



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Matemática

Doutorado em Matemática

**Hipersuperfícies cúbicas de hessiano nulo
e cúbicas desenvolvíveis**

Rodrigo José Gondim Neves

Tese de Doutorado

Recife

27 de Fevereiro de 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Matemática

Rodrigo José Gondim Neves

**Hipersuperfícies cúbicas de hessiano nulo e cúbicas
desenvolvíveis**

*Trabalho apresentado ao Programa de Doutorado em
Matemática do Departamento de Matemática da UNIVER-
SIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO como requisito
parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.*

Orientador: *Prof. Aron Simis / Prof. Francesco Russo*

Recife

27 de Fevereiro de 2010

Catálogo na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Gondim, Rodrigo
Hipersuperfícies cúbicas de hessiano nulo e cúbicas
desenvolvíveis / Aron Simis - Recife: O Autor, 2010.
xvi, 78 p.

Orientador: Aron Simis.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco.
CCEN, Matemática, 2010.

Inclui bibliografia.

1. Álgebra. 2. Geometria algébrica. I. Simis, Aron
(orientador). II. Título.

512

CDD (22. ed.)

MEI2011 – 141

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado:

Aron Simis, UFPE

Orientador

Ramón Orestes Mendoza Ahumada, UFPE

Israel Vainsencher, UFMG

Carolina Bheking Araújo, IMPA

Jorge Vítório Pereira, IMPA

HIPERSUPERFÍCIES CÚBICAS COM HESSIANO NULO E CÚBICAS
DESENVOLVÍVEIS

Por

Rodrigo José Gondim Neves

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415 – Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Fevereiro – 2010

Aos que amo, eles o sabem.

Agradecimentos

À minha família, pelo carinho e amor incondicionais.

Aos mestres que fizeram a diferença em minha vida, tendo contribuído de forma significativa para que fossem possíveis vencer todas essas etapas.

Aos amigos de várias gerações e lugares que tanto me ensinaram sobre a vida.

Aos companheiros da Matemática pelo estímulo e apoio.

Ao CNPQ e à Capes pelo suporte.

Resumo

O tema central da presente tese é a descrição algebro-geométrica de hipersuperfícies cúbicas, que não são cones e cujo hessiano é identicamente nulo. Hesse (1851) acreditava ter caracterizado os cones por intermédio do anulamento do determinante hessiano, entretanto Gordan e Noether (1876) construíram classes de exemplos de hipersuperfícies que não são cones e cujo hessiano é identicamente nulo. Baseado no posterior trabalho de Perazzo (1902), para as cúbicas, demos formas canônicas e teoremas de estrutura geométricos para tais hipersuperfícies, completando a classificação das mesmas em um espaço projetivo de dimensão menor ou igual a sete. Sob uma ótica mais moderna enfatizamos a conexão entre tais hipersuperfícies e as hipersuperfícies desenvolvíveis, cujo mapa de Gauss é degenerado, via o hessiano que é um importante invariante nesse contexto. Além de produzirmos novos exemplos de hipersuperfícies desenvolvíveis demos uma classificação das mesmas em um espaço de dimensão menor que 6. As hipersuperfícies desenvolvíveis são um moderno e importante tema de pesquisa em várias áreas da matemática tendo ainda aplicações em computação gráfica, desenho industrial e física. Exemplos em dimensão maior que 4 são raros e o entendimento de sua estrutura geométrica é de grande interesse.

Palavras-chave: hessiano de uma hipersuperfície, variedades desenvolvíveis, variedades com mapa de Gauss degenerado, folheação de Monge-Ampère.

Abstract

The main goal of this theses is the algebraic-geometric description of cubic hypersurfaces, not cones with vanishing hessian. Hesse (1851) claim twice (wrongly) that all hypersurface with vanishing hessian are cone (cones have vanishing hessian). Gordan and Noether built series of counterexamples for Hesse's claim, *i.e.* hypersurface, not cones with vanishing hessian.

The theses was based on the work of Umberto Perazzo (1902), for cubic hypersurfaces, we reobtain Perazzo's canonical forms on a space of dimension less than seven and obtain the canonical forms in P^7 furthermore we give structure theorems to determine their geometry. In a modern approach we study the connection between developable hypersurfaces (degenerated Gauss map) and the hypersurfaces with vanishing hessian. In this setting we produce new geometric examples of developable cubics and we classify all of them on a space of dimension four and five. Developable hypersurfaces are an important subject in various areas of mathematics and also in graphic computation, industrial design and physics. Non trivial examples in dimension 5 and more are not very simple of produce.

Keywords: hessian, hessian of a hypersurface, developable variety , degenerate Gauss map, Monge-Ampère foliation.

Sumário

1	Hipersuperfícies cúbicas de hessiano nulo	1
1.1	O mapa polar de uma hipersuperfície e polaridade	1
1.2	O lugar singular de uma cúbica com hessiano nulo	7
1.3	O mapa de Perazzo	11
1.4	Estrutura das hipersuperfícies de Perazzo	18
1.5	Forma canônica de uma classe especial	24
2	Classificação das hipersuperfícies cúbicas de Hessiano nulo	34
2.1	Cúbicas de hessiano nulo em P^3	34
2.2	Cúbicas de hessiano nulo em P^4	35
2.3	Cúbicas de hessiano nulo em P^5	43
2.4	Cúbicas de hessiano nulo em P^6	50
2.4.1	Imagem de Perazzo de dimensão 1	50
2.4.2	Imagem de Perazzo de dimensão 2	52
2.5	Cúbicas de hessiano nulo em P^7	57
2.5.1	Imagem de Perazzo de dimensão 1	58
2.5.2	Imagem de Perazzo de dimensão 2	59

2.6	Exemplos em dimensão superior	63
2.6.1	O caso de P^8	63
2.6.2	Uma classe de exemplos extremais	64
2.6.3	Exemplos cuja imagem polar tem codimensão maior que 1	64
3	Hipersuperfícies cúbicas desenvolvíveis	66
3.1	Relação entre hipersuperfícies desenvolvíveis e de hessiano nulo	66
3.2	Classificação das Cúbicas desenvolvíveis em P^4	71
3.3	Classificação das Cúbicas desenvolvíveis em P^5	74

Introdução

As superfícies em um espaço tridimensional foram amplamente estudadas sob diversos pontos de vista: diferencial, analítico, algébrico (para citar os mais importantes).

Dentre as várias classes de superfícies, destacamos as seguintes, de natureza especial:

1. regradas: superfícies folheadas por retas, isto é, superfícies cobertas por retas, de modo que, por um ponto geral passe exatamente uma de tais retas;
2. superfícies desenvolvíveis: superfícies regradas com a propriedade adicional de que, ao longo de uma reta geral da folheação, o plano tangente é constante;
3. superfícies com hessiano nulo: superfícies dadas, implicitamente, por uma (única) equação cujo determinante hessiano é identicamente nulo.

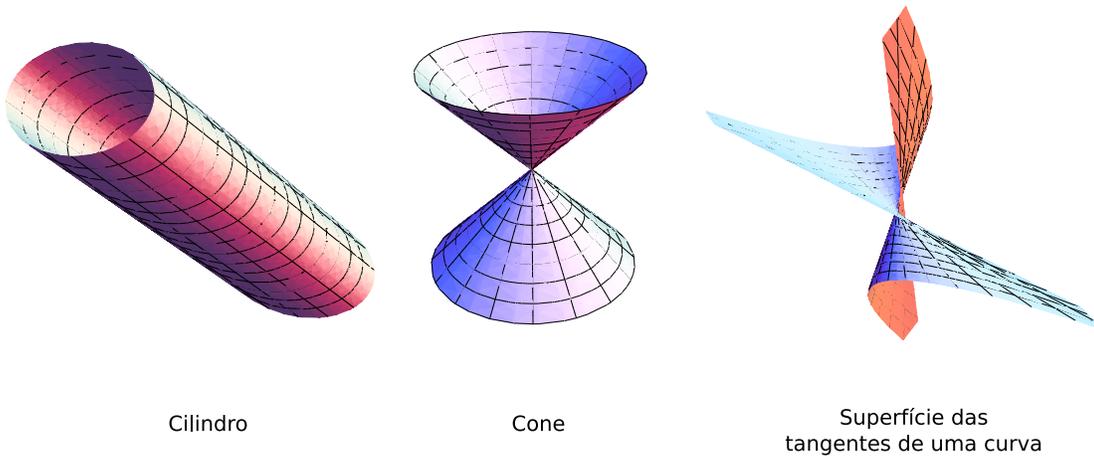
Nos concentraremos nas duas últimas classes.

Para as superfícies dadas implicitamente por uma equação, a condição de desenvolvibilidade é equivalente ao anulamento do determinante hessiano módulo o ideal gerado pela equação que a define, ou seja, esta equação ser um fator do determinante hessiano (notemos ainda que, para superfícies em \mathbb{R}^3 , a condição é equivalente ao anulamento da curvatura gaussiana.) Em particular, se o hessiano for identicamente nulo, então tal superfície é desenvolvível.

Uma classe relativamente trivial de superfícies desenvolvíveis são os cilindros (e cones) que naturalmente possuem hessiano nulo. Um outro exemplo interessante de superfície desenvolvível (que deu origem à nomenclatura) é a superfície tangencial de uma curva espacial (ditas obtidas por tangentes desenvolvidas), ou seja, a superfície dada, conjuntisticamente, pelo fecho da união das retas tangentes pelos pontos lisos de uma curva espacial.

Recentemente, as superfícies desenvolvíveis vêm sendo utilizadas em computação e desenho industrial além de possuir ligações com a física. Remetemos o leitor às referências [AG] e [FP], que formam uma boa introdução ao tema.

Num espaço tridimensional as únicas classes de superfícies desenvolvíveis são os cilindros, os cones e as tangentes desenvolvidas a partir de uma curva espacial (ao menos localmente). O problema, do ponto de vista diferencial, são as singularidades que ocorrem naturalmente nas superfícies desenvolvíveis. Se, por outro lado considerarmos superfícies algébricas (afins, definidas sobre \mathbb{R} ou \mathbb{C}), como inicialmente estudado em [Seg2], então as únicas superfícies desenvolvíveis são:



Uma das vantagens de se trabalhar com superfícies algébricas é poder controlar (razoavelmente) seu lugar singular que, em particular, é uma subvariedade da superfície. No espaço projetivo cones e cilindros representam o mesmo objeto de modo que temos apenas duas classes que são naturalmente diferenciadas por um importante invariante: o *hessiano da forma f que define X* . Os cones possuem hessiano identicamente nulo enquanto as tangentes desenvolvíveis possuem hessiano não nulo (nesse caso o hessiano é nulo módulo f). O ambiente mais natural para generalizar tais idéias é o espaço projetivo (sobre o corpo dos complexos) no qual temos ferramentas mais fortes, uma teoria mais sólida e um efeito unificador na classificação.

Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície projetiva complexa, dizemos que

1. X é regrada se for folheada por espaços lineares, ou seja, se X for coberta por

espaços lineares, isto é, $X = \overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} L_\alpha}$ de modo que por um ponto geral de X passe apenas um de tais espaços lineares;

2. X é desenvolvível (na folheação em questão) se o espaço tangente em X ao longo das folhas L_α for constante;
3. X possui hessiano nulo, se $\det[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}] = 0$.

Observamos que uma hipersuperfície pode ser regrada de diversas maneiras.

Definição 0.0.1. O mapa de Gauss de uma variedade $X \subset \mathbb{P}^N$, de dimensão $\dim X = n$, é o mapa racional:

$$\mathcal{G}_X : X \dashrightarrow \mathbb{G}(n, N)$$

que associa a cada ponto não singular de X , $p \in X_{reg}$ o ponto da grassmaniana $\mathbb{G}(n, N)$ que representa o espaço tangente mergulhado $T_p X \subset \mathbb{P}^N$.

O mapa de Gauss de uma hipersuperfície pode ser visto como a restrição a X do mapa polar da hipersuperfície X de definimos agora.

Definição 0.0.2. O mapa polar de f é a aplicação racional definida por:

$$\Phi_f : \mathbb{P}^N \dashrightarrow (\mathbb{P}^N)^*$$

$$\Phi_f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}(p), \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(p) \right)$$

Sua imagem, $Z = \overline{\Phi_f(\mathbb{P}^N)}$, é chamada imagem polar. A restrição à X do mapa polar coincide com o mapa de Gauss de X e a imagem do mapa de Gauss $X^* \subset Z$ é a variedade dual de X . O lugar base do mapa polar é $Y = \text{Sing}(X)_{red}$.

Claramente se X é uma hipersuperfície desenvolvível, então o mapa de Gauss de X é degenerado, isto é, $\dim X^* < \dim X = N - 1$ (teorema de dimensão das fibras), a recíproca é verdadeira via um teorema de Zak que afirma que nesse caso as fibras do mapa de Gauss são (união de espaços) lineares dando origem a folheação.

Uma condição necessária e suficiente para que X possua hessiano nulo é que o mapa polar não seja dominante, isto é, $Z \subsetneq \mathbb{P}^N$ (isto é equivalente a condição de dependência algébrica entre as derivadas parciais de X). Assim conclui-se que se X tem hessiano nulo, então X

é desenvolvível (um outro teorema de Zak implica que $X^* \subsetneq Z$). Com efeito, se X possui hessiano nulo, então $\dim X^* < \dim Z \leq N - 1 = \dim X$ e portanto X é desenvolvível. De fato, a condição de desenvolvibilidade para hipersuperfícies é equivalente ao anulamento do hessiano módulo f , a equação que define X .

Se $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ é um cone, então sua equação, a menos de projetividades, não depende de uma das variáveis e portanto seu hessiano é identicamente nulo.

As hipersuperfícies de Hessiano nulo inicialmente foram estudadas por O. Hesse que acreditava tê-las caracterizado como cones, isto é, que uma hipersuperfície tem hessiano nulo se, e somente se, X é um cone (como ocorre em \mathbb{P}^3). Os dois artigos publicados com as “conclusões” do Hesse são [He1](1851) e [He2](1857). Entretanto a recíproca é falsa, isto é, existem exemplos de hipersuperfícies de hessiano nulo que não são cones.

Gordan e Noether(1876), 25 anos após a primeira afirmação do Hesse, escrevem o histórico artigo [GN] apontando o erro do Hesse. Nesse artigo eles provaram que a afirmação é verdadeira em \mathbb{P}^3 e exibiram uma família infinita de exemplos em \mathbb{P}^4 de hipersuperfícies que não são cones e cujo hessiano é identicamente nulo. Esse artigo parece ser bastante duro (não apenas pelo idioma alemão).

Seguindo um contexto bem mais geométrico, U. Perazzo(1902) [Pe] trabalhou na classificação das cúbicas que não são cones e cujo hessiano é identicamente nulo. Perazzo fornece formas canônicas para séries de exemplos e em seu artigo consta uma classificação completa das hipersuperfícies cúbicas que não são cones e cujo hessiano é identicamente nulo em \mathbb{P}^N para $N = 4, 5, 6$. Grande parte do trabalho dessa tese se apóia, se inspira e se baseia no artigo supracitado.

Franchetta(1954), 78 anos após o artigo de Gordan e Noether dá uma classificação (inspirada nas idéias dos mesmos) das hipersuperfícies de \mathbb{P}^4 que não são cones e cujo hessiano é identicamente nulo [Fr1], [Fr2].

Além dos trabalhos acima citados contribuições sobre o tema devem-se a Permutti(1957,1964) [Pt1], [Pt2] e [Pt3], Dolgachev(2000) [Do1], Dimca e Papadima(2003)[DP], Zak(2004)[Za2], Ciliberto, Russo e Simis(2008) [CRS], Garbagnati e Repetto(2008) [GR]. O Zak, em [Za2] obtém, para hipersuperfícies de hessiano nulo de grau qualquer, teoremas de estru-

tura que generalizam o trabalho do Perazzo. Em [CRS] constroem-se famílias de novos exemplos explorando as relações entre as hipersuperfícies de hessiano nulo e as hipersuperfícies homaloidais, isto é, aquelas cujo mapa polar define uma aplicação birracional de \mathbb{P}^N , e dando séries de exemplos explícitos de grau arbitrário. Em [GR] dá-se uma prova direta e puramente geométrica da classificação das hipersuperfícies de hessiano nulo em \mathbb{P}^4 . A classificação das hipersuperfícies de hessiano nulo em \mathbb{P}^N com $N \geq 5$ está em aberto.

Nossas contribuições no tema das hipersuperfícies de hessiano nulo são sobre as cúbicas. A partir de uma análise do trabalho de Perazzo re-obtemos seus resultados utilizando ferramentas mais modernas e avançamos profundamente na compreensão da estrutura geométrica da classe em que $\langle Z^* \rangle \subset Y$ (todos os exemplos conhecidos satisfazem tal propriedade, mas não sabemos se vale em geral), na descrição das classes em que o mapa de Perazzo tenha por fibras uma família de espaços lineares \mathbb{P}^{m+1} passando por um \mathbb{P}^m fixado, determinamos a dimensão de X^* e explicitamos as fibras do mapa de Gauss, descrevemos assim a estrutura geométrica e formas canônicas para todas as hipersuperfícies cúbicas, não cones e com hessiano identicamente nulo em \mathbb{P}^N com $N \leq 7$ por fim exibimos exemplos em dimensão superior que explicitam o surgimento de novas classes ainda incompreendidas.

As variedades desenvolvíveis foram primeiramente estudadas por C. Segre(1907,1910) em [Seg1] e [Seg2] pelo ponto de vista da geometria diferencial local. Destacamos ainda os trabalhos de É.Cartan (1916,1919) [Ca1] e [Ca2] que influenciaram profundamente a geração atual de geométricos interessados no tema.

Griffiths e Harris(1979), em seu clássico artigo [GH, Section2,pp. 383-393], são os pioneiros no estudo das variedades desenvolvíveis sobre o ponto de vista da geometria algébrica.

Gostaríamos ainda de citar os matemáticos Akivis, Goldberg, Fisher, Piontkowski, Landsberg, Wu, Zheng, Ishikawa, Morimoto, Rogora, Mezzeti, Tommasi cujo trabalho na classificação e estrutura das variedades desenvolvíveis é profícuo e incessante. A classificação das hipersuperfícies desenvolvíveis em \mathbb{P}^4 pode ser encontrada em [FP] e está em aberto para $N \geq 5$.

Nossa contribuição para o estudo das hipersuperfícies desenvolvíveis foi, em primeiro plano, por em evidencia as hipersuperfícies de hessiano nulo como importante classe de exemplos como já fora observado em [CRS]. Tanto o artigo citado como a presente tese oferecem classes infinitas de exemplos não triviais de hipersuperfícies (cúbicas em nosso caso), não cones e com hessiano nulo. Como trabalhamos exclusivamente com cúbicas tivemos acesso a uma descrição geométrica ainda mais profunda que aquela descrita em [Za2]. Além disso enunciamos algumas particularidades estruturais das cúbicas que nos levaram a uma classificação completa das hipersuperfícies cúbicas desenvolvíveis em \mathbb{P}^4 e em \mathbb{P}^5 a menos de uma classe cuja existência desconhecemos.

A partir de agora faremos uma breve descrição de cada capítulo da tese, destacando os principais resultados.

(CAP1) *Hipersuperfícies cúbicas de Hessiano Nulo*

Os objetivos centrais desse capítulo são fornecer uma descrição estrutural, do ponto de vista geométrico, das Hipersuperfícies cúbicas de Hessiano Nulo, bem como a obtenção de formas canônicas para as mesmas.

(§1.1) *O mapa polar de uma hipersuperfície*

Na primeira seção exibimos os elementos básicos da teoria, a relação entre os mesmos e apresentamos a técnica local de polaridade que, para o caso das cúbicas, é muito eficiente.

(§1.2) *O lugar singular de uma cúbica com hessiano nulo*

Nesta seção damos uma descrição geométrica do lugar singular da cúbicas de hessiano nulo e apresentamos os primeiros resultados (introdutórios) sobre as hipersuperfícies de hessiano nulo que contém um espaço linear em seu lugar singular, por exemplo a proposição 1.2.5 e a observação que a sucede.

(§1.3) *O mapa de Perazzo*

A seção sobre o mapa de Perazzo apresenta resultados decisivos no que segue, como a proposição 1.3.5, sobre a linearidade das fibras do mapa de Perazzo, o teorema 1.3.8 que determina a dimensão de X^* e descreve explicitamente a fibra do mapa de Gauss como um espaço linear (observamos que tal resultado se diferencia daquele obtido em [Za2] que descreve, apenas, a fibra do mapa polar como uma união de espaços lineares). O teorema 1.3.10 é um primeiro teorema de estrutura à la Griffiths e Harris para as hipersuperfícies

de hessiano nulo e o seu corolário 1.3.11 que fornece uma estimativa para a dimensão da imagem do mapa de Perazzo que é fundamental no processo de classificação (tal estimativa é um melhoramento da estimativa inicial de Perazzo e foi obtida por outros métodos).

(§1.4) *Estrutura das hipersuperfícies de Perazzo*

As chamadas hipersuperfícies de Perazzo são aquelas em que $\langle Z^* \rangle \subset Y$, em particular elas possuem um espaço linear em seu lugar singular. Nessa seção apresentamos o conceito de variedade de k -planos tangencialmente p -torcidos que é uma generalização dos conceitos de “hyperband”[FP] e “torse varieties”[AG] e fornecemos um teorema de estrutura mais fino para as hipersuperfícies de Perazzo, teorema 1.3.9, mostrando que todas elas são variedade de τ -planos tangencialmente p -torcidos sobre a variedade degenerada Z^* . Todos os exemplos conhecidos de hipersuperfícies cúbicas não cones e com hessiano identicamente nulo são de Perazzo. De fato não são conhecidas em geral, qualquer que seja o grau, hipersuperfícies de hessiano nulo além daquelas em que $\langle Z^* \rangle \subset Y$.

(§1.5) *Forma canônica de uma classe especial*

Dentre as hipersuperfícies de Perazzo destacamos aquelas cujas fibras do mapa de Perazzo formam um sistema linear especial de \mathbb{P}^{m+1} passando por um \mathbb{P}^m fixo. Toda a seção é devotada ao estudo desta classe especial. Destacamos a proposição 1.5.5 que descreve uma forma canônica simplificada para tal classe de hipersuperfícies.

(CAP2) *Classificação das hipersuperfícies cúbicas de hessiano nulo*

O terceiro capítulo da tese concentra-se no problema de classificação das hipersuperfícies cúbicas, não cones e de hessiano nulo que é o principal objetivo da tese. Do ponto de vista das formas canônicas, o próprio Perazzo o havia resolvido em \mathbb{P}^4 , \mathbb{P}^5 e em \mathbb{P}^6 com algumas imprecisões sobre o lugar singular, no caso $\mu = 1$, e na descrição de Z^* , no caso $\mu = 2$. Além de re-obter as formas canônicas do Perazzo, com maior precisão, concluímos a classificação em \mathbb{P}^7 esboçamos uma idéia de classificação em \mathbb{P}^8 (a menos de uma possível classe cuja existência desconhecemos, para essa classe poderia ocorrer $\langle Z^* \rangle \not\subset Y$) e descrevemos alguns exemplos em dimensão superior. Nossa análise geométrica é independente do trabalho do Perazzo.

Um outro aspecto importante desse capítulo é a descrição geométrica das classes de exemplos. A obtenção de exemplos, em \mathbb{P}^N com $N \geq 5$, de hipersuperfícies desenvolvíveis não triviais é muito rara, portanto, com o olhar sobre o fato de que a condição de hessiano nulo implica desenvolvibilidade, nesse capítulo descrevemos, algébrica e geometricamente vários exemplos desconhecidos pela literatura do tema. Já o nosso exemplo em \mathbb{P}^5 apresenta particularidades geométricas não contempladas pelos exemplos conhecidos na literatura da geometria diferencial o que nos motivou a definição de variedade de k -planos tangencialmente p -torcidos.

(CAP3) *Hipersuperfícies cúbicas desenvolvíveis*

Nesse capítulo apresentamos a importante conexão entre as hipersuperfícies de hessiano nulo e as hipersuperfícies desenvolvíveis. Além disso fornecemos a classificação das cúbicas desenvolvíveis em dimensão baixa $N \leq 5$. A idéia é que, após o entendimento daquelas com hessiano identicamente nulo, o problema de classificação fica facilitado. Obtivemos uma classificação completa em \mathbb{P}^4 e \mathbb{P}^5 a menos de uma classe cuja existência desconhecemos.

Hipersuperfícies cúbicas de hessiano nulo

Neste capítulo apresentamos as principais propriedades algebro-geométricas das hipersuperfícies cúbicas cujo determinante hessiano (das segundas derivadas parciais) é identicamente nulo.

1.1 O mapa polar de uma hipersuperfície e polaridade

Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície projetiva complexa. A menos de múltiplo escalar X é determinada pela forma $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]$ que é um polinômio homogêneo de grau d .

Definição 1.1.1. A matriz hessiana da hipersuperfície X é a matriz

$$\text{Hess}_X = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

definida a menos de múltiplo escalar.

Estaremos interessados em estudar o determinante hessiano de X .

Definição 1.1.2. O determinante hessiano (ou simplesmente hessiano) de X é definido como o determinante da matriz Hess_X , ou seja

$$\text{hess}_X = \det \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right], \quad \text{hess}_X(p) = \det \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right]$$

O hessiano também só está definido a menos de múltiplo escalar, podemos nos referir a hipersuperfície hessiana associada à hipersuperfície X , mas estaremos interessados no caso em que o hessiano é identicamente nulo, ou seja, $\text{hess}_X \equiv 0$.

Definição 1.1.3. Definimos o invariante $\alpha = N - \text{rk}(\text{Hess}_X)$ em que $\alpha \geq -1$ e além disso,

$$\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \text{hess}_X \equiv 0.$$

Nosso objetivo é estudar as hipersuperfícies cujo hessiano é identicamente nulo, $\text{hess}_X \equiv 0$. Lembramos que se X é um cone, então $\text{hess}_X \equiv 0$.

Definição 1.1.4. Se $p \in \mathbb{P}^n$ definimos o hiperplano polar de X com respeito a p por

$$H_p : \frac{\partial f}{\partial x_0}(p)]_{x_0} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(p)]_{x_N} = 0.$$

Definição 1.1.5. A quádrlica polar de X com respeito a p é definida por

$$Q_p : \underline{x}^t \text{Hess}_X(p) \underline{x} = 0.$$

Observação 1.1.6. Observamos que $H(p)$ é a matriz hessiana de f aplicada em $p \in \mathbb{P}^N$. Assim sendo, se $p \in \mathbb{P}^N$ é um ponto geral, então $\dim \text{Sing}(Q_p) = \alpha \geq -1$, (em que a dimensão em questão é a dimensão projetiva do espaço linear $\text{Sing}(Q_p)$). Se $\text{hess}_X \neq 0$, então

Em geral, temos a seguinte:

Definição 1.1.7. Seja $X = V(f)$ uma hipersuperfície de \mathbb{P}^N , de grau d . A hipersuperfície polar de ordem s com respeito a $p \in \mathbb{P}^N$ é definida por $V(\Delta_p^s f)$, em que $\Delta_p^s f$ é o seguinte polinômio homogêneo de grau $d - s$, $s < d$:

$$\Delta_p^s f(\underline{x}) = (p_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + p_N \frac{\partial}{\partial x_N})^s f(\underline{x})$$

Nesta notação o expoente s tem caráter simbólico sendo $\frac{\partial}{\partial x_i}$ vistos como operadores. Se $\Delta_p^s f \equiv 0$ consideramos $V(\Delta_p^s f) = \mathbb{P}^N$.

A seguinte proposição é conhecida como *lei de reciprocidade* e sua demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [?, Pg. 4]:

Proposição 1.1.8. Dados, uma hipersuperfície de \mathbb{P}^N e dois pontos $p, q \in \mathbb{P}^N$, temos:

$$\frac{1}{s!} \Delta_p^s f(q) = \frac{1}{(d-s)!} \Delta_q^{d-s} f(p)$$

Logo, $q \in V(\Delta_p^s f)$ se e somente se $p \in V(\Delta_q^{d-s} f)$

Um interessante caso particular é aquele no qual a hipersuperfície $X = V(f)$ é uma cúbica. Nesse caso, as únicas hipersuperfícies polares que estão definidas são o hiperplano polar e a quádrlica polar, portanto, a lei de reciprocidade deve ser lida da seguinte forma:

$$p \in H_q \Leftrightarrow q \in Q_p$$

Definição 1.1.9. O mapa polar de f é a aplicação racional definida por:

$$\Phi_f : \mathbb{P}^N \dashrightarrow (\mathbb{P}^N)^*$$

$$\Phi_f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}(p), \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(p) \right)$$

A *imagem polar* de f é a imagem desta aplicação racional, denotada por $Z = \overline{\Phi_f(\mathbb{P}^N)}$.

O lugar singular de X coincide com o lugar base do sistema linear dado pelas primeiras derivadas parciais de f , que determina Φ_f . Denotaremos por $Y = \text{Sing}(X)_{red}$ e $S = \text{Sing}(X)$ respectivamente o lugar singular e o esquema singular de X .

Observamos que o hiperplano polar de um ponto $p \in \mathbb{P}^N \setminus Y$ é precisamente o dual em \mathbb{P}^N da imagem do ponto p pelo mapa polar.

Temos que $\Phi_f|_{X \setminus Y} = \mathcal{G}_X$ é o mapa de Gauss de X (de fato, $(\frac{\partial f}{\partial x_0}(p), \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(p))$ são as coordenadas projetivas do ponto de $(\mathbb{P}^N)^*$ que representa o espaço tangente a X em p), assim sendo, $\overline{\Phi_f(X \setminus Y)} = X^*$.

Observação 1.1.10. Observamos que a dimensão da imagem polar é

$$\dim Z = \text{rk}(\text{Hess}_X) - 1 = N - \alpha - 1$$

pois a matriz hessiana de f é a matriz jacobiana do mapa polar afim

$$\Phi_f : \mathbb{A}^{N+1} \dashrightarrow \mathbb{A}^{N+1}.$$

Observamos ainda que tal mapa é dominante se e somente se o mapa polar é dominante, isto é, o mapa polar é dominante se e somente se $\text{hess}_X \neq 0$.

Além disso, $\alpha = 0 \Leftrightarrow Z = V(g) \subset \mathbb{P}^N$ é uma hipersuperfície.

Proposição 1.1.11. Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica reduzida, $\Phi_f : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ seu mapa polar, $z = \Phi_f(p)$ é um ponto geral de Z (com $p \in \mathbb{P}^N$ um ponto geral), então

$$(T_z Z)^\perp = \text{Sing}(Q_p) = \mathbb{P}^\alpha.$$

Em particular, se X é uma hipersuperfície cúbica com hessiano nulo, então a fibra geral do mapa polar é um espaço linear

$$\Phi^{-1}(z) = \{p \in \mathbb{P}^N \mid \text{Sing}(Q_p) = (T_z Z)^*\}.$$

Prova: É suficiente mostrar uma das inclusões uma vez que ambos são espaços lineares, de mesma dimensão:

$$\dim(T_z Z)^\perp = N - 1 - \dim T_z Z = N - 1 - z = N - 1 - (N - \alpha - 1) = \alpha = \dim \text{Sing}(Q_p)$$

Verifiquemos a inclusão $\text{Sing}(Q_p) \subset (T_z Z)^\perp$. Seja $s \in \text{Sing}(Q_p)$, então temos, para cada $i = 0, \dots, N$, a seguinte relação:

$$\sum_{j=0}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) s_j = 0.$$

Por dualidade, isso significa que o hiperplano $\sum_{j=0}^N s_j x_j = 0$ contém $T_z Z$ que é gerado por u_0, \dots, u_N , em que

$$u_i = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_0}(p) : \dots : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_N}(p) \right)$$

A linearidade das fibras do mapa polar de uma hipersuperfície cúbica segue a partir da descrição

$$\Phi^{-1}(z) = \{p \in \mathbb{P}^N \mid \text{Sing}(Q_p) = (T_z Z)^\perp\}.$$

Com efeito, escolhendo um conjunto de geradores para $(T_z Z)^\perp = \langle s^1, \dots, s^\alpha \rangle$, a condição $\text{Sing} Q_p = (T_z Z)^\perp$ pode ser escrita, em coordenadas, como

$$\sum_{j=0}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) s_j^k = 0.$$

Assim concluímos que a mesma é uma relação linear entre as coordenadas homogêneas de p que deve ser satisfeita para tal conjunto de geradores. \square

Ainda no contexto geral, se $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$, mostraremos que $\bigcap_{q \in X} H_q = \bigcap_{q \in \mathbb{P}^N} H_q$.

Isso é equivalente a mostrar que $\langle X^* \rangle = \langle Z \rangle$ (essa é a descrição dual). Lembramos ainda que $X^* \subsetneq Z$ pois o mapa de Gauss de X é a restrição a X do mapa polar de f .

Lema 1.1.12. *Sejam $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície reduzida, $\Phi_f : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ seu mapa polar e $Z = \overline{\Phi_f(X)}$ a image polar. Então $\langle X^* \rangle = \langle Z \rangle$.*

Prova: Ora, como $X^* \subset Z$, temos que $\langle X^* \rangle \subset \langle Z \rangle$. Para mostrar a inclusão oposta é suficiente verificar que qualquer hiperplano que contém X^* também contém Z . Seja

então $H \subset \mathbb{P}^N$ um hiperplano tal que $X^* \subset H$, então supondo $H = V(\sum_{i=0}^N a_i y_i)$, temos que

$$\sum_{i=0}^N a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(q) = 0 \quad \forall q \in X = V(f)$$

Seja $g = \sum_{i=0}^N a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, como X é uma hipersuperfície reduzida, a única possibilidade para que g se anule ao longo de X é $g = 0$. De fato, se $g \neq 0$, então $f|_g$ mas isso é absurdo pois $gr(g) = gr(f) - 1 < gr(f)$. \square

A seguinte proposição é imediata e mostra a grande diferença entre as condições de ser cone e ter hessiano nulo:

Proposição 1.1.13. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície reduzida e $\Phi_f : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ seu mapa polar, então:*

1. $Z \subset \mathbb{P}^N$ é não degenerada se e somente se $\frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}$ são linearmente independentes, isto é, se e somente se X não é um cone.
2. $h \equiv 0$ se e somente se $\frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}$ são algebricamente dependentes se e somente se $\dim Z < N$.

Prova:

1. Lembramos que X é um cone se, e somente se X^* é degenerada. A afirmação segue diretamente do fato $\langle X^* \rangle = \langle Z \rangle$, expresso no lema 1.1.12.
2. X tem hessiano nulo se e somente se $z < N$, ($z = \text{rk}(H) - 1 = N - \alpha - 1$) pois a matriz hessiana de f coincide com a matriz jacobiana do mapa afim

$$\Phi_f : \mathbb{A}^{N+1} \dashrightarrow \mathbb{A}^{N+1}$$

observamos que tal mapa é dominante se e somente se o mapa polar é dominante, isto é, o mapa polar é dominante se e somente se $h(f) \neq 0$. \square

A próxima proposição mostra que as quádricas polares de cúbicas, não cones, estão definidas em todo \mathbb{P}^N e formam um sistema linear de dimensão N .

Proposição 1.1.14. *Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica, não cone, então:*

$$\begin{aligned} Q: \mathbb{P}^N &\rightarrow \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(2))) \\ p &\mapsto Q(p) = Q_p \end{aligned}$$

é um morfismo que define um isomorfismo entre \mathbb{P}^N e um subespaço linear de $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(2)))$

Prova: Primeiramente vamos mostrar que Q é definida em todo \mathbb{P}^N . Para isso, observemos que para que Q não esteja definida em um ponto de \mathbb{P}^N é necessário que a quádrlica polar deste ponto seja \mathbb{P}^N , isto é, a matriz hessiana deve ser identicamente nula mas:

$$\text{Hess}_X(p) \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}(p) = 0 \forall i, j \Leftrightarrow \text{mult}_p X = 3 \Leftrightarrow p \in \text{Vert}(X)$$

pois $\text{gr}(X) = 3$. Como X não é um cone isto é um absurdo e assim Q está definida em \mathbb{P}^N . Como Q é um morfismo dado por formas lineares, concluímos que Q é injetivo. \square

Temos ainda o seguinte lema que nos será útil na próxima seção

Lema 1.1.15. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica, não cone, com hessiano identicamente nulo. Sejam $p, q \in \mathbb{P}^N$ tais que $q \in \text{Sing } Q_p$, então*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda p + \rho q) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\lambda^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i}(q)\rho^2. \quad (1.1)$$

Em particular,

$$p \in \text{Sing } Q_q \Leftrightarrow q \in \text{Sing } Q_p$$

Prova: Como $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é um polinômio homogêneo de segundo grau temos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda p + \rho q) = a\lambda^2 + b\lambda\rho + c\rho^2 \quad (1.2)$$

Assim, derivando com respeito a ρ , obtemos:

$$b\lambda + 2c\rho = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda p + \rho q) = \sum_{j=0}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\lambda p + \rho q) \cdot q_j \quad (1.3)$$

fazendo $\rho = 0$ vem $b\lambda = \sum_{j=0}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\lambda p) \cdot q_j = \lambda \sum_{j=0}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \cdot q_j$. Como $q \in \text{Sing } Q_p$, concluímos que $b = 0$.

Substituindo na expressão 1.2, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda p + \rho q) = a\lambda^2 + c\rho^2. \quad (1.4)$$

Fazendo $\rho = 0$ e usando a quadraticidade de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ obtemos $a = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$. Analogamente, $c = \frac{\partial f}{\partial x_i}(q)$.

Para concluir basta derivar a expressão 1.1 com respeito a λ e fazer $\lambda = 0$. \square

1.2 O lugar singular de uma cúbica com hessiano nulo

Nosso objetivo, nessa seção, é explicar o motivo pelo qual as hipersuperfícies com hessiano nulo possuem lugar singular “grande” e começar a focar nas cúbicas que contêm um espaço linear “grande” em seu lugar singular mostrando que estas são de hessiano nulo.

Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica, não cone, e com hessiano identicamente nulo, gostaríamos de estudar a geometria de $Y = \text{Sing}(X)_{red}$, seu lugar singular. Inicialmente temos o seguinte resultado geral sobre hipersuperfícies cúbicas:

Proposição 1.2.1. *Sejam $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica reduzida, não cone e $Y = \text{Sing}(X)_{red}$ seu lugar singular, então:*

$$Y = \bigcap_{p \in \mathbb{P}^N} Q_p$$

em que Q_p é a quádrlica polar de um ponto $p \in \mathbb{P}^N$.

Prova: Seja $p \in Y$, então não temos hiperplano polar bem definido em p uma vez que todas as derivadas parciais são nulas, isto é, $H_p = \mathbb{P}^N$. Logo, $q \in \mathbb{P}^N \Rightarrow q \in H_p$. Pela lei de reciprocidade, Proposição 1.1.8, temos $p \in Q_q$, $\forall q \in \mathbb{P}^N$, logo $Y \subset \bigcap_{p \in \mathbb{P}^N} Q_p$.

Reciprocamente, se $r \in \bigcap_{p \in \mathbb{P}^N} Q_p$, então $q \in H_r$, $\forall q \in \mathbb{P}^N$, isto é, $H_r = \mathbb{P}^N$, logo $r \in Y$. \square

A conclusão, na próxima proposição, de que $Z^* \subset Y$ é válida em geral (sem a restrição sobre o grau de X) e é um resultado devido a Zak em [Za2, pg. 21]. Daremos uma demonstração independente em grau 3. Essa proposição é importante pois indica que o lugar singular de uma hipersuperfície (cúbica) com Hessiano identicamente nulo é “grande”. Essa propriedade do lugar singular dá fortes restrições geométricas às hipersuperfícies cúbicas em dimensão baixa.

Proposição 1.2.2. *Sejam $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica reduzida de hessiano nulo, $Y = \text{Sing}(X)_{red}$ seu lugar singular e $Z = \Phi_X(\mathbb{P}^N)$ sua imagem polar. Então*

$$Z^* \subset Y \subset X$$

Prova: Seja $l \subset \mathbb{P}^N$ uma reta, como $\{Q_p\}_{p \in l}$ forma um feixe de quádricas e $rk(H(p)) = N - \alpha$ para $p \in l$ geral, então:

$$\bigcup_{p \in l \text{ geral}} \text{Sing}(Q_p) \subset Q_s, \forall s \in l$$

Com efeito, se $r \in \langle p_1, p_2 \rangle$ é geral, $r = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$, então $Q_r = \lambda_1 Q_{p_1} + \lambda_2 Q_{p_2}$, logo pelo teorema de Bertini,

$$\text{Sing}(Q_r) \subset Q_{p_1} \cap Q_{p_2} \subset Q_s, \forall s \in \langle p_1, p_2 \rangle$$

De fato, considerando $\Psi : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ definida por $\langle Q_{p_1}, Q_{p_2} \rangle$ (mapa determinado pelo sistema linear de quádricas), o lugar base é $Q_{p_1} \cap Q_{p_2}$ e como, pelo teorema de Bertini, a singularidade do membro geral da família está contida no lugar base, mostramos a afirmação.

Seja agora $p \in \mathbb{P}^N$ qualquer e l_p uma reta passando por p . Como $\text{Sing}(Q_q) \subset Q_p, \forall q \in l_p$,

$$Z^* = \overline{\bigcup_{z \in \text{Sm}(Z)} (T_z Z)^\perp} = \overline{\bigcup_{q \in \mathbb{P}^N \setminus Y} \text{Sing} Q_q} \subset Q_p$$

donde concluímos que $Z^* \subset \bigcap_{p \in \mathbb{P}^N} Q_p = Y$. □

Claramente, se Y possui uma componente irredutível \tilde{Y} que é um subespaço linear e se $Z^* \subset \tilde{Y}$, obtemos da proposição acima que $SZ^* \subset \tilde{Y}$ uma vez que nesse caso $S\tilde{Y} = \tilde{Y}$. Muitos exemplos de cúbicas de hessiano nulo, em dimensão baixa, tem no lugar singular uma componente irredutível que é um espaço linear, vamos começar a investigar o motivo da existência destes exemplos.

Proposição 1.2.3. *Sejam $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade cúbica irredutível de dimensão $n = \dim X$ e $Y = \text{Sing}(X)_{red}$, então $\dim Y \leq n - 1$ e além disso, $\dim Y = n - 1 \Leftrightarrow Y = \mathbb{P}^{n-1}$*

Prova: Claramente $\dim Y \leq n - 1$, suponhamos então $\dim Y = n - 1$ para mostrar a segunda afirmação, como $SY \subset X$ (X é uma cúbica), temos duas possibilidades, pela irredutibilidade de X :

- (i) $SY = X \Rightarrow \dim SY = \dim Y + 1 \Rightarrow SY = X = \mathbb{P}^m$ que é um absurdo pois $\text{gr}(X) = 3$
- (ii) $SY = Y \Rightarrow Y = \mathbb{P}^{m-1}$.

□

Proposição 1.2.4. *Sejam $X \subset \mathbb{P}^N$, $N \geq 4$ uma hipersuperfície cúbica e $Y = \text{Sing}(X)_{\text{red}}$ seu lugar singular. Suponhamos que seu lugar singular (na estrutura reduzida) possua um subconjunto que é um espaço linear $M = \mathbb{P}^m \subset Y$. Se $m > \frac{N-1}{2}$, então X tem hessiano nulo*

Prova: Suponhamos que $m > \frac{N-1}{2}$, vamos mostrar que para $p \in \mathbb{P}^N$ geral Q_p é singular. Isso implica que $\text{Hees}_X \equiv 0$. Seja $q \in M$, como $H_q = \mathbb{P}^N$, então um ponto geral $p \in \mathbb{P}^N$ pertence a H_q . Pela lei de reciprocidade, proposição 1.1.8, $q \in Q_p$ para $p \in \mathbb{P}^N$ geral e $q \in M$ arbitrário, ou seja, $M = \mathbb{P}^m \subset Q_p$. Como a dimensão máxima de um subespaço linear contido em uma quádrica não singular é $\frac{N-1}{2}$ o resultado segue. □

A principal importância do trabalho do Perazzo diz respeito a obtenção de formas canônicas para hipersuperfícies cúbicas, não cone, com hessiano nulo, que possuem um espaço linear em seu lugar singular. A primeira classe consideradas é apresentada na seguinte proposição que se encontra em [Pe, §1.13 Pg 344]. No artigo Perazzo se refere a esse caso como “un essemio simplicissimo”.

Proposição 1.2.5. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica cujo lugar singular, na estrutura reduzida, contenha um espaço linear $M = \mathbb{P}^\tau \subset Y$. Suponhamos que $M = \mathbb{P}^\tau : x_{\tau+1} = \dots = x_N = 0$, então:*

$$f = \sum_{i=0}^{\tau} x_i C^i(x_{\tau+1}, \dots, x_N) + D(x_{\tau+1}, \dots, x_N)$$

Em que C e D são respectivamente formas quadrática e cúbica nas variáveis $x_{\tau+1}, \dots, x_N$. Além disso, se $\tau > \frac{N-1}{2}$, então X possui hessiano nulo.

Prova:

Consideremos $M = \mathbb{P}^\tau : x_{\tau+1} = \dots = x_N = 0$ um espaço linear contido no lugar singular de X , $M \subset Y$. Como $(a_0 : \dots : a_\tau : 0 : \dots : 0) \in Y$, temos que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_0 : \dots : a_\tau : 0 : \dots : 0) = 0$.

$\dots : 0) = 0$.

Escrevamos f com as variáveis separadas:

$$f = A(x_0, \dots, x_\tau) + \sum_{0 \leq i < j \leq \tau} x_i x_j B^{ij}(x_{\tau+1}, \dots, x_N) + \sum_{i=0}^{\tau} x_i C^i(x_{\tau+1}, \dots, x_N) + D(x_{\tau+1}, \dots, x_N).$$

Em que A, B^{ij}, C^i, D são respectivamente formas cúbica, lineares, quadráticas e cúbica.

Primeiramente observamos que, como $\mathbb{P}^\tau \subset X, A = 0$. De fato, $f(a_0 : \dots : a_\tau : 0 : \dots : 0) = A(a_0 : \dots : a_\tau) = 0$.

Observamos ainda que, como $\mathbb{P}^\tau \subset Y, B^{ij} = 0$. Com efeito, consideremos $k = \tau + 1, \dots, N$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{0 \leq i < j \leq N} x_i x_j \frac{\partial B^{ij}}{\partial x_k}(x_{\tau+1}, \dots, x_N) + \sum_{i=0}^{\tau} x_i \frac{\partial C^i}{\partial x_k}(x_{\tau+1}, \dots, x_N) + \frac{\partial D}{\partial x_k}(x_{\tau+1}, \dots, x_N)$$

Lembramos que $B^{ij} = B^{ij}(x_{\tau+1}, \dots, x_N)$ é uma forma linear e portanto $\frac{\partial B^{ij}}{\partial x_k} = \lambda_{ijk}$ é um número complexo. $C^i = C^i(x_{\tau+1}, \dots, x_N)$ é uma forma quadrática e portanto $\frac{\partial C^i}{\partial x_k}(a_0 : \dots : a_\tau : 0 : \dots : 0) = 0$. $D = D(x_{\tau+1}, \dots, x_N)$ é uma forma cúbica e portanto $\frac{\partial D}{\partial x_k}(a_0 : \dots : a_\tau : 0 : \dots : 0) = 0$.

Assim, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a_0 : \dots : a_\tau : 0 : \dots : 0) = \sum_{0 \leq i < j \leq \tau} a_i a_j \lambda_{ijk} = 0$$

independente de $(a_0 : \dots : a_\tau)$ e portanto $\lambda_{ijk} = 0$. Daí concluímos que $B^{ij} = 0$.

A proposição 1.2.4 pode ser re-obtida a partir desta forma canônica. De fato, suponhamos que

$$f = \sum_{i=0}^{\tau} x_i C^i(x_{\tau+1}, \dots, x_N) + D(x_{\tau+1}, \dots, x_N)$$

então as $\tau + 1$ primeiras derivadas parciais $f_i = C_i$ para $i = 0, \dots, \tau$. Claramente, se o número de tais quadráticas, $\tau + 1$, for maior que o número de variáveis de que dependem, $N - (\tau + 1) + 1 = N - \tau$, então elas são algebricamente dependentes e portanto X possui hessiano nulo. Como $\tau + 1 > N - \tau \Leftrightarrow \tau > \frac{N-1}{2}$, o resultado segue. \square

Observação 1.2.6. Observamos ainda que se $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ é uma hipersuperfície cúbica contendo em seu lugar singular um $\mathbb{P}^\tau \subset Y$ em que $\tau \geq \binom{N - \tau + 2}{2}$, então X é um cone. De fato, pela proposição 1.2.5,

$$f = \sum_{i=0}^{\tau} x_i C^i(x_{\tau+1}, \dots, x_N) + D(x_{\tau+1}, \dots, x_N)$$

mas o número máximo de formas quadrática LI em $N - \tau$ variáveis é $\binom{N - \tau + 2}{2}$.

1.3 O mapa de Perazzo

Nessa seção apresentamos o mapa de Perazzo, um mapa racional associado a hipersuperfície X com hessiano nulo que, no caso cúbico, possui fibras lineares. O estudo do mapa de Perazzo, no caso das cúbicas, determina, em dimensão baixa, a geometria da hipersuperfície. Esse mapa racional é mais eficiente que o mapa polar ou mapa de Gauss pois sua imagem é de dimensão muito baixa em relação a dimensão de Z ou de X^* .

Definição 1.3.1. Sejam $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície reduzida, $\Phi_X : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ seu mapa polar e $Z = \Phi_X(\mathbb{P}^N)$ sua imagem polar. O *mapa de Perazzo* de X é a aplicação racional:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_X : \mathbb{P}^N &\dashrightarrow \mathbb{G}(\alpha, N) \\ p &\mapsto (T_{\Phi_f(p)}Z)^\perp \end{aligned}$$

definida no aberto $\mathcal{U} = \Phi_f^{-1}(Sm(Z))$. Tal aplicação racional está bem definida pois a dimensão da imagem polar é $\dim Z = N - \alpha - 1$ (assim definimos o invariante α), portanto $\dim(T_z Z)^\perp = \alpha$.

Observação 1.3.2. Observamos que o mapa de Perazzo é a composição do mapa polar de f com o mapa dual de Gauss de Z , isto é,

$$\mathcal{P}_X = \mathcal{G}_Z^* \circ \Phi_f$$

onde \mathcal{G}_Z^* é definido por:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_Z^* : Z &\dashrightarrow \mathbb{G}(\alpha, N) \\ z &\mapsto (T_z Z)^\perp \end{aligned}$$

Definição 1.3.3. A imagem do mapa de Perazzo será denotada por $W = \overline{\mathcal{P}_X(\mathbb{P}^N)} \subset \mathbb{G}(\alpha, N)$ e sua dimensão por $\mu = \dim W$.

Observação 1.3.4. Primeiramente Perazzo considerou o caso $\alpha = 0$, isto é, o caso em que $Z \subset \mathbb{P}^N$ é uma hipersuperfície, $Z = V(g)$. Nesse caso, $\mathbb{G}(0, N) = \mathbb{P}^N$ e podemos identificar a imagem do mapa de Perazzo com Z^* (tomando o mapa de Gauss ao invés do dual), assim $\mathcal{P}_X = \Phi_g \circ \Phi_f$.

O princípio filosófico é que, a hipersuperfície de hessiano nulo geral possui $\alpha = 0$. No

caso das cúbicas, em dimensão baixa, sempre temos $\alpha = 0$ (desde que $N \leq 6$). A identificação $W \simeq Z^*$, no caso $\alpha = 0$ será usada muitas vezes.

Considerando $\mathcal{P}_X : \mathbb{P}^N \dashrightarrow W \subset \mathbb{G}(\alpha, N)$. Seja $w \in W$ um ponto geral, pelo teorema de dimensão das fibras temos $\dim(\overline{\mathcal{P}_X^{-1}(w)}) = N - \mu$.

O próximo resultado é muito importante para a classificação das cúbicas em dimensão baixa. Mostraremos que as fibras (com sua estrutura reduzida) do mapa de Perazzo são espaços lineares.

Proposição 1.3.5. *Sejam $w \in W$, $w = [(T_z Z)^\perp]$ e $r \in (T_z Z)^\perp = \text{Sing}(Q_q) = \mathbb{P}^\alpha$ um ponto geral, então:*

$$\overline{\mathcal{P}_X^{-1}(w)} = \text{Sing}(Q_r) = \mathbb{P}^{N-\mu}$$

portanto, o fecho das fibras do mapa de Perazzo são espaços lineares de dimensão $N - \mu$.

Prova: Seja $q \in \mathcal{P}_X^{-1}(w)$ e considere a reta $\langle q, r \rangle$. Em primeiro lugar observamos que $r \in Z^* = \bigcup (T_z Z)^\perp$, logo $r \in Y = \text{Sing}(X)_{red}$. Como $r \in \text{Sing}(Q_q)$ temos, pelo lema 1.1.15

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda q + \rho r) = \lambda^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}(q) + \rho^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}(r) = \lambda^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}(q) \quad (1.5)$$

e além disso $q \in \text{Sing}(Q_r)$.

Assim, temos que $\mathcal{P}_X^{-1}(w) \subset \text{Sing}(Q_r) \forall r \in (T_z Z)^*$, em que $w = (T_z Z)^\perp$.

Reciprocamente, se $q \in \text{Sing}(Q_r)$, então vale a equação 1.5 e portanto a reta $\langle q, r \rangle$ fica contraída pelo mapa polar, em particular, $qq \in \mathcal{P}_X^{-1}(w)$. \square

Da proposição anterior concluímos que se $t \in Z^*$ é um ponto geral ($t \in (T_z Z)^\perp$), então:

$$\text{Sing}(Q_t) = \mathbb{P}^{N-\mu} = \overline{\mathcal{P}_X^{-1}(w)}$$

onde $w = [(T_z Z)^\perp] \in \mathbb{G}(\alpha, N)$. Portanto os pontos de Z^* são pontos duplos de X com cone tangente de posto $\mu \geq 1$.

A próxima proposição nos fornece a dimensão de Z^* .

Proposição 1.3.6. *Sejam $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica com hessiano identicamente nulo, $Z = \Phi(\mathbb{P}^N)$ sua imagem polar (de dimensão $\dim Z = N - \alpha - 1$) e $\mu = \dim W$*

a dimensão do mapa de Perazzo. Então

$$\dim Z^* = \alpha + \mu.$$

Prova: Consideremos $Z^* = \overline{\bigcup_{z \in \text{Sm}Z} (T_z Z)^\perp}$. Tal descrição nos fornece um mapa dominante $Z^* \dashrightarrow W$ que ao ponto geral de Z^* associa $w = [(T_z Z)^\perp]$ o único desses ao qual ele pertence. A fibra é de dimensão $\alpha = \dim(T_z Z)^\perp$. \square

A próxima proposição é a versão cúbica de um resultado que pode ser encontrado em [Za2, prop. 4.9, pg. 21]. De fato no caso cúbico o resultado é melhor uma vez que as fibras são irredutíveis enquanto em grau qualquer podem ser uma união de espaços lineares.

Proposição 1.3.7. *Sejam $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica, não cone, de hessiano nulo, $Z = \Phi_f(\mathbb{P}^N)$ a imagem polar e $W = \mathcal{P}(\mathbb{P}^N)$ a imagem do mapa de Perazzo. Se $w = [(T_z Z)^\perp] \in \mathbb{G}(\alpha, N)$, $q \in \mathcal{P}_X^{-1}(w)$ e $r \in (T_z Z)^\perp = \text{Sing}(Q_q) = \mathbb{P}^\alpha$. Então o espaço linear $\langle q, (T_z Z)^\perp \rangle$, de dimensão $\dim \langle q, (T_z Z)^\perp \rangle = \alpha + 1$, é contraído por Φ_f (definida fora de $(T_z Z)^\perp$).*

Prova: Primeiramente, mostraremos que o $\mathbb{P}^{\alpha+1} = \langle q, (T_z Z)^\perp \rangle$ é contraído pelo mapa polar. É suficiente mostrar que as retas $\langle q, r \rangle$ (com $r \in (T_z Z)^\perp$) dadas, parametricamente, por $p_{\lambda, \mu} = \lambda q + \mu r$ são contraídas por ϕ qualquer que seja $r \in (T_z Z)^\perp$. Sabemos, da demonstração da proposição 1.3.5, que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda q + \mu r) = \lambda^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}(q).$$

Com isso concluímos que a reta $\langle q, r \rangle$ é contraída à imagem de q qualquer que seja $r \in (T_z Z)^\perp$.

\square

O próximo resultado nos dá uma descrição precisa das fibras do mapa de Gauss e isso nos fornece a dimensão de X^* . Observamos que tal resultado é ligeiramente diferente do resultado do Zak (que descrevia geometricamente as fibras do mapa polar) uma vez que no caso cúbico a própria fibra do mapa polar já está contida em X fazendo com que a mesma coincida com a fibra do mapa de Gauss. Isto é, como $X \subset \mathbb{P}^N$ é de codimensão 1, então $X^* \subset Z$ também é de codimensão 1.

Teorema 1.3.8. *Sejam $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica, não cone, com hessiano identicamente nulo e $Z = \Phi_f(\mathbb{P}^N)$ sua imagem polar. Sejam $q \in X$ um ponto geral e $z = \Phi_f(q) = \mathcal{G}_X(q)$. Então a fibra, em z , do mapa de Gauss de X é*

$$\mathcal{G}^{-1}(\mathcal{G}(p)) = \langle p, (T_z Z)^\perp \rangle.$$

Por conseguinte

$$\dim X^* = N - \alpha - 2 = \dim Z - 1.$$

Prova: Para provar a desigualdade $\dim X^* \leq \dim Z - (\alpha + 1)$ é suficiente mostrar que as retas $\langle q, r \rangle \subset X$ estão contidas em X . Com efeito, isso implica que $\langle q, (T_z Z)^\perp \rangle \subset X$ e, como esses espaços lineares são contraídos pelo mapa polar, pela proposição 1.3.7, os subespaços lineares $\langle q, (T_z Z)^\perp \rangle$ são contraídos pelo mapa de Gauss de X . De fato,

$$f(\lambda q + \mu r) = \mu^3 f(r) + \mu^2 \lambda \nabla f(r) q' + \mu \lambda^2 q Q_r q' = 0$$

pois $q \in X$, $r \in Y$ e $q \in Q_r$.

Assim temos que os espaços lineares $\mathbb{P}_p^{\alpha+1} = \langle (T_z Z)^\perp, p \rangle$ são contraídos pelo mapa de Gauss, logo

$$\dim X^* \leq N - \alpha - 2.$$

Isso segue pelo teorema de dimensão das fibras. Com efeito, se $z \in X^*$ é geral, então

$$\alpha + 1 \leq \dim \mathcal{G}^{-1}(z) = \dim X - \dim X^* = N - 1 - \dim X^*.$$

Por outro lado, se não valesse a igualdade, teríamos $p \neq q$ gerais tais que $\mathbb{P}_p^{\alpha+1} \neq \mathbb{P}_q^{\alpha+1}$ que se intersectam em $\mathbb{P}^\alpha = (T_z Z)^\perp = \text{Sing } Q_p = \text{Sing } Q_q$ (pela generalidade de escolha dos pontos $p, q \notin \mathbb{P}^\alpha$).

Sabemos que a reta $\langle p, q \rangle$ deve ser contraída pelo mapa de Gauss. Podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda p + \rho q) = a\lambda^2 + b\lambda\rho + c\rho^2.$$

Lembramos, da demonstração do lema 1.1, que $b = 0$ é equivalente a $p \in \text{Sing } Q_q$, o que é um absurdo. Portanto devemos ter $b \neq 0$ que obriga $a = c = 0$. De fato, para que a reta seja contraída pelo mapa polar devemos ter dois coeficientes nulos. Temos agora

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda p + \rho q) = b\lambda\rho$$

derivando tal expressão com respeito a λ obtemos:

$$b\rho = \sum_{j=0}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\lambda p + \rho q) p_j$$

fazendo $\rho = 0$ concluímos que $p \in \text{Sing } Q_p = \mathbb{P}^\alpha$ que é absurdo pela nossa escolha de p . Assim concluímos que

$$\dim X^* = N - \alpha - 2$$

e o resultado segue. \square

O espaço tangente do lugar singular, considerado com a sua natural estrutura esquemática pode ser entendido a partir do seguinte

Lema 1.3.9. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica, $S = \text{Sing}(X)$ seu lugar singular considerado com sua estrutura esquemática. Se $s \in S$ é um ponto qualquer, então*

$$T_s S = \text{Sing}(Q_s)$$

Prova: Primeiramente, lembramos que $S = V(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N})$ e portanto, se $s \in S$, temos:

$$T_s S = \bigcap_{i=0}^N T_s V\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Oservamos também que o hiperplano $T_s V(\frac{\partial f}{\partial x_i})$ é dado por $\sum_{j=0}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s) x_j = 0$. Daí concluímos que

$$T_s S = \text{Sing}(Q_s).$$

\square

O próximo teorema pode ser considerado como um primeiro teorema de estrutura das hipersuperfícies cúbicas, não cones e com hessiano identicamente nulo. De fato a partir do “teorema” de Griffiths e Harris sobre a estrutura das variedades desenvolvíveis [GH, P. 392] no qual os mesmos concluíam que tais variedades eram “built up from cones and developable varieties” houve interpelações por pesquisadores de geometria diferencial projetiva sobre a incompleteza do resultado. A saber Akivis, Goldsberg e Landsberg em uma notificação lançada no ARXIV [AGL] descreveram exemplos de hipersuperfícies

desenvolvíveis que não satisfazem tais propriedades. Desse ponto de vista o resultado a seguir está em conformidade com o teorema de estrutura de Griffiths e Harris e mostra que de fato as hipersuperfícies cúbicas que não são cones e possuem determinante hessiano identicamente nulo (que são uma classe muito restrita de hipersuperfícies desenvolvíveis) são folheadas por cones, mais precisamente tais cones são a interseção das fibras do mapa de Perazzo com X .

Seja W a imagem do mapa de Perazzo de X , lembramos que esse mapa é a composição do mapa polar de X (cuja imagem é Z) com o dual do mapa de Gauss de Z ($p \mapsto [(T_z Z)^\perp] \subset \mathbb{G}(\alpha, N)$). Fixemos as seguintes convenções: $w \in W$ é um ponto geral, $w = [(T_z Z)^\perp]$ ($z \in Z$ geral) e $r \in (T_z Z)^\perp \subset Z^* = \bigcup_{\tilde{z} \in Z} (T_{\tilde{z}} Z)^\perp$ um ponto geral. Definimos $\tilde{X}_w = X \cap \mathbb{P}^{N-\mu} \subset \mathbb{P}^{N-\mu}$ e $X_w = (\tilde{X}_w)_{red}$, em que $\mathbb{P}^{N-\mu} = \mathcal{P}_X^{-1}(w)$ pela proposição 1.3.5.

Teorema 1.3.10. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica, não cone cujo hessiano seja identicamente nulo. Então, com as notações estabelecidas, a hipersuperfície X é folheada pela família de cones $\{X_w\}_{w \in W}$. Além disso, com as notações estabelecidas, o cone X_w tem como vértice $T_r Z^*$.*

Prova: Primeiramente, mostremos a inclusão $T_r Z^* \subset \tilde{X}_w$. Mostraremos que $T_r Z^* \subset X$ e $T_r Z^* \subset \mathbb{P}^{N-\mu}$.

$$T_r Z^* \subset \mathbb{P}_w^{N-\mu} = L_w = \overline{\mathcal{P}_X^{-1}(w)} = \text{Sing } Q_r$$

Observemos que (o fecho d) a fibra (linear) do mapa dual de Gauss de Z é

$$(\mathcal{G}_Z^*)^{-1}(z) = (T_r Z^*)^\perp$$

pela interpretação do lugar de contato e da bidualidade. A primeira inclusão segue. Lembramos ainda que

$$T_r Z^* \subset T_r Y \subset T_r S = \mathbb{P}^{N-\mu} = L_w$$

pelo lema 1.3.9.

A partir desta descrição observamos que se H é um hiperplano tal que $H \supseteq T_r Z^* \supseteq (T_z Z)^\perp$, dualmente $[H] \in (T_r Z^*)^\perp \subset (Z^*)^* = Z$ então $H = H_q$ é hiperplano polar de $q = [H] \in \mathbb{P}_w^{N-\mu} = L_w = \overline{\mathcal{P}_X^{-1}(w)}$ (o hiperplano polar é o dual da imagem polar).

Reciprocamente se $p \in \mathbb{P}_w^{N-\mu} = L_w = \overline{\mathcal{P}_X^{-1}(w)}$, então $\phi(p) = z \in (\mathcal{G}_Z^*)^{-1}(z) = (T_r Z^*)^\perp$ logo $H_p \supseteq T_r Z^*$. Daí segue que $\bigcap_{p \in \mathbb{P}_w^{N-\mu}} H_p = T_r Z^*$ (o hiperplano polar é o dual da imagem polar).

Tomemos agora a interseção de uma fibra geral do mapa de Perazzo com a hipersuperfície X .

$$\mathbb{P}_w^{N-\mu} \cap X = \tilde{X}_w \subset \mathbb{P}_w^{N-\mu}$$

$\tilde{X}_w \subset \mathbb{P}_w^{N-\mu}$ é uma hipersuperfície cúbica e se definimos por \tilde{H}_p o hiperplano polar de um ponto $p \in \mathbb{P}_w^{N-\mu}$ com respeito a \tilde{X}_w , temos que $\tilde{H}_p = H_p \cap \mathbb{P}_w^{N-\mu}$. e portanto,

$$\bigcap_{p \in \mathbb{P}_w^{N-\mu}} \tilde{H}_p = \left(\bigcap_{p \in \mathbb{P}_w^{N-\mu}} H_p \right) \cap L_w = T_r Z^* \cap L_w = T_r Z^*$$

. Por outro lado, lembramos que, em geral, pelo lema 1.1.12, vale a seguinte igualdade

$\bigcap_{p \in \mathbb{P}_w^{N-\mu}} \tilde{H}_p = \bigcap_{p \in \tilde{X}_w} \tilde{H}_p$ portanto, temos que $\bigcap_{p \in \tilde{X}_w} \tilde{H}_p = T_r Z^*$. Concluimos agora que $(\tilde{X}_w)_{red}$ é um cone e que

$$T_r Z^* = \text{Vert}(X_w).$$

(O vértice de um cone é a interseção dos espaços tangentes.) □

Observamos que se $r \in Z^*$ é um ponto geral, como $C_r Z^* \subset C_r X$ obtemos que $T_r Z^* \subset Q_r$ (pela generalidade de r tal ponto é liso em Z^* , isto é, $C_r Z^* = T_r Z^*$). Uma observação do Corrado Segre [Seg3, §29] mostra ainda mais,

$$T_r Z^* \subset \text{Sing}(Q_r).$$

Isso segue diretamente da nossa descrição de $\mathbb{P}_w^{N-\mu} = L_w = \overline{\mathcal{P}_X^{-1}(w)} = \text{Sing } Q_r$ e do fato que:

$$T_r Z^* \subset T_r Y \subset T_r S = \mathbb{P}_w^{N-\mu} = L_w$$

que para nós é claro pela proposição 1.3.9. Tal resultado se encontra no artigo do Perazzo [Pe, §1.12 Pg 343] e fornece uma estimativa para a dimensão da imagem do mapa de Perazzo. Mais que isso, mostramos na proposição anterior que de fato, $T_r Z^* \subsetneq \tilde{X}_w := \mathbb{P}_w^{N-\mu} \cap X \subsetneq \mathbb{P}_w^{N-\mu}$ e daí chegaremos a nossa estimativa que limita a dimensão da imagem do mapa de Perazzo. Tal estimativa é um melhoramento da estimativa original de Perazzo, descrita em [Pe, §1.12 Pg 343], que se utilizava, apenas, da inclusão $T_r Z^* \subset \text{Sing}(Q_r)$.

Corolário 1.3.11. *Sejam $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica, não cone cujo hessiano seja identicamente nulo. Então, com as notações estabelecidas:*

$$(i) \dim Z^* \leq \frac{1}{2}(N + \alpha - 2)$$

$$(ii) \mu \leq \frac{N-\alpha-2}{2} \leq \frac{N-2}{2}$$

Prova: É suficiente provar que $\dim Z^* = \alpha + \mu \leq N - \mu - 2$.

Tal desigualdade segue diretamente das seguintes inclusões obtidas na demonstração do teorema 1.3.10:

$$T_r Z^* \subsetneq \tilde{X}_w \subseteq \mathbb{P}_w^{N-\mu}.$$

Agora, só nos resta mostrar que a inclusão $T_r Z^* \subsetneq \tilde{X}_w$ é estrita. Como, pelo teorema 1.3.10, $X_w = (\tilde{X}_w)_{red}$ é um cone de vértice $T_r Z^*$ ($X_w = X \cap L_w$, em que $L_w = \mathbb{P}^{N-\mu} = \mathcal{P}_X^{-1}(w)$ é a fibra do mapa de Perazzo), devemos mostrar que \tilde{X}_w não é um hiperplano triplo, ou seja, que existe algum ponto liso em \tilde{X}_w (assim haverá ao menos uma componente genericamente reduzida). De fato este é o caso pois se $q \in \tilde{X}_w$ é um ponto geral, $T_q \tilde{X}_w = T_q X \cap \mathbb{P}_w^{N-\mu}$ devemos mostrar que existe $s \in \tilde{X}_w$ tal que $T_s X \supsetneq \mathbb{P}^{N-\mu}$. Certamente existe tal s , uma vez que $\bigcap_{q \in \tilde{X}_w} T_q X = T_r Z^* \subsetneq T_r S$, lembramos que, pelo lema 1.3.9 e pela proposição 1.3.5, $\mathbb{P}^{N-\mu} = T_r S$ para $r \in Z^*$. Agora a estimativa segue naturalmente pois $\dim \tilde{X}_w = N - \mu - 1$ e portanto

$$\dim Z^* = \dim T_r Z^* \leq N - \mu - 2$$

e o resultado segue. □

1.4 Estrutura das hipersuperfícies de Perazzo

Algumas classes de hipersuperfícies cúbicas, não cones e com hessiano identicamente nulo possuem algumas interessantes particularidades geométricas. Essas foram as classes de hipersuperfícies consideradas por Perazzo em seu trabalho. Nosso objetivo é chegar a um teorema estrutural mais forte para tais hipersuperfícies.

Inicialmente temos a seguinte proposição a partir da qual podemos observar essas hipersuperfícies sob diferentes focos. Nossa proposição foi estabelecida a partir da discussão do Perazzo em [Pe, §9-11 Pg 342,343].

Proposição 1.4.1. *Sejam $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica, não cone e de hessiano identicamente nulo, $Y = \text{Sing}(X)_{red}$ seu lugar singular e $Z = \Phi_f(\mathbb{P}^N)$ a imagem polar (pela proposição 1.2.2 $Z^* \subset Y$). Então são equivalentes:*

(i) $SZ^* \subset Y$;

(ii) $Z^* \subset \bigcap_{w \in W} L_w$, em que $L_w = \mathcal{P}_X^{-1}(w) = \mathbb{P}^{N-\mu}$ representa uma fibra do mapa de Perazzo;

(iii) $\langle Z^* \rangle \subset \bigcap_{w \in W} L_w$;

(iv) $\langle Z^* \rangle \subset Y$.

Prova: Primeiramente, suponhamos que $SZ^* \subset Y$. Se $r_1, r_2 \in Z^*$ são gerais, como $\langle r_1, r_2 \rangle \subset Y$ temos :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2) = 0 \quad \forall (\lambda_1 : \lambda_2) \in \mathbb{P}^1$$

Derivando obtemos que $r_2 \in \text{Sing } Q_\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \langle r_1, r_2 \rangle$. Com efeito,

$$0 = \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2) = \sum_{j=0}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2) r_{2j}$$

Tomando r_1 geral, $r_1 \in (T_z Z)^\perp$ em que $[(T_z Z)^\perp] \in W$ é geral logo:

$$r_2 \in \text{Sing}(Q_{r_1}) = \overline{\mathcal{P}_X^{-1}(w)}$$

E pela generalidade de $r_2 \in Z^*$ e de $w \in W$ obtemos:

$$Z^* \subset \bigcap_{w \in W} L_w.$$

Claramente (ii) é equivalente a (iii) pois $(\bigcap_{w \in W} L_w)$ é espaço linear). Suponhamos agora que $Z^* \subset \bigcap_{w \in W} L_w$ ou equivalentemente $\langle Z^* \rangle \subset \bigcap_{w \in W} L_w$. Seja $s \in \langle Z^* \rangle \subset \bigcap_{w \in W} L_w$ temos que $s \in \text{Sing}(Q_r)$ onde $r \in Z^*$ é geral pois, pela proposição 1.3.5, as fibras do mapa de Perazzo são $L_w = \text{Sing } Q_r$ com $r \in (T_z Z)^\perp$ em que $w = [(T_z Z)^\perp]$. Agora, pelo lema 1.1.15, como $s \in \text{Sing } Q_r$, temos que $r \in \text{Sing } Q_s$ logo,

$$\langle Z^* \rangle \subset \text{Sing}(Q_s) \quad \forall s \in \langle Z^* \rangle$$

Vamos mostrar agora que tal inclusão implica $\langle Z^* \rangle \subset Y$. Mais precisamente, mostraremos que nessas condições, isto é, se $\langle Z^* \rangle \subset \text{Sing}(Q_s) \quad \forall s \in \langle Z^* \rangle$ então

$$S^k Z^* \subset Y \Rightarrow S^{k+1} Z^* \subset Y$$

e assim o resultado segue por indução ($\langle Z^* \rangle = S^k Z^*$ quando $k \gg 0$).

Com efeito, $S^{k+1} Z^* = S(S^k Z^*, Z^*)$ logo, se $S^k Z^* \subset Y$, sejam $q \in S^k Z^*$ e $r \in Z^*$. Nossa hipótese sobre a singularidade das quádricas polares implica, via lema 1.1.15, $\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda q + \mu r) = \frac{\partial}{\partial x_i}(q)\lambda + \frac{\partial}{\partial x_i}(r)\mu = 0$ uma vez que $q, r \in Y$. Assim concluímos que $\lambda q + \mu r \in Y$, isto é, $S^{k+1} Z^* \subset Y$.

A última implicação, (iv) \Rightarrow (i) é imediata. \square

Definição 1.4.2. Uma hipersuperfície cúbica, não cone e com hessiano nulo sera chamada de *hipersuperfície de Perazzo* se satisfizer uma (todas) das condições da proposição 1.4.1.

Observação 1.4.3. Observamos que as hipersuperfícies de Perazzo possuem naturalmente uma forma canônica como aquela descrita na proposição 1.2.5. A recíproca é (parcialmente) verdadeira no sentido que, se uma hipersuperfície cúbica *não cone e com hessiano nulo* possui uma forma canônica como aquela descrita na proposição 1.2.5, então a mesma será uma hipersuperfície de Perazzo. Infelizmente todas as hipersuperfícies cúbicas, não cone e com hessiano nulo conhecidas são hipersuperfícies de Perazzo. Tal forma de construir exemplos remonta ao artigo histórico de Gordan e Noether.

Apresentaremos dois casos nos quais se verificam as condições supracitadas. (Até o presente momento esses são os únicos casos conhecidos para os quais se verificam as condições da proposição anterior.)

Proposição 1.4.4. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica tal que duas fibras gerais do mapa de Perazzo gerem \mathbb{P}^N , isto é, sendo $L_i = \mathcal{P}_X^{-1}(w_i) = \mathbb{P}_i^{N-\mu}$ duas fibras gerais, então $\langle L_1, L_2 \rangle = \mathbb{P}^N$. Então $\langle Z^* \rangle \subset Y$.*

Prova: Nesse caso, se $p \in \mathbb{P}^N$ é um ponto geral, então $p \in \langle p_1, p_2 \rangle = l$, com $p_i \in L_i$ gerais, i.e. $\text{Sing } Q_{p_i} = \mathbb{P}_i^\alpha$.

Seja $r \in l$ um ponto geral, i.e. $\text{Sing } Q_r = \mathbb{P}^\alpha$, mostramos, na demonstração da proposição 1.2.2 que:

$$\langle \bigcup_{r \in l} \text{Sing } Q_r \rangle \subset Q_p$$

assim obtemos:

$$\langle \text{Sing } Q_{p_1}, \text{Sing } Q_{p_2} \rangle \subset \bigcap_{p \in \mathbb{P}^N} Q_p = Y$$

pela generalidade de $p \in \mathbb{P}^N$ (a última igualdade segue da proposição 1.2.1). Mas como

$Z^* = \bigcup_{p \in \mathbb{P}^N \setminus Y} \text{Sing } Q_p$, obtemos:

$$SZ^* \subset Y$$

O resultado agora segue da proposição 1.4.1. \square

O próximo caso de cúbica com hessiano nulo é o mais importante no trabalho original do Perazzo. Uma hipersuperfície cúbica, não cone, com hessiano identicamente nulo satisfazendo a condição da próxima proposição sera chamada de tipo *sistema linear especial*, significando que as fibras do mapa de Perazzo formam um sistema linear especial de \mathbb{P}^{m+1} passando por um \mathbb{P}^m fixado. Perazzo trata esse caso em [Pe, §14-18 Pg 344-350].

Proposição 1.4.5. *Sejam $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica, $w_1, w_2 \in W$ pontos gerais na imagem do mapa de Perazzo e $\mathcal{P}_X^{-1}(w_i) = L_i$ as fibras (lineares) de tais pontos, cuja dimensão é $\dim L_i = m + 1 = N - \mu$, em que $\mu = \dim W$. Suponhamos que $L_1 \cap L_2 = L = \mathbb{P}^m$. Então a família μ dimensional de $m + 1$ -espaços lineares dada pelas fibras do mapa de Perazzo corresponde ao sistema linear de $m + 1$ -espaços lineares passando por esse \mathbb{P}^m fixado e além disso, nesse caso:*

$$\langle Z^* \rangle \subset Y.$$

Prova: Seja $p \in \mathbb{P}^N$ um ponto geral. Considere $L = \mathbb{P}^{m+1}$ o membro (geral) da família $\mathfrak{F} = \{L_w\}_{w \in W}$ que passa por p , ou seja, $L = L_{\tilde{w}}$ em que $\tilde{w} = \mathcal{P}_X(p)$.

Considere agora:

$$\mathbb{P}^s = \bigcap_{w \in W} L_w \cap L \subset L = \mathbb{P}^{m+1}.$$

Nosso primeiro objetivo é mostrar que $s = m$. Com efeito, se $s = m$, então a família dada pelas fibras do mapa de Perazzo vão coincidir com a família dos \mathbb{P}^{m+1} passando por $\mathbb{P}^m = \bigcap_{w \in W} L_w$.

Suponhamos, por absurdo, que $s < m$. Nesse caso a reta geral de L não intersecta \mathbb{P}^s . Definamos $\tilde{L}_w = L \cap L_w = \mathbb{P}^m \subset L = \mathbb{P}^{m+1}$ e consideremos $l \in L$ uma reta geral contendo p . Seja

$$A = \bigcup_{w \in W \setminus \tilde{w}} \tilde{L}_w \cap l \subset l.$$

Em primeiro lugar, A é não vazio uma vez que cada $\tilde{L}_w = \mathbb{P}^m \subset L$ é um hiperplano em L e portanto intersecta a reta l . A também não pode consistir de um ponto, pois se A consiste de um ponto, então tal ponto estaria na interseção $l \cap \mathbb{P}^s$ que é vazia por hipótese. Além disso A é irredutível pois é imagem da variedade (irredutível) de incidência $\mathfrak{X} = \{(x, L_w) \in l \times \Lambda \mid x \in L_w\} \subset l \times \mathbb{G}(m, N)$ em que $\Lambda = W \setminus w$. Nesse caso o ponto geral de l pertence a A e portanto por um ponto geral $p \in \mathbb{P}^N$ passa mais de um \mathbb{P}^{m+1} da

família, a saber: L e o L_w correspondente ao ponto de $p \in A$. Isso é um absurdo pois a família é composta de fibras de um mapa racional.

Assim concluímos que $s = m$ e portanto a família \mathfrak{F} coincide com a família “linear” de $m + 1$ -espaços lineares passando por um \mathbb{P}^m fixado.

Resta agora mostrar que $\langle Z^* \rangle \subset Y$. Pela proposição 1.4.1 é suficiente mostrar que $Z^* \subset \bigcap_{\omega \in W} L_\omega$.

Primeiramente notemos que esta família linear possui a propriedade de que $L_\omega \cap L_{\bar{\omega}} = \mathbb{P}^{N-\mu-1}$ e tal $\mathbb{P}^{N-\mu-1}$ (fixado) é o lugar base do sistema. Fazendo $L_\omega \cap X = \tilde{X} \subset L_\omega = \mathbb{P}^{N-\mu}$ obtemos um sistema linear de cúbicas que são cones como observamos na proposição 1.3.11. O lugar base de tal sistema linear é $\mathbb{P}^{N-\mu-1} \cap \tilde{X}_w = \mathbb{P}^{N-\mu-1} \cap X$. Pelo teorema de Bertini, o elemento geral de tal sistema linear possui singularidades somente no lugar base intersectado com o lugar singular de X , então

$$\text{Sing}(\tilde{X}_w) \subset (\tilde{X}_w \cap \mathbb{P}^{N-\mu-1}) \cap Y = Y \cap \mathbb{P}^{N-\mu-1}$$

por outro lado, da demonstração da proposição 1.3.11 obtivemos que $T_r Z^* \subset \text{Sing}(\tilde{X}_w)$ em particular obtemos, como desejado, $Z^* \subset \mathbb{P}^{N-\mu-1}$ e o resultado segue imediatamente da proposição 1.4.1. \square

Vamos agora introduzir a definição de variedade de k -planos tangencialmente s -torcidos sobre uma variedade B . Tal noção é inspirada nas definições de *hyperband* e de *torse* (de Akyvis e Goldberg) [AG, pg. 66].

Sejam $B \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade irreduzível de dimensão $\dim B = b$, $\tau \geq b$ e $\Lambda \subset \mathbb{G}(\tau, N)$ uma subvariedade. Considere a variedade de incidência

$$\mathfrak{F} = \{(r, L) \mid L \supset T_r B\} \subset B \times \Lambda$$

com seus respectivos morfismos de projeção sobre B_{reg} e $\Lambda \subset \mathbb{G}(\tau, N)$. Suponhamos que ambos sejam sobrejetivos, que a primeira projeção tenha dimensão relativa $\dim \pi_1^{-1}(r) = s \geq 0$ e que a segunda projeção seja birracional. Desta forma temos que $\dim \mathfrak{F} = \dim \Lambda = b + s$.

Consideremos agora o seguinte \mathbb{P}^τ -fibrado sobre \mathfrak{F} :

$$\mathfrak{X} = \{(r, L, x) \mid (r, L) \in \mathfrak{F} \text{ e } x \in L\} \subset \mathfrak{F} \times \mathbb{P}^N$$

munida de seus dois morfismos de projeção. Suponhamos ainda que o primeiro seja sobrejetivo sobre \mathfrak{F} e tal que $v_1^{-1}(r, L) \simeq L = \mathbb{P}^\tau$ e que o segundo seja birracional. Seja

$X \subset \mathbb{P}^N$ a imagem de \mathfrak{X} pelo segundo morfismo de projeção. Pelo teorema de dimensão das fibras $\dim X = b + s + \tau$.

Definição 1.4.6. Uma variedade $X \subset \mathbb{P}^N$ é dita ser uma variedade de k -planos tangencialmente p -torcidos sobre uma variedade B se X pode ser obtida como descrito. Lembramos que, da definição, pelo ponto geral de X passa um único espaço linear tangente a B , da família Λ .

Geometricamente uma tal variedade é obtida a partir de B da seguinte forma: para cada ponto de B escolhe-se uma família (irredutível) s -dimensional de espaços lineares contendo o espaço tangente a B no ponto em questão. Obriga-se que a família $(b+s)$ -dimensional de espaços lineares varie algebricamente folheando X .

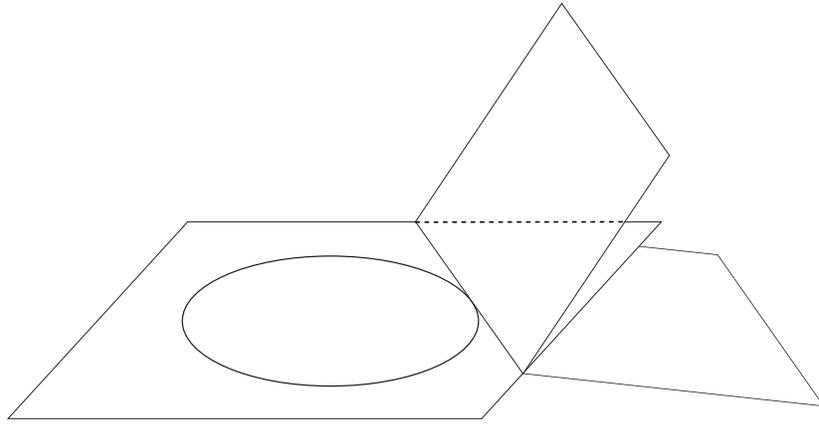


Figura 1.1 Variedade de k -planos tangencialmente s -torcidos sobre uma variedade B

Observação 1.4.7. Observamos que, na definição de *torse varieties* [AG, pg. 66] ou [AGL, pg. pg2] exige-se que, pelo ponto geral da base passe um único espaço linear da família. Nossa definição é mais geral pois permite que pelo ponto geral da base passe uma família s dimensional de folhas (quando $s = 0$ as definições coincidem). A necessidade de tal definição mais geral ficará clara pelo teorema de estrutura de hipersuperfícies de Perazzo que será apresentado a seguir.

Vamos agora, via uma abordagem geométrica, determinar as fortes implicações estruturais sobre X quando vale a condição $\langle Z^* \rangle \subset Y$. Lembramos que, pela proposição 1.3.6, $\dim Z^* = \alpha + \mu$, em que α é definido via $\dim Z = N - \alpha + 1$ e $\mu = \dim W$ é a dimensão da imagem do mapa de Perazzo.

Teorema 1.4.8. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície de Perazzo, isto é, uma hipersuperfície cúbica, não cone, com hessiano identicamente nulo tal que $\mathbb{P}^\tau = \langle Z^* \rangle \subset Y$. Então X é uma variedade de τ -planos tangencialmente s -torcidos sobre Z^* , em que*

$$s = \dim X - (\dim Z^* + \tau) = N - 1 - (\alpha + \mu + \tau)$$

fica determinado por invariantes de X .

Prova: Consideremos a família $N - (\tau + 1)$ -dimensional de $\mathbb{P}^{\tau+1}$ contendo $M = \mathbb{P}^\tau = \langle Z^* \rangle$, $\mathfrak{G} = \{\mathbb{P}_\lambda^{\tau+1} \mid \lambda \in \Gamma \subset \mathbb{G}(\tau + 1, N)\}$ (de fato gostaríamos de nos restringir a subfamília daqueles que estão contidos em uma única fibra do mapa de Perazzo e estaremos supondo isso que consiste de ignorar um fechado redundante da família original). Tal família origina uma família de \mathbb{P}^τ que folheia X (no sentido que pelo ponto geral de X passa um único desse tipo) basta fazer

$$\mathbb{P}_\lambda^{\tau+1} \cap X = 2M + M_\lambda$$

obtemos assim uma nova família $\mathfrak{G} = \{M_\lambda = \mathbb{P}_\lambda^\tau \mid \lambda \in \Lambda \subset \mathbb{G}(\tau, N)\}$. Pelo teorema 1.3.10 a interseção de uma fibra do mapa de Perazzo com X , em sua estrutura reduzida, é um cone de vértice $T_r Z^*$. Como cada $\mathbb{P}_\lambda^{\tau+1}$ da família deve estar contido em uma única fibra do mapa de perazzo, temos que $M_\lambda \cap M = T_r Z^*$. Pelo ponto geral de Z^* passa uma família $N - (\tau + 1) - \dim Z^* = N - (\tau + 1 + \alpha + \mu)$ de espaços lineares da família. \square

1.5 Forma canônica de uma classe especial

Forneceremos uma abordagem diferencial da condição de as fibras do mapa de Perazzo formarem um sistema linear especial (proposição 1.4.5). Tal abordagem é central no trabalho do Perazzo e, a partir dela são obtidas formas canônicas simplificadas para as hipersuperfícies de tipo sistema linear especial, ver [?, §14-18 Pg 344-350]. Iniciemos com a seguinte

Definição 1.5.1. *Seja $Q = V(Q) \subset \mathbb{P}^N$ uma quádrlica de posto $\text{rk}(Q) = \beta$ e $V = \text{Sing}(Q) = \mathbb{P}^{N-\beta}$ seu vértice. Um espaço linear $M = \mathbb{P}^\tau$ é chamado uma geratriz da quádrlica Q se*

$$V \subset M \subset Q.$$

Tal definição é inspirada na noção usual de geratriz de um cone cujo vértice é um ponto.

Lema 1.5.2. *Seja $Q \subset \mathbb{P}^N$ uma quádrlica de posto $\text{rk}(Q) = \beta$ e $M = \mathbb{P}^\tau$ uma geratriz de Q , então:*

$$\bigcap_{s \in \mathbb{P}^\tau} T_s Q = (\phi_Q(\mathbb{P}^\tau))^\perp = (\mathbb{P}^{\tau-\beta-1})^\perp = \mathbb{P}^{N-\tau-\beta}$$

Prova: Consideremos o mapa polar de Q :

$$\phi_Q : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$$

Consideremos $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(V)$ com V um espaço vetorial complexo de dimensão $\dim V = N + 1$ e $W \subset V$ um subespaço de dimensão $\dim W = \tau + 1$ tal que $M = \mathbb{P}^\tau = \mathbb{P}(W)$. O mapa polar de Q é induzido por uma transformação linear $T : V \rightarrow V$ de posto $\text{rk}(T) = \text{rk}(Q) = \beta$. Como M é uma geratriz de Q , temos que $\text{Sing}(Q) \subset M$ ou seja $\text{Ker}(T) \subset W$, daí concluímos que a imagem $T(W)$ tem dimensão $\dim T(W) = \dim W - \dim \text{Ker}(T) = \tau - \beta$. Assim $\phi_Q(\mathbb{P}^\tau) = \mathbb{P}^{\tau-\beta-1}$.

As outras afirmações seguem diretamente da dualidade, lembramos que o espaço tangente (hiperplano polar) de um ponto $s \in \mathbb{P}^\tau$ é o dual da imagem polar deste ponto. \square

Ainda com as mesmas notações,

Lema 1.5.3. *Seja $L = \mathbb{P}^{N-\tau+\alpha} \supset \mathbb{P}^\tau$ um espaço linear, tal, que $L \subset T_s Q \forall s \in \mathbb{P}^\tau$. Então*

$$\bigcap_{s \in \mathbb{P}^\tau} T_s Q = L \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Prova: Claramente $\mathbb{P}^{N-\tau+\alpha} = L \subset \bigcap_{s \in \mathbb{P}^\tau} T_s Q = \mathbb{P}^{N-\tau+\beta}$ a igualdade ocorre se, e somente se $\alpha = \beta$. \square

Definição 1.5.4. *Sejam $Q = V(q) \subset \mathbb{P}^N$ uma quádrlica de vértice $V = \text{Sing}(Q)$ e M uma geratriz de Q , isto é, $V \subset M \subset Q$. Dizemos que a quádrlica é tangente a um espaço linear L ao longo da geratriz M se $L \subset T_m Q$ para todo $m \in M$.*

Vamos agora entender como simplificar a forma canônica obtida na proposição 1.2.5 para o caso em que as quádrlicas polares dos pontos de \mathbb{P}^N são todas tangentes a um espaço

linear $\mathbb{P}^{N-\tau+\alpha}$ ao longo de uma geratriz comum. Essa proposição é baseada na discussão do Perazzo que se encontra em [Pe, §1.17 Pg349].

Consideremos $\text{Sing } Q_p \subset \mathbb{P}^\tau \subset Q_p$, esse \mathbb{P}^τ gerador comum, com equação $x_{\tau+1} = \dots = x_N = 0$. Consideremos $\bigcap_{s \in \mathbb{P}^\tau} T_s Q_p = \mathbb{P}^{N-\tau+\alpha} = L \supset \mathbb{P}^\tau$, onde $L = \mathbb{P}^m \supset \mathbb{P}^\tau$ suporemos ter como equação: $x_{m+1} = \dots = x_N = 0$.

Proposição 1.5.5. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica, não cone e de Hessiano nulo, em que as quádricas polares dos pontos de \mathbb{P}^N são todas tangentes a um espaço linear $\mathbb{P}^{N-\tau+\alpha}$ ao longo de uma geratriz comum. Suponhamos que $\mathbb{P}^\tau : x_{\tau+1} = \dots = x_N = 0$ e que $L : x_{m+1} = \dots = x_N = 0$, então:*

$$f = \sum_{i=0}^{\tau} x_i C^i(x_{m+1}, \dots, x_N) + D(x_{\tau+1}, \dots, x_N)$$

em que cada C^i é uma forma quadrática nas variáveis x_{m+1}, \dots, x_N e D uma forma cúbica nas variáveis $x_{\tau+1}, \dots, x_N$.

Prova: Sabemos que todo $q \in L \subset T_s Q_p$ é da forma $q = (a_0 : \dots : a_\tau : a_{\tau+1} : \dots : a_m : 0 : \dots : 0)$. E como $s \in \mathbb{P}^\tau$, s é da forma $s = (b_0 : \dots : b_\tau : 0 : \dots : 0)$. Ora, $q \in T_s Q_p$, logo, $s Q_p q^t = 0$ para todo $q \in L$ e para todo $s \in \mathbb{P}^\tau$ (lembramos que a equação de $T_s Q_p$ é $s Q_p \underline{x}^t = 0$).

Usando a expressão de forma canônica obtida na proposição 1.2.5, sabemos que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = C^i$ $i = 0, \dots, \tau$ e $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=0}^N x_j C_i^j + D_i$ $i = \tau + 1, \dots, N$. Assim, temos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = C_j^i$ com $i = 0, \dots, \tau$ e $j = \tau + 1, \dots, m$. Expressando essa condição em coordenadas, obtemos:

$$[b_0 : \dots : b_\tau : 0 : \dots : 0 : 0 : \dots : 0] \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & C_{\tau+1}^0 & \dots & C_m^0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & C_{\tau+1}^\tau & \dots & C_m^\tau & * & \dots & * \\ * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_\tau \\ a_{\tau+1} \\ \vdots \\ a_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Após o primeiro produto matricial, obtemos:

$$[0 : \dots : 0 : \sum_{i=0}^{\tau} b_i C_{\tau+1}^i : \dots : \sum_{i=0}^{\tau} b_i C_m^i : * : \dots : *] \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{\tau} \\ a_{\tau+1} \\ \vdots \\ a_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Ou seja,

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq \tau \\ \tau+1 \leq j \leq m}} a_j b_i C_j^i = 0$$

Daí concluímos que $C_j^i = 0$ para $0 \leq i \leq \tau$ e para $\tau+1 \leq j \leq m$ (pois $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ podem assumir quaisquer valores complexos). Portanto cada forma quadrática C^i que, a priori, dependia das variáveis $x_{\tau+1}, \dots, x_N$, depende somente das variáveis x_{m+1}, \dots, x_N e daí segue a forma canônica. \square

A proposição a seguir é de forte impacto geométrico sobre a classe de tipo linear especial e foi obtida a partir de uma análise daquilo que se encontra no artigo do Perazzo em [Pe, §1.14-1.16 Pg 344-349]. Perazzo nesse ponto faz cálculos explícitos que nos inspiraram a desenvolver a seguinte descrição geométrica para obter resultados semelhantes.

Proposição 1.5.6. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica cujo hessiano é identicamente nulo, então são condições equivalentes:*

1. *As fibras do mapa de Perazzo de X formam um sistema linear especial de \mathbb{P}^{m+1} passando por um \mathbb{P}^m fixado;*
2. *As quádricas polares dos pontos de \mathbb{P}^N são todas tangentes a um espaço linear $\mathbb{P}^{N-\tau+\alpha} = \mathbb{P}^m$ ao longo de uma geratriz comum, isto é, existe um \mathbb{P}^{τ} geratriz de Q_p , $p \in \mathbb{P}^N$ geral, tal que, $\bigcap_{s \in \mathbb{P}^{\tau}} T_s Q_p = L$.*

Prova: Primeiramente notamos que se as fibras do mapa de Perazzo formam um sistema linear, então temos que $\mathbb{P}^\tau = \langle Z^* \rangle \subset Y = \bigcap_{p \in \mathbb{P}^N} Q_p$ logo $\mathbb{P}^\tau \subset Q_p$, para mostrar que esse espaço linear é uma geratriz comum das quádricas polares, devemos mostrar que para $p \in \mathbb{P}^N$ geral $\text{Sing } Q_p \subset \mathbb{P}^\tau$. Isso fica evidente da nossa descrição de $\text{Sing } Q_p = (T_z Z)^\perp$ via proposição 1.1.11, lembramos ainda que $Z^* = \overline{\bigcup_{z \in \text{Sm } Z} (T_z Z)^\perp}$. Nesse caso, consideremos $L = L_w \cap L_{\tilde{w}}$ o lugar base do sistema linear formado pelas fibras do mapa de Perazzo. Devemos mostrar agora que $\mathbb{P}^\tau \subset L \subset T_s Q_p$. A primeira inclusão $\mathbb{P}^\tau \subset L$ segue das proposições 1.4.5 e 1.4.1. Para provar a segunda inclusão, $L \subset T_s Q_p$ observemos que para $r \in Z^*$ $\text{Sing}(Q_r) = L_w$ e portanto, via o teorema de Bertini, se tomamos $s \in \langle Z^* \rangle = S^k Z^*$ devemos ter que $\text{Sing } Q_s = L = \bigcap_{r \in Z^*} Q_r$ portanto, $\mathbb{P}^\tau \subset L \subset T_s Q_p$.

Para concluir que $\bigcap_{s \in \mathbb{P}^\tau} T_s Q_p = L$ devemos mostrar que $L = \mathbb{P}^{N-\tau+\alpha}$ e o resultado segue pelo Lema 1.5.3.

A família de espaços lineares dada pelas fibras do mapa de Perazzo tem dimensão $N - m - 1$ pois cada um deles é um \mathbb{P}^{m+1} . Devemos ter que $\tau \geq N - m$ pois para cada $r \in Z^*$ temos que $L_w \text{Sing } Q_r$ é um membro de tal família. Definimos $\rho = \tau - (N - m)$, assim, $m = N - \tau + \rho$. Suponhamos que $\mathbb{P}^\tau = \langle Z^* \rangle : x_{\tau+1} = \dots = x_N = 0$ e $\mathbb{P}^\tau \subset L : x_{m+1} = \dots = x_N = 0$.

Usando a forma canônica obtida na proposição 1.2.5, obtemos:

$$f = \sum_{i=0}^{\tau} x_i C^i(x_{\tau+1}, \dots, x_N) + D(x_{\tau+1}, \dots, x_N)$$

As quádricas polares dos pontos $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_\tau \in \mathbb{P}^\tau$ são precisamente C^0, \dots, C^τ .

Dizer que tais quádricas polares são cones de vértice L consiste em dizer precisamente que tais C^j só dependem das variáveis x_{m+1}, \dots, x_N . Nesse caso, f assume a forma canônica obtida na proposição 1.5.5 na qual, claramente, vale a condição $L \subset T_s Q_p$ e concluimos ainda que $\alpha = \rho$.

Reciprocamente, consideremos $p \in \mathbb{P}^N$ geral. Se \mathbb{P}^τ é uma geratriz comum das quádricas polares, então $\mathbb{P}^\tau \subset Y = \bigcap_{p \in \mathbb{P}^N} Q_p$. Seja $L = \bigcap_{s \in \mathbb{P}^\tau} T_s Q = \mathbb{P}^{N-\tau+\alpha}$, queremos mostrar que a fibra geral do mapa de Perazzo é um $\mathbb{P}^{N-\tau+\alpha+1} \supset L$ e então o resultado segue da proposição 1.4.5. Suponhamos que $L : x_m = \dots = x_N = 0$ vamos mostrar que cada \mathbb{P}^{m+1} contendo L é contraído pelo mapa de Perazzo, para isso, devemos mostrar que o lugar singular das quádricas polar dos pontos de tal \mathbb{P}^{m+1} são os mesmos. De fato,

consideremos $L = \langle \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{m-1} \rangle$, portanto, cada \mathbb{P}^{m+1} contendo L é da forma $L_p = \langle L, p \rangle$ com $p \notin L$. Assim, se $q \in L_p$ é geral, $q = \alpha_0 \varepsilon_0 + \dots + \alpha_{m-1} \varepsilon_{m-1} + \beta p = l + \beta p$ com $\beta \neq 0$ e $l \in L$. Vamos mostrar agora que $\text{Sing } Q_p = \text{Sing } Q_q$, pela simetria do problema, basta mostrar uma inclusão. Seja $s \in \text{Sing } Q_q \subset L \subset Q_q$, sabemos que $s \in \text{Sing } Q_l = L$ para todo $l \in L$ logo, obtemos

$$\sum_{j=0}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(l) s_j = \sum_{j=0}^{\tau} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(l) s_j = 0$$

De fato, utilizando a forma canônica obtida na proposição 1.5.5, onde supomos que $\mathbb{P}^{\tau} : x_{\tau+1} = \dots = x_N = 0$, sabemos que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = C^i(x_{m+1}, \dots, x_N)$ para $i = 0, \dots, \tau$ só depende das variáveis x_{m+1}, \dots, x_N . Assim, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = C_i^j(x_{m+1}, \dots, x_N)$ para $j = 0, \dots, \tau$ e como $l \in L : x_{m+1} = \dots = x_N = 0$, temos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(l) = 0$ para $j = 0, \dots, \tau$.

$$\sum_{j=0}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(q) s_j = \sum_{j=0}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(l) s_j + \beta \sum_{j=0}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) s_j$$

Temos que

$$\sum_{j=0}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(q) s_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) s_j = 0$$

Ou seja,

$$\text{Sing } Q_p = \text{Sing } Q_q.$$

□

A próxima proposição se encontra em [Pe, §1.17,1.18 Pg 348,349,350]. Uma pequena imprecisão na afirmação do Perazzo consistia em acreditar na irredutibilidade da condição determinantal dada na próxima proposição e assim concluir uma igualdade que de fato não é verdadeira como será observada com um exemplo em \mathbb{P}^6 .

Proposição 1.5.7. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica, não cone e de hessiano identicamente nulo. Suponhamos que as fibras do mapa de Perazzo de X formem um sistema linear especial. Nesse caso, a variedade dual a imagem polar de X é uma hipersuperfície $Z^* = V(g) \subset \mathbb{P}^{\tau}$. Mais ainda, tal hipersuperfície é uma componente irredutível de uma hipersuperfície determinantal de grau $\tau - \alpha$.*

Prova: Claramente as fibras do mapa de Perazzo são $\mathbb{P}^{N-\tau+\alpha+1}$ pois $L = \mathbb{P}^{N-\tau+\alpha}$, logo $N - \mu = N - \tau + \alpha + 1$ donde concluímos que $\tau = \mu + \alpha + 1$ ou seja, $\tau = \dim Z^* + 1$.

Utilizando a forma canônica obtida na proposição 1.5.5, onde supomos que $\mathbb{P}^\tau : x_{\tau+1} = \dots = x_N = 0$, sabemos que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = C^i(x_{m+1}, \dots, x_N)$ para $i = 0, \dots, \tau$ só depende das variáveis x_{m+1}, \dots, x_N .

Sabemos ainda que nesse caso, \mathbb{P}^τ é um gerador comum das quádricas polares dos pontos de \mathbb{P}^N , isto é, $\text{Sing } Q_p \subset \mathbb{P}^\tau$. Escrevendo a equação de $\text{Sing } Q_p \subset \mathbb{P}^\tau$, obtemos, para $i = 0, \dots, \tau$:

$$\sum_{j=0}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)x_j = \sum_{j=0}^{\tau} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)x_j \equiv 0$$

pois as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ para $i = 0, \dots, \tau$ não dependem das variáveis x_0, \dots, x_τ . Assim, nos restam as equações:

$$\sum_{j=0}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)x_j = \sum_{j=0}^{\tau} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)x_j = 0$$

nas quais $i = \tau, \dots, N$. E como $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$ é uma forma linear que depende somente das coordenadas x_{m+1}, \dots, x_N de p , que chamaremos $p_1, \dots, p_{\tau-\alpha}$, obtemos $N - \tau$ relações bilineares entre os p_i e os x_j . Originalmente, tais relações são escritas de modo que os x_j sejam variáveis:

$$\begin{bmatrix} \text{formas lineares} \\ \text{nas variáveis} \\ p_1, \dots, p_{\tau-\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

A relação matricial anterior é bilinear nas variáveis x_i e p_j , gostaríamos de exprimi-la, agora, com os p_j como variáveis. Obtemos um sistema nas variáveis $p_1, \dots, p_{\tau-\alpha}$:

$$\begin{bmatrix} \text{formas lineares} \\ \text{nas variáveis} \\ x_0, \dots, x_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{\tau-\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Após eliminar linhas dependentes (pois a priori o número de equações é maior ou igual ao número de incógnitas), a matriz de formas lineares em x_0, \dots, x_τ é de ordem $(\tau - \alpha) \times (\tau - \alpha)$ e genericamente, tal sistema não possui solução não trivial (pois no ponto geral de $\langle Z^* \rangle = \mathbb{P}^\tau$ temos que $\text{Sing}(Q_p) = L = \mathbb{P}^m$ e portanto $p_1 = \dots = p_{\tau-\alpha} = 0$). Os pontos de Z^* são pontos onde tal sistema possui solução não trivial pois nesses pontos $\text{Sing } Q_r \supsetneq L$. Portanto, $Z^* \subset V(\det)$ é uma componente irredutível de uma hipersuperfície determinantal de grau $\tau - \alpha$. \square

Observação 1.5.8. Genericamente se espera a igualdade, $Z^* = V(\det)$ mas descreveremos em \mathbb{P}^6 um exemplo no qual vale tal igualdade e um outro no qual não vale a igualdade.

Os próximos resultados são uma análise das particularidades geométricas que ocorrem para hipersuperfícies cúbicas cuja imagem do mapa de Perazzo tem dimensão baixa $\mu = \dim W \leq 2$. Em particular a próxima proposição é um caso particular de nossa análise sobre o caso sistema linear especial.

Proposição 1.5.9. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica cujo hessiano é identicamente nulo e cuja imagem do mapa de Perazzo seja uma curva, isto é, $\mu = 1$, então:*

- (i) $\alpha = 0$ e $\dim Z^* = 1$;
- (ii) $SZ^* = \mathbb{P}^2$ e $Z^* \subset \mathbb{P}^2$;
- (iii) Z^* é uma cônica, portanto Z é um cone quadrático;
- (iv) $SZ^* = \langle Z^* \rangle = \mathbb{P}^2 \subset Y$.

Prova: Suponhamos que $\mu = 1$ e seja $r \in Z^*$ um ponto geral, então $r \in (T_z Z)^\perp$, e sendo $w = [(T_z Z)^\perp]$. Sabemos, pela proposição 1.3.5, que $\text{Sing } Q_r = \mathcal{P}_X^{-1}(w) = \mathbb{P}^{N-1} = V(l)$ em que l é a forma linear que determina tal hiperplano. Daí concluímos que $Q_r = V(l^2)$. Logo, se $\alpha > 0$, poderíamos tomar outro ponto $\tilde{r} \in (T_z Z)^\perp = \mathbb{P}^\alpha$ e neste caso, $Q_{\tilde{r}} = V(l^2)$ o que é um absurdo pela proposição 1.1.14, assim concluímos $\alpha = 0$ e que Z^* é uma curva pois $\dim Z^* = \alpha + \mu = 0 + 1 = 1$. Pela proposição 1.5.7 temos que $\text{gr}(Z^*) = 2$ uma vez que Z^* não pode ser um espaço linear (isso implicaria Z linear e portanto X seria cone pela proposição 1.1.13). \square

Vamos agora exibir uma demonstração alternativa desse resultado. Tal demonstração se encontra no trabalho de Perazzo [Pe, pg.351].

Prova:

O argumento para provar que $\alpha = 0$ é o mesmo usado em nossa demonstração anterior. Para concluir as outras afirmações lembramos que as fibras do mapa de Perazzo, pela proposição 1.4.5, coincidem com o feixe de hiperplanos que passam por um \mathbb{P}^{N-2} fixado. Obtemos assim um mapa racional $\Phi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow SZ^*$ em que \mathbb{P}^1 representa o feixe de hiperplanos dado pelas fibras do mapa de Perazzo. De fato, sabemos que se

$p \in Z^*$ então $rk(Q_p) = \mu = 1$ e portanto, $Q_p = H_p^2$. Se $p \in SZ^*$ é um ponto geral, $p \in \langle p_1, p_2 \rangle$ em que $Q_{p_i} = H_{p_i}^2$ logo $Q_p = \lambda_1 Q_{p_1} + \lambda_2 Q_{p_2} = H_1 H_2$ onde $H_i \in \langle H_{p_1}, H_{p_2} \rangle$. E portanto o mapa fica definido por $\Phi(H_1, H_2) = p \in Z^*$ em que p é determinado pela condição $Q_p = H_1 H_2$

A descrição anterior nos permite mostrar que o mapa Φ é um mapa bi-racional sendo sua inversa dada por:

$$\Phi^{-1} : SZ^* \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, p \text{ (geral)} \mapsto H_1 H_2$$

Portanto concluímos, nesse caso que Z^* é uma curva plana, uma vez que $\dim SZ^* = 2$ que implica $SZ^* = \mathbb{P}^2$.

Para mostrar que o grau de $Z^* \subset \mathbb{P}^2$ é dois notamos que a reta qualquer do $\mathbb{P}^2 = \langle Z^* \rangle$ está associado um feixe de quádricas de posto 2 determinado pelas quádricas polares de tais pontos. A interseção desta reta com Z^* indica as quádricas do feixe que tem posto 1 que são exatamente duas. \square

Proposição 1.5.10. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica cujo hessiano é identicamente nulo e cuja imagem do mapa de Perazzo seja uma superfície, isto é, $\mu = 2$, então*

$$\langle Z^* \rangle \subset Y.$$

Além disso, se $\alpha = 0$ e se as fibras do mapa de Perazzo de X formam um sistema linear especial de \mathbb{P}^{N-2} passando por um \mathbb{P}^{N-3} fixado, então:

- (i) $\dim Z^* = 2$;
- (ii) $SZ^* = \mathbb{P}^3$ e $Z^* \subset \mathbb{P}^3$;
- (iii) $Z^* \subset \mathbb{P}^3$ é uma superfície quádrlica ou uma superfície cúbica determinantal;
- (iv) $SZ^* = \langle Z^* \rangle = \mathbb{P}^3 \subset Y$.

Prova: Nesse caso as fibras do mapa de Perazzo formam uma família dois dimensional de \mathbb{P}^{N-2} assim temos dois casos a considerar:

$$1. \mathbb{P}_1^{N-2} \cap \mathbb{P}_2^{N-2} = \mathbb{P}^{N-3} \Leftrightarrow \langle \mathbb{P}_1^{N-2}, \mathbb{P}_2^{N-2} \rangle = \mathbb{P}^{N-1}$$

Nesse caso as fibras do mapa de Perazzo correspondem ao sistema linear dos \mathbb{P}^{N-2} que passam por um \mathbb{P}^{N-3} fixado e pela proposição 1.4.5 temos que $\langle Z^* \rangle \subset Y$

$$2. \mathbb{P}_1^{N-2} \cap \mathbb{P}_2^{N-2} = \mathbb{P}^{N-4} \Leftrightarrow \langle \mathbb{P}_1^{N-2}, \mathbb{P}_2^{N-2} \rangle = \mathbb{P}^N$$

Nesse caso, o resultado segue da proposição 1.4.4.

No primeiro caso, se $\alpha = 0$, então $\dim Z^* = \alpha + \mu = 2$. Pela proposição 1.5.7 temos que $Z^* \subset \mathbb{P}^\tau$ é uma hipersuperfície de grau $\text{gr} Z^* \leq 3 = \tau - \alpha$ e o resultado segue.

□

Classificação das hipersuperfícies cúbicas de Hessiano nulo

Nesse capítulo fornecemos uma classificação das hipersuperfícies cúbicas cujo hessiano seja identicamente nulo. Nossa classificação será tanto geométrica quanto algébrica, isto é, quando possível forneceremos equações canônicas para estas cúbicas. Para isso vão ser instrumentos essenciais as ferramentas obtidas no primeiro capítulo, particularmente o mapa de Perazzo. Do ponto de vista algébrico a classificação até \mathbb{P}^6 está essencialmente contida em [Pe, §3.21,22,23;Pg.352,353,354].

2.1 Cúbicas de hessiano nulo em \mathbb{P}^3

Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície cúbica reduzida, não cone e de hessiano nulo. Neste caso, $\mu \leq \frac{1}{2}$ logo $\mu = 0$ e portanto, pela proposição 1.1.13, $X \subset \mathbb{P}^3$ é um cone. De fato, temos a seguinte:

Proposição 2.1.1. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^3$ uma hipersuperfície cúbica reduzida com hessiano identicamente nulo. Então temos as seguintes possibilidades:*

1. X consiste de um arranjo de três planos passando por uma reta;
2. X é um cone de vértice um ponto, sobre uma cúbica plana irredutível.

Prova: Como já observamos, em \mathbb{P}^3 , as hipersuperfícies cúbicas com hessiano nulo são cones. Claramente, se X é irredutível, então tal hipersuperfície é um cone sobre uma cúbica plana irredutível. Se X for redutível, então (após alguns cálculos) temos que a única possibilidade é um arranjo de três hiperplanos contendo uma reta. \square

Observação 2.1.2. Em [DP] os autores caracterizam arranjo de hiperplanos que tem hessiano nulo. A partir de $N = 4$ estaremos interessados, apenas, no caso em que X é irredutível.

2.2 Cúbicas de hessiano nulo em P4

Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^4$ uma hipersuperfície cúbica que não seja um cone e cujo hessiano seja identicamente nulo. Então, pela proposição 1.3.11 obtemos uma estimativa para a dimensão da imagem do mapa de Perazzo, $\mu \leq 1$. Assim, o único caso em que X não é um cone é quando $\mu = 1$. Pela proposição 1.5.9 sabemos que $\alpha = 0$, $\dim Z^* = 1$ e $\dim SZ^* = 2$ e como nesse caso $SZ^* \subset Y$ logo $\dim Y \geq 2$. Ora, se $X \subset \mathbb{P}^4$, então $\dim Y \leq 2$ e pela proposição 1.2.3, $\dim Y = 2 \Leftrightarrow Y = \mathbb{P}^2$.

Portanto o único caso que temos a lidar é o caso $Y = \mathbb{P}^2$, neste caso, $Z^* \subset \mathbb{P}^2$ é uma curva plana que mostramos ser uma cônica na proposição 1.5.9. A forma canônica para tal tipo de hipersuperfície pode ser descrita pela seguinte proposição. Este resultado encontra-se em [Pe, §3.21; Pg 352]

Proposição 2.2.1. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^4$ uma hipersuperfície cúbica, não cone e com hessiano nulo. Então, a menos de projetividade, f assume uma forma canônica*

$$f = x_0x_3^2 + 2x_1x_3x_4 + x_2x_4^2 + D(x_3, x_4)$$

em que D é uma forma cúbica nas variáveis x_3, x_4 .

Prova: Usando uma das proposições 1.2.5, 1.5.5 ou ??, obtemos:

$$f = x_0A(x_3, x_4) + x_1B(x_3, x_4) + x_2C(x_3, x_4) + D(x_3, x_4)$$

Lembramos que, para obter tal forma canônica, fixamos, a menos de projetividade, $\mathbb{P}^2 = Y = \langle Z^* \rangle = L : x_3 = x_4 = 0$ (dependendo da descrição). O grupo de projetividades de \mathbb{P}^4 que fixam esse \mathbb{P}^2 é (isomorfo a) o grupo das projetividades de \mathbb{P}^1 (nas coordenadas x_3 e x_4).

Por outro lado, como $f_0 = A$, $f_1 = B$ e $f_2 = C$ são formas quadráticas linearmente independentes (uma vez que X não é um cone). Logo existe uma projetividade π de \mathbb{P}^1 tal que $A\pi = x_3^2$, $B\pi = 2x_3x_4$ e $C\pi = x_4^2$. \square

Observação 2.2.2. Gostaríamos de entender a estrutura esquemática do lugar singular de tais hipersuperfícies. De posse da forma canônica descrita na proposição 2.2.1, obtemos as seguintes expressões para as derivadas parciais de f :

1. $f_0 = x_3^2$
2. $f_1 = 2x_3x_4$
3. $f_2 = x_4^2$
4. $f_3 = 2x_0x_3 + 2x_1x_4 + D_3$
5. $f_4 = 2x_1x_3 + 2x_2x_4 + D_4$

Em primeiro lugar obtemos $Y = \mathbb{P}^2 : x_3 = x_4 = 0$ na estrutura reduzida. Vamos mostrar que $S = \text{Sing}(X) = V(f_0, \dots, f_4)$, esquematicamente, é genericamente reduzido ao longo desse \mathbb{P}^2 e que há ainda uma componente mergulhada que corresponde a $Z^* \subset \mathbb{P}^2$. Inicialmente vamos nos concentrar no ideal gradiente módulo (f_0, f_1, f_2) . Sabemos que $D_3 \equiv 0 \pmod{(x_3^2, x_3x_4, x_4^2)}$ e $D_4 \equiv 0 \pmod{(x_3^2, x_3x_4, x_4^2)}$ (pois a forma cúbica $D = D(x_3, x_4)$ só depende das variáveis x_3 e x_4). A fim que $f_3 = f_4 = 0$ devemos resolver o seguinte sistema, módulo o ideal gerado por (x_3^2, x_3x_4, x_4^2)

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nos pontos de $\mathbb{P}^2 : x_3 = x_4 = 0$ tais que $x_0x_2 - x_1^2 \neq 0$ o sistema acima possui somente solução trivial, isto é, localizando em $x_0x_2 - x_1^2$ o ideal de $\mathcal{U} \subset \text{Sing}(X)$ consiste precisamente de $(x_3, x_4)_{x_0x_2 - x_1^2}$.

Vamos agora analisar tais hipersuperfícies geometricamente. De fato há um exemplo geométrico interessante de hipersuperfície cúbica em \mathbb{P}^4 que não é cone, essa hipersuperfície pode ser tratada como a dual de um *scroll* ou vista como a projeção da variedade de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathcal{S}_{1,2} \subset \mathbb{P}^5$ a partir de um ponto a ela exterior. Vamos examinar esse exemplo.

Exemplo 2.2.3. Vamos fazer a seguinte identificação: $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\mathbb{M}_{2 \times 3}(\mathbb{C}))$. Nesta identificação, a variedade de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathcal{S}_{1,2} \subset \mathbb{P}^5$ pode ser descrita por

$$\mathcal{S}_{1,2} = \{p = [A] \mid \text{rk}(A) = 1\}$$

e claramente $S\mathcal{S}_{1,2} = \mathbb{P}^5$ uma vez que toda matriz 2×3 pode ser escrita como uma soma de duas matrizes de posto 1. Assim, a projeção de $\mathcal{S}_{1,2}$ por um ponto exterior não é isomorfa a $\mathcal{S}_{1,2}$. Escolhemos o ponto exterior a $\mathcal{S}_{1,2}$ no aberto em que o primeiro menor é não nulo, assim $p = [A]$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ e o hiperplano sobre o qual vamos fazer a projeção será $H : a_{11} = 0$.

$$\pi_p : \mathcal{S}_{1,2} \subset \mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^4 = H$$

é definida por $\pi_p(x) = \langle p, x \rangle \cap H$. Assim:

$$\pi_p(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) = (x_1 : x_2 - ax_0 : x_3 : x_4 - x_0 : x_5 - bx_0)$$

e fazendo, $y_0 = x_1, y_1 = x_2 - ax_0, y_2 = x_3, y_3 = x_4 - x_0, y_4 = x_5 - bx_0$ obtemos, para $a = b = 0$, que a imagem da projeção é uma hipersuperfície cúbica $X \subset \mathbb{P}^4$, $X = V(f)$ onde $f = y_1 y_3 y_4 - y_1^2 y_2 + y_0 y_4^2$ nesse caso, a matriz hessiana de f é:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2y_4 \\ 0 & -2y_2 & -2y_1 & y_4 & y_3 \\ 0 & -2y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_4 & 0 & 0 & y_1 \\ 2y_4 & y_3 & 0 & y_1 & 2y_0 \end{pmatrix}$$

cujos determinantes são identicamente nulos. Além disso, a hipersuperfície X não é um cone, pois se fosse, sua dual seria degenerada o que não é o caso pois sua dual é uma seção hiperplana da variedade dual da variedade de Segre que é projetivamente equivalente a própria variedade de Segre que não é degenerada. Logo, sua seção hiperplana é também não degenerada.

Reciprocamente mostraremos que todas as hipersuperfícies cúbicas de \mathbb{P}^4 , não cone com hessiano identicamente nulo são (projetivamente equivalentes) a uma hipersuperfície como a descrita no exemplo anterior.

Teorema 2.2.4. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^4$, uma hipersuperfície cúbica, não cone com hessiano identicamente nulo, então X é (projetivamente equivalente) a projeção da variedade de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ a partir de um ponto a ela exterior.*

Prova: Primeiramente lembramos que $Y = \mathbb{P}^2$, neste caso, $Z^* \subset \mathbb{P}^2$ é uma curva plana que mostramos ser uma cônica na proposição 1.5.9. Considere agora o sistema linear de

hiperplanos que contém $Y = \mathbb{P}^2$. $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$ em que $\mathbb{P}^1 = (\mathbb{P}^2)^*$, isto é, $H_\lambda \supset Y = \mathbb{P}^2$. Ademais, como $H_\lambda \cap X$ tem grau três, temos:

$$H_\lambda \cap X = 2Y + \tilde{H}_\lambda$$

e assim obtemos uma família de divisores de Weil em X , $\tilde{H}_\lambda = \mathbb{P}^2$ parametrizada por \mathbb{P}^1 . Temos agora a \mathbb{P}^2 -fibrção dada pela família universal:

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{X} & \\ \mathbb{P}^2\text{-fibrção} & \downarrow \searrow & \\ & \mathbb{P}^1 & X \end{array}$$

Observamos que o mapa $\mathfrak{X} \rightarrow X$ é birracional uma vez que pelo ponto geral de X passa somente um \mathbb{P}^2 desse tipo. Gostaríamos ainda de notar que o mapa $\mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ é localmente trivial, e como \mathfrak{X} é um fibrado sobre \mathbb{P}^1 , temos que $\mathfrak{X} = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ (os fibrados localmente triviais sobre \mathbb{P}^1 são projetivização de fibrados vetoriais decomponíveis, em que \mathcal{E} é um fibrado de posto 3. Assim sendo, $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2) \oplus \mathcal{O}(a_3)$ pois os fibrados sobre \mathbb{P}^1 são decomponíveis. Lembramos que $a_i > 0$ pois X não é um cone e que $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ uma vez que $\mathfrak{X} \rightarrow X$ é um morfismo birracional. Pelo descrito anteriormente

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$$

ou seja, $\mathfrak{X} \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ e o diagrama da família universal possui a seguinte fatoração:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{X} & \hookrightarrow & \mathcal{S}_{1,2} & \subset & \mathbb{P}^5 \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & & \\ \mathbb{P}^1 & & X & \subset & \mathbb{P}^4 \end{array}$$

De fato, o sistema linear que dá origem ao mapa $\mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{P}^4$ é um subsistema linear do sistema linear completo que dá origem ao mergulho de Segre, de modo que a aplicação racional $\mathcal{S}_{1,2} \subset \mathbb{P}^5 \dashrightarrow X \subset \mathbb{P}^4$ é uma projeção linear a partir de um ponto externo. \square

Por outro lado, a comodidade deste tipo de exemplo, nos quais $Y = \mathbb{P}^{N-2}$, só aparece em \mathbb{P}^4 como mostra a seguinte:

Proposição 2.2.5. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$, $N \geq 4$, f irredutível, uma hipersuperfície cúbica que não é um cone. Se $H \equiv 0$ e $Y = \text{Sing}(X)_{red} = \mathbb{P}^{N-2}$, então $N = 4$ e X é projetivamente equivalente a projeção da variedade de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathcal{S}_{1,2} \subset \mathbb{P}^5$ de um ponto a ela exterior*

Prova: Suponha por absurdo que $N > 4$ e seja $H = \mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^N$ geral. Por aplicações sucessivas da fórmula de seção hiperplana, proposição ?? temos:

$$\begin{aligned}\Phi_{H \cap X} : H &\dashrightarrow H^* \\ \Phi_{H \cap X} &= \pi_{H^\perp} \circ \Phi_f|_H\end{aligned}$$

Notamos que em $H = \mathbb{P}^4$, $\tilde{X} = X \cap H$ é uma hipersuperfície cúbica irredutível, e pelo teorema de Bertini, $\tilde{Y} = \text{Sing}(\tilde{X})_{red} = \mathbb{P}^2$ logo, $\tilde{H} = H(\tilde{X}) \equiv 0$ e além disso, \tilde{X} não é um cone pela generalidade de H . (Com efeito, por indução podemos supor H um hiperplano. Se a seção hiperplana geral de X é um cone, então a projeção geral da imagem polar de \mathbb{P}^N por f seria degenerada e isso implicaria que a própria imagem polar fosse também degenerada logo X seria um cone.).

Em \mathbb{P}^4 , pela proposição 1.5.9, é sabido que a imagem polar de uma hipersuperfície cúbica de hessiano nulo é uma quádrlica, isto é,

$$\Phi_{\tilde{X}}(H) = Q^3 \subset \mathbb{P}^4 = H^*$$

logo $N = 4$ pois se $N \geq 5$, então $Z \cong Q^3$ (uma vez que \tilde{Z} é uma projeção de Z por um ponto exterior) assim Z seria degenerada e X seria um cone. Como $N = 4$, o resultado segue do teorema anterior.

□

Gostaríamos ainda de analisar um exemplo que está relacionado com a variedade das secantes das variedades de Severi.

Exemplo 2.2.6. Consideremos $\mathcal{V} = \mathcal{V}_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$. Seja $\mathbb{V} = \{M \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C}) \mid M^t = M\}$, o espaço vetorial das matrizes simétricas de ordem 3, $\dim \mathbb{V} = 6$. Faremos a identificação $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\mathbb{V})$, na qual $\mathcal{V} = \mathcal{V}_2(\mathbb{P}^2) = \{[M] \in \mathbb{V} \mid \text{rk}(M) = 1\}$. Com essa identificação, a variedade das secantes da Veronese é

$$S\mathcal{V} = \{[M] \in \mathbb{V} \mid \text{rk}(M) \leq 2\} = \{[M] \in \mathbb{V} \mid \det(M) = 0\}.$$

Em coordenadas,

$$T = S\mathcal{V} = V\left(\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}\right)$$

Tomando a seção hiperplana $H : x_5 = 0$, que é um hiperplano tangente a $T = S\mathcal{V}$ no ponto

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

definimos $X = H \cap T \subset H$. Em coordenadas, $X = V(f) \subset \mathbb{P}^4$:

$$f = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_4 & 0 \end{pmatrix} = -(x_3x_2^2 - 2x_1x_2x_4 + x_0x_4^2).$$

O hessiano de f é identicamente nulo.

A partir de agora vamos explicar a situação dualmente, isto é, fazer uma análise geométrica de X^* . Inicialmente, temos o seguinte lema que é um caso particular do teorema 1.3.8.

Lema 2.2.7. *Sejam $X = V(f) \subset \mathbb{P}^4$ uma hipersuperfície cúbica, não cone, com hessiano identicamente nulo e X^* sua variedade dual. Então $\dim X^* = 2$.*

Prova: Lembramos que, pela proposição 1.1.11, se $p \in \mathbb{P}^4$ é um ponto geral, então $\text{rk } Q_p = 4$ (pois $\dim Z = 3$). Lembramos também que se $r \in Z^*$, então $\text{rk } Q_r = 1$, desta feita $\text{rk } Q_y = 2 \Leftrightarrow y \in Y$. Do exposto, é fácil perceber que para $x \in X$ geral, $\text{rk } Q_x = 3$ e o resultado segue da nossa consideração sobre a matriz jacobiana do mapa polar afim ser a matriz hessiana que aplicada em um ponto qualquer de \mathbb{P}^4 coincide com a matriz da quádrlica polar de tal ponto. \square

Vamos fixar as seguintes notações: A imagem polar de X , $Z = S(C, l)$, é um cone quadrático com vértice uma reta $l = Y^\perp = (\mathbb{P}^2)^\perp$ em que $Y = \text{Sing}(X)_{\text{red}} = \mathbb{P}^2$. A base do cone quadrático Z é uma cônica que C que é a cônica lisa dual da cônica lisa $Z^* \subset \mathbb{P}^2$, nesse mergulho. A imagem do mapa de Perazzo, W , pode ser identificada com Z^* .

X pode ser vista como variedade regrada de duas formas distintas:

- (i) (Folheação de Perazzo) Seja $w \in W$, na demonstração da proposição 2.2.4 mostramos que $X_w = L_w \cap X = 2Y + \tilde{L}_w$, em que $L_w = \mathbb{P}_w^2$ é fibra do mapa de Perazzo. Assim,

$$X = \overline{\bigcup_{w \in W} \tilde{L}_w}$$

de forma que X fica regrada por planos. Geometricamente tal folheação se faz da seguinte maneira, se $p \in X$ é geral e $\mathcal{P}(p) = w \leftrightarrow r \in Z^*$ (quando $\alpha = 0$ há uma identificação natural entre W e Z^*) a folha que passa por p é $\tilde{L}_w = \langle p, T_r Z^* \rangle$ (lembramos que da demonstração da proposição 1.3.11 sabemos que X_w é um cone com vértice $T_r Z^*$);

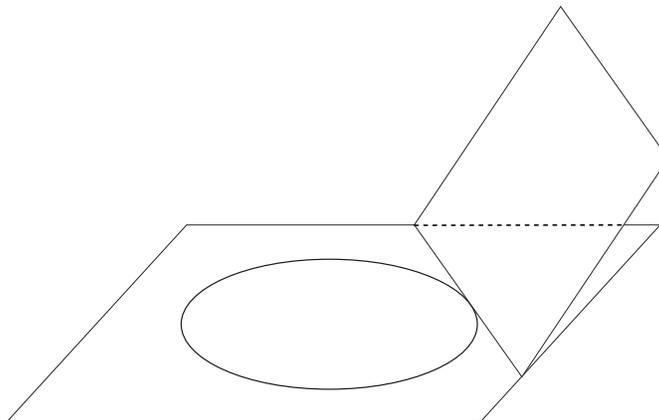


Figura 2.1 Hipersuperfície de planos tangencialmente torcidos sobre uma cônica.

- (ii) (Folheação de Gauss) As fibras do mapa de Gauss são retas contidas em X formando uma folheação por retas

$$X = \overline{\bigcup_{z \in X^*} l_z}$$

De fato tais fibras são retas, pelo lema 2.2.7. Além disso, pela proposição 1.3.7 dado $p \in X$ geral, e $r \in Z^* \leftrightarrow w = \mathcal{P}(p) \in W$ então a reta $\langle p, r \rangle$ é contraída pelo mapa polar (sendo essa a folha contendo x). Observamos que há uma família 1 dimensional de tais hiperplanos $H \supset \tilde{L}_w$ e que $\tilde{L}_w = \mathbb{P}_w^2$ fica assim regrado por (uma família 1 dimensional de) retas que contraem o mapa polar, isto é, onde o espaço tangente é constante (retas estas descritas pela proposição 1.3.7). Observamos ainda que todas as retas de \mathbb{P}_w^2 contraídas pelo mapa de Gauss passam pelo ponto r e portanto a família de tais retas é um feixe de retas nesse $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}_w^2$ passando pelo ponto $r \in Z^*$.

Teorema 2.2.8. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^4$ uma hipersuperfície cúbica, não cone, com hessiano identicamente nulo. Então*

$$X^* \simeq S(1,2) \subset Z \subset \mathbb{P}^4$$

é uma superfície de rolo ("Scroll") racional a partir da reta $l = Y^\perp$ e da cônica C .

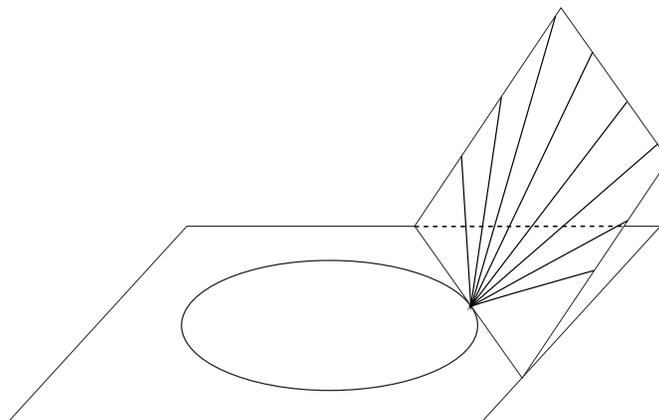


Figura 2.2 Folheação de Gauss em uma fibra do mapa de Perazzo.

Prova: Pelo exposto anteriormente sabemos que $\dim X^* = 2$. É fácil notar ainda que X^* contém a reta l , que representa os hiperplanos que passam por Y . Tais hiperplanos são limites de hiperplanos tangentes de X (em pontos lisos), mas não o são. Notamos ainda que X^* é regrada por retas, isto é, é uma superfície "Scroll". Com efeito, a partir da regra de Perazzo de X , se consideramos o sistema linear dos hiperplanos que contém um determinado \tilde{L}_w , tal sistema linear corresponde a hiperplanos tangentes a X em pontos lisos (exceto aquele que contém Y que estão portanto no fecho). O lugar de tais retas fica assim parametrizado por C uma vez que cada um desses hiperplanos é da forma $H = \langle T_y Z^*, \tilde{L}_w \rangle$. O resultado assim fica provado pela irreduzibilidade de ambos, $S(1,2) \subset X^*$. \square

O teorema a seguir é, de certa forma, uma compilação de vários resultados parciais encontrados em [Pe, §3.21, pg. 353] (algebricamente) e [?, Pg.74,75] (geometricamente). As outras implicações são mais ou menos claras.

Teorema 2.2.9. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^4$ uma hipersuperfície cúbica, não cone. Então são equivalentes*

- (i) X possui hessiano identicamente nulo;
- (ii) X é projetivamente equivalente a projeção exterior de uma variedade de Segre $S_{1,2} \subset \mathbb{P}^5$;
- (iii) X^* é projetivamente equivalente a uma superfície Scroll $S(1,2)$

(iv) $Y = \text{Sing}(X)_{\text{red}} = \mathbb{P}^2$;

(v) a menos de projetividade X possui uma equação

$$f = x_0x_3^2 + 2x_1x_3x_4 + x_2x_4^2 + D(x_3, x_4)$$

Prova: A equivalência (i) \Leftrightarrow (ii) segue da proposição 2.2.4. A equivalência (i) \Leftrightarrow (iii) segue da proposição 2.2.8. A implicação (i) \Leftrightarrow (iv) segue da proposição 1.5.9. A implicação (iv) \Leftrightarrow (v) segue da proposição 1.2.5. A implicação (v) \Rightarrow (i) pode ser verificada diretamente pela relação algébrica entre as derivadas parciais $4f_0f_2 = f_1^2$ (obtida a partir da forma canônica). \square

2.3 Cúbicas de hessiano nulo em P5

Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^5$ uma hipersuperfície cúbica que não seja um cone e cujo hessiano seja identicamente nulo. Pela proposição 1.3.11 temos a seguinte estimativa para a dimensão da imagem do mapa de Perazzo: $\mu \leq \frac{3}{2}$. Assim o único caso a analisar é aquele em que $\mu = 1$. Pela proposição 1.5.9 sabemos que $\alpha = 0$, $\dim Z^* = 1$, $\dim SZ^* = 2$, $SZ^* = \mathbb{P}^2 \subset Y$ (Z^* é uma cônica plana).

Vamos analisar o lugar singular de X , Y . Claramente $\dim Y \geq 2$, por outro lado, como $\dim X = 4$, devemos ter $\dim Y \leq 3$. Observamos que, pela proposição 2.2.5, que $\dim Y = 3$ implica $Y = \mathbb{P}^3$ e X , nesse caso, é um cone.

Assim, o único caso a considerar é $\dim Y = 2$. Pelo exposto anteriormente sabemos que Y possui uma componente irredutível que é $Y_0 = \mathbb{P}^2$. Em tal componente temos Z^* que é uma cônica. Z é um cone quadrático de dimensão 4 com vértice o plano $l = Y_0^\perp$.

Observação 2.3.1. Gostaríamos de observar que, em \mathbb{P}^5 , diferentemente do que ocorre em \mathbb{P}^4 , a existência de um plano singular, $\tilde{Y} = \mathbb{P}^2$, não implica o anulamento do hessiano de X como podemos observar no seguinte exemplo:

$$f = x_0x_3^2 + x_1x_4^2 + x_2x_5^2$$

que claramente possui um \mathbb{P}^2 como componente irredutível de seu lugar singular reduzido $Y_0 = \mathbb{P}^2 : x_3 = x_4 = x_5 = 0$, mas não possui hessiano identicamente nulo.

Um outro argumento simples mostra (novamente) que de fato devemos ter $\alpha = 0$ nesse caso. (De fato $\dim Z^* = 1 = \alpha + \mu$ e $\mu = 1$ já implicam $\alpha = 0$.) Alternativamente temos o seguinte

Lema 2.3.2. *Seja $X \subset \mathbb{P}^N$, com $N \geq 5$, uma hipersuperfície cúbica, não cone com hessiano identicamente nulo, então $\dim Z \geq 4$*

Prova: Se $\dim Z \leq 2$, então interseccionando X com um \mathbb{P}^3 geral obtemos uma superfície cúbica $\tilde{X} = X \cap H$ de hessiano nulo em \mathbb{P}^3 que teria de ser um cone, assim concluiríamos que X era um cone. Se $\dim Z = 3$, interseccionando com um \mathbb{P}^4 geral, teríamos $\tilde{X} = X \cap H \subset \mathbb{P}^4$ uma hipersuperfície cúbica de hessiano nulo que não é um cone logo $\tilde{Z} = \pi_{H^\perp}(Z) \cong Q^3$ seria uma quádrlica e desta maneira Z seria também uma quádrlica e portanto degenerada e então X seria um cone. \square

Como, em \mathbb{P}^5 , temos apenas o caso $\mu = 1$ é imediata a obtenção de uma forma canônica para as hipersuperfícies de hessiano nulo de \mathbb{P}^5 .

Proposição 2.3.3. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^5$ uma hipersuperfície cúbica, não cone e com hessiano nulo. Então, a menos de projetividade, f assume uma forma canônica*

$$f = x_0x_4^2 + 2x_1x_4x_5 + x_2x_5^2 + D(x_3, x_4, x_5)$$

Em que D é uma forma cúbica nas variáveis x_3, x_4, x_5 tal que a curva por ela definida em $\mathbb{P}^2 : x_1 = x_2 = x_3 = 0$ não seja singular no ponto $(1 : 0 : 0)$.

Prova: Usando uma das proposições 1.5.5 ou ??, obtemos:

$$f = x_0A(x_4, x_5) + x_1B(x_4, x_5) + x_2C(x_4, x_5) + D(x_3, x_4, x_5)$$

Lembramos que para obter tal forma canônica fixamos, a menos de projetividade, $\mathbb{P}^2 = \tilde{Y} = \langle Z^* \rangle : x_3 = x_4 = x_5 = 0$ e supomos $\mathbb{P}^3 = L : x_4 = x_5 = 0$. O grupo de projetividades de \mathbb{P}^5 que fixam esse \mathbb{P}^3 é (isomorfo) ao grupo das projetividades de \mathbb{P}^1 (nas coordenadas x_4 e x_5).

Além disso, $f_0 = A$, $f_1 = B$ e $f_2 = C$ são formas quadráticas linearmente independentes (uma vez que X não é um cone). Logo existe uma projetividade π de \mathbb{P}^1 tal que $A\pi = x_4^2$, $B\pi = 2x_4x_5$ e $C\pi = x_5^2$.

A condição de D não ser singular em $(1 : 0 : 0)$ é necessária para que X não seja um cone. De fato, nesse caso teríamos $Y = \mathbb{P}^3 = \langle \mathbb{P}^2, p \rangle : x_4 = x_5 = 0$ e, pela proposição 2.2.5, X seria um cone. \square

Observação 2.3.4. A condição geométrica de que a curva definida por D , em $\mathbb{P}^2 : x_1 = x_2 = x_3 = 0$, não possua o ponto $(1 : 0 : 0)$ singular pode ser traduzida algebricamente da seguinte maneira: a parte da forma D que é múltiplo de x_3^2 (isto é $\alpha x_3^3 + \beta x_3^2 x_4 + \gamma x_3^2 x_5$) é não nula.

Devemos ter que $\tilde{D} = \alpha x_3^3 + \beta x_3^2 x_4 + \gamma x_3^2 x_5 \neq 0$ pois caso contrário, $D = x_3 E(x_4, x_5) + F(x_4, x_5)$ em que E é uma forma quadrática e F uma forma cúbica. Nesse caso, teríamos $\mathbb{P}^3 : x_4 = x_5 = 0 \subset Y$ e portanto, pela proposição 2.2.5, X seria um cone. Com efeito, uma análise direta das expressões das derivadas parciais de f nos faz concluir que se o ponto $(1 : 0 : 0)$ é singular a forma D , então todas as derivadas parciais se anulam em $\mathbb{P}^3 : x_4 = x_5 = 0$.

Supondo agora que X não seja um cone, vamos analisar a estrutura do seu lugar singular. Inicialmente calculemos

1. $f_0 = x_4^2$
2. $f_1 = 2x_4 x_5$
3. $f_2 = x_5^2$
4. $f_3 = D_3$
5. $f_4 = 2x_0 x_4 + 2x_1 x_5 + D_4$
6. $f_5 = 2x_1 x_4 + 2x_2 x_5 + D_5$

Em que escrevemos $D = \tilde{D} + x_3 E(x_4, x_5) + F(x_4, x_5)$ com $\tilde{D} = \alpha x_3^3 + \beta x_3^2 x_4 + \gamma x_3^2 x_5 \neq 0$. Claramente, na estrutura reduzida, $Y = \mathbb{P}^2 : x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Vamos agora descrever a estrutura esquemática de $\text{Sing} X$. Primeiramente observamos que, como no caso de \mathbb{P}^4 , genericamente $\text{Sing}(X)$ é reduzido. De fato, sabemos que para $i = 4, 5$ temos $D_i = x_3 E_i + F_i = x_3(a_i x_4 + b_i x_5) + F_i$ e, claramente $F_i \equiv 0 \pmod{(x_4^2, x_4 x_5, x_5^2)}$. A fim que $f_4 = f_5 = 0$ obtemos o seguinte sistema (módulo o ideal gerado por $(x_4^2, x_4 x_5, x_5^2)$):

$$\begin{pmatrix} 2x_0 + a_4 x_3 & 2x_1 + b_4 x_3 \\ 2x_1 + a_5 x_3 & 2x_2 + b_5 x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Desde que $\det \begin{pmatrix} 2x_0 + a_4 x_3 & 2x_1 + b_4 x_3 \\ 2x_1 + a_5 x_3 & 2x_2 + b_5 x_3 \end{pmatrix} \neq 0$ o sistema possui solução única $x_4 = x_5 =$

0. Restrito a $\mathbb{P}^2 : x_3 = x_4 = x_5 = 0$ obtemos, desta condição determinantal, que fora de Z^* esse plano é reduzido.

O próximo teorema, essencialmente, pode ser encontrado em [Pe, §3.23, pg 353].

Teorema 2.3.5. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^5$ uma hipersuperfície cúbica, não cone. Então são equivalentes:*

- (i) X possui hessiano identicamente nulo;
- (ii) uma componente irredutível de $Y = \text{Sing}(X)$ é $\tilde{Y} = \mathbb{P}^2$ e as quádricas polares dos pontos de \mathbb{P}^5 são tangentes a um $\mathbb{P}^3 = L$ ao longo desse $\mathbb{P}^2 = \tilde{Y}$ gerador comum;
- (iii) a menos de projetividade X possui uma equação

$$f = x_0x_4^2 + 2x_1x_4x_5 + x_2x_5^2 + D(x_3, x_4, x_5).$$

Aqui a forma D é uma cúbica nas variáveis x_3, x_4, x_5 tal que a curva por ela definida em $\mathbb{P}^2 : x_1 = x_2 = x_3 = 0$ não seja singular no ponto $(1 : 0 : 0)$.

Prova: A implicação (i) \Rightarrow (ii) segue das proposições 1.5.9 e 1.5.3. A implicação (ii) \Rightarrow (iii) segue da proposição 1.5.5. A implicação (iii) \Rightarrow (i) pode ser verificada diretamente das derivadas parciais de f . \square

A partir de agora vamos explicar a situação dualmente, isto é, fazer uma análise geométrica de X^* . Primeiramente, temos o seguinte lema que é corolário do teor 1.3.8 mas vamos fazer uma demonstração alternativa.

Lema 2.3.6. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^5$ uma hipersuperfície cúbica, não cone, com hessiano identicamente nulo. Então $\dim X^* = 3$.*

Prova: Sabemos, pela proposição 1.1.11, que se $p \in \mathbb{P}^5$ é um ponto geral, então $\text{rk } Q_p = 5$ (pois $\dim Z = 4$). Lembramos que se $r \in Z^*$, então, pela proposição 1.3.5, $\text{rk } Q_p = 1$. Assim, $\text{rk } Q_y \leq 2 \Leftrightarrow y \in Y$ sendo $\text{rk } Q_y = 2$ para $y \in Y$ geral.

É natural esperarmos que se $x \in X$ é um ponto geral, então $\text{rk } Q_x = 4$ o caso $\text{rk } Q_p = 3$ ocorrendo para pontos especiais de X .

De fato, se $\text{rk } Q_x = 3$ para o ponto geral de X , então todos os menores 4×4 da matriz

seriam nulos (módulo f).

Usando a forma canônica dada pela proposição 2.3.3, obtemos que a matriz da quádrlica polar de um ponto $x \in X$ é da forma

$$[Q_x] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_5 & 2x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_5 \\ 0 & 0 & 0 & D_{33} & D_{43} & D_{53} \\ 2x_4 & 2x_5 & 0 & D_{34} & 2x_0 + D_{44} & 2x_1 + D_{54} \\ 0 & 2x_4 & 2x_5 & D_{35} & 2x_1 + D_{45} & 2x_2 + D_{55} \end{bmatrix}$$

Tomando o último menor 3×3 inferior obtemos

$$4x_5^2[D_{33}(D_{44} + 2x_0) - D_{34}^2] \equiv 0 \pmod{f}$$

e como x_5^2 não é um divisor de zero módulo f (X é irredutível), então obtemos

$$[D_{33}(D_{44} + 2x_0) - D_{34}^2] \equiv 0 \pmod{f}$$

e como $\text{gr}[D_{33}(D_{44} + 2x_0) - D_{34}^2] = 2$ (não podem se anular pois isso implicaria X ser um cone)

$$D_{33}(D_{44} + 2x_0) - D_{34}^2 = 0$$

isso é um absurdo pois a forma D não depende da variável x_0 e D_{33} não é identicamente nulo. \square

Teorema 2.3.7. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^5$ uma hipersuperfície cúbica, não cone, com hessiano identicamente nulo. Então X é uma variedade de 2-planos tangencialmente 1-torcidos sobre Z^* .*

$$X = \overline{\bigcup_{r \in Z^*, \alpha \in \Lambda} \mathbb{P}_{r\alpha}^2}$$

Em que $T_r Z^* \subset \mathbb{P}_{r\alpha}^2$ e para cada $r \in Z^*$ a família dos $\mathbb{P}_{r\alpha}^2$ contendo $T_r Z^*$ é de dimensão 1. Além disso, as fibras do mapa de Gauss de X em cada $\mathbb{P}_{r\alpha}^2$ são as retas desse \mathbb{P}^2 que passam por r .

Prova:

Vamos fixar as seguintes notações: $Z = S(C, \pi)$ a imagem polar de X é um cone com vértice no plano $\pi = Y^\perp$ e base uma cônica que C que é a cônica lisa dual de $Z^* \subset \mathbb{P}^2$ nesse mergulho. As fibras do mapa de Perazzo são $L_y = \mathbb{P}^4$ (identificando $Z^* \simeq W$) e tais fibras formam um sistema linear de \mathbb{P}^4 contendo um $\mathbb{P}^3 = L$ (tal feixe de hiperplanos é parametrizado por L^\perp).

X pode ser vista como variedade regradada de duas maneiras distintas:

- (i) (Folheação do Cerne) Consideremos a família dos \mathbb{P}^3 contendo $Y = \mathbb{P}^2$. $\mathcal{F} = \{\mathbb{P}_\lambda^3 \mid \lambda \in \pi\}$. Tal família é bidimensional. Temos que

$$\mathbb{P}_\lambda^3 \cap X = 2Y + \mathbb{P}_\lambda^2.$$

Assim,

$$X = \overline{\bigcup_{\lambda \in \pi} \mathbb{P}_\lambda^2}.$$

Para cada $r \in Z^*$ sabemos que a fibra do mapa de Perazzo (associada a r), pela proposição 1.3.5, é $L_r = \mathbb{P}_r^4$. Contida em \mathbb{P}_r^4 há uma família 1-dimensional de \mathbb{P}^3 contendo $Y = \mathbb{P}^2$ (tal família é um feixe de hiperplanos em \mathbb{P}_r^4) que denotaremos por $\mathcal{F}_r = \{\mathbb{P}_{\lambda(r)}^3 \mid \lambda(r) \in l_r \subset \pi\}$ em que $l_r = (\mathbb{P}_{\lambda(r)}^3)^\perp$. Além disso, lembramos que, pela proposição 1.3.11 concluímos que $\mathbb{P}_\lambda^2 \cap Y = T_r Z^*$. Se $x \in X$ é um ponto geral com imagem de Perazzo $w \leftrightarrow z \in Z^*$, então podemos recuperar a folha a qual ele pertence, $\mathbb{P}_\lambda^2 = \langle T_r Z^*, x \rangle$;

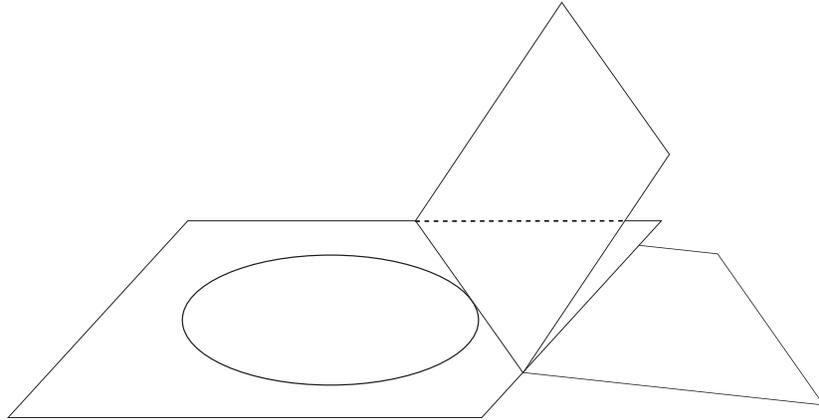


Figura 2.3 Hipersuperfície de planos tangencialmente torcidos sobre uma cônica em P5.

Para cada $r \in Z^*$ existe uma família 1-dimensional de planos da folheação passando por r .

- (ii) (Folheação de Gauss) As fibras do mapa de Gauss são retas contidas em X formando uma regra

$$X = \overline{\bigcup_{z \in X^*} l_z}$$

De fato tais fibras são retas. Observamos ainda que, pelo teorema 1.3.8, todas as retas de \mathbb{P}_w^2 contraídas pelo mapa de Gauss passam pelo ponto r e portanto a família de tais retas é um feixe de retas em \mathbb{P}^2 . \square

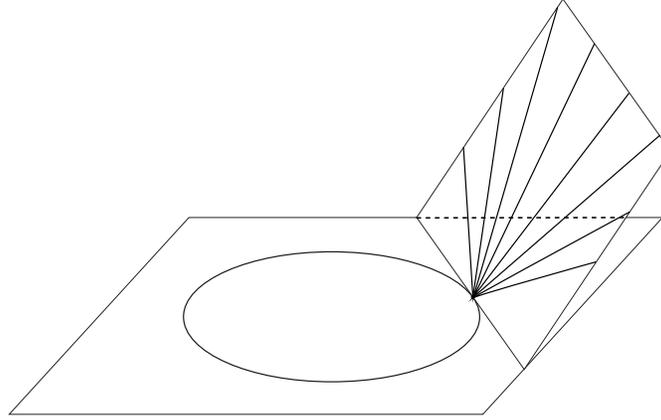


Figura 2.4 Folheação de Gauss numa folha da folheação do cerne

Observação 2.3.8. A partir das descrições de X como variedade regrada, temos, dualmente, a seguinte situação. $X^* \subset Z$ em que $Z = S(L, C)$. As retas passando por $s \in C$ (ponto de C correspondente ao dual de $T_r Z^*$) correspondem dualmente aos hiperplanos tangentes a X em pontos lisos parametrizados pelo feixe de retas em $\mathbb{P}_{\lambda(r)}^2$ passando pelo ponto r . Variando $\lambda(r) \in l_r$ obtemos um plano no dual, correspondente a família de retas a um parâmetro supracitados. De fato tal superfície regrada é um plano pois a projeção de centro um ponto geral de π nos conduz a \tilde{Z} (imagem polar da seção de X associada a tal projeção), um \mathbb{P}^4 sobre o qual projetamos Z pode ser visto como sendo $\langle\langle C \rangle, l \rangle$ em que $l = \langle L \rangle^\perp$ (o hiperplano a seccionar não pode conter L). Os planos que folheiam X^* ficam parametrizados (simultaneamente) por um ponto da curva C ($s \in C$ correspondendo a $T_r Z^*$) e um ponto da reta $l = L^\perp$ ($p \in l$ correspondendo a $p = (\mathbb{P}_r^4)^\perp$ "fibra do mapa de Perazzo"). Cada um de tais planos intersectam o $\mathbb{P}^4 = \langle\langle C \rangle, l \rangle$ (no qual serão projetados) em uma reta que corresponde a reta correspondente na folheação de $\tilde{X}^* = S(1, 2)$.

2.4 Cúbicas de hessiano nulo em \mathbb{P}^6

Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^6$ uma hipersuperfície cúbica, não cone com hessiano identicamente nulo. Utilizando a estimativa da proposição 1.3.11, obtemos que a imagem do mapa de Perazzo tem dimensão $\mu \leq 2$. Logo as únicas possibilidades são:

- (i) $\mu = 1$ pela proposição 1.5.9 $\alpha = 0$, $Z^* \subset \mathbb{P}^2 \subset Y$ é uma cônica;
- (ii) $\mu = 2$ pela proposição 1.5.10 sabemos que $\langle Z^* \rangle \subset Y$.

Em ambos os casos X é uma hipersuperfície de Perazzo e, além disso, $\dim Y \leq 3$. De fato, $\dim Y \leq 4$ e, pela proposição 2.2.5, $\dim Y = 4 \Rightarrow Y = \mathbb{P}^4$ é impossível uma vez que X não é um cone. Portanto, $\dim Y \leq 3$.

Além disso temos a seguinte proposição que pode ser demonstrada com argumentos análogos àqueles descritos na proposição 2.3.2:

Proposição 2.4.1. *Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica, não cone com hessiano identicamente nulo $N \geq 6$, então $\dim Z \geq 5$*

Ou seja, também em \mathbb{P}^6 temos que sempre $\alpha = 0$. Lembramos que $\dim Z = N - \alpha - 1$.

2.4.1 Imagem de Perazzo de dimensão 1

Consideremos, inicialmente, $X = V(f) \subset \mathbb{P}^6$ hipersuperfície cúbica, não cone, com imagem do mapa de Perazzo de dimensão $\mu = 1$. Existem duas possibilidades para a dimensão de Y nesse caso, $\dim Y = 2$ ou $\dim Y = 3$ uma vez que existe um plano $\langle Z^* \rangle = \mathbb{P}^2 \subset Y$ (segue da proposição 1.5.9).

Temos uma forma canônica para o caso $\mu = 1$ que é descrita na próxima:

Proposição 2.4.2. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^6$ uma hipersuperfície cúbica, não cone, com hessiano identicamente nulo e tal que $\mu = 1$. Então, a menos de projetividade X possui uma*

equação:

$$f = x_0x_5^2 + 2x_1x_5x_6 + x_2x_6^2 + D(x_3, x_4, x_5, x_6)$$

em que D é uma forma cúbica nas variáveis x_3, x_4, x_5 e x_6 . Tal forma cúbica determina uma superfície $V(D) \subset \mathbb{P}^3 : x_0 = x_1 = x_2 = 0$ que é não singular ao longo da reta $l : x_5 = x_6 = 0$ (olhada como suvariedade do \mathbb{P}^3 com coordenadas homogêneas x_3, x_4, x_5 e x_6).

Prova: A obtenção da forma canônica é idêntica aos casos de \mathbb{P}^4 e \mathbb{P}^5 .

Se $p \in l \cap \text{Sing}(V(D))$, então $\langle \mathbb{P}^2, p \rangle \subset Y$ em que $\mathbb{P}^2 : x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$. De fato, seja $q \in \langle \mathbb{P}^2, p \rangle$ tal ponto possui $q_5 = q_6 = 0$ e claramente substituindo em f nos resta somente $f(q) = D(q_3, q_4, q_5, q_6)$. Por hipótese D é singular em p e como $q = y + \lambda p$ com $y \in \mathbb{P}^2$ temos que $q_i = \lambda p_i$ para $i = 3, 4, 5, 6$ daí segue que D é singular em $(p_3 : p_4 : p_5 : p_6)$.

Claramente, se $l \subset \text{Sing}(V(D))$, então $\mathbb{P}^4 = \langle \mathbb{P}^2, l \rangle \subset Y$ que implicaria X ser um cone pela proposição 2.2.5. \square

Teorema 2.4.3. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^6$ uma hipersuperfície cúbica, não cone. Então são equivalentes:*

- (i) X possui hessiano identicamente nulo e $\mu = 1$;
- (ii) existe um $\mathbb{P}^2 \subset Y = \text{Sing}(X)$ e as quádricas polares dos pontos de \mathbb{P}^6 são tangentes a um $\mathbb{P}^4 = L$ ao longo desse $\mathbb{P}^2 = \tilde{Y}$, gerador comum;
- (iii) a menos de projetividade X possui uma equação

$$f = x_0x_5^2 + 2x_1x_5x_6 + x_2x_6^2 + D(x_3, x_4, x_5, x_6);$$

em que D é uma forma cúbica nas variáveis x_3, x_4, x_5 e x_6 descreve uma superfície $V(D) \subset \mathbb{P}^3 : x_0 = x_1 = x_2 = 0$ que não é singular em toda a reta $l : x_5 = x_6 = 0$ (vista dentro de \mathbb{P}^3 com coordenadas x_3, x_4, x_5 e x_6).

Prova: Idêntica ao caso $N = 5$.

Observação 2.4.4. Gostaríamos de analisar o lugar singular de X, Y . De acordo com o descrito na demonstração da proposição anterior sabemos que quando temos que $l \cap \text{Sing}(V(D)) = \emptyset$ então garantiremos que nesse caso $Y = \mathbb{P}^2$. Se, por outro lado, $l \cap \text{Sing}(V(D)) \neq \emptyset$ teremos duas possibilidades para tal interseção: pode consistir de dois pontos a assim $Y = \mathbb{P}_1^3 \cup \mathbb{P}_2^3$ ou ainda consistir de um ponto e nesse caso $Y = \mathbb{P}^3$.

O próximo teorema mostra a existência de três classes distintas de hipersuperfícies cúbicas $X \subset \mathbb{P}^6$ não cone, com $\mu = 1$ e com hessiano nulo. Perazzo analisando apenas as formas canônicas chegava a ideia errada de haver apenas uma classe.

Teorema 2.4.5. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^6$ uma hipersuperfície cúbica, não cone, com hessiano identicamente nulo e tal que $\mu = 1$. Então*

- (i) *Se $Y = \mathbb{P}^2$, então $X = \overline{\bigcup_{r \in Z^*, \alpha \in \Lambda} \mathbb{P}_{r,\alpha}^2}$, em que $T_r Z^* \subset \mathbb{P}_{r,\alpha}^2$ e para cada $r \in Z^*$ a família dos $\mathbb{P}_{r,\alpha}^2$ contendo $T_r Z^*$ é de dimensão 2. Além disso, as fibras do mapa de Gauss de X em cada $\mathbb{P}_{r,\alpha}^2$ são as retas desse \mathbb{P}^2 que passam por r ;*
- (ii) *Se $Y = \mathbb{P}^3$, então $X = \overline{\bigcup_{r \in Z^*, \alpha \in \Lambda} \mathbb{P}_{r,\alpha}^3}$, em que $T_r Z^* \subset \mathbb{P}_{r,\alpha}^3$ e para cada $r \in Z^*$ a família dos $\mathbb{P}_{r,\alpha}^2$ contendo $T_r Z^*$ é de dimensão 1. Além disso, as fibras do mapa de Gauss de X em cada $\mathbb{P}_{r,\alpha}^3$ são as retas desse \mathbb{P}^3 que passam por r ; O caso $\mu=2$*
- (iii) *Se $Y = \mathbb{P}_1^3 \cup \mathbb{P}_2^3$, então existem duas famílias de \mathbb{P}^3 folheando X (como em (ii)) de modo que os membros de cada uma delas associados a um mesmo $x \in X$ se intersectam em um \mathbb{P}^2 e tais planos também folheiam X como em (i).*

Prova: Vamos provar somente a primeira asserção; a prova das outras é análoga.

Se $Y = \mathbb{P}^2$, então, pelo teorema 1.4.8, X é uma variedade de 2-planos tangencialmente 2-torcidos sobre $Z^* \subset \mathbb{P}^\tau = \mathbb{P}^2$. Ou seja,

$$X \overline{\bigcup_{r,\alpha} \mathbb{P}_{r,\alpha}^2}$$

em que $T_r Z^* \subset \mathbb{P}_{r,\alpha}^2$ e, para cada $r \in Z^*$, a família dos $\mathbb{P}_{r,\alpha}^2$ contendo $T_r Z^*$ é de dimensão $s = \dim X - (\dim Z^* + \tau) = 5 - (1 + 2) = 2$. As fibras do mapa de Gauss são descritas pelo teorema 1.3.8.

2.4.2 Imagem de Perazzo de dimensão 2

Vamos agora analisar o segundo caso, isto é, a imagem do mapa de Perazzo tem dimensão $\mu = 2$. Nesse caso temos que $\dim Z^* = \alpha + \mu = 2$ portanto, como Z^* não é um espaço linear, $\dim SZ^* = 3$ assim, $SZ^* = \langle Z^* \rangle = \mathbb{P}^3 = \tilde{Y}$ é uma componente irredutível de Y (lembramos que $\dim Y \leq 3$). Sabemos pela proposição 1.2.4 que, de fato, tal variedade tem hessiano identicamente nulo por haver um espaço linear suficientemente grande em

seu lugar singular. Além disso, como $\langle Z^* \rangle = \mathbb{P}^3 \subset \bigcap_{w \in W} L_w$ e como $L_w = \mathbb{P}^4$ devemos ter sempre o caso em que as fibras do mapa de Perazzo formam um sistema linear de \mathbb{P}^4 passando por um $\mathbb{P}^3 = L$ fixo e mais que isso, $\langle Z^* \rangle = L = \bigcap_{w \in W} L_w$.

O teorema a seguir pode ser encontrado em [Pe, Pg.354].

Teorema 2.4.6. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^6$ uma hipersuperfície cúbica, não cone e com hessiano identicamente nulo. Suponhamos que a imagem do mapa de Perazzo de X seja de dimensão dois, isto é, $\mu = 2$. Então, a menos de projetividade, X pode ser descrito por uma forma:*

$$f = x_0 C^0(x_4, x_5, x_6) + x_1 C^1(x_4, x_5, x_6) + x_2 C^2(x_4, x_5, x_6) + x_3 C^3(x_4, x_5, x_6) + D(x_4, x_5, x_6).$$

Em que C^0, C^1, C^2 e C^3 são formas quadráticas linearmente independentes, três a três algebricamente independentes e D uma forma cúbica.

Prova: Segue diretamente da proposição 1.5.5. □

Observação 2.4.7. Observamos que a condição de que C^0, C^1, C^2, C^3 sejam linearmente independentes é necessária uma vez que se f_0, f_1, f_2, f_3 fossem linearmente dependentes, então X seria um cone. A condição de independência algébrica entre quaisquer três dentre C^0, C^1, C^2, C^3 é para impedir uma relação de dependência entre somente três derivadas parciais de f que implicaria que Z seria um cone com vértice \mathbb{P}^3 e portanto $Z^* \subset \mathbb{P}^2$ e assim teríamos $\mu = 1$.

Vamos agora examinar um exemplo de hipersuperfície cúbica em \mathbb{P}^6 com $\mu = 2$ e tal que $Z^* \subset \mathbb{P}^3$ é uma superfície cúbica determinantal. De acordo com a proposição 1.5.7 $Z^* \subset \mathbb{P}^3$ é uma componente irredutível de um superfície cúbica determinantal. Nesse exemplo, $Z^* \subset \mathbb{P}^3$ coincide com tal superfície cúbica determinantal que é irredutível:

Exemplo 2.4.8. Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^6$ uma hipersuperfície cúbica com equação (extraída da forma canônica para $\mu = 2$):

$$f = x_0(x_4^2 + x_5^2) + x_1 x_4 x_5 + x_2 x_4 x_6 + x_3 x_5 x_6.$$

Observamos que $f_0 = x_4^2 + x_5^2$, $f_1 = x_4 x_5$, $f_2 = x_4 x_6$ e $f_3 = x_5 x_6$. Uma evidente relação algébrica entre essas derivadas parciais é:

$$f_0 f_2 f_3 = x_4^3 x_5 x_6^2 + x_4 x_5^3 x_6^2 = f_1 f_2^2 + f_1 f_3^2.$$

Faremos $p_4 = x_4$, $p_5 = x_5$, $p_6 = x_6$ nas segundas derivadas parciais obtidas a partir de

$$(i) f_4 = 2x_0x_4 + x_1x_5 + x_2x_6;$$

$$(ii) f_5 = 2x_0x_5 + x_1x_4 + x_3x_6;$$

$$(iii) f_6 = x_2x_4 + x_3x_5.$$

Utilizando o argumento teórico descrito na demonstração da proposição 1.5.7, lembrando que $\mathbb{P}^\tau = \mathbb{P}^3 : x_4 = x_5 = x_6 = 0$, escreveremos as equações para $i = 4, 5, 6$:

$$\sum_{i=0}^{\tau} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (p) x_j = 0$$

obtemos,

$$\begin{cases} 2p_4x_0 + p_5x_1 + p_6x_2 + 0x_3 = 0 \\ 2p_5x_0 + p_4x_1 + 0x_2 + p_6x_3 = 0 \\ 0x_0 + 0x_1 + p_4x_2 + p_5x_3 = 0 \end{cases}$$

Essas relações bilineares nas variáveis x_0, x_1, x_2, x_3 e p_4, p_5, p_6 podem ser vistas como um sistema linear em cada conjunto de variáveis considerando o outro conjunto como parâmetro. Escrevendo tais relações como um sistema linear nas variáveis p_4, p_5, p_6 , obtemos:

$$\begin{cases} 2x_0p_4 + x_1p_5 + x_2p_6 = 0 \\ x_1p_4 + 2x_0p_5 + x_3p_6 = 0 \\ x_2p_4 + x_3p_5 + 0p_6 = 0 \end{cases}$$

os pontos de Z^* são pontos nos quais tal sistema possui solução não trivial e portanto satisfazem

$$\det \begin{pmatrix} 2x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & 2x_0 & x_3 \\ x_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix} = 2x_1x_2x_3 - 2x_0x_2^2 - 2x_0x_3^2 = 0.$$

Concluimos portanto que

$$Z^* = V(x_1x_2x_3 - x_0x_2^2 - x_0x_3^2) \subset \mathbb{P}^3 : x_4 = x_5 = x_6 = 0.$$

Vamos agora examinar um exemplo de hipersuperfície cúbica em \mathbb{P}^6 com $\mu = 2$ e tal que $Z^* \subset \mathbb{P}^3$ é uma superfície quádrlica. Pela proposição 1.5.7, $Z^* \subset \det(M)$ é uma componente irredutível de uma superfície determinantal de grau $\tau - \alpha = 3$. Genericamente se espera que a condição determinantal dada por $\det(M) \subset \mathbb{P}^\tau$ defina uma hipersuperfície irredutível, assim, genericamente espera-se que $Z^* = \det(M)$. No exemplo que apresentaremos não vale a igualdade esperada $Z^* = \det(M)$ pois $\det(M) \subset \mathbb{P}^3$ é uma superfície cúbica que não é irredutível, tendo duas componentes: uma quádrlica $Q = Z^*$ e uma linear.

Exemplo 2.4.9. Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^6$ uma hipersuperfície cúbica com equação:

$$f = x_0x_4x_5 + x_1x_4^2 + x_2x_4x_6 + x_3x_5x_6$$

Observamos que $f_0 = x_4x_5$, $f_1 = x_4^2$, $f_2 = x_4x_6$ e $f_3 = x_5x_6$. Uma relação algébrica entre essas derivadas parciais é:

$$f_0f_2 = f_1f_3$$

Faremos $p_4 = x_4$, $p_5 = x_5$, $p_6 = x_6$ nas segundas derivadas parciais obtidas a partir de

(i) $f_4 = x_0x_5 + 2x_1x_4 + x_2x_6$;

(ii) $f_5 = x_0x_4 + x_3x_6$;

(iii) $f_6 = x_2x_4 + x_3x_5$.

Utilizando o argumento teórico descrito na demonstração da proposição 1.5.7, lembramos que $\mathbb{P}^\tau = \mathbb{P}^3 : x_4 = x_5 = x_6 = 0$, escreveremos as equações para $i = 4, 5, 6$:

$$\sum_{i=0}^{\tau} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (p)x_j = 0$$

obtemos,

$$\begin{cases} p_5x_0 + 2p_4x_1 + p_6x_2 + 0x_3 = 0 \\ p_4x_0 + 0x_1 + 0x_2 + p_6x_3 = 0 \\ 0x_0 + 0x_1 + p_4x_2 + p_5x_3 = 0 \end{cases}$$

Essas relações bilineares nas variáveis x_0, x_1, x_2, x_3 e p_4, p_5, p_6 podem ser vistas como um sistema linear em cada conjunto de variáveis considerando o outro conjunto

como parâmetro. Escrevendo agora tais relações como um sistema linear nas variáveis p_4, p_5, p_6 , obtemos:

$$\begin{cases} 2x_1p_4 + x_0p_5 + x_2p_6 = 0 \\ x_0p_4 + 0p_5 + x_3p_6 = 0 \\ x_2p_4 + x_3p_5 + 0p_6 = 0 \end{cases}$$

os pontos de Z^* são pontos nos quais tal sistema possui solução não trivial e portanto satisfazem

$$\det \begin{pmatrix} 2x_1 & x_0 & x_2 \\ x_0 & 0 & x_3 \\ x_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix} = 2x_0x_2x_3 - 2x_1x_3^2 = 0.$$

Por questões de irreduzibilidade concluímos que

$$Z^* = V(x_0x_2 - x_1x_3) \subset \mathbb{P}^3 : x_4 = x_5 = x_6 = 0.$$

Temos, mais uma vez um teorema de caracterização como em [Pe, Pg. 354]

Teorema 2.4.10. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^6$ uma hipersuperfície cúbica, não cone. Então são equivalentes:*

- (i) X possui hessiano identicamente nulo e $\mu = 2$;
- (ii) uma componente irreduzível de $Y = \text{Sing}(X)$ é $\tilde{Y} = \mathbb{P}^3$ e existe nesse \mathbb{P}^3 uma componente mergulhada que é uma superfície quádrlica ou cúbica;
- (iii) a menos de projetividade X possui uma equação

$$f = x_0C^0(x_4, x_5, x_6) + x_1C^1(x_4, x_5, x_6) + x_2C^2(x_4, x_5, x_6) + x_3C^3(x_4, x_5, x_6) + D(x_4, x_5, x_6).$$

Em que C^0, C^1, C^2 e C^3 são formas quadráticas linearmente independentes, três a três algebricamente independentes e D uma forma cúbica.

O teorema a seguir é um corolário do teorema ??.

Teorema 2.4.11. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^6$ uma hipersuperfície cúbica, não cone, com hessiano identicamente nulo. Então $X = \bigcup_{r \in Z^*} \mathbb{P}_r^3$, em que $T_r Z^* \subset \mathbb{P}_{r\alpha}^2$. Além disso, as fibras do mapa de Gauss de X em cada $\mathbb{P}_{r\alpha}^2$ são as retas desse \mathbb{P}^2 que passam por r .*

Prova: Vamos fixar as seguintes notações: $Z = S(\tilde{Z}, l)$ a imagem polar de X é um cone com vértice um plano $\pi = \tilde{Y}^\perp$ e base uma superfície S que é a superfície dual de $Z^* \subset \mathbb{P}^3$, nesse mergulho.

X pode ser vista como variedade regradada de duas formas distintas:

- (i) (Folheação de Perazzo) Faremos a identificação natural $Z^* \simeq W$, a fibra do mapa de Perazzo de um ponto $r \in Z^*$ é $L_r = \mathbb{P}_r^4 \supset Y$ pela proposição 1.4.1 e assim concluímos que $X_r = L_r \cap X = 2Y + \tilde{L}_r$. Assim,

$$X = \overline{\bigcup_{r \in Z^*} \tilde{L}_r}$$

de forma que X fica regradada por espaços lineares de dimensão 3. Geometricamente tal folheação se faz da seguinte maneira, se $p \in X$ é geral e $\mathcal{P}(p) = w \leftrightarrow r \in Z^*$ a folha que passa por p é $\tilde{L}_w = \langle p, T_r Z^* \rangle$ (lembramos que da demonstração da proposição 1.3.11 sabemos que X_w é um cone com vértice $T_r Z^*$);

- (ii) (Folheação de Gauss) As fibras do mapa de Gauss são retas contidas em X formando uma folheação natural

$$X = \overline{\bigcup_{z \in X^*} l_z}$$

De fato tais fibras são retas uma vez que pela proposição 1.3.7 dado $p \in X$ geral, e $r \in Z^* \leftrightarrow w = \mathcal{P}(p) \in W$ então a reta $\langle p, r \rangle$ é contraída pelo mapa polar, portanto $\dim X^* \leq 4$. Para concluir que $\dim X^* = 4$ notamos que se esse não fosse o caso, então o espaço tangente a X em planos passando por um ponto, na fibra de Perazzo seria constante, isso é um absurdo pois $\langle X^* \rangle = \langle Z \rangle$. Observamos que há uma família 2 dimensional de hiperplanos $H \supset \tilde{L}_r$ (correspondendo a um plano \tilde{L}_r^\perp) portanto, cada um deles é tangente e X^* fica assim regradado por (uma família 2 dimensional) de planos parametrizados simultaneamente por S (superfície dual de Z^* em seu mergulho) e por pontos de π . \square

2.5 Cúbicas de hessiano nulo em P7

Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^7$ uma hipersuperfície cúbica, não cone, com hessiano identicamente nulo. Pela estimativa da proposição 1.3.11 temos que $\mu \leq \frac{5}{2}$, portanto, temos outra vez somente duas possibilidades:

- (i) $\mu = 1$ pela proposição 1.5.9 $\alpha = 0$, $Z^* \subset \mathbb{P}^2 = \tilde{Y}$ é uma cônica;
- (ii) $\mu = 2$ pela proposição 1.5.10 sabemos que $\langle Z^* \rangle \subset Y$.

Observamos que fomos capazes tratar o caso $N = 7$, que Perazzo não tratou, pois nossa estimativa é um pouco mais refinada.

2.5.1 Imagem de Perazzo de dimensão 1

Primeiramente analisemos o caso $\mu = 1$. Para obter a forma canônica nesse caso podemos utilizar a proposição 1.5.5 e um argumento similar àquele usado em \mathbb{P}^4 e \mathbb{P}^5 assim obtemos a seguinte

Proposição 2.5.1. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^7$ uma hipersuperfície cúbica, não cone, com hessiano identicamente nulo e tal que $\mu = 1$. Então, a menos de projetividade X possui uma equação:*

$$f = x_0x_6^2 + 2x_1x_6x_7 + x_2x_7^2 + D(x_3, x_4, x_5, x_6, x_7).$$

Em que D é uma forma cúbica nas variáveis x_3, x_4, x_5, x_6 e x_7 tal que a hipersuperfície por ela definida em $\mathbb{P}^4 : x_0 = x_1 = x_2 = 0$ não seja singular ao longo de todo o plano $x_3 = x_4 = x_5 = 0 : \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^4 : x_0 = x_1 = x_2 = 0$.

Prova: A obtenção da forma canônica é clara. A condição de não singularidade é para evitar que $\mathbb{P}^5 = \langle \mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2 \rangle \subset Y$ que implicaria em X ser um cone. Temos uma análise similar àquela de \mathbb{P}^6 . \square

Teorema 2.5.2. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^7$ uma hipersuperfície cúbica, não cone. Então são equivalentes:*

- (i) X possui hessiano identicamente nulo e $\mu = 1$;
- (ii) existe um $\mathbb{P}^2 \subset Y = \text{Sing}(X)$ e as quádricas polares dos pontos de \mathbb{P}^6 são tangentes a um $\mathbb{P}^5 = L$ ao longo desse $\mathbb{P}^2 = \tilde{Y}$, gerador comum;
- (iii) a menos de projetividade X possui uma equação

$$f = x_0x_6^2 + 2x_1x_6x_7 + x_2x_7^2 + D(x_3, x_4, x_5, x_6, x_7).$$

Em que D é uma forma cúbica nas variáveis x_3, x_4, x_5, x_6 e x_7 tal que a hipersuperfície por ela definida em $\mathbb{P}^4 : x_0 = x_1 = x_2 = 0$ seja não singular ao longo de todo o plano $x_3 = x_4 = x_5 = 0 : \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^4 : x_0 = x_1 = x_2 = 0$.

Prova: Identica aos casos $N = 5$ e $N = 6$. □

2.5.2 Imagem de Perazzo de dimensão 2

Consideremos agora o caso (ii), no qual $\mu = 2$, sabemos da proposição 1.4.1 que $\langle Z^* \rangle \subset Y$ e portanto $\dim Y \geq 3$ e como X não é cone, temos ainda que $\dim Y \leq 4$ pela proposição 2.2.5.

O primeiro subcaso é aquele em que as fibras do mapa de Perazzo formam um sistema linear e para esse subcaso temos uma forma canônica.

Proposição 2.5.3. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^7$ uma hipersuperfície cúbica, não cone e com hessiano identicamente nulo. Suponhamos que a imagem do mapa de Perazzo de X seja de dimensão dois, isto é, $\mu = 2$ e as fibras do mapa de Perazzo formem um sistema linear. Então, a menos de projetividade, X pode ser descrito por uma forma:*

$$f = x_0 C^0(x_5, x_6, x_7) + x_1 C^1(x_5, x_6, x_7) + x_2 C^2(x_5, x_6, x_7) + x_3 C^3(x_5, x_6, x_7) + D(x_4, x_5, x_6, x_7).$$

Em que C^0, C^1, C^2 e C^3 são formas quadráticas linearmente independentes e três a três algebricamente independentes e D uma forma cúbica.

O caso $\mu = 2$ em \mathbb{P}^7 é bem mais interessante pois pode ocorrer que as fibras do mapa de Perazzo não formem um sistema linear.

Vamos analisar um exemplo interessante produzido a partir da maquinaria de Gordan e Noether. Esse é um exemplo de hipersuperfície cúbica $X = V(f) \subset \mathbb{P}^7$, não cone, de hessiano identicamente nulo com $\mu = 2$ tal que duas fibras gerais do mapa de Perazzo $L_w = \mathbb{P}^5$, se cortam ao longo de um $\mathbb{P}^3 = L_w \cap L_{\bar{w}}$. Esse exemplo foi motivado por seu rico lugar singular que consiste de três componentes irredutíveis, um \mathbb{P}^3 e duas variedades de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ mergulhadas em respectivos \mathbb{P}^5 que se cortam ao longo o \mathbb{P}^3 singular.

Exemplo 2.5.4. Primeiramente consideremos $T = S_{2,2} \subset \mathbb{P}^8$ a variedade de Segre. Utilizamos a seguinte identificação $\mathbb{P}^8 = \mathbb{P}(\mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C}))$. Com tal identificação, temos que

$$T = S_{2,2} = \{[M] \in \mathbb{P}^8 \mid \text{rk}(M) = 1\}$$

Assim, temos que a variedade das secantes de T é uma hipersuperfície cúbica determinantal:

$$ST = \{[M] \in \mathbb{P}^8 \mid \text{rk}(M) \leq 2\} = \{[M] \in \mathbb{P}^8 \mid \det(M) = 0\}$$

Se tomamos a seção hiperplana $x_8 = 0$, que mostraremos ser uma seção tangencial, obtemos a seguinte hipersuperfície cúbica:

$$X = H \cap ST \subset \mathbb{P}^7 = H$$

De fato, H corresponde a um hiperplano tangente por exemplo ao ponto $p = [A]$ representado pela seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Em coordenadas, $X = V(f)$ onde

$$f = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & 0 \end{pmatrix} = x_1x_5x_6 + x_2x_3x_7 - x_2x_4x_6 - x_0x_5x_7$$

Para encontrar a imagem polar $Z \subset \mathbb{P}^7$ devemos calcular as derivadas parciais:

1. $\frac{\partial f}{\partial x_0} = -x_5x_7$
2. $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_5x_6$
3. $\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_3x_7 - x_4x_6$
4. $\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_2x_7$
5. $\frac{\partial f}{\partial x_4} = -x_2x_6$
6. $\frac{\partial f}{\partial x_5} = x_1x_6 - x_0x_7$
7. $\frac{\partial f}{\partial x_6} = x_1x_5 - x_2x_4$
8. $\frac{\partial f}{\partial x_7} = x_2x_3 - x_0x_5$

Observamos uma evidente relação algébrica entre as derivadas parciais:

$$f_0 f_4 = x_2 x_5 x_6 x_7 = f_1 f_3$$

portanto, X possui hessiano nulo e claramente não é um cone. Z é um cone quadrático de vértice $y_0 = y_4 = y_1 = y_3 = 0$ e equação

$$Z = V(y_0 y_4 - y_1 y_3)$$

(de fato, esta é a única relação entre as derivadas parciais, ou seja, $\alpha = 0$) Dualmente Z^* será uma superfície quadrática degenerada contida no $\mathbb{P}^3 : x_2 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$ e de equação:

$$Z^* = V(x_0 x_4 - x_1 x_3).$$

Esse \mathbb{P}^3 que é o "span" linear de Z^* é uma componente do lugar singular de X como pode ser facilmente observado $\tilde{Y}_0 = \mathbb{P}^3 = \langle Z^* \rangle$. Por outro lado devemos ter ainda no lugar singular de X ao menos os pontos de ST que já eram singulares, isto é, $\text{Sing}(ST) \cap H = T \cap H$. Vamos descrever esse lugar singular álgebro-geometricamente concluindo que se trata de uma união $Y = \tilde{Y}_0 \cup \tilde{Y}_1 \cup \tilde{Y}_2$ onde $\tilde{Y}_i, i = 1, 2$ correspondem a duas variedades de Segre mergulhadas em dois \mathbb{P}^5 distintos que se cortam ao longo $\mathbb{P}^3 = \tilde{Y}_0$.

De fato, suponhamos que $x_5 \neq 0$, então a condição de singularidade implica, nesse caso, $x_6 = x_7 = 0, x_1 x_5 - x_2 x_4 = 0$ e $x_2 x_3 - x_0 x_5 = 0$. Seja $\mathbb{P}^5 = L_1 : x_6 = x_7 = 0$, dentro desse \mathbb{P}^5 uma outra componente de Y corresponde a uma interseção de 3 quádricas formando uma variedade de Segre $S_{1,2}$. Observamos que as quádricas $Q_1 : x_1 x_5 - x_2 x_4$ e $Q_2 : x_2 x_3 - x_0 x_5$ são, em seu span linear L_1 , duas hipersuperfícies quádricas de posto 4 além disso, o 3 plano $\tilde{Y}_0 : x_2 = x_5 = 0$ (pensado dentro de L_1) está contido em cada uma das quádricas. Como $Q_1 \cap Q_2 \supseteq \tilde{Y}_0$ tomamos $p \in Q_1 \cap Q_2 \setminus \tilde{Y}_0, p = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : 0 : 0), (a_2 : a_5) \neq (0 : 0), a_1 a_5 - a_2 a_4 = 0$ e $a_2 a_3 - a_0 a_5 = 0$. Assim, $(a_2 : a_5)$ é uma solução não trivial do seguinte sistema linear homogêneo:

$$\begin{pmatrix} -a_4 & a_1 \\ a_3 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, concluímos que $a_0 a_4 - a_1 a_3 = 0$, logo, a terceira quádrica supracitada é exatamente $Q_3 : x_0 x_4 - x_1 x_3 = 0$. Identificando $L_1 = \mathbb{P}(\mathbb{M}_{2 \times 3}(\mathbb{C}))$ a componente irredutível de Y contida em L_1 corresponde as classes de matrizes $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$ tais que $x_1 x_5 - x_2 x_4 = x_2 x_3 - x_0 x_5 = x_0 x_4 - x_1 x_3 = 0$, mas esses são exatamente os menores 2×2 da matriz, ou seja,

$$\tilde{Y}_1 = \{[M] \in \mathbb{P}^5 \mid \text{rk}(M) = 1\} = \mathcal{S}_{1,2}$$

A análise da outra componente é completamente análoga sendo $L_2 : x_2 = x_5 = 0$.

A quádrlica polar de um ponto de Z^* tem posto 2 e portanto as fibras do mapa de Perazzo são $L_w = \text{Sing } Q_r = \mathbb{P}^5$ ou seja, nesse caso $\mu = 2$. Com efeito, se $r \in Z^*$, $r = (a_0 : a_1 : 0 : a_3 : a_4 : 0 : 0 : 0)$ em que $a_0a_4 - a_1a_3 = 0$, então a quádrlica polar de r é da forma:

$$Q_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & -a_0 \\ 0 & 0 & -a_4 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & -a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que tem posto dois pela relação $a_0a_4 - a_1a_3 = 0$ que ocorre nos pontos de Z^* .

Duas fibras gerais do mapa de Perazzo se cortam em um \mathbb{P}^3 como se pode verificar analisando o lugar singular da quádrlica polar de dois pontos gerais de Z^* .

Nesse caso, as fibras do mapa de Perazzo não formam um sistema linear.

Proposição 2.5.5. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^7$ uma hipersuperfície cúbica, não cone e com hessiano identicamente nulo. Suponhamos que a imagem do mapa de Perazzo de X seja de dimensão dois, isto é, $\mu = 2$ e duas fibras do mapa de Perazzo gerem \mathbb{P}^7 . Então, a menos de projetividade, X pode ser descrito por uma forma:*

$$f = x_0C^0(x_4, x_5, x_6, x_7) + x_1C^1(x_4, x_5, x_6, x_7) + x_2C^2(x_4, x_5, x_6, x_7) + x_3C^3(x_4, x_5, x_6, x_7) + D(x_4, x_5, x_6, x_7).$$

Em que C^0, C^1, C^2 e C^3 são formas quadráticas linearmente independentes que não são cones de mesmo vértice e D uma forma cúbica.

Nosso próximo exemplo é bastante interessante pois é o primeiro em que $\text{codim } Z > 1$. Observamos que se $N \leq 6$, então, pelas proposições 2.3.2 e 2.4.1, sempre tínhamos que $\alpha = 0$ que é equivalente a $\text{codim } Z = 1$.

Exemplo 2.5.6. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^7$ a hipersuperfície cúbica de equação*

$$f = x_0x_5^2 + x_1x_5x_6 + x_2x_6^2 + x_3x_6x_7 + x_4x_7^2.$$

Claramente X não é um cone e possui hessiano identicamente nulo uma vez que podemos determinar relações algébricas evidentes entre suas derivadas parciais. De fato,

$$f_0f_2 = f_1^2 \quad \text{e} \quad f_2f_4 = f_3^2$$

Portanto $\text{codim} Z = 2$. Note que o lugar singular possui uma componente $Y_0 = \mathbb{P}^4 : x_5 = x_6 = x_7 = 0$ e que $Z^* \subset Y_0$. Como Y_0 é linear, $\langle Z^* \rangle \subset Y$.

2.6 Exemplos em dimensão superior

Nessa seção apresentamos exemplos de hipersuperfícies cúbicas em dimensão $N \geq 7$ que possuem propriedades geométricas fortemente diferentes daquelas classificadas e descritas até agora. Se $N \leq 6$, por exemplo, todas as hipersuperfícies cúbicas que não são cones e possuem hessiano identicamente nulo são de tipo especial, no sentido que $Z \subset \mathbb{P}^N$ é uma hipersuperfície e que as fibras do mapa de Perazzo formam um sistema linear especial de \mathbb{P}^m passando por um \mathbb{P}^{m-1} fixo. Em \mathbb{P}^7 , apresentamos, na seção anterior, exemplos de hipersuperfície cúbica não cone e com hessiano identicamente nulo que não são de tipo especial, no sentido supracitado. Por outro lado, existe ainda uma particularidade geométrica persistente nos exemplos apresentados, a saber, $\langle Z^* \rangle \subset Y$. Apresentaremos também alguns aspectos algébricos e suas implicações geométricas.

2.6.1 O caso de \mathbb{P}^8

Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^8$ uma hipersuperfície cúbica, não cone, com hessiano identicamente nulo. Observamos que a estimativa obtida na proposição 1.3.11 nos fornece $\mu \leq 3$ e que se $\alpha = 1$, então $\mu \leq \frac{5}{2}$. O procedimento para uma classificação das cúbicas de hessiano nulo em \mathbb{P}^8 seria bastante natural para $\mu = 1$ e para $\mu = 2$ (proposições 1.5.9 e 1.5.10).

O único problema seria $\mu = 3$. Nesse caso, observamos ainda que se $\langle Z^* \rangle \subset \bigcap_{w \in W} L_w$,

então, como $L_w = \mathbb{P}_w^5$ (fibras do mapa de Perazzo) teríamos somente uma possibilidade: $L_w \cap L_{\tilde{w}} = \mathbb{P}^4$ que seria o caso em que as fibras do mapa de Perazzo formam um sistema linear especial, caso este que conhecemos profundamente. De fato, sabemos, da proposição 1.3.6 que $\dim Z^* \geq 3 \Rightarrow \dim \langle Z^* \rangle \geq 4$ (pois a mesma não é um espaço linear). Nosso problema é não saber se em \mathbb{P}^8 , quando $\mu = 3$ vale a inclusão que permeia toda a tese, a saber: $\langle Z^* \rangle \subset Y$.

2.6.2 Uma classe de exemplos extremais

Vamos aqui apresentar famílias de exemplos em que o espaço linear $\langle Z^* \rangle \subset Y$ é maximal e constitui uma componente irredutível do lugar singular de X (em todos esses exemplos $\alpha = 0$). Nesses exemplos $\mu = m - 1$ é maximal pela estimativa $\mu \leq \frac{N-\alpha-2}{2} = \frac{2m-2}{2}$. Esses exemplos fazem parte da maquinaria de Gordan e Noether e, via proposição 1.2.4 possuem hessiano nulo. Tais exemplos só ocorrem em dimensão par, $N = 2m$, e de fato alguns de nossos exemplos em \mathbb{P}^4 e \mathbb{P}^6 são desse tipo.

Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^{2m}$ em que $f = x_0 B_0(x_{m+1}) + \dots + x_m B_m(x_{2m})$. Como temos $m + 1$ formas dependendo de m variáveis, necessariamente existe uma relação de dependência algébrica entre tais formas. Se supusermos que B_0, \dots, B_m são linearmente independentes então X não é um cone. Se escolhermos arbitrariamente as formas B_0, \dots, B_m , então (a menos de permutação) podemos supor que B_0, \dots, B_{m-1} formem uma sequência regular que implica serem algebricamente independentes (a recíproca não é verdadeira).

É fácil ver que $Y_0 = \mathbb{P}^m : x_{m+1} = \dots = x_{2m}$ será uma componente irredutível de $Y = \text{Sing}(X)$, nesse caso. De fato, $Y_0 \subset Y$ (verificação imediata) e além disso, nossa hipótese de que B_0, \dots, B_{m-1} formem uma sequência regular implica que $\dim Y \leq m$ como $\dim Y_0 = m$ segue imediatamente que Y_0 é uma componente irredutível de Y .

Um exemplo explícito em \mathbb{P}^8 .

Exemplo 2.6.1. Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^8$ em que

$$f = x_0 x_5^2 + x_1 x_6^2 + x_2 x_7^2 + x_3 x_8^2 + x_4 (x_5 x_8 - x_6 x_7)$$

É fácil notar que esse exemplo se enquadra na classe extremal descrita.

2.6.3 Exemplos cuja imagem polar tem codimensão maior que 1

Primeiramente lembramos que se $N \leq 6$, então necessariamente $\alpha = 0$, isto é, $Z \subset \mathbb{P}^N$ é uma hipersuperfície. Algebricamente a condição $\alpha = 0$ nos diz que existe apenas uma relação algébrica entre as derivadas parciais de f . Em \mathbb{P}^7 apresentamos um exemplo no qual $\alpha = 1$, a partir de agora vamos mostrar estratégias para construir famílias de exemplos nos quais $\alpha > 1$, ou seja, exemplos nos quais existem mais de uma relações algébricas entre as derivadas parciais de f . Vamos mostrar vários exemplos nesse sentido, em \mathbb{P}^N , $N \geq 8$

Exemplo 2.6.2. Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^7$ a hipersuperfície cúbica dada pela forma

$$f = x_0x_3^2 + x_1x_3x_4 + x_2x_4^2 + x_5x_4x_7 + x_6x_7^2.$$

X não é um cone (é fácil verificar que as derivadas parciais são L.I.) e as suas derivadas parciais satisfazem duas relações algébricas:

$$f_1^2 = f_0f_2 \text{ e } f_5^2 = f_2f_6.$$

A forma f é dita ser obtida da concatenação (soma e eliminação de termo com duplicidade) da forma $f_1 = x_0x_3^2 + x_1x_3x_4 + x_2x_4^2$ com a forma $f_2 = x_2x_4^2 + x_5x_4x_7 + x_6x_7^2$ (uma mudança de coordenadas de modo que o primeiro monômio de f_2 coincide com o terceiro monômio de f_1). ambas de hessiano nulo num \mathbb{P}^4 .

Exemplo 2.6.3. Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^9$ a hipersuperfície dada por

$$f = x_0x_3^2 + 2x_1x_3x_4 + x_2x_4^2 + x_5x_8^2 + x_6x_8x_9 + x_7x_9^2.$$

Claramente X não é um cone e suas derivadas parciais satisfazem

$$f_1^2 = f_0f_2 \text{ e } f_6^2 = f_5f_7.$$

Nesse exemplo $\alpha = 1$. f foi obtida de uma soma, seguinte forma. Considere a forma $f_1 = x_0x_3^2 + x_1x_3x_4 + x_2x_4^2$ que define uma cúbica de hessiano nulo em \mathbb{P}^4 e defina $f_2 = x_5x_8^2 + x_6x_8x_9 + x_7x_9^2$ (fazendo um shift nos rótulos das variáveis que definem f_1) que também é uma cúbica de hessiano nulo em um \mathbb{P}^4 disjunto.

Um exemplo, com $\alpha = 2$, dado por justaposição:

Exemplo 2.6.4. Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^{14}$ a hipersuperfície cúbica dada por pela justaposição da forma $f_1 = x_0x_3^2 + x_1x_3x_4 + x_2x_4^2$ consigo mesma duas vezes. Mudando variáveis obtemos $f_2 = x_5x_8^2 + x_6x_8x_9 + x_7x_9^2$ e $f_3 = x_{10}x_{13}^2 + x_{11}x_{13}x_{14} + x_{12}x_{14}^2$. Obtemos assim

$$f = x_0x_3^2 + 2x_1x_3x_4 + x_2x_4^2 + x_5x_8^2 + x_6x_8x_9 + x_7x_9^2 + x_{10}x_{13}^2 + x_{11}x_{13}x_{14} + x_{12}x_{14}^2.$$

X não é um cone e as suas derivadas parciais satisfazem

$$f_1^2 = f_0f_2, f_6^2 = f_5f_7 \text{ e } f_{11}^2 = f_{10}f_{12}.$$

Observação 2.6.5. Os métodos descritos na obtenção dos exemplos em questão fornecem hipersuperfícies cúbicas, não cones, com hessiano identicamente nulo em que $\alpha > 1$ para todo $N \geq 7$. Além disso, se N for suficientemente grande, então existem exemplos em que α é arbitrariamente grande. Precisamente, dado $\alpha \in \mathbb{N}$ (arbitrário), existe $N_0 = N_0(\alpha)$ tal que para todo $N \geq N_0$ existe em \mathbb{P}^N uma hipersuperfície cúbica X , não cone, com hessiano identicamente nulo em que $\alpha_X = \alpha$.

Hipersuperfícies cúbicas desenvolvíveis

Nesse capítulo será apresentado o conceito de hipersuperfície desenvolvível e mostraremos que as hipersuperfícies de hessiano nulo são desenvolvíveis. A partir da classificação das hipersuperfícies cúbicas de hessiano nulo vamos classificar as cúbicas desenvolvíveis em \mathbb{P}^4 e em \mathbb{P}^5 .

3.1 Relação entre hipersuperfícies desenvolvíveis e de hessiano nulo

Lembramos a definição do mapa de Gauss de uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^N$ ($\dim X = n$).

Definição 3.1.1. O mapa polar de $X \subset \mathbb{P}^N$ é o mapa racional

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_X : X &\dashrightarrow \mathbb{G}(n, N) \\ x &\mapsto T_x X \end{aligned}$$

Uma Variedade desenvolvível é aquela cujo mapa de Gauss é degenerado, isto é, a imagem do mapa de Gauss tem dimensão menor que $n = \dim X$. Assim, para hipersuperfícies temos:

Definição 3.1.2. Uma hipersuperfície $X \subset \mathbb{P}^N$ é chamada desenvolvível se ocorrer:

$$\dim X^* < N - 1.$$

Como estamos interessados em hipersuperfícies, e nesse caso $(\overline{\mathcal{G}_X(X)}) = X^*$ a definição acima é simplesmente uma releitura da definição clássica de variedade desenvolvível. Uma hipersuperfície é desenvolvível se o mapa de Gauss a ela associado é degenerado, isto é, se $\dim(\overline{\mathcal{G}_X(X)}) = \dim X^* < \dim X = N - 1$.

Nosso objetivo é de entender a relação entre os conceitos de desenvolvibilidade e o de possuir hessiano nulo. Primeiramente observamos que se X tem hessiano nulo e não é um cone, então:

$$\dim X^* < \dim Z \leq N - 1$$

logo X é desenvolvível. (Não poderia ocorrer a igualdade $\dim X^* = \dim Z$ pois assim teríamos $Z = X^*$ pela irreduzibilidade de ambos e portanto $X = Z^* \subset Y$ que é um absurdo)

Por outro lado, a recíproca não é verdadeira, isto é, existem hipersuperfícies desenvolvíveis que não são de hessiano nulo como por exemplo a variedade das tangentes da cúbica reversa em \mathbb{P}^3 (quártica) ou de uma curva espacial qualquer. Em \mathbb{P}^3 não existe exemplo de cúbica desenvolvível não cone cujo hessiano não seja nulo. Assim, o primeiro exemplo de uma cúbica desenvolvível com hessiano não nulo é o seguinte.

Exemplo 3.1.3. Seja $X \subset \mathbb{P}^4$ a hipersuperfície tal que $X^* = \pi(\mathcal{V}_2)$ é a projeção da superfície de Veronese $\mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathcal{V}_2 \subset \mathbb{P}^5$ a partir de um ponto a ela exterior. Assim temos:

$$X = H \cap \mathcal{V}_2^* = H \cap S\mathcal{V}_2$$

Onde H é induz a seção hiperplana correspondente. Observamos que $\dim X^* = 2 < \dim X = 3$ logo X é desenvolvível. Por outro lado, identificando $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\mathbb{V})$, onde $\mathbb{V} = \{A \in \mathbb{M}_3 | A = A^t\}$, sabemos que $\mathcal{V}_2 = \{[A] \in \mathbb{V} | rk(A) \leq 1\}$ e assim:

$$S\mathcal{V}_2 = \{[A] \in \mathbb{V} | rk(A) \leq 2\} = V(\det(A))$$

Sendo $A = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$, $\det(A) = x_0x_3x_5 + 2x_0x_2x_4 - x_2^2x_3 - x_1^2x_5 - x_0^2x_4$.

Portanto, tomando $H : x_1 = 0$ obtemos após uma mudança de (nomes) de variáveis:

$$f = x_0x_2x_4 + x_1^2x_2 - x_0x_3^2$$

Cujo hessiano não é identicamente nulo:

$$H(f) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_4 & -2x_3 & x_2 \\ 0 & 2x_2 & 2x_1 & 0 & 0 \\ x_4 & 2x_1 & 0 & 0 & x_0 \\ -2x_3 & 0 & 0 & -2x_0 & 0 \\ x_2 & 0 & x_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -8(x_0x_1^2x_2^2 + x_0^2x_2^2x_4 + x_0^2x_2x_3^2)$$

Vimos que para uma hipersuperfície desenvolvível o hessiano nem sempre é identicamente nulo, mas ele é nulo módulo a equação que define X . A demonstração da proposição seguinte pode ser encontrada em [?].

Proposição 3.1.4. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície desenvolvível, então $hess_X \equiv 0 \pmod{f}$.*

Segundo um teorema de Zak todas as variedades desenvolvíveis são singulares. De fato, temos o seguinte teorema que pode ser encontrado em [?], [?] ou [?, pg.35]

Teorema 3.1.5. *Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade projetiva, irredutível, não degenerada e não singular de dimensão n . Então o mapa de Gauss é um morfismo birracional sobre sua imagem.*

Como as variedades não singulares tem mapa de Gauss que é um morfismo, no caso desenvolvível é de se esperar que as fibras do mapa de Gauss intersectem o lugar singular de X . O mais importante resultado sobre o mapa de Gauss é a respeito da linearidade das fibras do mapa de Gauss. Ver [?, Pg. 22] ou [?, Pg.21]

Teorema 3.1.6. *Seja $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade desenvolvível, irredutível e não degenerada. Então a fibra geral do mapa de Gauss de X é um subespaço linear de \mathbb{P}^N .*

Para cada $x \in X$ definimos a folha $F_x = \mathbb{P}^s$ eo foco com respeito a F_x por $F_x \cap \text{Sing}(X)$. Variando $x \in X$ obtemos um importante lugar em $Y = \text{Sing}(X)$.

Definição 3.1.7. *O lugar focal $F \subset Y$, é lugar dos pontos sob os quais incidem infinitas fibras do mapa de Gauss ver [FW] e [FP].*

Lembramos que se X é cúbica, então $SF \subset SY \subset X$.

Como temos visto, uma hipersuperfície cúbica irredutível desenvolvível $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ pode ser de duas naturezas muito distintas(de acordo com sua imagem polar):

- (i) Com hessiano h_X não identicamente nulo, isto é, a imagem polar coincide com $Z = \mathbb{P}^N$;
- (ii) Com hessiano identicamente nulo $h_X \equiv 0$, isto é, a imagem polar é uma subvariedade $Z \subsetneq \mathbb{P}^N$.

O segundo caso, para as hipersuperfícies cúbicas, foi completamente entendido até \mathbb{P}^7 no capítulo anterior e além disso demos uma descrição de classes que existem para todo N e alguns exemplos em dimensão alta que não são membros das famílias consideradas.

No primeiro caso procederemos agora com uma classificação das cúbicas até \mathbb{P}^5 . De certa forma, em dimensão baixa, para as cúbicas, ocorre o seguinte fenômeno: são poucas as classes de cúbicas desenvolvíveis que não tem hessiano nulo. Em \mathbb{P}^4 e \mathbb{P}^5 há apenas uma possibilidade a menos de projetividades.

Vamos agora assinalar alguns resultados gerais sobre as cúbicas desenvolvíveis. Tais resultados serão úteis no nosso procedimento de classificação de tais hipersuperfícies. Inicialmente escrevemos um lema útil em raciocínios indutivos e que muitas vezes nos permite reduzir um problema a caso em que as fibras do mapa de Gauss são retas.

Proposição 3.1.8. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície desenvolvível tal que $\dim X^* \leq N - 3$. Então a seção hiperplana geral de X é desenvolvível.*

Um dos nossos principais objetivos é fornecer critérios segundo os quais uma cúbica desenvolvível seja um cone.

Proposição 3.1.9. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície irreduzível desenvolvível tal que $\dim F = 0$. Então X é um cone.*

Prova: Via seções e projeções podemos nos reduzir ao caso em que $\text{codim} X^* = 2$. Nesse caso as fibras do mapa de Gauss são retas que devem intersectar o lugar focal. Sendo X irreduzível esse ponto não podem se mover. Assim concluímos X é um cone. \square

O próximo resultado corresponde a uma versão projetiva daquele que no caso real é conhecido por Teorema de Hartman-Niremberg. Tal teorema afirma que as únicas possibilidades de variedades desenvolvíveis com imagem do mapa de Gauss de dimensão 1 são cones (com vértice possivelmente vazio) sobre uma variedade k -tangente a uma curva. O teorema vale em geral mas daremos aqui uma demonstração elementar do caso cúbica que é nosso caso de interesse.

Proposição 3.1.10. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$, $N \geq 3$ uma hipersuperfície cúbica desenvolvível tal que $\dim X^* = 1$. Então X é um cone.*

Prova: Seccionando X com um $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^N$ geral, obtemos $\tilde{X} \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície cúbica desenvolvível. Sabemos, pela proposição 3.1.9 que para que \tilde{X} não seja um cone devemos ter que $\dim \tilde{Y} = 1$. Nesse caso, $\dim \tilde{Y} = \dim \tilde{X} - 1$ e portanto, pela proposição 2.2.5, temos que $\tilde{Y} = \mathbb{P}^1$. Concluímos assim que $Y = \mathbb{P}^{N-2}$ e portanto, desde que $N \geq 5$ sabemos pela proposição 2.2.5 que X é um cone.

Se $N = 4$, então X , por possuir um \mathbb{P}^2 em seu lugar singular, teria hessiano nulo. Pela proposição 2.2.9, se X não fosse um cone, $\dim X^* = 2$.

Se $N = 3$, teríamos ainda que X teria hessiano nulo e portanto seria um cone uma vez que as únicas superfícies (cúbicas) de hessiano nulo de \mathbb{P}^3 são os cones. \square

Dentre as hipersuperfícies desenvolvíveis, a geral é aquela cujo hessiano não é identicamente nulo e tal que $\dim X^* = N - 2$. Nesse caso as fibras do mapa de Gauss de X são retas. Se X é uma hipersuperfície cúbica, então $S = \text{Sing}(X)$ (considerado com sua estrutura esquemática) é definido por quádricas e portanto a fibra geral do mapa de Gauss de X é tangente ou secante a S intersectando-o assim em dois pontos (contados com multiplicidade). Além disso, se considerarmos somente a estrutura reduzida de S , $Y = S_{red}$ e concluirmos que a fibra geral do mapa de Gauss de X é tangente ou secante a (uma componente irredutível de) Y obtemos que X corresponde a variedade das secantes ou a variedade das tangentes de Y . Pode ainda ocorrer da fibra geral do mapa de Gauss ser tangente a S sem o ser a Y como por exemplo no caso de sistema linear de Perazzo.

Proposição 3.1.11. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^N$ uma hipersuperfície cúbica desenvolvível com lugar singular degenerado e de dimensão $\dim Y = N - 2$. Então não pode ocorrer de (uma componente irredutível do) lugar singular de X ser uma hipersuperfície (em seu "Span" linear) $Y_0 = V(g) \subset \mathbb{P}^{N-2} \subset X$.*

Prova: Primeiramente observamos que podemos nos reduzir ao caso em que $\dim X^* = N - 2$ via seções e projeções gerais (proposição 3.1.8).

Suponhamos, sem perda de generalidade, que tal \mathbb{P}^{N-2} seja dado por $x_{N-1} = x_N = 0$. Assim $f = x_{N-1}g + x_N h$ em que g e h são formas quadráticas. Da expressão de f obtemos que $f_i = x_{N-1}g_i + x_N h_i$ para $i = 0, 1, \dots, N - 2$ e portanto tais derivadas parciais se anulam em \mathbb{P}^{N-2} .

Escrevendo

$$g = \alpha x_{N-1}^2 + x_{N-1}A + B$$

$$h = \beta x_N^2 + x_N C + D$$

em que A e B são formas que não dependem da variável x_{N-1} , C e D não dependem da variável x_N e são de grau $\text{gr}(A) = \text{gr}(C) = 1$ e $\text{gr}(B) = \text{gr}(D) = 2$. Reescrevendo a forma f , obtemos

$$f = x_{N-1}(\alpha x_{N-1}^2 + x_{N-1}A + B) + x_N(\beta x_N^2 + x_N C + D)$$

derivando tal expressão de f com respeito a x_{N-1} e com respeito a x_N obtemos, respectivamente:

$$f_{N-1} = 3\alpha x_{N-1}^2 + 2x_{N-1}A + x_N^2 C_{N-1} + x_N D_{N-1} + B$$

$$f_N = 3\beta x_N^2 + 2x_N C + x_{N-1}^2 A_N + x_N B_N + D$$

Restringindo tais formas a $\mathbb{P}^{N-2} : x_{N-1} = x_N = 0$ obtemos que $Y_0 = V(\tilde{B}, \tilde{D}) \subset \mathbb{P}^2$ em que as formas \tilde{B}, \tilde{D} são as restrições das formas B e D a \mathbb{P}^{N-2} . Como, por hipótese, $\dim Y_0 = N - 3$ devemos ter que $Y_0 = V(Q) \subset \mathbb{P}^2$ é uma quádrlica ($\tilde{B} = \lambda \tilde{D}$).

Não pode ocorrer de as fibras do mapa de Gauss ficarem confinadas ao "Span"Linear de Y . Como nesse caso Y é definido por quádrlicas, uma reta que intersecta Y é secante ou tangente o resultado segue do fato que as fibras do mapa de Gauss devem intersectar Y . Observamos que não poderia ocorrer de $\tilde{B} = \tilde{D} = 0$, pois nesse caso teríamos $\dim Y = N - 2$. \square

3.2 Classificação das Cúbicas desenvolvíveis em P4

Seja $X \subset \mathbb{P}^4$ uma cúbica irreduzível desenvolvível. Como X é uma cúbica, $\dim Y \leq 2$ e que $\dim Y = 2 \Leftrightarrow Y = \mathbb{P}^2 \subset X$ que implica X com hessiano nulo. Podemos assim nos reduzir ao caso $\dim Y = 1$. Lembramos ainda que se $\dim Y = 0$, então $\dim F = 0$ e portanto X é um cone pela proposição 3.1.9. Além disso, a dimensão do lugar focal é $\dim F = 1$.

Afirmamos que F é irreduzível. De fato, se F possui duas componentes C_1 e C_2 , então $X = S(C_1, C_2)$ por questões dimensionais. Nesse caso o grau de X é $\text{gr}(C_1) \cdot \text{gr}(C_2) = 3$ que nos leva um absurdo, pois se uma das curvas for uma reta, então X é cone.

Seja $C = F$ curva irreduzível. Temos assim três possibilidades

- (i) $C = l$ é uma reta;
- (ii) C é uma curva degenerada tal que $S(C) = \langle C \rangle = \mathbb{P}^2 \subset X$;
- (iii) C é uma curva irredutível tal que $\langle C \rangle = \mathbb{P}^3$;
- (iv) C é uma curva não degenerada, nesse caso $S(C) = X$ por questões dimensionais e de irredutibilidade.

No primeiro caso, $C = l$ é uma reta, então a regra de Gauss de X nos fornecerá uma família 2 dimensional de retas $\mathcal{F} = \{l_\lambda\}$ passando por esta reta. Fazendo $\pi_\lambda = \langle l, l_\lambda \rangle$ concluímos que tal família consiste da família 2 dimensional de \mathbb{P}^2 passando pela reta l . Tal família é linear e devemos ter que $\pi_\lambda \cap X = 2l + l_\lambda$. Nesse caso X seria um cone sobre essa reta pois a seção hiperplana geral de X seria um cone sobre um ponto dessa reta. No segundo caso $S(C) = \langle C \rangle = \mathbb{P}^2 \subset X$ e sabemos, pela proposição 3.1.11, que tal caso não pode existir. Geometricamente mostra-se que neste caso $Y = \mathbb{P}^2$ e, portanto, X tem hessiano nulo.

No terceiro caso chegaremos a um absurdo. De fato, $\dim(SC) = 2$ ou 3 . Se $\dim(SC) = 2$, então $SC = \mathbb{P}^2$ e voltamos ao caso anterior. Se $\dim(S(C)) = 3$, como $S(C) \subset \langle C \rangle = \mathbb{P}^3$, devemos ter $S(C) = \mathbb{P}^3 \subset X$ o que é um absurdo pois $\dim X = 3$.

No último caso mostraremos que $C = \mathcal{V}_4(\mathbb{P}^1)$ é a quártica racional normal. Para isso será suficiente mostrar que $\text{gr}C = 4$. De fato, pelo seguinte resultado, que pode ser facilmente provado por indução, segue a afirmação:

Proposição 3.2.1. *Seja $C \subset \mathbb{P}^N$ uma curva irredutível e não degenerada de grau $\text{gr}(X) = d$. Então*

- (i) $d \geq N$
- (ii) $d = N$ se e somente se $C = \mathcal{V}_N(\mathbb{P}^1)$

Só nos resta mostrar que se $X = S(C) \subset \mathbb{P}^4$ é uma cúbica que é a variedade das secantes de uma curva $C \subset \mathbb{P}^4$ (irredutível e não degenerada), então tal curva deve ter grau 4. Para isso utilizaremos a seguinte

Proposição 3.2.2. *Sejam $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade irredutível e não degenerada e $x \in X$ um ponto geral. Então*

$$\dim S(T_x X, X) = \dim SX$$

Prova: Pelo Lema de Terracini sabemos que se $x \in X$ e $y \in Y$ são gerais então

$$\dim S(X, Y) = \dim X + \dim Y - \dim(T_x X \cap T_y Y)$$

Logo, se escolhermos $\tilde{x} \in X$ um outro ponto geral,

$$\dim S(T_x X, X) = 2 \dim X - \dim(T_x X \cap T_{\tilde{x}} X) = \dim SX$$

e o resultado segue. \square

Para concluir, consideramos a projeção da curva C de um espaço tangente geral:

$$\pi_l : C \dashrightarrow \tilde{C} \subset \mathbb{P}^2$$

em que $l = T_x C$ e $\tilde{C} = \mathbb{P}^2 \cap S(T_x C, C)$. Se concluirmos que $\text{gr}(\tilde{C}) = 2$, então devemos ter que $\text{gr}(C) = 4$ e o resultado segue. Para isso usaremos o seguinte teorema que foi provado em [?]

Teorema 3.2.3. *Sejam $X \subset \mathbb{P}^N$ uma variedade irredutível e não degenerada e $x \in X$ um ponto geral. Então*

$$S(T_x X, X) \subset C_x SX$$

em que $C_x SX$ é o cone tangente no ponto x da variedade das secantes de X .

De posse destas proposições e por questões de irredutibilidade concluímos que $S(T_x C, C) = C_x SC = C_x X$. Sendo X uma cúbica, o cone tangente $C_x X$ é uma quádrlica e assim concluímos que $S(T_x C, C)$ é também de grau 2 o que implica que $\text{gr} C = 4$ e o resultado segue. Assim, obtemos o seguinte

Teorema 3.2.4. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^4$ uma hipersuperfície cúbica irredutível e desenvolvível que não é um cone. Então X é projetivamente equivalente a:*

1. A uma projeção exterior da variedade se Segre $\mathcal{S}_{1,2} \subset \mathbb{P}^5$;
2. A variedade das secantes da quártica racional normal $\mathcal{V}_4(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^5$;

3.3 Classificação das Cúbicas desenvolvíveis em P5

Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^5$ uma hipersuperfície irreduzível e desenvolvível cujo hessiano não seja identicamente nulo. Primeiramente analisaremos as possibilidades de dimensão lugar singular (reduzido) Y . Sabemos que $\dim Y \leq 3$ e que se $\dim Y = 3$, então $Y = \mathbb{P}^3$ e X seria um cone pela proposição 2.2.5. Assim, as possibilidades para $\dim Y$, $\dim Y = 1$ ou $\dim Y = 2$.

Se $\dim Y = 1$, então a dimensão do lugar focal é $\dim F = 1$. A curva focal não pode ser plana pois, nesse caso X teria hessiano nulo. Desconhecemos, até o momento, um exemplo de cúbica desenvolvível cujo lugar singular seja uma curva.

Se $\dim Y = 2$, seja \tilde{Y} uma componente irreduzível de Y cuja dimensão seja $\dim \tilde{Y} = 2$. Subdividiremos tal caso em três subcasos:

- (i) $\tilde{Y} = \mathbb{P}^2$;
- (ii) Y é uma superfície degenerada tal que $SY = \langle Y \rangle = \mathbb{P}^3 \subset X$;
- (iii) Y é não degenerada.

O primeiro sub-caso é de hessiano nulo.

Lema 3.3.1. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^5$ uma cúbica irreduzível, desenvolvível e com lugar singular $Y = \mathbb{P}^2$. Então $\text{hess}_X \equiv 0$.*

Prova: De fato, a menos de projetividades podemos supor $Y = \mathbb{P}^2 : x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Assim, pela proposição 1.2.5, podemos escrever f da forma:

$$f = Ax_0 + Bx_1 + Cx_2 + D$$

e nessa forma canônica as formas A, B, C são de grau dois e a forma D é de grau três e todas dependem somente das variáveis x_3, x_4, x_5 .

Calculando o hessiano de f verifica-se facilmente que o mesmo só depende das variáveis x_3, x_4, x_5 . Mas sendo X desenvolvível o hessiano deve ser congruente a zero módulo f . Isso só ocorrerá se $\text{hess}_X \equiv 0$. \square

Lembramos que o sub-caso (i) não pode ocorrer pela proposição 3.1.11.

Vamos agora analisar o terceiro sub-caso, isto é, Y superfície não degenerada. Para isso utilizaremos o seguinte resultado clássico conhecido desde Severi, ver [?, pg.20].

Teorema 3.3.2. *Seja $X \subset \mathbb{P}^5$ uma superfície irredutível e não degenerada tal que $\dim SX = 4$. Então X é projetivamente equivalente a superfície de Veronese $\mathcal{V}_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$.*

Ora, como $3 = \dim \tilde{Y} + 1 < \dim S\tilde{Y} \leq \dim X = 4$, obtemos que $\dim S\tilde{Y} = 4$ (nesse caso $X = S\tilde{Y}$) e portanto, aplicando o teorema supracitado, $\tilde{Y} = \mathcal{V}_2(\mathbb{P}^2)$. De fato, $S\mathcal{V}_2(\mathbb{P}^2)$ é uma hipersuperfície cúbica desenvolvível.

Caso 2. O último caso seria aquele em que $\dim Y = 1$. Novamente podemos nos reduzir ao caso em que $\dim X^* = 3$. De fato, se $\dim X^* \leq 2$ a seção hiperplana geral de X seria uma hipersuperfície cúbica desenvolvível $\tilde{X} \subset \mathbb{P}^4$ com lugar singular zero dimensional e portanto seria um cone.

No caso em que $\dim X^* = 3$, as fibras do mapa de Gauss são retas que intersectam Y em dois pontos (possivelmente coincidentes). Se um desses pontos fica fixo, então X é um cone. O caso a considerar é aquele em que ambos os pontos descrevem curvas C_1 e C_2 (possivelmente a mesma curva) e que deveríamos ter que $X = S(C_1, C_2)$ o que é um absurdo uma vez que a dimensão máxima de tal variedade é 3.

Teorema 3.3.3. *Seja $X = V(f) \subset \mathbb{P}^5$ uma hipersuperfície cúbica, irredutível, não cone e que seja desenvolvível. Então*

1. $\text{hess}_X \equiv 0$;
2. A variedade das secantes da superfície de Veronese $X = S\mathcal{V}_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$;
3. ou X tem lugar singular de dimensão 1 e não consiste de uma curva plana.

Referências Bibliográficas

- [AG] M. A. Akivis, V. V. Goldberg, *Differential Geometry of Varieties with Degenerate Gauss Maps*, CMS books in Mathematics
- [AGL] M. A. Akivis, V. V. Goldberg, J. M. Landsberg *On the structure of varieties with degenerate Gauss mappings* arXiv:math-9908079v2 (2001)
- [Ca1] É. Cartan, *La deformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien reel à n dimensions*, Bull. Soc. Math. France 44 (1916), 65-99.
- [Ca2] É. Cartan, *Sur les varietés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien*, Bull. Soc. Math. France 47 (1919), 125-160.
- [Ci] C. Ciliberto, *Ipersuperficie algebriche a punti parabolici e relative hessiane*, Rend. Acc. Naz. Scienze 98 (1979-80), 25-42.
- [CRS] C. Ciliberto, F. Russo, A. Simis, *Homaloidal hypersurfaces and hypersurfaces with vanishing Hessian*, Advances in Mathematics, Volume 218, Issue 6, 20 August 2008, Pages 1759-1805.
- [DP] A. Dimca, S. Papadima, *Hypersurfaces complements, Milnor fibres and higher homotopy groups of arrangements*, Annals of Math. 158 (2003), 473-507.
- [Do] I. Dolgachev, *Polar Cremona transformations*, Mich. Math. J., 48 (2000), 191-202.
- [Do1] I. Dolgachev, *Topics in Classical Algebraic Geometry*, Lecture Notes homepage: <http://www.math.lsa.umich.edu/idolga/lecturenotes.html>
- [Fr1] A. Franchetta, *Forme algebriche svilupabili e relative hessiane*, Atti Acc. Lincei 10 (1951), 1-4.
- [Fr2] A. Franchetta, *Sulle forme algebriche di S_4 aventi hessiana indeterminata*, Rend. Mat. 13 (1954), 1-6.

- [FP] G. Fischer, J. Piontkowski, *Ruled varieties—An introduction to algebraic differential geometry*, Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2001. x+142 pp.
- [FW] G. Fischer, H. Wu, *Developable complex analytic submanifolds*, Inter. Jour. Math. 6 (1995), 229–272.
- [GH] P. Griffiths, J. Harris, *Algebraic geometry and local differential geometry*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 12 (1979), 355-432.
- [GR] A. Garbagnati, F. Repetto, *A geometrical approach to Gordan–Noether’s and Franchetta’s contributions to a question posed by Hesse*, Collectanea Mathematica Volume 60, Number 1, 27-41
- [GN] P. Gordan, M. Nöther, *Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse’sche Determinante identisch verschwindet*, Math. Ann. 10 (1876), 547–568.
- [EH] D. Eisenbud, J. Harris, *On varieties of minimal degree*, Alg. Geometry Bowdin 1985, Proc. Symp. in Pure Math. 46 (1987); 3-13.
- [He1] O. Hesse, *Über die Bedingung, unter welche eine homogene ganze Function von n unabhängigen Variabeln durch Lineäre Substitutionen von n andern unabhängigen Variabeln auf eine homogene Function sich zurück-führen lässt, die eine Variable weniger enthält*, J. reine angew. Math. 42 (1851), 117–124.
- [He2] O. Hesse, *Zur Theorie der ganzen homogenen Functionen*, J. reine angew. Math. 56 (1859), 263–269.
- [IM] G. Ishikawa, T. Morimoto, *Solutions Surfaces of Monge-Ampère equations*, Differ. Geom. Appl. 14 (2001), no. 2, 113-124.
- [Pe] U. Perazzo, *Sulle varietà cubiche la cui hessiana svanisce identicamente*, Giornale di Matematiche (Battaglini) 38 (1900), 337–354.
- [Pt1] R. Permutti, *Su certe forme a hessiana indeterminata*, Ricerche di Mat. 6 (1957), 3–10.
- [Pt2] R. Permutti, *Sul teorema di Hesse per forme sopra un campo a caratteristica arbitraria*, Le Matematiche 13 (1963), 115–128.
- [Pt3] R. Permutti, *Su certe classi di forme a hessiana indeterminata*, Ricerche di Mat. 13 (1964), 97–105.

- [PW] A. Pinkus, B. Wajnryb, *A problem of approximation using multivariate polynomials*, Russian Math. Surveys 50 (1995), 319–340.
- [Ru1] F. Russo, *Varieties with quadratic entry locus*, Mathematische Annalen. (2009) 344:597–617
- [Ru] F. Russo, *Geometry of Projective Varieties*, notas de curso do 24 coloquio brasileiro de matematica, IMPA.
- [Se1] B. Segre, *Bertini forms and hessian matrices*, J. London Math. Soc. 26 (1951), 164–176.
- [Se2] B. Segre, *Some Properties of Differentiable Varieties and Transformations*, Erg. Math., Springer-Verlag, 1957.
- [Se3] B. Segre, *Sull' hessiano di taluni polinomi (determinanti, pfaffiani, discriminanti, risultanti, hessiani) I, II*, Atti Acc. Lincei 37 (1964), 109–117 e 215–221.
- [Seg1] C. Segre, *Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 42 (1906-1907), 1047-1079 (JFM 38, pp. 671-673.)
- [Seg2] C. Segre, *Preliminari di una teoria delle varieta luoghi di spazi*, Rend. Curc. Mat. Palermo (1) 30 (1910), 87-121 (JFM 41, p. 724.)
- [Seg3] C. Segre, *Ricerche sui fasci di cono quadrici in uno spazio lineare qualunque*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, Vol. XIX. (1884).
- [Za1] F. L. Zak, *Tangents and secants of algebraic varieties*, Transl. Math. Monogr. vol. 127, Amer. Math. Soc., U.S.A., 1993.
- [Za2] F. L. Zak, *Determinants of projective varieties and their degrees*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 132, Springer Verlag, 2004.
- [Za3] F. L. Zak, *Tangents and secants of algebraic varieties*, Transl. Math. Monographs, 127, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1993).