



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA COMPUTACIONAL
TESE DE DOUTORADO

Processos de Partículas com Comprimento Variável

Alex Dias Ramos

Recife, Pernambuco
Maio de 2007

Processos de Partículas com Comprimento Variável

Alex Dias Ramos

Orientador: Prof. Dr. André Toom
Área de Concentração: Probabilidade

Tese de Doutorado apresentada por Alex Dias Ramos ao colegiado do curso de Doutorado em Matemática Computacional da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática Computacional.

Recife, Pernambuco
Maio de 2007

Ramos, Alex Dias
Processos de partículas com comprimento
variável / Alex Dias Ramos. - Recife: O autor,
2007.
x, 109 folhas: il., fig., tab.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Departamento de Matemática
Computacional , 2007.

Inclui bibliografia e apêndices.

1. Probabilidade 2. Autômato celular.
3. Processo de partículas com comprimento variável.
4. Transição de fase. 5. Não ergodicidade.
6 . Aproximação de campo médio. 7. Método de
Monte Carlo. I.Título.

519.2 CDD (22.ed.) MEI2007-047

Universidade Federal de Pernambuco
Doutorado em Matemática Computacional

31 de maio de 2007
(data)

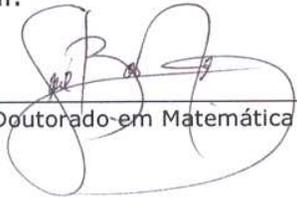
Nós recomendamos que a tese de doutorado de autoria de

Alex Dias Ramos

intitulada

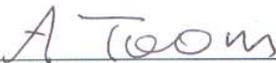
“Processos de partículas com comprimento variável”

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Doutor em Matemática Computacional.

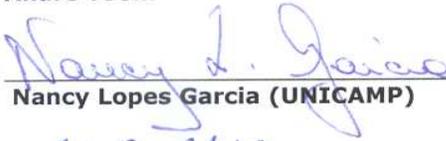


Coordenador do Doutorado em Matemática Computacional

Banca Examinadora:



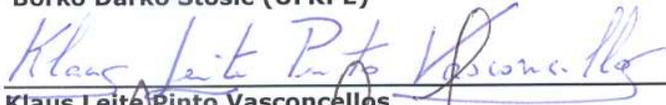
André Toom orientador



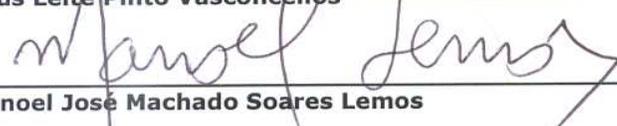
Nancy Lopes Garcia (UNICAMP)



Borko Darko Stosic (UFRPE)



Klaus Leite Pinto Vasconcellos



Manoel José Machado Soares Lemos

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

A Deus e a meus pais.

“ Se eu consegui enxergar mais longe, foi porque me apoiei nos ombros de gigantes.”

Isaac Newton, 1675.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, que de maneira tão própria me conduziu para o ponto onde hoje me encontro. Agradeço a meus pais, Palmiro e Altamira, por terem desde sempre incentivado e alertado a mim e meus irmãos que o estudo é a chave do nosso futuro e, que dentre os bens que podemos obter nesta vida, este é o único que aumenta ao dividirmos com quem quer que seja. Também importante nesta etapa foram minhas irmãs, Jaqueline e Caroline, que estiveram prontas para me ajudar quando necessário. Faz-se não menos importante, agradecer a minha namorada Mônica Ferreira dos Prazeres, a qual sempre me deu apoio e força nas dificuldades que passei.

Neste momento, não posso deixar de comentar a importância de todos os professores e educadores que tive, os quais foram parte fundamental para minha formação pessoal e como pesquisador. Dentre estes, faço ressalva ao professor Armando Peixoto da Universidade Salvador-Unifacs e a professora Isamara Carvalho Alves da Universidade Federal da Bahia-UFBA. Estes sempre deram um apoio especial para meu crescimento acadêmico.

As amigas e grandes pesquisadoras, Rita de Cássia Moura e Calitéia Santana de Sousa, obrigado. Também agradeço a alguns estudantes e professores do Departamento de Física da UFPE, por me ajudarem a ver a pesquisa científica por outros ângulos.

Sou grato aos professores do Programa de Pós Graduação em Matemática Computacional, em particular aos professores Alejandro C. Frery, César Castilho e Francisco Cribari Neto, os quais enquanto atuaram como coordenadores estiveram atentos aos questionamentos dos estudantes. Além de terem desenvolvido uma excelente administração do Programa. Agradeço aos funcionários

da UFPE, que de forma direta ou indireta contribuíram positivamente no desenvolvimento desta tese. A Valéria Bittencourt, deixo aqui explicitado meu obrigado por sempre ter me mantido bem informado sobre as questões burocráticas.

Agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia-FAPESB, por ter acreditado em mim, financiando meus estudos durante os quatro anos do Doutorado.

Obrigado aos professores(as): Nancy Lopes Garcia, Borko Stosic, Klaus Leite Pinto Vasconellos e Manoel José de Machado Soares Lemos, os quais deram contribuições importantes para a conclusão deste trabalho.

Difícil fica agradecer ao Professor André Toom. Pessoa muito despojada, não só no seu estilo de vida, mas também nas suas atitudes. Minhas perguntas que a princípio poderiam parecer tolas, foram escutadas e argumentadas. Quando possível, ele sempre esteve presente em momentos estratégicos. Sua competência profissional é um exemplo inquestionável. Realmente tive sorte em poder tê-lo como orientador, a quem sou infinitamente grato!

RAMOS, Alex Dias. *Processos de Partículas com Comprimento Variável*. Recife-Pe, UFPE, 2007 (Tese de Doutorado apresentada ao curso de Doutorado em Matemática Computacional) 109p.

Palavras Chave: Autômato celular, processo de partículas com comprimento variável, transição de fase, não-ergodicidade, aproximação de campo médio, método de Monte Carlo.

Resumo

Por muito tempo, foi (e ainda é) comum entre físicos estatísticos acreditarem que transições fásicas só poderiam ocorrer em sistemas com dimensões maiores que um. Baseados nesta tradição e em simulações computacionais [1], vários autores propuseram uma conjectura conhecida como “Conjectura de taxas positivas”, chamada aqui CTP, a qual defende que todo autômato celular unidimensional com interação local uniforme, não-degenerado é ergódico. Vários autores tentaram refutar esta hipótese, mas somente um obteve sucesso completo: Gács [2] propôs um sistema muito complicado com $\approx 2^{100}$ estados, o qual refuta a CTP. Gray em trabalho posterior [3] explica os resultados obtidos por Gács sobre o refutar da CTP e expressou acreditar que sistemas muito simples não podem refutar a CTP.

Toom em [4] propôs uma nova classe de sistemas unidimensionais com interação local, onde componentes pode aparecer e desaparecer durante o processo de evolução. Após, o mesmo propôs um sistema muito simples desta nova classe [5], e provou que, embora unidimensional, exibe alguma forma de não-ergodicidade. Neste processo, partículas enumeradas por números inteiros interagem em todo passo de tempo discreto somente com seus vizinhos mais próximos. Toda partícula tem dois estados, chamados “menos” e “mais”. Inicialmente, o processo começa na configuração “todos menos”. Em cada passo de tempo duas transformações ocorrem. A primeira transforma todo menos em mais com probabilidade β independentemente do que acontece nos outros lugares. Sob a ação da segunda, sempre que um mais é um vizinho esquerdo de um menos, ambos desaparecem com probabilidade α independentemente dos outros lugares. Dentre os resultados deste processo, Toom provou que quando β é pequeno, a densidade de mais é sempre pequena.

Porém, o caso que chamamos “problemático”, com $\alpha = 1$, não foi considerado por Toom, pois neste caso mesmo a existência do processo não é evidente. No primeiro capítulo de nosso trabalho, mostramos rigorosamente que o processo de Toom está definido para este caso também e que os maiores resultados dele sobre não ergodicidade ainda permanecem válidos, e até mesmo apresentam melhores estimações numéricas. No segundo capítulo, nós estudamos o mesmo processo com qualquer valor de $\alpha \in [0, 1]$ e usamos método de Monte Carlo e aproximação de campo médio para estimar a linha que separa as regiões para as quais o processo é ergódico vs. não ergódico e em adição observamos que para pequenos valores de α e β , esta linha separadora tem a inclinação positiva na origem. Uma limitação do processo considerado nos capítulos um e dois é que ao imaginarmos sistemas finitos, teremos que em média o processo descrito acima “diminui” e portanto não tem análogo finito.

No terceiro capítulo, nós apresentamos um outro processo com os mesmos dois estados “menos” e “mais”, mas com tempo contínuo, composto por três transformações: a primeira, chamada flip, muda menos para mais e mais para menos com uma taxa β . Uma outra chamada aniquilação elimina as duas partículas vizinhas com uma taxa α , se estas estiverem em estados diferentes. A terceira, chamada mitose, duplica qualquer partícula com uma taxa γ . Mitose não foi utilizada no processo de Toom. Sua presença com uma taxa satisfatória previne nosso processo de “diminuir”. O processo com mitose exibiu a mesma forma de não ergodicidade como Toom provou. Nós mostramos isto usando simulação de Monte Carlo e estimamos as taxas para as quais nosso processo é ergódico vs. não ergódico e “diminui” vs. “não diminui”.

Palavras chaves: Autômato celular; processo de partículas com comprimento variável; transição de fase; ergodicidade; teoria de campo médio; método Monte Carlo.

Abstract

For a long time it was common (and still is) among statistical physicists to believe that phase transitions occur only in systems with dimensions greater than one. Based on this tradition and some computer simulations [1], several authors proposed a “positive rates conjecture” called here PRC, which claims that every one-dimensional cellular automaton with non-degenerated local interaction is ergodic. Several attempts were made to refute this hypothesis, but only one was quite successful: Gács [2] proposed a very complicated system with $\approx 2^{100}$ states, which refutes the PRC. Gray explained Gács’s result in [3] and expressed a belief that no simple system could refute the PRC.

Toom in [4] presented a new class of one-dimensional systems with local interaction, where of components may appear and disappear in the process of interaction. After that, he presented a very simple process belonging to this new class [5], which, although one-dimensional, displayed some form of non-ergodicity. In this process, particles enumerated by integer numbers, interact at every step of the discrete time only with their nearest neighbors. Every particle has two possible states, called minus and plus. Initially, the process starts in the state “all minuses”. At each time step two transformations occur. The first one turns every minus into plus with probability β independently from what happens at others places. Under the action of the second one, whenever a plus is a left neighbor of minus, both disappear with probability α independently from fate of other places. Among the results about this process, Toom showed that for β small, the density of pluses always remains small.

However, the “troublesome” case with $\alpha = 1$ was not considered by Toom. In the first chapter of this work, we show rigorously that Toom’s process is defined for this case also and that all his results about non-ergodicity remain

valid, even with better numerical estimations.

In the second chapter we use Monte Carlo method and Mean Field approximation to estimate the separating line between the regions, where the process is ergodic vs. non-ergodic. In addition, we observe that for small values of β and α , this separation line has a positive slope at the origin. However, this system “shrinks” and therefore has no finite analog.

In the third chapter, we propose another particle process with the same two states (“minus” and “plus”), with continuous time, composed by three transformations: The first one, called flip, changes minus to plus and plus to minus with a rate β , another called annihilation eliminates two neighbor particles with a rate α , whenever they are in different states, and the third one, called mitosis, doubles any particle with a rate γ . Mitosis wasn’t used in Toom’s process. Its presence with a sufficient rate prevents our process from “shrinking”. Our process displays the same form of non-ergodicity as Toom proved. We show it using Monte Carlo simulation and estimate the rates, for which our process is ergodic vs. non-ergodic and “shrink” vs. “does not shrink.”

Keywords: Cellular automata; particle random process with variable length; phase transitions; ergodicity; mean field theory; Monte Carlo Method.

Sumário

Resumo	i
Abstract	iii
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
Principais notações	1
Introdução geral	3
1 Não ergodicidade no caso “problemático” de um processo de partículas	9
1.1 Descrição do processo e declaração dos teoremas	9
1.2 Prova de que o processo $\delta_{\ominus}\text{Flip}_{\beta}\text{Ann}_1$ está definido no caso $\alpha = 1$	16
1.3 Prova dos teoremas 6, 8 e 9	20
1.4 Processo ν	23
1.5 Representação gráfica	30
1.6 Igualdades e Desigualdades	33
1.7 Erro de Toom e correção dele	45
2 Simulações e aproximações para um processo de partículas	51
2.1 Aproximação de Campo Médio	51
2.1.1 n -Aproximação	56
2.2 Aproximação de campo médio do modelo de Toom	58
2.3 Simulação de Monte Carlo	61
2.4 Resultados	63

2.4.1	Estudo do parâmetro N_{min}	68
2.5	Conclusão	72
3	Quase não ergodicidade para estruturas finitas 1-D	73
3.1	Descrição do modelo	73
3.2	Substituições do nosso processo	81
3.3	Procedimento numérico	83
3.4	Resultados numéricos e discussões	85
3.5	Aproximação determinística	91
3.6	Um caso particular e o estudo de equilíbrio	93
3.7	Conclusões	98
	Conclusões gerais e perspectivas	99
	A Um contorno	101
	B Cálculos da aproximação de campo médio do Modelo de Toom	103
	Referências bibliográficas	105

Lista de Figuras

1.1	<i>Resultados obtidos por Toom nesse processo, quando $\alpha \in (0, 1)$ e no lado direito exibimos nossas estimativas que obtivemos quando $\alpha = 1$. A região mostrada em cinza é a região para a qual não temos qualquer resultado.</i>	14
1.2	<i>Idéia utilizada na demonstração que a medida $\mu_t = \delta_{\ominus}(\text{Flip}_{\beta} \text{Ann}_1)^t$ é definida para cada tempo t.</i>	20
1.3	<i>Considerando o processo ν e $y = 9$.</i>	27
1.4	<i>Um fragmento do grafo G do processo ν juntamente com seu dual \bar{G}.</i>	33
2.1	<i>Aqui ilustramos um fragmento da rede de Bethe, onde a aproximação de campo médio é exata, sendo que qualquer medida-produto se transforma numa medida-produto.</i>	52
2.2	<i>Comportamento do $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x_0)$ para a aproximação de campo médio do processo de Stavskaya.</i>	54
2.3	<i>O $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x_0)$ para a aproximação de campo médio do processo NLC.</i>	56
2.4	<i>Comportamento do $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x_0)$ para a aproximação do processo de partículas com comprimento variável.</i>	60
2.5	<i>Neste gráfico mostramos as duas linhas teóricas e as outras duas linhas de transição obtidas: Pela aproximação de campo médio e com o método de Monte Carlo(M.M). Esta última curva é obtida da média entre 5 experimentos independentes.</i>	63

- 2.6 Para $t = 100.000$, neste gráfico, quando o processo é não ergódico, nós mostramos $\overline{s(\alpha, \beta)}$. A caixa de cores no lado direito, variando de amarelo até preto, representa, através de cores, os possíveis valores de $\overline{s(\alpha, \beta)}$. Para melhor visualização do conjunto de dados obtidos, nós excluimos os valores de $\overline{s(\alpha, \beta)} > 0.08$, os quais representam menos que 1% de todo o conjunto de dados. 64
- 2.7 Nos gráficos a) e b), $\alpha = 0.5$. Em a) vemos o comportamento médio de $E[s(0.5, \beta)]$, o qual cresce rapidamente próximo a curva separadora e após apresenta rápida estabilização. O gráfico b), mostra o correspondente $E[T]$, o qual contrário ao gráfico a) decresce rapidamente próxima a curva crítica e estabiliza logo após. Em c) e d), vemos o mesmo comportamento qualitativo neste estudo, com $\alpha = 0.25, 0.5$ e 0.75 . Para cada β , nós usamos 100 experimentos independentes e barras de erro correspondem ao desvio padrão. 66
- 3.1 $\beta = 1$ todo o tempo. Bolas brancas mostram a fronteira entre QE vs. QNE. Para cada valor inteiro de $\alpha \in [0, 100]$, uma bola branca mostra o menor valor de γ para o qual nós obtemos $\overline{\text{freq}(\oplus|\mu^t)} > 0.4$. A linha abaixo é uma fronteira entre as regiões onde o sistema diminui vs. não diminui. . . 85
- 3.2 $\beta = 1$ todo o tempo. Bolas pretas mostram que para $\alpha = 1$, a $\overline{\text{freq}(\oplus|\mu^t)}$ fica próximo de 0.5 todo o tempo para todo γ considerado. Assim, este processo exhibe QE. Bolas brancas mostram os resultados quando $\alpha = 35$. Neste caso, para γ pequeno o processo é QNE e quando γ aumenta o processo começa a mostrar QE. Nós usamos 20 experimentos para cada valor de γ e barras de erro indicam o desvio padrão. . 87

3.3	<i>Em a) temos duas situações: na primeira, $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Neste caso, o processo é QE (curva superior) por que $\overline{\text{freq}(\oplus \mu^t)} \approx 0.5$. Na segunda, $\alpha = 35$ e $\beta = \gamma = 1$, $\overline{\text{freq}(\oplus \mu^t)}$ é pequena (curva inferior), portanto o processo é QNE. Em ambos os casos, $\text{freq}(\oplus C^t) \approx \overline{\text{freq}(\oplus \mu^t)}$. Em b) $\alpha = 35$, $\beta = 1$ e $\gamma = 20$. O processo é QE. Embora a $\text{freq}(\oplus C^t)$ é longe da $\text{freq}(\oplus \mu^t)$.</i>	88
3.4	<i>$\alpha = 35, \beta = 1$ e $\gamma = 20$. De a) até j) nós exibimos 10 experimentos independentes. Em todos experimentos, nós observamos que $\text{freq}(\oplus C^t)$, fica próximo de zero ou um a maior parte do tempo. Em k) para cada tempo t fixado, nós exibimos a média de 20 experimentos independentes como os exibidos de a) à j). Este gráfico tem comportamento suave.</i>	90
3.5	<i>Ilustração do processo com normalização.</i>	92
3.6	<i>Esquema ilustrativo da existência de transição de fase para a nossa aproximação. Em a) $\alpha > 4\beta$, existem três pontos de equilíbrio, a saber: p_1, p_2 e p_3 onde p_1 atua como um ponto repulsor, correspondendo a região de quase não ergodicidade. Em b) $\alpha \leq 4\beta$ há um único ponto de equilíbrio e as densidades tendem para ele, o que corresponde a situação de quase ergodicidade. Setas indicam convergência ou divergência das densidades na vizinhança de p_1.</i>	97
A.1	<i>Ilustração de um contorno num fragmento do processo ν. . .</i>	101

Lista de Tabelas

1.1	<i>Passos em G, os quais iniciam em \oplus-vértice e seus correspondente: tipo, evento associado e variável associada. . . .</i>	34
1.2	<i>Passos em \bar{G} tendo uma \oplus-face em seu lado esquerdo e seu correspondente: tipo, chance e deslocamento.</i>	35
1.3	<i>Tipos maiores e seu respectivo: deslocamento, chance e taxa. .</i>	38
2.1	<i>Na primeira coluna é mostrado os coeficientes do ajuste linear, o qual mostra convergência para ≈ 0.0729. Na segunda e terceira coluna, mostramos os coeficientes dos termos do primeiro e segundo grau respectivamente. Estes coeficientes foram obtidos do ajuste quadrático. Vemos que convergência de b_j é pior que a_j e que c_j não mostra convergência.</i>	68
2.2	<i>Nesta tabela são mostrados resultados estatísticos de uma amostra $\{\beta_i^k\}$, onde $i = 1, \dots, 1000$. Vemos que estes testes mostram aproximadamente os mesmos valores</i>	69
2.3	<i>Nesta tabela são mostrados resultados utilizados no teste de Kolmogorov-Smirnov.</i>	72

Principais notações

\mathbb{R} - Conjunto dos números reais.

\mathbb{Z} - conjunto dos números inteiros.

\mathcal{A} - Alfabeto, qualquer conjunto finito.

W -Palavra, seqüência finita de elementos de \mathcal{A} .

$|W|$ - Comprimento da palavra W .

\mathcal{A}^m - Conjunto de palavras de comprimento m .

$concat(W_1, W_2)$ - Concatenação das palavras W_1 e W_2 .

$dict(\mathcal{A})$ - Dicionário de \mathcal{A} , o conjunto de todas as palavras em \mathcal{A} .

$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ - Espaço de configurações.

$D : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ - Operador D agindo de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ para $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ - Espaço de medidas uniformes em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

δ_x - Medida uniforme concentrada na configuração $x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

$\mu(W)$ - Frequência da palavra W na medida $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

$P : \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ - Operador P agindo de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ para $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

G, \tilde{G} - Grafo e seu grafo dual.

\mathcal{C} - Operador Caótico.

C, C^t - Circular geral e circular no tempo t .

Ω_C^{in} - Conjunto de circulares tais que a taxa de se transformar em C é positiva.

Ω_C^{out} - Conjunto de circulares para as quais C pode se transformar.

$quant(W|C)$ - Quantidade de diferentes lugares onde a palavra W aparece em C .

$freq(W|C)$ - Freqüência da palavra W na circular C .

$freq(W|\mu)$ - Freqüência da palavra W na medida μ .

$\mu_I^t(C)$ -Probabilidade de encontrar a circular C no tempo t se começarmos na circular I .

Introdução geral

No ano de 1945 foi produzido o primeiro computador eletrônico, chamado ENIAC. Seu impacto provocou grandes mudanças qualitativas em todas as pesquisas acadêmicas e na ciência aplicada, possibilitando o uso e estudo de modelagens dos processos físicos, químicos e biológicos, as quais anteriormente seriam impossíveis.

Nas ciências teóricas, como na Matemática, o uso dos computadores fez renascer o interesse de antigas linhas de pesquisa e impulsionou o desenvolvimento de outras. Dentre estas, podemos citar, a partir da metade do século XX, o desenvolvimento de uma nova parte da teoria de processos estocásticos, a saber teoria de processos estocásticos com interação local, também chamados sistemas com partículas interagentes. Frequentemente estes sistemas têm suas componentes localizadas em \mathbb{Z}^d , sendo d a dimensão do espaço. Estas componentes interagem com seus vizinhos mais próximos em tempo contínuo [6] ou discreto [7].

A palavra “ergódico” vem do grego para “caminho de energia”. Historicamente a idéia de ergodicidade vem da *hipótese ergódica* (a qual não obtêve sucesso) de Boltzmann. Nesta hipótese, sobre determinadas condições, era desejado saber se a média no tempo de uma variável física coincidiria com a média no espaço desta mesma variável, i. é. se a média no tempo ao longo de uma trajetória singular iria se igualar à média num determinado momento

sobre todas as possíveis condições iniciais ou, equivalentemente, a média em qualquer outro momento singular se igualaria à média sobre todas as possíveis trajetórias. Matemáticos motivados por esta hipótese começaram a buscar condições, sob as quais a hipótese pudesse ser verdadeira, conectando desta forma as médias temporais e espaciais. O primeiro a provar parcialmente esta hipótese foi von Neumann em 1931; seu resultado é conhecido como Teorema Ergódico Médio. Posteriormente, Birkhoff a provou completamente, exibindo as condições necessárias e suficientes para as quais esta hipótese é satisfeita. Este resultado é conhecido por Teorema Ergódico (ou Teorema Ergódico Pontual)[8]. Embora de grande importância, o resultado de Birkhoff não fechou o problema que o motivou, porque nas transformações da Mecânica Estatística não foi possível constatar a ergodicidade. Somente nos anos 60, os trabalhos de Sinai provaram a ergodicidade de transformações análogas aquelas que motivaram Birkhoff.

A teoria de processos estocásticos é uma área da Probabilidade moderna que possui muitas aplicações. Na Física Estatística é especialmente importante estudar condições sob as quais transições físicas são possíveis vs. impossíveis. Nesta conexão é importante estudar processos ergódicos vs. não-ergódicos, os quais tendem vs. não tendem para um limite único quando $t \rightarrow \infty$. Esta área da Matemática moderna é conectada com Física Estatística e outras ciências, onde transições físicas são importantes. Especialmente importantes são os processos não-ergódicos, os quais tipicamente têm pelo menos duas medidas invariantes. Tradicionalmente, não-ergodicidade foi considerada possível só com dimensões maiores que um: Em decorrência disso, exemplos de processos unidimensionais não ergódicos têm atraído a atenção de pesquisadores.

Estes sistemas são especialmente frutíferos na quebra espontânea de simetria

tria, a qual é conectada com transições fásicas. Durante bastante tempo, foi comum entre os físicos a crença de que transições fásicas são impossíveis em sistemas unidimensionais. Por exemplo, Landau e Lifshitz chamaram um capítulo do seu livro [9] “A impossibilidade da existência de fases em sistemas unidimensionais” e apresentaram um argumento físico para apoiar esta impossibilidade. Também verificamos que “em uma dimensão bósons não condensam, elétrons não superconduzem, ferromagnetos não magnetizam e líquidos não congelam” [10]. Tomando-se como base estes argumentos e alguns resultados de simulações computacionais [1], vários autores apresentaram uma hipótese conhecida como “hipótese de taxas positivas”. Informalmente esta hipótese pode ser dita assim: “todos os sistemas unidimensionais que apresentam interação local com taxas positivas são ergódicos, ou seja, têm só uma medida invariante e tendem para esta medida quando o tempo de funcionamento tende para o infinito”. Desde que esta conjectura foi formulada, muita atenção foi dada para produzir contra-exemplos [11, 16], mas nenhum deles refutou esta hipótese por uma ou outra razão. Porém, após quinze anos de trabalho, Gács [2] desenvolveu um sistema muito complicado, que refuta a conjectura de taxas positivas. Contudo, este sistema tem um enorme número ($\approx 2^{100}$) de estados de cada componente, complicadas regras de interação local determinística e uma pequena ($\approx 2^{-50}$) probabilidade de desvio desta regra. Gray [3], que tem estudado esta questão, considera que modelos muito mais simples não poderiam refutar a conjectura.

Na maioria dos sistemas deste tipo considerados até agora, o conjunto dos sítios, também chamado espaço, não muda no processo de interação. Elementos deste espaço, também chamados componentes, podem estar em estados diferentes, por exemplo 0 e 1, freqüentemente interpretados como ausência vs. presença de uma partícula, e podem ir de um estado para outro, o que pode ser

interpretado como nascimento ou morte de uma partícula, mas os sítios mesmos nem aparecem nem desaparecem no processo de funcionamento. Chamemos os mesmos de *operadores e processos com comprimento fixo*, onde os sítios não podem ser criados ou eliminados. O recente artigo de Toom [4] introduziu uma nova classe de processos unidimensionais com partículas, chamados *processos com comprimento variável*, porque nesta classe os sítios podem aparecer ou desaparecer durante o funcionamento deste sistema. Em trabalho posterior [5], Toom estudou um processo unidimensional muito simples desta nova classe e provou, de forma rigorosa que este processo possui comportamento ergódico em alguns casos e não ergódico em outros. Contudo, que este processo exibe um tipo de transição fásica de primeira ordem.

Sistemas com comprimento variável podem ser usados na modelagem de fenômenos biológicos, onde temos cadeias longas de unidades interagentes, cujo número de unidades pode mudar por várias razões. Por exemplo, algumas estruturas biológicas em vários níveis: macroscópico, celular, molecular, são longas e finas; por esta razão podem ser aproximadas por modelos unidimensionais, onde as componentes podem representar células ou estruturas de uma macro-molécula, as quais podem ser amplificadas ou eliminadas ou transformadas. Modelagem computacional de sistemas com comprimento variável também é apropriada quando é observado que cada substituição local pode ser codificada por meio de uma sub-rotina.

É importante sabermos se um processo é ergódico ou não ergódico, pois quando modelamos algum sistema da natureza, podemos dizer se o comportamento deste fenômeno no limite $t \rightarrow \infty$ depende da condição inicial ou não. Também é importante se a mudança entre estes comportamentos se apresenta de forma contínua ou descontínua.

O estudo de processos de partículas vem se tornando cada vez maior, um fator que tem contribuído de forma particular para isto, é a grande quantidade de modelagens para problemas nas ciências biológicas, físicas e químicas. Neste trabalho de tese, nós temos por objetivo estudar processos de partículas com comprimento variável, mais especificamente: existência de não ergodicidade, transição de fase e formas de aproximações. As aproximações, as quais auxiliarão no tratamento dos processos pertencentes a esta classe, se apresentam neste trabalho de forma determinística ou finita onde esta última é estudada por meio de simulação computacional.

Nós denotaremos \mathbb{R} o conjunto dos números reais, \mathbb{Z} o conjunto dos números inteiros e \mathbb{Z}_+ o conjunto dos números naturais com o zero. Dado um conjunto não vazio \mathcal{A} , nós chamamos a este *alfabeto* e seus elementos são chamados *letras*. Qualquer seqüência finita de letras é chamada *palavra*. O *comprimento* de uma palavra W é definido pelo seu número de letras e denotado por $|W|$. Existe a palavra vazia cujo comprimento é zero. O conjunto de palavras no alfabeto \mathcal{A} é denotado $dict(\mathcal{A})$ e chamado *dicionário*.

Para todo alfabeto \mathcal{A} nós podemos considerar o produto bi-infinito $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \dots \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \dots$ como *espaço de configurações*. Qualquer *configuração* $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é uma seqüência bi-infinita $x = (x_i)$ de *componentes* x_i , $i \in \mathbb{Z}$. Nós chamamos *cilindro fino* qualquer conjunto \mathcal{C} da forma

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : x_i = a_i \text{ para todo } i \in [m, n]\}, \quad (1)$$

onde $a_i \in \mathcal{A}$. Nós consideramos medidas de probabilidade μ em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, isto é, na σ -álgebra gerada pelos cilindros finos. Uma medida em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ será dita *uniforme* se esta é invariante sob todas translações. Para medidas uniformes usaremos a seguinte notação para qualquer palavra $W = (a_1, \dots, a_n)$:

$$\mu(W) = \mu(a_1, \dots, a_n) = \mu(x_{i+1} = a_1, \dots, x_{i+n} = a_n). \quad (2)$$

Desde que μ seja uniforme, a probabilidade (2) não depende de i e nós chamamos isto a *freqüência* da palavra W na medida μ ; por exemplo $\mu(a)$ é a freqüência da letra a na medida μ . Sendo μ uma medida uniforme, os números $\mu(W)$ são não-negativos. Além disso, para qualquer palavra W , μ tem que ser consistente no seguinte sentido:

$$\mu(W) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mu(W, a) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mu(a, W), \quad (3)$$

onde (W, a) e (a, W) são concatenações da palavra W e letra a em duas possíveis ordens. Logo, uma medida uniforme é normada se o seu valor na palavra vazia é 1. Nós denotamos por $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ o conjunto de medidas uniformes em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Por convergência em $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ nós medimos convergência em todas as palavras no alfabeto \mathcal{A} . A medida concentrada em qualquer $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ denominamos uma δ -medida e denotaremos por δ_x . Assim, qualquer medida concentrada em “todos a ” denotamos δ_a .

Um operador D é chamado *operador determinístico* se ele age em configurações: $D : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Consideremos a seguinte classe de operadores determinísticos. Para definir D , tomemos uma lista finita $i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$, a qual chamamos *vetores vizinhos*. Os pontos $i + i_1, i + i_2, \dots, i + i_n$ são chamados *os vizinhos de i* . O nosso D transforma qualquer configuração x em uma configuração Dx , cuja x_i -ésima coordenada é

$$(Dx)_i = f(x_{i+i_1}, x_{i+i_2}, \dots, x_{i+i_n}) \text{ para todo } x_i \in \mathbb{Z},$$

onde $f : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$. Um *operador P* é chamado *probabilístico* se ele age em medidas: $P : \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. A palavra *processo* aqui significa uma seqüência de medidas $\mu, \mu P, \mu P^2, \dots$ sendo μP^n o resultado da n -ésima ação iterativa de um operador P em uma medida inicial μ . Diremos que uma medida μ é *invariante* para P se $\mu P = \mu$ e diremos que P é *ergódico* se $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu P^t$ existe e é o mesmo para toda μ . Caso contrário P é dito *não-ergódico*.

Capítulo 1

Não ergodicidade no caso “problemático” de um processo de partículas

1.1 Descrição do processo e declaração dos teoremas

Este capítulo é uma extensão dos resultados obtidos em [5], mas para termos um texto independente, descreveremos aqui todas as definições necessárias.

Como em [5], nós escrevemos eventos e funções após medidas e operadores entre eles. Por exemplo, μPQ mede a medida obtida da medida μ por aplicação do operador P primeiro e operador Q segundo e $\mu PQ(E)$ mede o valor desta medida no evento E . Um operador P agindo em \mathcal{M}_A é chamado *operador linear* se para qualquer $a, b \in \mathbb{R}$ e qualquer $\mu, \nu \in \mathcal{M}_A$

$$(a \cdot \mu + b \cdot \nu)P = a \cdot (\mu P) + b \cdot (\nu P).$$

Em processos com comprimento fixo, tradicionalmente são considerados operadores lineares. Nós veremos que podem ser não lineares simples operadores de processos com comprimento variável.

A partir de agora começaremos a definir o processo de Toom [5], fazendo em

paralelo as devidas ressalvas para nosso caso de interesse. Nosso principal resultado refere-se ao caso quando o alfabeto \mathcal{A} tem somente dois elementos, os quais denotaremos \ominus e \oplus e chamaremos *menos* e *mais*. Neste caso nosso operador atua em $\mathcal{M}_{\{\ominus, \oplus\}}$, o conjunto das medidas uniformes normadas no espaço de configurações $\{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$. Definimos dois operadores agindo em $\mathcal{M}_{\{\ominus, \oplus\}}$ dependendo dos parâmetros α, β que tomam valores em $[0, 1]$. Chamaremos um operador que elimine ou crie partícula(s), *operador de comprimento variável* e caso contrário chamaremos de *operador de comprimento constante*.

O operador o qual chamamos *flip* e denotamos Flip_β é bem conhecido. Este é de comprimento constante e linear. Sob a ação dele qualquer menos torna-se mais com probabilidade β independentemente das outras componentes. Nós necessitamos representar nossos operadores usando variáveis auxiliares aleatórias independentes. Nós definimos Flip_β , denotando por $x_i \in \{\ominus, \oplus\}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, as coordenadas do espaço $\{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$, onde a medida inicial μ é dada. Também nós usamos variáveis mutuamente independentes F_i para todo $i \in \mathbb{Z}$, cada uma tomando dois valores chamados *muda* e *fica*, distribuídas conjuntamente de acordo a medida produto π , definidas como segue:

$$F_i = \begin{cases} muda & \text{com probabilidade } \beta \\ fica & \text{com probabilidade } 1 - \beta \end{cases}$$

Finalmente, nós temos um terceiro conjunto de variáveis $y_i \in \{\ominus, \oplus\}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, na qual a medida μFlip_β é induzida pela medida produto μ e π com a aplicação

$$y_i = \begin{cases} \ominus & \text{se } x_i = \ominus \text{ e } F_i = \text{fica} \\ \oplus & \text{em todos os outros casos .} \end{cases}$$

O operador *aniquilação*, Ann_α , é de comprimento variável. Definiu-se Ann_α como uma superposição de dois operadores: $\text{Ann}_\alpha = \text{Duel}_\alpha \text{Clean}$, primeiro atua o Duel_α e após Clean . Agora definimos o operador Duel_α , um operador linear

com comprimento constante que transforma qualquer medida em $\{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$, em uma medida em $\{\ominus, \odot, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$, onde \odot é o terceiro estado chamado de *morto*. Estados diferentes de morto, são chamados *vivos*. Nós chamamos $x_i \in \{\ominus, \oplus\}, i \in \mathbb{Z}$ as coordenadas do espaço $\{\ominus, \oplus\}^{\mathbb{Z}}$, onde a medida original μ está definida. Também, nós usamos variáveis A_i mutuamente independentes para todo $i \in \mathbb{Z}$, cada uma tomando dois valores chamados *fogo* e *pare*, distribuída de acordo com uma medida produto π , definida como segue:

$$A_i = \begin{cases} \textit{fogo} & \text{com probabilidade } \alpha, \\ \textit{pare} & \text{com probabilidade } 1 - \alpha \end{cases}$$

para qualquer $i \in \mathbb{Z}$ independentemente de todas as outras componentes e da medida μ . Nós denotamos por $y_i \in \{\ominus, \odot, \oplus\}$ as coordenadas do espaço, onde a medida μ_{Duel_α} é induzida pelo produto de μ e π , com a seguinte aplicação:

$$y_i = \begin{cases} \odot & \text{Se } x_i = \oplus \quad x_{i+1} = \ominus \text{ e } A_{i+1} = \textit{fogo}, \\ \odot & \text{Se } x_{i-1} = \oplus \quad x_i = \ominus \text{ e } A_i = \textit{fogo}, \\ x_i & \text{em todos os outros casos.} \end{cases}$$

Denotamos por $\delta_\ominus, \delta_\oplus$ e δ_\odot as medidas concentradas nas configurações “todos \ominus ”, “todos \oplus ” e “todos \odot ” respectivamente. Nós agora definimos um operador de comprimento variável $\text{Clean} : \mathcal{M}_{\{\ominus, \odot, \oplus\}} \rightarrow \mathcal{M}_{\{\ominus, \oplus\}}$. A única medida uniforme para a qual o operador clean não pode ser aplicado é δ_\odot . Para qualquer $\mu \in \mathcal{M}_{\{\ominus, \odot, \oplus\}} \setminus \{\delta_\odot\}$, nós expressamos diretamente os valores de μ_{Clean} nas palavras do alfabeto $\{\ominus, \oplus\}$ em termos dos valores de μ em todas as palavras do alfabeto $\{\ominus, \odot, \oplus\}$. Por definição, μ_{Clean} na palavra vazia será um. Para qualquer palavra não vazia $W = (a_0, \dots, a_n) \in \text{dict}(\ominus, \oplus)$ nós definimos $\mu_{\text{Clean}}(W)$ como segue:

$$\mu_{\text{Clean}}(a_0, \dots, a_k) = \frac{1}{1 - \mu(\odot)} \sum_{n_1, \dots, n_k=0}^{\infty} \mu(a_0 \odot^{n_1} a_1 \odot^{n_2} a_2 \dots \odot^{n_{k-1}} a_{k-1} \odot^{n_k} a_k), \quad (1.1)$$

onde \odot^n corresponde a palavra consistindo de n letras, com todas estas letras iguais a \odot . Da mesma forma, denotaremos \ominus^n e \oplus^n correspondendo a palavra

com n letras consecutivas de \ominus ou \oplus respectivamente. Então,

$$a_0 \odot^{n_1} a_1 \odot^{n_2} a_2 \dots \odot^{n_{k-1}} a_{k-1} \odot^{n_k} a_k$$

mede a palavra que inicia com a letra a_0 , então vai n_1 letras \odot , então vai para letra a_1 , então n_2 letras \odot , então a_2 , até que tenhamos n_k letras \odot e então finalizamos com a letra a_k e, assumimos que isto é feito sobre todas as n_1, \dots, n_k variando de zero para infinito. Devido a fração, $1/(1 - \mu(\odot))$, note que a fórmula (1.1) não é linear. Assim a bem desenvolvida teoria de operadores lineares não pode ser aplicada aqui, o que aumenta a dificuldade de manusear este processo de comprimento variável.

Você pode imaginar que quando o Duel_α foi aplicado, um duelo ocorreu entre todos os pares de \oplus e \ominus ocupando o i -ésimo e o $(i + 1)$ -ésimo sítios respectivamente (nesta ordem). Se o comando *Fogo!* foi dado, o qual ocorre para todos estes pares independentemente com probabilidade α , os duelistas matam-se um ao outro. Caso contrário o comando *Pare!* foi dado e nada acontece. Quando Clean for aplicado, os corpos dos mortos são limpos e os sítios dos vivos se aproximam.

Em [5] A. Toom denotou, para todo natural t ,

$$\mu_t = \delta_{\ominus}(\text{Flip}_\beta \text{Ann}_\alpha)^t \tag{1.2}$$

e obteve então os seguintes resultados principais para $\alpha \in (0, 1)$:

Teoremas de Toom [5]:

Teorema 1 *Seja $\alpha < 1$. Para todo natural t a frequência de \oplus na medida μ_t não excede $300 \cdot \beta/\alpha^2$.*

Teorema 2 *Seja $\alpha < 1$. Se $2 \cdot \beta > \alpha$, a medida μ_t tende para δ_{\oplus} quando $t \rightarrow \infty$.*

Como δ_{\oplus} é medida invariante de nosso processo, os teoremas 1 e 2 mostram que a seqüência μ_t tem pelo menos dois comportamentos distintos quando $t \rightarrow \infty$. Se $\beta > \alpha/2$ teremos $\mu_t \rightarrow \delta_{\oplus}$, por outro lado, se $\beta < \alpha^2/300$ teremos que μ_t não tende para δ_{\oplus} .

Teorema 3 *Seja $\alpha < 1$. Tome qualquer $\mu \in \mathcal{M}_{\{\oplus, \ominus\}}$ e suponha que $\beta > 0$ e $(1 - \beta) \cdot \mu(\ominus) \leq 1/2$. Então a medida $\mu(\text{Flip}_{\beta} \text{Ann}_{\alpha})^t$ tende para δ_{\oplus} quando $t \rightarrow \infty$.*

O teorema 3 mostra que, tão logo a freqüência de mais excede a freqüência de menos, a medida $\mu(\text{Flip}_{\beta} \text{Ann}_{\alpha})^t$ tende para δ_{\oplus} quando $t \rightarrow \infty$. Isto imediatamente implica o teorema 4.

Teorema 4 *Sejam $\alpha < 1$ e $s(\alpha, \beta)$ o supremo da freqüência de mais na medida μ_t para todo t natural. Então, $s(\alpha, \beta)$ não é contínuo como uma função de β .*

O teorema 4 mostra que este processo apresenta um tipo de comportamento similar a uma transição física de primeira ordem. Uma ilustração destes resultados obtidos por Toom, sobre o comportamento de μ_t quando t tende para ∞ , junto com os nossos resultados para este processo quando $\alpha = 1$, é mostrada na figura 1.1. Na mesma figura, também exibimos a região (em cor cinza) onde não possuímos nenhum resultado.

Como já havíamos dito, o caso $\alpha = 1$ não foi considerado por Toom [5]. Fato este decorrente da seguinte dificuldade: Sejam $\delta_{\ominus, \oplus}$ e $\delta_{\oplus, \ominus}$ as medidas

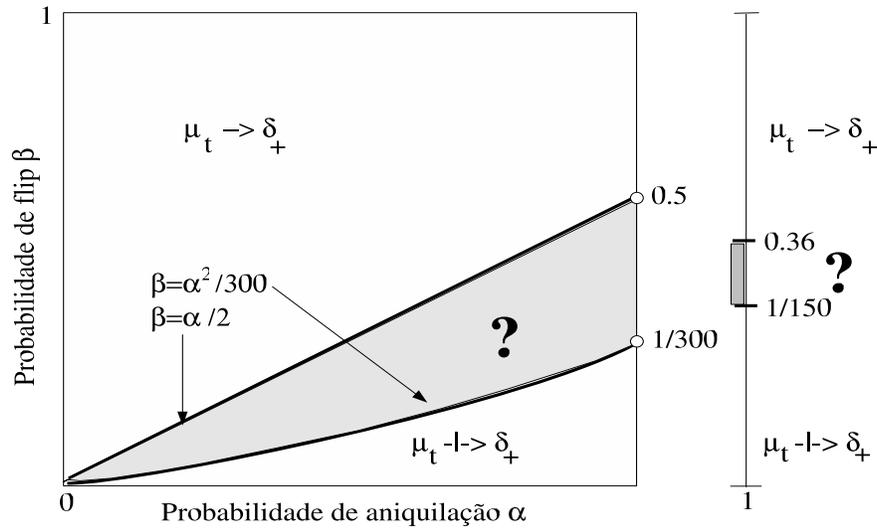


Figura 1.1: Resultados obtidos por Toom nesse processo, quando $\alpha \in (0,1)$ e no lado direito exibimos nossas estimativas que obtivemos quando $\alpha = 1$. A região mostrada em cinza é a região para a qual não temos qualquer resultado.

concentradas nas configurações $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$, com $i \in \mathbb{Z}$, onde cada componente de x e y é descrita como

$$x_i = \begin{cases} \oplus & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \ominus & \text{se } i \text{ é par} \end{cases} \quad \text{e} \quad y_i = \begin{cases} \oplus & \text{se } i \text{ é par} \\ \ominus & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Logo, a configuração x pode ser obtida da configuração y deslocando-se uma unidade, para a esquerda ou direita, isto é, $x_i = y_{i\pm 1}$. Se na evolução do processo $\mu_t = \delta_{\ominus}(\text{Flip}_{\beta}\text{Ann}_1)^t$, após a ação do operador Flip_{β} , obtivermos a medida uniforme

$$\delta_{x_{\text{adrez}}} = \frac{\delta_{\ominus, \oplus} + \delta_{\oplus, \ominus}}{2}, \tag{1.3}$$

não poderemos aplicar o Ann_1 , pois o operador Duel_1 torna esta medida em δ_{\odot} , a qual o operador Clean não pode ser aplicado. De modo informal, a “configuração desapareceria”. Neste estudo, nós provaremos que isto nunca acontece.

Teoremas desta Tese:

Teorema 5 *Seja $\alpha = 1$. Para cada $t \in \{1, 2, \dots\}$ a medida $\mu_t = \delta_{\ominus} \text{Flip}_{\beta} \text{Ann}_1$ existe. Pois $\delta_{x_{\text{adrez}}}$ definido em (1.3), não surge em nosso processo.*

Após provado o teorema 5, iremos na direção da prova dos teoremas 6, 7, 8 e 9, os quais são similares aos teoremas 1, 2, 3 e 4, mas para o caso onde $\alpha = 1$ e apresenta melhores estimativas numéricas.

Teorema 6 *Seja $\alpha = 1$. Se $\beta \geq 0.36$, a medida μ_t tende para δ_{\oplus} quando $t \rightarrow \infty$.*

Teorema 7 *Seja $\alpha = 1$. Para todo t , a freqüência de \oplus na medida μ_t não excede $150 \cdot \beta$.*

Teorema 8 *Seja $\alpha = 1$. Seja $\mu \in \mathcal{M}_{\{\ominus, \oplus\}}$, suponha que $\beta > 0, \mu \text{Flip}_{\beta} \neq \delta_{x_{\text{adrez}}}$ e $(1 - \beta) \cdot \mu(\ominus) \leq 1/2$. Então a medida $\mu(\text{Flip}_{\beta} \text{Ann}_{\alpha})^t$ tende para δ_{\oplus} quando $t \rightarrow \infty$.*

Teorema 9 *Seja $\alpha = 1$. Denotamos por $s(\beta)$ o supremo da freqüência de \oplus na medida μ_t , para todo t natural. Então $s(\beta)$ não é contínua como função de β .*

Toom em [5] mostrou o teorema 1 como parte principal de seu trabalho. Contudo, identificamos um erro nesta prova, o qual ao ser corrigido nos possibilitou reescrever este teorema da seguinte forma:

Teorema 10 *Se $0 < \alpha < 1$, para todo t natural, a freqüência de \oplus na medida μ_t não excede $250 \cdot \beta / \alpha^2$.*

1.2 Prova de que o processo $\delta_{\ominus}\text{Flip}_{\beta}\text{Ann}_1$ está definido no caso $\alpha = 1$

Seja $\alpha = 1$. A partir daqui, nós vamos na direção da prova de que o processo $\delta_{\ominus}(\text{Flip}_{\beta}\text{Ann}_1)^t$ está definido. Os casos onde $\beta = 0$ ou 1 são triviais, por isso não serão considerados. Denotaremos $\mathcal{M}_{\{\oplus, \ominus\}}$ simplesmente por \mathcal{M} .

Lema 1 *Para cada medida $\mu \in \mathcal{M}$,*

$$i) \mu(\oplus, \ominus) = \mu(\ominus, \oplus) \leq 1/2.$$

$$ii) \mu(\oplus, \ominus) = 1/2 \text{ se e somente se } \mu = \delta_{x_{\text{adrez}}}$$

Prova. Primeiro mostraremos o item *i*). Sabemos que,

$$\mu(\oplus) = \mu(\oplus, \ominus) + \mu(\oplus, \oplus) = \mu(\ominus, \oplus) + \mu(\oplus, \oplus).$$

Logo, $\mu(\ominus, \oplus) = \mu(\oplus, \ominus)$ e, usando o fato de que $\mu(\ominus, \oplus) + \mu(\oplus, \ominus) \leq 1$, provamos o item *i*) do lema.

Vamos agora mostrar o item *ii*). Num sentido é evidente: Se $\mu = \delta_{x_{\text{adrez}}}$ definido em (1.3), então

$$\mu(\oplus, \ominus) = \frac{\delta_{\oplus, \ominus}(\oplus, \ominus) + \delta_{\ominus, \oplus}(\oplus, \ominus)}{2} = 1/2. \quad (1.4)$$

Seja

$$\mu(\oplus, \ominus) = 1/2. \quad (1.5)$$

Agora, mostraremos que, se a expressão (1.5) vale, então $\mu = \delta_{x_{adrez}}$. Devemos provar que $\mu(\omega) = \delta_{x_{adrez}}(\omega)$ para toda palavra ω . Sabemos que

$$\begin{aligned}\mu(\ominus) &= \mu(\oplus, \ominus) + \mu(\ominus, \ominus) \\ \mu(\oplus) &= \mu(\ominus, \oplus) + \mu(\oplus, \oplus).\end{aligned}\tag{1.6}$$

Substituindo (1.5) na soma das expressões em (1.6) obtemos,

$$\mu(\oplus) + \mu(\ominus) = 1 + \mu(\oplus, \oplus) + \mu(\ominus, \ominus).$$

Mas, como $\mu(\oplus) + \mu(\ominus) = 1$, temos $\mu(\oplus, \oplus) = \mu(\ominus, \ominus) = 0$. Logo, $\mu(\omega) = 0$ para cada ω que possui pelo menos duas letras consecutivas iguais. Retornando a (1.6), obtemos que $\mu(\oplus) = \mu(\ominus) = 1/2$.

Definimos um conjunto de palavras $dict'(\mathcal{A}) \subset dict(\mathcal{A})$ assim: $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)$ pertence a $dict'(\mathcal{A})$ se e somente se $\omega_i \neq \omega_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, k$. Vamos mostrar que $\mu(\omega) = \delta_{x_{adrez}}(\omega)$ para todo $\omega \in dict'(\mathcal{A})$. Usando que $\mu(\bar{\omega}) = 0$ quando $\bar{\omega} \notin dict'(\mathcal{A})$, obtemos

$$\begin{aligned}\mu(\oplus, \ominus) &= \mu(\oplus, \oplus, \ominus) + \mu(\ominus, \oplus, \ominus) &&= \mu(\ominus, \oplus, \ominus) \\ \mu(\ominus, \oplus, \ominus) &= \mu(\ominus, \ominus, \oplus, \ominus) + \mu(\oplus, \ominus, \oplus, \ominus) &&= \mu(\oplus, \ominus, \oplus, \ominus) \\ \mu(\oplus, \ominus, \oplus, \ominus) &= \mu(\oplus, \oplus, \ominus, \oplus, \ominus) + \mu(\ominus, \oplus, \ominus, \oplus, \ominus) &&= \mu(\ominus, \oplus, \ominus, \oplus, \ominus) \\ &\vdots \\ \mu(v) &= \mu(\bar{\omega}) + \mu(\omega) &&= \mu(\omega).\end{aligned}$$

onde $v \in dict'(\mathcal{A})$, $\bar{\omega} \notin dict'(\mathcal{A})$ e $|\bar{\omega}| = |w| = |v| + 1$ (onde $|v|$ é o comprimento de v). Logo,

$$\mu(\oplus, \ominus) = \mu(\omega).$$

De (1.5) temos $\mu(\omega) = 1/2$ para toda $\omega \in dict'(\mathcal{A})$. Além disso, $\mu(\oplus) = \mu(\ominus) = 1/2$ e $\mu(\omega) = 0$ se $\omega \notin dict'(\mathcal{A})$. Logo, $\mu(\omega) = \delta_{x_{adrez}}(\omega)$ para toda palavra $\omega \in dict'(\mathcal{A})$. Então $\mu = \delta_{x_{adrez}}$. O lema 1 está provado.

Lema 2 Para $\mu \in \mathcal{M}$ e todos $k \geq 2$, se $\mu(\ominus^k) > 0$ e $0 < \beta < 1$ então valem:

i) Se $0 < l < k$, $\mu(\ominus^l) > 0$.

ii) $\mu(\oplus, \ominus) < 1/2$.

iii) Se $0 < l \leq k$, $\mu\text{Flip}_\beta(\ominus^l) > 0$.

Prova. Primeiro provaremos o item i). Usando a consistência da medida em (3), temos

$$\begin{aligned} \mu(\ominus) &= \mu(\oplus, \ominus) + \mu(\ominus^2) && \geq \mu(\ominus^2) \\ \mu(\ominus^2) &= \mu(\oplus, \ominus^2) + \mu(\ominus^3) && \geq \mu(\ominus^3) \\ &\vdots \\ \mu(\ominus^{k-1}) &= \mu(\oplus, \ominus^{k-1}) + \mu(\ominus^k) && \geq \mu(\ominus^k) > 0. \end{aligned}$$

Logo, o item i) do lema está provado. Provaremos agora o item ii). Lembremos que $\delta_{xadrez} = \frac{\delta_{\oplus, \ominus} + \delta_{\ominus, \oplus}}{2}$. Se $\mu = \delta_{xadrez}$ e $k \geq 2$

$$\mu(\ominus^k) = \delta_{xadrez}(\ominus^k) = 0,$$

o que contradiz a hipótese de $\mu(\ominus^k) > 0$. Logo $\mu \neq \delta_{xadrez}$. Assim, usando o item ii) do lema 1, concluímos que $\mu(\oplus, \ominus) < 1/2$. O item está provado.

Agora partiremos para a demonstração do item iii). Pelo item i) $\mu(\ominus) > 0$ e, usando o fato que $0 < \beta < 1$, temos

$$\mu\text{Flip}_\beta(\ominus^l) = (1 - \beta)^l \mu(\ominus^l) > 0.$$

O lema 2 está provado.

Os lemas 3 e 4 serão provados para $\alpha \in (0, 1]$.

Lema 3 Para cada $\mu \in \mathcal{M}$ temos $\mu\text{Duel}_\alpha(\ominus^{k-1}) \geq \mu(\ominus^k)$.

Prova. Após a ação do operador Duel_α , apenas a primeira componente do lado esquerdo da palavra \ominus^k poderia transforma-se em \odot . O lema 3 está provado.

O item *ii*) do lema 1, mostra que $\mu(\ominus, \oplus) = 1/2$ se e só se μ é igual a medida $\delta_{x_{adrez}}$ definida em (1.3). Logo, para o caso em que $\mu \neq \delta_{x_{adrez}}$ e da definição de Duel_α

$$\mu\text{Duel}_\alpha(\odot) = 2\alpha \cdot \mu(\ominus, \oplus) < 1.$$

Lema 4 Para $\mu \in \mathcal{M}$ e $k \geq 3$, se $\mu(\ominus^k) > 0$, então a medida $\mu\text{Flip}_\beta\text{Ann}_\alpha$ existe e $\mu\text{Flip}_\beta\text{Ann}_\alpha(\ominus^{k-1}) > 0$.

Prova. Seja $\mu(\ominus^k) > 0$. Pelo item *iii*) do lema 2, $\mu\text{Flip}_\beta(\ominus^{k-1}) > 0$. Usando o item *ii*) do lema 2, $\mu\text{Flip}_\beta(\oplus, \ominus) < 1/2$, logo $2\alpha \cdot \mu\text{Flip}_\beta(\oplus, \ominus) < \alpha$. Conseqüentemente pela definição de Clean e $\mu\text{Duel}_\alpha(\odot)$, a medida $\mu\text{Flip}_\beta\text{Ann}_\alpha(\ominus^{k-1})$ existe para todo α . Agora vamos mostrar que $\mu\text{Flip}_\beta\text{Ann}_\alpha(\ominus^{k-1}) > 0$.

Como $\mu(\ominus^k) > 0$ temos que, $\mu\text{Flip}_\beta(\ominus^k) > 0$. Usando que

$$\mu\text{Clean}(\ominus^k) \geq \mu(\ominus^k)$$

e o lema 3, obtemos da definição de Ann_α ,

$$\mu\text{Flip}_\beta\text{Duel}_\alpha\text{Clean}(\ominus^{k-1}) \geq \mu\text{Flip}_\beta\text{Duel}_\alpha(\ominus^{k-1}) \geq \mu\text{Flip}_\beta(\ominus^k) > 0.$$

Assim, o lema 4 está provado.

Prova do Teorema 5. A idéia utilizada nesta prova é ilustrada na figura 1.2. Lembremos que $\mu_t = \delta_\ominus(\text{Flip}_\beta\text{Ann}_1)^t$. É claro que, $\delta_\ominus(\ominus^{t+2}) = 1$ para cada t . Logo, pelo lema 4, μ_1 existe e $\mu_1(\ominus^{t+1}) > 0$. Da mesma maneira, μ_2 existe e $\mu_2(\ominus^t) > 0$. Continuando argumentando dessa forma, obtemos que, μ_t existe e $\mu_t(\ominus^2) > 0$. *Assim, o teorema 5 está provado.*

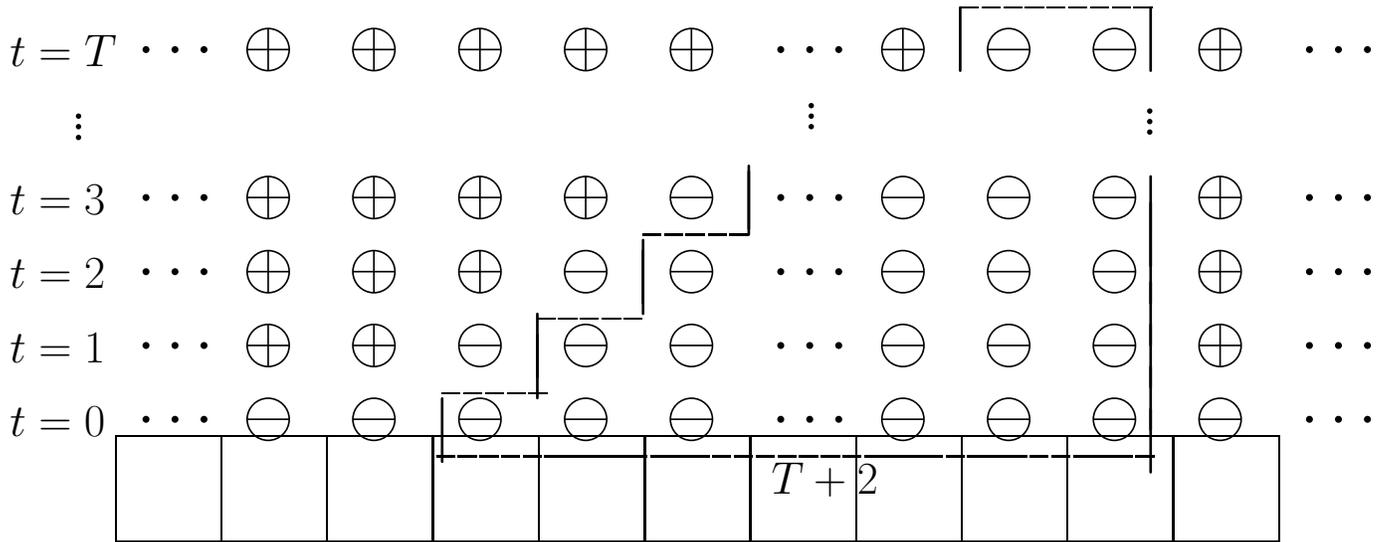


Figura 1.2: Idéia utilizada na demonstração que a medida $\mu_t = \delta_{\ominus}(\text{Flip}_{\beta} \text{Ann}_1)^t$ é definida para cada tempo t .

1.3 Prova dos teoremas 6, 8 e 9

Mostramos na seção 1.2 que o processo μ_t está definido para $\alpha = 1$. Vamos provar a existência dos comportamentos ergódico vs. não ergódico.

Lema 5 Para todo $\mu \neq \delta_{x_{\text{adrez}}}$, se $\mu(\ominus) \leq 1/2$, então $\mu \text{Ann}_1(\ominus) \leq \mu(\ominus)$.

Prova. Da definição de $\text{Duel}_1(\ominus)$

$$\mu \text{Duel}_1(\ominus) = \mu(\ominus) - \mu(\ominus, \oplus).$$

Da definição de Clean

$$\mu \text{Ann}_1(\ominus) = \frac{\mu(\ominus) - \mu(\oplus, \ominus)}{1 - 2 \cdot \mu(\ominus, \oplus)}. \quad (1.7)$$

Pelo lema 2 item *ii*), $2 \cdot \mu(\ominus, \oplus) < 1$. Logo, $1 - 2 \cdot \mu(\ominus, \oplus) > 0$. Assim, o denominador da expressão (1.7) é positivo. Assumindo que $\mu(\ominus) \leq 1/2$,

$$\begin{aligned} \mu(\ominus) - \mu_{\text{Ann}_1}(\ominus) &= \mu(\ominus) - \frac{\mu(\ominus) - \mu(\ominus, \oplus)}{1 - 2\mu(\ominus, \oplus)} \\ &= \frac{-2\mu(\ominus)\mu(\ominus, \oplus) + \mu(\ominus, \oplus)}{1 - 2\mu(\ominus, \oplus)} \\ &= \frac{\mu(\ominus, \oplus)(1 - 2\mu(\ominus))}{1 - 2\mu(\ominus, \oplus)} \geq 0 \end{aligned}$$

O lema 5 está provado.

A seguir mostraremos que sempre que $\beta \geq 0.36$ teremos

$$\mu_1 \text{Flip}_\beta(\ominus) < 1/2.$$

É fácil calcular que

$$\delta_\ominus(\text{Flip}_\beta \text{Ann}_1)(\ominus) = \frac{\delta_\ominus \text{Flip}_\beta(\ominus) - \delta_\ominus \text{Flip}_\beta(\ominus, \oplus)}{1 - 2 \cdot \delta_\ominus \text{Flip}_\beta(\ominus, \oplus)} = \frac{(1 - \beta)^2}{(1 - \beta)^2 + \beta^2}. \quad (1.8)$$

Assim,

$$\delta_\ominus(\text{Flip}_\beta \text{Ann}_1) \text{Flip}_\beta(\ominus) = \delta_\ominus(\text{Flip}_\beta \text{Ann}_1)(\ominus)(1 - \beta) = \frac{(1 - \beta)^3}{(1 - \beta)^2 + \beta^2}. \quad (1.9)$$

(1.9) é menor que 1/2 se

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \beta)^3}{(1 - \beta)^2 + \beta^2} &< \frac{1}{2} \\ 2(1 - \beta)^3 &< (1 - \beta)^2 + \beta^2 \\ 2 - 6\beta + 6\beta^2 - 2\beta^3 &< 1 - 2\beta + 2\beta^2 \\ 2\beta^3 - 4\beta^2 + 4\beta - 1 &> 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

A função $f(\beta) = 2\beta^3 - 4\beta^2 + 4\beta - 1$ é crescente, pois sua derivada,

$$\frac{df(\beta)}{d\beta} = 6\beta^2 - 8\beta + 4,$$

é sempre positiva. É fácil ver que $f(0.36) > 0$. Logo,

$$\forall \beta \geq 0.36 \quad \mu_1 \text{Flip}_\beta(\ominus) < 1/2. \quad (1.11)$$

Prova do teorema 6. Usando (1.11), temos $\mu_1\text{Flip}_\beta(\Theta) < 1/2$. Logo, devido ao lema 5

$$\mu_2(\Theta) \leq \mu_1\text{Flip}_\beta(\Theta). \quad (1.12)$$

Provaremos indutivamente que

$$\forall t \geq 2 \quad \mu_t(\Theta) \leq \frac{(1 - \beta)^{t-2}}{2}. \quad (1.13)$$

Base de indução. Para $t = 2$ recaímos no caso descrito em (1.12). Daí,

$$\mu_2(\Theta) \leq \mu_1\text{Flip}_\beta(\Theta) \leq 1/2.$$

Passo de indução. Hipótese de indução: $\mu_{t-1}(\Theta) \leq (1 - \beta)^{t-3}/2$.

Decorrente do lema 5

$$\begin{aligned} \mu_t(\Theta) &\leq \mu_{t-1}\text{Flip}_\beta(\Theta) \\ &= (1 - \beta)\mu_{t-1}(\Theta) \\ &\leq \frac{(1 - \beta)^{t-2}}{2}. \end{aligned}$$

Logo (1.13) está provado para todo $t \geq 2$. Logo, $\mu_t(\Theta)$ tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. O teorema 6 está provado.

Assim como no artigo [5], a prova do nosso teorema 7 será a parte principal deste capítulo da nossa tese.

Prova do teorema 8. Seja $\mu(\Theta)$ tal que $(1 - \beta)\mu(\Theta) \leq 1/2$. Sabemos que $\mu\text{Flip}_\beta(\Theta) = (1 - \beta)\mu(\Theta)$. Logo, $\mu\text{Flip}_\beta(\Theta) \leq 1/2$ e usando o lema 5, temos a seguinte **base de indução**.

$$\mu_1(\Theta) = \mu(\text{Flip}_\beta\text{Ann}_1)(\Theta) \leq 1/2.$$

A hipótese de indução:

$$\mu_{t-1}(\Theta) \leq (1 - \beta)^{t-2}/2.$$

Passo de indução: Da hipótese de indução provaremos que

$$\mu_t(\ominus) \leq (1 - \beta)^{t-1}/2.$$

Usando o lema 5 obtemos

$$\mu_{t-1}(\ominus) \geq \mu_{t-1}\text{Flip}_\beta(\ominus) \geq \mu_{t-1}(\text{Flip}_\beta\text{Ann}_1)(\ominus). \quad (1.14)$$

Assim da hipótese de indução e da desigualdade em (1.14)

$$\mu_t(\ominus) \leq \frac{(1 - \beta)^{t-1}}{2} \quad \forall t \geq 0.$$

Logo, $\mu_t(\ominus) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. *O teorema 8 está provado.*

Prova do teorema 9. Supomos o teorema 7 provado. Note que $s(\beta)$ não pode tomar valores entre $(1/2, 1)$, por que se isto acontece, então existe t tal que $\mu_t(\oplus) > 1/2$. Mas então, devido ao teorema 8, $\mu_t(\oplus)$ tenderia para 1 quando t tende ao infinito, daí $s(\beta) = 1$. Deste modo $s(\beta) = 1$ se $\beta > 0.36$ devido ao teorema 6, tende a zero quando $\beta \rightarrow 0$ devido ao teorema 7 e não pode tomar valores em $(1/2, 1)$ devido ao teorema 8, então $s(\beta)$ não pode ser contínua. *O teorema 9 está provado*

A partir deste momento iremos na direção da prova do teorema 7. Logo, passamos a considerar $\beta < 1/150$. Para conveniência do leitor, nós faremos esta prova completa ainda que algumas partes sejam parecidas com as do artigo [5]. A partir deste ponto, os trechos que foram traduzidos de [5] estão em letras com tamanho menor.

1.4 Processo ν

A prova do teorema 7 é baseada nas idéias do método de contorno de Peierls e dualidade de grafo planar. Nós introduzimos o processo ν , o qual difere de nosso

processo original no seguinte sentido. Não é necessário retirar as partículas mortas em todo passo de tempo. Nós podemos deixá-las elas onde estão, mas neste caso nós temos que sacrificar a localidade, ou seja, nós devemos organizar interações das partículas vivas como se as partículas mortas tivessem sido removidas.

Nós denotamos por $x \in \mathbb{Z}$ o espaço de ordenada. Nós também usamos um parâmetro natural y como o espaço de abscissa, o qual é igual a zero no princípio e aumenta por um após a aplicação de Flip_β ou Ann_1 . Assim, y aumenta por dois quando t na fórmula (1.2) aumentar por um. Portanto, denotamos por $F(x, y)$ e chamamos *variável básica*, a qual participa na $(t + 1)$ -ésima aplicação de Flip_β . Assim, nosso espaço básico é

$$\Omega = \{muda, fica\}^{\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}_+}$$

com coordenada

$$F(x, t), \quad \text{onde } x \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{Z}_+$$

e com uma medida produto π , sendo para todo x, t

$$F(x, t) = \begin{cases} muda & \text{com probabilidade } \beta, \\ fica & \text{com probabilidade } 1 - \beta, \end{cases} \quad (1.15)$$

Nós denotamos

$$V = \{(x, y), x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Os conjuntos de pares $(x, y) \in V$ com um dado y são chamados *y-níveis* ou simplesmente níveis. Todo par $(x, y) \in V$ tem um estado denotado por *estado*(x, y), o qual é igual a \ominus, \oplus ou \odot e todos os seus estados são funções de $\omega \in \Omega$ definido na seguinte forma indutiva.

Base de indução. *estado*($x, 0$) = \ominus para todo $x \in \mathbb{Z}$.

Passo de indução quando y é par. Tomamos $y = 2t$, onde $t \in \mathbb{Z}_+$ (imitando a ação de Flip_β). Para todo $x \in \mathbb{Z}$:

$$\text{estado}(x, 2t + 1) =$$

$$\begin{cases} \oplus & \text{Se } \text{estado}(x, 2t) = \ominus \text{ e } F(x, t) = \text{muda}, \\ \text{estado}(x, 2t) & \text{em todos os outros casos.} \end{cases}$$

Passo de indução quando y é impar. Dizemos que $y = 2t + 1$, onde $t \in \mathbb{Z}_+$ (imitando a ação de Ann_1 , mas sem localidade). Para todo $x \in \mathbb{Z}$:

$$\text{estado}(x, 2t + 2) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \odot \quad \text{Se } \text{estado}(x, 2t + 1) = \ominus \\ \quad \text{e existe } x' < x \text{ tal que } \text{estado}(x', 2t + 1) = \oplus \\ \quad \text{e para } x'' \in \mathbb{Z} : x' < x'' < x \Rightarrow \text{estado}(x'', 2t + 1) = \odot \\ \\ \odot \quad \text{Se } \text{estado}(x, 2t + 1) = \oplus \\ \quad \text{e existe } x' > x \text{ tal que } \text{estado}(x', 2t + 1) = \ominus \\ \quad \text{e para todo } x'' \in \mathbb{Z} : x < x'' < x' \Rightarrow \text{estado}(x'', 2t + 1) = \odot; \\ \\ \text{estado}(x, 2t + 1) \text{ em todos os outros casos.} \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Informalmente falando, neste processo nossas partículas nunca desaparecem e mantêm os mesmos índices inteiros que elas tinham no princípio. Se uma partícula é aniquilada, esta vai para o estado morto \odot e permanece neste estado para sempre. Partículas vivas interagem como se as componentes mortas não existissem. Assim, nós temos definido indutivamente uma aplicação de Ω para $\{\odot, \oplus, \ominus\}^V$. Nós denotamos por ν a medida em $\{\odot, \oplus, \ominus\}^V$ induzida pela distribuição π da variável básica (1.15) com esta aplicação e ν_y a distribuição de estados no y -ésimo nível.

Definiremos dois operadores, os quais utilizaremos juntamente com suas propriedades. O operador *flip linha*,

$$\text{Flip}'_\beta : \mathcal{M}_{\{\oplus, \ominus, \odot\}} \rightarrow \mathcal{M}_{\{\oplus, \ominus, \odot\}},$$

é de comprimento constante. Sob a ação deste, qualquer menos transforma-se em mais com probabilidade β independentemente das outras componentes.

Agora definimos o operador *duelo linha* e denotamos por Duel'_1 . Este também é de comprimento constante. Quando este atua, toda vez que uma palavra $(\oplus, \odot^n, \ominus)$ ocorre na configuração, esta transforma-se na palavra \odot^{n+2} com probabilidade 1 independente das outras ocorrências.

O processo ν pode ser representado como resultado da aplicação dos operadores Flip'_β e Duel'_1 . Logo, para todo y par

$$\nu_y \text{Flip}'_\beta \text{Duel}'_1 = \nu_{y+2}. \quad (1.17)$$

Observamos para todo t que

$$\text{Clean Flip}_\beta = \text{Flip}'_\beta \text{Clean}, \quad (1.18)$$

$$\text{Clean Duel}_1 \text{Clean} = \text{Duel}'_1 \text{Clean}. \quad (1.19)$$

Lema 6 a) $\nu_{2t} \text{Clean} = \mu_t$ para todo t .

b) $\nu_y(\ominus) > 0$ para todo y .

c) $\mu_t(\ominus) > 0$ para todo t .

d) Para todo $x_0 \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}_+$

$$\nu(\forall x \geq x_0 : \text{estado}(x, y) \neq \ominus) = \nu(\forall x \leq x_0 : \text{estado}(x, y) \neq \ominus) = 0.$$

e) Para todo $x_0 \in \mathbb{Z}$ e $t \in \mathbb{Z}_+$

$$\mu_t(\forall x \geq x_0 : s_x \neq \ominus) = \mu_t(\forall x \leq x_0 : s_x \neq \ominus) = 0,$$

onde $s_x \in \{\oplus, \ominus\}$ é componente de $s \in \Omega$, com coordenada x .

Prova do lema 6. Provaremos a) pela indução em t .

Base de indução. Para $t = 0$, temos $\nu_0 = \delta_\ominus = \mu_0$. Então,

$$\nu_0 \text{Clean} = \mu_0.$$

Passo de indução. Hipótese de indução:

$$\nu_{2t-2} \text{Clean} = \mu_{t-1}.$$

Logo, por (1.18), (1.19) e (1.17) temos as seguintes igualdades:

$$\nu_{2t-2} \text{CleanFlip}_\beta = \mu_{t-1} \text{Flip}_\beta$$

$$\nu_{2t-2} \text{Flip}'_\beta \text{Clean} = \mu_{t-1} \text{Flip}_\beta$$

$$\nu_{2t-2} \text{Flip}'_\beta \text{CleanDuel}_1 \text{Clean} = \mu_{t-1} \text{Flip}_\beta \text{Duel}_1 \text{Clean}$$

$$\nu_{2t-2} \text{Flip}'_\beta \text{Duel}'_1 \text{Clean} = \mu_{t-1} \text{Flip}_\beta \text{Duel}_1 \text{Clean}$$

$$\nu_{2t} \text{Clean} = \mu_t.$$

O item a) está provado.

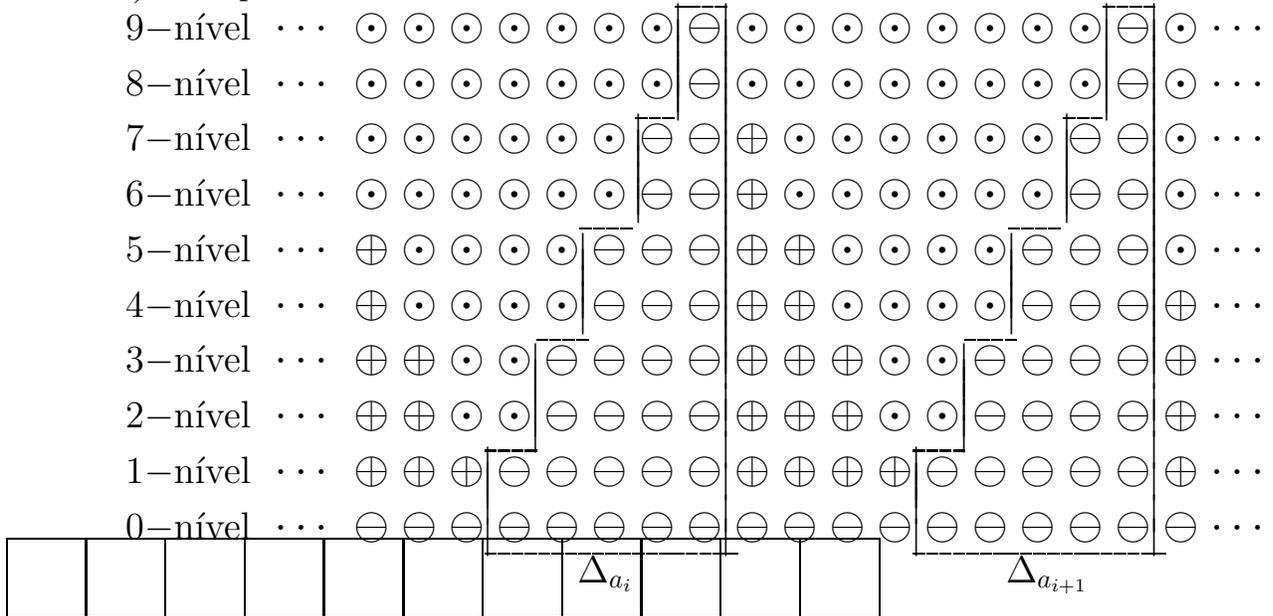


Figura 1.3: Considerando o processo ν e $y = 9$.

Prova do item b). A demonstração é ilustrada na figura 1.3. Definimos $[x]$ a parte inteira de x . Sejam $a, y \in \mathbb{Z}_+$ e $k = 0, \dots, y$. Seja $x \in [a - g + h_k, a]$

onde

$$g = \left\lceil \frac{y}{2} \right\rceil + 1 \quad \text{e} \quad h_k = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1.$$

Chamamos *pirâmide* e denotamos por

$$\Delta_a = \{(x, k) : a - g + h_k \leq x \leq a, 0 \leq k \leq y\}.$$

Para todos pares $(x, k) \in \Delta_a$ suponha que $F(x, k) = \text{fica}$. O que ocorre com probabilidade positiva. Assim, para cada y existe com probabilidade positiva uma pirâmide onde o $\text{estado}(x, k) = \ominus$ para todo $(x, k) \in \Delta_a$. O item b) está provado.

O item c) é uma conseqüência direta dos itens a) e b).

Provaremos o item d). Usando a figura 1.3. Seja Δ_a a pirâmide definida no item b). Dado y , consideremos uma seqüência destas pirâmides onde duas pirâmides consecutivas Δ_{a_i} e $\Delta_{a_{i+1}}$ são tais que $a_{i+1} - a_i = 2 \cdot g - 1$. Assim, o que ocorre em Δ_{a_i} não depende do que ocorre em $\Delta_{a_{i+1}}$. Seja

$$E_i = \{(x, y) \in \Delta_{a_i} : \text{estado}(x, y) \neq \ominus\}.$$

Usando o item b) temos

$$\nu(E_i) < 1.$$

Logo,

$$\nu(x_o \leq x : \text{estado}(x, y) \neq \ominus) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\bigcap_{i=0}^n E_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n \nu(E_i) = 0.$$

De maneira análoga podemos provar que

$$\nu(x_o \geq x : \text{estado}(x, y) \neq \ominus) = 0.$$

O item d) está provado.

O item e) é uma consequência direta dos itens a) e d). *O lema 6 está provado.*

Fixamos um número natural T . Nossa meta geral é estimar $\mu_T(\oplus)$ uniformemente em T . Devido ao item c) do lema 6, $\mu_T(\ominus)$ é positivo, então a fração $\mu_T(\oplus)/\mu_T(\ominus)$ faz sentido e isto é suficiente para estimar esta fração. Para reduzir nossa tarefa nos favorece provarmos que

$$\mu_T(\oplus) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_T(\ominus, \oplus^k). \quad (1.20)$$

Para provar esta fórmula, nós consideramos o evento da presença de um mais em um determinado sítio e cortamos este em pedaços de acordo com o número de mais no lado esquerdo deste sítio. De acordo com o item e) do lema 6 este número é finito logo (1.20) é possível. Então de (1.20)

$$\mu_T(\oplus) \leq \frac{\mu_T(\oplus)}{\mu_T(\ominus)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_T(\ominus, \oplus^k)}{\mu_T(\ominus)} \quad (1.21)$$

Para reduzir nossa tarefa, nós concentraremos nossa atenção em Ω_0 , o conjunto daqueles $\omega \in \Omega$, para os quais $estado(0, 2T) = \ominus$. Para qualquer $\omega \in \Omega_0$ nós denotamos por $x_{max}(\omega)$ o menor positivo x tal que $estado(x, 2T) = \ominus$. Devido ao item d) do lema 6, $x_{max}(\omega)$ existe quase certamente. Nós chamamos *flores* todos os pares $(x, 2T)$, onde $0 < x < x_{max}(\omega)$, para o qual $estado(x, 2T) = \oplus$. Nós denotamos por $\phi(\omega)$ o número de flores. Desde que $x_{max}(\omega)$ existe, $\phi(\omega)$ é finito. Para qualquer $k = 1, 2, 3, \dots$ nós denotamos por Ω_k o conjunto daquele $\omega \in \Omega_0$ para o qual $\phi(\omega) \geq k$. Note que $\Omega_0 \supseteq \Omega_1 \supseteq \Omega_2 \supseteq \dots$. Nós provaremos para todo k que

$$\frac{\pi(\Omega_k)}{\pi(\Omega_0)} = \frac{\mu_T(\ominus, \oplus^k)}{\mu_T(\ominus)}. \quad (1.22)$$

Note que $\pi(\Omega_0) = \nu_{2T}(\ominus)$. Mas, do item a) do lema 6

$$\mu_T(\ominus) = \nu_{2T} \text{Clean}(\ominus) = \frac{\nu_{2T}(\ominus)}{1 - \nu_{2T}(\odot)}$$

tem-se

$$\pi(\Omega_0) = \nu_{2T}(\ominus) = \mu_T(\ominus)(1 - \nu_{2T}(\odot)). \quad (1.23)$$

Por outro lado, Ω_k é o conjunto daquele $\omega \in \Omega_0$, para o qual a configuração no nível $2T$ contém um das palavras

$$\ominus \odot^{n_1} \oplus \odot^{n_2} \dots \oplus \odot^{n_{k-1}} \oplus \odot^{n_k} \oplus$$

iniciando na 0-ésima componente. Portanto

$$\pi(\Omega_k) = \sum_{n_1, \dots, n_k=0}^{\infty} \nu_{2T}(\ominus, \odot^{n_1} \oplus \dots \oplus \odot^{n_k} \oplus).$$

Mas do item a) do lema 6 e (1.1)

$$\begin{aligned}\mu_T(\ominus, \oplus^k) &= \nu_{2T}\text{Clean}(\ominus, \oplus^k) \\ &= \frac{1}{1 - \nu_{2T}(\odot)} \sum_{n_1, \dots, n_k=0}^{\infty} \nu_{2T}(\ominus, \odot^{n_1} \oplus \dots \oplus \odot^{n_k} \oplus).\end{aligned}$$

Assim,

$$\pi(\Omega_k) = \mu_T(\ominus, \oplus^k) \cdot (1 - \nu_{2T}(\odot)).$$

Dividindo esta por (1.23), nós obtemos (1.22). Agora nós podemos somar (1.22) sobre k e usamos (1.21) para obter

$$\frac{\mu_T(\oplus)}{\mu_T(\ominus)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_T(\ominus, \oplus^k)}{\mu_T(\ominus)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi(\Omega_k)}{\pi(\Omega_0)}. \quad (1.24)$$

Nós tomamos qualquer $\omega \in \Omega_1$ e chamamos um caminho em um grafo G *norte-oeste* (ver seção 1.5) se todos os passos vão ao norte ou oeste. Nós chamamos um vértice de G uma *raiz* se existe um caminho norte-oeste deste vértice para qualquer flor, todos os vértices deste caminho tem um estado \oplus . Em particular, todas as flores são raízes. Vértices de G , os quais não são raízes, são chamadas *não-raízes*. O conjunto de raízes é finito pela mesma razão por que o conjunto de flores é finito, a saber, porque T é fixado e portanto $x_{max}(\omega)$ existe. Nossa estimacão é baseada em produzir um “contorno” ao redor de todas as raízes.

1.5 Representação gráfica

Iremos agora para uma representação gráfica do processo ν . Serão ignorados alguns eventos com probabilidade zero. Para qualquer $\omega \in \Omega$ nós definimos um grafo G . Quando estivermos descrevendo o grafo G , vamos descrever como desenhar este no plano, representando vértices por pontos e arestas por curvas. O conjunto de vértices de G é

$$V_G = \{(x, y) \in V, estado(x, y) \neq \odot\},$$

onde x e y são as coordenadas ortogonais usuais, a escala x é horizontal e a escala y é vertical. O grafo tem dois tipos de arestas, os quais nós chamamos *vertical* e *horizontal*.

Aresta vertical. Quaisquer dois vértices $v_1 = (x, y_1)$ e $v_2 = (x, y_2)$ de G , onde $y_2 - y_1 = 1$, são conectados com uma aresta vertical. Direção desta aresta de v_1 para v_2 é chamada *norte*, a outra direção é chamada *sul*. Nós chamamos v_1 o vizinho sul de v_2 e v_2 o vizinho norte de v_1 .

Aresta horizontal. Quaisquer dois vértices $v_1 = (x_1, y)$ e $v_2 = (x_2, y)$ de G , onde $x_1 < x_2$, são conectados com uma aresta horizontal se

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x_1 < x < x_2 \Rightarrow estado(x, y) = \odot.$$

A direção desta aresta de v_1 para v_2 é chamada *leste*; direção oposta é chamada *oeste*. Chamamos v_1 o vizinho oeste de v_2 e v_2 o vizinho leste de v_1 . Assim, os únicos dois tipos de arestas de G estão definidos. Estas arestas são representadas por segmentos de retas conectando os pontos extremos das arestas.

Um vértice de G , cujo y -nível é par, sempre tem exatamente um vizinho oeste, exatamente um vizinho leste e exatamente um vizinho norte. Este também tem exatamente um vizinho sul, exceto o caso $y = 0$, quando este não tem vizinho sul. Um vértice de G , no y -nível ímpar, sempre tem exatamente um vizinho oeste, exatamente um vizinho leste e exatamente um vizinho sul. Este também tem no máximo um vizinho norte. Devido a definição de G , todo vértice está em um estado \oplus ou \ominus ; nesta forma nós chamamos este um \oplus -vértice, no último caso um \ominus -vértice.

É evidente que diferentes arestas de G não se interceptam exceto aquelas que têm um extremo em comum. Nós chamaremos *pintura de G* a representação no plano que foi descrita. Esta pintura corta o plano em partes, as quais nós chamamos *faces*. Nós assumimos que todas as faces são fechadas. Nós chamamos duas faces vizinhas se elas possuem uma aresta em comum. Nossa pintura de G tem exatamente uma face não limitada, a saber a metade inferior do plano. Todas as outras faces de G são limitadas e nós chamamos elas *caixas*. Toda caixa tem a forma de um retângulo, limitado entre duas linhas paralelas nos níveis y_1 e $y_1 + 1$, onde y_1 é natural, então este pode ser denotado

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_1 + 1\}. \quad (1.25)$$

Para todo natural y_1 as caixas limitadas entre as linhas paralelas nos níveis y_1 e $y_1 + 1$ formam uma seqüência bi-infinita na qual todos dois próximos termos tem um lado comum e o qual nós chamamos um *corredor horizontal* no sub- $(y_1 + 1)$ nível. Qualquer caixa tem pelo menos quatro vértices localizados em seus cantos e não tem mais vértices no oeste, leste e muro norte, então tem exatamente um vizinho oeste, um vizinho leste e um vizinho norte. Se y_1 é par, a caixa (1.25) não tem mais vértices no muro sul, tem-se que esta possui exatamente um vizinho sul. Se y_1 é ímpar esta caixa(1.25) tem $2k + 1$ vizinhos sul, onde k é o número de aniquilações, as quais ocorreram $(y_1 + 1)/2$ -ésima aplicações do operador Ann_1 entre os lugares x_1 e x_2 .

Nós usaremos a bem conhecida dualidade da pintura do grafo. Nós decrevemos um grafo, o qual nós denotamos por \bar{G} , e esta pintura, a qual irá ser a dual da pintura de G . Nós localizamos os vértices de \bar{G} , o qual é dual da caixa (1.25), no ponto

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, y_1 + 1 - \epsilon \right), \quad (1.26)$$

onde $\epsilon > 0$ é escolhido para diferentes caixas diferentemente, mas deve ser pequeno suficiente em todos os casos; Quanto pequeno, nós iremos explicar. Nós iremos dizer que o vértice (1.26) possui um sub- $(y_1 + 1)$ nível. Nós iremos dizer que este tem um nível *sub-par* se $y_1 + 1$ é par e tem um nível *sub-ímpar* se $y_1 + 1$ é ímpar. Existe justamente uma sutileza: Este vértice de \bar{G} , o qual é dual da não limitada face da pintura de G , é localizado “infinitamente longe” na direção negativa da escala y e as arestas precedendo para este são raios com a mesma direção. Todas as outras arestas de \bar{G} são segmentos de reta conectando os pontos representando seus extremos. Logo, o grafo \bar{G} e suas pinturas estão definidos. É fácil ver que para qualquer caixa o ϵ correspondente pode ser escolhido tão pequeno que as condição usuais da pintura dual seja realizada. Nós iremos chamar *horizontal* aquelas arestas de \bar{G} , as quais são dual da aresta vertical de G e *vertical* aquelas arestas de \bar{G} , as quais são dual das arestas horizontais de G . Note que arestas horizontais de \bar{G} são aproximadamente horizontais porque os valores de ϵ para todos vértices de \bar{G} são aproximadamente iguais a zero. Para qualquer natural y os vértices de \bar{G} , os quais estão em sub- $(y + 1)$ nível, e arestas horizontais, conectando eles, formam um caminho bi-infinito, o qual nós chamamos um *caminho horizontal* no sub- $(y + 1)$ nível e o qual é dual da sub- $(y + 1)$ corredor. Qualquer face limitada de \bar{G} é limitada entre caminhos horizontais nos níveis sub- y e sub- $(y + 1)$. Faces não limitadas de \bar{G} são dual dos vértices de G no nível zero. Elas são faixas não limitadas, as quais completam todo o semiplano sob o caminho horizontal no nível sub-1. Uma face de \bar{G} é chamada um vizinho oeste (respectivamente leste, norte ou sul) de uma outra face de \bar{G} se seus vértices correspondentes de G estão na mesma relação.

De acordo com o que nós dizemos sobre os vértices de G em nível par, qualquer face de \bar{G} em um nível ímpar tem exatamente um vizinho oeste, exatamente um leste e exatamente um vizinho norte. Também este tem exatamente um vizinho sul, exceto o caso $y = 0$, quando este não tem vizinho sul. Qualquer que seja $y > 0$, nós chamamos estas faces de \bar{G} *retângulos*. De acordo com o que nós dizemos sobre vértices de G em níveis ímpar, qualquer face de \bar{G} em um nível ímpar tem no máximo um vizinho norte. Se este tem um, nós chamamos este de *trapézio*; caso contrário, nós chamamos *triângulo*. De fato, estas faces são aproximadamente trapézios e triângulos.

Na figura 1.4 exibimos um fragmento do grafo G (em vermelho) do processo ν e seu dual \bar{G} (em azul pontilhado e preto). Contornos em preto ao redor de (1,1) e (2,1) têm suas correspondentes faces em \bar{G} triângulos. O contorno em (2,3) e (3,3) tem como face em \bar{G} um retângulo. Contorno em (6,1) tem face em \bar{G} um trapézio. Coluna $x = 0$ mostra que nossa configuração pertence a Ω_0 . Coluna $x = 10$ é o nosso $x_{max}(\omega)$. Logo, entre $x = 0$ e $x_{max}(\omega)$ temos as flores em (3,4), (4,4) e (5,4) marcadas por F . Nosso intuito é obter um

contorno em torno de todas as raízes de G (ver apêndice A).

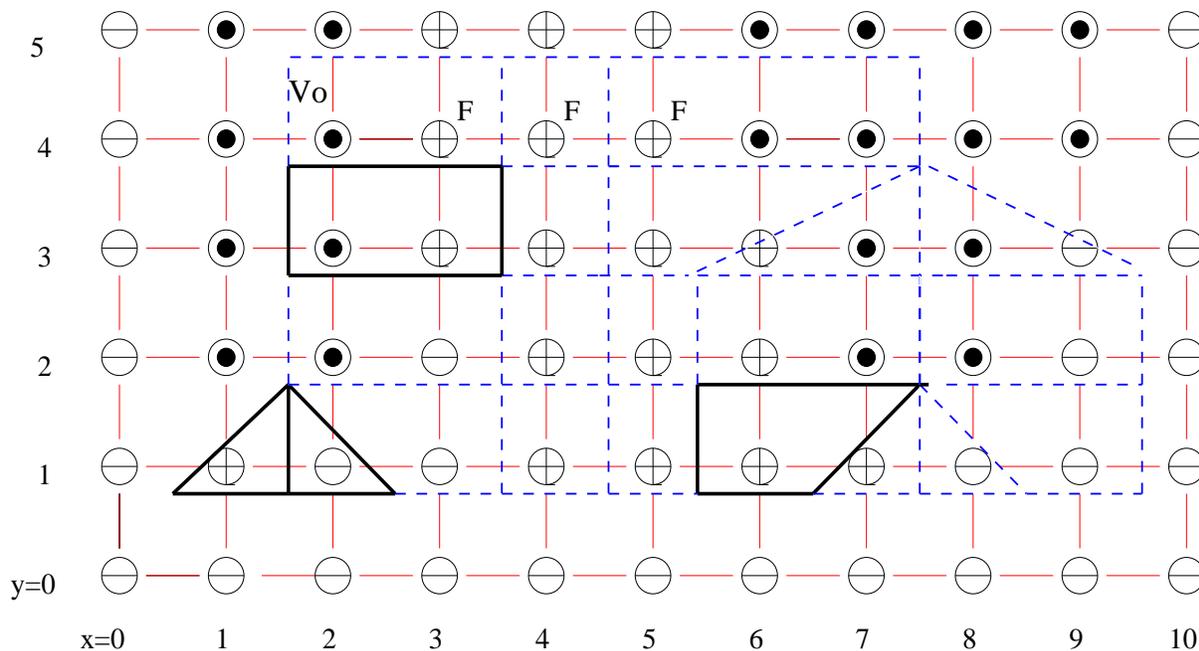


Figura 1.4: Um fragmento do grafo G do processo ν juntamente com seu dual \bar{G} .

1.6 Igualdades e Desigualdades

Nesta parte do trabalho nós enunciamos sem provar os lemas 7, 8, 9, 11 e 12, os quais são provados em [5] ou são conseqüências diretas destas provas. Nós chamamos um conjunto S de vértices de um grafo, *conectado* neste grafo, se para quaisquer dois elementos deste conjunto existe um caminho neste grafo conectando eles, no qual todos os vértices pertencem a S .

Lema 7 Para qualquer $\omega \in \Omega_1$: a) O conjunto de raízes é não-vazio, finito e conectado em G . b) O conjunto de não raízes é infinito e conectado em G .

Nós chamamos *raiz dual* aquelas faces do grafo dual \bar{G} , as quais são dual das raízes, e denotamos por U a união de raízes duais. Desde que toda raiz dual é limitada, U é também limitada e fechada desde que nós assumimos todas as faces serem fechadas. Tem-se do lema 7, U é homeomorfo a um disco fechado. Então o contorno de U é uma curva fechada, a qual inclui o lado leste do retângulo dual do vértice $(0, 2T)$. Então esta curva fechada inclui V_0 , o fim norte deste lado, e nós

podemos assumir que este inicia e finaliza em V_0 e cerca U no sentido antihorária. Esta curva pode ser representada como um caminho em \bar{G} , o qual nós denotamos por $turnê(\omega)$ porque esta é determinada por ω . Agora nós necessitamos classificar todas as formas possíveis de $turnê(\omega)$. Para este fim, nós necessitamos classificar todos passos os quais $turnê(\omega)$ pode incluir, isto é, qualquer passo em \bar{G} . Nós iremos iniciar por classificar alguns passos no grafo G . Chamamos de *tipos* elementos do conjunto

$$\{1, 1', 2, 2', 2'', 3, 4', 5\}. \tag{1.27}$$

A lista (1.27) é parecida com a de Toom[5], mas difere em não incluirmos o tipo 4, o qual aqui é impossível devido a nossa condição $\alpha = 1$. Nós iremos atribuir tipos para aqueles e somente aqueles passos em G , os quais iniciam em \oplus -vértice. Todos os casos, que podem ocorrer, são listados na tabela 1.1.

Tabela 1.1: *Passos em G , os quais iniciam em \oplus -vértice e seus correspondente: tipo, evento associado e variável associada.*

Passo em G iniciando em um \oplus -vértice	Tipo	evento associado	variável associada
Passo oeste em um nível par	1	trivial	nenhum
Passo oeste em um nível ímpar	1'	trivial	nenhum
Passo de $(x, 2t + 1)$ para $(x, 2t)$ se $F(x, t) = muda$	2	$F(x, t) = muda$	$F(x, t)$
Passo de $(x, 2t + 1)$ para $(x, 2t)$ se $F(x, t) = fica$	2'	$F(x, t) = fica$	$F(x, t)$
Passo sul de um nível par para um ímpar	2''	trivial	nenhum
Passo de $(x, 2t + 1)$ para este vizinho leste	3	trivial	nenhum
Passo leste em um nível par	4'	trivial	nenhum
Passo norte	5	trivial	nenhum

Passos, tendo a palavra “trivial” na terceira coluna, são chamados *triviais*, outros passos são chamados *não-triviais*. Para todo passo em G , o qual tem um tipo, nós atribuímos um *evento associado*. Para todo passo trivial o evento associado é Ω e é chamado trivial. Eventos não triviais são representados na tabela 1.1 por suas condições. Para todo passo não trivial nós também definimos uma *variável básica associada*, a qual é mostrada na última coluna. Também todo passo em G , o qual tem um tipo, tem uma *chance*. As chances são mostradas na tabela 1.2, mas pode prevê-los agora pois chance é sempre igual a probabilidade do evento associado. Nós iremos usar a correspondência

um para um entre passos em G e passos em \bar{G} , a qual segue:

{ Se uma aresta \bar{e} de \bar{G} é dual de uma aresta e de G , então
 para cada direção de e a direção dual de \bar{e} é a direção
 da direita para esquerda quando nós vamos ao longo de e numa dada direção.

Tabela 1.2: *Passos em \bar{G} tendo uma \oplus -face em seu lado esquerdo e seu correspondente: tipo, chance e deslocamento.*

Passos em \bar{G} tendo uma \oplus -face em seu lado esquerdo	tipo	chance	deslocamento
Passo sul cruzando um nível par	1	1	(0, -1)
Passo sul cruzando um nível ímpar	1'	1	(0, -1)
“muda” passo leste em um nível sub-ímpar	2	β	(1, 0)
“fica” passo leste em um nível sub-ímpar	2'	$1 - \beta$	(1, 0)
Passo leste em um nível sub-par	2''	1	(1, 0)
Passo norte cruzando um nível ímpar	3	1	(-1, 1)
Passo norte cruzando um nível par	4'	1	(0, 1)
Passo oeste	5	1	(-1, 0)

Tipo, evento e chance, atribuídas para um passo em G , são atribuídos para este passo dual em \bar{G} também. Assim como um passo em G tem um tipo se e somente se este inicia de um \oplus -vértice, um passo em \bar{G} tem um tipo se e somente se este tem um \oplus -face no seu lado esquerdo.

Você pode imaginar tabelas 1.1 e 1.2 como uma única tabela. A última coluna da tabela 1.2 mostra *deslocamentos* definidos para todos tipos. Deslocamento é um vetor bi-dimensional, cujas componentes são chamadas DH e DV , abreviações para deslocamento horizontal e vertical. A primeira coluna da tabela 1.2 é equivalente ao que foi dito na primeira coluna da tabela 1.1; contudo, esta nos ajuda a entender por que deslocamentos são definidos nesta forma. Chances mostradas na terceira coluna são de iguais probabilidades dos eventos mostrados na tabela anterior.

Lema 8 *Para qualquer $\omega \in \Omega_1$: a) todos passos do caminho $turnê(\omega)$ tem tipos e b) o caminho $turnê(\omega)$ é uma concatenação dos dois caminhos, os quais nós denotamos por $sacola(\omega)$ e $tampa(\omega)$, com as seguintes propriedades: todos passos de $sacola(\omega)$ têm tipos diferentes de 5; $tampa(\omega)$ tem $\phi(\omega)$ passos, todos dos quais tem tipo 5.*

Qualquer seqüência de tipos é chamado um *código*. O deslocamento de um código é a soma dos deslocamentos destes termos e a chance de um código é o produto das chances destes termos. Se todos os passos de um caminho p tem tipos, nós denotamos $código(p)$ e chamamos o *código* de p a seqüência dos tipos dos passos de p . Por deslocamento e chance de um caminho nós denotamos deslocamento e chance deste código. Do Lema 8, $sacola(\omega)$ tem um código e nós necessitamos

estudar este. Nós chamamos um caminho em \bar{G} , um caminho bem localizado, se este inicia em V_0 , todos estes passos tem tipos e todas as variáveis básicas associadas com estes passos são diferentes um do outro, logo independentes e também são independentes do evento Ω_0 . Dado qualquer $\omega \in \Omega_0$ e um código C , nós dizemos que ω realiza C se o grafo \bar{G} contém um caminho bem localizado p , tal que o código de p é igual a C .

Lema 9 *Todo $\omega \in \Omega_1$ realiza o código de sacola(ω).*

Para qualquer código C nós denotamos por $real(C)$ o conjunto daqueles $\omega \in \Omega_0$, o qual realiza C .

Lema 10 *Para qualquer código C ,*

$$\frac{\pi(real(C))}{\pi(\Omega_0)} \leq chance(C).$$

Prova. Se o código C é tal que $\omega \notin \Omega_0$ ou $\omega \in \Omega_0$, mas ω não realiza C , temos,

$$\frac{\pi(real(C))}{\pi(\Omega_0)} = 0 < chance(C).$$

Agora, para $real(C)$ não vazio, nós mostraremos por indução no comprimento do código C :

$$\frac{\pi(real(C))}{\pi(\Omega_0)} = chance(C).$$

Base de indução: Seja o comprimento de C um e E_1 o evento associado com único passo, logo

$$\frac{\pi(real(C))}{\pi(\Omega_0)} = \frac{\pi(\Omega_0 \cap E_1)}{\pi(\Omega_0)} = \pi(E_1) = chance(C).$$

Passo de indução: Para um código C com $n - 1$ passos

$$\frac{\pi(real(C))}{\pi(\Omega_0)} = \pi(\cap_{i=1}^{n-1} E_i) = chance(C).$$

Quando C tem n passos

$$\frac{\pi(\text{real}(C))}{\pi(\Omega_0)} = \pi(\cap_{i=1}^{n-1} E_i \cap E_n) = \text{chance}(C).$$

O lema 10 está provado.

Tem-se, devido aos Lemas 9 e 10, para qualquer k .

$$\frac{\pi(\Omega_k)}{\pi(\Omega_0)} \leq \frac{\sum \pi(\text{real}(\text{código}(\text{sacola}(\omega))))}{\pi(\Omega_0)} \leq \sum \text{chance}(\text{código}(\text{sacola}(\omega))), \quad (1.28)$$

onde ambas somas são tomadas sobre todos diferentes $\text{código}(\text{sacola}(\omega))$ para $\omega \in \Omega_k$. Para estimar a última soma, para todo natural k nós definimos um conjunto de códigos, os quais nós denotamos LC_k e cujo os elementos nós chamamos *códigos k – legais*. Um código $C = (c_1, \dots, c_n)$ pertence a LC_k se este satisfaz as seguintes condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(LC-a)} \ c_1 = 1 \text{ e } c_n = 4'. \\ \text{(LC-b)} \ \text{Todos termos de } C \text{ pertencem a lista } 1, 1', 2, 3, 4'. \\ \text{(LC-c)} \ \text{Todos os pares } (c_i, c_{i+1}) \text{ pertencem a lista} \\ \quad 11', 1'1, 1'2, 21, 22, 23, 31', 34', 4'2, 4'3. \\ \text{(LC-d)} \ DH(C) \geq k \text{ e } DV(C) = 0. \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Deste modo $LC_1 \supseteq LC_2 \supseteq \dots$, nós denotamos $LC = LC_1$ e chamamos os elementos de LC *códigos legais*. Como o tipo 4 não é possível quando $\alpha = 1$, em (LC-b) não há o tipo 4 e para (LC-c) não temos os pares 24, 44' e 4'4 obtidos por A. Toom[5]. A definição de códigos legais é escolhida para ajustar códigos de $\text{sacola}(\omega)$ como mostramos a seguir.

Lema 11 Para todo $\omega \in \Omega_k$ o código de $\text{sacola}(\omega)$ pertence a LC_k .

Segue do lema 11 e (1.28) que para todo k

$$\frac{\pi(\Omega_k)}{\pi(\Omega_0)} \leq \sum_{C \in LC_k} \text{chance}(C). \quad (1.30)$$

Para finalizar nosso argumento, nós necessitamos fazer uma estimação numérica, mas isto irá ser muito complicado para fazer com tantos tipos. Para reduzir este número para três tipos, nós chamaremos *tipos maiores* os elementos do conjunto $\{1, 2, 3\}$. Todas as quantidades definidas para tipos são válidas para tipos maiores. Em particular, todo tipo maior tem um deslocamento e uma chance listada na tabela 1.2 e mostrada novamente na tabela 1.3. Também todo tipo maior tem uma *taxa*, a qual é mostrada na mesma tabela. A. Toom considerou o tipo maior 4, o qual ocorria com chance e taxa $1 - \alpha$. Mas aqui $\alpha = 1$ logo tipo maior 4 não ocorre.

Tabela 1.3: *Tipos maiores e seu respectivo: deslocamento, chance e taxa.*

Tipo maior	deslocamento	chance	taxa
1	(0, -1)	1	1
2	(1, 0)	β	$2 \cdot \beta$
3	(-1, 1)	1	1

Um *código maior* é uma seqüência finita e todos os termos são tipos maiores. Sua *taxa* é o produto das taxas destes termos. Para qualquer código C nós denotamos por $\text{conciso}(C)$ o código maior obtido de C por deletar todos termos não principais. Nós iremos simplificar nossa tarefa lidando com $\text{conciso}(\text{código}(\text{sacola}(\omega)))$, ao invés de $\text{código}(\text{sacola}(\omega))$. Para todo natural k nós definimos o conjunto LMC_k , cujos elementos são chamados *códigos maiores k-legais*. Por definição, um código maior k-legal é um código maior $C = (c_1, \dots, c_n)$, o qual satisfaz as seguintes condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} (LMC - a) \quad c_1 = 1 \text{ e } c_n = 3 \\ (LMC - b) \quad \text{Para todo } i = 1, \dots, n - 1 \text{ é impossível que} \\ (c_i = 1, c_{i+1} = 3). \\ (LMC - c) \quad DH(C) \geq k \text{ e } DV(C) \geq 0. \end{array} \right. \quad (1.31)$$

Deste modo $LMC_1 \supseteq LMC_2 \supseteq \dots$. Nós denotamos $LMC = LMC_1$ e chamamos elementos de LMC *códigos maiores legais*. Você pode notar também da $(LMC - a)$ e $(LMC - b)$ que qualquer código maior legal tem comprimento pelo menos três, então de fato $LMC = LMC_3$, mas nós não

usaremos isto. Para qualquer código maior legal C nós denotamos por $extenso(C)$ o conjunto de códigos legais C' tal que $C = conciso(C')$. É fácil observar que se $C' \in extenso(C)$, então C' pode ser obtida de C da seguinte forma:

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Nós iniciamos com } C. \\ \text{b) Após todo 1 nós inserimos } 1'. \\ \text{c) Sempre que 3 é seguido por 1, nós inserimos } 1' \text{ entre eles.} \\ \text{d) Sempre que 3 é seguido por 2, nós inserimos } 1' \text{ ou } 4' \text{ entre eles.} \\ \text{e) Sempre que 3 é seguido por 3 ou 5, nós inserimos } 4' \text{ entre eles.} \end{array} \right. \quad (1.32)$$

Provaremos que qualquer código maior C e qualquer $C' \in extenso(C)$

$$DH(C') = DH(C), \quad (1.33)$$

$$DV(C') \leq 2 \cdot DV(C). \quad (1.34)$$

Aqui (1.33) é verdade por que C' é obtido de C por inserir somente tipos $1'$ e $4'$, ambas das quais tem $DH = 0$. Para provar (1.34), nós classificamos tipos principais em *horizontais*, a saber 2, cujo DV é zero, e *verticais*, a saber todos os outros. Devido a (1.32) nós podemos estabelecer uma correspondência **1-1** entre termos verticais de C e os termos inseridos após eles no curso do procedimento. Então DV de todo mais novo termo inserido não é maior que DV do correspondente termo vertical de C . Conseqüentemente (1.34) segue imediatamente.

Lema 12 Para qualquer k , se $C \in LC_k$, então $conciso(C) \in LMC_k$.

Agora nós podemos estimar a soma do lado direito de (1.30). Devido ao lema 12 nós podemos representar esta soma como

$$\sum_{C' \in LC_k} chance(C') = \sum_{C \in LMC_k} \sum_{C' \in extenso(C)} chance(C'). \quad (1.35)$$

Nós estimamos o lado direito da soma. Devido ao item d), o resultado do procedimento (1.32), não é único. Contudo, o número de diferentes possibilidades resulta, que a cardinalidade de $extenso(C)$, não excede 2^m , onde m é o número daqueles termos de C , os quais são iguais a 2. Também notamos que $chance(C') = chance(C)$ sempre que $C' \in extenso(C)$ porque $chance(1') = chance(4') = 1$. Assim para qualquer $C \in LMC_k$

$$\sum_{C' \in extenso(C)} chance(C') \leq 2^m \cdot chance(C) \leq taxa(C),$$

onde m tem o mesmo significado descrito acima. Substituindo esta em (1.35) nós obtemos

$$\sum_{C' \in LC_k} \text{chance}(C') \leq \sum_{C \in LMC_k} \text{taxa}(C). \quad (1.36)$$

Assim falta provar:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{C \in LMC_k} \text{taxa}(C) \leq 150 \cdot \beta. \quad (1.37)$$

Seja

$$B_k = \sum_{\{C \in LMC : DH(C)=k\}} \text{taxa}(C).$$

É fácil ver por (LMC-c) em (1.31) que

$$\sum_{C \in LMC_k} \text{taxa}(C) = B_k + B_{k+1} + B_{k+2} + \dots$$

substituindo isto no lado direito de (1.37) temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (B_k + B_{k+1} + B_{k+2} + \dots) &= B_1 + 2 \cdot B_2 + 3 \cdot B_3 + \dots \\ &= \sum_{C \in LMC} DH(C) \cdot \text{taxa}(C). \end{aligned}$$

Logo, ao invés de provarmos (1.37) nós iremos provar

$$\sum_{C \in LMC} DH(C) \cdot \text{taxa}(C) \leq 150 \cdot \beta. \quad (1.38)$$

Para qualquer inteiro x e y , natural z e $k \in \{1, 2, 3\}$ nós denotamos por $S_k(x, y, z)$ a soma das taxas dos códigos maiores satisfazendo as condições (LMC-a) e (LMC-b) da definição de código maior legal, cujo DH é igual a x , cujo DV é igual y e o qual tem z termos, o último dos quais é k . Segue da definição de $S_k(x, y, z)$ e condições (LMC-a) e (LMC-c) de (1.31) que

$$\sum_{C \in LMC} DH(C) \cdot \text{taxa}(C) \leq \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} x \cdot S_3(x, y, z). \quad (1.39)$$

Devido a condição (LMC-a) de (1.31), os números $S_k(x, y, z)$ satisfazem a condição inicial

$$S_k(x, y, 1) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0, y = -1 \text{ e } k = 1, \\ 0 & \text{em todos os outros casos} \end{cases} \quad (1.40)$$

e devido a condição (LMC-b) eles satisfazem a equação de transição

$$\begin{cases} S_1(x, y, z + 1) = S_1(x, y + 1, z) + S_2(x, y + 1, z) + S_3(x, y + 1, z), \\ S_2(x, y, z + 1) = 2\beta \cdot (S_1(x - 1, y, z) + S_2(x - 1, y, z) + S_3(x - 1, y, z)), \\ S_3(x, y, z + 1) = S_2(x + 1, y - 1, z) + S_3(x + 1, y - 1, z). \end{cases} \quad (1.41)$$

Para estimar (1.39), nós usamos somas

$$\begin{cases} S_1(z) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} p^{-x} q^{-y} S_1(x, y, z), \\ S_2(z) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} p^{-x} q^{-y} S_2(x, y, z), \\ S_3(z) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} p^{-x} q^{-y} S_3(x, y, z), \end{cases} \quad (1.42)$$

onde p, q são parâmeros positivos, os quais nós necessitamos escolher. Os seguintes valores são suficientes para obter nossas estimações:

$$p = 1/3 \text{ e } q = 5/6.$$

contudo, é conveniente continuar usando letras p e q por enquanto. Devido a nossa escolha de p e q e desde que $x < 3^x$ para todo inteiro x , a soma (1.39) é estimada por

$$\sum_{z=1}^{\infty} S_3(z), \quad (1.43)$$

então permanece estimar a soma (1.43).

As quantidades (1.42) satisfazem a condição inicial

$$S_1(1) = q, \quad S_2(1) = S_3(1) = 0 \quad (1.44)$$

e condições recorrentes

$$\begin{cases} S_1(z+1) = q(S_1(z) + S_2(z) + S_3(z)), \\ S_2(z+1) = 2\beta/p(S_1(z) + S_2(z) + S_3(z)), \\ S_3(z+1) = p/q(S_2(z) + S_3(z)). \end{cases} \quad (1.45)$$

Usaremos o vetor $S(z) = (S_1(z), S_2(z), S_3(z))$. Logo, nós podemos escrever as condições de recorrência (1.45) como

$$S(z+1) = S(z) \cdot M,$$

onde $S(z) = S(1) \cdot M^{z-1}$, onde a matriz M é definida assim:

$$M = \begin{pmatrix} q & 2\beta/p & 0 \\ q & 2\beta/p & p/q \\ q & 2\beta/p & p/q \end{pmatrix}$$

Note que nesta Tese nós escrevemos matrizes no lado direito de vetores, então vetores são horizontais. Autovalores de M são raízes da equação

$$|M - \lambda_{max} \cdot E| = 0$$

(onde E é a matriz identidade e $|\cdot|$ indica o determinante), a qual pode ser simplificada por

$$2 \cdot \beta \cdot \lambda^2 = p \cdot \lambda \cdot (\lambda - q) \cdot \left(\lambda - \frac{p}{q}\right) \quad (1.46)$$

Nós primeiro consideramos o caso $\beta = 0$. Neste caso temos os autovalores de M , iguais a q , p/q e zero, pelos valores de p e q adotados temos $q > p/q > 0$, então q é o maior autovalor. Agora seja

$\beta > 0$. Relembre que $\beta \leq 1/150$. Do teorema de Perron-Frobenius, M tem um autovalor “maximal” λ_{max} , o qual é real e positivo e o qual não é menor que o valor absoluto de todos os autovalores de M . Se $\beta = 0$, $\lambda_{max} = q$ e este é estritamente maior que todos os outros autovalores, os quais também são reais e não negativos neste caso. Quando β aumenta de 0 para $1/150$, λ_{max} também aumenta e ainda excede o valor absoluto de todos os outros autovalores.

Todas as componentes do auto-vetor V correspondentes a λ_{max} podem ser escolhidas reais e não negativas. No caso presente a primeira componente de V não é zero, então nós podemos assumir que $V = (V_1, V_2, V_3)$ é de tal forma que $V_1 = 1$. Então todas as componentes de nosso vetor inicial (1.44) são não maiores que as componentes correspondentes do vetor V multiplicado por $5/6$, por que

$$S_1(1) = q \leq \frac{5}{6}V_1, \quad S_2(1) = 0 \leq \frac{5}{6}V_2, \quad S_3(1) = 0 \leq \frac{5}{6}V_3.$$

Daqui e da não negatividade de todos elementos de M ,

$$S_i(z) \leq \frac{5}{6}V_i \cdot \lambda_{max}^z \quad \text{para todo } z \text{ e } i.$$

Portanto

$$S_3(z) \leq \frac{5}{6}V_3 \cdot \lambda_{max}^z,$$

de onde nós podemos estimar a soma (1.39) bem como a soma (1.43) como segue:

$$\sum_{z=1}^{\infty} S_3(z) \leq \frac{5}{6} \cdot V_3 \cdot \sum_{z=1}^{\infty} \lambda_{max}^z \leq \frac{5}{6} \cdot \frac{V_3}{1 - \lambda_{max}}. \quad (1.47)$$

Para estimar esta expressão, nós necessitamos estimar V_3 acima e $1 - \lambda_{max}$ abaixo. Nós primeiro estimamos $1 - \lambda_{max}$, para o qual nós necessitamos estimar λ_{max} . De (1.46)

$$\frac{\lambda_{max} - q}{2\beta} = \frac{\lambda_{max}^2}{p\lambda_{max}(\lambda_{max} - p/q)} \quad (1.48)$$

Para estimar λ_{max} nós necessitamos estimar o lado esquerdo desta expressão. Primeiro nós estimamos o numerador do lado direito:

$$\lambda_{max}^2 \leq 1.$$

Agora para estimar o denominador. Desde que $p = 1/3$ e $\lambda_{max} \geq q = 5/6$,

$$p\lambda_{max} \geq 5/18. \quad (1.49)$$

Também note que $\lambda_{max} - p/q \geq q - p/q = 13/30 > 2/5$. Então concluímos que

$$p\lambda_{max} \left(\lambda_{max} - \frac{p}{q} \right) \geq \frac{5}{18} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{9}.$$

Agora nós podemos estimar o lado direito e portanto o lado esquerdo de (1.48):

$$\frac{\lambda_{max} - q}{2\beta} \leq \frac{1}{1/9} = 9.$$

Desde que $\beta \leq 1/150 < 13/1944$,

$$\lambda_{max} - q \leq \frac{26}{1944} \cdot 9 = \frac{13}{108}.$$

Relembrando que $q = 5/6$, obtemos

$$1 - \lambda_{max} = (1 - q) - (\lambda_{max} - q) \geq \frac{1}{6} - \frac{13}{108} = \frac{5}{108}. \quad (1.50)$$

Assim o denominador de (1.47) é estimado. Agora nós estimamos o numerador, i. é., V_3 , usando esta representação explícita:

$$V_3 = \frac{2\beta p/q}{p\lambda_{max}(\lambda_{max} - (2\beta/p + p/q))}. \quad (1.51)$$

Temos que $p/q = 2/5$. Portanto o numerador de (1.51) é $4 \cdot \beta/5 \leq 49 \cdot \beta/54$.

Para estimar o denominador, lembre que

$$\lambda_{max} \geq q = 5/6 \text{ e } 2\beta/p = 6\beta \leq 6 \cdot 13/1944 = 13/324.$$

Logo,

$$2\beta/p + p/q \leq \frac{13}{324} + \frac{2}{5} = \frac{713}{1620}.$$

Usando (1.49), nós estimamos o denominador:

$$p\lambda_{max}(\lambda_{max} - (2\beta/p + p/q)) \geq \frac{5}{18} \left(\frac{5}{6} - \frac{713}{1620} \right) = \frac{637}{5832}.$$

Assim

$$V_3 \leq \frac{49\beta}{54} \cdot \frac{5832}{637} = \frac{108\beta}{13}.$$

Daqui e de (1.50).

$$\frac{5}{6} \times \frac{V_3}{1 - \lambda_{max}} \leq \frac{5}{6} \times \frac{108\beta}{13} \times \frac{108}{5} = \frac{1944\beta}{13} \leq 150\beta$$

A desigualdade (1.37) está provada. Reunindo a igualdade (1.24), a desigualdade (1.30) e (1.36) somado sobre k , e (1.37), nós provamos o Teorema 7.

1.7 Erro de Toom e correção dele

Na prova do teorema 1, o qual afirma que $\mu_t(\oplus) < 300 \cdot \beta/\alpha^2$, identificamos um erro, que é mostrado em (1.57). Nesta parte do trabalho nós iremos mostrar, após corrigido este erro, que nós temos uma versão melhor deste resultado, no teorema 10, no qual

$$\mu_t(\oplus) < 250 \cdot \beta/\alpha^2.$$

Aqui as mesmas quantidades anteriormente definidas (códigos, taxas, chance, etc) para α igual a um, continuam válidas para este caso onde $\alpha \in (0, 1)$, mas com pequenas ressalvas, pois agora temos o tipo 4. Para qualquer inteiro x e y , natural z e $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ denotou-se por $S_k(x, y, z)$ a soma das taxas do código maior legal satisfazendo as condições (LMC-a) e (LMC-b)

da definição de legal maior código, embora para esta última condição além de $(c_i = 1, c_{i+1} = 3)$ ser impossível, também são impossíveis $(c_i = 1, c_{i+1} = 4)$ e $(c_i = 4, c_{i+1} = 1)$. Aqui DH é igual a x , DV é igual y e tem z termos, o último dos quais é k . No caminho da prova do teorema 10, obteve-se que para um número arbitrário T fixado

$$\mu_T(\oplus) \leq \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} x \cdot (S_3(x, y, z) + S_4(x, y, z)). \quad (1.52)$$

Devido a condições (LMC-a), os números $S_k(x, y, z)$ satisfazem a condição inicial

$$S_k(x, y, 1) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0, y = -1 \text{ e } k = 1, \\ 0 & \text{em todos os outros casos} \end{cases} \quad (1.53)$$

e devido a condição (LMC-b) eles satisfazem a equação de transição

$$\begin{cases} S_1(x, y, z + 1) = \sum_{k=1}^3 S_k(x, y + 1, z), \\ S_2(x, y, z + 1) = 2\beta \cdot \left(\sum_{k=1}^4 S_k(x - 1, y, z) \right), \\ S_3(x, y, z + 1) = \alpha \cdot \left(\sum_{k=2}^4 S_k(x + 1, y - 1, z) \right), \\ S_4(x, y, z + 1) = (1 - \alpha) \cdot \left(\sum_{k=2}^4 S_k(x, y - 1, z) \right). \end{cases} \quad (1.54)$$

Para estimar (1.52), considerando $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ usou-se as somas

$$S_k(z) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} p^{-x} q^{-y} S_k(x, y, z), \quad (1.55)$$

onde adotou-se

$$p = 1/3 \text{ e } q = 1 - \alpha/6.$$

Contudo, é conveniente continuarmos usando letras p e q . Devido a escolha de p e q e desde que $x < 3^x$ para todo inteiro x , a soma (1.52) é estimada por

$$\sum_{z=1}^{\infty} (S_3(z) + S_4(z)), \quad (1.56)$$

Então permanece estimar esta soma. Em [5] Toom afirmou que as quantidades (1.55) satisfazem a condição inicial

$$S_1(1) = 1/q, \quad S_2(1) = S_3(1) = S_4(1) = 0. \quad (1.57)$$

Na verdade por (1.53) temos

$$S_1(1) = q, \quad S_2(1) = S_3(1) = S_4(1) = 0.$$

As condições recorrentes são

$$\begin{cases} S_1(z+1) = q(S_1(z) + S_2(z) + S_3(z)), \\ S_2(z+1) = 2\beta/p(S_1(z) + S_2(z) + S_3(z) + S_4(z)), \\ S_3(z+1) = p\alpha/q(S_2(z) + S_3(z) + S_4(z)), \\ S_4(z+1) = (1-\alpha)/q(S_2(z) + S_3(z) + S_4(z)). \end{cases} \quad (1.58)$$

Note que $S_3(z)$ e $S_4(z)$ são proporcionais, a saber para todo z eles relacionam-se como $p \cdot \alpha$ para $(1-\alpha)$, então nós podemos usar as quantidades

$$S_1^*(z) = S_1(z), \quad S_2^*(z) = S_2(z), \quad S_3^*(z) = S_3(z) + S_4(z).$$

com condição inicial

$$S_1^*(1) = q, \quad S_2^*(1) = S_3^*(1) = 0 \quad (1.59)$$

e condições de recorrência

$$\begin{cases} S_1^*(z+1) = q(S_1^*(z) + S_2^*(z)) + p \cdot \alpha/r S_3^*(z), \\ S_2^*(z+1) = 2\beta/p(S_1^*(z) + S_2^*(z) + S_3^*(z)), \\ S_3^*(z+1) = r(S_2^*(z) + S_3^*(z)). \end{cases} \quad (1.60)$$

onde denotou-se

$$r = \frac{(1-\alpha) + p \cdot \alpha}{q} \quad (1.61)$$

Introduzindo um vetor $S^*(z) = (S_1^*(z), S_2^*(z), S_3^*(z))$, pôde-se escrever estas condições de recorrência como $S^*(z+1) = S^*(z) \cdot M$, de onde $S^*(z) = S^*(1) \cdot M^{z-1}$, onde M é uma matriz

$$M = \begin{pmatrix} q & 2\beta/p & 0 \\ q & 2\beta/p & r \\ p \cdot \alpha/r & 2\beta/p & r \end{pmatrix}$$

Auto-vetores M são raízes da equação

$$|M - \lambda_{max} \cdot E| = 0$$

(onde E é a matriz identidade), a qual pode ser simplificada por

$$2\beta \cdot (\lambda^2 - (1 - \alpha)) = p\lambda(\lambda - q)(\lambda - r). \quad (1.62)$$

Seja $\beta = 0$. Neste caso os autovalores de M são iguais a q , r e zero e para todo α temos $q > r > 0$, então q é o maior autovalor. Agora seja $\beta > 0$. Relembre que $\beta \leq \alpha^2/250$. Do teorema de Perron-Frobenius, seja λ_{max} o autovalor “maximal” de M , o qual é real, positivo e o qual não é menor que o valor absoluto de todos os autovalores de M . Logo, para $0 < \beta < \alpha^2/250$, λ_{max} também aumenta e ainda excede o valor absoluto de todos os outros autovalores.

Adotou-se o auto-vetor $V = (V_1, V_2, V_3)$ associado ao autovalor λ_{max} de forma que todas as componentes V_i , fossem maiores que zero e a primeira componente $V_1 = 1$. Então para todas as componentes de nosso vetor inicial (1.59) temos

$$S_1^*(1) = q \leq \frac{5}{6}V_1, \quad S_2^*(1) = 0 \leq \frac{5}{6}V_2, \quad S_3^*(1) = 0 \leq \frac{5}{6}V_3.$$

Daqui e da não negatividade de todos elementos de M ,

$$S_i(z) \leq \frac{5}{6}V_i \cdot \lambda_{max}^z \quad \text{para todo } z \text{ e } i.$$

Portanto $S_3^*(z) \leq 5/6 V_3 \lambda_{max}^z$, temos que pode-se estimar a soma (1.52) bem com a soma (1.55) como segue:

$$\sum_{z=1}^{\infty} (S_3(z) + S_4(z)) = \sum_{z=1}^{\infty} S_3^*(z) \leq \frac{5}{6} \sum_{z=1}^{\infty} \lambda_{max}^z = \frac{5}{6} \frac{V_3}{1 - \lambda_{max}}. \quad (1.63)$$

Para estimar esta expressão, nós necessitamos estimar V_3 , acima e $1 - \lambda_{max}$, a baixo. Nós primeiro estimamos $1 - \lambda_{max}$, para o qual nós necessitamos estimar λ_{max} . De (1.62)

$$\frac{\lambda_{max} - q}{2\beta} = \frac{\lambda_{max}^2 - (1 - \alpha)}{p\lambda_{max}(\lambda_{max} - r)}. \quad (1.64)$$

Para estimar λ_{max} nós necessitamos estimar o lado esquerdo desta expressão. Primeiro nós estimamos o numerador do lado direito:

$$\lambda_{max}^2 - (1 - \alpha) \leq 1 - (1 - \alpha) = \alpha.$$

Agora estimamos o denominador. Desde que $p = 1/3$ e $\lambda_{max} \geq q = 1 - \alpha/6 \geq 5/6$,

$$p\lambda_{max} \geq 5/18. \quad (1.65)$$

Também note que $q - r \geq \alpha/3$, de onde $\lambda_{max} - r \geq q - r \geq \alpha/3$. Então concluimos que

$$p\lambda_{max}(\lambda_{max} - r) \geq \frac{5}{18} \frac{\alpha}{3} = \frac{5\alpha}{54}.$$

Então o denominador está estimado. Agora nós podemos estimar o lado direito e portanto o lado esquerdo de (1.64):

$$\frac{\lambda_{max} - q}{2\beta} \leq \frac{\alpha}{5\alpha/54} = \frac{5}{54}.$$

Desde que $\beta \leq \alpha^2/250$,

$$\lambda_{max} - q \leq \frac{\alpha^2}{125} \frac{54}{5} \leq \frac{54\alpha}{625}.$$

Relembrando que $q = 1 - \alpha/6$, temos

$$1 - \lambda_{max} = (1 - q) - (\lambda_{max} - q) \geq \frac{\alpha}{6} - \frac{54\alpha}{625} = \frac{301\alpha}{3750}. \quad (1.66)$$

Assim o denominador de (1.63) é estimado. Agora nós estimamos o numerador, i. é., V_3 , usando esta representação explícita:

$$V_3 = \frac{2\beta r}{p\lambda_{max}(\lambda_{max} - (2\beta/p + r))}. \quad (1.67)$$

É fácil mostrar que $r \leq 1 - \alpha/2$. Portanto o numerador de (1.67) não excede 2β . Para estimar o denominador, lembre que $\lambda_{max} \geq q = 1 - \alpha/6$ e $2\beta/p = 6\beta = 3\alpha^2/125 \leq 3\alpha/125$. Portanto,

$$2\beta/p + r \leq \frac{3\alpha}{125} + 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Usando (1.65), nós estimamos o denominador de (1.67):

$$p\lambda_{max}(\lambda_{max} - (2\beta/p + r)) \geq \frac{5}{18} \left(1 - \frac{\alpha}{6} - 1 - \frac{3\alpha}{125} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{58\alpha}{675}.$$

Assim

$$V_3 \leq \frac{2\beta}{58\alpha/675} = \frac{675\beta}{29\alpha}.$$

Disto e de (1.66),

$$\frac{5}{6} \times \frac{V_3}{1 - \lambda_{max}} \leq \frac{5}{6} \times \frac{675\beta}{29\alpha} \times \frac{3750}{301\alpha} \leq \frac{242\beta}{\alpha^2} \leq \frac{250\beta}{\alpha^2}.$$

Logo esta quantidade é menor que 1, tanto logo que $\beta < \alpha^2/250$. A desigualdade (1.52) está provada para estes mesmos valores de β .

Capítulo 2

Simulações e aproximações para um processo de partículas

2.1 Aproximação de Campo Médio

A *aproximação de Bethe*, a qual é usada para tratar sistemas magnéticos (ver páginas 170 e 171 em [20]), atua de forma exata no interior da *árvore de Cayley*. Este interior é chamado a *rede de Bethe*. Mostramos uma fragmento desta rede na figura 2.1. Em analogia a esta aproximação para sistemas magnéticos, chamamos aqui aproximação de campo médio, as análises do comportamento das frequências das letras.

Lembramos que todos elementos de \mathcal{M}_A são medidas normadas uniformes em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Por simplicidade, nós denotamos \mathcal{M}_A por \mathcal{M} . Definimos o operador caótico $\mathcal{C} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, o qual atua misturando aleatoriamente todas as componentes. Para cada medida $\mu \in \mathcal{M}$, $\mu\mathcal{C}$ é uma medida-produto com as mesmas frequências de todas as letras que há em μ , isto é, elementos de \mathcal{A} . Vamos aproximar o processo μP^t pelo processo $\mu(\mathcal{C}P)^t$. Desta maneira, ao invés de estudarmos o processo, o que é complicado, iremos estudar a evolução das densidades das letras no sistema. A este estudo, chamamos *aproximação de*

campo médio.

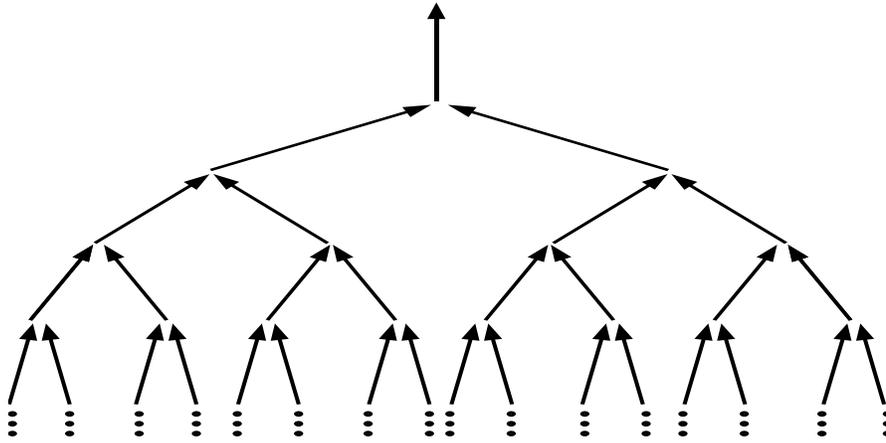


Figura 2.1: Aqui ilustramos um fragmento da rede de Bethe, onde a aproximação de campo médio é exata, sendo que qualquer medida-produto se transforma numa medida-produto.

Seja $f : I \rightarrow I$ uma função contínua em um intervalo I . Definimos $f^0(x) = x$ e $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ para $n \in \{1, 2, \dots\}$. Um ponto p é chamado *ponto fixo* de f se $f(p) = p$. Seja x_t a densidade de uns no tempo t , logo a densidade de uns no tempo $t + 1$ é consequência da aplicação de uma função a densidade de uns no tempo t , isto é, $f(x_t) = x_{t+1}$.

Sejam f uma função diferenciável com sua derivada f' contínua e p tal que $f(p) = p$. É bastante conhecido na literatura [12]: *i)* p é um *atrator* se $|f'(p)| < 1$, *ii)* p é um *repulsor* se $|f'(p)| > 1$.

Como exemplo, faremos a aproximação de campo médio para uma versão com tempo discreto do conhecido processo de contato estudado em [13], o chamado processo de *Stavskaya*. Mais referências podem ser obtidas em [6].

Exemplo 1 (Stavskaya[14]) Seja s_v a componente do sistema na posição $v \in \mathbb{Z}$, onde $s_v \in \{0, 1\}$. Denotamos de *Stav* o operador determinístico definido assim: $(sStav)_v = \min(s_v, s_{v+1})$. Seja R_β o operador que transforma $0 \rightarrow 1$ com probabilidade β independentemente e x_t a densidade de uns no tempo t .

Então:

$$\begin{aligned} \mu_t(\mathcal{CStav})(s_v = 1) &= (\mu_t \mathcal{C}(s_v = 1))^2 \\ &\text{e} \\ \mu_t(\mathcal{CStav}R_\beta)(s_v = 1) &= \beta + (1 - \beta)(\mu_t \mathcal{C}(s_v = 1))^2 \\ x_{t+1} &= f(x_t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde

$$f(x) = \beta + (1 - \beta)x^2. \quad (2.2)$$

Resolvendo a equação $f(x) = x$, obtemos os seguintes pontos fixos de f :

$$p_1 = 1 \quad \text{e} \quad p_2 = \frac{\beta}{1 - \beta}.$$

Estes são análogos as possíveis densidades invariantes de nosso processo original. Vemos quando $\beta > 1/2$, que $p_2 > 1$, implicando p_1 a única densidade invariante. Quando $\beta < 1/2$ associa-se uma situação de não ergodicidade, pois temos mais que uma densidade invariante.

É fácil calcular que:

$$|f'(p_1)| < 1 \Rightarrow (2 - 2\beta) < 1 \Leftrightarrow \beta > \frac{1}{2},$$

$$|f'(p_2)| < 1 \Rightarrow 2\beta < 1 \Leftrightarrow \beta < \frac{1}{2}.$$

Assim, para um dado β , temos dois comportamentos distintos da $f^t(\cdot)$ quando t tende ao infinito (ver figura 2.2). Em um, quando $\beta > 1/2$, esperamos que $f^t(x_o) \rightarrow 1$ para qualquer densidade inicial e como neste caso temos apenas uma densidade invariante, o processo de Stavskaya é ergódico. No outro, quando $\beta < 1/2$, há duas densidades invariantes. Estes dois comportamentos, são similares com a existência de um α crítico não trivial, o qual foi mostrado em [13].

Como a aproximação caótica é diferente do processo original, os resultados obtidos não coincidem com o comportamento do processo que aproximamos.

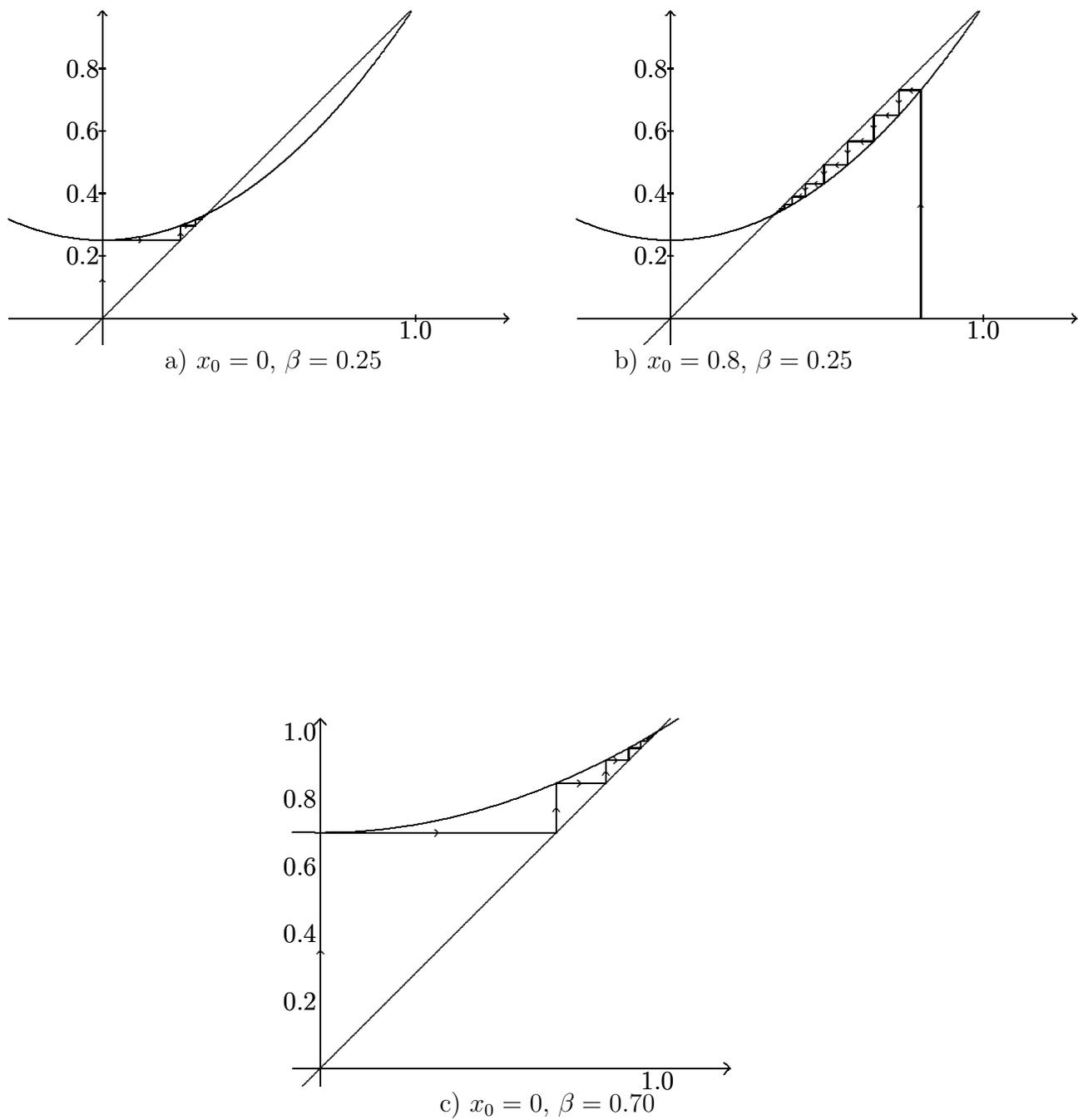


Figura 2.2: Comportamento do $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x_0)$ para a aproximação de campo médio do processo de Stavskaya.

Mas, às vezes, pode-se obter um mesmo comportamento qualitativo. Esperamos que em nossas aproximações se reflita um análogo da existência ou não, de ergodicidade ou não ergodicidade, como no processo aproximado. Exibimos no exemplo 2, duas situações: na primeira nós temos uma concordância qualitativa entre o processo e sua aproximação, na segunda há uma diferença qualitativa entre eles.

Exemplo 2 (NLC[14]) *Seja o operador determinístico D definido por $(sD)_{(0,0)} = med(s_{(0,0)}, s_{(0,1)}, s_{(1,0)})$, onde $med(\cdot)$ denota a mediana. O operador $(R_\beta s)_v$ transforma $0 \rightarrow 1$ independentemente com probabilidade β . Como a medida μ é uniforme, iremos denotar $\mu(s_v = a_v) = \mu(a_v)$. A densidade de uns e zeros no tempo t , são denotadas x_t e y_t respectivamente.*

$$\begin{aligned} \mu_t(\mathcal{CD})(1) &= (\mu_t \mathcal{C}(1))^3 + 3(\mu_t \mathcal{C}(s_{v_i} = s_{v_j} = 1, s_{v_k} = 0)), \text{ com } i \neq j \neq k \\ \mu_t(\mathcal{CD}R_\beta)(1) &= \beta + (1 - \beta)((\mu_t \mathcal{C}(1))^3 + 3(\mu_t \mathcal{C}(s_{v_i} = s_{v_j} = 1, s_{v_k} = 0))) \\ x_{t+1} &= \beta + (1 - \beta)(x_t^3 + 3x_t^2 y_t) \\ x_{t+1} &= (3x_t^2 - 2x_t^3)(1 - \beta) + \beta. \end{aligned}$$

Definindo

$$f(x_t) = (3x_t^2 - 2x_t^3)(1 - \beta) + \beta,$$

obtemos os seguintes pontos fixos:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \frac{-1 + \beta + \sqrt{\Delta}}{2(-2 + 2\beta)} \quad \text{e} \quad p_3 = \frac{-1 + \beta - \sqrt{\Delta}}{2(-2 + 2\beta)},$$

onde $\Delta = 1 - 10\beta + 9\beta^2$. Observamos que, p_2 e p_3 não estão definidos para $\beta \in (\frac{1}{9}, 1]$, havendo neste caso só uma densidade invariante. Quando $\beta < 1/9$ temos três densidades invariantes, correspondendo a não ergodicidade. No estudo do $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x_o)$ temos,

$$|f'(p_1)| < 1 \quad \text{para todo } \beta \in [0, 1],$$

$$|f'(p_2)| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta \in [0, \frac{1}{9}), \quad (2.3)$$

$$|f'(p_3)| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta \in (0, \frac{1}{9}).$$

Os casos para $\beta \in [0, 1]$ tais que $|f'(p_2)| > 1$ e $|f'(p_3)| < 1$ nunca ocorrem. Nossa aproximação exibe os mesmos comportamentos de ergodicidade, $\beta > 1/9$ e não-ergodicidade, $\beta < 1/9$ (ver figura 2.3) obtidos quando estuda-se o próprio processo **NLC**.

Agora, chamamos a atenção que estamos trabalhando com uma aproximação. Se consideramos $(s\bar{D})_{(0,0)} = med(s_{(0,0)}, s_{(0,1)}, s_{(0,2)})$, o processo $Q = \bar{D}R_\beta$ terá a mesma aproximação de campo médio do modelo NLC. Contudo, Q é ergódico $\forall \beta > 0$.

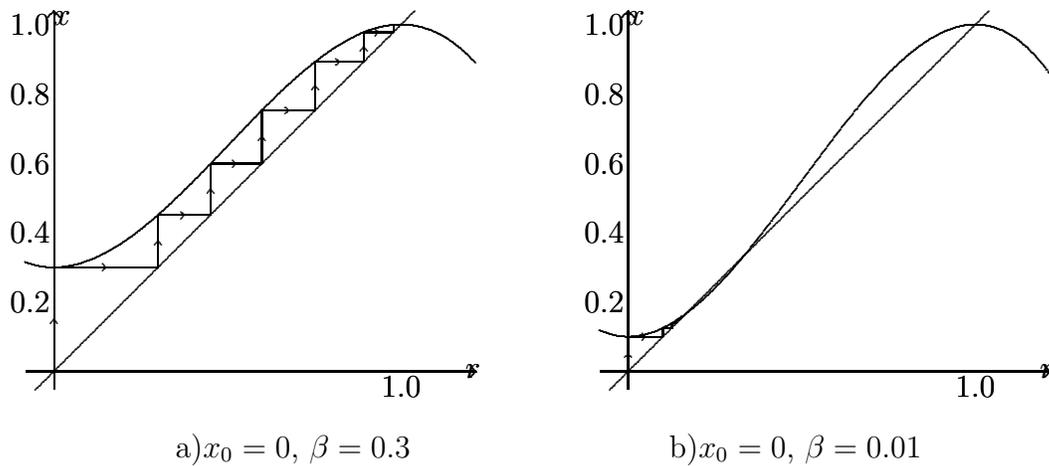


Figura 2.3: O $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x_0)$ para a aproximação de campo médio do processo NLC.

2.1.1 n -Aproximação

Na seção 2.1, nós definimos o operador caótico, e o utilizamos para descrever a aproximação de campo médio de um processo com operador P . Como é mostrado no exemplo 2, esta aproximação pode apresentar diferenças quali-

tativas com o processo aproximado. Definimos então, uma n -aproximação, como sendo uma aproximação de campo médio após ser aplicado n vezes o operador P , ou seja, P^n é aproximado por $\mathcal{C}P^n$.

Iremos rever o processo de *Stavskaya*, no qual fizemos sua 1-aproximação no exemplo 1. Fazendo agora sua 2-aproximação, veremos que o comportamento da n -aproximação pode ser similar ao do processo original.

Exemplo 3 Sejam x_t , $(\text{Stav})_v$ e R_β como definidos no exemplo 1. Vamos calcular sua 2-aproximação.

$$\begin{aligned} \mu_t(\mathcal{C}(\text{Stav}R_\beta)^2)(s_v = 1) &= \mu_t(\mathcal{C}(\text{Stav}R_\beta)(\text{Stav}R_\beta))(s_v = 1) \\ &= \mu_t(\mathcal{C}(\text{Stav}R_\beta))(\beta + (1 - \beta)(s_v = 1, s_{v+1} = 1)) \\ &= \mu_t(\mathcal{C}R_\beta)(\beta + (1 - \beta)(s_v = 1, s_{v+1} = 1, s_{v+2} = 1)) \\ &= \mu_t\mathcal{C}(\beta + (1 - \beta)(\beta + (1 - \beta)(s_v = 1)^3)) \\ &= \mu_t\mathcal{C}(2\beta - \beta^2 + (1 - \beta)^2(s_v = 1)^3). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 2\beta - \beta^2 + (1 - \beta)^2 x_t^3 \\ &= f(x_t). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Os pontos fixos de f são,

$$p_1 = 1, \quad p_2 = -\frac{\beta - 1 + \sqrt{\Delta}}{2(\beta - 1)} \quad \text{e} \quad p_3 = -\frac{\beta - 1 - \sqrt{\Delta}}{2(\beta - 1)},$$

onde $\Delta = -3\beta^2 + 6\beta + 1$. Para todo $\beta \in [0, 1)$, $p_3 < 0$. Logo, este ponto não será estudado. Diferente do que ocorreu nos exemplos 1 e 2, aqui não há β para o qual tenhamos apenas um ponto fixo, possibilitando termos ergodicidade.

Mas, ao estudarmos o comportamento de $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x_0)$, temos

$$\text{Se } \beta > 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ logo } |f'(p_1)| < 1 \text{ e } |f'(p_2)| > 1.$$

$$\text{Se } \beta < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ logo } |f'(p_1)| > 1 \text{ e } |f'(p_2)| < 1.$$

Estas desigualdades indicam que para x_0 diferente dos pontos fixos, $f^t(x_0)$ há dois comportamentos da frequência de uns quando $t \rightarrow \infty$: num tende ao ponto 1, quando $\beta < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, correspondendo a ergodicidade do processo, no outro $f^t(x_0) \rightarrow p_2$, quando $\beta > 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ correspondendo a não ergodicidade do processo. Nosso valor crítico de β , é menor do que o valor 0.5 obtido na 1–aproximação. Em [7] página 79 é mostrado para este processo que $\beta^* > 0.09$.

Contudo, na prática é difícil o uso de uma n –aproximação de um processo P , com $n > 1$. Pela complexidade da expressão a qual a descreve.

2.2 Aproximação de campo médio do modelo de Toom

Diferente dos processos aproximados na seção 2.1, o processo que aproximaremos aqui tem como característica ter comprimento variável e foi definido na seção 1.1 desta Tese. Este processo é então definido por:

$$\mu_t = \delta_{\ominus}(\text{Flip}_{\beta}\text{Ann}_{\alpha})^t, \quad (2.5)$$

sendo que, primeiro atua o operador flip e após o aniquilação. A medida concentrada em “todos \ominus ” é denotada δ_{\ominus} .

Seja x a frequência de \oplus no sistema. Nós obtemos que a frequência x na aproximação do modelo de Toom (ver apêndice B) é

$$f(x) = \frac{\beta + (1 - \beta)x - \alpha(\beta + (1 - \beta)x)(1 - \beta)(1 - x)}{1 - 2\alpha(\beta + (1 - \beta)x)(1 - \beta)(1 - x)}. \quad (2.6)$$

Calculamos os pontos fixos de $f(\cdot)$, ou seja, os valores de x tais que, $f(x) =$

x , obtendo:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \frac{3\alpha\beta - \alpha + \sqrt{\Delta}}{4\alpha(\beta - 1)} \quad \text{e} \quad p_3 = \frac{3\alpha\beta - \alpha - \sqrt{\Delta}}{4\alpha(\beta - 1)} \quad (2.7)$$

onde $\Delta = \alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\beta + \alpha^2 - 8\alpha\beta$. Vamos estudar para quais valores de β temos $\Delta > 0$. Para tanto, consideremos

$$g(\beta) = \alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\beta + \alpha^2 - 8\alpha\beta,$$

a qual é uma função do segundo grau em função de β . Assim, $g(\beta)$ assume valor negativo para todo β entre as suas raízes

$$\beta_1(\alpha) = \frac{-\alpha + 4 + 2\sqrt{-2\alpha + 4}}{\alpha} \quad \text{e} \quad \beta_2(\alpha) = \frac{-\alpha + 4 - 2\sqrt{-2\alpha + 4}}{\alpha}.$$

É fácil ver que $\beta_1(\alpha)$ é decrescente e $\beta_2(\alpha)$ crescente para $\alpha \in (0, 1]$. Isto, junto ao fato que $\beta_1(1) > 1$ e $\beta_2(1) < 1$, implicam $\beta_1(\alpha) > \beta_2(\alpha)$. Logo, $g(\beta)$ é positiva sempre que $\beta < \beta_2(\alpha)$, correspondendo a não ergodicidade do processo e $g(\beta) < 0$ quando $\beta_1(\alpha) > \beta > \beta_2(\alpha)$ o que corresponde a ergodicidade do processo (ver figura 2.2). Assim, a linha de transição no espaço de parâmetros $\alpha \times \beta$, entre ergodicidade vs. não ergodicidade obtida por meio da aproximação de campo médio é dada por

$$\beta_2(\alpha) = \frac{-\alpha + 4 - 2\sqrt{-2\alpha + 4}}{\alpha}. \quad (2.8)$$

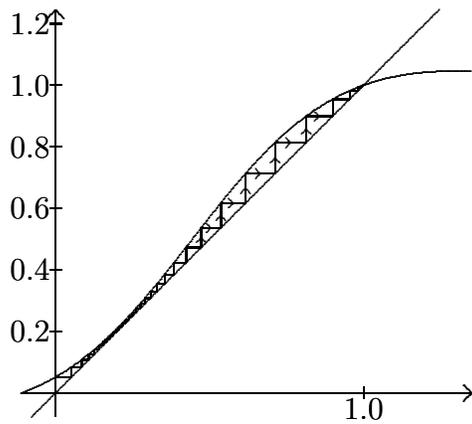
Através de algumas manipulações algébricas obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \\ &= \frac{(\beta - 1)(2\alpha\beta^2 - 4\alpha x\beta^2 + 2\alpha x^2\beta^2 - 4\alpha x^2\beta - 2\alpha\beta + 6\alpha x\beta + \alpha - 1 - 2\alpha x + 2\alpha x^2)}{(1 - 2\alpha\beta + 6\alpha x\beta + 2\alpha\beta^2 - 4\alpha x\beta^2 - 2\alpha x + 2\alpha x^2 - 4\alpha x^2\beta + 2\alpha x^2\beta^2)^2}. \end{aligned}$$

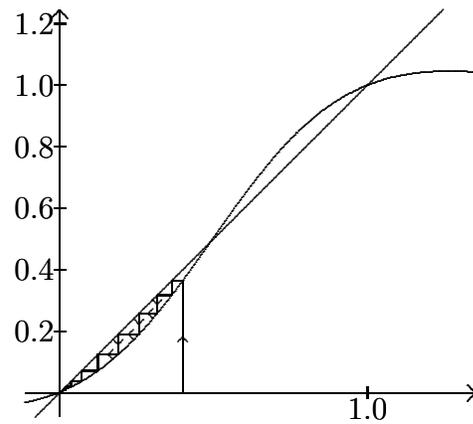
Substituindo o ponto fixo p_1 obtidos em (2.7), nesta fórmula temos

$$|f'(p_1)| < 1 \Rightarrow |\beta - 1| \cdot |\alpha - 1| < 1 \Leftrightarrow \alpha \text{ e } \beta \in (0, 1].$$

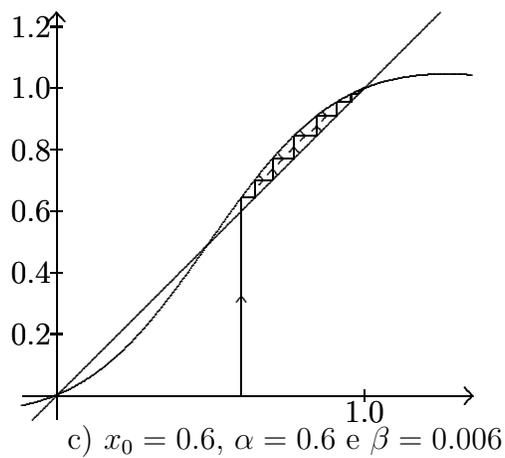
Isto confirma a ergodicidade em campo médio quando $\beta > \beta_2(\alpha)$.



a) $x_0 = 0, \alpha = 0.6$ e $\beta = 0.1$



b) $x_0 = 0.4, \alpha = 0.6$ e $\beta = 0.006$



c) $x_0 = 0.6, \alpha = 0.6$ e $\beta = 0.006$

Figura 2.4: Comportamento do $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x_0)$ para a aproximação do processo de partículas com comprimento variável.

2.3 Simulação de Monte Carlo

O método de Monte Carlo é aplicado no estudo de modelos estocásticos, os quais são usados nas ciências físicas [18], biológicas [19], etc. Nós usaremos este método para simular o funcionamento do modelo definido na seção 1.1 desta Tese. No computador a memória e o tempo de processamento são finitos. Logo, ao estudarmos sistemas infinitos através do computador, na verdade estamos estudando uma aproximação finita para estes sistemas. Assim, é importante desenvolvermos teorias para estas aproximações finitas.

Nossa aproximação é uma cadeia de Markov com um conjunto contável Ω de estados, chamados *circulares*. Estas circulares são seqüências finitas, as quais são compostas de termos \oplus and \ominus , chamados *mais* e *menos* respectivamente. Mas, nós imaginamos estas seqüências tendo forma circular. Poderíamos utilizar palavras ao invés de circulares, mas isto tornaria necessário definições especiais das ações dos operadores nas “extremidades.”

Nós denotamos por $|C|$ o número de componentes na circular C . Os índices de suas componentes são restos módulo $|C|$. Em todas nossas simulações, para cada circular inicial C , temos $|C| = 1000$, com todos as letras \ominus . Em cada experimento singular, o tempo t varia de zero até 100.000, a circular obtida no tempo t é denotada por C^t e sua i -ésima componente é denotada por C_i^t , onde $i = 0, \dots, |C^t| - 1$.

Nós dizemos que uma palavra $W = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ aparece num lugar i na circular $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ se ocorre $c_{i+1} = a_1, c_{i+2} = a_2, \dots, c_{i+n} = a_n$, onde todas as somas nos índices são módulo m . Nós denotamos por $quant(W|C)$, a quantidade de diferentes lugares onde a palavra W aparece

na circular C . Assim, nós definimos a frequência de W na circular C ,

$$freq(W|C) = \frac{quant(W|C)}{|C|}.$$

Como no modelo descrito na seção 1.1 página 9, nossa aproximação é composta por dois operadores, a saber: $Flip_\beta$ e Ann_α . Então, em média, o comprimento da circular decresce até desaparecer. Para evitar este problema, nós definimos o seguinte procedimento, o qual chamamos *dobra*: durante a evolução do processo, quando a quantidade de componentes da circular, $|C^t|$, torna-se menor que um valor fixado $N_{min} = 500$, nós dobramos a quantidade de componentes do sistema, concatenando este com sua cópia. Para as nossas quantidades de interesse (frequência das letras), este procedimento mantém nossos resultados robusto, uma vez que dobra gera uma nova circular, com a mesma frequência das letras que haviam no sistema. Também se mantém robusto os resultados para palavras curtas.

Foi mostrado em [5] que o processo μ_t em (2.5) tem pelo menos dois diferentes comportamentos quando t tende ao ∞ : se $\beta > \alpha/2$, $\mu_t \rightarrow \delta_\oplus$ e no outro caso se $\beta < \alpha^2/300$, μ_t não tende para δ_\oplus . Por uma analogia em nossa aproximação finita, para cada singular experimento, nós iremos observar o valor da $freq(\oplus|C^t)$. Consequentemente, quando nós temos $freq(\oplus|C^t) = 1$ esta é associada com $\mu_t = \delta_\oplus$. Logo a aproximação indica que o processo é ergódico. Por outro lado, se $freq(\oplus|C^t) < 1$, nós temos $\mu_t \neq \delta_\oplus$. Logo concluímos que o processo é não ergódico.

Para nós obtermos uma melhor curva separadora para estes dois comportamentos, através de experimento computacional, nós aplicamos o seguinte procedimento: primeiro, nós tomamos α variando de zero até 1, com incremento de 0.001. Deste modo, para cada α , nós fizemos β variar de zero

até $k \times 0.001$, onde k é o primeiro inteiro positivo entre zero e 1000 para o qual $\text{freq}(\oplus|C^t) = 1$. Consequentemente para cada α existe um respectivo $\beta = k \times 0.001$, o qual nós salvamos.

2.4 Resultados

Nós mostramos na figura 2.5: ambas curvas teóricas obtidas pelos teoremas 1 e 2 da página 12, a curva $\beta_2(\alpha)$ escrita em (2.8) obtida pela aproximação de campo médio e o conjunto de dados obtido de nossa simulação de Monte carlo. Decorrente das nossas simulações, nós obtivemos um conjunto de dados $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^{1000}$, o qual nos proporcionou estimar a linha que separa as regiões para as quais nossa aproximação é ergódica vs. não ergódica.

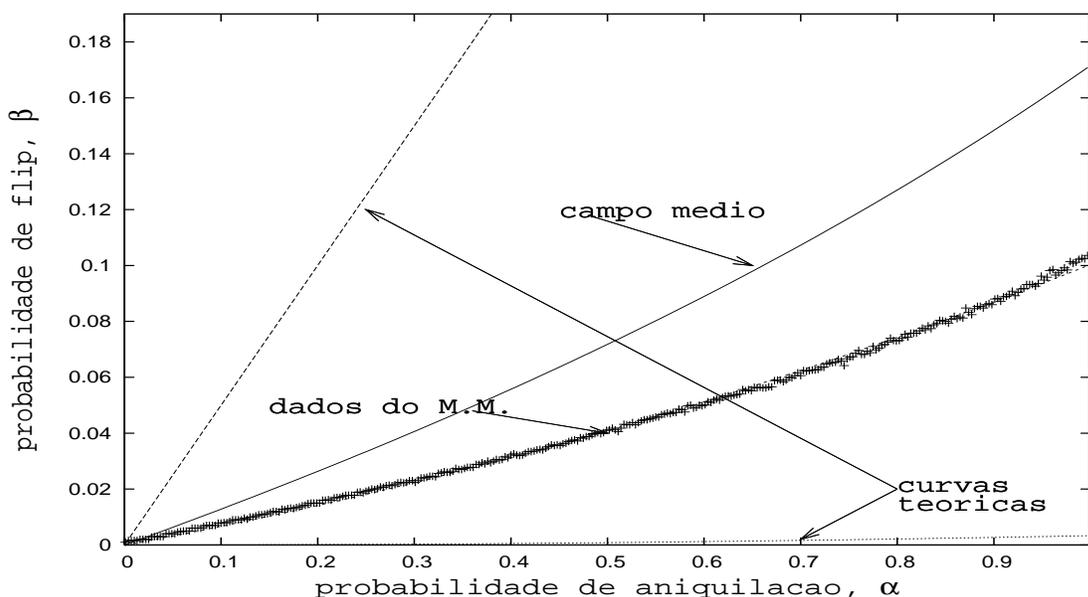


Figura 2.5: Neste gráfico mostramos as duas linhas teóricas e as outras duas linhas de transição obtidas: Pela aproximação de campo médio e com o método de Monte Carlo (M.M.). Esta última curva é obtida da média entre 5 experimentos independentes.

Em [5], foi denotado por $s(\alpha, \beta)$ o supremo da densidade de \oplus na medida μ_t para todo t natural. Foi mostrado que $s(\alpha, \beta)$ não é contínua como função de β para cada $\alpha \in (0, 1]$. Assim, este processo mostra alguma forma de transição

de fase de primeira ordem. Agora, nós iremos mostrar através de simulação, que este tipo de transição de fase, também ocorre em nossa aproximação finita do processo.

Nós iremos definir um estimador de $s(\alpha, \beta)$ por

$$\overline{s(\alpha, \beta)} = \max\{\text{freq}(\oplus|C^t) : t = 0, \dots, 100.000\}.$$

Quando nossa aproximação está associada a uma situação de não ergodicidade, temos $\overline{s(\alpha, \beta)} < 1$. Nós mostramos isto na figura 2.6, onde $\overline{s(\alpha, \beta)}$, está associada a uma escala de cores, a qual pode ser vista na caixa de cores no lado direito. Nós temos obtido para β na região de não ergodicidade, sempre $\overline{s(\alpha, \beta)} \leq 0.14$. Por outro lado, para β na região de ergodicidade, temos $\overline{s(\alpha, \beta)} = 1$. Isto combina com nossos resultados teóricos que, $\overline{s(\alpha, \beta)}$ é descontínua como função de β .

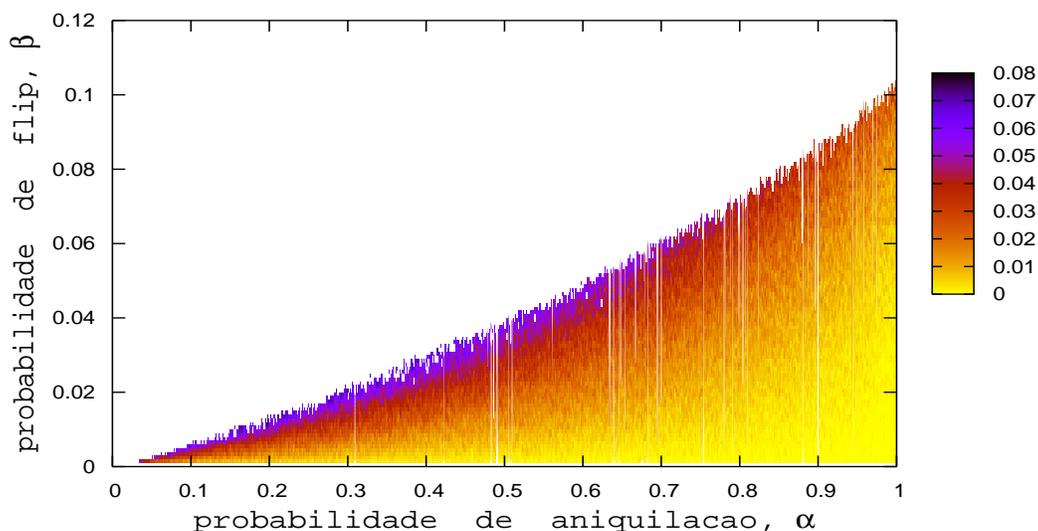


Figura 2.6: *Para $t = 100.000$, neste gráfico, quando o processo é não ergódico, nós mostramos $\overline{s(\alpha, \beta)}$. A caixa de cores no lado direito, variando de amarelo até preto, representa, através de cores, os possíveis valores de $\overline{s(\alpha, \beta)}$. Para melhor visualização do conjunto de dados obtidos, nós excluimos os valores de $\overline{s(\alpha, \beta)} > 0.08$, os quais representam menos que 1% de todo o conjunto de dados.*

Para reforçar a nossa hipótese de que $\overline{s(\alpha, \beta)}$ é descontínua, iremos estudar o seu comportamento próximo a curva separadora ou crítica. Procederemos da seguinte maneira: fixamos o valor da probabilidade α e variamos a probabilidade β com um incremento de 0.001. Para cada par (α, β) fixado, nós faremos uma quantidade i de experimentos computacionais independentes, onde i varia de zero a 100 e, para cada um destes experimentos, nós obteremos o supremo da densidade de \oplus , a qual denotamos, $\overline{s_i(\alpha, \beta)}$. Logo, definimos

$$E[s(\alpha, \beta)] = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \overline{s_i(\alpha, \beta)},$$

a média dos $\overline{s_i(\alpha, \beta)}$. Desta forma, esperamos que

$$s(\alpha, \beta) \approx E[s(\alpha, \beta)].$$

Também, para cada experimento, definimos $E[T]$, onde

$$T_i = \begin{cases} 100.000 & \text{se } \overline{s_i(\alpha, \beta)} < 1, \\ \min\{t : \text{freq}(\oplus|C^t) = 1\} & \text{se } \overline{s_i(\alpha, \beta)} = 1. \end{cases}$$

Usando este procedimento, nós obtemos os seguintes resultados mostrados na figura 2.7: gráficos a) e b) $\alpha = 0.5$. Vemos quando β aumenta, que $E[s(\alpha, \beta)]$ também aumenta pouco a pouco. Mas, próximo a curva crítica, há um crescimento abrupto deste valor, em seguida apresenta-se uma estabilização. Vale observar, que na região próxima da curva crítica, as barras de erro, as quais correspondem ao desvio padrão dos 100 experimentos independentes, são consideravelmente maiores que nas outras regiões. O mesmo ocorre em b), com $E[T]$ próximo a curva crítica. Embora, neste caso, a curva se apresenta de forma decrescente. Nas figuras c) e d), mostramos este mesmo estudo para $\alpha = 0.25, 0.5$ e 0.75 . Nós vemos que há o mesmo comportamento qualitativo nesses três casos. Este comportamento observado na figura 2.7 c) reforça a hipótese que nossa transição é de primeira ordem.

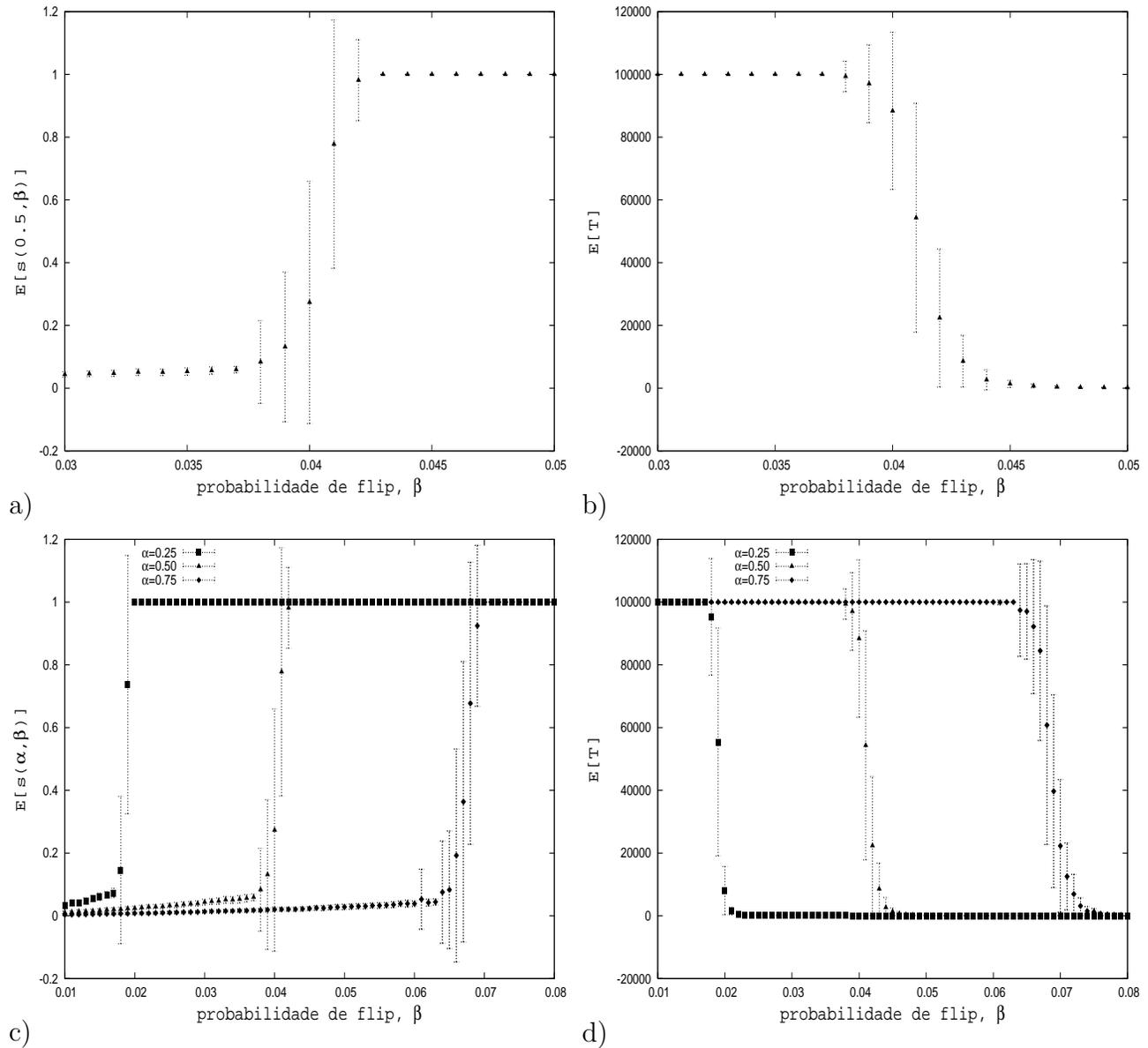


Figura 2.7: Nos gráficos a) e b), $\alpha = 0.5$. Em a) vemos o comportamento médio de $E[s(0.5, \beta)]$, o qual cresce rapidamente próxima a curva separadora e após apresenta rápida estabilização. O gráfico b), mostra o correspondente $E[T]$, o qual contrário ao gráfico a) decresce rapidamente próxima a curva crítica e estabiliza logo após. Em c) e d), vemos o mesmo comportamento qualitativo neste estudo, com $\alpha = 0.25, 0.5$ e 0.75 . Para cada β , nós usamos 100 experimentos independentes e barras de erro correspondem ao desvio padrão.

Para este processo, quando as probabilidades estão próximas de zero, nós esperamos obter uma curva separadora, cuja derivada seja positiva. Pois, quando α e β vão para zero, esperamos que nosso processo tenda para um processo com tempo contínuo.

Agora, usando simulação de Monte Carlo, nós iremos mostrar que para o processo aqui estudado, a derivada da curva separadora no ponto zero é positiva. Esta simulação é da seguinte forma: para fixado j nós tomamos α variando de zero até $1/2^j$ com incremento de $0.001/2^j$. Então, para cada específico j , existem 1000 pares, $\{(\alpha_i^j, \beta_i^j)\}$ com $i = 1, \dots, 1000$ e, para estes pares nós iremos fazer os ajustes: linear e quadrático, os quais nós denotamos,

$$g_L^j(\alpha) = a_j \cdot \alpha \quad \text{e} \quad g_Q^j(\alpha) = c_j \cdot \alpha^2 + b_j \cdot \alpha.$$

Para fazer este ajuste, nós utilizamos o bem conhecido método dos mínimos quadrados, o qual visa obter uma função g (aqui esta função é um polinômio do 1º ou 2º grau) de “melhor” ajuste ao conjunto de dados. Em nosso caso, esta função é obtida pela minimização do erro total,

$$E_g = \sum_{i=1}^{1000} (\beta_i^j - g(\alpha_i^j))^2.$$

A seguir mostramos a tabela 2.1, na qual são colocados os coeficientes dos ajustes, linear e quadrático.

Para α próximo a zero, a seqüência dos coeficientes dos ajustes lineares, a_j 's, mostrados na primeira coluna da tabela 2.1, estabilizam em torno de 0.072 quando $j > 2$. Também nesta tabela, nas segunda e terceira colunas são mostrados os coeficientes dos ajustes quadráticos. O b_j que é coeficiente do termo linear deste ajuste indica convergir para algum valor próximo a 0.07, mas sem a persistência que há na primeira coluna. Embora, o coeficiente c_j não exhibe convergência. Mais, para $j = 3$ e 4, c_j assume valor negativo. Estes

Tabela 2.1: Na primeira coluna é mostrado os coeficientes do ajuste linear, o qual mostra convergência para ≈ 0.0729 . Na segunda e terceira coluna, mostramos os coeficientes dos termos do primeiro e segundo grau respectivamente. Estes coeficientes foram obtidos do ajuste quadrático. Vemos que convergência de b_j é pior que a_j e que c_j não mostra convergência.

j	a_j	b_j	c_j
0	0.0911	0.0632	0.0371
1	0.0779	0.0718	0.0165
2	0.0742	0.0737	0.0027
3	0.0729	0.0738	-0.0095
4	0.0730	0.0745	-0.0321
5	0.0729	0.0712	0.0715

fatos implicam que o termo linear no ajuste quadrático, b_j , se mostra estável e próximo de a_j . Logo pelas observações feitas dos coeficientes de ambos ajustes, o ajuste linear explica de forma mais adequada o que ocorre com as probabilidades próximas de zero. Além disso,

$$g_L^j(\alpha) \approx 0.0729 \cdot \alpha > 0.07 \cdot \alpha.$$

Consequentemente, $g_L^j(\alpha)$ tem derivada positiva.

2.4.1 Estudo do parâmetro N_{min}

A partir daqui, nós iremos estudar se o parâmetro N_{min} influencia os resultados da nossa aproximação finita. Aqui utilizamos as mesmas condições usadas nas circulares iniciais: tamanho da circular inicial 1000 e todas as componentes sendo \ominus .

Tomemos o conjunto dos pares $\{(\alpha_i^k, \beta_i^k)\}$ onde $i = 1, \dots, 1000$ e k é o valor fixado para o parâmetro N_{min} . Faremos $N_{min} = 200, 500$ e 800 . Aqui não vamos considerar os α_i^k , pois estes coincidem para todo k . Logo, consideremos

os seguintes conjuntos de dados, a saber

$$\{\beta_i^{200}\}, \quad \{\beta_i^{500}\} \text{ e } \{\beta_i^{800}\}. \quad (2.9)$$

Iremos observar, por meio de alguns testes estatísticos se estes conjuntos em (2.9) seguem uma mesma distribuição. Inicialmente fizemos alguns testes mais comuns, os quais são mostrados na tabela 2.2 e apresentam uma boa concordância entre si.

Tabela 2.2: Nesta tabela são mostrados resultados estatísticos de uma amostra $\{\beta_i^k\}$, onde $i = 1, \dots, 1000$. Vemos que estes testes mostram aproximadamente os mesmos valores .

k	Mediana de $\{\beta_i^k\}$	Máximo de $\{\beta_i^k\}$	Média de $\{\beta_i^k\}$	Desvio padrão de $\{\beta_i^k\}$
200	0.039	0.102	0.043	0.028
500	0.041	0.107	0.044	0.029
800	0.041	0.106	0.045	0.029

Sejam X e Y variáveis aleatórias integráveis. Chamamos a *covariância* de X e Y a diferença entre os valores $E[X \cdot Y]$ e $E[X] \cdot E[Y]$, onde $E[X]$ é a esperança de X e denotamos

$$Cov(X, Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y].$$

Chama-se *coeficiente de correlação* entre X e Y a expressão:

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y},$$

onde σ_X denota o desvio padrão da variável X . Chamando $X_k = \{\beta_i^k\}$, fica fácil estender este conceito de correlação em amostras finitas. Assim obtemos as seguintes correlações:

$$\rho(X_{200}, X_{500}) \approx \rho(X_{200}, X_{800}) \approx \rho(X_{500}, X_{800}) \approx 0.998. \quad (2.10)$$

Mas, por [17] página 133, sabemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Se } X \text{ e } Y \text{ são variáveis aleatórias com variâncias finitas e positivas. Então, } \rho(X, Y) = 1 \text{ se e somente se} \\ \text{Pr}(Y = aX + b) = 1 \text{ para algum } a > 0 \text{ e } b \in \mathbb{R}. \text{ Lê-se} \\ \text{probabilidade de } Y = aX + b, \text{ o termo } \text{Pr}(Y = aX + b). \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

Como para cada $k = 200, 500$ e 800 , σ_{X_k} é finito e positivo (ver tabela 2.2) e, as correlações em (2.10) são aproximadamente um, nós então, podemos supor pelo resultado descrito anteriormente que:

$$Pr(X_k = aX_q + b) = 1, \quad (2.12)$$

onde $q = 200, 500$ e 800 . Isto significa que o valor de X_q tende a acompanhar o de X_k , i. é., em geral, quanto maior X_q , maior também fica X_k .

Usando o resultado em (2.12) e a linearidade da esperança, temos

$$E[X_k] = aE[X_q] + b.$$

Mas, os testes feitos na tabela 2.2 sugerem que

$$E[X_k] = E[X_q],$$

o que só é possível se $a = 1$ e $b = 0$. Assim, nossos estudos nos levam a concluir que

$$Pr(X_k = X_q) = 1,$$

ou seja, X_{200} , X_{500} e X_{800} seguem a mesma lei de formação. Desta maneira, o parâmetro N_{mim} não muda o comportamento das curvas de transição.

Com o intuito de reforçar nossa hipótese que os conjuntos $\{\beta_i^k\}$ em (2.9) seguem uma mesma distribuição, nós faremos uso do conhecido teste de Kolmogoros-Smirnov, o qual será explicado a seguir. Sejam,

$$\{\beta_1^k, \beta_2^k, \dots, \beta_N^k\} \quad \text{e} \quad \{\beta_1^q, \beta_2^q, \dots, \beta_M^q\}, \quad (2.13)$$

duas amostras independentes com funções de distribuição contínuas desconhecidas $F(x)$ e $G(x)$ respectivamente. Para testar a hipótese a qual chamaremos H_0 , que

$$H_0 : F(x) = G(x) \quad \text{para algum} \quad -\infty < x < \infty,$$

Kolmogorov-Smirnov sugere o teste,

$$\chi_{M,N} = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_N(x) - G_M(x)|, \quad (2.14)$$

onde $F_N(x)$ e $G_M(x)$ são distribuições das duas amostras em (2.13). Substituindo em (2.14) as funções de distribuição das amostras pelas funções de distribuição empírica acumulada das amostras, temos

$$\hat{\chi}_{M,N} = \sup_{-\infty < x < \infty} |\hat{F}_N(x) - \hat{G}_M(x)|,$$

e o nível de significância da hipótese, H_0 é dada por,

$$Pr(\chi_{M,N} \geq \hat{\chi}_{M,N} | H_0),$$

onde P_r é como definido em (2.11).

O seguinte resultado foi devido a Smirnov e pode ser encontrado em [21]

Teorema 11 *Se $F_N(x)$ e $G_M(x)$ são funções de distribuição de duas amostras independentes, extraídas da mesma população, com função de distribuição contínua. Então,*

$$\lim_{M,N \rightarrow \infty} Pr(\sqrt{n} \cdot \chi_{M,N} \geq u) = 2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-2r^2 u^2},$$

onde $n = \frac{N \cdot M}{N+M}$.

Usando estes resultado, partiremos para provar nossa hipótese que as amostras independentes em (2.13) seguem a mesma distribuição e para quaisquer duas destas amostras, temos que $M = N = 1000$. Logo, $\sqrt{n} = 10 \cdot \sqrt{5}$. Observamos na primeira coluna da mesma tabela, que a distância entre as distribuições das amostras para estes mesmos valores de N_{min} , é reduzida. Também vemos na terceira coluna da tabela 2.3, que os níveis de significância, dados pelo teste de Kolmogorov-Smirnov, da nossa hipótese H_0 , é acima de 0.6 o que fortalece

Tabela 2.3: Nesta tabela são mostrados resultados utilizados no teste de Kolmogorov-Smirnov.

k, q	$\sup F_{1000}(\beta_i^k) - G_{1000}(\beta_i^q) $	u da amostras $\{\beta_i^k\}$ e $\{\beta_i^q\}$	$2 \sum_{r=1}^{1600} (-1)^{r-1} e^{-2r^2 u^2}$
200,500	0,0290290	.6491081730	.7933928498
200,800	0,0330330	.7386403348	.6463126604
500,800	0,0160160	.3581286472	.9995348896

H_0 . Além disso, é praticamente um, para as amostras obtidas de dois sistemas com os parâmetros de dobra sendo 500 e 800. Implicando na concordância anterior de nossas análises, que as distribuições dos $\{\beta_i^k\}$, realmente seguem uma mesma distribuição.

2.5 Conclusão

Neste capítulo, revisitamos um processo de uma nova classe de 1-D processo de partículas, obtendo por meio de teoria de campo médio e método de Monte Carlo melhores estimativas da linha de transição entre as regiões de ergodicidade vs. não ergodicidade. Mostramos também por meio destas, o esperado comportamento linear da linha de transição quando as probabilidades utilizadas no processo estão próximas de zero. Em trabalho futuro desejamos mostrar de maneira mais formal este comportamento linear.

Capítulo 3

Quase não ergodicidade para estruturas finitas 1-D

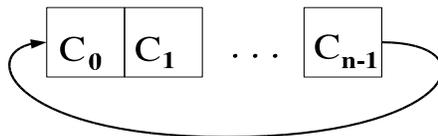
3.1 Descrição do modelo

Neste Capítulo estudamos um processo de partículas com tempo contínuo. Faremos uso de algumas definições feitas neste trabalho, na introdução geral e no Capítulo 2. Tomemos um conjunto finito \mathcal{A} , *alfabeto*, denotamos os elementos deste conjunto *letras*. Nós chamamos uma *palavra* do alfabeto \mathcal{A} , qualquer seqüência finita de elementos de \mathcal{A} . O comprimento de uma palavra W é definido pelo número de letras dela e denotamos por $|W|$. Todas as letras podem ser tratadas como palavras de comprimento um. Por definição, a palavra vazia a qual denotaremos por Λ , possui comprimento zero. O conjunto de palavras em \mathcal{A} é chamado o *dicionário* de \mathcal{A} e denotado por

$$\text{dict}(\mathcal{A}) = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{A}^m,$$

onde \mathcal{A}^m é o conjunto de palavras com comprimento m .

Nosso processo é uma cadeia de Markov com tempo t contínuo e um conjunto contável Ω de estados. Estes estados são chamados de *circulares*. Uma circular é quase o mesmo que uma palavra, com diferença seguinte: Cada circu-



lar $C \in \Omega$ é vista como se suas componentes estivessem pré-dispostas como um círculo. Em cada circular nós enumeramos os elementos, e estes números que compõe estas enumerações são chamados índices. Usaremos o índice x para C_x e a chamaremos x -ésima componente de C . Poderíamos utilizar palavras ao invés de circulares, mas isto tornaria necessária introdução de definições especiais das ações dos operadores nas “extremidades.”

Neste processo de partículas, o número de componentes de uma circular pode mudar no processo de interação, porque quando um estado C vai para um outro estado D , o comprimento desta outra pode diferir, aumentando ou diminuindo o número de componentes que haviam. Esta mudança no comprimento, é decorrente da substituição de algumas palavras. Nós iremos escrever uma regra de substituição genérica na forma

$$old \xrightarrow{r} new. \quad (3.1)$$

Informalmente falando, a fórmula (3.1) indica que toda vez que a palavra *old* é encontrada na circular, esta é substituída pela palavra *new* com uma taxa r . O comprimento da nova circular cresce por $|new| - |old|$ (de fato, decresce se esta diferença é negativa). Nós iremos dizer que uma substituição do tipo (3.1) tem comprimento constante se $|old| = |new|$ e comprimento variável caso contrário. Nosso processo pode ser definido por qualquer lista finita de regras de substituições, as quais podem ser vistas como segue:

$$old_i \xrightarrow{r_i} new_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

O nosso processo é uma cadeia de Markov com conjunto contável de esta-

dos e tempo contínuo. Escreveremos as suas taxas de transição. Para qualquer seqüência de palavras W_1, \dots, W_n nós chamamos *concatenação* e denotamos $concat(W_1, \dots, W_n)$ a palavra obtida por escrever todas as palavras nos parênteses uma após a outra na ordem na qual elas estão listadas. A taxa de ir de um estado C para qualquer outro estado D é

$$q(C \rightarrow D) = \sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^{|C|-|old_x|} \pi_{x,y}(C \rightarrow D), \quad (3.2)$$

onde a probabilidade de transição é

$$\pi_{x,y}(C \rightarrow D) = \begin{cases} r_x & \text{se existe } W_0 \text{ e } W_1 \text{ tais que } |W_0| = y - 1 \\ & \text{e } C = concat(W_0, old_x, W_1) \\ & \text{e } D = concat(W_0, new_x, W_1), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nós definimos qualquer soma em um conjunto vazio igual a zero. Em partícular, se $|C| - |old_x| < 1$, a parte direita de (3.2) fica igual a zero. Assim, o processo está definido.

Como conseqüência da expressão (3.2), temos que o conjunto de circulares tais que a taxa de ir para cada C seja positiva, é finito. Assim, dado a circular C , denotaremos este conjunto Ω_c^{in} . O conjunto Ω_c^{out} , de circulares para as quais a circular C pode ir com taxa positiva também é finito.

Nós dizemos que uma palavra $W = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ aparece num lugar x na circular $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ se ocorre $c_{x+1} = a_1, c_{x+2} = a_2, \dots, c_{x+n} = a_n$, onde todas as somas nos índices são módulo m . Para cada circular $C \in \Omega$ e cada palavra W , chamamos $quant(W|C)$, a quantidade de vezes que W aparece em C . Definimos agora a freqüência de W em C , como $quant(W|C)$, dividido pelo número de componentes em C , e denotaremos

$$freq(W|C) = \frac{quant(W|C)}{|C|}. \quad (3.3)$$

Observamos que a frequência (3.3) está sempre em $[0, 1]$.

Seja μ uma distribuição aleatória em Ω , a saber, para cada circular $C \in \Omega$ é definida $\mu(C) \in [0, 1]$ tal que

$$\sum_{C \in \Omega} \mu(C) = 1. \quad (3.4)$$

Para cada medida μ , denotamos

$$freq(W|\mu) = \sum_{C \in \Omega} freq(W|C) \cdot \mu(C), \quad (3.5)$$

a frequência da palavra W na medida μ . A expressão (3.5) converge, pois a soma do lado direito é sempre menor ou igual a (3.4) o que é um. Diremos que, uma medida μ é invariante para o nosso processo com taxas $q(C \rightarrow D)$ se e somente se para toda circular D

$$\sum_{C \in \Omega} \mu(C)q(C \rightarrow D) = \mu(D) \sum_{E \in \Omega} q(D \rightarrow E). \quad (3.6)$$

As somas na expressão (3.6) convergem, mesmo são finitas pois Ω_c^{in} e Ω_c^{out} são finitos. Existem algumas definições para ergodicidade de processos aleatórios, as quais são conectadas com medidas invariantes. Nós temos interesse dos casos quando o comprimento das circulares cresce na média, logo tende para o infinito. Neste caso medidas invariantes não podem existir. Logo, definições tradicionais são inúteis. Nos casos mais interessantes, nossos processos não são ergódicos e precisamos de uma outra definição.

Denotamos $\mu_I^t(C)$ a probabilidade de encontrar a circular C no tempo t , se começamos com a circular inicial I . Para toda circular inicial I e toda palavra W , nós denotamos,

$$freq(W|\mu_I^\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} freq(W|\mu_I^t).$$

Este limite nem sempre existe, por exemplo, imagine um processo com tempo discreto onde $\mathcal{A} = \{\oplus, \ominus\}$ e a circular inicial I têm uma única componente

no estado \ominus . Em cada passo de tempo, os operadores agiriam da seguinte maneira: todo \ominus torna-se $\oplus\oplus$ e todo \oplus torna-se $\ominus\ominus$. Desta maneira, sempre teríamos todas as componentes no estado \ominus ou todas no estado \oplus .

Seja Λ a circular vazia e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_I^t(\Lambda) = \mu_I^\infty(\Lambda).$$

O caso em que para todo I , $\mu_I^\infty(\Lambda) = 1$, i. é., existência da medida invariante, concentrada em Λ , não é interessante, pois nesta situação, teríamos informalmente falando, que o número de partículas do sistema diminuiu até desaparecer. Isto se parece com a ruína do jogador[23] no seguinte sentido: se comparamos I com o capital inicial, nós teremos que quanto maior este capital, a probabilidade do jogador entrar em ruína, correspondendo ao sistema “desaparecer”, tenda para zero.

Daqui por diante, somente consideraremos os casos em que o limite

$$freq(W|\mu_I^\infty) \text{ existe.} \quad (3.7)$$

Logo, denotamos para cada W ,

$$\varphi_I(W) = freq(W|\mu_I^\infty).$$

E provamos o seguinte resultado:

Lema 13 φ_I é uma medida uniforme em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, i. é. satisfaz as seguintes condições:

i) Seja Λ a palavra vazia. $\varphi_I(\Lambda) = 1$.

ii) $0 \leq \varphi_I(W) \leq 1$, para toda palavra W ,

iii) Sejam (a, W) e (W, a) concatenações da letra a com a palavra W . Logo,

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \varphi_I(W, a) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \varphi_I(a, W) = \varphi_I(W).$$

Baseado no lema 13, denotamos

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \{\varphi_I : |I| \geq k\} = \mathcal{L}.$$

Nossa conjectura é:

Conjectura 1 \mathcal{L} é sempre não vazia.

Agora, estamos prontos para definir um análogo de ergodicidade para nosso processo. Seja $\#(\mathcal{L})$ o número de elementos de \mathcal{L} . Diremos que para todo I , o processo μ_I^t , ou simplesmente μ^t é *quase ergódico* ou *QE*, se $\#(\mathcal{L}) = 1$ e o processo será dito *quase não ergódico* ou *QNE*, se $\#(\mathcal{L}) > 1$.

Seguiremos na direção da prova do lema 13.

Lema 14 *Seja \mathcal{A} o alfabeto. Para cada circular C , palavra W e medida μ a $\text{freq}(W|\mu)$ é consistente no seguinte sentido:*

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \text{freq}((a, W)|\mu) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \text{freq}((W, a)|\mu) = \text{freq}(W|\mu),$$

onde (a, W) e (W, a) são concatenações da letra a com a palavra W .

Prova.

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \mathcal{A}} \text{freq}((W, a)|\mu) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{C \in \Omega} \text{freq}((W, a)|C) \cdot \mu(C) \\ &= \sum_{C \in \Omega} \mu(C) \cdot \sum_{a \in \mathcal{A}} \text{freq}((W, a)|C) \\ &= \sum_{C \in \Omega} \mu(C) \cdot \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{\text{quant}((W, a)|C)}{|C|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{C \in \Omega} \mu(C) \cdot \frac{\text{quant}(W|C)}{|C|} \\
&= \sum_{C \in \Omega} \mu(C) \cdot \text{freq}(W|C) \\
&= \text{freq}(W|\mu).
\end{aligned}$$

A igualdade $\sum_{a \in \mathcal{A}} \text{freq}((a, W)|\mu) = \text{freq}(W|\mu)$ é análoga a prova anterior. o lema 14 está provado.

Lema 15 *Sejam \mathcal{A} o alfabeto, Λ a palavra vazia e μ uma medida em Ω . Logo*

$$\text{freq}(\Lambda|\mu) = 1.$$

Prova. Usando o lema 14, temos

$$\begin{aligned}
\text{freq}(\Lambda|\mu) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \text{freq}((\Lambda, a)|\mu) \\
&= \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{C \in \Omega} \text{freq}((\Lambda, a)|C) \cdot \mu(C) \\
&= \sum_{C \in \Omega} \mu(C) \cdot \sum_{a \in \mathcal{A}} \text{freq}((\Lambda, a)|C) \\
&= \sum_{C \in \Omega} \mu(C) \cdot \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{\text{quant}((\Lambda, a)|C)}{|C|} \\
&= \sum_{C \in \Omega} \mu(C) \cdot \frac{|C|}{|C|} = 1.
\end{aligned}$$

O lema 15 está provado.

Prova do lema 13. Começaremos por prova o item *iii*).

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in \mathcal{A}} \varphi_I(W, a) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \text{freq}((W, a)|\mu_I^\infty) \\
&= \sum_{a \in \mathcal{A}} \lim_{t \rightarrow \infty} \text{freq}((W, a)|\mu_I^t).
\end{aligned}$$

Como assumimos que o $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{freq}((W, a)|\mu_I^t)$ existe, podemos fazer,

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \lim_{t \rightarrow \infty} \text{freq}((W, a)|\mu_I^t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{a \in \mathcal{A}} \text{freq}((W, a)|\mu_I^t).$$

Logo, pelo lema 14 da consistência da $freq(\cdot)$, temos,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{a \in \mathcal{A}} freq((W, a) | \mu_I^t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} freq(W | \mu_I^t) \\ &= \varphi_I(W). \end{aligned}$$

A prova da outra igualdade, $\sum_{a \in \mathcal{A}} \varphi_I(a, W) = \varphi_I(W)$, pode ser feita de forma análoga. *O item iii) está provado.*

Partimos agora para provar o item i). Seja \mathcal{A} o alfabeto. Pelo item iii) temos,

$$\varphi_I(\Lambda) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \varphi_I((\Lambda, a))$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \mathcal{A}} \varphi_I((\Lambda, a)) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} freq((\Lambda, a) | \mu_I^\infty) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{a \in \mathcal{A}} freq((\Lambda, a) | \mu_I^t). \end{aligned}$$

Mas pelo lema 14,

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} freq((\Lambda, a) | \mu_I^t) = freq(\Lambda | \mu_I^t),$$

o qual é 1 pelo lema 15. *O item i) está provado.*

Por fim, provaremos o item ii). Claro que,

$$\varphi_I(W) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{C \in \Omega} freq(W | C) \cdot \mu^t(C) \geq 0.$$

Pois, $freq(W | C)$ e $\mu^t(C)$ são não negativos. Agora, mostraremos por indução no tamanho da palavra $W = (a_1, \dots, a_n)$ que

$$\varphi_I(\Lambda) \geq \varphi_I(W).$$

Base de indução. Seja $W_1 = (a_1)$. Pelo item iii)

$$\varphi_I(\Lambda) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \varphi_I((\Lambda, a)) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \varphi_I(a) \geq \varphi_I(a_1).$$

Logo, para a igual a a_1 temos

$$\varphi_I(\Lambda) \geq \varphi_I(a_1) = \varphi_I(W_1).$$

Passo de indução. Nossa hipótese de indução é

$$\varphi_I(\Lambda) \geq \varphi_I(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = \varphi_I(W_{n-1}).$$

Mas pelo item *iii*),

$$\varphi_I(W_{n-1}) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \varphi_I((W_{n-1}, a)) \geq \varphi_I((W_{n-1}, a)).$$

Se escolhermos a igual a a_n temos

$$\varphi_I(\Lambda) \geq \varphi_I(W_{n-1}) \geq \varphi_I((W_{n-1}, a_n)) = \varphi_I(W).$$

Logo usando o item *i*), o lema 13 está provado.

3.2 Substituições do nosso processo

O processo descrito na seção 1.1 desta Tese, será chamado o modelo de Toom. Este possui tempo discreto, tamanho do sistema infinito, e seu operador é composto por dois operadores, Flip_β e Ann_α . No caso presente $\mathcal{A} = \{\oplus, \ominus\}$ e chamamos \ominus e \oplus , *menos* e *mais*, respectivamente. Motivados pelos resultados de Toom[5](teoremas 1 e 2 página 12 desta Tese), nós propomos aqui um processo, com três substituições, as quais irão nos proporcionar obter o comportamento de quase não ergodicidade juntamente com a característica do processo não diminuir sempre. Lembremos que diferentemente do modelo de Toom, nosso processo tem tempo contínuo, cada uma das substituições que compõe o processo age de forma simétrica e lidamos com sistemas finitos.

Para o sistema aqui estudado, adotamos também $\mathcal{A} = \{\ominus, \oplus\}$. Este sistema será introduzido em duas etapas: primeiro colocaremos as substituições simétricas usando como base os operadores descritos no modelo de Toom, depois introduziremos informalmente uma substituição de comprimento variável que parece nunca ter sido mencionada exceto em [4].

- **Aniquilação(A)** : $\ominus \oplus \xrightarrow{\alpha} \Lambda$ e $\oplus \ominus \xrightarrow{\alpha} \Lambda$. Ao verificar que os estados das componentes de índice x e $x + 1$ são distintos, estas tornam-se componentes vazias (Λ) com taxa α independente das outras componentes, fazendo com que as componentes $x - 1$ e $x + 2$ sejam vizinhas. Este diminui o comprimento do sistema por duas unidades.
- **Conversão(C)** : $\ominus \xrightarrow{\beta} \oplus$ e $\oplus \xrightarrow{\beta} \ominus$. Apenas muda o estado da componente com taxa β independente das outras componentes. Este não altera o comprimento do sistema.

Embora com estas definições tenhamos obtido um processo simétrico que possa exibir comportamento não ergódico, este em média ao atuar num sistema finito, diminuiria o número de componentes do sistema até que desaparecesse. Para contornar esta situação, iremos inserir uma nova substituição chamada **Mitose**, que atua também de forma simétrica:

- **Mitose(M)** : $\ominus \xrightarrow{\gamma} \ominus \ominus$ e $\oplus \xrightarrow{\gamma} \oplus \oplus$. Este duplica a x -ésima partícula com taxa γ independente das outras componentes. Logo ele aumenta o comprimento do sistema por uma unidade.

Assim, temos definido um novo processo com tempo contínuo de comprimento variável, simétrico e composta pelas substituições **A**, **C** e **M**, as quais atuam com taxas α , β e γ , respectivamente.

Este modelo não foi descrito em tempo discreto, pois, ao existir uma palavra do tipo $(\ominus, \oplus, \ominus)$ na configuração, quando o operador **Aniquilação** análogo a nossa substituição **A** ocorresse, o processo não estaria definido.

A partir de agora adotamos $I = \ominus^n$. Logo, nós conjecturamos para nosso processo, μ_I^t que:

Conjectura 2 *Em nosso processo, para qualquer palavra W ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{freq}(W | \mu_I^t) \text{ existe para todo } |I| > n.$$

Logo, a conjectura 1 se faz pertinente para este processo e podemos utilizar as nossas definições de quase ergodicidade e quase não ergodicidade descritas nesta Tese.

3.3 Procedimento numérico

Os computadores são possuem memória finita, velocidade de cômputo limitado e o processamento atua em passos de tempo discreto. Logo, em simulação de qualquer processo com tempo t contínuo sempre torna-se em aproximações com tempo discreto. Denotamos por μ^t a distribuição desta aproximação no tempo discreto t . Logo, $\mu^t(C)$ é a probabilidade de encontrar a circular C no tempo t em nossa simulação.

Na teoria nós podemos imaginar nosso processo com um relógio em cada componente, o que é válido do ponto de vista de explicações teóricas. Mas para a simulação computacional existe outra maneira mais rápida, a qual utilizaremos.

Em cada experiência individual, a circular obtida no tempo t é denotada por C^t . Sua x -ésima componente é C_x^t onde $x = 0, \dots, |C^t| - 1$. Em todos nossos experimentos a circular inicial é $I = \ominus^{1000}$, onde \ominus^n é a palavra com n letras \ominus . Por razões técnicas nós adotamos valores inteiros para as taxas α, β e γ . Seja $\mathcal{U}_{(0,1)}$ a distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$. Denotamos que uma variável ξ segue uma distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$ por $\xi \in \mathcal{U}_{(0,1)}$.

Em cada passo de tempo discreto t acontece o seguinte: Escolhemos aleatoriamente um número inteiro $x \in \{0, 1, \dots, |C^t| - 1\}$ e geramos uma variável aleatória $\xi \in \mathcal{U}_{(0,1)}$. Então, se $\xi \in \left[0, \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\right)$ e $C_x^t \neq C_{x+1}^t$ ocorre a aniquilação destas componentes. Se $\xi \in \left[\frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\right)$, a componente C_x^t muda de estado. Se $\xi \in \left[\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}, 1\right]$, ocorre a mitose com a componente C_x^t .

Em todas as nossas simulações, $\beta = 1$. Desde que, o número de nossos experimentos foi muito limitado, nós tivemos dificuldade em estimar $\text{freq}(\oplus|\mu^t)$. Nossa saída foi aproximar este por

$$\overline{\text{freq}(\oplus|\mu^t)} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^t \frac{\text{freq}(\oplus|C^k)}{t}. \quad (3.8)$$

Nós calculamos esta quantidade para todo o experimento e usamos esta como uma estimação da $\text{freq}(\oplus|\mu^t)$. Em alguns casos, para obter melhores estimações, nós executamos vários experimentos independentes e depois tomamos a média aritmética deles.

Neste ponto, surge uma pergunta natural sobre o $|C^t|$, pois este vai crescer ou decrescer indefinidamente durante a evolução do processo. Logo, para contornar esta situação, utilizamos os procedimentos *corte* e *dobra*: Neste primeiro, se a circular, C^{t-1} sofre uma transição para uma outra no tempo t , C^t . Se $|C^t|$ for maior que um valor N_{max} fixo, excluimos uma metade desta. Neste caso, $|C^t|$ passa a ser $\lfloor |C^t|/2 \rfloor$ (onde $\lfloor \cdot \rfloor$ indica parte inteira). No outro procedimento, quando $|C^t|$ for menor que um dado valor N_{min} fixo, dobramos o número de partículas em C^t , fazendo uma cópia da primeira metade na segunda e conectamos as duas cópias para obter a nova circular. Ambos os procedimentos, corte e dobra, indicam nossa intenção em aproximar um processo infinito em \mathbb{Z} . Logo, nosso maior interesse é quando o sistema em média cresce. Utilizamos

em nossos experimentos computacionais $N_{min} = 500$ e $N_{max} = 15,000$ e a condição de parada adotada foi que cada uma das três substituições fossem executadas pelo menos 100.000 vezes.

3.4 Resultados numéricos e discussões

Em nosso processo, nós obtivemos uma aproximação grosseira da fronteira entre as regiões, onde nosso processo possui comportamento quase ergódico, QE versus quase não ergódico, QNE. Este fato é exibido na Figura 3.1.

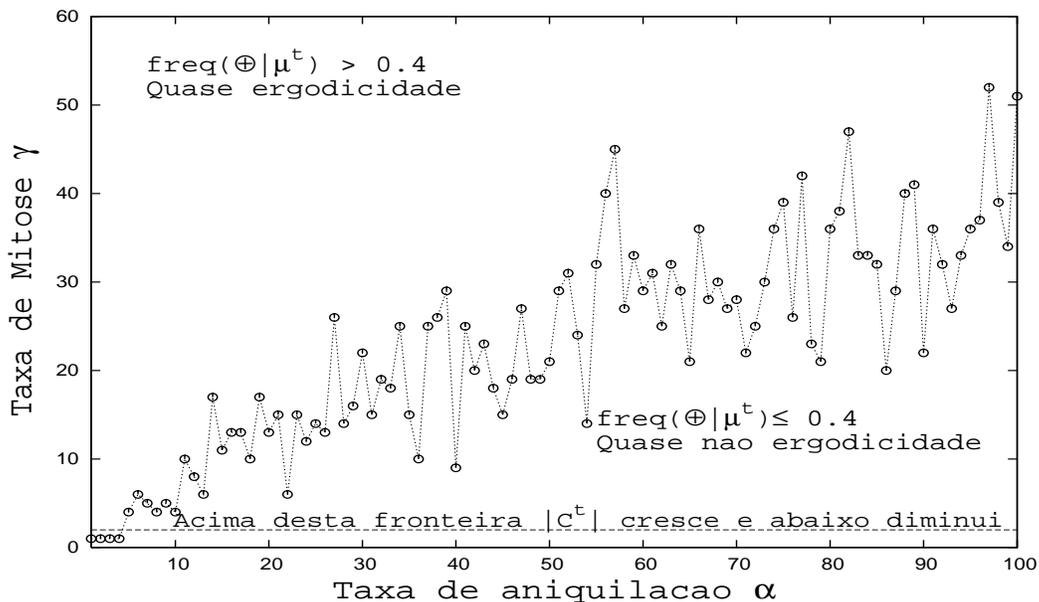


Figura 3.1: $\beta = 1$ todo o tempo. Bolas brancas mostram a fronteira entre QE vs. QNE. Para cada valor inteiro de $\alpha \in [0, 100]$, uma bola branca mostra o menor valor de γ para o qual nós obtemos $\overline{\text{freq}(\oplus|\mu^t)} > 0.4$. A linha abaixo é uma fronteira entre as regiões onde o sistema diminui vs. não diminui.

Nesta mesma Figura, nós exibimos a fronteira que estimamos, para a qual o comprimento do sistema, $|C^t|$, diminui ou não diminui quando o tempo t cresce. Ambas fronteiras, do comportamento e do comprimento do sistema quando t cresce, foram estimadas observando-se a evolução de uma única amostra. Diferente do modelo de Toom, nós observamos que nosso processo, possui

taxas para as quais o mesmo não diminui e ao mesmo tempo é QNE, isto nos proporcionou obter para sistemas finitos o mesmo tipo de fenômeno de não ergodicidade como no modelo de Toom. Nós observamos também taxas para as quais a quantidade de componentes em nosso sistema não aumenta ou diminui muito.

Nenhum operador análogo a **Mitose** foi utilizado no modelo de Toom[5] e sua presença com uma suficiente taxa γ previne nosso processo de diminuir. Nós estudamos a influência de mitose no comportamento de QE e QNE do sistema. Para tanto, fixamos as taxas de **Conversão** e **Aniquilação** e variamos somente a taxa γ de mitose. Para cada valor γ , nós utilizamos 20 experimentos independentes e calculamos o desvio padrão dos resultados de interesse, $\overline{freq(\oplus|\mu^t)}$, destes experimentos.

Na Figura 3.2 exibimos duas situações. Numa $\alpha = \beta = 1$ e neste caso a $\overline{freq(\oplus|\mu^t)} \approx 0.5$ para $\gamma \in [0, 60]$, ou seja o processo é QE. Na outra, $\alpha = 35$ e $\beta = 1$ e neste caso vemos que $\gamma \ll \alpha$ implica a quase não ergodicidade do processo e quando γ aumenta o processo passa a exibir quase ergodicidade.

Verificando a condição,

$$|freq(\oplus|C^t) - \overline{freq(\oplus|\mu^t)}| > \epsilon, \quad (3.9)$$

onde $\epsilon = 0.01$, observamos uma caracterização para $freq(\oplus|C^t)$ nos regimes de quase ergodicidade e quase não ergodicidade do nosso processo. Nesta caracterização, quando o processo está no regime de quase não ergodicidade, a condição (3.9) não é satisfeita,

$$freq(\oplus|C^t) \approx \overline{freq(\oplus|\mu^t)},$$

o qual é geralmente longe de 0.5 (ver Figura 3.3 a)). No outro, quando o processo está no regime de quase ergodicidade, a condição (3.9) é satisfeita,

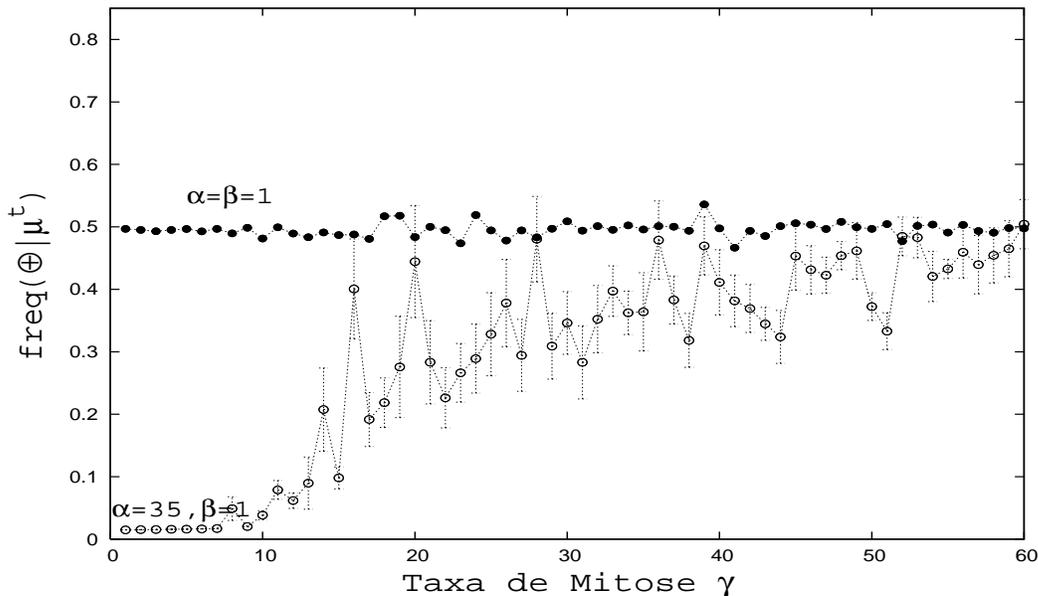


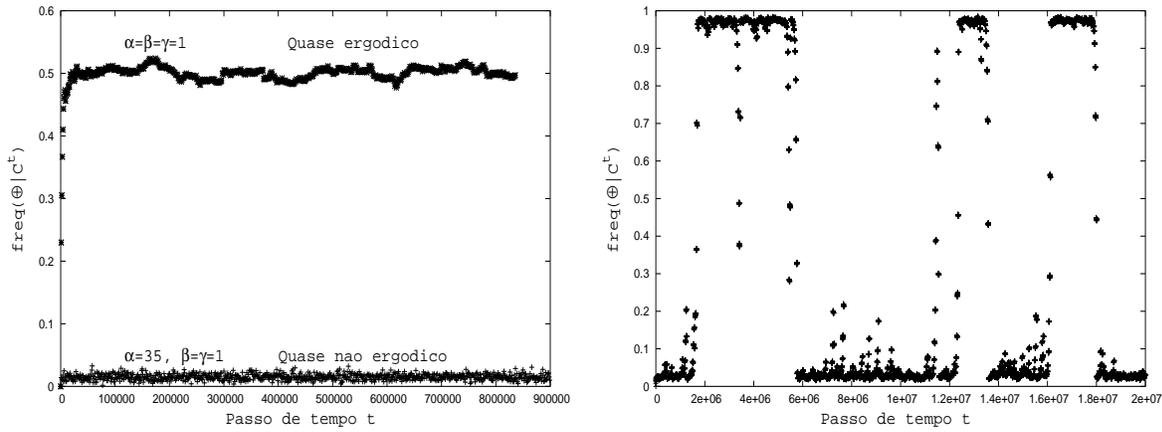
Figura 3.2: $\beta = 1$ todo o tempo. Bolas pretas mostram que para $\alpha = 1$, a $\overline{freq(\oplus|\mu^t)}$ fica próximo de 0.5 todo o tempo para todo γ considerado. Assim, este processo exibe QE. Bolas brancas mostram os resultados quando $\alpha = 35$. Neste caso, para γ pequeno o processo é QNE e quando γ aumenta o processo começa a mostrar QE. Nós usamos 20 experimentos para cada valor de γ e barras de erro indicam o desvio padrão.

$\overline{freq(\oplus|\mu^t)} \approx 0.5$ e a $freq(\oplus|C^t)$ é tipicamente distante deste, mais especificamente, ela fica a maior parte do tempo próximo de zero ou um (ver Figura 3.3 b)). Este comportamento observado, nos direcionou a uma maior investigação quando o processo é QE. Esta investigação nos mostrou conexões entre nossa definição de quase ergodicidade com a definição de ergodicidade em sistemas clássicos, as quais serão exibidas adiante.

Na hipótese ergódica descrita na página 3 desta Tese, nossa estimação da $freq(\oplus|\mu^t)$,

$$\overline{freq(\oplus|\mu^t)} = \sum_{k=1}^t \frac{freq(\oplus|C^k)}{t},$$

pode ser interpretada como a média temporal. Então, para verificar se o nosso processo satisfaz a hipótese ergódica, verificamos se sua média temporal é igual a média no espaço. Nós fizemos um experimento com: $\alpha = 35$, $\beta = 1$ e $\gamma = 20$. Neste caso a média temporal, $\overline{freq(\oplus|\mu^t)}$, foi perto de 0.5, o processo

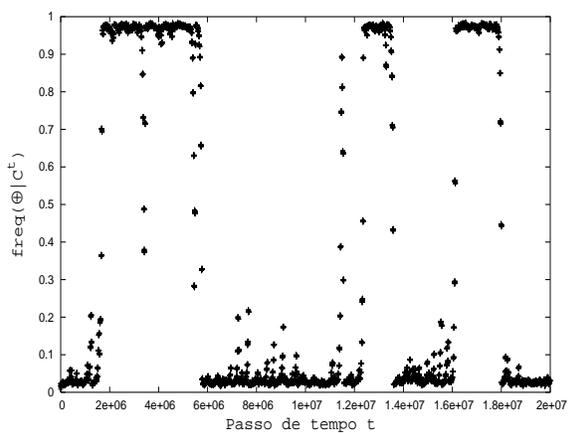


a)

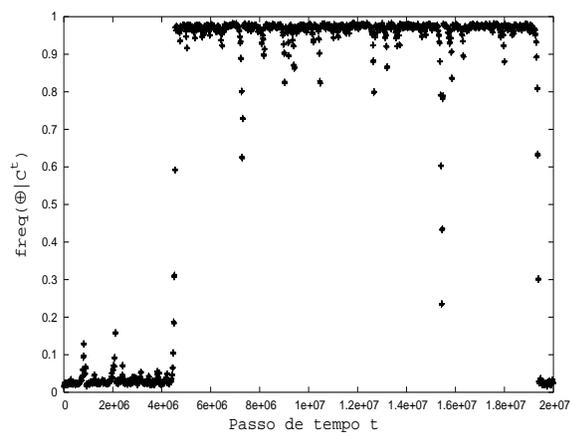
b)

Figura 3.3: Em a) temos duas situações: na primeira, $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Neste caso, o processo é QE (curva superior) por que $\text{freq}(\oplus|\mu^t) \approx 0.5$. Na segunda, $\alpha = 35$ e $\beta = \gamma = 1$, $\text{freq}(\oplus|\mu^t)$ é pequena (curva inferior), portanto o processo é QNE. Em ambos os casos, $\text{freq}(\oplus|C^t) \approx \text{freq}(\oplus|\mu^t)$. Em b) $\alpha = 35$, $\beta = 1$ e $\gamma = 20$. O processo é QE. Embora a $\text{freq}(\oplus|C^t)$ é longe da $\text{freq}(\oplus|\mu^t)$.

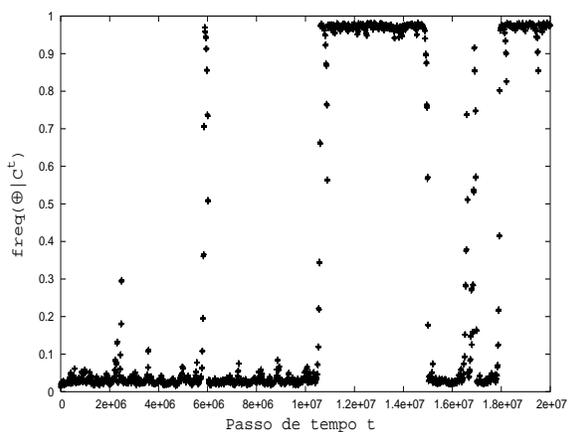
é quase ergódico. Nós executamos 20 experimentos independentes, e exibimos o comportamento de 10 deles na Figura 3.4 a) até a Figura 3.4 j) e para cada momento do tempo $t \in [0, 2 \cdot 10^7]$, nós calculamos a média destas trajetórias, o que corresponde a média espacial. Observamos que a curva resultante, exibida na Figura 3.4 k), possui comportamento suave em torno de 0.5, nós esperamos que esta aproxime-se mais de 0.5 quando o número de experimentos tende para infinito.



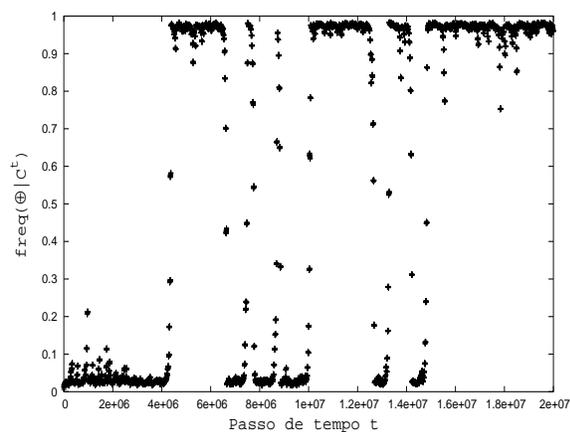
a)



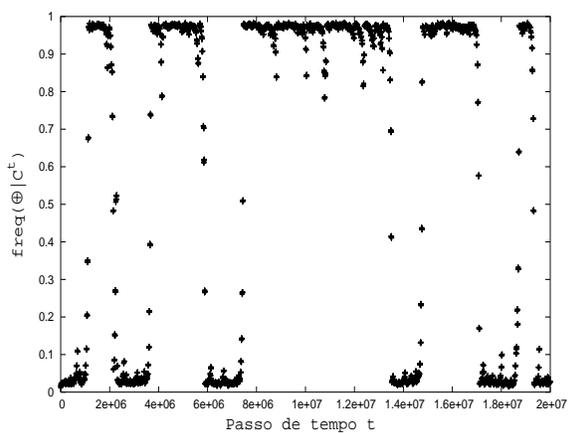
b)



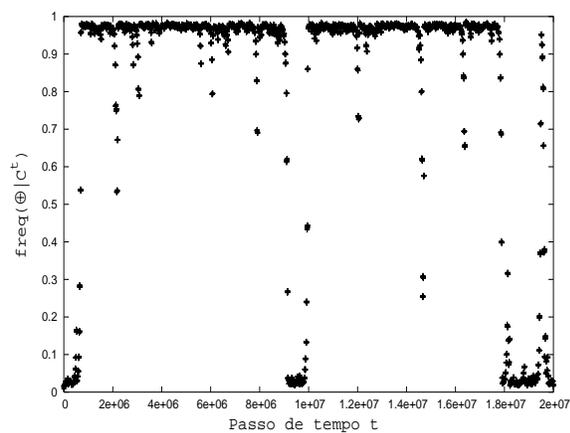
c)



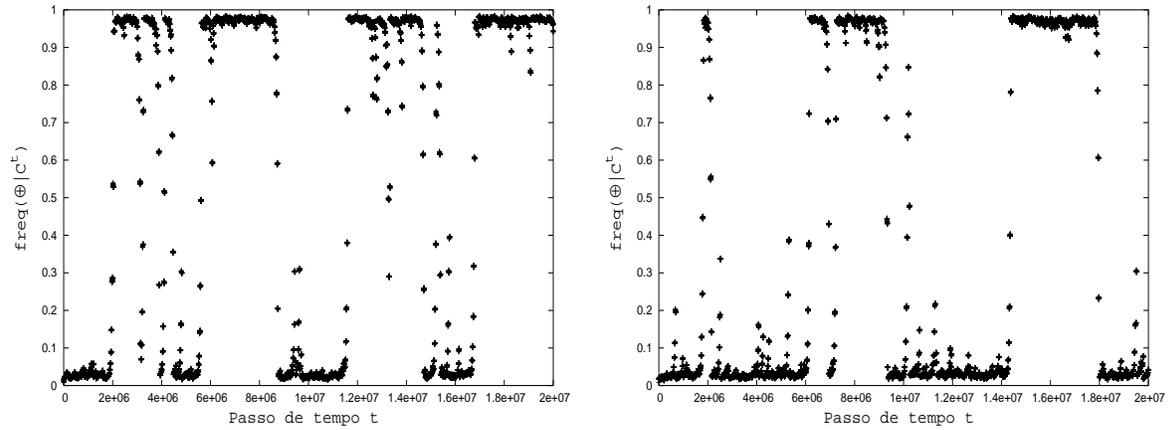
d)



e)

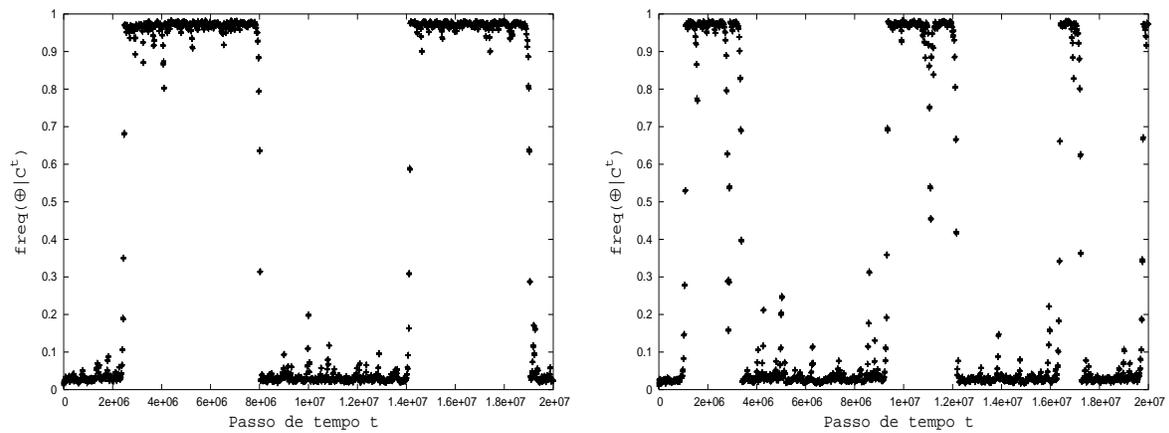


f)



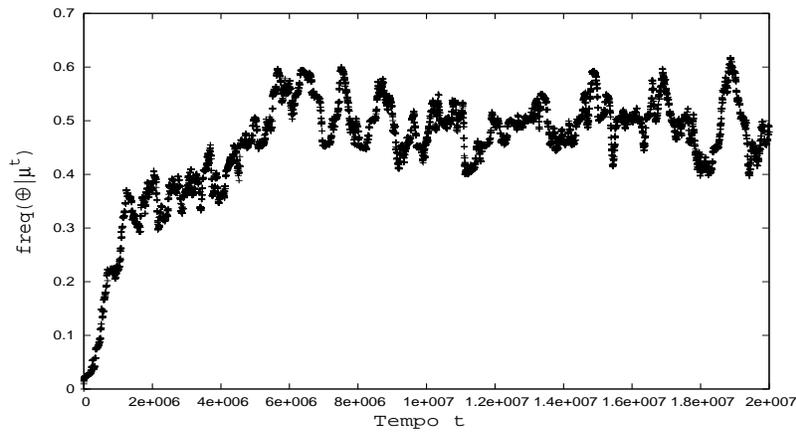
g)

h)



i)

j)



k)

Figura 3.4: $\alpha = 35, \beta = 1$ e $\gamma = 20$. De a) até j) nós exibimos 10 experimentos independentes. Em todos experimentos, nós observamos que $\text{freq}(\oplus|C^t)$, fica próximo de zero ou um a maior parte do tempo. Em k) para cada tempo t fixado, nós exibimos a média de 20 experimentos independentes como os exibidos de a) à j). Este gráfico tem comportamento suave.

3.5 Aproximação determinística

Na prática, nós lidamos freqüentemente com grandes quantidades de partículas, ou seja, macro-quantidades. Estas quantidades são tão grandes, que nós usamos macro-medidas contínuas no lugar de micro-medidas discretas. Como no caso que nós falamos da dosagem de uma substância, nós discriminamos esta quantidade da molécula, por exemplo em gramas, em vez de usar uma micro-medida como o número de moléculas.

A partir daqui, nós iremos propor uma aproximação determinística do processo aleatório com tempo contínuo, descrito na Seção 3.2 deste Capítulo. Para este processo, nós definimos as micro-medidas, $Q_{\oplus}(t)$ e $Q_{\ominus}(t)$, sendo as quantidades inteiras no tempo t das partículas dos tipos “*mais*” e “*menos*” respectivamente.

Para nossa aproximação, consideremos um processo análogo, onde ao invés de uma quantidade inteira de partículas de cada tipo, nós tenhamos correspondentes números reais (densidades) de cada tipo. Para este novo processo, denotemos x e y as densidades de mais e menos respectivamente. Neste estudo, estamos interessados na proporção de cada tipo de partículas. Por esta razão, nós estamos interessados no caso em que as densidades, x e y são tais que $x + y = 1$. Vale ressaltar ao leitor, que na Seção 2.1 do Capítulo 2 deste trabalho de tese, nós definimos uma aproximação, a qual chamamos aproximação de campo médio. Esta aproximação também é um tipo de aproximação determinística.

Agora, nós iremos obter o comportamento das densidades, x e y , como um limite do processo original com $Q_{\oplus}(t)$ e $Q_{\ominus}(t)$ tendendo para o infinito. Considere o vetor de densidades, $u = (x, y)$ e $\Delta u = (\Delta x, \Delta y)$ seu vetor de

acréscimos. O vetor $v = u + \Delta u$ descreve as novas quantidades após um passo t crescer Δt . Claro que v não é necessariamente normalizado. Logo, normalizamos v , obtendo

$$w = \frac{v}{|v|} = \left(\frac{x + \Delta x}{1 + \Delta x + \Delta y}, \frac{y + \Delta y}{1 + \Delta x + \Delta y} \right) \quad (3.10)$$

onde $|\cdot|$ denota a soma de componentes. A Figura 3.5 ilustra o procedimento para normalização que acabamos de descrever.

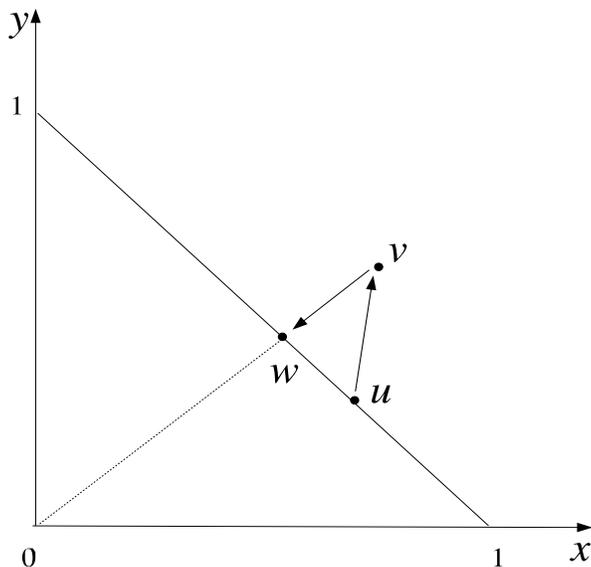


Figura 3.5: Ilustração do processo com normalização.

Supomos que $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x = O(\Delta t)$ e $\Delta y = O(\Delta t)$. Logo, $o(\Delta x)$ e $o(\Delta y)$ são $o(\Delta t)$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{x + \Delta x}{1 + \Delta x + \Delta y} - x &= \frac{x + \Delta x - x - x\Delta x - x\Delta y}{1 + \Delta x + \Delta y} \\ &= \frac{(1 - x)\Delta x - x\Delta y}{1 + \Delta x + \Delta y} \\ &= \frac{y\Delta x - x\Delta y}{1 + \Delta x + \Delta y} \\ &= (y\Delta x - x\Delta y) \cdot (1 - \Delta x - \Delta y + o(\Delta x + \Delta y)) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Mas, pela nossa hipótese $o(\Delta x + \Delta y) = o(\Delta x) + o(\Delta y) = o(\Delta t)$. Além disso, Δx e Δy são $O(\Delta t)$. Logo, $\Delta x \cdot \Delta y = \Delta x \cdot \Delta x = \Delta y \cdot \Delta y = O(\Delta t^2) = o(\Delta t)$.

Daí, o produto em (3.11) pode ser reescrito por:

$$\begin{aligned}
& (y\Delta x - x\Delta y) - (\Delta x + \Delta y) \cdot (y\Delta x - x\Delta y) + o(\Delta t) \cdot (y\Delta x - x\Delta y) = \\
& = (y\Delta x - x\Delta y) - O(\Delta t^2) \cdot (y - x) + o(\Delta t) \cdot O(\Delta t) \cdot (y - x) \\
& = (y\Delta x - x\Delta y) - o(\Delta t) \cdot (y - x) + o(\Delta t^2) \cdot (y - x) \\
& = y\Delta x - x\Delta y + o(\Delta t).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Dividindo a expressão (3.12) por Δt e depois fazendo o limite de $\Delta t \rightarrow 0$, temos

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x+y=1} = y \cdot \frac{dx}{dt} - x \cdot \frac{dy}{dt} \tag{3.13}$$

De forma análoga, calculamos $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{x+y=1}$ tal que,

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x+y=1} + \left. \frac{dy}{dt} \right|_{x+y=1} = 0.$$

Obtivemos a aproximação determinística do sistema com a normalização, com tempo contínuo, onde cada componente pode assumir somente dois estados, chamados *mais* e *menos*. Nós seguiremos na direção de estudar um processo em partícular.

3.6 Um caso partícular e o estudo de equilíbrio

Na Seção 3.1 página 77 desta Tese nós supomos que, *para toda circular inicial I e toda palavra W ,*

$$freq(W|\mu_I^\infty) \text{ existe.}$$

Também conjecturamos que \mathcal{L} é não vazio. Em consequência disto, nós definimos que para todo I o processo μ_I^t é *quase ergódico*, se $\#(\mathcal{L}) = 1$. Caso contrário, o processo é chamado *quase não ergódico*.

Para nosso processo adotamos o alfabeto $\mathcal{A} = \{\oplus, \ominus\}$ e as substituições de **Conversão**, **Mitose** e **Aniquilação**, as quais foram definidas na Seção 3.2. Nós obtivemos, através de simulação de Monte Carlo, a possibilidade da existência de uma forma de transição fásica entre os dois regimes (ver Figura 3.1) de quase ergodicidade e quase não ergodicidade. Também obtivemos que na região de quase ergodicidade a frequência de mais, $freq(\oplus|\mu^t)$, é perto de 0.5 (ver Figura 3.3 a)). Enquanto que na região de quase não ergodicidade (ver Figura 3.3 b)) esta frequência é diferente de 0.5.

Como definido na Seção 3.1, os estados deste processo são chamados circulares e cada circular C possui um número finito de partículas. A substituição **Conversão**, muda a componente de $\ominus \rightarrow \oplus$ e $\oplus \rightarrow \ominus$ com taxa β . Assim, se temos só conversão,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\beta x + \beta y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\beta y + \beta x.\end{aligned}\tag{3.14}$$

A substituição de **Mitose**, atua duplicando a partícula com taxa γ , ou seja, $\oplus \rightarrow \oplus\oplus$ e $\ominus \rightarrow \ominus\ominus$. Logo, adicionado esta substituição em 3.15 temos,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\beta x + \beta y + \gamma x, \\ \frac{dy}{dt} &= -\beta y + \beta x + \gamma y.\end{aligned}\tag{3.15}$$

A última das três substituições, a qual chamamos **Aniquilação**, sempre que duas componentes vizinhas possuem estados distintos, estas são eliminadas com taxa α . Usamos uma *aproximação do caos*, análoga àquela definida no Capítulo 2, Seção 2.1, e esta também atuaria misturando aleatoriamente as componentes e obtendo uma medida-produto, com as mesmas frequências de \oplus e \ominus que haviam no processo original. Ainda que grosseira, este tipo de aproximação é bastante utilizada, como por exemplo, no modelo de dinâmica de epidemias

Suscetível, Infectado e Recuperado[24, 25] chamado *SIR* e, no modelo *Presa-Predador*[26] de Lotka-Volterra. No modelo *SIR*, o termo que representa o número de contatos entre suscetíveis(*S*) com infectados(*I*) é descrito por $S \cdot I$, no modelo *Presa-Predador* também há um termo associado ao número de encontros entre a Presa(*A*) e o Predador(*B*), o qual é descrito por $A \cdot B$. Assim, através desta aproximação, nossa substituição de **Aniquilação** será proporcional ao número de encontros entre \oplus e \ominus . Logo, os crescimentos de x e y são descritos por

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\beta x + \beta y + \gamma x - \alpha xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -\beta y + \beta x + \gamma y - \alpha xy.\end{aligned}$$

Daí, usando (3.13), podemos descrever as taxas de crescimento de x e y após a normalização pelo seguinte sistema

$$\begin{aligned}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x+y=1} &= \beta y^2 - \alpha xy^2 - \beta x^2 + \alpha x^2 y, \\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{x+y=1} &= -\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x+y=1}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Chamamos *pontos de equilíbrio* do sistema (3.16), aqueles pontos do sistema para os quais $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x+y=1} = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{x+y=1} = 0$. Substituindo $y = 1 - x$ em $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x+y=1}$ temos,

$$\begin{aligned}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x+y=1} &= \beta - 2\beta x - \alpha x + 3\alpha x^2 - 2\alpha x^3, \\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{x+y=1} &= -\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x+y=1}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Logo, para calcular os pontos de equilíbrio neste caso, só necessitamos calcular os valores de x tais que

$$\beta - 2\beta x - \alpha x + 3\alpha x^2 - 2\alpha x^3 = 0,$$

o qual é satisfeito para

$$x \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\beta}}{2\alpha}, \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\beta}}{2\alpha} \right\}.$$

Logo, possuímos os seguintes pares (x, y) que descrevem nossos pontos de equilíbrio:

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

$$p_2 = \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\beta}}{2\alpha}, 1 - \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\beta}}{2\alpha} \right)$$

$$p_3 = \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\beta}}{2\alpha}, 1 - \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\beta}}{2\alpha} \right).$$

Então, vemos que a taxa de mitose γ não influencia os pontos de equilíbrio. Como x e y são densidades, os valores $\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\beta}}{2\alpha}$ tem que ser reais, o que é possível só se $\alpha \geq 4\beta$ e neste caso, p_1 , p_2 e p_3 são pontos de equilíbrio, correspondendo a quase não ergodicidade do processo original definido na Seção 3.2. A menos do caso em que $\alpha = 4\beta$, pois, $p_1 = p_2 = p_3$. Daí, para $\alpha \leq 4\beta$, temos p_1 sendo único ponto de equilíbrio, o que é condição necessária para corresponder a quase ergodicidade do processo. Mas, para podermos concluir isto, falta analisarmos se iniciando de qualquer densidade, esta convergiria para p_1 .

Para estudarmos a estabilidade local, usamos a matriz Jacobiana (segundas derivadas) DQ , dada pelo vetor formado pelo lado direito do sistema (3.17), tendo-se substituído em $\frac{dy}{dt}|_{x+y=1}$, $x = 1 - y$. Assim obtemos,

$$DQ(x, y) = \begin{bmatrix} -2\beta - \alpha + 6\alpha x - 6\alpha x^2 & 0 \\ 0 & -2\beta - \alpha + 6\alpha y - 6\alpha y^2 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

A estabilidade local de p_1 , é governada por (3.18), a qual neste ponto é dada por

$$DQ(p_1) = \begin{bmatrix} -2\beta + \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & -2\beta + \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha < 4\beta$, os autovalores de $DQ(p_1)$ são negativos. Logo, as densidades convergem para p_1 , o que concorda com o nosso resultado computacional mostrado na página 85 Figura 3.1, o qual indica a existência de uma região de quase ergodicidade, onde a frequência de \oplus é 0.5.

Se $\alpha > 4\beta$ os autovalores de $DQ(p_1)$ serão positivos, implicando que as densidades não convergem para este ponto. Além disso, ele atua como um ponto repulsor. Logo, mesmo se apenas p_1 fosse ponto de equilíbrio a aproximação não poderia corresponder ao comportamento de quase ergodicidade.

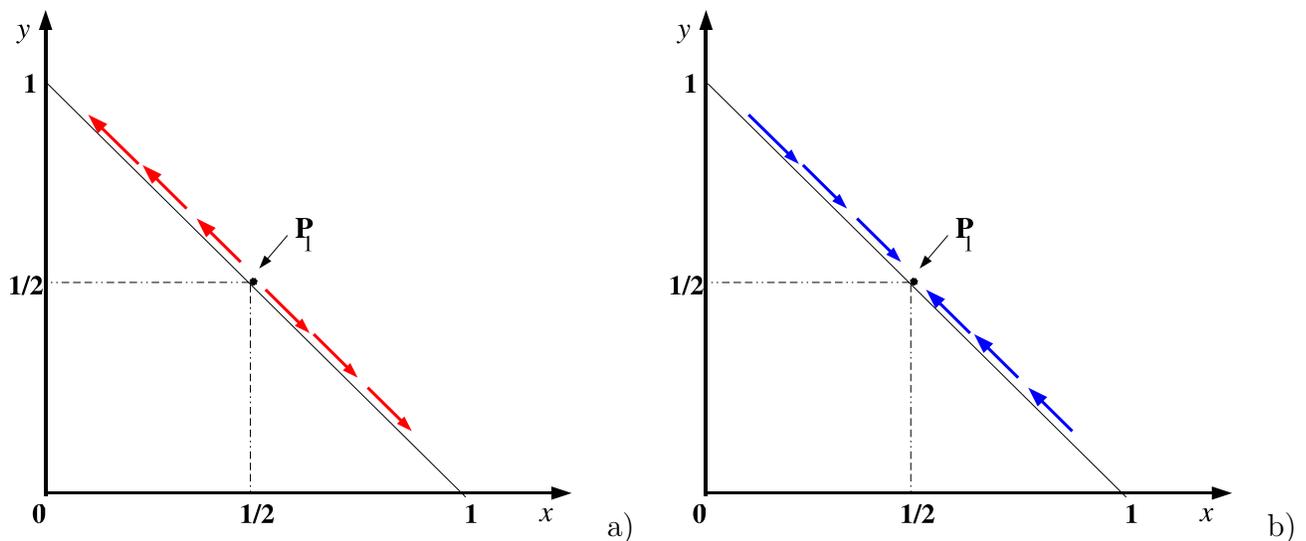


Figura 3.6: Esquema ilustrativo da existência de transição de fase para a nossa aproximação. Em a) $\alpha > 4\beta$, existem três pontos de equilíbrio, a saber: p_1 , p_2 e p_3 onde p_1 atua como um ponto repulsor, correspondendo a região de quase não ergodicidade. Em b) $\alpha \leq 4\beta$ há um único ponto de equilíbrio e as densidades tendem para ele, o que corresponde a situação de quase ergodicidade. Setas indicam convergência ou divergência das densidades na vizinhança de p_1 .

Concluimos deste estudo, que nossa aproximação do processo também apresenta uma transição física entre os comportamentos de quase ergodicidade vs. quase não ergodicidade, como mostrado na Figura 3.6. Vemos que, assim como na região de quase ergodicidade que definimos anteriormente, nós também obtemos nesta aproximação uma região correspondente a quase er-

godicidade, onde da mesma forma, encontramos que a frequência de \oplus é 0.5.

3.7 Conclusões

Os nossos resultados, obtidos computacionalmente, mostram a existência de um comportamento similar ao de não ergodicidade num sistema unidimensional com interação parecida com local, o qual muda o número de componentes no sistema durante sua evolução. Assim, nosso modelo produz um contraste com a conjectura de taxas positivas, mas não refuta esta, porque todos aqueles que propuseram a conjectura se basearam em processos com comprimento constante. A análise da nossa aproximação determinística concorda com os resultados da nossa modelagem computacional sobre a existência de dois regimes, oferecendo assim suporte ao nossos indícios da existência de uma forma de transição. Desejamos em trabalho futuro demonstrar as conjecturas 1 e 2 aqui propostas e também demonstrar a QNE do processo de forma mais rigorosa.

Conclusões gerais e perspectivas

As aplicações dos sistemas de partículas interagentes vêm aumentando continuamente e também vêm aumentando, as áreas de suas aplicações. Este fato, implica diretamente na criação de novos tipos de processos, os quais trazem consigo novos paradigmas a serem estudados. Neste trabalho, por exemplo, são estudados dois processos pertencentes a uma nova classe de processos de partículas proposta por Toom em [4]. Para estudarmos estes dois processos, nós utilizamos: modelagens computacionais, aproximações determinísticas e ferramentas teóricas, as quais nos permitiram analisar determinadas propriedades destes processos. Além disso, apresentamos formas de poder tratar processos desta nova classe. Surgiram as seguintes questões: como obter resultados mais gerais para caracterizar ergodicidade destes processos, uma definição mais formal para processos com tempo contínuo desta nova classe, definir uma nova forma de monotonicidade, dentre outras.

Operadores de processos com comprimento fixo, considerados tradicionalmente são lineares. Mesmo quando a palavra “não linearidade” é usada, os operadores de transição são geralmente lineares. Contrariamente, como vimos no capítulo 1 deste trabalho, mesmo um operador de um simples processo com comprimento variável pode ser não linear. Tendo isto em mente, em [27] Toom estudou uma grande classe de operadores de processos aleatórios sem assumir sua linearidade. Pode-se utilizar este estudo em processos com comprimento

variável, cujos operadores são geralmente não lineares. Neste estudo foram utilizados extensivamente conceitos da Análise Funcional, tais como o teorema do ponto fixo de Schauder-Tychonoff.

Uma proposta futura, é a de utilizar alguns conceitos da Analise Funcional, como os reultados para espaços com dimensão infinita e para operadores não lineares, com a finalidade de estudar processos não lineares, juntamente com suas possíveis aplicações em processos unidimensionais de comprimento variável ou não.

Apêndice A

Um contorno

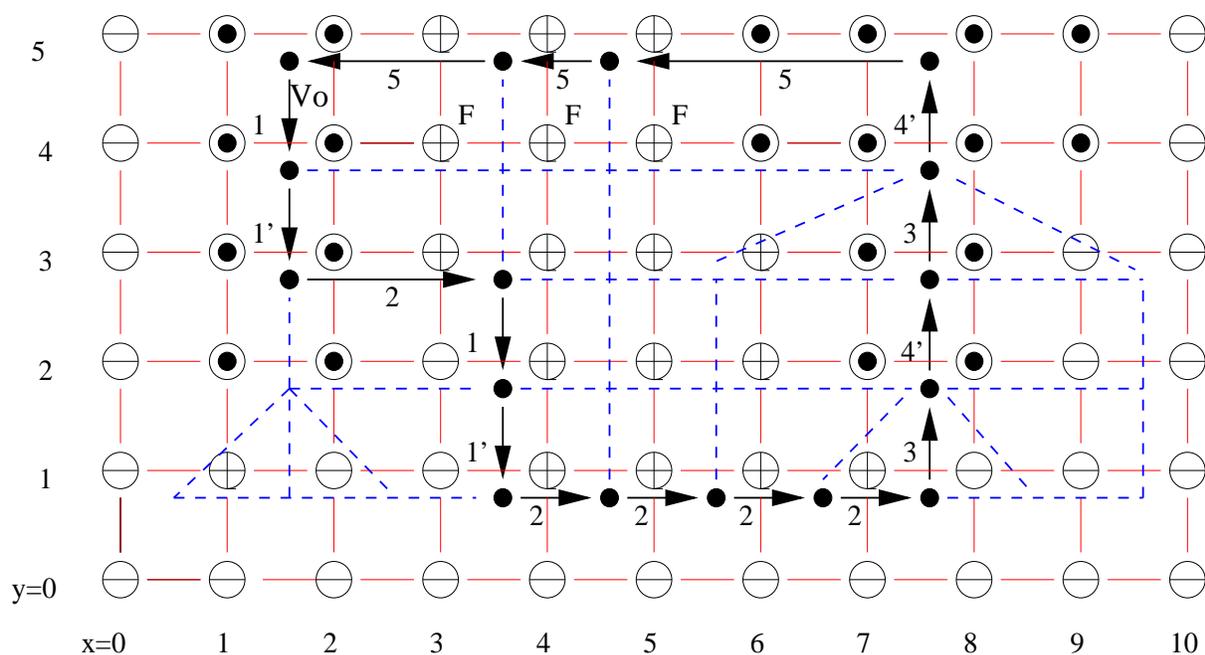


Figura A.1: Ilustração de um contorno num fragmento do processo ν .

Na figura A.1 mostramos o contorno em um fragmento do nosso processo ν . A mudança de y para $y + 1$ é feita por Flip_β se y é par e por Ann_α se y for ímpar. A figura inclui seis exemplos de menos tornando-se mais devido a ação de Flip_β , a saber os valores de $x = 1, 3, 4, 5, 6$ e 7 e três exemplos de aniquilações devido a ação de Ann_α são estes: o mais em $(1, 1)$ com o menos em $(2, 1)$, o mais em $(7, 1)$ com o menos em $(8, 1)$ e por fim o mais em $(6, 3)$ com o menos em $(9, 3)$. A coluna mais a esquerda mostra que nossa configuração

pertence a Ω_0 . Entre a coluna mais a esquerda e mais a direita existe três flores, a saber, (3,4), (4,4) e (5,4) marcadas com a letra F . O caminho $turnê(\omega)$ cerca a união das raízes duais, este contorno é mostrado com vetores em preto. O vértice V_0 está na quina superior a esquerda. Os vértices no interior do caminho, os quais possuem o estado mais, são raízes. As raízes duais, isto é, faces no interior desta $turnê(\omega)$, são separadas umas das outras por linhas azuis pontilhadas. As linhas pontilhadas em azul juntamente com os vetores descrevem o grafo dual \bar{G} do grafo original G em vermelho. O tipo do passo do caminho é mostrado próximo de cada passo. Estes tipos compõem o código de $turnê(\omega)$, o qual é

11'211'222234'34'555

Neste código da $turnê(\omega)$ temos todos os possíveis tipos de passos, exceto os tipos 2' e 2'' e faltam as combinações 31' e 4'2. O código da $sacola(\omega)$ é o mesmo sem o tipo 5 e o $consiso(sacola(\omega))$ é 121222233.

Apêndice B

Cálculos da aproximação de campo médio do Modelo de Toom

Consideremos y_t , z_t e x_t as densidades de \ominus , \odot e \oplus respectivamente. Agora vamos fazer a aproximação de campo médio para o operador $\text{Flip}_\beta : \mathcal{M}_{\{\ominus, \oplus\}} \rightarrow \mathcal{M}_{\{\ominus, \oplus\}}$.

$$F_\oplus(x_t) = \beta + (1 - \beta)x_t, \quad (\text{B.1})$$

logo, como $y_{t+1} = 1 - x_{t+1}$ obtemos

$$F_\ominus(y_t) = (1 - \beta)y_t. \quad (\text{B.2})$$

Agora faremos a aproximação para o operador $\text{Duel}_\alpha : \mathcal{M}_{\{\ominus, \oplus\}} \rightarrow \mathcal{M}_{\{\ominus, \odot, \oplus\}}$, temos:

$$\mu_t(\mathcal{CDuel}_\alpha)(s_v = \ominus) = (\mu_t \mathcal{C})(s_v = \ominus) - \alpha(\mu_t \mathcal{C}(s_v = \oplus, s_{v+1} = \ominus))$$

$$\mu_t(\mathcal{CDuel}_\alpha)(s_v = \oplus) = (\mu_t \mathcal{C})(s_v = \oplus) - \alpha(\mu_t \mathcal{C}(s_v = \oplus, s_{v+1} = \ominus))$$

$$\mu_t(\mathcal{CDuel}_\alpha)(s_v = \odot) = 2\alpha(\mathcal{C}\mu_t(s_v = \oplus, s_{v+1} = \ominus))$$

Se μ_t é medida produto, podemos reescrever estas formulas, obtendo-se as seguintes expressões para as densidades:

$$D_\ominus(x_t, y_t) = y_t - \alpha x_t y_t$$

$$\begin{aligned}
D_{\oplus}(x_t, y_t) &= x_t - \alpha x_t y_t \\
D_{\odot}(x_t, y_t) &= 2\alpha x_t y_t
\end{aligned} \tag{B.3}$$

O operador Clean : $\mathcal{M}_{\{\ominus, \odot, \oplus\}} \rightarrow \mathcal{M}_{\{\ominus, \oplus\}}$, verifica a freqüência de menos e mais retirando-se a freqüência de componentes no estado morto que haviam.

Logo,

$$\begin{aligned}
\mu_t(\mathcal{C}\text{Clean})(\ominus) &= \left(\frac{\mu_t \mathcal{C}(\ominus)}{1 - \mu_t \mathcal{C}(\odot)} \right) \\
\mu_t(\mathcal{C}\text{Clean})(\oplus) &= \left(\frac{\mu_t \mathcal{C}(\oplus)}{1 - \mu_t \mathcal{C}(\odot)} \right) \\
\mu_t(\mathcal{C}\text{Clean})(\odot) &= 0
\end{aligned}$$

Temos, então as seguintes densidades dadas pelo operador Clean:

$$\begin{aligned}
Cl_{\ominus}(x_t, y_t) &= \frac{y_t}{x_t + y_t} \\
Cl_{\oplus}(x_t, y_t) &= \frac{x_t}{x_t + y_t}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Logo, pelas igualdades dadas em (B.3) e (B.4), temos

$$\begin{aligned}
\mu_t(\mathcal{C}\text{Ann}_{\alpha})(s_v = \oplus) &= \mu_t \mathcal{C}\text{CleanDuel}_{\alpha}(s_v = \oplus) \\
&= \text{Clean}((\mu_t \mathcal{C})(s_v = \oplus) - \alpha(\mu_t \mathcal{C}(s_v = \oplus, s_{v+1} = \ominus))) \\
&= Cl_{\oplus}(D_{\oplus}(x_t, y_t), D_{\ominus}(x_t, y_t)) \\
&= \frac{x_t - \alpha x_t y_t}{x_t + y_t - 2\alpha x_t y_t}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Assim, substituindo as densidades de menos e mais das expressões (B.1) e (B.2) na expressão (B.5), nós obtemos a seguinte aproximação, para a densidade:

$$\begin{aligned}
x_{t+1} &= Cl_{\oplus}(D_{\oplus}(F_{\oplus}(x_t), F_{\odot}(y_t)), D_{\ominus}(F_{\oplus}(x_t), F_{\odot}(y_t))) \\
&= \frac{\beta + (1 - \beta)x_t - \alpha(\beta + (1 - \beta)x_t)(1 - \beta)y_t}{\beta + (1 - \beta)x_t + (1 - \beta)y_t - 2\alpha(\beta + (1 - \beta)x_t)(1 - \beta)y_t}
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Como $y_t = 1 - x_t$ e assumindo-se $x = x_t$ podemos reescrever a expressão (B.6)

da seguinte forma: $x_{t+1} = f(x_t)$ onde

$$f(x) = \frac{\beta + (1 - \beta)x - \alpha(\beta + (1 - \beta)x)(1 - \beta)(1 - x)}{1 - 2\alpha(\beta + (1 - \beta)x)(1 - \beta)(1 - x)}.$$

Referências Bibliográficas

- [1] M. Petrovskaya, I. Piatetski-Shapiro, and N. Vasilyev. *Modeling of Voting with Random Errors*. Automatics and Telemechanics, **10**, pp.103-107, 1969(em Russo).
- [2] P. Gács. *Reliable Cellular Automata with Self-Organization*. Journal of Statistical Physics, **103**, nn. 1/2, pp. 45-267, 2001.
- [3] L. F. Gray. *A Reader's Guide to Gacs's Positive Rates*. Journal of Statistical Physics, **103**, nn. 1/2, pp. 1-44, 2001.
- [4] A. Toom. *Particle Systems with Variable Length*. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, **33(3)**, pp. 419-425, 2002.
- [5] A. Toom. *Non-Ergodicity in a 1-D Particle Process with variable Length*. Journal of Statistical Physics, **115(3|4)**, pp. 895-924, 2004.
- [6] T.M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. N.Y., Springer-Verlag, 1985.
- [7] A. Toom, N. Vasilyev, O. Stavskaya, L. Mityushin, G. Kurdyumov and S. Pirogov. Discrete local Markov systems. *Stochastic Cellular Systems: ergodicity, memory, morphogenesis*. Ed. by R. Dobrushin, V. Kryukov and A. Toom. Nonlinear Science: theory and application, Manchester University Press, pp. 1-182, 1990.

- [8] K. Petersen. *Ergodic Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 2, Published by Cambridge University Press, 1983.
- [9] L.D.Landau and E.M.Lifshitz. Statistical Physics.(V.5 of *Course of Theoretical Physics*.) Second Edition. Pergamon Press, 1969.
- [10] Mathematical Physics in One Dimension. *Exactly Soluble Models of Interaction Particles*. A Collection of Reprints with Introductory Text by E. H. Lieb and D. C. Mattis, N.Y., Academic Press, 1966.
- [11] M. Evans, D. Foster, C. Godrèch and D. Mukamel. *Asymmetric Exclusion Model with Two Species: Spontaneous Symmetry Breaking*, Journal of Statistical Physics, **80**, nn.(1—2), pp.69-102, 1995.
- [12] R. A. Holmgren, *A First Course in Discrete Dynamical System*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [13] A. Toom, *A Family of Uniform Nets of Formal Neurons*, Soviet. Math. Doklady **9**, pp.1338-1341, 1968.
- [14] A. Toom, *Contornos, Conjuntos Convexos e Autômato Celulares*, IMPA-Brasil, 2001.
- [15] A. Toom. *Problems for Students of Probability. Topics in Contemporary probability an its application*, Edited by J. L. Snell, CRC press, 1995.
- [16] A. Toom. *Simple 1-Dimensional Systems with Super-Exponential Relaxation Times*. Journal of Statistical Physics, **80**, nn.3/4, pp.545-563,1995.
- [17] B. R. James. *Probabilidade: um Curso em Nível Intermediário*. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2002.

- [18] D. Markowiec. *Toom Probabilistic Cellular Automata Stationary States via Simulations*. Acta Physica Polonica B, **29**, nn.6, pp.1599-1607, 1998.
- [19] R. Cassia-Moura, C.S. Sousa, A.D. Ramos, L.C.B.B. Coelho and M.M. Valença. *Yet Another Application of the Monte Carlo Method for Modeling in the Field of Biomedicine*. Computer Methods and Programs in biomedicine, **78**, pp.223-235, 2005.
- [20] B. Simon. *The Statistical Mechanics of Lattice Gases*. v. I, Edited by Princeton University Press, 1993.
- [21] M. Fisz. *Probability Theory and Mathematical Statistics*. 3rd Edited by J. Wills & Sons, Nova York, 1963.
- [22] L. B. Shaw, J. P. Sethna, and K. H. Lee. *Mean-Field Approaches to the Totally Asymmetric Exclusion Process with Quenched Disorder and Large Particle*. Phy. Rev. E, **70**, 2004.
- [23] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Applications*. Volume 1, 2nd edition, Wiley, Sons Inc., New York, London, 1965.
- [24] W.O. Kermack and A.G. McKendrick. *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*. Proceedings of the Royal Society of London Series A, **15**, pp. 700-721, 1927.
- [25] F. Brauer and C. C. Chavez. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer-Verlag, New-York 2001.
- [26] A. Okuba. *Diffusion and Ecological Problems: Mathematics Models, Biomathematics*; **10**, Spring-Verlag Berlin Heidelberg, 1980.
- [27] A.Toom. *Every Continuous Operator has an Invariant Measure*, submetido para Journal of Statistical Physics.

Índice Remissivo

- alfabeto, 7, 73
- aniquilação, 10
- caixas, 31
- chance, 34
- cilindro fino, 7
- comprimento, 7
- concatenação, 75
- configuração, 7
- corredor horizontal, 31
- corte e dobra, 84
- dicionário, 7
- duelo linha, 26
- espaço de configurações, 7
- faces, 31
- flip linha, 25
- flip, 10
- flores, 29
- frequência, 8
- não-raízes, 30
- quase não ergódico, 78, 93
- raiz dual, 33
- raiz, 30
- uniforme, 7
- y-níveis, 24
- Stavskaya, 52, 54, 57
- circulares, 61, 73
- componentes, 7
- dicionário, 73
- ergódico, 8
- hipótese ergódica, 3
- invariante, 8
- letras, 7, 73
- não-ergódico, 8
- operador linear, 9
- operador de comprimento constante, 10
- operador de comprimento variável, 10
- operador determinístico, 8
- operadores e processos com comprimento fixo, 6
- palavra, 7, 73
- pintura de G, 31
- processos com comprimento variável, 6
- processo, 8
- quase ergódico, 78, 93
- tipos, 34

um caminho bem localizado, 36

aproximação de campo médio, 51

aproximação de Bethe, 51

árvore de Cayley, 51

códigos legais, 37

código maior, 38

códigos maiores k -legais, 38

códigos maiores legais, 38

código, 35

código(p), 35

conciso(C), 38

δ - medida, 8

ω realiza C , 36

atrator, 52

ponto fixo, 52

repulsor, 52

tipos maiores, 38

turnê(ω), 34