Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Isis Gabriella de Arruda Quinteiro Silva

ANÁLISE DE UM SISTEMA PARABÓLICO SEMI-LINEAR COM NÃO-LINEARIDADE NÃO-LOCAL

Recife
2010

Isis Gabriella de Arruda Quinteiro Silva

ANÁLISE DE UM SISTEMA PARABÓLICO SEMI-LINEAR COM NÃO-LINEARIDADE NÃO-LOCAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPE, como requisito parcial para a obtenção do grau de DOUTOR em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Loayza

Recife

2010

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Silva, Isis Gabriella de Arruda Quinteiro
Análise de um sistema parabólico semi-linear com não-linearidade não-local / Isis Gabriella de Arruda Quinteiro Silva - Recife: O Autor, 2010.
46 folhas

Orientador: Miguel Fidêncio Loayza Lozano.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2010.

Inclui bibliografia.

1. Análise. 2. Equações Diferenciais Parciais. I. Lozano, Miguel Fidêncio Loayza (orientador). II. Título.

515 CDD (22. ed.) MEI2011 – 131

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado:

Miguel Fidencio Loayza Lozano, UFPE
Orientador

César Augusto Rodrigues Castilho, UFPE

Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva, UFPE

Flávio Dickstein, UFRJ

Fagner Dias Araruna, UFPB

ANÁLISE DE UM SISTEMA PARABÓLICO SEMI-LINEAR COM NÃO-LINEARIDADE NÃO-LOCAL

Por

Isis Gabriella de Arruda Quinteiro Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Outubro – 2010

"Que darei eu ao Senhor por todos os benefícios que me tem feito?"

RESUMO

Estudamos o sistema parabólico não-local acoplado

$$u_t - \Delta u = \int_0^t (t-s)^{-\gamma_1} |v|^{p-1} v(s) ds, \ v_t - \Delta v = \int_0^t (t-s)^{-\gamma_2} |u|^{q-1} u(s) ds$$

onde $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 < 1$ e $p, q \geq 1$. Consideramos o problema em $(0,T) \times \mathbb{R}^N$ e um problema de Dirichlet em $(0,T) \times \Omega$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado e fronteira regular. Admitimos que os dados iniciais $u(0), v(0) \in C_0(\mathbb{R}^N)$ e $u(0), v(0) \in C_0(\Omega)$, respectivamente. Encontramos condições que garantem a existência de solução global e a explosão num tempo finito de qualquer solução do sistema em questão.

ABSTRACT

We study the nonlocal coupled parabolic system

$$u_t - \Delta u = \int_0^t (t-s)^{-\gamma_1} |v|^{p-1} v(s) ds, \;\; v_t - \Delta v = \int_0^t (t-s)^{-\gamma_2} |u|^{q-1} u(s) ds$$

where $0 \le \gamma_1, \gamma_2 < 1$ and $p, q \ge 1$. We consider the problem in $\mathbb{R}^N \times (0,T)$ and a Dirichlet problem in $(0,T) \times \Omega$ with $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a bounded domain with smooth boundary. The initial data is assumed $u(0), v(0) \in C_0(\mathbb{R}^N)$ and $u(0), v(0) \in C_0(\Omega)$, respectively. We found conditions that assure either the existence of global solution or the blow up in a finite time of a some solution of the system.

AGRADECIMENTOS

A Deus que me propiciou os mais preciosos ensinamentos e me concedeu o privilégio do apoio de cada pessoa aqui citada.

Ao meu amado esposo Karciano, agradeço por seu apoio e amor em todos os momentos. Agradeço, de forma especial, aos meus pais José Carlos e Ana Lúcia pelo amor incondicional e por todos os sacrifícios fizeram por mim e às minhas irmãs Brunna e Maria Izabel.

Ao professor Miguel Loayza, agradeço imensamente pelos valiosos ensinamentos e amizade. Pelas exaustivas horas em que se dispunha a me auxiliar. Espero retribuir sua confiança em ter sido meu orientador neste trabalho, papel que exerceu com louvor.

Ofereço meus sinceros agradecimentos, ao programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPE, bem como a todos os professores, funcionários e amigos do Departamento de Matemática da UFRPE. Em especial, às queridas amigas Karla Ferreira e Maité Kulesza, pela amizade e apoio em todos os momentos.

Finalmente, agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, consideramos o seguinte sistema parabólico semi-linear com uma não-linearidade não-local no tempo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma_1}|v|^{p-1}v(s)ds \text{ em } (0,T)\times\Omega, \\ v_t - \Delta v &= \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma_2}|u|^{q-1}u(s)ds \text{ em } (0,T)\times\Omega, \\ u = v &= 0 \text{ em } (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0) &= u_0,\ v(0) = v_0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

com $p, q \geq 1$, $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 < 1$ e dados iniciais $u_0, v_0 \in C_0(\Omega)$. Consideramos os casos em que $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular.

No capítulo 1, estudamos a existência de soluções para o sistema (1) e analisamos as soluções que explodem num tempo finito. No capítulo 2, apresentamos condições que garantem a existência de solução global para o sistema (1). Com a finalidade de motivar esta questão, destacamos alguns resultados conhecidos para o problema parabólico semi-linear

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma}|u|^{p-1}u(s)ds \text{ em } (0,T)\times\mathbb{R}^N, \\ u(0) &= u_0 \text{ em } \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{2}$$

com $p > 1$, $0 \leq \gamma < 1$ e $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, que foi estudado em [5]. Nesse trabalho, os autores mostraram que se $u \in C([0, T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N))$ é a solução de (2) e $p_* = \max\{\frac{1}{\gamma}, p_\gamma\}(p^* = +\infty$ se $\gamma = 0)$, onde

$$p_\gamma = \begin{cases} 1 + \frac{4-2\gamma}{N-2+2\gamma} & , N \geq 2 \text{ ou } (N = 1 \text{ e } \frac{1}{2} < \gamma < 1), \\ +\infty & , N = 1 \text{ e } 0 < \gamma \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

então

(i) Se $p \leq p_*$ e $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, então u explode num tempo finito.

(ii) Se $p > p_*$ e $u_0 \in L^{q_{sc}}(\mathbb{R}^N)$, onde $q_{sc} = \frac{N(p-1)}{4-2\gamma}$, com $\|u_0\|_{q_{sc}}$ suficientemente pequeno, então u existe globalmente.

Os autores consideraram ainda a equação (2) num domínio limitado regular

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com a condição de Dirichlet no bordo, isto é

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma}|u|^{p-1}u(s)ds \text{ em } (0,T)\times\Omega, \\ u &= 0 \text{ em } (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $p > 1$ e $0 \le \gamma < 1$. Eles mostraram que, se $u \in C([0, T_{\max}), C_0(\Omega))$ é a solução de (3), então

(i) Se $p\gamma \le 1$ e $u_0 \ge 0$, $u_0 \not\equiv 0$, então u explode num tempo finito.

(ii) Se $p\gamma > 1$ e $\|u_0\|_{L^\infty}$ é suficientemente pequeno, então u existe globalmente.

Nosso objetivo é estender os resultados obtidos em [5] para o sistema (1). Esta generalização não é imediata e, por isso, utilizamos argumentos diferentes dos que foram usados em [5]. No caso do sistema (1), surgem algumas dificuldades que não ocorrem no caso da equação (2), como veremos mais adiante.

Por ser um valor crítico para a existência de solução global, p_* é chamado o coeficiente de Fujita do problema (2). Este termo originou-se no estudo da equação parabólica semi-linear

$$u_t - \Delta u = |u|^{p-1}u \text{ em } (0,T)\times\mathbb{R}^N \tag{4}$$

veja, por exemplo, [9], [10], [13] e [16]. Neste caso, é bem conhecido que o coeficiente de Fujita é dado por $p_* = 1 + \frac{2}{N}$ e pode ser determinado através do seguinte argumento: se $u(t,x)$ é uma solução da equação (4) com dado inicial u_0, então $\lambda^{\frac{2}{p-1}}u(\lambda^2 t, \lambda x)$ é uma solução de (4) com dado inicial $\lambda^{\frac{2}{p-1}}u_0(\lambda x)$. Temos

$$\|\lambda^{\frac{2}{p-1}}u_0(\lambda\cdot)\|_r = \lambda^{\frac{2}{p-1}-\frac{N}{r}}\|u_0\|_r. \tag{5}$$

Desta forma, a norma in L^r é invariante se, e somente se, $r = r_c = \frac{N(p-1)}{2}$. Além disso, $r_c > 1$ se, e somente se, $p > p_*$. Note que $L^{r_c}(\mathbb{R}^N)$ é o único espaço onde um dado inicial pequeno pode gerar uma solução global. Com efeito, se assumirmos que $r \ne r_c$ e que a norma $\|u_0\|_r$ suficientemente pequena assegura que a solução é global, podemos deduzir de (5) que toda solução de (4) com dado inicial $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ é global. Obviamente isto é falso, pois sabe-se que a solução de (4) explode num tempo finito se o dado inicial é suficientemente grande.

O argumento anterior é chamado de scaling e pode ser usado para encontrar o coeficiente de Fujita de outras equações como, por exemplo, $u_t = \Delta u + t^k|x|^\sigma u^p$(vide

[1],[18],[19], [20]), $u_t = \nabla.(u^\sigma \nabla u) + u^p$(vide [11]) e $u_t = \Delta u + u(t,0)^{p-q}u(t,x)^q$, com $p > q \geq 1$ (vide [22]). Entretanto, em [5], os autores mostraram que o coeficiente de Fujita p_* da equação (2) não pode ser obtido através deste argumento. De fato, se $u(t,x)$ é solução de (2) com dado inicial $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, então $\lambda^{\frac{4-2\gamma}{p-1}} u(\lambda^2 t, \lambda x)$ é solução de (2) com dado inicial $\lambda^{\frac{4-2\gamma}{p-1}} u_0(\lambda x)$. Como $\|\lambda^{\frac{4-2\gamma}{p-1}} u_0(\lambda \cdot)\|_r = \lambda^{\frac{4-2\gamma}{p-1} - \frac{N}{r}} \|u_0\|_r$, a norma em $L^r(\mathbb{R}^N)$ é preservada se, e somente se, $r = r_{sc} = \frac{N(p-1)}{4-2\gamma}$. Note que $r_{sc} > 1$ se, e somente se, $p > p_{sc} = 1 + \frac{4-2\gamma}{N}$. Entretanto, segue dos resultados obtidos em [5] que $p_{sc} < p_*$.

O argumento do scaling também pode ser usado para encontrar o coeficiente de Fujita de alguns sistemas. Por exemplo, se (u,v) é solução do sistema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= |v|^{p-1} v \text{ em } (0,T) \times \mathbb{R}^N, \\ v_t - \Delta v &= |u|^{q-1} u \text{ em } (0,T) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0) &= u_0,\ v(0) = v_0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{6}$$

com $p, q > 0$ e $pq > 1$, então (u_λ, v_λ) definida por

$$u_\lambda(t,x) = \lambda^\gamma u(\lambda^2 t, \lambda x),\ v_\lambda(t,x) = \lambda^\delta v(\lambda^2 t, \lambda x) \tag{7}$$

onde $\gamma = \frac{2(q+1)}{pq-1}$, $\delta = \frac{2(p+1)}{pq-1}$, é solução deste sistema com dado inicial

$$(\lambda^{\frac{2(q+1)}{pq-1}} u_0(\lambda x)\ ,\ \lambda^{\frac{2(p+1)}{pq-1}} v_0(\lambda x)).$$

Portanto, temos $\|u_\lambda(0)\|_r = \lambda^{\frac{2(q+1)}{pq-1} - \frac{N}{r}} \|u_0\|_r$, $\|v_\lambda(0)\|_s = \lambda^{\frac{2(p+1)}{pq-1} - \frac{N}{s}} \|v_0\|_s$, e estas normas são invariantes somente quando $r_c = \frac{N}{2}(\frac{pq-1}{q+1})$ e $s_c = \frac{N}{2}(\frac{pq-1}{p+1})$. Note que $r_c > 1, s_c > 1$ se, e somente se, $\frac{q+1}{pq-1} < \frac{2}{N}$ e $\frac{p+1}{pq-1} < \frac{2}{N}$, o que coincide com os resultados obtidos em [8]: se $p, q > 0$ com $pq > 1$, então

(i) Se $\frac{p+1}{pq-1} < \frac{2}{N}$, $\frac{q+1}{pq-1} < \frac{2}{N}$ e $(u_0, v_0) \in L^{r_c}(\mathbb{R}^N) \times L^{s_c}(\mathbb{R}^N)$ com $\|u_0\|_{r_c} + \|v_0\|_{s_c}$ suficientemente pequeno, então a solução de (6) existe globalmente.

(ii) Se $\frac{p+1}{pq-1} \geq \frac{2}{N}$ ou $\frac{q+1}{pq-1} \geq \frac{2}{N}$ e $(u_0, v_0) \neq (0,0)$, $u_0, v_0 \geq 0$ então a solução de (6) explode num tempo finito.

Aplicamos agora o argumento de scaling para o sistema (1), com $\Omega = \mathbb{R}^N$. Se (u,v) é uma solução com dado inicial (u_0, v_0), então para todo $\lambda > 0$, (u_λ, v_λ) definida por

$$u_\lambda(t,x) = \lambda^\gamma u(\lambda^2 t, \lambda x),\ v_\lambda(t,x) = \lambda^\delta v(\lambda^2 t, \lambda x),$$

onde
$$\gamma = \frac{2\gamma_1 - 4 + p(2\gamma_2 - 4)}{1 - pq} \text{ e } \delta = \frac{2\gamma_2 - 4 + q(2\gamma_1 - 4)}{1 - pq},$$
é uma solução de (1). Observe que, se $(u_0, v_0) \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_2}(\mathbb{R}^N)$, então as normas em $L^{r_1}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ e $L^{r_2}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ são preservadas se, e somente se,
$$r_1 = \frac{N(pq-1)}{2[2 - \gamma_1 + p(2 - \gamma_2)]}, \quad r_2 = \frac{N(pq-1)}{2[2 - \gamma_2 + q(2 - \gamma_1)]}. \tag{8}$$
Além disso, $r_1 > 1$ e $r_2 > 1$ se, e somente se,
$$p(2 - \gamma_2) + (2 - \gamma_1) < \frac{N(pq-1)}{2} \text{ e } q(2 - \gamma_1) + (2 - \gamma_2) < \frac{N(pq-1)}{2}. \tag{9}$$
Poderíamos esperar que se (9) não vale, então qualquer solução de (1) explode num tempo finito. O próximo resultado refere-se ao sistema (1) com $\Omega = \mathbb{R}^N$ e mostra que isto não ocorre.

Teorema A. Sejam $p, q \geq 1$, $pq > 1$, $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 < 1$ e $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Considere $(u, v) \in \{C([0, T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N))\}^2$ a solução correspondente de (1), com $\Omega = \mathbb{R}^N$. Suponha que
$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 - p\gamma_2 + p(1 - q\gamma_1) + p(q+1) & \geq \frac{N}{2}(pq-1) \\ \text{ou} & \\ 1 - q\gamma_1 + q(1 - p\gamma_2) + q(p+1) & \geq \frac{N}{2}(pq-1) \end{array} \right. \tag{10}$$
ou
$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 - p\gamma_2 + p(1 - q\gamma_1) & \geq 0 \\ \text{ou} & \\ 1 - q\gamma_1 + q(1 - p\gamma_2) & \geq 0 \end{array} \right. \tag{11}$$
Se $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$ com $u_0, v_0 \geq 0$, então (u, v) explode num tempo finito.

Sobre a existência de solução global para o sistema (1), com $\Omega = \mathbb{R}^N$, temos o seguinte resultado.

Teorema B. Sejam $p, q \geq 1$, $pq > 1$, $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 < 1$ e $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Considere $(u, v) \in \{C([0, T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N))\}^2$ a solução correspondente de (1), com $\Omega = \mathbb{R}^N$. Suponha que as seguintes condições sejam válidas
$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 - p\gamma_2 + p(1 - q\gamma_1) + p(q+1) & < \frac{N}{2}(pq-1), \\ 1 - q\gamma_1 + q(1 - p\gamma_2) + q(p+1) & < \frac{N}{2}(pq-1), \end{array} \right. \tag{12}$$
$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 - p\gamma_2 + p(1 - q\gamma_1) & < 0, \\ 1 - q\gamma_1 + q(1 - p\gamma_2) & < 0 \end{array} \right. \tag{13}$$

e

$$\frac{p}{r_2} - \frac{4}{N} < \frac{1}{q} \, , \, \frac{q}{r_1} - \frac{4}{N} < \frac{1}{p}. \tag{14}$$

Se $(u_0, v_0) \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_2}(\mathbb{R}^N)$, onde r_1, r_2 são definidos por (8) e $(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty + \|u_0\|_{r_1} + \|v_0\|_{r_2}) \leq \epsilon$ com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, então (u, v) existe globalmente.

Os Teoremas A e B, quando $p = q$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, estendem o Teorema 1.1 de [5].

Sobre o Teorema A. Recentemente, Fino e Kirane em [12] estudaram o sistema (1) no caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N$ e mostraram, usando técnicas diferentes das que foram utilizadas no presente trabalho, que se $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, $(u_0, v_0) \neq 0, u_0, v_0 \geq 0$ e vale (10) ou ($p\gamma_2 < 1$ e $q\gamma_1 < 1$), então qualquer solução de (1) explode num tempo finito. Verifica-se facilmente que as condições usadas por eles implicam a validade de (10) ou (11).

Sobre o Teorema B. Sob a validade das condições (12) e (13), consideramos o caso em que a condição (14) não é satisfeita. Se $\frac{p}{r_2} - \frac{4}{N} \geq \frac{1}{q}$ e $\frac{q}{r_1} - \frac{4}{N} \geq \frac{1}{p}$, então qualquer solução não-trivial o sistema (1), explode num tempo finito. De fato, neste caso, temos

$$\frac{1}{p} - \gamma_2 > \frac{N}{2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{p}\right) - \gamma_2 \geq 0.$$

Analogamente, verifica-se que $q\gamma_1 < 1$. Assim, temos $1 - p\gamma_2 + p(1 - q\gamma_1) \geq 0$ e o resultado segue do Teorema A.

No caso em que $\frac{p}{r_2} - \frac{4}{N} < \frac{1}{q}$ e $\frac{q}{r_1} - \frac{4}{N} \geq \frac{1}{p}$, concluímos, como no caso anterior, que $p\gamma_2 < 1$. Segue, então, da condição (13) que $q\gamma_1 > 1$. Esta situação não ocorre no caso da equação (2). Na verdade, dos resultados obtidos em [5], podemos observar que $p\gamma \leq 1$ implica na explosão das soluções de (2) e $p\gamma > 1$ juntamente com a condição (12) (no caso em que $p = q, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$), resulta na existência de solução global para a equação (2). Isto nos leva a acreditar que exista um confronto entre os termos não-lineares do sistema (1), de maneira que condições adicionais devem ser consideradas, a fim de distinguir soluções globais de soluções que explodem num tempo finito neste caso. O caso em que $\frac{p}{r_2} - \frac{4}{N} \geq \frac{1}{q}$ e $\frac{q}{r_1} - \frac{4}{N} < \frac{1}{p}$ é similar ao anterior.

No caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, temos o seguinte resultado.

Teorema C. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio regular e limitado, $p, q \geq 1, pq > 1, 0 \leq \gamma_1, \gamma_2 < 1$ e $u_0, v_0 \in C_0(\Omega)$. Seja $(u, v) \in \{C[0, T_{\max}), C_0(\Omega)\}^2$ a solução correspondente de (1).

(i) Suponha que

$$\begin{cases} 1 - p\gamma_2 + p(1 - q\gamma_1) & < 0 \\ \text{e} & \\ 1 - q\gamma_1 + q(1 - p\gamma_2) & < 0. \end{cases} \tag{15}$$

Se $\|u_0\|_\infty \leq \delta_1$ e $\|v_0\|_\infty \leq \delta_2$, onde $\delta_1, \delta_2 > 0$ são suficientemente pequenos, então (u, v) existe globalmente.

(ii) Suponha que

$$\begin{cases} 1 - p\gamma_2 + p(1 - q\gamma_1) & \geq 0 \\ \text{ou} & \\ 1 - q\gamma_1 + q(1 - p\gamma_2) & \geq 0 \end{cases} \tag{16}$$

Se $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$ com $u_0, v_0 \geq 0$, então (u, v) explode num tempo finito.

O teorema anterior, quando $p = q, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, estende o Teorema 1.3 de [5], para o problema (3).

Reservamos o capítulo 4 para analisar a existência de solução da equação (2), com dados iniciais não-regulares. Especificamente, consideramos dados iniciais em $L^r(\mathbb{R}^N)$. Este tipo de problema para a equação $u_t - \Delta u = u^p$ tem sido estudado por vários autores, por exemplo, [2], [26], [27], [28]. Inicialmente, dizemos que uma função u é solução do problema (2), com $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ se

(i) $(\cdot)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{\eta})} \|u(\cdot)\|_\eta \in L^\infty(0, T)$ para algum $\eta \geq r$.

(ii) Para $t \in (0, T]$,

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t \int_0^s (s - \sigma)^{-\gamma} S(t - s)|u|^{p-1} u(\sigma) d\sigma ds$$

onde $(S(t))_{t \geq 0}$ é o semi-grupo do calor em $\mathbb{R}^N$.

(iii) $t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{\eta})} \|u(t) - S(t)u_0\|_\eta \to 0$ quando $t \to 0^+$.

Temos o seguinte resultado.

Teorema D. Sejam $p > 1$, $\gamma \in [0, 1]$ e $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, com $r \geq 1$. Suponha que

$$\frac{p - 1}{r} \leq \frac{2}{N}(2 - \gamma),$$

$$\frac{1}{r} - \frac{2}{Np} < \min\{\frac{1}{p}, \frac{2}{N(p-1)}\}.$$

Existe $T > 0$ e uma única função u que é solução de (2). Além disso, $u \geq 0$, se $u_0 \geq 0$.

Sobre a não-existência de solução da equação (2), temos o seguinte resultado.

Teorema E. Sejam $p > 1$, $\gamma \in [0,1]$. Suponha que $\frac{p-1}{r} > \frac{N}{2}(2-\gamma)$. Existe $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \geq 0$ para qual não é possível que exista solução local u de (2) com $u \geq 0$.

Observamos que o resultado obtido é parcial, uma vez que não inclui o caso em que $\frac{1}{r} - \frac{2}{Np} \geq \min\{\frac{1}{p}, \frac{2}{N(p-1)}\}$. Isto se deve à dificuldade de aplicarmos à esta situação, o argumento que foi utilizado no caso em que $\frac{p-1}{r} > \frac{N}{2}(2-\gamma)$. A totalização de tal resultado, bem como uma extensão do mesmo para o sistema (1), são projetos para uma futura pesquisa.

2 Existência e explosão de soluções num tempo finito

2.1 Introdução

Consideramos os seguintes sistemas parabólicos semi-linear com uma não-linearidade não-local no tempo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma_1}|v|^{p-1}v(s)ds \text{ em } (0,T)\times\mathbb{R}^N, \\ v_t - \Delta v &= \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma_2}|u|^{q-1}u(s)ds \text{ em } (0,T)\times\mathbb{R}^N, \\ u(0) &= u_0,\ v(0) = v_0 \text{ in } \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{2.1}$$

e

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma_1}|v|^{p-1}v(s)ds \text{ em } (0,T)\times\Omega, \\ v_t - \Delta v &= \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma_2}|u|^{q-1}u(s)ds \text{ em } (0,T)\times\Omega, \\ & u(t,x) = 0,\ v(t,x) = 0 \text{ em } (0,T)\times\partial\Omega, \\ & u(0) = u_0,\ v(0) = v_0 \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com condição de Dirichlet no bordo. Em ambos os casos, consideramos $p, q \geq 1$, $pq > 1$, $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 < 1$ e dado inicial $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^\mathbb{N})$.

Os sistemas (2.1) e (2.2) são equivalentes, num sentido apropriado, ao sistema

$$\begin{cases} u(t) &= S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_1}S(t-s)|v|^{p-1}v(\sigma)d\sigma ds, \\ v(t) &= S(t)v_0 + \displaystyle\int_0^t\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_2}S(t-s)|u|^{q-1}u(\sigma)d\sigma ds \end{cases} \tag{2.3}$$

para todo $t \in [0,T]$, onde $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é o semi-grupo do calor em $\mathbb{R}^N$ e num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, respectivamente.

Nosso primeiro resultado trata da existência e unicidade de soluções para o sistema (2.1).

Teorema 2.1. *Considere $p, q \geq 1, \gamma_1, \gamma_2 \in [0,1)$ e $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Existe uma única solução $(u,v) \in \{C([0,T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N))\}^2$ de (2.1) tal que*

1. *$T_{\max} = \infty$(a solução é global) ou*

2. $T_{\max} < \infty$ *e* $\lim_{t \to T_{\max}} (\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty) = \infty$*(a solução explode num tempo finito).*

Além disso, se $(u_0, v_0) \neq (0,0)$*,* $u_0, v_0 \geq 0$*, então* $u(t), v(t) \geq 0$ *para todo* $t \in (0, T_{\max})$*. Se* $0 < t \leq t + \tau < T_{\max}$*, temos*

$$u(t+\tau) \geq S(\tau)u(t), \;\; v(t+\tau) \geq S(\tau)v(t). \tag{2.4}$$

Mais ainda, se $(u_0, v_0) \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_2}(\mathbb{R}^N)$ *com* $1 \leq r_2 \leq pr_1$ *e* $1 \leq r_1 \leq qr_2$*, então* $(u, v) \in C([0, T_{max}), L^{r_1}(\mathbb{R}^N)) \times C([0, T_{max}), L^{r_2}(\mathbb{R}^N))$ *e*

$$\lim_{t \to T_{\max}} (\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty + \|u(t)\|_{r_1} + \|v(t)\|_{r_2}) = \infty, \tag{2.5}$$

quando $T_{\max} < \infty$*.*

Observação 2.2. Um resultado de existência e unicidade também é válido para o sistema (2.2). Sua demonstração é similar à prova do Teorema 2.1.

Estamos interessados em encontrar condições que determinem a explosão das soluções dos sistemas (2.1) e (2.2). Com a finalidade de motivar o estudo aqui realizado, destacamos alguns resultados obtidos para o problema parabólico semi-linear

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma} |u|^{p-1} u(s) ds \text{ em } (0,T) \times \mathbb{R}^N, \\ \quad u(0) &= u_0 \text{ em } \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{2.6}$$

com $p > 1$, $0 \leq \gamma < 1$ e $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$. O problema (2.6) foi estudado em [5], onde os autores mostraram que se $u \in C([0, T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N))$ é a solução de (2.6) e $p_* = \max\{\dfrac{1}{\gamma}, p_\gamma\}$ ($p^* = +\infty$ se $\gamma = 0$), onde

$$p_\gamma = \begin{cases} 1 + \frac{4-2\gamma}{N-2+2\gamma} & , N \geq 2 \text{ ou } (N = 1 \text{ e } \frac{1}{2} < \gamma < 1), \\ +\infty & , N = 1 \text{ e } 0 < \gamma \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{2.7}$$

então

(i) Se $p \leq p_*$ e $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, então u explode num tempo finito.

(ii) Se $p > p_*$ e $u_0 \in L^{q_{sc}}(\mathbb{R}^N)$, onde $q_{sc} = \frac{N(p-1)}{4-2\gamma}$, com $\|u_0\|_{q_{sc}}$ suficientemente pequeno, então u existe globalmente.

Para utilizarmos o argumento do scaling para o sistema (2.1), observamos que se (u, v) é uma solução com dado inicial (u_0, v_0), então para todo $\lambda > 0$, (u_λ, v_λ)

definida por $u_\lambda(t,x) = \lambda^\gamma u(\lambda^2 t, \lambda x)$, $v_\lambda(t,x) = \lambda^\delta v(\lambda^2 t, \lambda x)$, onde $\gamma = \frac{2\gamma_1 - 4 + p(2\gamma_2 - 4)}{1-pq}$ e $\delta = \frac{2\gamma_2 - 4 + q(2\gamma_1 - 4)}{1-pq}$, é uma solução de (2.1). Se $(u_0, v_0) \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_2}(\mathbb{R}^N)$, então as normas em $L^{r_1}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ e $L^{r_2}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ são preservadas se, e somente se,

$$r_1 = \frac{N(pq-1)}{2[2-\gamma_1 + p(2-\gamma_2)]}, \quad r_2 = \frac{N(pq-1)}{2[2-\gamma_2 + q(2-\gamma_1)]}. \tag{2.8}$$

Além disso, $r_1 > 1$ e $r_2 > 1$ se, e somente se,

$$p(2-\gamma_2) + (2-\gamma_1) < \frac{N(pq-1)}{2} \text{ e } q(2-\gamma_1) + (2-\gamma_2) < \frac{N(pq-1)}{2}. \tag{2.9}$$

Poderíamos esperar que se

$$p(2-\gamma_2) + (2-\gamma_1) \geq \frac{N(pq-1)}{2} \text{ e } q(2-\gamma_1) + (2-\gamma_2) \geq \frac{N(pq-1)}{2}. \tag{2.10}$$

vale, então qualquer solução de (2.1) explode num tempo finito. O seguinte resultado mostra que isto não é válido.

Teorema 2.3. *Sejam $p, q \geq 1$, $pq > 1$, $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 < 1$ e $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Considere $(u,v) \in \{C([0,T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N))\}^2$ a solução correspondente de (2.1). Suponha que*

$$\left\{\begin{array}{ll} 1 - p\gamma_2 + p(1-q\gamma_1) + p(q+1) & \geq \frac{N}{2}(pq-1) \\ ou & \\ 1 - q\gamma_1 + q(1-p\gamma_2) + q(p+1) & \geq \frac{N}{2}(pq-1) \end{array}\right. \tag{2.11}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{ll} 1 - p\gamma_2 + p(1-q\gamma_1) & \geq 0 \\ ou & \\ 1 - q\gamma_1 + q(1-p\gamma_2) & \geq 0 \end{array}\right. \tag{2.12}$$

Se $(u_0, v_0) \neq (0,0)$ com $u_0, v_0 \geq 0$, então (u,v) explode num tempo finito.

Observação 2.4. Fazemos aqui alguns comentários sobre o Teorema 2.3.

(i) As condições do Teorema 2.3 generalizam as condições do Teorema 1.1 de [5]. Para ver isto, fazemos $p = q$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. As condições (2.11) e (2.12) se reduzem a $p(\frac{N}{2} + \gamma - 1) \leq \frac{N}{2} + 1$ ou $p\gamma \leq 1$.

(ii) É interessante observarmos que, quando $\gamma_1 = 0$ ou $\gamma_2 = 0$, qualquer solução não-trivial do sistema (2.1) explode num tempo finito. De fato, suponhamos sem perda de generalidade, que $\gamma_1 = 0$. Como $0 \leq \gamma_2 < 1$, temos $1 - p\gamma_2 + p(1 - q\gamma_1) = 1 + p(1-\gamma_2) > 0$. Assim, a primeira desigualdade de (2.12) é satisfeita.

Sobre a explosão de uma solução do sistema (2.2), temos o seguinte resultado.

Teorema 2.5. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio regular e limitado,* $p, q \geq 1$*,* $pq > 1$*,* $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 < 1$ *e* $u_0, v_0 \in C_0(\Omega)$*. Seja* $(u, v) \in \{C[0, T_{\max}), C_0(\Omega)\}^2$ *a solução correspondente de (2.2). Suponha que*

$$\begin{cases} 1 - p\gamma_2 + p(1 - q\gamma_1) & \geq 0 \\ ou & \\ 1 - q\gamma_1 + q(1 - p\gamma_2) & \geq 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

Se $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$ *com* $u_0, v_0 \geq 0$*, então* (u, v) *explode num tempo finito.*

Observação 2.6. (i) Se $\gamma_1 = \gamma_2$ e $p = q$, a condição (2.13) se reduz à condição do Teorema 1.3 de [5] para o sistema (2.1).

(ii) Se $\gamma_1 = 0$ ou $\gamma_2 = 0$, todas as soluções positivas do sistema (2.1) explodem num tempo finito (veja o item (iii) da Observação 2.4). No caso da equação (2.6), este fato foi observado primeiramente por Souplet em [22].

Nas seções subsequentes, apresentamos as demonstrações dos resultados apresentados anteriormente.

2.2 Demonstração do Teorema 2.1.

Lema 2.1. *Sejam* $T > 0, A, B \geq 0$*, e* f_1, f_2 *funções não-negativas tais que* $f_1, f_2 \in L^1(0, T)$*. Considere duas funções não-negativas e não-decrescentes* $\varphi_1, \varphi_2 \in C[0, T]$ *tais que*

$$\begin{cases} \varphi_1(t) & \leq A + \displaystyle\int_0^t f_1(s)\varphi_2(s)ds, \\ \varphi_2(t) & \leq B + \displaystyle\int_0^t f_2(s)\varphi_1(s)ds. \end{cases} \tag{2.14}$$

Existe uma constante $C > 0$ *tal que*

$$\varphi_1(t) \leq C(A + B)\exp\left(\int_0^t Cf_1(s)ds\right) \text{ and } \varphi_2(t) \leq C(A + B)\exp\left(\int_0^t Cf_2(s)ds\right),$$

quase sempre em $[0, T]$.

Demonstração. O resultado pode ser facilmente verificado se substituirmos uma das desigualdades em (2.14) pela outra e usarmos a desigualdade de Gronwall. $\square$

Demonstração do Teorema 2.1. Seja $M \geq \{\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty\}$. Considere o conjunto

$$K = \{(u,v) \in \{L^\infty((0,T), C_0(\mathbb{R}^N))\}^2; \|u(t)\|_\infty, \|v(t)\|_\infty \leq M+1\}, \tag{2.15}$$

onde $T > 0$ será escolhido posteriormente. Definimos a seguinte métrica em K,

$$d((u,v),(\bar{u},\bar{v})) = \sup_{t\in(0,T)} \|u(t)-\bar{u}(t)\|_\infty + \sup_{t\in(0,T)} \|v(t)-\bar{v}(t)\|_\infty.$$

Desta forma, (K,d) é um espaço métrico completo. Considere a aplicação $\psi : K \to E$ definida por $\psi(u,v) = (\varphi_1(v), \varphi_2(u))$, where

$$\begin{cases} \varphi_1(v) &= S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_1} S(t-s)|v|^{p-1}v(\sigma)d\sigma ds, \\ \varphi_2(u) &= S(t)v_0 + \displaystyle\int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_2} S(t-s)|u|^{q-1}u(\sigma)d\sigma ds. \end{cases} \tag{2.16}$$

Se $(u,v) \in K$, temos

$$\begin{aligned} \|\varphi_1(v)(t)\|_\infty &\leq \|u_0\|_\infty + \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_1} \|v^p(\sigma)\|_\infty d\sigma ds \\ &\leq \|u_0\|_\infty + CT^{2-\gamma_1}(M+1)^p. \end{aligned} \tag{2.17}$$

De maneira análoga obtemos

$$\|\varphi_2(u)(t)\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty + CT^{2-\gamma_2}(M+1)^q. \tag{2.18}$$

Argumentando como em (2.17), concluimos que para $(u,v),(\bar{u},\bar{v}) \in K$ vale

$$\|\varphi_1(v) - \varphi_1(\bar{v})\|_\infty \leq 2C(M+1)^{p-1}T^{2-\gamma_1}\|v-\bar{v}\|_\infty, \tag{2.19}$$

$$\|\varphi_2(u) - \varphi_2(\bar{u})\|_\infty \leq 2C(M+1)^{q-1}T^{2-\gamma_2}\|u-\bar{u}\|_\infty. \tag{2.20}$$

para alguma constante $C > 0$.

Como $2 > \gamma_1, \gamma_2$, concluímos de (2.17)-(2.20) que, se T é suficientemente pequeno, então $\psi : K \to K$ é uma contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo, concluímos que ψ possui um único ponto fixo (u,v), o qual é solução de (2.1).

A unicidade da solução segue do Lema 2.1. Na verdade, se $(u,v),(\bar{u},\bar{v}) \in \{L^\infty((0,T),\mathbb{R}^N)\}^2$ são duas soluções do sistema (2.1) definidas num mesmo intervalo $[0,T]$, temos

$$\begin{aligned} \|u(t)-\bar{u}(t)\|_\infty &\leq C\int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_1}\|v(\sigma)-\bar{v}(\sigma)\|_\infty d\sigma ds \\ &\leq C\int_0^t (t-s)^{1-\gamma_1} \sup_{\sigma\in(0,s)} \|v(\sigma)-\bar{v}(\sigma)\|_\infty ds \\ &\leq CT^{1-\gamma_1}\int_0^t \sup_{\sigma\in(0,s)} \|v(\sigma)-\bar{v}(\sigma)\|_\infty ds. \end{aligned}$$

Da mesma maneira, mostramos que $\|v(t)-\bar{v}(t)\|_\infty \leq CT^{1-\gamma_2}\int_0^t \sup_{\sigma\in(0,s)}\|u(\sigma)-\bar{u}(\sigma)\|_\infty ds$ e o resultado segue.

Segue diretamente da unicidade que a solução (u,v) pode ser estendida a um intervalo maximal $[0,T_{\max})$. Note que, se $0\leq t\leq t+\tau\leq T_{\max}$, temos

$$\begin{aligned} u(t+\tau) &= S(\tau)u(t) + \int_0^\tau S(\sigma-s)\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_1}|v|^{p-1}v(t+\sigma)d\sigma ds + \\ &\quad \int_0^\tau S(\tau-s)\int_0^t (t+s-\sigma)^{-\gamma_1}|v|^{p-1}v(\sigma)d\sigma ds, \\ v(t+\tau) &= S(\tau)v(t) + \int_0^\tau S(\sigma-s)\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_2}|u|^{q-1}u(t+\sigma)d\sigma ds + \\ &\quad \int_0^\tau S(\tau-s)\int_0^t (t+s-\sigma)^{-\gamma_2}|u|^{q-1}u(\sigma)d\sigma ds. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Considere $u,v\in L^\infty((0,T),C_0(\mathbb{R}^N))$ tais que (u,v) é solução do sistema (2.1) no intervalo $[0,T)$. Segue de (2.21) que se $\|u\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)}+\|v\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^N)}<\infty$, através do argumento do ponto fixo, (u,v) pode ser estendida a um intervalo $[0,T')$ com $T'>T$. Isto mostra que, se $T_{\max}<\infty$, então $\lim\limits_{t\to T_{\max}}(\|u(t)\|_\infty+\|v(t)\|_\infty)=\infty$. No caso em que $u_0,v_0\geq 0$, construímos uma solução não-negativa do sistema (2.1) usando o argumento do ponto fixo no conjunto $K_+=\{(u,v)\in K; u(t),v(t)\geq 0 \text{ for all } t\in(0,T)\}$ onde K é definido por (2.15). Segue de (2.21) que u e v são não-negativas em $[0,T_{\max})$. Usando este fato e (2.21), concluímos (2.4).

A fim de mostrarmos o restante do Teorema 2.1, utilizamos novamente o argumento do ponto fixo. Para isto, considere os espaços

$$E = L^\infty((0,T),\{L^\infty(\mathbb{R}^N)\}^2)\cap L^\infty((0,T),L^{r_1}(\mathbb{R}^N)\times L^{r_2}(\mathbb{R}^N))$$

e $K=\{\bar{u}=(u,v)\in E; \|u(t)\|_\infty,\|v(t)\|_\infty,\|u(t)\|_{r_1},\|v(t)\|_{r_2}<M+1, \text{ for all } t\in(0,T)\}$ onde $M\geq\max\{\|u_0\|_\infty,\|u_0\|_{r_1},\|v_0\|_\infty,\|v_0\|_{r_2}\}$. Como $r_2\leq pr_1$ e $r_1\leq qr_2$ podemos escolher $\eta,\omega\geq 1$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{pr_1}\leq\frac{1}{\omega} &\leq \min\{\frac{1}{p},\frac{1}{r_2},\frac{1}{p}(\frac{2}{N}+\frac{1}{r_2})\}, \\ \frac{1}{qr_2}\leq\frac{1}{\eta} &\leq \min\{\frac{1}{q},\frac{1}{r_1},\frac{1}{q}(\frac{2}{N}+\frac{1}{r_1})\}. \end{aligned}$$

O conjunto K munido da métrica

$$d(\bar{u},\bar{v}) = \max_{i=1,2}\{\sup_{t\in(0,T)}\|u_i(t)-v_i(t)\|_\infty, \sup_{t\in(0,T)}\|u_i-v_i\|_{r_i}\}$$

com $\bar{u}=(u_1,u_2),\bar{v}=(v_1,v_2)$, é um espaço métrico completo.

Para $\bar{w} = (u, v) \in K$, definimos a aplicação $\psi : K \to E$ dada por (2.16). Procedendo como em (2.17) e (2.19) obtemos, para $\bar{w} = (u, v)$ e $\bar{z} = (\bar{u}, \bar{v})$

$$\|\varphi_1(v)\|_\infty \leq M + T^{2-\gamma_1}(M+1)^p, \tag{2.22}$$

$$\|\varphi_1(v) - \varphi_1(\bar{v})\|_\infty \leq T^{2-\gamma_1}(M+1)^{p-1} \sup_{t\in(0,T)} \|v(t) - \bar{v}(t)\|_\infty. \tag{2.23}$$

Como $\omega \geq r_2$, segue da desigualdade de interpolação

$$\|w\|_\omega \leq \|w\|_{r_2}^{r_2/\omega} \|w\|_\infty^{1-r_2/\omega}$$

que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_1(v)(t)\|_{r_1} &\leq \|u_0\|_{r_1} + \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{\omega}-\frac{1}{r_1})} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_1} \|v(\sigma)\|_\omega^p d\sigma ds \\
&\leq \|u_0\|_{r_1} + \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{\omega}-\frac{1}{r_1})} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_1} \|v\|_{r_2}^{\frac{r_2}{\omega}p} \|v\|_\infty^{(1-\frac{r_2}{\omega})p} d\sigma ds \\
&\leq M + CT^{2-\gamma_1-\frac{N}{2}(\frac{p}{\omega}-\frac{1}{r_1})}(M+1)^p
\end{aligned} \tag{2.24}$$

e

$$\begin{aligned}
\|\varphi_1(v)(t) - \varphi_1(\bar{v})(t)\|_{r_1} &\leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{\omega}-\frac{1}{r_1})} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_1} (\|v\|_w^{p-1} + \|\bar{v}\|_w^{p-1}) \\
&\qquad \|v(\sigma) - \bar{v}(\sigma)\|_\omega d\sigma ds \\
&\leq 2C(M+1)^{p-1} T^{2-\gamma_1-\frac{N}{2}(\frac{p}{\omega}-\frac{1}{r_1})} \left(\sup\nolimits_{t\in(0,T)} \|v(t) - \bar{v}(t)\|_{r_2}\right)^{r_2/\omega} \\
&\qquad \left(\sup\nolimits_{t\in(0,T)} \|v(t) - \bar{v}(t)\|_\infty\right)^{1-r_2/\omega} \\
&\leq 2C(M+1)^{p-1} T^{2-\gamma_1-\frac{N}{2}(\frac{p}{\omega}-\frac{1}{r_1})} d(\bar{w}, \bar{z}).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Analogamente,

$$\|\varphi_2(u)\|_\infty \leq M + CT^{2-\gamma_2}(M+1)^q, \tag{2.26}$$

$$\|\varphi_2(u) - \varphi_2(\bar{u})\|_\infty \leq CT^{2-\gamma_2}(M+1)^{q-1} \sup_{t\in(0,T)} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_\infty, \tag{2.27}$$

$$\|\varphi_2(u)(t)\|_{r_2} \leq M + CT^{2-\gamma_2-\frac{N}{2}(\frac{q}{\eta}-\frac{1}{r_2})}(M+1)^q, \tag{2.28}$$

$$\|\varphi_2(u)(t) - \varphi_2(\bar{u})(t)\|_{r_2} \leq 2C(M+1)^{q-1} T^{2-\gamma_2-\frac{N}{2}(\frac{q}{\eta}-\frac{1}{r_2})} d(\bar{w}, \bar{z}). \tag{2.29}$$

Segue de (2.22), (2.24), (2.26), e (2.28) que $\psi(K) \subset K$, se T é suficientemente pequeno. De (2.23), (2.25), (2.27) e (2.29), concluímos que, se T é pequeno, $\psi : K \to K$ é uma contração. Segue, então, do Teorema do Ponto Fixo que ψ possui um único ponto fixo $\bar{u} = (u, v)$. Concluímos, portanto, que $\bar{u} = (u, v) \in C([0,T], L^{r_1}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_2}(\mathbb{R}^N))$. A permanência da solução no espaço $L^{r_1}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_2}(\mathbb{R}^N)$ para $t > T$ é facilmente verificada.

$\square$

2.3 Demonstração do Teorema 2.3.

A demonstração deste teorema foi baseada nas ideias apresentadas em [5]. Utilizaremos alguns resultados preliminares.

Lema 2.2. *Sejam $a, b, c, d > 0$, $p, q \geq 1$, $pq > 1$ e $(u, v) \in \{C^2([0,T])\}^2$ solução não-trivial do sistema*

$$\begin{cases} u'' + au' = bv^p, \\ v'' + cv' = du^q. \end{cases} \tag{2.30}$$

Dado $T > 0$, existe uma constante $K = K(a, b, c, d, p, q, T) > 0$ tal que, se

$$u(0) \geq K \text{ ou } v(0) \geq K$$

e

$$u'(0) \geq -au(0) \text{ e } v'(0) \geq -cv(0), \tag{2.31}$$

então existe $T_{\max} < T$ tal que (u, v) explode em $T_{\max}$.

Demonstração. Podemos supor que $u(0) > K$ e $v(0) > K$. De fato, se $u(0) > K$ e $v(0) = 0$, segue da continuidade de u que existe $T^* < T$ tal que $u(t) > K$, para todo $t \in [0, T^*]$.

Por outro lado, integrando a segunda equação de (2.30) e usando a condição (2.31), obtemos

$$v' + cv \geq d \int_0^t u^q(s)ds.$$

Assim, podemos assumir que $c > 1$. Portanto, para $t \in [0, T^*]$, temos $v' + cv \geq Mt$, onde $M > 0$ é constante. Integrando esta equação, temos $v(t) \geq \frac{M}{c}(t - \frac{1}{c} + e^{-ct})$, para todo $t \in [0, T^*]$. Considerando $c > 1$, segue que $v(t) > 0$ para t suficientemente paqueno.

A demonstração segue do princípio de comparação, utilizando-se uma sub-solução $(\bar{u}, \bar{v})$ do sistema (2.30) da forma $\bar{u}(t) = Ae^{-Bt}(T-t)^{-\alpha}, \bar{v}(t) = Ae^{-Bt}(T-t)^{-\beta}$, onde A, B são escolhidos convenientemente, $\alpha = 2\frac{p+1}{pq-1}$, e $\beta = 2\frac{q+1}{pq-1}$. $\square$

Proposição 2.7. *Sejam $a, b, c, d, T > 0$, p, q e K como no Lema 2.2. Se $w_1, w_2 \in C^1([0,T])$, $(w_1(0), w_2(0)) \neq (0,0)$, $w_1(0), w_2(0) \geq 0$ satisfazem*

$$\begin{cases} w_1' + aw_1 \geq & b \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma_1} w_2^p(s)ds, \\ w_2' + cw_2 \geq & d \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma_2} w_1^q(s)ds \end{cases} \tag{2.32}$$

para todo $t \in [0, T]$, então tem-se:

(i) Se $T \geq 1$, *então* $w_1(0) < K$ *e* $w_2(0) < K$.

(ii) Se $T = \infty$, *então* $\sup_{t>0} w_1(t) \leq K$ *e* $\sup_{t>0} w_2(t) \leq K$.

(iii) Se $T = \infty$, *então* $\liminf_{t\to\infty} w_1(t) = 0$ *e* $\liminf_{t\to\infty} w_2(t) = 0$.

(iv) Se $T = \infty$, *então* $\liminf_{t\to\infty} t^{\gamma_1} w_1(t) > 0$ *e* $\liminf_{t\to\infty} t^{\gamma_2} w_2(t) > 0$.

(v) Se $T = \infty$, *então*

$$\liminf_{t\to\infty} t^{\alpha_1} w_1^{pq-1}(t) < \infty \ e \ \liminf_{t\to\infty} t^{\alpha_2} w_2^{pq-1}(t) < \infty,$$

onde

$$\alpha_1 = p(1-\gamma_2) + (1-\gamma_1) \ and \ \alpha_2 = q(1-\gamma_1) + (1-\gamma_2). \tag{2.33}$$

(vi) Se

$$\left\{\begin{array}{lcl} p(1-\gamma_2) + pq(1-\gamma_1) & \geq & pq-1 \\ & ou & \\ q(1-\gamma_1) + pq(1-\gamma_2) & \geq & pq-1 \end{array}\right.$$

então $T < \infty$.

Demonstração. Segue de (2.32) que

$$\left\{\begin{array}{ll} w_1(t) \geq & e^{-at} w_1^0 + b\displaystyle\int_0^t \int_0^s e^{-a(t-s)} (s-\sigma)^{-\gamma_1} w_2^p(\sigma) d\sigma ds, \\ w_2(t) \geq & e^{-ct} w_2^0 + d\displaystyle\int_0^t \int_0^s e^{-c(t-s)} (s-\sigma)^{-\gamma_2} w_1^q(\sigma) d\sigma ds \end{array}\right. \tag{2.34}$$

para todo $t \in [0, T]$, onde $w_i^0 = w_i(0)$, para $i = 1, 2$.

(i) Por (2.32), temos $w_1'(0) \geq -aw_1^0$ e $w_2'(0) \geq -cw_2^0$. Além disso, se $0 \leq t \leq 1$, temos

$$\left\{\begin{array}{ll} w_1' + aw_1 \geq & b\displaystyle\int_0^t w_2^p(s) ds, \\ w_2' + cw_2 \geq & d\displaystyle\int_0^t w_1^q(s) ds. \end{array}\right.$$

Portanto, $w_1 \geq u$ e $w_2 \geq v$ em $[0, 1]$, onde (u, v) é solução do sistema (2.30) com $u(0) = w_1(0)$, $v(0) = w_2(0)$, $u'(0) = -aw_1(0)$ e $v'(0) = -cw_2(0)$.

Como (w_1, w_2) está definida em $[0, 1]$, segue do Lema 2.2 que $w_1(0) < K$ e $w_2(0) < K$.

(ii) Suponha que $T = \infty$. Dado $\tau \geq 0$, defina $z_1(t) = w_1(t+\tau), z_2(t) = w_2(t+\tau)$, para $t \geq 0$. Temos

$$
\begin{aligned}
z_1'(t) + az_1(t) &\geq b\int_0^{t+\tau} (\tau + t - s)^{-\gamma_1} w_2^p(s)ds \\
&\geq b\int_\tau^{t+\tau} (\tau + t - s)^{-\gamma_1} w_2^p(s)ds \\
&= b\int_0^t (t-s)^{-\gamma_1} z_2^p(s)ds.
\end{aligned}
$$

Analogamente, concluímos que $z_2'(t) + cz_2(t) \geq d\int_0^t (t-s)^{-\gamma_2} z_1^q(s)ds$.

Segue de (i) que $z_1(0) < K$ e $z_2(0) < K$, isto é, $w_1(t) < K$ e $w_2(t) < K$, for all $t \geq 0$. Portanto, $\sup_{t>0} w_1(t) \leq K$ e $\sup_{t>0} w_2(t) \leq K$.

(iii) Seja $T = \infty$. Suponha que $w_1(t) \geq \eta > 0$, para todo $t > 0$. Segue de (2.34) que

$$w_1(t) \geq \frac{b\eta_2^p e^{-at}}{1-\gamma_1}\int_0^t e^{as}s^{1-\gamma_1}ds.$$

Para $t \geq 2$, temos

$$
\begin{aligned}
w_1(t) &\geq \frac{b\eta_2^p e^{-at}}{1-\gamma_1}\int_{t-1}^t e^{as}s^{1-\gamma_1}ds \\
&\geq \delta t^{1-\gamma_1}
\end{aligned}
$$

para algum $\delta > 0$, o que contradiz a propriedade (ii). Portanto, $\liminf_{t\to\infty} w_1(t) = 0$. Um argumento similar mostra que $\liminf_{t\to\infty} w_2(t) = 0$.

(iv) Mostraremos que $\liminf_{t\to\infty} t^{\gamma_1} w_1(t) > 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $w_1(0) > 0$. Segue de (2.32) que $w_1(t) \geq w_1(0)e^{-at}$. Substituindo esta desigualdade em (2.34b), obtemos $w_2(t) \geq Cw_1(0)^q t^{2-\gamma_2}$ para $t \in (0,1)$ onde $C > 0$ é constante.

Segue de (2.34) que, para $t \geq 2$, vale

$$
\begin{aligned}
w_1(t) &\geq b\int_{t-1}^t e^{-a(t-s)}\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_1} w_2^p(\sigma)d\sigma ds \\
&\geq be^{-a}\int_{t-1}^t \int_0^1 (s-\sigma)^{-\gamma_1} w_2^p(\sigma)d\sigma ds \\
&\geq C\left[\inf_{1/2<s<1} w_2^p(s)\right] t^{-\gamma_1},
\end{aligned}
$$

para alguma constante $C > 0$.

Analogamente, concluímos que $\liminf_{t\to\infty} t^{\gamma_2} w_2(t) > 0$.

(v) Seja $T = \infty$. Segue da propriedade (iii) que existe uma sequência $\{s_n\}$ tal que

$$w_2(s_n) = \min_{0 \le s \le s_n} w_2(s).$$

Em particular, temos $w_2'(s_n) \le 0$. Note que

$$w_2'(s_n) \ge -cw_2(s_n) + \int_0^{s_n} (s_n - s)^{-\gamma_2} w_1^q(s) ds. \tag{2.35}$$

Além disso, se $n \in N$ é tal que $s_n \ge s$, temos

$$\begin{aligned} w_1(s) \ &\ge b \int_0^s e^{-a(s-\eta)} \int_0^\eta (\eta - \sigma)^{-\gamma_1} w_2^p(\sigma) d\sigma d\eta \\ &\ge b w_2^p(s_n) \int_0^s e^{-a(s-\eta)} \int_0^\eta (\eta - \sigma)^{-\gamma_1} d\sigma d\eta. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Segue de (2.35), (2.36) e $w_2'(s_n) \le 0$, que

$$\begin{aligned} cw_2(s_n) \ &\ge C \int_0^{s_n} (s_n - s)^{-\gamma_2} w_2^{pq}(s_n) \left[\int_0^s e^{-a(s-\eta)} \int_0^\eta (\eta - \sigma)^{-\gamma_1} d\sigma d\eta \right]^q ds \\ &\ge C \int_1^{s_n} (s_n - s)^{-\gamma_2} w_2^{pq}(s_n) \left[\int_0^s e^{-a(s-\eta)} \eta^{1-\gamma_1} d\eta \right]^q ds, \end{aligned} \tag{2.37}$$

onde $C > 0$ é constante. Como $s \ge 1$, temos

$$\int_0^s e^{-a(s-\eta)} \eta^{1-\gamma_1} d\eta \ge \int_{s-1}^s e^{-a(s-\eta)} \eta^{1-\gamma_1} d\eta \ge C(s-1)^{1-\gamma_1},$$

com $C > 0$ constante. Assim, segue de (2.37) que

$$C \ge w_2^{pq-1}(s_n) \int_1^{s_n} (s_n - s)^{-\gamma_2} (s-1)^{(1-\gamma_1)q} ds = w_2^{pq-1}(s_n)(s_n - 1)^{(1-\gamma_2)+(1-\gamma_1)q}.$$

O resultado para w_2 segue. De maneira similar obtemos o resultado para w_1.

(vi) Suponha que $p(1-\gamma_2) + pq(1-\gamma_1) \ge pq - 1$. Consideraremos dois casos.

Caso 1. $p(1-\gamma_2) + pq(1-\gamma_1) > pq - 1$. De (iv), segue que $t^{\gamma_1} w_1(t) > \delta$, para algum $\delta > 0$. Assim, temos

$$t^{\alpha_1} w_1^{pq-1}(t) > Ct^{\alpha_1 - \gamma_1(pq-1)} = Ct^{p(1-\gamma_2)+pq(1-\gamma_1)-pq+1}.$$

Segue de (v) que $T < \infty$.

Caso 2. $p(1-\gamma_2) + pq(1-\gamma_1) = pq - 1$. De $w_1' + aw_1 \ge 0$ e de (iv), segue que $(1+t)^{\gamma_1} w_1(t) > \delta$ para todo $t \ge 0$ e algum $\delta > 0$. Assim, segue de (2.34) que

$$\begin{aligned} w_2(t) \ &\ge C \int_{t-1}^t e^{-a(t-s)} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_2} (1+\sigma)^{-\gamma_1 q} d\sigma ds \\ &\ge C(t+1)^{-\gamma_1 q} (t-1)^{1-\gamma_2}. \end{aligned}$$

Usando novamente (2.34), para $t \geq 3$, temos

$$\begin{aligned} w_1(t) &\geq C\int_{t-1}^{t} e^{-a(t-s)}\int_2^s (s-\sigma)^{-\gamma_1}(1+\sigma)^{-\gamma_1 pq}(\sigma-1)^{(1-\gamma_2)p}d\sigma ds \\ &\geq C\int_{t-1}^{t} e^{-a(t-s)}\int_2^s (s-\sigma)^{-\gamma_1}(1+\sigma)^{-\gamma_1 pq+(1-\gamma_2)p}d\sigma ds. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Como $(1-\gamma_2)p - pq\gamma_1 = -1$, segue de (2.38) que $w_1(t) \geq Ct^{-\gamma_1}\ln t$, para t suficientemente grande, onde $C > 0$ é constante. Portanto,

$$t^{\alpha_1}w_1^{pq-1}(t) \geq Ct^{\alpha_1-\gamma_1(pq-1)}(\ln t)^{pq-1} = C(\ln t)^{pq-1},$$

donde temos $t^{\alpha_1}w_1^{pq-1}(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$. Isto contradiz a estimativa (v).

□

Demonstração do Teorema 2.3. Seja (u, v) uma solução não-negativa do sistema (2.1) com $(u_0, v_0) \neq 0$, $u_0, v_0 \geq 0$.

Primeiramente suponha que (2.12) vale e, sem perda de generalidade, assuma que $p(1-\gamma_2) + pq(1-\gamma_1) \geq pq - 1$. Além disso, suponha que a solução (u, v) existe globalmente.

Seja $\chi(x) = ce^{-\sqrt{N^2+|x|^2}}$, onde c é tal que $\|\chi\|_{L^1} = 1$. Temos $\Delta\chi \geq -\chi$. Considere as funções $f_1(t) = \int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\chi dx$, $f_2(t) = \int_{\mathbb{R}^N} v(t,x)\chi dx$. Note que

$$\begin{cases} f_1' + f_1 \geq & \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma_1} f_2^p(s)ds, \\ f_2' + f_2 \geq & \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma_2} f_1^q(s)ds, \end{cases}$$

o que contradiz a propriedade (vi) da proposição anterior.

Suponha agora que (2.11) vale. Sem perda de generalidade, assuma que

$$p(2-\gamma_2) + pq(2-\gamma_1) - pq + 1 \geq \frac{N}{2}(pq-1).$$

Dividimos a analise em dois casos.

Caso I. $p(2-\gamma_2) + pq(2-\gamma_1) - pq + 1 > \frac{N}{2}(pq-1)$. Suponha que a solução (u, v) existe globalmente e considere

$$u(t,x) = t^{\beta_1}U(s,y),$$
$$v(t,x) = t^{\beta_2}V(s,y),$$

onde

$$\beta_1 = -\frac{(2-\gamma_1) + p(2-\gamma_2)}{pq-1},\ \beta_2 = -\frac{(2-\gamma_2) + q(2-\gamma_1)}{pq-1},$$

$s = \ln t$ e $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$. Observe que (U, V) é solução do sistema

$$\begin{cases} U_s + LU + \beta_1 U = & \displaystyle\int_0^1 (1-\eta)^{-\gamma_1} \eta^{p\beta_2} V^p(s + \ln \eta, \frac{y}{\sqrt{\eta}}) d\eta, \\ V_s + LV + \beta_2 V = & \displaystyle\int_0^1 (1-\eta)^{-\gamma_2} \eta^{q\beta_1} U^q(s + \ln \eta, \frac{y}{\sqrt{\eta}}) d\eta, \end{cases} \tag{2.39}$$

onde $L = -\Delta - \frac{1}{2} y \cdot \nabla$.

Seja $\varphi(y) = e^{\frac{-|y|^2}{4}}$. Note que $L\varphi = \frac{N}{2}\varphi$. Além disso, se $K(y) = e^{\frac{|y|^2}{4}}$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} (Lf) g K = \int_{\mathbb{R}^N} f (Lg) K \tag{2.40}$$

se f, g são funções suficientemente regulares. Seja $\Psi = (4\pi)^{-\frac{N}{2}} \varphi^2$. Observe que $\int_{\mathbb{R}^N} \Psi K = 1$. Além disso, pode-se verificar facilmente que $L\Psi \geq N\Psi$. Multiplicando-se a equação (2.39a) por ΨK e integrando em y, obtemos

$$\frac{d}{ds} \int_{\mathbb{R}^N} U \Psi K dy + (N + \beta_1) \int_{\mathbb{R}^N} U \Psi K dy \geq \int_0^1 (1-\eta)^{-\gamma_1} \eta^{p\beta_2} \int_{\mathbb{R}^N} V^p(s + \ln \eta, \frac{y}{\sqrt{\eta}}) \Psi K dy d\eta. \tag{2.41}$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V^p(s + \ln \eta, \frac{y}{\sqrt{\eta}}) \Psi K dy = \eta^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} V^p(s + \ln \eta, y) [\Psi K](y\sqrt{\eta}) dy.$$

Como $\eta \leq 1$, temos $[\Psi K](y\sqrt{\eta}) \geq [\Psi K](y)$. Segue da desigualdade de Jensen que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V^p(s + \ln \eta, \frac{y}{\sqrt{\eta}}) \Psi K dy \geq \eta^{\frac{N}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} V(s + \ln \eta, y) [\Psi K](y) dy \right]^p. \tag{2.42}$$

Considere as funções $w_1(s) = \int_{\mathbb{R}^N} U(s) \Psi K dy$ e $w_2(s) = \int_{\mathbb{R}^N} V(s) \Psi K dy$. Segue de (2.41) e (2.42) que

$$\begin{cases} w_1' + (N + \beta_1) w_1 \geq & \displaystyle\int_0^1 (1-\eta)^{-\gamma_1} \eta^{\frac{N}{2} - p\beta_2} w_2^p(s + \ln \eta) d\eta, \\ w_2' + (N + \beta_2) w_2 \geq & \displaystyle\int_0^1 (1-\eta)^{-\gamma_2} \eta^{\frac{N}{2} - q\beta_1} w_1^q(s + \ln \eta) d\eta. \end{cases} \tag{2.43}$$

Sejam $a = \max\{N + \beta_1, 0\}$ e $c = \max\{N + \beta_2, 0\}$. De (2.43) temos

$$\begin{cases} w_1' + a w_1 \geq & \displaystyle\min_{\frac{1}{e} \leq \eta \leq 1} \eta^{\frac{N}{2} - p\beta_2} \int_{\frac{1}{e}}^1 w_2^p(s + \ln \eta) d\eta, \\ w_2' + c w_2 \geq & \displaystyle\min_{\frac{1}{e} \leq \eta \leq 1} \eta^{\frac{N}{2} - q\beta_1} \int_{\frac{1}{e}}^1 w_1^q(s + \ln \eta) d\eta. \end{cases}$$

Portanto, existem constantes $b, d > 0$ tais que

$$\begin{cases} w_1' + a w_1 \geq b \displaystyle\int_{s-1}^s w_2^p(\sigma) d\sigma, \\ w_2' + c w_2 \geq d \displaystyle\int_{s-1}^s w_1^q(\sigma) d\sigma. \end{cases} \tag{2.44}$$

Para $t \geq 0$, defina $z_1(s) = w_1(t+s)$ e $z_2(s) = w_2(t+s)$. Segue de (2.44) que, para todo $0 \leq s \leq 1$,

$$\begin{cases} z_1' + az_1 & \geq b \displaystyle\int_{s-1}^{s} z_2^p(\sigma)d\sigma \quad \geq b \int_0^s z_2^p(\sigma)d\sigma, \\ z_2' + cz_2 & \geq d \displaystyle\int_{s-1}^{s} z_1^q(\sigma)d\sigma \quad \geq d \int_0^s z_1^q(\sigma)d\sigma. \end{cases}$$

O argumento utilizado na Proposição 2.7 mostra que existe uma constante $K > 0$ (independente de t) tal que $z_1(0),\ z_2(0) < K$. Concluímos então que

$$\sup_{s\geq 0} w_1(s),\ \sup_{s\geq 0} w_2(s) < \infty. \tag{2.45}$$

Considere núcleo do calor $G(t,x) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Note que, para $\tau, p > 0$, temos

$$G(\tau)^p = p^{-\frac{N}{2}}(4\pi\tau)^{-\frac{N}{2}(p-1)} G(\frac{\tau}{p}). \tag{2.46}$$

Segue do sistema (2.1) que $u(t) \geq G(t) * u_0$ e $v(t) \geq G(t) * v_0$. Como u_0 e v_0 são não-negativas e $u_0, v_0 \neq 0$, temos $u(1) \geq \epsilon G(\frac{1}{2})$, $v(1) \geq \tilde{\epsilon} G(\frac{1}{2})$ onde $\epsilon, \tilde{\epsilon} > 0$.

De (2.4), segue que $u(t) \geq \epsilon G(t - \frac{1}{2})$, $v(t) \geq \tilde{\epsilon} G(t - \frac{1}{2})$ para $t \geq 1$. Assim, se $\epsilon, \tilde{\epsilon}$ são suficientemente pequenos, então

$$u(t) \geq \epsilon G(\frac{t}{2}), v(t) \geq \tilde{\epsilon} G(\frac{t}{2}) \tag{2.47}$$

para $t \geq 1$. De (2.1), (2.46) e (2.47) segue que, para $t \geq 2$, vale

$$\begin{aligned} u(t) \quad & \geq \quad \int_1^t \int_1^s S(t-s)(s-\sigma)^{-\gamma_1} v^p(\sigma) d\sigma ds \\ & \geq \quad C \int_1^t \int_1^s S(t-s)(s-\sigma)^{-\gamma_1} G^p(\frac{\sigma}{2}) d\sigma ds \\ & \geq \quad C \int_1^t \int_1^s S(t-s)(s-\sigma)^{-\gamma_1} \sigma^{-\frac{N(p-1)}{2}} G(\frac{\sigma}{2p}) d\sigma ds \\ & \geq \quad C \int_1^t \int_1^s (s-\sigma)^{-\gamma_1} \sigma^{-\frac{N(p-1)}{2}} G(t-s+\frac{\sigma}{2p}) d\sigma ds, \end{aligned} \tag{2.48}$$

onde C é constante. Note que, se $1 \leq \sigma \leq s \leq \frac{t}{2}$, então $\frac{t}{2} \leq t - s + \frac{\sigma}{2p} \leq t$. Portanto,

$$G(t-s+\frac{\sigma}{2p}) \geq 2^{-\frac{N}{2}} G(\frac{t}{2}). \tag{2.49}$$

De (2.48) e (2.49), temos

$$\begin{aligned} u(t) \quad & \geq CG(\frac{t}{2}) \int_1^{\frac{t}{2}} \int_1^s (s-\sigma)^{-\gamma_1} \sigma^{-\frac{N(p-1)}{2}} d\sigma ds \\ & \geq CG(\frac{t}{2}) \int_1^{\frac{t}{2}} (\frac{t}{2} - \sigma)^{1-\gamma_1} \sigma^{-\frac{N(p-1)}{2}} d\sigma \\ & \geq CG(\frac{t}{2}) t^{1-\gamma_1} \end{aligned} \tag{2.50}$$

para t suficientemente grande.

Segue de (2.50) que $u(t) \geq Ct^{1-\gamma_1}G(\frac{t}{2})$, para t suficientemente grande. Argumentando como antes para $v(t)$, obtemos $v(t) \geq Ct^{1-\gamma_2}G(\frac{t}{2})$, para t suficientemente grande. Se usarmos (2.47) para t pequeno, concluímos que, para $t \geq 1$, vale

$$\begin{cases} u(t) & \geq Ct^{1-\gamma_1}G(\frac{t}{2}) & = Ct^{1-\gamma_1-\frac{N}{2}}e^{\frac{-|x|^2}{2t}}, \\ v(t) & \geq Ct^{1-\gamma_2}G(\frac{t}{2}) & = Ct^{1-\gamma_2-\frac{N}{2}}e^{\frac{-|x|^2}{2t}}. \end{cases} \tag{2.51}$$

Assim,

$$\begin{cases} w_1(s) & \geq Ct^{1-\gamma_1-\frac{N}{2}-\beta_1}, \\ w_2(s) & \geq Ct^{1-\gamma_2-\frac{N}{2}-\beta_2}. \end{cases}$$

Por hipótese, temos $1-\gamma_1-\frac{N}{2}-\beta_1 > 0$, o que contradiz (2.45). No caso em que $q(2-\gamma_1)+pq-1 > \frac{N}{2}(pq-1)$, temos $1-\gamma_2-\frac{N}{2}-\beta_2 > 0$, que também contradiz (2.45).

Caso II. $p(2-\gamma_2)+pq(2-\gamma_1)-pq+1 = \frac{N}{2}(pq-1)$. Usando as estimativas (2.51) e (2.49), obtemos, para $t \geq 4$,

$$\begin{aligned} v(t) & \geq \int_1^t \int_1^s S(t-s)(s-\sigma)^{-\gamma_2}u^q(\sigma)d\sigma ds \\ & \geq C\int_1^t \int_1^s S(t-s)(s-\sigma)^{-\gamma_2}\sigma^{q(1-\gamma_1)}G(\frac{\sigma}{2})^q d\sigma ds \\ & \geq C\int_1^t \int_1^s (s-\sigma)^{-\gamma_2}\sigma^{q(1-\gamma_1)-\frac{N}{2}(q-1)}G(t-s+\frac{\sigma}{2q})d\sigma ds \\ & \geq CG(\frac{t}{2})\int_1^{\frac{t}{2}} \int_1^s (s-\sigma)^{-\gamma_2}\sigma^{q(1-\gamma_1)-\frac{N}{2}(q-1)}d\sigma ds \\ & \geq CG(\frac{t}{2})\int_1^{\frac{t}{2}} s^{-\gamma_2}\left(\int_1^s \sigma^{q(1-\gamma_1)-\frac{N}{2}(q-1)}d\sigma\right)ds \\ & = CG(\frac{t}{2})\int_1^{\frac{t}{2}} s^{q(1-\gamma_1)-\frac{N}{2}(q-1)+1-\gamma_2}ds \\ & = CG(\frac{t}{2})t^{q(1-\gamma_1)-\frac{N}{2}(q-1)+2-\gamma_2}. \end{aligned}$$

Segue desta estimativa para v que, para t suficientemente grande,

$$\begin{aligned} u(t) & \geq \int_4^t \int_4^s S(t-s)(s-\sigma)^{-\gamma_1}v^p(\sigma)d\sigma ds \\ & \geq C\int_4^t \int_4^s S(t-s)(s-\sigma)^{-\gamma_1}\sigma^{pq(1-\gamma_1)-\frac{Np(q-1)}{2}+p(2-\gamma_2)}G(\frac{\sigma}{2})^p d\sigma ds \\ & \geq C\int_4^{\frac{t}{2}} \int_4^s (s-\sigma)^{-\gamma_1}\sigma^{p(2-\gamma_2)+pq(1-\gamma_1)-\frac{N(pq-1)}{2}}G(t-s+\frac{\sigma}{2p})d\sigma ds \\ & \geq CG(\frac{t}{2})\int_4^{t/2} \int_4^s (s-\sigma)^{-\gamma_1}\sigma^{-1}d\sigma ds \\ & \geq CG(\tfrac{t}{2})t^{1-\gamma_1}\ln(t/4). \end{aligned}$$

Assim, se $w_1(\sigma) = \int_{\mathbb{R}^N} U(\sigma)\Psi K dy$, então

$$\begin{aligned} w_1(\sigma) &= \int_{\mathbb{R}^N} \sigma^{-\beta_1} u(\sigma)\Psi K dy \\ &\geq C \int_{\mathbb{R}^N} \sigma^{-\beta_1+(1-\gamma_1)} \ln(\sigma/4) G_{\frac{\sigma}{2}} \Psi K dy \\ &= C \int_{\mathbb{R}^N} \sigma^{-\beta_1+(1-\gamma_1)-\frac{N}{2}} \ln(\sigma/4) e^{-\frac{|y|^2}{2\sigma}} \Psi K dy \\ &= C \ln(\sigma/4), \end{aligned}$$

o que contradiz (2.45) para σ grande.

No caso em que $q(2-\gamma_1) + pq(2-\gamma_2) - pq + 1 = \frac{N(pq-1)}{2}$, o argumento é inteiramente análogo.

□

2.4 Demonstração do Teorema 2.5

Ressaltamos que a existência de solução local para o sistema (2.2) é garantida pela Observação 2.6. Aqui $S(t)$ denota o semigrupo do calor em Ω, com condições de Dirichlet no bordo. Denotamos por $\lambda_1 > 0$ o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ e por φ_1 um correspondente autovetor satisfazendo $\int_\Omega \varphi_1 = 1$.

A fim de mostrarmos a validade do Teorema 2.5, supomos que a condição (2.13) é válida. Definimos $f_1(t) = \int_\Omega v(t)\varphi_1$ e $f_2(t) = \int_\Omega u(t)\varphi_1$. Multiplicando-se cada equação do sistema (2.2) por φ_1, integrando sobre Ω, e usando a desigualdede de Jensen, obtemos

$$\begin{cases} f_1'(t) + \lambda_1 f_1(t) \geq \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma_1} f_1^p(s) ds, \\ f_2'(t) + \lambda_1 f_2(t) \geq \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma_2} f_2^p(s) ds. \end{cases} \tag{2.52}$$

O resultado segue do item (vi) da Proposição 2.32.

3 Existência de Soluções Globais

Neste capítulo, apresentamos condições que garantem a existência de solução global para os sistemas com uma não-linearidade não-local no tempo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma_1}|v|^{p-1}v(s)ds \text{ em } (0,T)\times\mathbb{R}^N, \\ v_t - \Delta v &= \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma_2}|u|^{q-1}u(s)ds \text{ em } (0,T)\times\mathbb{R}^N, \\ u(0) &= u_0,\ v(0) = v_0 \text{ in } \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{3.1}$$

e

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma_1}|v|^{p-1}v(s)ds \text{ em } (0,T)\times\Omega, \\ v_t - \Delta v &= \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma_2}|u|^{q-1}u(s)ds \text{ em } (0,T)\times\Omega, \\ & u(t,x) = 0,\ v(t,x) = 0 \text{ em } (0,T)\times\partial\Omega, \\ & u(0) = u_0,\ v(0) = v_0 \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Em ambos os casos, consideramos $p, q \geq 1$, $pq > 1$, $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 < 1$ e dado inicial $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, $u_0, v_0 \in C_0(\Omega)$, respectivamente. As condições obtidas aqui, generalizam as condições obtidas em [5] para a existência de soluções globais da equação

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= \int_0^t (t-s)^{-\gamma}|u|^{p-1}u(s)ds \text{ em } (0,T)\times\Omega, \\ u(0) &= u_0 \text{ em } \Omega, \end{aligned} \tag{3.3}$$

para $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado.

Os sistemas (3.1) e (3.2) são equivalentes, num sentido apropriado, ao sistema

$$\begin{cases} u(t) &= S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_1} S(t-s)|v|^{p-1}v(\sigma)d\sigma ds, \\ v(t) &= S(t)v_0 + \displaystyle\int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_2} S(t-s)|u|^{q-1}u(\sigma)d\sigma ds \end{cases} \tag{3.4}$$

para todo $t \in [0,T]$, onde $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é o semi-grupo do calor em $\mathbb{R}^N$ e num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, respectivamente.

Considere r_1, r_2 obtidos através do argumento do scaling, dados por

$$r_1 = \frac{N(pq-1)}{2[2-\gamma_1+p(2-\gamma_2)]}, \quad r_2 = \frac{N(pq-1)}{2[2-\gamma_2+q(2-\gamma_1)]}. \tag{3.5}$$

Sobre a existência de solução global para o sistema (3.1), temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Sejam* $p, q \geq 1$, $pq > 1$, $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 < 1$ *e* $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$. *Considere* $(u,v) \in \{C([0,T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N))\}^2$ *a solução correspondente de (3.1). Suponha que as seguintes condições sejam válidas*

$$\begin{cases} 1 - p\gamma_2 + p(1-q\gamma_1) + p(q+1) & < \frac{N}{2}(pq-1), \\ 1 - q\gamma_1 + q(1-p\gamma_2) + q(p+1) & < \frac{N}{2}(pq-1), \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} 1 - p\gamma_2 + p(1-q\gamma_1) & < 0, \\ 1 - q\gamma_1 + q(1-p\gamma_2) & < 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

e

$$\frac{p}{r_2} - \frac{4}{N} < \frac{1}{q} \ , \ \frac{q}{r_1} - \frac{4}{N} < \frac{1}{p}. \tag{3.8}$$

Se $(u_0, v_0) \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_2}(\mathbb{R}^N)$, *onde* r_1, r_2 *são definidos por (3.5) e* $(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty + \|u_0\|_{r_1} + \|v_0\|_{r_2}) \leq \epsilon$ *com* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno, então* (u,v) *existe globalmente.*

Observação 3.2. Fazemos aqui algumas observações acerca da condição (3.8).

(i) A condição (3.8) é naturalmente satisfeita no caso da equação (3.3) se $p\gamma > 1$. De fato, nesse caso, temos $r = \frac{N(p-1)}{2(2-\gamma)}$ e $\frac{p}{r} - \frac{2}{N} < 1$. Desta forma, temos $\frac{p}{r} - \frac{4}{N} < 1 - \frac{2}{N}$. Portanto, se $1 - \frac{2}{N} \leq \frac{1}{p}$, temos $\frac{p}{r} - \frac{4}{N} < \frac{1}{p}$. Suponhamos, então, que $1 - \frac{2}{N} > \frac{1}{p}$, isto é, $p < \frac{N(p-1)}{2}$. Desta forma, como $p\gamma > 1$, temos $2p - p^2\gamma < p < \frac{N(p-1)}{2}$ e, daí, concluímos que $\frac{p}{r} - \frac{4}{N} = \frac{2(2-p\gamma)}{N(p-1)} < \frac{1}{p}$.

(ii) Se $\frac{p}{r_2} - \frac{4}{N} \geq \frac{1}{q}$, $\frac{q}{r_1} - \frac{4}{N} \geq \frac{1}{p}$ e vale a condição (3.6), então qualquer solução não-trivial do sistema (3.1) explode num tempo finito. De fato, neste caso, temos

$$\frac{1}{p} - \gamma_2 > \frac{N}{2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{p}\right) - \gamma_2 \geq 0.$$

Analogamente, verifica-se que $q\gamma_1 < 1$. Desta forma, temos $1 - p\gamma_2 + p(1-q\gamma_1) \geq 0$ e, portanto, o resultado segue do Teorema 2.3.

(iii) Os casos $\left(\frac{p}{r_2} - \frac{4}{N} < \frac{1}{q} \ , \ \frac{q}{r_1} - \frac{4}{N} \geq \frac{1}{p}\right)$ e $\left(\frac{p}{r_2} - \frac{4}{N} \geq \frac{1}{q} \ , \ \frac{q}{r_1} - \frac{4}{N} < \frac{1}{p}\right)$, são atípicos e os argumentos utilizados neste trabalho não se aplicam diretamente a eles. Este problema será estudado numa futura pesquisa.

O próximo resultado, juntamente com o Teorema 2.5 demonstrado no capítulo anterior, generaliza o Teorema 1.3 de [5] e nos fornece o coeficiente de Fujita do sistema (3.2).

Teorema 3.3. *Sejam $p, q \geq 1$, $pq > 1$, $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 < 1$ e $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Considere $(u,v) \in \{C([0,T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N))\}^2$ a solução correspondente de (3.2). Suponha que*

$$\left\{\begin{array}{ll} 1 - p\gamma_2 + p(1 - q\gamma_1) & < 0 \\ e & \\ 1 - q\gamma_1 + q(1 - p\gamma_2) & < 0. \end{array}\right. \tag{3.9}$$

Se $\|u_0\|_\infty \leq \delta_1$ e $\|v_0\|_\infty \leq \delta_2$, onde $\delta_1, \delta_2 > 0$ são suficientemente pequenos, então (u,v) existe globalmente.

Nas próximas seções, demonstramos os teoremas apresentados anteriormente, que garantem a existência de solução global para os sistemas (3.1) e (3.2), respectivamente.

3.1 Demonstração do Teorema 3.1

Na demonstração do Teorema 3.1, utilizamos a seguinte propriedade de regularização do semigrupo do calor: para $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N) \cap L^s(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq r \leq s$, existe uma constante $C = C(r,s)$ tal que

$$\|S(t)u_0\|_{L^s} \leq C(t+1)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{s})}(\|u_0\|_r + \|u\|_s) \tag{3.10}$$

para $t \geq 0$. Utilizamos ainda as seguintes estimativas

$$\int_0^t (t-s)^{-a}(1+s)^{-b} ds \leq C(1+t)^{1-a-b} \tag{3.11}$$

para $t > 0, 0 < a, b < 1$, e

$$\int_0^t (t+1-s)^{-a}(1+s)^{-b} ds \leq C(1+t)^{-b} \tag{3.12}$$

para $t > 0, a > 1, a \geq b$ (ver Lema 4.1 de [6]). Aqui, C é uma constante que depende apenas de a e b.

Considere r_1, r_2 dados por (3.5). Note que

$$\begin{array}{ll} \dfrac{q}{r_1} - \dfrac{2}{N} & = \dfrac{2}{N}\dfrac{1 - q\gamma_1 + q(1-p\gamma_2) + q(p+1)}{pq-1} < 1 \\ \dfrac{p}{r_2} - \dfrac{2}{N} & = \dfrac{2}{N}\dfrac{1 - p\gamma_2 + p(1-q\gamma_1) + p(q+1)}{pq-1} < 1. \end{array} \tag{3.13}$$

Definimos $\alpha = \dfrac{p(1-\gamma_2) + (1-\gamma_1)}{pq-1}$ e $\beta = \dfrac{q(1-\gamma_1) + (1-\gamma_2)}{pq-1}$. Verifica-se facilmente que α e β satisfazem

$$\begin{array}{ll} 1 - \gamma_1 + \alpha & = \beta p, \\ 1 - \gamma_2 + \beta & = \alpha q \end{array} \tag{3.14}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha q-1 &= \frac{1-q\gamma_1+q(1-p\gamma_2)}{pq-1}<0, \\ \beta p-1 &= \frac{1-p\gamma_2+p(1-q\gamma_1)}{pq-1}<0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Considere $\eta_1, \omega_1 \in \mathbb{R}$ definidos por

$$\left(\frac{1}{\eta_1},\frac{1}{\omega_1}\right)=\left(\frac{1}{r_1}-\frac{2}{N}\left(\alpha+\mu\right),\frac{1}{r_2}-\frac{2}{N}(\beta+\lambda)\right), \tag{3.16}$$

onde $(\mu,\lambda)\in R$, com R dado por

$$\begin{aligned} R=\{(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2;\ &\frac{N}{2}(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{q})-\alpha<x<\min\{\gamma_1-\alpha,\frac{N}{2r_1}-\alpha\}\ , \\ &\tfrac{N}{2}(\tfrac{1}{r_2}-\tfrac{1}{p})-\beta<y<\min\{\gamma_2-\beta,\tfrac{N}{2r_2}-\beta\}\ ,\ x<py\ ,\ y<qx\}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Observação 3.4. Como $\frac{p}{r_2}-\frac{4}{N}<\frac{1}{q}$, temos $\frac{N}{2}(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{q})=\frac{N}{2}[\frac{p}{r_2}-\frac{2}{N}(2-\gamma_1)-\frac{1}{q}]<\gamma_1$. De maneira análoga mostra-se que $\frac{N}{2}(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{p})<\gamma_2$. Estes fatos mostram que o conjunto R está bem definido. Além disso, o conjunto R é não-vazio, pois $\frac{N}{2}(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{p})-\beta<q(\gamma_1-\alpha)$, $\frac{N}{2}(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{p})-\beta<q(\frac{N}{2r_1}-\alpha)$, $\frac{N}{2}(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{q})-\alpha<p(\frac{N}{2r_2}-\beta)$ e $\frac{N}{2}(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{q})-\alpha<p(\gamma_2-\beta)$. De fato, segue da condição (3.6) que $\frac{N}{2}(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{p})-\beta<\frac{1}{p}$. Note ainda que a condição $\frac{1}{p}<q(\gamma_1-\alpha)$ equivale à condição (3.7) e que $\frac{N}{2}(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{p})-\beta<q(\frac{N}{2r_1}-\alpha)$ se, e somente se, $-\frac{N}{2p}<1$.

De maneira análoga verifica-se que $\frac{N}{2}(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{q})-\alpha<p(\gamma_2-\beta)$ e $\frac{N}{2}(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{q})-\alpha<p(\frac{N}{2r_2}-\beta)$.

Temos o seguinte resultado.

Lema 3.1. *Sejam η_1, w_1 dados por (3.16). As seguintes condições são verificadas:*

(i) $\frac{1}{\eta_1},\frac{1}{\omega_1}\geq 0$.

(ii) $\frac{1}{\eta_1}<\frac{1}{q}$, $\frac{1}{\omega_1}<\frac{1}{p}$.

(iii) $\frac{1}{r_2}-\frac{2}{Np}<\frac{1}{p}(\frac{1}{\eta_1}+\frac{2}{N})$

(iv) $\frac{1}{\eta_1}<\frac{1}{q}(\frac{1}{\omega_1}+\frac{2}{N})$ *e* $\frac{1}{\omega_1}<\frac{1}{p}(\frac{1}{\eta_1}+\frac{2}{N})$.

(v) $\frac{1}{p\eta_1}<\frac{1}{r_2}$ *e* $\frac{1}{q\omega_1}<\frac{1}{r_1}$.

Demonstração. (i) Temos $\frac{1}{\eta_1}=\frac{1}{r_1}-\frac{2}{N}(\alpha+\mu)\geq 0$ se, e somente se, $\mu\leq\frac{N}{2r_1}-\alpha$. De (3.17) vemos que $\mu<\frac{N}{2r_1}-\alpha$. Daí, temos o resultado.

(ii) Note que $\frac{1}{\eta_1} < \frac{1}{q}$ se, e somente se, $\frac{N}{2}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{q}) - \alpha < \mu$. De (3.17) temos o resultado.

O resultado para ω_1 é demonstrado de maneira análoga.

(iii) A condição $\frac{1}{r_2} - \frac{2}{Np} < \frac{1}{p}(\frac{1}{\eta_1} + \frac{2}{N})$ equivale a $\mu < \gamma_1 - \alpha$. Segue de (3.17) que isto é satisfeito.

(iv) Como $\frac{1}{\eta_1} = \frac{1}{r_1} - \frac{2}{N}(\alpha + \mu)$, o item (iv) equivale a $\mu < \lambda p$ e isto é satisfeito pela escolha de μ e λ. De maneira similar, verifica-se que $\frac{1}{\omega_1} < \frac{1}{p}(\frac{1}{\eta_1} + \frac{2}{N})$.

(v) Como $\frac{1}{\eta_1} = \frac{1}{r_1} - \frac{2}{N}(\alpha + \mu)$, o item (v) equivale a $\gamma_1 - \alpha - 2 < \mu$, o que é obviamente válido.

□

Demonstração do Teorema 3.1. Considere $r_1, r_2, \eta_1, \omega_1$ definidos anteriormente. Seja (u, v) uma solução do sistema num intervalo $[0, T]$. Pelo Teorema 2.1, temos que

$$(u, v) \in C([0, T], L^{r_1}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)) \times C([0, T], L^{r_2}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)).$$

Para $t \in [0, T]$ defina as funções

$$\varphi(t) = \|u(t)\|_{r_1} + (t+1)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\eta_1})}\|u(t)\|_{\eta_1} + (t+1)^\alpha \|u(t)\|_\infty, \tag{3.18}$$

$$\psi(t) = \|v(t)\|_{r_2} + (t+1)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{\omega_1})}\|v(t)\|_{\omega_1} + (t+1)^\beta \|v(t)\|_\infty, \tag{3.19}$$

Mostraremos que existe A_0 tal que para qualquer $A \in (0, A_0]$ as funções φ e ψ são limitadas em $[0, T]$. Desta forma, teremos

$$\lim_{t \to T_{\max}} (\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty + \|u(t)\|_{r_1} + \|v(t)\|_{r_2}) < \infty.$$

A partir disto, segue que $T_{\max} = \infty$, isto é, a solução (u, v) do sistema (2.1) existe globalmente.

Estimativa para $\|u\|_{r_1}$. Como $u \in C([0, T], L^{r_1}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$, temos $\|u(t)\|_{r_1} < \infty$.

Estimativa para $(t+1)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\eta_1})}\|u(t)\|_{\eta_1}$. Segue do Lema 3.1 que podemos escolher w' satisfazendo

$$\max\{\frac{1}{r_2} - \frac{2}{Np}, \frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{p\eta_1}\} < \frac{1}{w'} \leq \min\{\frac{1}{p}, \frac{1}{p}(\frac{1}{\eta_1} + \frac{2}{N}), \frac{1}{r_2}\}.$$

Usando a desigualdade de interpolação

$$\begin{aligned} \|v\|_w &\leq \|v\|_{r_2}^\theta \|v\|_{w_1}^{1-\theta} \\ &\leq \|v\|_{r_2}^\theta \left[(t+1)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{\omega_1})}\|v\|_{w_1}\right]^{1-\theta} (t+1)^{-(1-\theta)\left(\frac{N}{2}(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{\omega_1})\right)} \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde $\frac{1}{w} = \frac{\theta}{r_2} + \frac{1-\theta}{\omega_1}$, temos

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{\eta_1} &\le (t+1)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{\eta_1})}(\|u_0\|_{r_1} + \|u_0\|_{\eta_1}) + \\
&\quad \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{w'}-\frac{1}{\eta_1})} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_1} \|v\|_{w'}^p d\sigma ds \\
&\le (t+1)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{\eta_1})}(\|u_0\|_{r_1} + \|u_0\|_{\eta_1}) + \\
&\quad \left[\sup_{s\in(0,t)} \psi(s)\right]^p \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{w'}-\frac{1}{\eta_1})} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_1} \sigma^{-(1-\theta)\left(\frac{N}{2}(\frac{p}{r_2}-\frac{p}{\omega_1})\right)} d\sigma ds.
\end{aligned}$$

Como $\frac{N}{2}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\eta_1}) + 2 - \gamma_1 - \frac{N}{2}(\frac{p}{w'} - \frac{1}{\eta_1}) - (1-\theta)\left(\frac{N}{2}(\frac{p}{r_2} - \frac{p}{\omega_1})\right) = 0$, temos

$$(t+1)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{\eta_1})}\|u(t)\|_{\eta_1} \le (\|u_0\|_{r_1} + \|u_0\|_{\eta_1}) + C\left[\sup_{s\in(0,t)} \psi(s)\right]^p.$$

Estimativas para $\|u(t)\|_\infty$. Consideramos duas situações:

Caso a. $N = 1$ ou $\left(\frac{p}{r_2} < \frac{4}{N} \text{ e } \frac{1}{\omega_1} < \frac{2}{Np}\right)$. Neste caso, segue do Lema 3.1 que podemos escolher w'' tal que

$$\max\{\frac{1}{r_2} - \frac{2}{Np}, \frac{1}{\omega_1}\} < \frac{1}{w''} < \min\{\frac{1}{p}, \frac{2}{Np}, \frac{1}{r_2}\}.$$

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_\infty &\le (t+1)^{-\frac{N}{2r_1}}(\|u_0\|_{r_1} + \|u_0\|_\infty) + \\
&\quad \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}\frac{p}{w''}} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_1} \|v(\sigma)\|_{w''}^p d\sigma ds
\end{aligned}$$

Da desigualdade de interpolação temos que

$$\begin{aligned}
\|v\|_{w''} &\le \|v\|_{r_2}^{\theta''} \|v\|_{\omega_1}^{1-\theta''} \\
&\le C\|v\|_{r_2}^{\theta''} \left[(t+1)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{w_1})}\|v\|_{\omega_1}\right]^{1-\theta''} (t+1)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{w''})}
\end{aligned}$$

Como $\alpha - \frac{N}{2r_1} = -\frac{p+1}{pq-1} < 0$ temos que

$$\alpha + 2 - \gamma_1 - \frac{N}{2}\frac{p}{w''} - \frac{N}{2}(\frac{p}{r_2} - \frac{p}{w''}) < \frac{N}{2r_1} + 2 - \gamma_1 - \frac{N}{2}\frac{p}{r_2} = 0,$$

e portanto,

$$(t+1)^\alpha \|u(t)\|_\infty \le (\|u_0\|_{r_1} + \|u_0\|_\infty) + C\left[\sup_{s\in(0,T)} \psi(s)\right]^p$$

Caso b. $N \ge 2$ e $\left(\frac{p}{r_2} \ge \frac{4}{N} \text{ ou } \frac{2}{Np} \le \frac{1}{w_1}\right)$. Neste caso, segue do Lema **??** que podemos escolher w'' tal que

$$\max\{\frac{1}{r_2} - \frac{2}{Np}, \frac{1}{\omega_1}, \frac{2}{Np}\} < \frac{1}{w''} < \min\{\frac{1}{p}, \frac{1}{r_2}\}. \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\infty &\le (t+1)^{-\frac{N}{2r_1}}(\|u_0\|_{r_1}+\|u_0\|_\infty)+\\ &\int_0^t (t+1-s)^{-\frac{N}{2}\frac{p}{w''}}\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma_1}(\|v\|_{w''}^p+\|v\|_\infty^p)d\sigma ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|v\|_{w''} &\le \|v\|_{r_2}^{\theta''}\|v\|_{w_1}^{1-\theta''} \le \|v\|_{r_2}^{\theta''}\left[(t+1)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{\omega_1})}\|v\|_{\omega_1}\right]^{1-\theta''}(t+1)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{w''})},\\ \|v\|_\infty &\le \left[(t+1)^\beta\|v\|_\infty\right](t+1)^{-\beta}.\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{r_2}-\frac{2}{Np}<\frac{1}{r_2}-\frac{2}{N}\beta$, $\frac{1}{\omega_1}<\frac{1}{r_2}-\frac{2}{N}\beta$ e $\frac{2}{Np}<\frac{1}{r_2}-\frac{2}{N}\beta$, além da condição (3.21) podemos assumir que $\frac{1}{w''}\le\frac{1}{r_2}-\frac{2}{N}\beta$ e portanto,

$$\alpha+1-\gamma_1-\frac{N}{2}(\frac{p}{r_2}-\frac{p}{w''})=\beta p-\frac{N}{2}(\frac{p}{r_2}-\frac{p}{w''})\le 0.$$

A partir deste fato, (3.14) e (3.15) temos que

$$(t+1)^\alpha\|u(t)\|_\infty \le (\|u_0\|_{r_1}+\|u_0\|_\infty)+C\left[\sup_{s\in(0,t)}\psi(s)\right]^p$$

Argumentos análogos mostram que $\psi(t)\le 4(\|v_0\|_{r_2}+\|v_0\|_\infty)+C_2\left[\sup_{s\in(0,t)}\varphi(s)\right]^q$. Portanto, fazendo $f(t)=\sup_{s\in(0,t)}\varphi(s)$ e $g(t)=\sup_{s\in(0,t)}\psi(s)$, obtemos

$$\begin{aligned}f(t) &\le 4(\|u_0\|_{r_1}+\|u_0\|_\infty)+C_1g^p(t),\\ g(t) &\le 4(\|v_0\|_{r_2}+\|v_0\|_\infty)+C_2f^q(t).\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}f(t) &\le 4(\|u_0\|_{r_1}+\|u_0\|_\infty)+C_1\left[4(\|v_0\|_{r_2}+\|v_0\|_\infty)+C_2f^q(t)\right]^p\\ &\le 4(\|u_0\|_{r_1}+\|u_0\|_\infty)+4C_12^{p-1}(\|v_0\|_{r_2}+\|v_0\|_\infty)+C_1C_2^p2^{p-1}f^{pq}(t)\\ &\le A+Bf^{pq}(t),\end{aligned}$$

com $A\ge 4(\|u_0\|_{r_1}+\|u_0\|_\infty)+4C_12^{p-1}(\|v_0\|_{r_2}+\|v_0\|_\infty)$ e $B=C_1C_2^p2^{p-1}$. Seja $h(x)=A+Bx^{pq}-x$, para $x\ge 0$. Então, $h(f(t))\ge 0$. Note que $h(0)=A>0$ e $h'(x_c)=0$ se e somente se $x_c=(pqB)^{-(pq-1)^{-1}}$. Além disso, $h(x_c)=A+(pqB)^{-1/(pq-1)}(\frac{1}{pq}-1)=0$ para $A=A_0=(pqB)^{-1/(pq-1)}(1-\frac{1}{pq})$. Isto implica, usando a continuidade de f, que se $4(\|u_0\|_{r_1}+\|u_0\|_\infty)+4C_12^{p-1}(\|v_0\|_{r_2}+\|v_0\|_\infty)\le A_0$, então $f(t)\le x_c$.

O mesmo argumento pode ser usado para obtermos uma limitação para $g(t)$ assumindo uma limitação apropriadada para $4(\|v_0\|_{r_2}+\|v_0\|_\infty)+4C_22^{q-1}(\|u_0\|_{r_1}+\|u_0\|_\infty)$.

$\square$

3.2 Demonstração do Teorema 3.3

Ressaltamos que a existência de solução local para o sistema (3.2) é garantida pela observação 2.6. Aqui $S(t)$ denota o semigrupo do calor em Ω, com condições de Dirichlet no bordo. Denotamos por $\lambda_1 > 0$ o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ e por φ_1 um correspondente autovetor satisfazendo $\int_\Omega \varphi_1 = 1$.

Demonstração do Teorema 3.3. Suponha que a condição (3.9) vale. Sejam

$$\alpha = \frac{(1-\gamma_2) + q(1-\gamma_1)}{pq-1}, \ \beta = \frac{(1-\gamma_1) + p(1-\gamma_2)}{pq-1}.$$

Note que $\alpha, \beta > 0$ são tais que $\alpha p, \beta q < 1$ e, além disso,

$$1 - \gamma_1 - \alpha p = -\beta \ , \ \ 1 - \gamma_2 - \beta q = -\alpha.$$

Considere o conjunto $E = \{L^\infty((0,\infty), L^\infty(\Omega))\}^2$. Usaremos o argumento do ponto fixo para mostrar a existência de uma solução do sistema (3.2) no conjunto

$$K = \{(u,v) \in E; (1+t)^\alpha \|v(t)\|_\infty \leq \delta_1 \ , \ (1+t)^\beta \|u(t)\|_\infty \leq \delta_2\},$$

onde $\delta_1, \delta_2 > 0$ são pequenos e serão convenientemente escolhidos. Para isto, considere a seguinte métrica no conjunto K

$$d((u,v),(\bar{u},\bar{v})) = \sup_{t\geq 0}[(1+t)^\alpha \|u-\bar{u}\|_\infty + (1+t)^\beta \|v-\bar{v}\|_\infty].$$

Temos

$$\begin{aligned} (1+t)^\alpha \|S(t)u_0\|_\infty &\leq C(1+t)^\alpha e^{-t\lambda_1}\|u_0\|_\infty &\leq A\|u_0\|_\infty, \\ (1+t)^\beta \|S(t)v_0\|_\infty &\leq C(1+t)^\beta e^{-t\lambda_1}\|v_0\|_\infty &\leq B\|v_0\|_\infty, \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde A e B são independentes de u_0 e v_0.

Considere a aplicação $\psi : K \to E$ dada por (**??**). Dado $(u,v) \in E$, temos

$$\begin{aligned} \|\varphi_1(v)(t) - S(t)u_0\|_\infty &\leq \delta_2^p \int_0^t \int_0^s e^{-\lambda_1(t-s)}(s-\sigma)^{-\gamma_1}(1+\sigma)^{-p\alpha} d\sigma ds \\ &\leq \delta_2^p \int_0^t \int_0^s e^{-\lambda_1(t-s)}(s-\sigma)^{-\gamma_1}\sigma^{-p\alpha} d\sigma ds \\ &= C\delta_2^p \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} s^{1-\gamma_1-p\alpha} ds \\ &= C\delta_2^p \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} s^{-\beta} ds \\ &\leq C\delta_2^p (1+t)^{-\beta}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde a última desigualdade segue da regra de l'Hôpital.

Analogamente, obtemos $\|\varphi_2(u)(t) - S(t)v_0\|_\infty \leq C\delta_1^q(1+t)^{-\alpha}$. Uma estimativa similar pode ser obtida para as diferenças $(\varphi_1(v) - \varphi_1(\bar{v}))$ e $(\varphi_2(u) - \varphi_2(\bar{u}))$. Concluímos, portanto, que $\psi : K \to K$ tem um único ponto fixo (u, v), o qual é solução do sistema (3.2).

$\square$

4 Resultados sobre a equação parabólica semi-linear

4.1 Introdução

Neste capítulo, consideramos a equação

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \int_0^t (t-s)^{-\gamma} |u|^{p-1} u(\sigma) d\sigma ds \text{ em } (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ u_0 = u(0) \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{4.1}$$

com $p > 1$,$\gamma \in [0,1)$, $N \geq 1$. Estamos interessados na existência de soluções de (4.1) para dados iniciais $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$.

A equação (4.1) com dado inicial $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ foi estudada por Cazenave, Dickstein e Escobedo em [5]. Para mostrar a existência de solução global para a equação (4.1), eles consideraram esta equação com dado inicial $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, com $r = \frac{N(p-1)}{2(2-\gamma)}$.

A fim de motivarmos nosso estudo, discursamos sobre alguns resultados já obtidos para o problema parabólico semilinear

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= |u|^{p-1} u \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x) \text{ em } \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{4.2}$$

Este problema foi estudado em [2], onde os autores obtiveram o seguinte resultado.

(i) Se $r > \frac{N}{2}(p-1)$ ou $r = \frac{N}{2}(p-1) > 1$ então existe $T > 0$ e uma função $u \in C([0,T], L^r(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{loc}((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^N))$ que é solução de (4.2). Além disso, $u \geq 0$ se $u_0 \geq 0$.

(ii) Se $1 \leq r < \frac{N}{2}(p-1)$, existe um dado inicial $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N), u_0 \geq 0$, para o qual não é possível que exista uma solução local não-negativa de (4.2)(vide [28], [21]).

Como a equação (4.1) é não-local, surgem algumas diferenças com a equação (4.2) como veremos mais adiante. Inicialmente, dado $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, dizemos que uma função u é solução do problema (4.1), se

(i) $(\cdot)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})} \|u(\cdot)\|_\eta \in L^\infty(0,T)$ para algum $\eta \geq r$.

(ii) Para $t \in (0,T]$,

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} S(t-s)|u|^{p-1}u(\sigma)d\sigma ds,$$

onde $(S(t))_{t\geq 0}$ é o semi-grupo do calor em $\mathbb{R}^N$.

(iii) $t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|u(t)-S(t)u_0\|_\eta \to 0$ quando $t \to 0^+$.

Sobre a existência de soluções do problema (4.1), temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1. *Sejam $p > 1$, $\gamma \in [0,1]$ e $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, com $r \geq 1$. Suponha que*

$$\frac{p-1}{r} \leq \frac{2}{N}(2-\gamma), \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{r} - \frac{2}{Np} < \min\{\frac{1}{p}, \frac{2}{N(p-1)}\}. \tag{4.4}$$

Existe $T > 0$ e uma única função u que é solução de (4.1). Além disso, $u \geq 0$ se $u_0 \geq 0$. Mais ainda, tem-se que $u \in C([0,T], L^\eta(\mathbb{R}^N))$ e a unicidade da solução vale nesta classe.

No caso em que condição (4.3) não é válida, temos o seguinte resultado de não-existência.

Teorema 4.2. *Sejam $p > 1$, $\gamma \in [0,1]$. Suponha que $\frac{p-1}{r} > \frac{N}{2}(2-\gamma)$. Existe $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \geq 0$, tal que o problema (4.1) não possui solução não-negativa.*

4.2 Demonstração do Teorema 4.1.

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em [3].

Lema 4.1. *Se X é um espaço de Banach, $f \in L^1((0,T),X)$ e $v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$, então $v \in C([0,T],X)$.*

Demonstração do Teorema 4.1. Usamos o argumento do ponto fixo. Para isto, escolhemos $\eta \geq r$ tal que

$$\frac{1}{r} - \frac{2}{Np} < \frac{1}{\eta} < \min\{\frac{1}{p}, \frac{2}{N(p-1)}\}.$$

Isto é possível devido à condição (4.4). Note que $\eta > p$ e $0 < \frac{N}{2}(\frac{p-1}{\eta}) < 1$.

Seja $M \geq \|u_0\|_r$. Considere os conjuntos

$$E = L^\infty_{loc}((0,T), L^\eta(\mathbb{R}^N)),$$

$$K = \{u \in E; t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|u(t)\|_\eta \leq M+1\},$$

onde T será escolhido posteriormente. Considere a seguinte métrica em K,

$$d(u,\bar{u}) = \sup_{t\in(0,T)} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|u(t)-\bar{u}(t)\|_\eta.$$

Note que (K,d) é um espaço métrico completo. Considere a aplicação $\psi : K \to E$ definida por

$$\psi(u)(t) = S(t)u_0 + \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} S(t-s)|u(\sigma)|^{p-1}u(\sigma)d\sigma ds$$

Se $u \in K$, temos

$$\begin{aligned}
\|\psi(u)\|_\eta &\leq t^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|u_0\|_r + \textstyle\int_0^t\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}\|S(t-s)|u(\sigma)|^{p-1}u(\sigma)\|_\eta d\sigma ds \\
&\leq t^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|u_0\|_r + \textstyle\int_0^t (t-s)^{\frac{-N}{2}(\frac{p-1}{\eta})}\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}\|u(\sigma)^p\|_{\frac{\eta}{p}} d\sigma ds \\
&\leq t^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|u_0\|_r + \textstyle\int_0^t (t-s)^{\frac{-N}{2}(\frac{p-1}{\eta})}\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}\sigma^{\frac{-Np}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})} \\
&\qquad\qquad \sup_{\sigma\in[0,t]} (\sigma^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|u(\sigma)\|_\eta)^p d\sigma ds \\
&\leq t^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|u_0\|_r + t^{\frac{-N}{2}(\frac{p-1}{\eta})-\gamma-\frac{N}{2}(\frac{p}{r}-\frac{p}{\eta})+2}(M+1)^p
\end{aligned}$$

Segue, portanto, que

$$t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|\psi(u)\|_\eta \leq \|u_0\|_r + t^{\frac{-N}{2}(\frac{p-1}{r})-\gamma+2}(M+1)^p.$$

Por hipótese, $\frac{-N}{2}(\frac{p-1}{r}) - \gamma + 2 > 0$. Logo se T é pequeno, temos

$$t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|\psi(u)\|_\eta \leq \|u_0\|_r + 1$$

isto é, se T é suficientemente pequeno e $u \in K$, então $\psi(u) \in K$, ou seja, $\psi(K) \subset K$. Além disso, $\psi : K \to K$ é uma contração. Para ver isto, considere $u, v \in K$. Então,

$$\begin{aligned}
\|\psi(u)-\psi(v)\| &= \sup_{t\in(0,T)} [t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|\psi(u)(t)-\psi(v)(t)\|_\eta] \\
&\leq Ct^{\frac{-N}{2}(\frac{p-1}{r})-\gamma+2} \sup_{\sigma\in[0,t]} [\sigma^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}(\|u^{p-1}(\sigma)\|_\eta + \|v^{p-1}(\sigma)\|_\eta)\|u-v\|_\eta] \\
&\leq CT^{2-\gamma-\frac{N}{2}(\frac{p-1}{r})}\|u-v\|
\end{aligned}$$

Portanto, se T é suficientemente pequeno, $\psi : K \to K$ é uma contração. Segue, então do Teorema do Ponto Fixo, que ψ tem um único ponto fixo, o qual é solução de (4.1).

Finalmente, segue do lema 4.1 que para mostrar que $u \in C([0,T], L^\eta(\mathbb{R}^N))$, basta verificarmos que $\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}|u(\sigma)|^{p-1}u(\sigma)d\sigma \in L^1((0,T), L^\eta(\mathbb{R}^N))$. Temos

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^T \| \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}|u(\sigma)|^{p-1}u(\sigma)d\sigma\|_\eta ds &\leq \textstyle\int_0^T\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}\|u(\sigma)\|_\eta^p d\sigma ds \\
&\leq T^{2-\gamma-\frac{N}{2}(\frac{p}{r}-\frac{p}{\eta})}(M+1)^p < \infty.
\end{aligned}$$

A fim de mostrarmos que a unicidade da solução vale na classe $C([0,T],L^\eta(\mathbb{R}^N))$, consideramos $u,v \in C([0,T],L^\eta(\mathbb{R}^N))$ duas soluções de (4.1). Temos

$$u(t)-v(t)=\int_0^t S(t-s)\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}(|u(\sigma)|^{p-1}u(\sigma)-|v(\sigma)|^{p-1}v(\sigma))d\sigma ds.$$

Donde temos

$$\|u(t)-v(t)\|_\eta \le t^{\frac{-N}{2}(\frac{p-1}{\eta})+2-\gamma}\sup_{0\le\sigma\le t}(\|u\|_\eta^{p-1}-\|v\|_\eta^{p-1})\|u(\sigma)-v(\sigma)\|_\eta.$$

Se $M=\sup\limits_{0\le t\le T}(\|u(t)\|+\|v(t)\|)$ e $\psi(t)=\sup\limits_{0\le s\le t}\|u(s)-v(s)\|_\eta$, temos

$$\psi(t)\le CM^{p-1}t^{\frac{-N}{2}(\frac{p-1}{\eta})+2-\gamma}\psi(t),$$

onde C é uma constante. Como $2-\gamma-\frac{N(p-1)}{2\eta}>0$, temos

$$\psi(t)\le CM^{p-1}T^{2-\gamma-\frac{N(p-1)}{2\eta}}\psi(t).$$

onde C é uma constante. Portanto, $\psi(t)=0$, para t suficientemente pequeno. Repetindo este argumento, concluímos que $\psi(t)=0$, para $t\in[0,T]$.

□

4.3 Demonstração do Teorema 4.2.

O seguinte resultado será utilizado na demonstração do Teorema 4.2.

Lema 4.2. *Sejam* $0<p<\infty$, $1\le r<\infty$ *e* $0<\gamma<1$ *tais que*

$$\frac{p-1}{r}>\frac{2}{N}(2-\gamma). \tag{4.5}$$

Então, existe $u_0\in L^r$, $u_0\ge 0$ *tal que*

$$t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|\int_0^t S(t-s)\int_0^s(s-\sigma)^{-\gamma}[S(\sigma)u_0]^p d\sigma ds\|_\eta \longrightarrow \infty$$

quando $t\to 0^+,\forall\eta\ge r$.

Demonstração. Fixemos $\rho>0$ e $\alpha\in(\frac{2(2-\gamma)}{p}+\frac{N}{rp},\frac{N}{r})$. Note que isto é possível devido à condição (4.5). Para cada $y\in\mathbb{R}^N$, defina $u_0(y)=|y|^{-\alpha}\chi_{B(0,\rho)}(y)$. No que segue, C denota uma constante que pode variar a cada linha.

Afirmação 1: Como $\alpha r<N$, segue que $u_0\in L^r$

Afirmação 2: $S(t)u_0\ge Ct^{\frac{-\alpha}{2}}\chi_{\{|x|<\sqrt{t}\}}$, para t suficientemente pequeno.

De fato, se $|x| < \sqrt{t}$, para t pequeno, temos

$$\begin{aligned}
(S(t)u_0)(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} (4\pi t)^{\frac{-N}{2}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy \\
&\geq \int_{|y|<\sqrt{t}} (4\pi t)^{\frac{-N}{2}} e^{\frac{-|x|^2-|y|^2-2|x||y|}{4t}} |y|^{-\alpha} dy \\
&\geq C \int_{\frac{\sqrt{t}}{2}<|y|<\sqrt{t}} (4\pi t)^{\frac{-N}{2}} t^{\frac{-\alpha}{2}} dy \\
&\geq Ct^{\frac{-\alpha}{2}} \\
&= Ct^{\frac{-\alpha}{2}} \chi_{\{|x|<\sqrt{t}\}}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Segue então da Afirmação 2 que

$$(S(t)u_0)^p \geq Ch_t \tag{4.7}$$

onde $h_t(x) = t^{\frac{-\alpha p}{2}} \chi_{\{|x|<\sqrt{t}\}}$. Daí, concluímos que

$$\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} (S(\sigma)u_0)^p(x) d\sigma \geq Cs^{1-\gamma-\frac{\alpha p}{2}}, \text{ para } t < \infty, s \leq t$$

e

$$(S(t-s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} (S(\sigma)u_0)^p d\sigma)(x) \geq Ct^{\frac{-N}{2}-\gamma-\frac{\alpha p}{2}+1}.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\begin{aligned}
[S(t-s) \textstyle\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} (S(\sigma)u_0)^p d\sigma](x) &\geq C[S(t-s) \textstyle\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} h_\sigma d\sigma](x) \\
&\geq s^{-\gamma} C \int_{|y|<\sqrt{\sigma}} (t-s)^{\frac{-N}{2}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}} (\textstyle\int_0^s \sigma^{\frac{-\alpha p}{2}} d\sigma) dy \\
&\geq Ct^{1-\gamma-\frac{\alpha p}{2}}.
\end{aligned}$$

Desta forma, temos

$$\int_0^t S(t-s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} [S(\sigma)u_0]^p d\sigma ds \geq Ct^{2-\gamma-\frac{\alpha p}{2}}.$$

Assim, para todo $\eta \geq r$, temos

$$\| \int_0^t S(t-s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} [S(\sigma)u_0]^p d\sigma ds \|_\eta^\eta \geq Ct^{\eta(2-\gamma-\frac{\alpha p}{2})+\frac{N}{2}}.$$

Portanto,

$$t^{\frac{N\eta}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})} \| \int_0^t S(t-s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} [S(\sigma)u_0]^p d\sigma ds \|_\eta^\eta \geq Ct^{\eta(2-\gamma-\frac{\alpha p}{2})+\frac{N\eta}{2r}}.$$

Como $\alpha \in (\frac{2(2-\gamma)}{p} + \frac{N}{rp}, \frac{N}{r})$, temos

$$\eta(2-\gamma-\frac{\alpha p}{2}) + \frac{N\eta}{2r} < 0.$$

Daí segue que

$$t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})} \| \int_0^t S(t-s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} [S(\sigma)u_0]^p d\sigma ds \|_\eta \longrightarrow \infty$$

quando $t \to 0^+$. □

Demonstração do Teorema 4.2. Suponhamos que a condição (4.5) seja válida. Seja $u_0(y) = |y|^{-\alpha}\chi_{B(0,\rho)}(y), \forall y \in \mathbb{R}^N$, com $\alpha \in (\frac{2(2-\gamma)}{p} + \frac{N}{rp}, \frac{N}{r})$ e suponha que exista uma solução $u(t)$ da equação (4.1). Desta forma, temos $u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}|u(\sigma)|^{p-1}u(\sigma)d\sigma ds$. Daí segue que

$$t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|u(t) - S(t)u_0\|_\eta \to 0,$$

quando $t \to 0^+$.

Portanto,

$$t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{\eta})}\|\int_0^t S(t-s)\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}[S(\sigma)u_0]^p d\sigma ds\|_\eta \to 0,$$

quando $t \to 0^+$, o que contradiz o lema anterior.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] C. Bandle and H. A. Levine, On the existence and nonexistence of global solutions of reactio-diffusion equations in sectorial domains, Trans. Amer. Math. Soc. 316 (1989) 595-622.

[2] H. Brezis and T. Cazenave, A nonlinear heat equation with singular initial data, Journal d'Analyse Mathématique, Vol 68, 277-304, (1996).

[3] H. Brezis and T. Cazenave, Nonlinear evolution equation, preprint.

[4] T. Cazenave, F. Dickstein, M. Escobedo and F. Weissler, Self-similars solutions of a nonlinear heat equation, J. Math. Sci.Univ. Tokyo 8 (2001) 501-540.

[5] T. Cazenave, F. Dickstein e F. Weissler, An equation whose Fujita critical expoent is not given by scaling, Nonlinear Analysis, Vol 68, 862-874, (2008).

[6] S. Cui Local and global existence of solutions to semilinear parabolic initial value problems, Nonlinear Anal. 43 (2001) 293-323.

[7] T. Cazenave and F. Weissler, Asymptotically self-similar global solutions of the nonlinear Schrödinger and heat equations, Mathematische Zeitschrift 228 (1998) 83-120.

[8] M. Escobedo and M. A. Herrero, Boundedness and Blow up for a Semilinear Reaction-Diffusion System, J. of Differential Equations 89 (1991) 176-202.

[9] H. Fujita, On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{\alpha+1}$. J. Fac.Sci.Univ.Tokyo Sect.I 13 (1966) 109-124.

[10] H. Fujita, On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations, Proc. Sympos. Pure Math. 18 (1968) 138-161.

[11] V. A. Galaktionov, S. P.. Kurdjumov, A. P. Mihailov and A. A. Samarskii, On unbounded solutions of the Cauchy problem for parabolic equation $u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u) + u^\beta$, Dokl. Akad. Nauk SSSR 252(6) (1980) 1362-1364(in Russian).

[12] Fino, Kirane On certain time- and space-fractional evolution systems, preprint.

[13] K. Hayakawa, On nonexistence of global solution of some semi-linear parabolic equation, Proc. Japan Acad. 49 (1973) 503-505.

[14] O Kavian, Remarks on the large time behaviour of a nonlinear diffusion equation, Ann. Inst. Henri Poincaré vol.4 n°5 (1987) 423-452.

[15] T.Kato, H. Fujita On the Navier-Stokes inicial value problem I, Arch. Rat. Mech. Anal. 16 (1964) 269-315.

[16] K. Kobayashi, T. Sirao and H. Tanaka, On the growing up problem for semilinear heat equation, J. Math. Soc. Japan 29 (1977) 407-424.

[17] S. Kamin, L. A. Peletier, Large time behaviour of solutions of heat equation with absorption, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 12 (1985) 393-498.

[18] P. Meier, Existence et non-existence de solutions globales d'une equation de la chaleur semi-linéaire: extension d'un théoreme de Fujita, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math, 303 (1986) 635-637.

[19] P. Meier, Blow-up of solutions of semilinear parabolic differential equations, Z. Angew. Math. Phys 39 (1988) 135-149.

[20] P. Meier, On the critical exponent for reaction diffusion equations, Arch. Ration. Mech. Anal. 109 (1990) 63-71.

[21] P. Quittner and P. Souplet, Admissible L_p norms for local existence and for continuation in semilinear parabolic systems are not the same, Proc. Royal. Soc. Edinburgh 131, A 1435-1456, (2001).

[22] P. Souplet, Uniform blow-up profile and boundary behaviour for diffusion equations with nonlocal nonlinear source, J. Differential Equations 153 (1999) 374-406.

[23] S. Snoussi and S. Tayachi, Asymptotic self-similar behavior of solutions for a semilinear parabolic system, Communications in Contemporary Mathematics, Vol. 3, N°3 (2001) 363-392.

[24] S. Snoussi and S. Tayachi, Global existence,asymptotic behavior and self-similar solutions for a class of semilinear parabolic systems, Nonlinear Analysis 48 (2002) 13-35.

[25] S. Snoussi, S. Tayachi and F. Weissler, Asymptotic self-similar global solutions of a general semilinear heat equation, Math. Ann. 321 (2001) 131-155.

[26] E. Terraneo, Non-uniqueness for a critical non-linear heat equation, Comm. Partial Differential Equations 27 (2002), no. 1-2, 185–218.

[27] F. Weissler, Semilinear evolution equations in Banach spaces. J. Funct. Analysis 32, 277-296 (1979).

[28] F. Weissler, Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p. Indiana Univ. Math. J. 29 (1980), 79-102.