, l) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$, teremos, usando a Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m f(b_j^{(k)}, x_j^{(k)})_{k=1}^n & \leq C^p \sum_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \left(\int_{B_{X_k^*}} \left(|b_j^{(k)}| \left| \varphi(x_j^{(k)}) \right| \right)^{p_k} d\mu_k \right)^{p/p_k} \\ & \stackrel{\text{Desig. de Hölder}}{\leq} C^p \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \int_{B_{X_k^*}} \left(|b_j^{(k)}| \left| \varphi(x_j^{(k)}) \right| \right)^{p_k} d\mu_k \right)^{p/p_k} \\ & \leq C^p \prod_{k=1}^n \left(\sup_{\varphi \in B_{X_k^*}} \sum_{j=1}^m \left(|b_j^{(k)}| \left| \varphi(x_j^{(k)}) \right| \right)^{p_k} \right)^{p/p_k}. \end{aligned}$$

Com isso temos (2.2). Reciprocamente, suponha (2.2) e considere os conjuntos $P(B_{X_k^*})$ das medidas regulares de probabilidade em $C(B_{X_k^*})^*$, para todo $k = 1, \dots, n$. Sabemos que cada $P(B_{X_k^*})$ é compacto quando cada $C(B_{X_k^*})^*$ está dotado com a topologia fraca estrela (veja o Anexo 2.3). Para cada $(x_j^{(l)})_{j=1}^m$ em X_l e $(b_j^{(s)})_{j=1}^m$ em $\mathbb{K}$, com $(s, l) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$,

considere

$$g = g_{(x_j^{(l)})_{j=1}^m, (b_j^{(s)})_{j=1}^m, (s,l) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}} : P(B_{X_1^*}) \times \dots \times P(B_{X_n^*}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g((\mu_i)_{i=1}^n) = \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{p} f(b_j^{(k)}, x_j^{(k)})_{k=1}^n - C^p \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \int_{B_{X_k^*}} \left(|b_j^{(k)}| |\varphi(x_j^{(k)})| \right)^{p_k} d\mu_k \right].$$

Denotaremos por $\mathcal{F}$ o conjunto de todas essas g .

(i) A família $\mathcal{F}$ é côncava. Com efeito, sejam N um inteiro positivo, $g_i \in \mathcal{F}$ e $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, tais que $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = 1$. Então

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i((\mu_j)_{j=1}^n) \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \left\{ \sum_{j_i=1}^{m_i} \left[\frac{1}{p} f(b_{j_i}^{(k)}, x_{j_i}^{(k)})_{k=1}^n - C^p \sum_{z=1}^n \frac{1}{p_z} \int_{K_z} \left(|b_{j_i}^{(k)}| |\varphi(x_{j_i}^{(k)})| \right)^{p_z} d\mu_z \right] \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{j_i=1}^{m_i} \left[\frac{1}{p} f(\alpha_i^{\frac{1}{p_i}} b_{j_i}^{(k)}, x_{j_i}^{(k)})_{k=1}^n - C^p \sum_{z=1}^n \frac{1}{p_z} \int_{K_z} \left(|\alpha_i^{\frac{1}{p_z}} b_{j_i}^{(k)}| |\varphi(x_{j_i}^{(k)})| \right)^{p_z} d\mu_z \right] \\ &= g_{(x_{j_i}^{(l)})_{j_i, i=1}^{m_i, N}, (\alpha_i^{\frac{1}{p_s}} b_{j_i}^{(s)})_{j_i, i=1}^{m_i, N}, (s,l) \in \{1, \dots, t\} \times \{1, \dots, r\}}((\mu_j)_{j=1}^n). \end{aligned}$$

(ii) Além disso, cada função $g \in \mathcal{F}$ é convexa. De fato,

$$\begin{aligned} & g(\lambda(\mu_1, \dots, \mu_t) + (1-\lambda)(\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_t)) \\ &= g(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\tilde{\mu}_1, \dots, \lambda\mu_t + (1-\lambda)\tilde{\mu}_t) \\ &= \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{p} f(b_j^{(k)}, x_j^{(k)})_{k=1}^n - C^p \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \int_{B_{X_k^*}} \left(|b_j^{(k)}| |\varphi(x_j^{(k)})| \right)^{p_k} d(\lambda\mu_z + (1-\lambda)\tilde{\mu}_z) \right] \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{p} f(b_j^{(k)}, x_j^{(k)})_{k=1}^n - C^p \times \\ &\quad \times \sum_{j=1}^m \left(\lambda \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \int_{B_{X_k^*}} \left(|b_j^{(k)}| |\varphi(x_j^{(k)})| \right)^{p_k} d\mu_z + (1-\lambda) \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \int_{B_{X_k^*}} \left(|b_j^{(k)}| |\varphi(x_j^{(k)})| \right)^{p_k} d\tilde{\mu}_z \right) \\ &= \lambda g(\mu_1, \dots, \mu_t) + (1-\lambda)g(\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_t). \end{aligned}$$

(iii) Também é verdade que cada $g \in F$ é contínua. Para isso, basta mostrarmos que cada aplicação

$$\mu_k \longrightarrow \int_{B_{X_k^*}} \left| \varphi(x^{(k)}) \right|^{p_k} d\mu_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

é contínua para todo $k = 1, \dots, n$ e $x^{(k)} \in X_k$. Dados $k \in \{1, \dots, n\}$ e $x^{(k)} \in X_k$, como $C(B_{X_k^*})^*$ está com a topologia fraca estrela, para cada $f \in C(B_{X_k^*})$, a aplicação

$$\mu_k \in C(B_{X_k^*})^* \longrightarrow \int_{B_{X_k^*}} f d\mu_k,$$

é contínua. Logo, a restrição

$$\mu_k \in P(B_{X_k^*}) \longrightarrow \int_{B_{X_k^*}} f d\mu_k,$$

também é contínua. Portanto, tomando $f \in C(B_{X_k^*})$, a aplicação definida por

$$\varphi \in B_{X_k^*} \mapsto f(\varphi) = \left| \varphi(x^{(k)}) \right|^{p_k},$$

segue que $g \in F$ é contínua.

Note que, para cada $g \in F$ existem medidas $\mu_k^g \in P(B_{X_k^*})$, $k = 1, \dots, n$, tais que

$$g(\mu_1^g, \dots, \mu_n^g) \leq 0.$$

De fato, como cada $B_{X_k^*}$ é compacto ($k = 1, \dots, n$) e cada aplicação

$$(R_k)_{(x_j^{(k)})_{j=1}^m, (b_j^{(k)})_{j=1}^m} : B_{X_k^*} \longrightarrow [0, \infty)$$

definida por

$$(R_k)_{(x_j^{(k)})_{j=1}^m, (b_j^{(k)})_{j=1}^m}(\varphi) = \sum_{j=1}^m \left(\left| b_j^{(k)} \right| \left| \varphi(x_j^{(k)}) \right| \right)^{p_k},$$

é contínua, existe $\varphi_k \in B_{X_k^*}$ tal que

$$\sum_{j=1}^m \left(\left| b_j^{(k)} \right| \left| \varphi_k(x_j^{(k)}) \right| \right)^{p_k} = \sup_{\varphi \in B_{X_k^*}} \sum_{j=1}^m \left(\left| b_j^{(k)} \right| \left| \varphi(x_j^{(k)}) \right| \right)^{p_k}.$$

Agora, considere a medida de Dirac $\mu_k^g = \delta_{\varphi_k}$, $k = 1, \dots, n$, e portanto

$$\begin{aligned} g(\mu_1^g, \dots, \mu_n^g) &= \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{p} f(b_j^{(k)}, x_j^{(k)})_{k=1}^n \right] - C^p \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \int_{B_{X_k^*}} \sum_{j=1}^m \left(\left| b_j^{(k)} \right| \left| \varphi(x_j^{(k)}) \right| \right)^{p_k} d\mu_k^g \\ &= \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{p} f(b_j^{(k)}, x_j^{(k)})_{k=1}^n \right] - C^p \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \left[\left(\sup_{\varphi \in B_{X_k^*}} \sum_{j=1}^m \left(\left| b_j^{(k)} \right| \left| \varphi(x_j^{(k)}) \right| \right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \right]^{p_k} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{p} f(b_j^{(k)}, x_j^{(k)})_{k=1}^n \right] - C^p \frac{1}{p} \prod_{k=1}^n \left[\left(\sup_{\varphi \in B_{X_k^*}} \sum_{j=1}^m \left(\left| b_j^{(k)} \right| \left| \varphi(x_j^{(k)}) \right| \right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \right]^p \\ &\stackrel{(**)}{\leq} 0, \end{aligned}$$

onde em (*) usamos Lema 2.1.3 e em (**) usamos (2.2). Então aplicando o Lema de Ky Fan obtemos $\bar{\mu}_k \in P(B_{X_k^*})$, $k = 1, \dots, n$, tais que

$$g(\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n) \leq 0$$

para todo $g \in F$. Logo

$$\sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{p} f(b_j^{(k)}, x_j^{(k)})_{k=1}^n \right] - C^p \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \int_{B_{X_k^*}} \sum_{j=1}^m \left(\left| b_j^{(k)} \right| \left| \varphi(x_j^{(k)}) \right| \right)^{p_k} d\bar{\mu}_k \leq 0$$

e, fazendo $m = 1$, teremos (para todos $b^{(k)} \in K$ e $x^{(k)} \in X_k$, $k = 1, \dots, n$),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p} \left(\left| b^{(1)} \dots b^{(n)} \right| \left\| f(a_1 + x^{(1)}, \dots, a_n + x^{(n)}) - f(a_1, \dots, a_n) \right\| \right)^p \\ &\leq C^p \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \int_{B_{X_k^*}} \left(\left| b^{(k)} \right| \left| \varphi(x^{(k)}) \right| \right)^{p_k} d\bar{\mu}_k. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sejam $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ e $b^{(1)}, \dots, b^{(n)} \neq 0$ dados e, para $k = 1, \dots, n$, defina

$$\tau_k := \left(\int_{B_{X_k^*}} \left(|b^{(k)}| |\varphi(x^{(k)})| \right)^{p_k} d\bar{\mu}_k \right)^{1/p_k}.$$

Se $\tau_k = 0$ para todo k então, por (2.3) concluímos que

$$\left(|b^{(1)} \dots b^{(n)}| \left\| f(a_1 + x^{(1)}, \dots, a_n + x^{(n)}) - f(a_1, \dots, a_n) \right\| \right)^p = 0.$$

Assim obtemos (2.1), como planejado. Suponhamos agora que τ_j é diferente de zero para algum $j \in \{1, \dots, n\}$. Considere

$$V = \{j \in \{1, \dots, n\}; \tau_j \neq 0\}$$

e para cada $\beta > 0$ defina

$$\vartheta_{\beta, j} = \begin{cases} \left(\tau_j \beta^{\frac{1}{pp_j}} \right)^{-1} & \text{se } j \in V \\ 1 & \text{se } j \notin V. \end{cases}$$

Então, por (2.3), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} f(\vartheta_{\beta, k} b^{(k)}, x^{(k)})_{k=1}^n &\leq C^p \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \int_{B_{X_k^*}} \left(|\vartheta_{\beta, k} b^{(k)}| |\varphi(x^{(k)})| \right)^{p_k} d\bar{\mu}_k \\ &\leq C^p \sum_{k \in V} \frac{1}{p_k} \vartheta_{\beta, k}^{p_k} \int_{B_{X_k^*}} \left(|b^{(k)}| |\varphi(x^{(k)})| \right)^{p_k} d\bar{\mu}_k \\ &\leq C^p \sum_{k \in V} \frac{1}{p_k} \left(\tau_k \beta^{\frac{1}{pp_k}} \right)^{-p_k} \tau_k^{p_k} \\ &= C^p \sum_{k \in V} \frac{1}{p_k} \frac{1}{\beta^{\frac{1}{p}}} \\ &\leq \frac{C^p}{p} \frac{1}{\beta^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\vartheta_{\beta, 1}^p \dots \vartheta_{\beta, n}^p \frac{1}{p} f(b^{(k)}, x^{(k)})_{k=1}^n \leq \frac{C^p}{p} \frac{1}{\beta^{1/p}}$$

e assim obtemos

$$\begin{aligned}
 f(b^{(k)}, x^{(k)})_{k=1}^n &\leq C^p \beta^{-1/p} \left(\vartheta_{\beta,1}^p \dots \vartheta_{\beta,n}^p \right)^{-1} \\
 &= C^p \beta^{-1/p} \prod_{j \in V} \left(\tau_j \beta^{\frac{1}{p_j}} \right)^p \\
 &= C^p \beta \left(\sum_{j \in V} 1/p_j \right)^{-1/p} \prod_{j \in V} \tau_j^p.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Se $V \neq \{1, \dots, n\}$, então

$$\frac{1}{p} - \sum_{j \in V} \frac{1}{p_j} > 0.$$

Fazendo $\beta \rightarrow \infty$ em (2.4) obtemos

$$f(b^{(k)}, x^{(k)})_{k=1}^n = 0$$

e novamente temos (2.1). Se $V = \{1, \dots, n\}$, o resultado segue facilmente de (2.4), pois

$$\left(|b^{(1)} \dots b^{(n)}| \left\| f(a_1 + x^{(1)}, \dots, a_n + x^{(n)}) - f(a_1, \dots, a_n) \right\| \right)^p = f(b^{(k)}, x^{(k)})_{k=1}^n \leq C^p \prod_{j=1}^n \tau_j^p.$$

■

Note que a desigualdade (2.2), parece surgir uma idéia de somabilidade ponderada. Parece ser pertinente interpretar que cada $x_j^{(k)}$ tem um “peso” $b_j^{(k)}$ e neste contexto a soma

$$\left\| f(a_1 + x_j^{(1)}, \dots, a_n + x_j^{(n)}) - f(a_1, \dots, a_n) \right\|$$

herda um peso $|b_j^{(1)} \dots b_j^{(n)}|$. É fácil mostrar que se f é n -linear e $a_1 = \dots = a_n = 0$, então a desigualdade (2.2) coincide com a desigualdade não ponderada de costume. Assim, o conceito de somabilidade ponderada pode ser visto como uma extensão natural do conceito de aplicações multilineares para as não-lineares (não-multilineares).

2.2 O Teorema da Dominação de Pietsch Generalizado (TDPG)

Sejam $X_1, \dots, X_n, Y$ e $E_1, \dots, E_r$ conjuntos não vazios arbitrários, $\mathcal{H}$ uma família de aplicações de $X_1 \times \dots \times X_n$ em Y . Considere também $K_1, \dots, K_t$ espaços topológicos de Hausdorff compactos, $G_1, \dots, G_t$ espaços de Banach e suponha que as aplicações

$$\begin{cases} R_j: K_j \times E_1 \times \dots \times E_r \times G_j \longrightarrow [0, \infty), j = 1, \dots, t \\ S: \mathcal{H} \times E_1 \times \dots \times E_r \times G_1 \times \dots \times G_t \longrightarrow [0, \infty) \end{cases}$$

satisfazem:

(TDPG1) Para cada $x^{(l)} \in E_l$ e $b \in G_j$, com $(j, l) \in \{1, \dots, t\} \times \{1, \dots, r\}$, a aplicação

$$(R_j)_{x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b}: K_j \longrightarrow [0, \infty) \text{ definida por } (R_j)_{x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b}(\varphi) = R_j(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b)$$

é contínua.

(TDPG2) As seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\begin{cases} R_j(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, \eta_j b^{(j)}) \leq \eta_j R_j(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(j)}) \\ S(f, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, \alpha_1 b^{(1)}, \dots, \alpha_t b^{(t)}) \geq \alpha_1 \dots \alpha_t S(f, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(1)}, \dots, b^{(t)}) \end{cases}$$

para todos $\varphi \in K_j, x^{(l)} \in E_l$ (com $l = 1, \dots, r$), $0 \leq \eta_j, \alpha_j \leq 1, b_j \in G_j$, com $j = 1, \dots, t$ e $f \in \mathcal{H}$.

Definição 2.2.1 Se $0 < p_1, \dots, p_t, p < \infty$, com $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_t}$, uma aplicação $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ pertencente a $\mathcal{H}$ é dita $R_1, \dots, R_t$ - S -abstrata $(p_1, \dots, p_t)$ -somante se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^m S(f, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(t)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{k=1}^t \sup_{\varphi \in K_k} \left(\sum_{j=1}^m R_k(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(k)})^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \quad (2.5)$$

para quaisquer $x_1^{(s)}, \dots, x_m^{(s)} \in E_s$, $b_1^{(l)}, \dots, b_m^{(l)} \in G_l$, $m \in \mathbb{N}$ e $(s, l) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, t\}$.

A demonstração do próximo teorema (o TDPG) imita os passos do Teorema 2.1.4. Devido ao ambiente mais abstrato, a nova demonstração tem dificuldades técnicas extras, mas apenas sua parte final, onde um pouco mais de cuidado será necessário quando lidamos com o parâmetro β .

Teorema 2.2.2 (TDPG) *Seja $f \in \mathcal{H}$. Então f é $R_1, \dots, R_t$ - S -abstrata $(p_1, \dots, p_t)$ -somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e medidas regulares de probabilidade de Borel μ_j em K_j tais que*

$$S(f, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(1)}, \dots, b^{(t)}) \leq C \prod_{j=1}^t \left(\int_{K_j} R_j(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(j)})^{p_j} d\mu_j \right)^{1/p_j} \quad (2.6)$$

para todos $x^{(l)} \in E_l$, $l = 1, \dots, r$ e $b^{(j)} \in G_j$, com $j = 1, \dots, t$.

Demonstração: Suponhamos que existam medidas regulares de probabilidade de Borel $\mu_1, \dots, \mu_t$ e uma constante $C > 0$ satisfazendo (2.6). Então, dados $m \in \mathbb{N}$, $x_j^{(l)} \in E_l$ e $b_j^{(k)} \in G_k$, com $(k, l) \in \{1, \dots, t\} \times \{1, \dots, r\}$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m S(f, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(t)})^p &\leq C^p \sum_{j=1}^m \prod_{k=1}^t \left(\int_{K_k} R_k(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(k)})^{p_k} d\mu_k \right)^{\frac{p}{p_k}} \\ &\stackrel{\text{Desig. de Hölder}}{\leq} C^p \prod_{k=1}^t \left(\sum_{j=1}^m \int_{K_k} R_k(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(k)})^{p_k} d\mu_k \right)^{\frac{p}{p_k}} \\ &\leq C^p \prod_{k=1}^t \left(\sup_{\varphi \in K_k} \sum_{j=1}^m R_k(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(k)})^{p_k} \right)^{\frac{p}{p_k}}. \end{aligned}$$

Portanto f é $R_1, \dots, R_t$ - S -abstrata $(p_1, \dots, p_t)$ -somante. Por outro lado, considere os conjuntos $P(K_k)$ das medidas regulares de probabilidade em $C(K_k)^*$, para todo $k = 1, \dots, t$. Já sabemos que cada $P(K_k)$ é compacto quando cada $C(K_k)^*$ está dotado da topologia fraca estrela (veja o Anexo 2.3). Para cada $(x_j^{(l)})_{j=1}^m$ em E_l e $(b_j^{(s)})_{j=1}^m$ em G_s , com $(s, l) \in \{1, \dots, t\} \times \{1, \dots, r\}$,

defina

$$g = g_{(x_j^{(l)})_{j=1}^m, (b_j^{(s)})_{j=1}^m, (s,l) \in \{1, \dots, t\} \times \{1, \dots, r\}} : P(K_1) \times \dots \times P(K_t) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g((\mu_j)_{j=1}^t) = \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{p} S(f, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(t)})^p - C^p \sum_{k=1}^t \frac{1}{p_k} \int_{K_k} R_k(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(k)})^{p_k} d\mu_k \right].$$

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas tais funções g .

(i) A família $\mathcal{F}$ é côncava. De fato, sejam N um inteiro positivo, $g_j \in \mathcal{F}$ e $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, tais que $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = 1$. Então

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \alpha_k g_k((\mu_j)_{j=1}^t) \\ &= \sum_{k=1}^N \alpha_k \left\{ \sum_{j_k=1}^{m_k} \left[\frac{1}{p} S(f, x_{j_k}^{(1)}, \dots, x_{j_k}^{(r)}, b_{j_k}^{(1)}, \dots, b_{j_k}^{(t)})^p - C^p \sum_{z=1}^t \frac{1}{p_z} \int_{K_z} R_z(\varphi, x_{j_k}^{(1)}, \dots, x_{j_k}^{(r)}, b_{j_k}^{(z)})^{p_z} d\mu_z \right] \right\} \\ &\leq \sum_{k=1}^N \sum_{j_k=1}^{m_k} \left[\frac{1}{p} S(f, x_{j_k}^{(1)}, \dots, x_{j_k}^{(r)}, \alpha_k^{\frac{1}{p_1}} b_{j_k}^{(1)}, \dots, \alpha_k^{\frac{1}{p_t}} b_{j_k}^{(t)})^p - C^p \sum_{z=1}^t \frac{1}{p_z} \int_{K_z} R_z(\varphi, x_{j_k}^{(1)}, \dots, x_{j_k}^{(r)}, \alpha_k^{\frac{1}{p_z}} b_{j_k}^{(z)})^{p_z} d\mu_z \right] \\ &= g_{(x_{j_k}^{(l)})_{j_k, k=1}^{m_k, N}, (\alpha_k^{\frac{1}{p_s}} b_{j_k}^{(s)})_{j_k, k=1}^{m_k, N}, (s,l) \in \{1, \dots, t\} \times \{1, \dots, r\}}((\mu_j)_{j=1}^t). \end{aligned}$$

(ii) Além disso, cada função $g \in \mathcal{F}$ é convexa. Com efeito,

$$\begin{aligned} & g(\lambda(\mu_1, \dots, \mu_t) + (1-\lambda)(\widetilde{\mu}_1, \dots, \widetilde{\mu}_t)) \\ &= g(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\widetilde{\mu}_1, \dots, \lambda\mu_t + (1-\lambda)\widetilde{\mu}_t) \\ &= \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{p} S(f, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(t)})^p - C^p \sum_{z=1}^t \frac{1}{p_z} \int_{K_z} R_z(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(z)})^{p_z} d(\lambda\mu_z + (1-\lambda)\widetilde{\mu}_z) \right] \\ &= \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{p} S(f, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(t)})^p \right] \\ &\quad - C^p \sum_{j=1}^m \left(\lambda \sum_{z=1}^t \frac{1}{p_z} \int_{K_z} R_z(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(z)})^{p_z} d\mu_z + (1-\lambda) \sum_{z=1}^t \frac{1}{p_z} \int_{K_z} R_z(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(z)})^{p_z} d\widetilde{\mu}_z \right) \\ &= \lambda g(\mu_1, \dots, \mu_t) + (1-\lambda)g(\widetilde{\mu}_1, \dots, \widetilde{\mu}_t). \end{aligned}$$

(iii) Também é verdade que cada $g \in F$ é contínua. Para isso, basta mostrarmos que cada aplicação

$$\mu_k \longrightarrow \int_{K_k} R_k \left(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(k)} \right)^{p_k} d\mu_k,$$

é contínua para todo $k = 1, \dots, t$ e $x^{(l)} \in E_l$, com $l \in \{1, \dots, r\}$. Dados $k \in \{1, \dots, t\}$ e $x^{(l)} \in E_l$ ($l \in \{1, \dots, r\}$), como $C(K_k)^*$ está com a topologia fraca estrela, para cada $f \in C(K_k)$, a aplicação

$$\mu_k \in C(K_k)^* \longrightarrow \int_{K_k} f d\mu_k,$$

é contínua. Logo, a restrição

$$\mu_k \in P(K_k) \longrightarrow \int_{K_k} f d\mu_k,$$

também é contínua. Portanto, tomando $f \in C(K_k)$ a aplicação definida por

$$\varphi \in K_k \mapsto f(\varphi) = \left((R_k)_{x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b}(\varphi) \right)^{p_k},$$

segue que $g \in F$ é contínua.

Note que, para cada $g \in F$ existem medidas $\mu_j^g \in P(K_j)$, $j = 1, \dots, t$, tais que

$$g(\mu_1^g, \dots, \mu_t^g) \leq 0.$$

De fato, como cada K_k é compacto ($k = 1, \dots, t$) e $(R_k)_{x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(k)}}$ é contínua, existem $\varphi_k \in K_k$ tais que

$$\sum_{j=1}^m R_k \left(\varphi_k, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(k)} \right)^{p_k} = \sup_{\varphi \in K_k} \sum_{j=1}^m R_k \left(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(k)} \right)^{p_k},$$

para todo $k = 1, \dots, t$.

Agora, considerando as medidas de Dirac $\mu_k^g = \delta_{\varphi_k}$, $k = 1, \dots, t$, segue que

$$\begin{aligned}
& g(\mu_1^g, \dots, \mu_t^g) \\
&= \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{p} S(f, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(r)})^p \right] - C^p \sum_{k=1}^t \frac{1}{p_k} \int_{K_k} \sum_{j=1}^m R_k \left(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(k)} \right)^{p_k} d\mu_k^{g^{(1)}} \\
&= \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{p} S(f, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(r)})^p \right] - C^p \sum_{k=1}^t \frac{1}{p_k} \left[\left(\sum_{j=1}^m R_k \left(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(k)} \right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \right]^{p_k} \\
&= \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{p} S(f, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(r)})^p \right] - C^p \sum_{k=1}^t \frac{1}{p_k} \left[\left(\sup_{\varphi \in K_k} \sum_{j=1}^m R_k \left(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(k)} \right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \right]^{p_k} \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{p} S(f, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(r)})^p \right] - C^p \frac{1}{p} \prod_{k=1}^t \left[\left(\sup_{\varphi \in K_k} \sum_{j=1}^m R_k \left(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(k)} \right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \right]^p \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

onde em (*) estamos usando o Lema 2.1.3. Pelo Lema de Ky Fan, podemos obter medidas $\bar{\mu}_j \in P(K_j)$, $j = 1, \dots, t$, tais que

$$g(\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_t) \leq 0$$

para todo $g \in F$. Então

$$\sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{p} S(f, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(t)})^p \right] - C^p \sum_{k=1}^t \frac{1}{p_k} \int_{K_k} \sum_{j=1}^m R_k \left(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(k)} \right)^{p_k} d\bar{\mu}_k \leq 0$$

e fazendo $m = 1$ temos

$$\frac{1}{p} S(f, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(1)}, \dots, b^{(t)})^p \leq C^p \sum_{k=1}^t \frac{1}{p_k} \int_{K_k} R_k \left(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(k)} \right)^{p_k} d\bar{\mu}_k. \quad (2.7)$$

Dados $x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(1)}, \dots, b^{(t)}$, para $k = 1, \dots, t$, defina, como na demonstração do teorema anterior,

$$\tau_k := \left(\int_{K_k} R_k \left(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(k)} \right)^{p_k} d\bar{\mu}_k \right)^{1/p_k}.$$

Se $\tau_k = 0$ para todo k então, por (2.7), segue que

$$S(f, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(1)}, \dots, b^{(t)})^p = 0$$

e obtemos (2.6), como previsto. Suponhamos agora que τ_j seja diferente de zero para algum $j \in \{1, \dots, t\}$. Considere

$$V = \{j \in \{1, \dots, t\}; \tau_j \neq 0\}$$

e $\beta > 0$ tal que

$$0 < \left(\tau_j \beta^{\frac{1}{pp_j}} \right)^{-1} < 1 \text{ para todo } j \in V. \quad (2.8)$$

É interessante perceber que a definição do parâmetro β é (e tem que ser mesmo) um pouco diferente do que fizemos no teorema anterior.

Considere, também,

$$\vartheta_j = \begin{cases} \left(\tau_j \beta^{\frac{1}{pp_j}} \right)^{-1} & \text{se } j \in V \\ 1 & \text{se } j \notin V. \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} S(f, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, \vartheta_1 b^{(1)}, \dots, \vartheta_t b^{(t)})^p &\leq C^p \sum_{k=1}^t \frac{1}{p_k} \int_{K_k} R_k \left(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, \vartheta_k b^{(k)} \right)^{p_k} d\bar{\mu}_k \\ &\leq C^p \sum_{k \in V} \frac{1}{p_k} \vartheta_k^{p_k} \int_{K_k} R_k \left(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(k)} \right)^{p_k} d\bar{\mu}_k \\ &\leq C^p \sum_{k \in V} \frac{1}{p_k} \left(\tau_k \beta^{\frac{1}{pp_k}} \right)^{-p_k} \tau_k^{p_k} \\ &= C^p \sum_{k \in V} \frac{1}{p_k} \frac{1}{\beta^{\frac{1}{p}}} \\ &\leq \frac{C^p}{p} \frac{1}{\beta^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Daí

$$\vartheta_1^p \dots \vartheta_t^p \frac{1}{p} S(f, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(1)}, \dots, b^{(t)})^p \leq \frac{C^p}{p} \frac{1}{\beta^{1/p}},$$

e assim

$$\begin{aligned}
 S(f, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(1)}, \dots, b^{(t)})^p &\leq C^p \beta^{-1/p} (\vartheta_1^p \dots \vartheta_t^p)^{-1} \\
 &= C^p \beta^{-1/p} \prod_{j \in V} \left(\tau_j \beta^{\frac{1}{p_j}} \right)^p \\
 &= C^p \beta^{(\sum_{j \in V} 1/p_j) - 1/p} \prod_{j \in V} \tau_j^p.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Se $V \neq \{1, \dots, t\}$, então

$$\frac{1}{p} - \sum_{j \in V} \frac{1}{p_j} > 0$$

e fazendo $\beta \rightarrow \infty$ em (2.9) teremos

$$S(f, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(1)}, \dots, b^{(t)})^p = 0,$$

e obtemos novamente (2.6). Note que é, de fato, possível fazer $\beta \rightarrow \infty$ em (2.9), pois isso não fere (2.8).

Se $V = \{1, \dots, t\}$, de (2.9) vê-se que

$$S(f, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(1)}, \dots, b^{(t)})^p \leq C^p \prod_{j=1}^t \tau_j^p,$$

e (2.6) segue imediatamente. ■

2.3 Anexo: A compacidade do conjunto das medidas regulares de probabilidade

Nesta seção, $P(X)$ denotará o conjunto das medidas regulares de probabilidade sobre os borelianos do espaço topológico X .

O teorema abaixo é uma versão de um resultado de caracterização do dual dos espaços das funções contínuas conhecido como Teorema de Riesz-Markov. A versão que apresentamos pode ser encontrada em [5, Theorem 4.3.10], e sua demonstração é baseada no Teorema da

Representação de Daniell ([5, Theorem 4.2.9]):

Teorema 2.3.1 *Sejam X um espaço topológico de Hausdorff compacto e $L : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo que satisfaz $L(1) = 1$ e $L(f) \geq 0$ para toda $f \geq 0$. Então existe uma única $\mu \in P(X)$ tal que*

$$L(f) = \int_X f d\mu$$

para todo $f \in C(X)$.

Note que, sob as hipóteses do teorema anterior,

$$\|L\| = \sup_{f \in B_{C(X)}} |L(f)| = \sup_{f \in B_{C(X)}} \left| \int_X f d\mu \right| \leq \sup_{f \in B_{C(X)}} \int_X |f| d\mu \leq \int_X 1 d\mu = 1.$$

Portanto a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : P(X) &\rightarrow \{L \in C(X)^* : L(1) = 1 \text{ e } L(f) \geq 0 \text{ para toda } f \geq 0\} \\ \mu &\mapsto \Psi(\mu) = L : C(X) \rightarrow \mathbb{R} \\ &f \mapsto \Psi(\mu)(f) = L(f) := \int_X f d\mu \end{aligned}$$

é uma bijeção e o conjunto $P(X)$ é identificado com $\Psi(P(X)) \subset B_{C(X)^*}$ e μ é identificado com $\Psi(\mu) = L$.

A partir de agora os espaços de Banach serão considerados sobre o corpo dos reais.

Seja E um espaço normado. Considere a injeção canônica

$$\begin{aligned} J : E &\rightarrow E^{**} \\ x &\mapsto Jx : E^* \rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto Jx(f) = f(x). \end{aligned}$$

Relembremos que a topologia fraca estrela em E^* , denotada por $\sigma(E^*, E)$, é a topologia com “menos abertos” em E^* que torna contínua todas as aplicações Jx com $x \in E$. Mais precisamente, se todos os funcionais Jx são contínuos em (E, τ) , então $\sigma(E^*, E) \subset \tau$.

É fácil mostrar que a topologia fraca estrela $\sigma(E^*, E)$ é Hausdorff. Além disso, o famoso Teorema de Banach-Alaoglu garante que a bola unitária fechada B_{E^*} é compacta na topologia fraca estrela $\sigma(E^*, E)$.

Nosso objetivo será demonstrar que se X é um espaço de Hausdorff compacto, então $P(X)$ é compacto em $C(X)^*$ com a topologia fraca-estrela; mais precisamente, mostraremos que $\Psi(P(X))$ é compacto em $C(X)^*$ com a topologia fraca-estrela.

Lema 2.3.2 *Se (X_1, τ) é um espaço topológico e $X_2 \subset X_1$ com a topologia induzida de X_1 , então $K \subset X_2$ é compacto em X_2 se, e somente se, K é compacto em X_1 .*

Lema 2.3.3 *Seja X_1 um espaço topológico e $X_2 \subset X_1$ com a topologia induzida de X_1 . Se uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge para x na topologia induzida de X_2 , então $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ também converge para x na topologia de X_1 .*

Teorema 2.3.4 *Se X é um espaço de Hausdorff compacto, então $\Psi(P(X))$ é compacto em $C(X)^*$ com a topologia fraca-estrela.*

Demonstração: Como $\Psi(P(X)) \subset B_{C(X)^*}$ e $B_{C(X)^*}$ é compacto, basta mostrar (pelo Lema 2.3.2) que $\Psi(P(X))$ é compacto em $B_{C(X)^*}$.

Como $B_{C(X)^*}$ é compacto, basta mostrar que $\Psi(P(X))$ é fechado em $B_{C(X)^*}$ (veja [64, Theorem 17.5]). Provemos, portanto, que $\Psi(P(X)) = \overline{\Psi(P(X))}$ em $B_{C(X)^*}$. Considere, portanto, $L \in \overline{\Psi(P(X))} \subset B_{C(X)^*}$.

Seja (L_λ) uma rede em $\Psi(P(X))$ que converge para $L \in B_{C(X)^*}$.

Como $L_\lambda \rightarrow L$ na topologia induzida de $B_{C(X)^*}$, pelo Lema 2.3.3, segue que $L_\lambda \rightarrow L$ na topologia fraca-estrela de $C(X)^*$. Logo

$$L_\lambda(f) \rightarrow L(f)$$

para todo $f \in C(X)$. Note que

$$L(1) = \lim_{\lambda} L_\lambda(1) = 1$$

e

$$L(f) = \lim_{\lambda} L_{\lambda}(f) \geq 0$$

para toda $f \geq 0$. Pelo Teorema 2.3.1, $L \in \Psi(P(X))$ e o resultado segue. ■

Observação 2.3.5 *O Teorema 2.3.4 parece ser um resultado folclórico, mas não encontramos uma demonstração na literatura. Para o caso particular em que X é um espaço métrico compacto, uma demonstração de um resultado essencialmente idêntico ao Teorema 2.3.4 pode ser encontrada em [63]. Em língua portuguesa, também para o caso em que X é um espaço métrico compacto, uma demonstração do Teorema 2.3.4 pode ser encontrada na dissertação de mestrado de Thiago Alves [4].*

Capítulo 3

Recuperando Teoremas da Dominação de Pietsch

Neste capítulo vamos mostrar como é possível recuperar teoremas de dominação do tipo Pietsch conhecidos com a versão generalizada apresentada no capítulo anterior.

3.1 O TDP Unificado

Sejam X, Y e E conjuntos não-vazios arbitrários, $\mathcal{H}$ uma família de funções de X em Y , G um espaço de Banach e K um espaço topológico de Hausdorff compacto. Sejam

$$R : K \times E \times G \rightarrow [0, \infty) \text{ e } S : \mathcal{H} \times E \times G \rightarrow [0, \infty)$$

funções tais que

(1) Para cada $f \in \mathcal{H}$, existe $x_0 \in E$ tal que

$$R(\varphi, x_0, b) = S(f, x_0, b) = 0$$

para quaisquer $\varphi \in K$ e $b \in G$;

(2) A função

$$R_{x,b} : K \rightarrow [0, \infty) \text{ definida por } R_{x,b}(\varphi) = R(\varphi, x, b)$$

é contínua para cada $x \in E$ e $b \in G$;

(3) As seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\begin{aligned} R(\varphi, x, \eta b) &\leq \eta R(\varphi, x, b) \text{ e} \\ \eta S(f, x, b) &\leq S(f, x, \eta b), \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $\varphi \in K$, $x \in E$, $0 \leq \eta \leq 1$, $b \in G$ e $f \in \mathcal{H}$.

Definição 3.1.1 (Botelho, Pellegrino, Rueda, 2010) *Sejam R e S funções definidas como acima e $0 < p < \infty$. Uma função $f \in \mathcal{H}$ é dita R - S abstrata p -somante se existe uma constante $C_1 \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^m S(f, x_j, b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^m R(\varphi, x_j, b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.1)$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_m \in E$, $b_1, \dots, b_m \in G$ e $m \in \mathbb{N}$. Denotamos por $\pi_{RS,p}(f)$ o ínfimo dos C_1 tais que a desigualdade (3.1) continua válida.

O teorema abaixo será chamado de Teorema da Dominação de Pietsch Unificado (veja [20]):

Teorema 3.1.1 (Botelho, Pellegrino, Rueda, 2010) *Se R e S satisfazem (1), (2) e (3) e $0 < p < \infty$, então $f \in \mathcal{H}$ é R - S abstrata p -somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel μ sobre K tais que*

$$S(f, x, b) \leq C \left(\int_K R(\varphi, x, b)^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.2)$$

para todos $x \in E$ e $b \in G$. Além disso, o ínfimo das constantes C é igual a $\pi_{RS,p}(f)^{\frac{1}{p}}$.

Escolhendo $r = t = n = 1$ no Teorema 2.2.2, obtemos o conhecido Teorema 3.1.1. Além disso, é interessante notar que a primeira hipótese sobre as aplicações R e S é desnecessária no nosso caso.

3.2 Revisitando o Teorema da Dominação de Pietsch Unificado (TDFPU)

No capítulo anterior generalizamos o Teorema da Dominação Pietsch para um contexto mais abstrato, que permitia lidar com aplicações não-lineares mais gerais no produto cartesiano de espaços de Banach. E, como uma aplicação, conseguimos recuperar facilmente, com uma hipótese a menos, o Teorema da Dominação Pietsch Unificado de [20]. Nesta seção vamos melhorar ainda mais o Teorema da Dominação Pietsch Unificado.

O nosso objetivo é mostrar que as hipóteses **(1)** e **(3)** não são necessárias. Assim, o Teorema 3.1.1 é verdadeiro para S arbitrária (sem qualquer hipótese) e R satisfazendo apenas a condição **(2)**.

Primeiramente veremos que o Teorema 3.1.1 é válido sem a hipótese **(1)** e, combinando este fato com um argumento creditado a M. Mendel e G. Schechtman por J. Farmer e W.B. Johnson [29] (embora a essência de tal argumento pareça ser bem mais antiga), conseguiremos mostrar que o Teorema 3.1.1 também é válido sem a hipótese **(3)**.

Teorema 3.2.1 ([45]) *Suponha que R e S satisfazem **(2)** e **(3)**. Se $0 < p < \infty$, uma aplicação $f \in \mathcal{H}$ é R - S abstrata p -somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ sobre K tal que*

$$S(f, x, b) \leq C \left(\int_K R(\varphi, x, b)^p d\mu(\varphi) \right)^{1/p} \quad (3.3)$$

para todo $x \in E$ e $b \in G$.

Demonstração: Basta tomar $r = t = n = 1$ no Teorema 2.2.2. ■

Note que (3.1) é equivalente a

$$\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j S(f, x_j, b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j R(\varphi, x_j, b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.4)$$

para todos $x_1, \dots, x_m \in E$, $b_1, \dots, b_m \in G$, números reais positivos λ_j e $m \in \mathbb{N}$. A ideia é demonstrar primeiro que (3.4) é válida para os inteiros, depois passar para os racionais e em seguida para os números reais usando densidade.

Agora, usando (3.4) e o Teorema 3.2.1, podemos demonstrar um teorema de dominação do tipo Pietsch sem qualquer hipótese sobre S e apenas supondo que R satisfaz **(2)**:

Teorema 3.2.2 ([45]) *Suponha que S seja arbitrária e que R satisfaça (2) e seja $0 < p < \infty$. Uma aplicação $f \in \mathcal{H}$ é R - S abstrata p -somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida regular de probabilidade de Borel μ sobre K tal que*

$$S(f, x, b) \leq C \left(\int_K R(\varphi, x, b)^p d\mu(\varphi) \right)^{1/p} \quad (3.5)$$

para todos $x \in E$ e $b \in G$.

Demonstração: Admita que f satisfaça (3.5). Então, dados $x_1, \dots, x_m \in E$ e $b_1, \dots, b_m \in G$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m S(f, x_j, b_j)^p &\leq C^p \sum_{j=1}^m \int_K R(\varphi, x_j, b_j)^p d\mu(\varphi) \\ &= C^p \int_K \sum_{j=1}^m R(\varphi, x_j, b_j)^p d\mu(\varphi) \\ &\leq C^p \sup_{\varphi \in K} \sum_{j=1}^m R(\varphi, x_j, b_j)^p. \end{aligned}$$

Logo f é R - S abstrata p -somante.

Reciprocamente, se $f \in \mathcal{H}$ é R - S abstrata p -somante, então

$$\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j S(f, x_j, b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j R(\varphi, x_j, b_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.6)$$

para todo $x_1, \dots, x_m \in E$, $b_1, \dots, b_m \in G$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0, \infty)$ e $m \in \mathbb{N}$. Seja

$$E_1 = E \times G$$

e defina

$$\bar{R}: K \times E_1 \times \mathbb{K} \longrightarrow [0, \infty) \quad \text{e} \quad \bar{S}: \mathcal{H} \times E_1 \times \mathbb{K} \longrightarrow [0, \infty)$$

por

$$\bar{R}(\varphi, (x, b), \lambda) = |\lambda| R(\varphi, x, b) \quad \text{e} \quad \bar{S}(f, (x, b), \lambda) = |\lambda| S(f, x, b).$$

De (3.6) concluimos que

$$\left(\sum_{j=1}^m \bar{S}(f, (x_j, b_j), \eta_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^m \bar{R}(\varphi, (x_j, b_j), \eta_j)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todos $x_1, \dots, x_m \in E$, $b_1, \dots, b_m \in G$, $\eta_1, \dots, \eta_m \in \mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Como $\bar{R}$ e $\bar{S}$ satisfazem **(2)** e **(3)**, segue do Teorema 3.2.1 que existe uma medida regular μ tal que

$$\bar{S}(f, (x, b), \eta) \leq C \left(\int_K \bar{R}(\varphi, (x, b), \eta)^p d\mu(\varphi) \right)^{1/p}$$

para todos $x \in E$, $b \in G$ e $\eta \in \mathbb{K}$. Fazendo $\eta = 1$ na desigualdade anterior, obtemos

$$S(f, x, b) \leq C \left(\int_K R(\varphi, x, b)^p d\mu(\varphi) \right)^{1/p}$$

para todos $x \in E$ e $b \in G$. ■

3.3 O TDP para aplicações multilineares dominadas

Como é mostrado em [20], não há dúvida de que o TDPU recupera imediatamente vários teoremas conhecidos do tipo Pietsch. No entanto, em pelo menos uma situação importante, o TDP não é obtido apenas com escolhas de parâmetros convenientes no TDPU de [20].

Sejam $1 \leq q_1, \dots, q_n < \infty$ onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \dots + \frac{1}{q_n}$. Uma aplicação n -linear $T : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ é dita $(q_1, \dots, q_n)$ -dominada se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^m \left\| T(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)}) \right\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X_1^*}} \left(\sum_{j=1}^m \left| \varphi(x_j^{(1)}) \right|^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \cdots \sup_{\varphi \in B_{X_n^*}} \left(\sum_{j=1}^m \left| \varphi(x_j^{(n)}) \right|^{q_n} \right)^{\frac{1}{q_n}}, \quad (3.7)$$

qualquer que seja a escolha do inteiro positivo m e $x_j^{(k)} \in X_k$, $k = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. O TDP clássico para aplicações multilineares $(q_1, \dots, q_n)$ -dominadas (veja, por exemplo, [48]) assegura que T é $(q_1, \dots, q_n)$ -dominada se, e somente se, existem medidas regulares de probabilidade μ_k em $B_{X_k^*}$, $k = 1, \dots, n$, e uma constante $C > 0$ tais que

$$\|T(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})\| \leq C \left(\int_{B_{X_1^*}} |\varphi(x^{(1)})|^{q_1} d\mu_1 \right)^{\frac{1}{q_1}} \cdots \left(\int_{B_{X_n^*}} |\varphi(x^{(n)})|^{q_n} d\mu_n \right)^{\frac{1}{q_n}}.$$

Ao contrário do que acontece em [20], o Teorema 2.2.2 recupera facilmente, escolhendo parâmetros adequados, o teorema da dominação para esta classe de aplicações. Para isso, basta fazermos as seguintes escolhas:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = n \\ G_j = X_j \text{ e } K_j = B_{X_j^*} \text{ para todo } j = 1, \dots, n \\ E_i = \mathbb{K}, i = 1, \dots, r \\ \mathcal{H} = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y) \\ p_j = q_j \text{ para todo } j = 1, \dots, n \\ S(T, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(1)}, \dots, b^{(n)}) = \|T(b^{(1)}, \dots, b^{(n)})\| \\ R_k(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(k)}) = |\varphi(b^{(k)})| \text{ para todo } k = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

Então, com estas escolhas, T é $R_1, \dots, R_n$ - S -abstrata $(q_1, \dots, q_n)$ -somante quando

$$\left(\sum_{j=1}^m S(T, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(n)})^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \prod_{k=1}^n \sup_{\varphi \in K_k} \left(\sum_{j=1}^m R_k \left(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(r)}, b_j^{(k)} \right)^{q_k} \right)^{\frac{1}{q_k}}.$$

Mas isso é equivalente a

$$\left(\sum_{j=1}^m \left\| T(b_j^{(1)}, \dots, b_j^{(n)}) \right\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \prod_{k=1}^n \sup_{\varphi \in B_{X_k^*}} \left(\sum_{j=1}^m \left| \varphi \left(b_j^{(k)} \right) \right|^{q_k} \right)^{\frac{1}{q_k}}.$$

Logo T é $R_1, \dots, R_n$ - S -abstrata $(q_1, \dots, q_n)$ -somante se, e somente se, T é $(q_1, \dots, q_n)$ -dominada. Neste caso, o TDPG nos diz que existem uma constante $C > 0$ e medidas de Borel, regulares, de probabilidade μ_k em K_k , $k = 1, \dots, n$, tais que

$$S(T, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(1)}, \dots, b^{(n)}) \leq C \prod_{k=1}^n \left(\int_{K_k} R_k \left(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, b^{(k)} \right)^{q_k} d\mu_k \right)^{\frac{1}{q_k}},$$

isto é,

$$\left\| T(b^{(1)}, \dots, b^{(n)}) \right\| \leq C \prod_{k=1}^n \left(\int_{B_{X_k^*}} \left| \varphi(b^{(k)}) \right|^{q_k} d\mu_k \right)^{\frac{1}{q_k}}.$$

3.4 O TDP para operadores multilineares Cohen fortemente q -somantes

A classe dos operadores multilineares Cohen fortemente q -somantes foi introduzida por D. Achour e L. Mezrag em [1]. Sejam $1 < q < \infty$ e $X_1, \dots, X_n, Y$ espaços de Banach arbitrários. Um operador n -linear contínuo $T : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ é Cohen fortemente q -somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que para qualquer inteiro positivo m , $x_1^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}$ em X_k ($k = 1, \dots, n$) e quaisquer $y_1^*, \dots, y_m^*$ em Y^* , tem-se

$$\sum_{j=1}^m \left| y_j^* \left(T(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)}) \right) \right| \leq C \left(\sum_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \left\| x_j^{(k)} \right\|^q \right)^{1/q} \sup_{\varphi \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{j=1}^m \left| \varphi(y_j^*) \right|^{q^*} \right)^{1/q^*}. \quad (3.8)$$

No mesmo artigo os autores demonstraram o seguinte teorema do tipo-Pietsch:

Teorema 3.4.1 (Ahour, Mezrag, 2007) *Uma aplicação n -linear contínua $T : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Y$ é Cohen fortemente q -somante se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ e uma medida de Borel, regular de probabilidade μ em $B_{Y^{**}}$ tal que para todo $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, y^*)$ em $X_1 \times \cdots \times X_n \times Y^*$ a desigualdade*

$$|y^*(T(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}))| \leq C \prod_{k=1}^n \|x^{(k)}\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\varphi(y^*)|^{q^*} d\mu \right)^{\frac{1}{q^*}} \quad (3.9)$$

é satisfeita.

Agora, note que, ao escolhermos os parâmetros

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 2 \text{ e } r = n \\ E_i = X_i \text{ para todo } i = 1, \dots, n-1 \\ G_1 = X_n \text{ e } G_2 = Y^* \\ K_1 = B_{X_1^* \times \cdots \times X_n^*} \text{ e } K_2 = B_{Y^{**}} \\ \mathcal{H} = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y) \\ p = 1, p_1 = q \text{ e } p_2 = q^* \\ S(T, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, y^*) = |y^*(T(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}))| \\ R_1(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \|x^{(1)}\| \cdots \|x^{(n)}\| \\ R_2(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}, y^*) = |\varphi(y^*)|, \end{array} \right.$$

T é R_1, R_2 - S abstrata (q, q^*) -somante quando

$$\sum_{j=1}^m S(T, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)}, y_j^*) \leq C \sup_{\varphi \in K_1} \left(\sum_{j=1}^m R_1(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)})^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ \sup_{\varphi \in K_2} \left(\sum_{j=1}^m R_2(\varphi, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n-1)}, y_j^*)^{q^*} \right)^{\frac{1}{q^*}},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^m \left| y_j^* \left(T(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)}) \right) \right| & (3.10) \\
 & \leq C \sup_{\varphi \in B_{X_1^* \times \dots \times X_n^*}} \left(\sum_{j=1}^m \left(\|x_j^{(1)}\| \cdots \|x_j^{(n)}\| \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\varphi \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{j=1}^m |\varphi(y_j^*)|^{q^*} \right)^{\frac{1}{q^*}} \\
 & = C \left(\sum_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \|x_j^{(k)}\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\varphi \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{j=1}^m |\varphi(y_j^*)|^{q^*} \right)^{\frac{1}{q^*}},
 \end{aligned}$$

e isto é equivalente a dizer que T é Cohen fortemente q -somante. O TDPG nos diz que T é R_1, R_2 - S abstrata (q, q^*) -somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e medidas de Borel regulares de probabilidade μ_k em K_k , $k = 1, 2$, tais que

$$\begin{aligned}
 & S(T, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, y^*) \\
 & \leq C \left(\int_{K_1} R_1(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(n)})^q d\mu_1 \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{K_2} R_2(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}, y^*)^{q^*} d\mu_2 \right)^{\frac{1}{q^*}},
 \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
 & \left| y^* \left(T(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \right) \right| \\
 & \leq C \left(\int_{B_{X_1^* \times \dots \times X_n^*}} \left(\|x^{(1)}\| \cdots \|x^{(n)}\| \right)^q d\mu_1 \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\varphi(y^*)|^{q^*} d\mu_2 \right)^{\frac{1}{q^*}} \\
 & = C \|x^{(1)}\| \cdots \|x^{(n)}\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\varphi(y^*)|^{q^*} d\mu_{n+1} \right)^{\frac{1}{q^*}}
 \end{aligned}$$

e recuperamos (3.9).

3.5 O TDP para polinômios m -homogêneos Cohen fortemente q -somantes

Recentemente, em [2], D. Achour e K. Saadi introduziram o conceito de polinômios m -homogêneos Cohen fortemente q -somantes e mostraram o TDP para esta classe de polinômios. Fixado $m \in \mathbb{N}$, sejam $1 < q < \infty$ e X, Y espaços de Banach arbitrários.

Definição 3.5.1 *Um polinômio m -homogêneo $P : X \rightarrow Y$ é Cohen fortemente q -somante se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\sum_{j=1}^n |y_j^*(P(x_j))| \leq C \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^{mq} \right)^{1/q} \sup_{\varphi \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{j=1}^m |\varphi(y_j^*)|^{q^*} \right)^{1/q^*} \quad (3.11)$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_n$ em X e $y_1^*, \dots, y_n^*$ em Y^* .

Esta classe é denotada por $\mathcal{P}_{Coh}^q(mX, Y)$ e está equipada com a norma

$$d_p(P) = \inf\{C; C \text{ satisfaz (3.11)}\}.$$

Teorema 3.5.2 (Achour, Saadi, 2010) *Seja $m \in \mathbb{N}$. Um polinômio m -homogêneo $P \in \mathcal{P}(mX, Y)$ é Cohen fortemente q -somante ($1 \leq q < \infty$) se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de Borel, regular de probabilidade μ em $B_{Y^{**}}$ tais que para todos $x \in X$ e $y^{**} \in Y^{**}$, a desigualdade*

$$|y^*(P(x))| \leq C \|x\|^m \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\varphi(y^*)|^{q^*} d\mu \right)^{\frac{1}{q^*}} \quad (3.12)$$

é satisfeita.

Escolhendo os parâmetros

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 2 \text{ e } r = 1 \\ E = \mathbb{K} \\ G_1 = X \text{ e } G_2 = Y^* \\ K_1 = B_{X^*} \text{ e } K_2 = B_{Y^{**}} \\ \mathcal{H} = \mathcal{P}(^m X, Y) \\ p = 1, \ p_1 = q \text{ e } p_2 = q^* \\ S(P, b, x, y^*) = |y^*(P(x))| \\ R_1(\varphi, b, x) = \|x\|^m \\ R_2(\varphi, b, y^*) = |\varphi(y^*)| \end{array} \right.$$

segue que P é R_1, R_2 - S abstrata (q, q^*) -somante quando

$$\sum_{j=1}^n S(P, b_j, x_j, y_j^*) \leq C \sup_{\varphi \in K_1} \left(\sum_{j=1}^n R_1(\varphi, b_j, x_j)^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\varphi \in K_2} \left(\sum_{j=1}^n R_2(\varphi, b_j, x_j, y_j^*)^{q^*} \right)^{\frac{1}{q^*}},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |y_j^*(P(x_j))| &\leq C \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^{mq} \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\varphi \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(y_j^*)|^{q^*} \right)^{\frac{1}{q^*}} \\ &= C \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^{mq} \right)^{1/q} \sup_{\varphi \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{j=1}^m |\varphi(y_j^*)|^{q^*} \right)^{1/q^*}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pelo TDPG sabemos que P é R_1, R_2 - S abstrata (q, q^*) -somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e medidas de Borel regulares de probabilidade μ_k em K_k , $k = 1, 2$, tais que

$$S(P, b, x, y^*) \leq C \left(\int_{K_1} R_1(\varphi, b, x)^q d\mu_1 \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{K_2} R_2(\varphi, b, x, y^*)^{q^*} d\mu_2 \right)^{\frac{1}{q^*}},$$

isto é,

$$\begin{aligned} |y^*(P(x))| &\leq C \left(\int_{B_{X^*}} \|x\|^{mq} d\mu_1 \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\varphi(y^*)|^{q^*} d\mu_2 \right)^{\frac{1}{q^*}} \\ &= C \|x\|^m \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\varphi(y^*)|^{q^*} d\mu_2 \right)^{\frac{1}{q^*}} \end{aligned}$$

como queríamos.

3.6 Uma aplicação do TDPG para aplicações arbitrárias

Na Seção 2.1, num comentário logo após o Teorema 2.1.4, surge a noção de somabilidade ponderada como um conceito natural quando estávamos lidando com o Problema 5.

Nesta seção vamos observar que este conceito de fato emerge em situações mais abstratas e parece ser natural na evolução do processo da teoria não-linear.

Sejam $0 < q_1, \dots, q_n < \infty$, $1/q = \sum_{j=1}^n 1/q_j$, $X_1, \dots, X_n$ e Y espaços de Banach. Consideremos ainda $Map(X_1, \dots, X_n; Y)$ o conjunto de todas as funções $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ e

$$A : Map(X_1, \dots, X_n; Y) \times X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow [0, \infty)$$

uma aplicação arbitrária. Dizemos que $f \in Map(X_1, \dots, X_n; Y)$ é A - $(q_1, \dots, q_n)$ -dominada se existem uma constante $C > 0$ e medidas de probabilidade de Borel μ_k em $B_{X_k^*}$, $k = 1, \dots, n$ (com a topologia fraca-estrela), tais que

$$A(f, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \leq C \left(\int_{B_{X_1^*}} |\varphi(x^{(1)})|^{q_1} d\mu_1 \right)^{\frac{1}{q_1}} \cdots \left(\int_{B_{X_n^*}} |\varphi(x^{(n)})|^{q_n} d\mu_n \right)^{\frac{1}{q_n}}, \quad (3.14)$$

quaisquer que sejam o inteiro positivo m e $x_j^{(k)} \in X_k$, $k = 1, \dots, n$.

Deve ser mencionado que expressões mais abstratas podem ser utilizadas no lado direito

de (3.14). No entanto, uma vez que nossa intenção é mais ilustrativa do que exaustiva, preferimos lidar com este caso mais simples.

Teorema 3.6.1 *Uma aplicação $f \in \text{Map}(X_1, \dots, X_n; Y)$ é A - $(q_1, \dots, q_n)$ -dominada se, e somente se, existe $C > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^m \left(|b_j^{(1)} \dots b_j^{(n)}| A(f, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)}) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \prod_{k=1}^n \sup_{\varphi \in B_{X_k^*}} \left(\sum_{j=1}^m \left(|b_j^{(k)}| |\varphi(x_j^{(k)})| \right)^{q_k} \right)^{1/q_k} \quad (3.15)$$

para todo inteiro positivo m , $(x_j^{(k)}, b_j^{(k)}) \in X_k \times \mathbb{K}$, com $(j, k) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$.

Demonstração: Escolhendo os parâmetros

$$\left\{ \begin{array}{l} r = t = n \\ E_j = X_j \text{ e } G_j = \mathbb{K} \text{ para todo } j = 1, \dots, n \\ K_j = B_{X_j^*} \text{ para todo } j = 1, \dots, n \\ \mathcal{H} = \text{Map}(X_1, \dots, X_n; Y) \\ p = q \text{ e } p_j = q_j \text{ para todo } j = 1, \dots, n \\ S(f, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, b^{(1)}, \dots, b^{(n)}) = |b^{(1)} \dots b^{(n)}| A(f, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \\ R_k(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, b^{(k)}) = |b^{(k)}| |\varphi(x^{(k)})| \text{ para todo } k = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

segue facilmente que (3.15) é válida se, e somente se, f é $R_1, \dots, R_n$ - S abstrata $(q_1, \dots, q_n)$ -somante. Neste caso, o TDPG assegura que existem uma constante $C > 0$ e medidas μ_k em K_k , $k = 1, \dots, n$, tais que

$$S(T, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, b^{(1)}, \dots, b^{(n)}) \leq C \prod_{k=1}^n \left(\int_{K_k} R_k(\varphi, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, b^{(k)})^{q_k} d\mu_k \right)^{\frac{1}{q_k}},$$

isto é,

$$|b^{(1)} \dots b^{(n)}| A(f, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \leq C \prod_{k=1}^n \left(\int_{B_{X_k^*}} (|b^{(k)}| |\varphi(x^{(k)})|)^{q_k} d\mu_k \right)^{\frac{1}{q_k}},$$

para todo $(x^{(k)}, b^{(k)}) \in X_k \times \mathbb{K}$, $k = 1, \dots, n$, e obtemos (3.14). ■

Referências Bibliográficas

- [1] D. Achour e L. Mezrag, *On the Cohen strongly p -summing multilinear operators*, J. Math. Anal. Appl. **327** (2007), 550-563.
- [2] D. Achour e K. Saadi, *A polynomial characterization of Hilbert spaces*, Collect. Math. **61**, 3 (2010), 291-301.
- [3] R. Alencar e M. C. Matos, *Some classes of multilinear mappings between Banach spaces*, Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático 12, Universidad Complutense Madrid, (1989).
- [4] T.R. Alves, *Polinômios dominados entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2011.
- [5] R. Ash, Measure, *Integration and Functional Analysis*, Academic Press, 1972.
- [6] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, PWN, 1932.
- [7] A.T. Bernardino, *On cotype and a Grothendieck-type theorem for absolutely summing multilinear operators*, to appear in Quaest. Math.
- [8] O. Blasco, G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, *Summability of multilinear mappings: Littlewood, Orlicz and beyond*, Monatshefte für Mathematik. **163** (2011), 131-147.
- [9] F. Bombal, D. Pérez-García e I. Villanueva, *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem*, Q. J. Math. **55** (2004), 441-450.

-
- [10] G. Botelho, *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note Mat. **25** (2005/2006), 69-102.
- [11] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek e D. Pellegrino, *Holomorphy types and ideals of multilinear mappings*, Studia Math. **177** (2006), 43-65.
- [12] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek e D. Pellegrino, *Inclusions and coincidences for multiple summing multilinear mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 991-1000.
- [13] G. Botelho, C. Michels e D. Pellegrino, *Complex interpolation and summability properties of multilinear operators*, Rev. Matem. Complutense. **23** (2010), 139-161.
- [14] G. Botelho e D. Pellegrino, *Two new properties of ideals of polynomials and applications*, Indag. Math. (N.S.). **16** (2005), 157-169.
- [15] G. Botelho e D. Pellegrino, *Coincidence situations for absolutely summing non-linear mappings*, Port. Math. **64** (2007), 175-191.
- [16] G. Botelho e D. Pellegrino, *Coincidences for multiple summing mappings*, In: II Enama, 27-28, João Pessoa, Brazil (2008)
- [17] G. Botelho e D. Pellegrino, *When every multilinear mapping is multiple summing*, Math. Nachr. **282** (2009), 1414-1422.
- [18] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, *Pietsch's factorization theorem for dominated polynomials*, J. Funct. Anal. **243** (2007), 257-269.
- [19] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, *A nonlinear Pietsch Domination Theorem*, Monatsh. Math. **158** (2009), 247-257.
- [20] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, *A unified Pietsch Domination Theorem*, J. Math. Anal. Appl. **365** (2010), 269-276.
- [21] E. Çaliskan e D. Pellegrino, *On the multilinear generalizations of the concept of absolutely summing operators*, Rocky Mountain J. Math. **37** (2007), 1137-1154.

- [22] D. Carando, V. Dimant e S. Muro, *Coherent sequences of polynomials ideals on Banach spaces*, Math. Nachr. **282** (2009), 1111-1133.
- [23] D. Carando, V. Dimant e P. Sevilla-Peris, *Ideals of multilinear forms - a limit order approach*, Positivity. **11** (2007), 589-607.
- [24] A. Defant e K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1993.
- [25] J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press, 1995.
- [26] J. Diestel, H. Jarchow e A. Pietsch, *Operator ideals, in Handbook of the geometry of Banach spaces*, Vol. I, 437-496, North-Holland, Amsterdam, 2001.
- [27] V. Dimant, *Strongly p -summing multilinear operators*, J. Math. Anal. Appl. **278** (2003), 182-193.
- [28] A. Dvoretzky e C.A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **36** (1950), 192-197.
- [29] J. Farmer e W. B. Johnson, *Lipschitz p -summing operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 2989-2995.
- [30] S. Geiss, *Ideale multilinearer Abbildungen*, Diplomarbeit, 1985.
- [31] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs Acad. Math. Soc. **16**, 1955.
- [32] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. São Paulo. **8** (1956), 1-79.
- [33] G. H. Hardy, J.E. Littlewood e G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1952.

-
- [34] H. Jarchow, C. Palazuelos, D. Pérez-García e I. Villanueva, *Hahn-Banach extension of multilinear forms and summability*, J. Math. Anal. Appl. **336** (2007), 1161-1177.
- [35] H. Junek, M. C. Matos e D. Pellegrino, *Inclusion theorems for absolutely summing holomorphic mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 3983-3991.
- [36] S. Kwapien, *Some remarks on (p, q) -summing operators in l_p spaces*, Studia Math. **29** (1968), 327-337.
- [37] J. Lindenstrauss e A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ spaces and their applications*. Studia Math. **29** (1968), 275-326.
- [38] F. Martínez-Giménez e E. A. Sánchez-Pérez, *Vector measure range duality and factorizations of (D, p) -summing operators from Banach function spaces*, Bull. Braz. Math. Soc. New series. **35** (2004), 51-69.
- [39] M. C. Matos, *Strictly absolutely summing multilinear mappings*, Relatório Técnico 03/92, Unicamp, 1992.
- [40] M. C. Matos. *Absolutely summing holomorphic mappings*, An. Acad. Brasil. Ciênc. **68** (1996), 1-13.
- [41] M. C. Matos. *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings*, Collectanea Math. **54** (2003), 111-136.
- [42] R. D. Mauldin, *The Scottish book*, Birkhauser, 1982.
- [43] B. Mitiagin e A. Pełczyński, *Nuclear operators and approximative dimensions*, Proceedings International Congress of Mathematics, Moscow, 1966.
- [44] X. Mujica, *$\tau(p; q)$ -summing mappings and the domination theorem*, Port. Math. **65** (2008), 221-226.
- [45] D. Pellegrino e J. Santos, *A general Pietsch Domination Theorem*, J. Math. Anal. Appl. **375** (2011), 371-374.

- [46] D. Pellegrino e J. Santos, *On summability of nonlinear mappings: a new approach*, to appear in Math. Z., DOI: 10.1007/s00209-010-0792-4.
- [47] D. Pellegrino e J. Santos, *Absolutely summing multilinear operators: a panorama*. to appear in Quaest. Math.
- [48] D. Pérez-García, *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Dissertação de Mestrado, Universidad Complutense de Madrid, 2002
- [49] D. Pérez-García, *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Tese de Doutorado, Universidad Complutense de Madrid, 2003.
- [50] D. Pérez-García, *The inclusion theorem for multiple summing operators*, Studia Math. **165** (2004), 275-290.
- [51] D. Pérez-García, *Comparing different classes of absolutely summing multilinear operators*, Arch. Math. **85** (2005), 258-267.
- [52] D. Pérez-García e I. Villanueva. *Multiple summing operators on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **285** (2003), 86-96.
- [53] A. Pietsch, *Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math. **27** (1967), 333 – 353.
- [54] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.
- [55] A. Pietsch. *Ideals of multilinear functionals*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, 185-199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.
- [56] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals*, Forschungsergebnisse, Friedrich Schiller Universität, Jena, 1983.
- [57] D. Popa, *Reverse inclusions for multiple summing operators*, J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), 360-368.

- [58] D. Popa, *Multilinear variants of Maurey and Pietsch theorems and applications*, J. Math. Anal. Appl. **368** (2010) 157–168.
- [59] J. Santos, *Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.
- [60] B. Schneider, *On absolutely p -summing and related multilinear mappings*, Brandenburgische Landeshochschule Wissenschaftliche Zeitschrift **35** (1991), 105-117.
- [61] M. Souza, *Aplicações multilineares completamente absolutamente somantes*, Thesis, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2003.
- [62] J. M. Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class: An introduction to the art of mathematical inequalities*, Cambridge University Press, 2004.
- [63] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [64] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, 2004.