

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática



Cocircuitos não-separadores que evitam um elemento e graficidade em matroides binárias

João Paulo Costalonga

Sob orientação do Prof. Dr.
Manoel José Machado Soares Lemos

Recife, 2011.

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Cocircuitos não-separadores que evitam um elemento e graficidade em matroides binárias

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Paulo Costalonga

Sob orientação do Prof. Dr.
Manoel José Machado Soares Lemos

Recife, 2011.

Catálogo na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc L. Salvador, CRB 4-572

Costalonga, João Paulo.

Cocircuitos não-separadores que evitam um elemento e graficidade em matroides binárias / João Paulo Costalonga
- Recife: O Autor, 2011.

81 folhas; fig.

Orientador: Manoel José Machado Soares Lemos.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2011.

Inclui bibliografia, glossário e índice remissivo.

1. Matroides. 2. Teoria dos grafos. I. Lemos, Manoel (orientador). II. Título.

511.1

(22.ed.)

MEI 2011-013

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado:

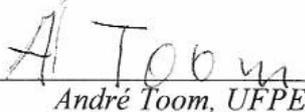


Manoel José Machado Soares Lemos, UFPE

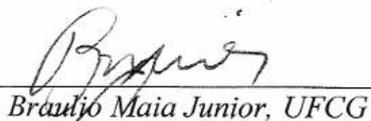
Orientador



Sóstenes Luiz Soares Lins, UFPE



André Toom, UFPE



Bráulio Maia Junior, UFCG



Raul Cordovil, Universidade Técnica de Lisboa

**COCIRCUITOS NÃO-SEPARADOS QUE EVITAM
UM ELEMENTO E GRAFICIDADE EM
MATRÓIDES BINÁRIAS**

Por

João Paulo Costalonga

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Fevereiro – 2011

Resumo

Bixby e Cunningham relacionaram graficidade de matroides binárias 3-conexas e cocircuitos não separadores, generalizando um critério de planaridade de grafos 3-conexos de Tutte. Lemos estudou o conjunto de cocircuitos não-separadores que evita um elemento de uma matroide binária 3-conexa e conseguiu outra caracterização: M é gráfica se e só se cada elemento de M evita exatamente $r(M) - 1$ cocircuitos não separadores. Aqui estudamos o conjunto $Y(M)$, dessas obstruções para graficidade, formado pelos elementos de M que evitam no mínimo $r(M)$ cocircuitos não-separadores. Mostramos que, numa matroide binária 3-conexa existem 3 circuitos contidos em $Y(M)$, cada qual não contido na união dos outros dois. Isso implica numa generalização do resultado de Lemos. No caso em que M não possui menor $M^*(K_{3,3}''')$ ou M não é regular, conseguimos resultado muito melhor: $|E(M) - Y(M)| \leq 1$.

A demonstração desses resultados se baseia numa extensão de alguns resultados de Whittle a respeito de menores de matroide 3-conexas, que também são desenvolvido aqui: Seja M uma matroide binária e 3-conexa com um menor 3-conexo N . Suponha que $r(M) \geq r(N) + 3$. Então existe um 3-coindependente I^* de M tal que $co(M \setminus e)$ é 3-conexa com menor isomorfo a N para todo $e \in I^*$. No mesmo capítulo desse teorema mostramos ainda uma versão para grafos que, porém, não se estende para matroides binárias.

Palavras-chave: Matroide binária, cocircuito não-separador, matroide gráfica, grafo planar.

Abstract

Bixby and Cunningham related the graphicity of 3-connected binary matroids to non-separating cocircuits and generalized a planarity criterium for graphs given by Tutte. Lemos studied the set of non-separating cocircuits that avoid an element in a 3-connected binary matroid and got another characterization: M is graphic if and only if each of its elements avoids exactly $r(M) - 1$ non-separating cocircuits. In this work we study the set $Y(M)$, of such obstructions to graphicity, composed by the elements of M that avoid at least $r(M)$ non-separating cocircuits. We proved that, in a binary 3-connected matroid, there are 3 circuits contained in $Y(M)$, each one not contained in the union of the two others. This implies a generalization of the result of Lemos. In the case that M does not have a $M^*(K_{3,3}'')$ -minor or M is non-regular, we got a quite better structure: $|E(M) - Y(M)| \leq 1$.

The proof of such results is based on an extension of some results of Whittle about minors of 3-connected matroids, that are also developed here: Let M be a 3-connected binary matroid with a 3-connected minor N , suppose that $r(M) \geq r(N) + 3$. So there exists a 3-coindependent set I^* of M such that $co(M \setminus e)$ is 3-connected with a minor isomorphic to N for each $e \in I^*$. In the same chapter of this theorem we show one more version for graphs that, although, does not extend to binary matroids.

Keywords: Binary matroid, non-separating cocircuit, graphic matroid, planar graph.

Agradecimentos

Agradeço especialmente aos que me ajudaram diretamente neste trabalho:

Acima de tudo a Manoel Lemos pela orientação, pelas dicas valiosas e pela paciência com os meus textos intragáveis e meus *misprints*.

(Antecipadamente, nessa versão, :->) Aos membros da banca pelas sugestões de melhoria.

Aos amigo Gabriel Lavagnoli, Márcia Paiva, Fabio Lima e Leonardo Secchin pela ajuda com a linguagem C.

Ainda a Fabio Lima pela ajuda com o Scip e Glpk e com a linguagem Bash(Shell Script).

A Andrew Makhorin, do Moscow Aviation Institute, desenvolvedor do Glpk, pelo suporte prestado pessoalmente e com presteza na lista de e-mails. (<http://www.gnu.org/software/glpk/>)

A Ademakson Araújo por ceder seu software de identificação de isomorfismos entre matroides binárias.

Também àqueles que, indiretamente, através de suas ações e gestos me ajudaram nessa conquista.

Sumário

1	Introdução	10
2	Teoria Básica	13
2.1	Primeiras definições e notações	13
2.2	Representabilidade e Matroides de Ciclos	13
2.3	Restrição e Posto	15
2.4	Fecho e Geradores	15
2.5	Dualidade	16
2.6	Menores	17
2.7	Simplicidade e elementos em série e paralelo	18
2.8	Conectividade	18
2.9	Matroides Binárias	19
2.10	Soma direta e ligação em paralelo	19
3	Menores 3-conexos em série de matroides 3-conexas	20
3.1	Resultados Preliminares	22
3.1	Demonstração de 3.0.6	25
3.2	Demonstração de 3.0.5	30
3.3	Alguns contra-exemplos	36
4	Matroides Complementares em Relação a Geometrias Projetivas	40
4.1	Classificação das matroides binárias 3-conexas de posto 4	41
5	Graficidade e cocircuitos não-separadores em matroides binárias	45
5.1	Resultados Preliminares	45
5.1	Alguns casos iniciais	47
5.2	Circuitos contráteis em grafos simples com 6 vértices que estendem $K_{3,3}$	48
5.3	Mais alguns preliminares	50
5.4	Demonstração do teorema 5.0.3	51
5.5	Demonstração do teorema 1.0.6	51
5.6	Exemplos extremais	54
6	Computação com matroides binárias e cocircuitos não separadores	56
6.1	Formato de arquivos e funções de entrada e saída	56
6.2	Estrutura de dados, conversão de formatos e escalonamento	57
6.3	Preliminares sobre representações	60
6.4	Primeiros programas: dualizando matroides e testando cossimplicidade	61

6.5	Espaço de cocircuitos e representações	64
6.6	Teste de conectividade	66
6.7	Encontrando e contando cocircuitos não-separadores	67
6.8	Coextendendo matroides binárias	70
6.9	Demonstração do lema 5.5.5	73
6.10	Glossário de funções e termos computacionais	77
7	Glossário de matroides	78

1 Introdução

Os pré-requisitos formais para a leitura dessa tese consistem em Teoria dos Grafos e um básico de Álgebra Linear e Corpos Finitos. Apesar de os pré-requisitos em Teoria de Matroides estarem desenvolvidos no primeiro capítulo, recomenda-se fortemente uma intimidade maior com essa teoria, no mínimo o equivalente a um curso introdutório. Para as demonstrações dos resultados do capítulo 2 pode-se consultar [Oxley, 1992].

Um cocircuito C^* de uma matroide conexa M é dito **não-separador** se $M \setminus C^*$ é conexa. Analogamente, um circuito C de uma matroide conexa M , (resp. um grafo 2-conexo G) é dito **contratível** se M/C (resp. G/C) é conexa (resp. 2-conexo sem laços). Em [Tutte, 1963] foi mostrado que, para um grafo 3-conexo, com ao menos 4 vértices:

- (a) Cada aresta de G pertence a pelo menos dois circuitos contratíveis de G .
- (b) Os circuitos contratíveis de G geram o espaço de ciclos de G .
- (c) G é planar se e só se cada uma de suas arestas pertence a exatamente dois circuitos contratíveis de G .

As respectivas generalizações para matroides binárias dessas afirmações foram conjecturadas por J. Edmonds e demonstradas em [Bixby, Cunningham, 1979]:

1.0.1 Teorema: [Bixby, Cunningham, 1979] *Se M é uma matroide 3-conexa e binária, com ao menos 4 elementos, então:*

- (a) *Cada elemento de M pertence a pelo menos dois cocircuitos não-separadores de M ;*
- (b) *Os cocircuitos não-separadores de M geram o espaço de cocircuitos de M ;*
- (c) *M é gráfica se e só se cada elemento de $E(M)$ pertence a exatamente dois cocircuitos não-separadores de M .*

Definimos a **estrela** de um vértice $v \in V(G)$ como o conjunto $S_G(v)$ das arestas de G incidentes a v . Se G é um grafo 3-conexo, os únicos cocircuitos não separadores de $M(G)$ são as estrelas dos vértices de G . De certa forma, os cocircuitos não-separadores fazem o papel de vértices nas matroides binárias. Em termos metafóricos, 1.0.1, diz que uma matroide 3-conexa e binária é gráfica, quando cada “aresta” de M está incidindo em dois desses “vértices”.

E sobre a quantidade de cocircuitos não-separadores evitando um elemento? Esse número representa alguma coisa? Há resultado análogo a 1.0.1 a esse respeito? A resposta positiva é dada pelos dois teoremas seguintes:

Olhamos para $2^{E(M)}$ como um espaço vetorial sobre $GF(2)$, com a diferença simétrica de conjuntos como soma e zero como o conjunto vazio. Seja $dim_e(M)$ a dimensão do espaço vetorial gerado pelos cocircuitos não separadores de M que evitam o elemento e . Então:

1.0.2 Teorema: [Lemos, 2004] *Seja M uma matroide binária 3-conexa com ao menos 4 elementos. Então cada elemento de M evita ao menos $r(M) - 1$ cocircuitos não-separadores. Mais ainda, para todo $e \in E(M)$, $dim_e(M) = r(M) - 1$.*

1.0.3 Teorema: [Lemos, 2009] *Seja M uma matroide binária 3-conexa com ao menos 4 elementos. Então M é gráfica se e somente se cada elemento de M evita exatamente $r(M) - 1$ cocircuitos não separadores.*

Esse último teorema foi conjecturado por Wu. Um dos resultados principais do presente trabalho é sua generalização:

1.0.4 Teorema: *Seja M uma matroide binária e 3-conexa com ao menos 4 elementos e $F \subseteq E(M)$ com $r_M^*(F) \geq r^*(M) - 2$. Então M é gráfica se, e só se, cada elemento de F evita, no máximo, $r(M) - 1$ cocircuitos não separadores de M .*

Com o seguinte impacto sobre a teoria dos grafos:

1.0.5 Corolário: *Seja G um grafo 3-conexo, com ao menos 4 vértices. Seja T uma árvore geradora de G e $F \subseteq E(G) - E(T)$, com $|F| = |E(G)| - |V(G)| - 1$. Então G é planar se e somente se cada aresta de F evita no máximo, $|E(G)| + |V(G)| + 1$ circuitos contratíveis.*

Sob outro ponto de vista, esses resultados consistem no estudo das seguintes obstruções para graficidade de matroide binárias e 3-conexas: do conjunto $Y(M)$ dos elementos de M que evitam ao menos $r(M)$ cocircuitos não-separadores e do conjunto $X(M)$ dos elementos de M que estão em ao menos 3 cocircuitos não-separadores. Foram dadas, em [Lai, Lemos, Reid, Shao, Wu], cotas inferiores para $|X(M)|$ e $|X(M) \cap Y(M)|$. Nesta tese estudamos cotas inferiores para $|Y(M)|$. A esse respeito conseguimos o seguinte resultado:

Para as definições de $K_{3,3}'''$ e S_8 veja 5.2.4, página 49 e 7.0.0.4, página 78. Um dos resultados alcançados aqui é:

1.0.6 Teorema: *Seja M uma matroide binária 3-conexa e não gráfica. Então:*

(a) *Se M não é regular então $|E(M) - Y(M)| \leq 1$. Em particular, se M não possui menor isomorfo a S_8 então $E(M) = Y(M)$.*

(b) *Se M é regular sem menor isomorfo a $M^*(K_{3,3}''')$ ou com menor isomorfo a $M^*(K_5)$, então $E(M) = Y(M)$.*

Os resultados que os computadores mostram sugerem a seguinte generalização:

1.0.7 Conjectura: *Seja M uma matroide 3-conexa, binária e não gráfica. Então:*

$$r(E(M) - Y(M)) \leq 2.$$

Os resultados obtidos aqui reduzem a demonstração do caso cográfico dessa conjectura a uma verificação computacional.

Outros resultados importantes desta tese são algumas ferramentas de base para lidar indutivamente com matroides e grafos 3-conexos, que estendem alguns resultados de [Whittle, 1999]. Essas ferramentas são usadas na demonstração dos teoremas 1.0.4 e 1.0.6. Para a apresentação desses resultados veja o início do capítulo 3.

No capítulo 4, introduzimos o conceito de matroide complementar a uma geometria projetiva e aplicamos para a classificação das matroides binárias 3-conexas de posto 4, a qual será usada nas partes computacionais da demonstração.

No capítulo 6, é desenvolvida a parte computacional da demonstração do lema 5.5.5, o qual serve de base para o teorema 1.0.6. Para um entendimento completo dos códigos é necessário algum conhecimento da linguagem C, o equivalente a um curso introdutório ou os capítulos de 1 a 5 e 7 de [Kernighan, Ritchie, 1989]. Porém o método empregado para a demonstração é entendível pela leitura desse capítulo ignorando-se os códigos. Há também códigos na linguagem bash(shell script), menos comum, mas estes códigos estão bem comentados e acredito que seja perfeitamente possível entendimento dos mesmos apenas com uma noção básica de programação.

2 Teoria Básica

2.1 Primeiras definições e notações

Usaremos a notação $|X|$ para indicar a cardinalidade de um conjunto X e o sinal de subtração, “ $-$ ”, para denotar a operação diferença de conjuntos e um conjunto da forma $\{e\}$ será denotado simplesmente por e a menos que haja risco de confusão, o conjunto potência de X será denotado por 2^X . Quando a interseção de dois conjuntos X e Y é vazia dizemos que eles se evitam, caso contrário dizemos que eles se encontram, analogamente, se $x \in X$ dizemos que x e X se encontram, ou que X passa por x , caso contrário dizemos que eles se evitam.

2.1.1 Definição: Uma **matroide** M é um par $(E, \mathcal{I}(M))$, onde E é um conjunto finito e $\mathcal{I}(M) \subseteq 2^E$, que satisfaz os seguintes axiomas:

I1) $\emptyset \in \mathcal{I}(M)$;

I2) Se $X \subseteq Y$ e $Y \in \mathcal{I}(M)$, então $X \in \mathcal{I}(M)$; e

I3) Se $X, Y \in \mathcal{I}(M)$ e $|X| < |Y|$ então existe $e \in Y - X$ tal que $X \cup e \in \mathcal{I}(M)$.

Os elementos de $\mathcal{I}(M)$ serão chamados os **independentes** da matroide M , os outros subconjuntos de E serão ditos os **dependentes** de M . Em especial os independentes maximais e dependentes minimais (da ordem de inclusão) de uma matroide serão chamados respectivamente de **bases** e **circuitos** da matroide. O conjunto E como na definição acima é dito o **conjunto base** da matroide M . Em geral, dada uma matroide M denotaremos seu conjunto base por $E(M)$. As famílias dos independentes, bases e circuitos de uma matroide M serão denotadas respectivamente por $\mathcal{I}(M)$, $\mathcal{B}(M)$ e $\mathcal{C}(M)$. Em especial chamamos de **triângulo** um circuito com 3 elementos.

Sejam M e N matroides. Uma bijeção $\varphi : E(M) \rightarrow E(N)$ é um **isomorfismo** entre as matroides M e N quando $X \subseteq E(M)$ é independente em M se e somente se $\varphi(X)$ é independente em N . Quando existe um isomorfismo entre M e N , dizemos que M e N são **isomorfas** e denotamos: $M \cong N$.

2.2 Representabilidade e Matroides de Ciclos

Considere uma matriz A , de dimensões $m \times n$, com entradas em um corpo, e considere os rótulos $1, 2, \dots, n$ para as respectivas colunas da matriz. Então $(E, \mathcal{I}(M))$ é uma matroide, onde $E := \{1, \dots, n\}$ e um subconjunto X de E está em $\mathcal{I}(M)$ se e somente se o conjunto

dos vetores-coluna rotulados por elementos de X é linearmente independente e quaisquer dois elementos de X rotulam colunas distintas.

2.2.1 Definição: Uma matroide, como no exemplo acima, é dita uma matroide **vetorial**, associada a A , usualmente denotamos $M[A]$. Uma matroide M é dita **representável** sobre um corpo K se existe uma matriz com entradas em K que, tendo as colunas rotuladas por elementos de M , nos fornece M como matroide vetorial. Em especial, quando uma matroide M é representável sobre $GF(2)$ (resp. $GF(3)$), dizemos que M é **binária** (resp. **ternária**).

2.2.2 Exemplo: Considere um grafo G com um conjunto de arestas E . Defina $\mathcal{I}(M) := \{X \subseteq E; \text{ as arestas de } X \text{ não formam ciclos}\}$. Então $(E, \mathcal{I}(M))$ é uma matroide. Tal matroide denotada por $M(G)$ é dita a **matroide de ciclos** de G . Uma matroide M é dita **gráfica** quando existe um grafo G tal que $M = M(G)$.

Observe que, se uma aresta e de G é um laço, então $\{e\}$ é um circuito de $M(G)$. Em geral, se um conjunto da forma $\{e\}$ é um circuito de uma matroide, então dizemos que e é um **laço** da matroide. Observe que e é um laço se e somente se e não está contido em nenhum independente (resp. base).

2.2.3 Teorema: (Axiomatização através de circuitos) A família $\mathcal{C}(M)$, dos circuitos de M satisfaz os seguintes axiomas:

C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}(M)$;

C2) Se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M)$ e $C_1 \subseteq C_2$, então $C_1 = C_2$; e

C3) Se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M)$, $C_1 \neq C_2$ e $e \in C_1 \cap C_2$, então existe $C_3 \in \mathcal{C}(M)$, tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

Reciprocamente, se temos um conjunto E e uma família $\mathcal{C}(M)$ de subconjuntos de E satisfazendo C1), C2) e C3), então existe uma única matroide com conjunto base E e família de circuitos $\mathcal{C}(M)$. Essa matroide tem a seguinte família de independentes:

$$\{I \subseteq E; \text{ não existe } C \in \mathcal{C}(M) \text{ tal que } C \subseteq I\}.$$

2.2.4 Proposição: Se M é uma matroide $I \in \mathcal{I}(M)$ e $I \cup e$ é dependente, então existe um único circuito contido em $I \cup e$, que, naturalmente, contém e .

2.2.5 Corolário: Se M é uma matroide, $B \in \mathcal{B}(M)$ e $e \notin B$, então existe um único circuito contido em $B \cup e$, este circuito contém e .

2.2.6 Definição: Os circuitos como na proposição e no corolário, recém-enunciados serão denotados respectivamente por $C(I, e)$ e $C(B, e)$ e são denominados os **circuitos fundamentais** de e com respeito a I e B respectivamente.

2.2.7 Lema: Seja M uma matroide. Os elementos de $\mathcal{B}(M)$ são equicardinais.

2.3 Restrição e Posto

Definimos o **posto** de M como sendo o número de elementos de uma base de M e denotamos por $r(M)$.

Dado um subconjunto $X \subseteq E(M)$ podemos definir uma estrutura de matroide com conjunto base X , com a família de independentes $\mathcal{I}(M) \cap 2^X$. Essa matroide será chamada a **restrição** de M a X e denotada por $M|X$.

Definimos a **função posto** em M como:

$$\begin{aligned} r_M : 2^E(M) &\longrightarrow \mathbb{Z}_+ \\ X &\longmapsto r(X) := r(M|X) \end{aligned}$$

Quando não houver risco de confusão denotaremos r_M simplesmente por r .

Segue da equicardinalidade das bases em $M|X$ que o conjunto dos independentes máximos contidos em X , que coincide com $\mathcal{B}(M|X)$, tem elementos os equicardinais e a cardinalidade de um elemento desse conjunto coincide com $r(X)$.

2.3.1 Teorema: (Axiomatização através do posto) A função posto de uma matroide satisfaz as seguintes propriedades:

R1) $0 \leq r(X) \leq |X|$, para todo $X \subseteq E(M)$;

R2) Se $X \subseteq Y \subseteq E(M)$, então $r(X) \leq r(Y)$; e

R3) (Semimodularidade) Para todos $X, Y \subseteq E(M)$, $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

Reciprocamente, se uma função $r : 2^E(M) \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ satisfaz R1), R2) e R3), então r é a função posto de uma matroide com conjunto base $E(M)$, cujos independentes são aqueles conjuntos I tais que $r(I) = |I|$.

2.3.2 Teorema: (Axiomatização através do posto, segunda forma) O sistema formado por R1), R2) e R3) é equivalente a:

R1)' $r(\emptyset) = 0$;

R2)' Se $X \subseteq E(M)$ e $x \in E(M)$ então $r(X) \leq r(X \cup x) \leq r(X) + 1$; e

R3)' Se $X \subseteq E(M)$, $x, y \in E(M)$ e $r(X \cup y) = r(X \cup x) = r(X)$, então $r(X \cup x \cup y) = r(X)$.

2.4 Fecho e Geradores

Dizemos que um conjunto X **gera** e se $r(X \cup e) = r(X)$. Denotamos o conjunto de todos os elementos de M gerados por X por $cl_M(X)$ (ou apenas $cl(X)$ se não houver risco de confusão) e o chamamos **fecho** de X . Se $cl(X) = X$, então dizemos que X é um **fechado** de M . A família dos fechados de M será denotada por $\mathcal{F}(M)$. Se $Y \subseteq cl(X)$, dizemos que Y é gerado por X e X é um gerador de Y . Quando um conjunto X gera $E(M)$, dizemos que X gera M . Quando H é um fechado de posto $r(M) - 1$ dizemos que H é um **hiperplano** de M .

2.4.1 Teorema: Para todos conjuntos $X, Y \subseteq E(M)$:

CL1) $X \subseteq cl(X)$;

CL2) Se $X \subseteq Y$, então $cl(X) \subseteq cl(Y)$;

CL3) $cl(cl(X)) = cl(X)$; i.e: $cl(X) \in \mathcal{F}(M)$; e

CL4) Se $x \in E(M)$ e $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$ então $x \in cl(X \cup y)$.

2.4.2 Teorema: Para todos os subconjuntos $X, Y \subseteq E(M)$:

(a) Se $X, Y \in \mathcal{F}(M)$, então $X \cap Y \in \mathcal{F}(M)$;

(b) $cl(X) = \bigcap_{X \subseteq F \in \mathcal{F}(M)} F$;

(c) $r(cl(X)) = r(X)$;

(d) Se $e \in cl(X)$ e $f \in cl(X \cup e)$ então $f \in cl(X)$; e

(e) $e \in cl(X)$ se, e somente se, existe $C \in \mathcal{C}(M)$ tal que $e \in C \subseteq X \cup e$.

2.5 Dualidade

2.5.1 Teorema: Dada uma matroide M , a família $\mathcal{B}(M)^* := \{E(M) - B; B \in \mathcal{B}(M)\}$ é a família de bases de uma matroide M^* , com conjunto base $E(M)$, denominada a matroide dual de M .

Ao se referir a algum objeto relativo à matroide dual, utilizamos o prefixo “co”: Os independentes, bases, circuitos, laços, fechados, a função posto, etc, da matroide M^* são os coindependentes, cobases, cocircuitos, colaços, cofechados, função coposto, etc de M . Analogamente ao usar os asterisco $*$ em alguma notação relativa a M estamos significando o correspondente em M^* .

Observe que um elemento é um laço se e somente se não está em nenhuma base, assim como um elemento é um colaço se, e somente se, está em toda base.

2.5.2 Teorema:

(a) $(M^*)^* = M$;

(b) I é independente de M se e só $E(M) - I$ é um gerador de M^* ;

(c) C é um circuito de M se e somente se $E(M) - C$ é um hiperplano de M^* ; e

(d) $r^*(X) = |X| - r(M) + r(E(M) - X)$.

2.5.3 Teorema: (Ortogonalidade) Se C é um circuito e C^* um cocircuito de M , então $|C \cap C^*| \neq 1$.

2.5.4 Proposição: Se M é representável sobre um corpo F então M^* também é representável sobre F .

Definimos uma **tríade** de uma matroide M como um triângulo de M^* .

2.6 Menores

2.6.1 Definição: Seja $T \subseteq E(M)$, definimos a **deleção** de T em M por $M|(E(M) - T)$, e denotamos $M \setminus T$. Definimos também a **contração** de T em M por $(M^* \setminus T)^*$ e denotamos M / T . Também denotamos $M|(E(M) - T)$ por $M \cdot T$.

A proposição que segue diz que há uma forma de associatividade e comutatividade para deleções e contrações.

2.6.2 Proposição: Se X e Y são subconjuntos disjuntos de $E(M)$, então:

$$(M \setminus X) \setminus Y = M \setminus (X \cup Y) = (M \setminus Y) \setminus X;$$

$$(M / X) / Y = M / (X \cup Y) = (M / Y) / X; e:$$

$$M \setminus X / Y = M / Y \setminus X;$$

2.6.3 Definição: Uma matroide da forma $M \setminus X / Y$ é dita um **menor** de M .

2.6.4 Proposição: Os independentes, dependentes e circuitos de $M \setminus T$ são respectivamente os independentes, dependentes e circuitos de M que evitam T , $r(M \setminus T) = r(M|2^{(E(M)-T)})$, $cl_{M \setminus T} : X \mapsto cl(X - T)$ e os geradores de $M \setminus T$ são os subconjuntos de $E(M) - T$ que geram $E(M) - T$ em M .

2.6.5 Teorema: Seja $B_T \in \mathcal{B}(M|T)$, então:

$$(a) r(M/T) : X \mapsto r(X \cup T) - r(T);$$

$$(b) \mathcal{I}(M/T) = \{I \subseteq E(M) - T; I \cup B_T \in \mathcal{I}(M)\} \\ = \{I \subseteq E(M) - T; \text{ existe } B \in \mathcal{B}(M|T) \text{ com } B \cup I \in \mathcal{I}(M)\};$$

$$(c) \mathcal{B}(M/T) = \{B \subseteq E(M) - T; B \cup B_T \in \mathcal{B}(M)\} \\ = \{B \subseteq E(M) - T; \text{ existe } B' \in \mathcal{B}(M|T) \text{ com } B' \cup B \in \mathcal{B}(M)\};$$

$$(d) \mathcal{C}(M/T) \text{ é a família dos membros minimais e não vazios de } \{C - T; C \in \mathcal{C}(M)\}; e$$

$$(e) \text{ Se } C \in \mathcal{C}(M), \text{ então } C - T \text{ é uma união de circuitos de } M/T.$$

2.6.6 Corolário: $r(M/e) = r(M) - 1$ a menos que e seja um laço e $r(M \setminus e) = r(M)$, a menos que e seja um colaço.

2.6.7 Proposição: $M \setminus T = M / T$ se, e somente se, $r(T) + r(E(M) - T) = r(M)$.

2.6.8 Corolário: $M \setminus e = M / e$ se, e somente se, e é um laço ou colaço de M .

2.7 Simplicidade e elementos em série e paralelo

Dizemos que dois elementos estão em **paralelo** quando formam um circuito de tamanho 2. Dizemos que $X \neq \emptyset$ é uma **classe em paralelo** de M se X é maximal na propriedade de que cada dois elementos distintos de X estejam em paralelo em M . Definimos uma **classe em série** de M como sendo uma classe em paralelo de M^* . Uma classe em série ou paralelo é dita trivial se possui um único elemento. Quando dois elementos pertencem à mesma classe em série de uma matroide dizemos que estes elementos estão **em série**.

Uma matroide é dita **simples** se não possui laços ou elementos em paralelo e dita **cos-simples** se M^* é simples, i.e.: se não possui colaços ou elementos em série.

A cada matroide M podemos associar sua **simplificação** $si(M)$, que é uma matroide obtida a partir de M pela deleção de seus laços e pela deleção de todos, exceto um elemento de cada classe em paralelo. Analogamente, definimos a **cossimplificação** de M por $co(M) := (si(M^*))^*$, i.e.: $co(M)$ é obtida a partir de M através da deleção de seus colaços e pela contração de todos, exceto um elemento de cada classe em série. Observe que essas matroides não estão bem definidas, mas qualquer que seja a escolha de seus elementos temos matroides isomorfas, por isso geralmente não nos preocupamos com a boa definição desses termos.

2.7.1 Proposição: *Dois elementos e e f estão em série se e somente se estão exatamente nos mesmos circuitos.*

2.8 Conectividade

Seja M uma matroide e $X \subseteq E(M)$, definimos a **função conectividade** de X em M por:

$$\xi_M(X) := r(X) + r(E(M) - X) - r(M) = r(X) + r^*(X) - |X|.$$

Seja k um inteiro positivo. Um conjunto $X \subseteq E(M)$ é dito um **k -separador** de M se $\min\{r(X), r(E(M) - X)\} \geq k$ e $\xi_M(X) \leq k - 1$. Nesse caso, dizemos que $\{X, E(M) - X\}$ é uma **k -separação** de M e M é **k -separável**. Uma matroide M é dita **n -conexa** se para todo $k \leq n - 1$, M não é k -separável. Observe que se $X \subseteq E(M)$, então $\xi_M(X) = \xi_{M^*}(X)$. Então M e M^* possuem os mesmos k separadores para todo k .

Em especial quando M é 2-conexa, dizemos simplesmente que M é **conexa**. Em particular:

2.8.1 Proposição: *M é conexa se e só se cada par de elementos de M pertence a um circuito em comum em M .*

2.8.2 Proposição: *Se M é n -conexa e $|E(M)| \geq 2n - 1$ então cada circuito de M possui ao menos n elementos.*

2.9 Matroides Binárias

2.9.1 Teorema: *As afirmações seguintes são equivalentes para uma matroide M*

- (a) M é binária;
- (b) Se C é um circuito e C^* um cocircuito de M , então $|C \cap C^*|$ é par;
- (c) A diferença simétrica de uma família de circuito de M é uma união disjunta de circuitos de M ;
- (d) M não possui menor isomorfo a $U_{2,4}$.

2.10 Soma direta e ligação em paralelo

Suponha que M_1 e M_2 sejam matroides satisfazendo $E(M_1) \cap E(M_2) = \emptyset$. Definimos a **soma direta** de M_1 e M_2 como a matroide $M_1 \oplus M_2$, com conjunto base $E(M_1) \cup E(M_2)$ e família de circuitos $\mathcal{C}(M_1) \cup \mathcal{C}(M_2)$.

2.10.1 Lema: *Seja M uma matroide. Um conjunto $X \subseteq E(M)$ é um separador de M se e só se $M = M|X \oplus M \setminus X$.*

Suponha que M_1 e M_2 são matroides tais que $E(M_1) \cap E(M_2)$ contenha um único elemento p . Definimos a **ligação em paralelo** de M_1 e M_2 , $P(M_1, M_2)$, como a matroide de conjunto base $E(M_1) \cup E(M_2)$ e família de circuitos:

$$\mathcal{C}(M_1) \cup \mathcal{C}(M_2) \cup \{C_1 \cup C_2 - p : p \in C_i \in \mathcal{C}(M_i) \text{ para } i = 1, 2\}.$$

3 Menores 3-conexos em série de matroides 3-conexas

Neste capítulo vamos dar sequência aos resultados de [Whittle, 1999] que vamos enunciar a seguir.

3.0.1 Lema: [Whittle, 1999] *Se N é um menor 3-conexo de uma matroide 3-conexa M com $rM \geq rN + 1$, então existe $e \in E(M)$ tal que $si(M/e)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N .*

Esse lema foi usado em [Lemos, 2009] para a demonstração de 1.0.3. Aqui, para demonstrar 1.0.6, com técnica semelhante foi necessário ir além. Fizemos uso dos dois resultados seguintes, do mesmo trabalho de Whittle, e fizemos uma extensão desses resultados, o teorema 3.0.4, também em seguida.

3.0.2 Teorema: [Whittle, 1999] *Se N é um menor 3-conexo de uma matroide 3-conexa M e $rN + 2 \leq rM$, então para todo elemento e de M tal que $si(M/e)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N existe um outro elemento f tal que ambas $si(M/f)$ e $si(M/e, f)$ são 3-conexas com um menor isomorfo a N .*

3.0.3 Corolário: [Whittle, 1999] *Se N é um menor 3-conexo de uma matroide 3-conexa M com $rM \geq rN + 2$, então existem elementos distintos $e, f \in E(M)$ tais que $si(M/e)$ e $si(M/f)$ são 3-conexas com um menor isomorfo a N .*

3.0.4 Teorema: *Suponha que N é um menor 3-conexo de uma matroide 3-conexa binária M com $rM \geq rN + 3$. Então existe $I \in \mathcal{I}(M)$ com $|I| = 3$ tal que para todo $e \in I$, $si(M/e)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N .*

A proposição que segue dá sequência desse resultado para grafos, no entanto, na última seção mostramos que 3.0.6 é, em certo sentido o melhor resultado dessa forma para matroides binárias, isso é não podemos estendê-lo para valores maiores que 3.

3.0.5 Proposição: *Suponha que H seja um menor 3-conexo e simples de um grafo 3-conexo G , que H possua ao menos 4 arestas e que $|V(G)| \geq |V(H)| + 6$. Então existe $F \subseteq E(G)$, tal que $|F| = 4$ e $G[F]$ é uma floresta e, para todo $e \in F$, $si(G/e)$ é 3-conexo e possui um menor isomorfo a H .*

Nesse trabalho vamos usar 3.0.4 em sua forma dual:

3.0.6 Teorema: *Suponha que N é um menor 3-conexo de uma matroide 3-conexa binária M com $r^* M \geq r^* N + 3$. Então existe $I^* \in \mathcal{I}^*(M)$ com $|I^*| = 3$ tal que para todo $e \in I$, $\text{co}(M \setminus e)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N .*

Uma obstrução para demonstrar esses resultados de forma indutiva é a ocorrência de elementos e e f numa matroide 3-conexa M tais que $\text{si}(M/e)$ e $\text{si}(M/e, f)$ são 3-conexas com menores isomorfos a N mas $\text{si}(M/f)$ não é 3-conexa. A demonstração de tais resultados se baseia no estudo dessa ocorrência. As duas próximas proposições são os resultados mais importantes sobre esse estudo neste trabalho.

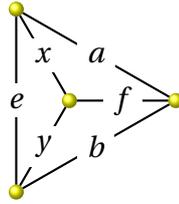
É útil em demonstrações indutivas envolvendo matroides 3-conexas o fato de que se e é um elemento de uma matroide H não 3-conexa tal que H/e é 3-conexa, então e é um laço de H , ou pertence a um cocircuito de H com 1 ou 2 elementos. A proposição adapta a ferramenta para o estudo de $\text{si}(M/e)$ em vez de M/e , técnica também comum em demonstrações indutivas envolvendo matroides 3-conexas.

3.0.7 Proposição: *Seja N uma matroide simples e conexa. Suponha que e é um elemento de N tal que $\text{si}(M/e)$ se 3-conexa, com ao menos 4 elementos. Então N é 3-conexa ou existe um conjunto 2-separador de N de posto 2 contendo e .*

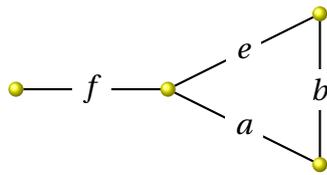
A próxima proposição detalha as possíveis configurações que encontramos, na ocorrência da obstrução acima mencionada.

3.0.8 Proposição: *Suponha que M é uma matroide binária, 3-conexa, com um menor 3-conexo N , com $|E(N)| \geq 4$. Suponha que e e f sejam elementos de $E(M)$ tais que $\text{co}(M \setminus e)$ e $\text{co}(M \setminus e, f)$ sejam 3-conexas com menores isomorfos a N , mas $\text{co}(M \setminus f)$ não seja 3-conexa. Então existem a e $b \in E(M) - \{e, f\}$ tais que, $\{e, a, b\}$, é um coindependente de M , $\text{co}(M \setminus a)$ e $\text{co}(M \setminus b)$ são 3-conexas com menores isomorfos a N e ocorre ao menos uma das seguintes alternativas:*

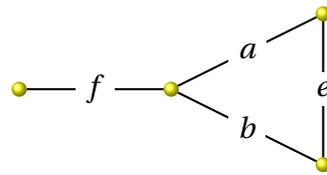
- (a) *Existe um elemento $c \in E(M) - \{a, b, e\}$ tal que $\text{co}(M \setminus c)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N , $\{a, b, c, e\} \in \mathcal{C}(M) \cap \mathcal{C}^*(M)$ e $\{a, e, f\}$ e $\{b, c, f\}$ são tríades de M ;*
- (b) *$\{a, b, e\}$ é um triângulo e $\{a, e, f\}$ uma tríade de M ;*
- (c) *$\{a, b, e\}$ é um triângulo e $\{a, b, f\}$ uma tríade de M ;*
- (d) *existe $c \in E(M) - \{a, b, e\}$ tal que $\{a, c, e\}$ e $\{a, b, f\}$ são triângulos e $\{a, c, f\}$ uma tríade de M ;*
- (e) *existe $c \in E(M) - \{a, b, e\}$ tal que $\{a, c, e\}$ e $\{b, e, f\}$ são triângulos e $\{c, e, f\}$ uma tríade de M ; ou:*
- (f) *existem $x, y \in E(M)$ tais que $\{x, y, f\}$ é uma tríade de M e $M \setminus \{a, b, e, f, x, y\}$ é a matroide gráfica associada a:*



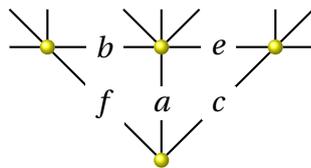
Abaixo segue uma ilustração das representações gráficas das configurações (b)-(e) de 3.0.8. representamos os elementos descritos nesses itens como arestas de grafos de forma que seus triângulos sejam triângulos da matroide e as estrelas dos vértices de grau 3 sejam tríades da matroide.



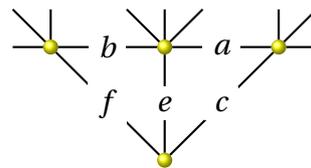
3.0.8, (b).



3.0.8, (c).



3.0.8, (d).



3.0.8, (e).

Figura 3.1: Ilustração das situações da proposição 3.0.8.

3.1 Resultados Preliminares

Demonstração da proposição 3.0.7: Seja $M := si(M/e)$ e $Z := E(N) - E(M)$. Mostramos primeiro que:

3.0.0.1 *Existe uma 2-separação de N cujos membros ambos não estão contidos em Z .*

Suponha por contradição a não validade de 3.0.0.1. Como N não é 3-conexa, existe uma 2-separação $\{Y_1, Y_2\}$ de N . Podemos supor sem perder generalidade que $Y_1 \subseteq Z$. Então $Y_2 - Z = E(M)$ e:

$$rN - 1 = rM = r_M(Y_2 - Z) = r_N[(Y_2 - Z) \cup e] - 1.$$

Conclui-se daí que $rN = r_N(Y_2 - Z) \cup e$ e $Y_2 \cup e$ gera N . Como N é simples, $rY_1 \geq 2$ então Y_2 não gera N . Portanto Y_2 não gera e . Logo $e \in Y_1$. Seja $f \in Y_1 - e$. Como $Y_1 \subseteq Z$, $f \notin E(M)$,

existe $g \in E(N)$ tal que $\{e, f, g\}$ é um triângulo de N , portanto $r_N Y_1 = r_N(Y_1 \cup g)$. Como $E(M) \subseteq Y_2$ e $|E(M)| \geq 4$, então $|Y_2 - g| \geq 3$. Além disso:

$$r_N(Y_1 \cup g) + r_N(Y_2 - g) \leq r_N Y_1 + r_N Y_2 = rM + 1.$$

Concluimos 3.0.0.1.

Fixemos uma 2-separação $\{X_1, X_2\}$ de N com ambos $X_1 - Z$ e $X_2 - Z$ não vazios. Digamos que $e \in X_1$. Observe que:

$$r_N[(X_1 - Z) \cup e] \leq r_N X_1, \quad e: \quad (3.1)$$

$$r_N[(X_2 - Z) \cup e] \leq r_N(X_2 \cup e) \leq rX_2 + 1. \quad (3.2)$$

Como M é conexa:

$$\begin{aligned} rM + 1 &\leq r_M(X_1 - Z) + r_M(X_2 - Z) \\ &= r_{M/e}[(X_1 - Y) \cup e] + r_{M/e}[(X_2 - Y) \cup e] - 2 \\ &= r_N[(X_1 - Z) \cup e] + r_N[(X_2 - Z) \cup e] - 2 \\ &\leq r_N X_1 + r_N X_2 - 1 \\ &= rN = rM + 1 \end{aligned}$$

Valem as igualdades na expressão acima. Em particular:

$$r_N[(X_1 - Y) \cup e] + r_N[(X_2 - Y) \cup e] \leq r_N X_1 + r_N X_2 + 1, \quad e: \quad (3.3)$$

$$r_M(X_1 - Z) + r_M(X_2 - Z) = rM + 1. \quad (3.4)$$

De (3.3), (3.1) e (3.2), concluimos que:

$$r_N[(X_1 - Z) \cup e] = r_N X_1, \quad e: \quad (3.5)$$

$$r_N[(X_2 - Z) \cup e] = rX_2 + 1. \quad (3.6)$$

Como M é 3-conexa com ao menos 4 elementos, segue de (3.4) que $|X_1 - Z| \leq 1$ ou $|X_2 - Z| \leq 1$. Como ambos $X_1 - Z$ e $X_2 - Z$ são não vazios, $|X_1 - Z| = 1$ ou $|X_2 - Z| = 1$. Se $|X_2 - Z| = 1$, então $|(X_2 - Z) \cup e| = 2$ e $r_N[(X_2 - Z) \cup e] \leq 2$ e, de (3.6), $r_N X_2 \leq 1$, uma contradição com a simplicidade de N . Então $|X_2 - Z| = 1$. Portanto $r_N[(X_1 - Z) \cup e] \leq 2$. De (3.5), $r_N X_1 \leq 2$. Como N , é simples $r_N X_1 = 2$, conforme queríamos demonstrar. \square

3.0.1 Lema: *Suponha que N é uma matroide binária, conexa e simples. Suponha que e é um elemento de N tal que $si(N/e)$ é 3-conexa com ao menos 4 elementos. Então N é 3-conexa ou existe um elemento de $E(N) - e$ em série com e em N .*

Prova: Por 3.0.7, existe um 2-separador X de N tal que $r_N X = 2$ e $e \in X$. Portanto $r_N^* X = 1 - r_N X + |X| = |X| - 1$. Como N é binária e simples, $|X| \leq 3$. Se $|X| = 2$, então $r_N^* X = 1$ e X é um par de elementos em série contendo e . Suponha então que $|X| = 3$. Então $r_N^* X = 2$. Como N é simples, X é um triângulo. Como N é binária, X não pode ser uma tríade. Então

existe um 2-cocircuito C^* de N contido e X . Se $e \in C^*$ não temos o que mostrar. Suponha então que $X = C^* \cup e$. Em M/e , C^* é um circuito e cocircuito com 2 elementos. Então o elemento que resta de C^* em $si(N \setminus e)$ é um laço dessa matroide. Uma contradição. \square

O seguinte lema foi usado implicitamente em [Whittle, 1999]. Trata-se de um resultado conhecido, mas não possuímos uma referência para o mesmo. Segue uma demonstração.

3.0.2 Lema: *Seja M uma matroide. Então*

(a) *Se N é um menor de M podemos escolher os conjuntos base de $si M$ e $si N$ de forma que $si N$ seja um menor de $si M$;*

(ii) *Se $e \in si M$ podemos escolher os conjuntos base de $si(M/e)$ e $si[(si M)/e]$ de forma que estes sejam iguais; e*

(iii) *Se M é simples, $e \in M$ e $f \in si(M/e)$ podemos escolher os conjuntos base das matroides de forma que $si(M/e, f) = si([si(M/e)]/f)$.*

Prova: O item (a) é imediato. Para provar o item (ii), pelo item (a), como $(si M)/e$ é um menor de M/e escolhemos os conjuntos base de forma que $si[(si M)/e]$ seja um menor de $si(M/e)$. Agora suponha que $x \in E(si(M/e)) - E(si[(si M)/e])$. Temos que existe $x' \in si M$ na mesma classe em paralelo de M que x . Se $x' \notin E(si[(si M)/e]) \subseteq E(si(M/e))$. Então existe $y \in E(si[(si M)/e])$ e paralelo com x' em $(si M)/e$, logo $\{x', y, e\}$ e $\{x, y, e\}$ são triângulos de M e $y \notin E(si(M/e))$. Uma contradição. Então $E(si(M/e)) = E(si[(si M)/e])$. E como $si[(si M)/e]$ é um menor de $si(M/e)$, essas matroides são iguais. Para mostrar (iii), basta aplicar (ii) em M/e e f . \square

3.0.3 Lema: *Suponha que M uma matroide binária e X seja um circuito e cocircuito de M com 4 elementos. Seja $\{\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}\}$ uma partição de X . Seja $\varphi : E(M) \rightarrow E(M)$ a função definida por $\varphi(a_1) = a_2, \varphi(a_2) = a_1, \varphi(b_1) = b_2, \varphi(b_2) = b_1$ e $\varphi(c) = c$ se $c \in E(M) - X$. Então φ é um automorfismo de M . Em particular, se $a, b \in X$, existe um automorfismo ψ de M tal que $\psi(a) = b, \psi(b) = a$ e ψ mantém $E(M) - X$ invariante.*

Prova: Basta mostrar que $C \in \mathcal{C}(M)$ se e só se $\varphi(C) \in \mathcal{C}(M)$. Mais em particular, podemos mostrar apenas que $C \in \mathcal{C}$ implica que $\varphi(C) \in \mathcal{C}(M)$, já que $\varphi = \varphi^{-1}$. Se $C = X$ ou $C \subseteq E(M) - X$ isso se verifica. Suponha então que C seja um circuito de M distinto de X e intersectando X . Por ortogonalidade $|C \cap X| \geq 2$. Como M é binária, existe um circuito D contido em $C \Delta X$ intersectando X . Por ortogonalidade $|D \cap X| = 2$. Então $D - X = C \cap X$ e esses conjuntos tem dois elementos cada. Então $D \Delta X$ é um dependente contido em C . Logo $D \Delta X = C$ e $D = C \Delta X$. Se $C \cap X = \{a_1, a_2\}$ ou $C \cap X = \{b_1, b_2\}$ não temos o que mostrar. Assumimos que não seja esse o caso. Podemos, supor se perda de generalidade que $C \cap X = \{a_1, b_1\}$. Temos que $\varphi(C \cap X) = \{a_2, b_2\} = (C \Delta X) \cap X$. Então $\varphi(C) = C \Delta X \in \mathcal{C}(M)$. Com isso finalizamos a demonstração. \square

A partir desse ponto mostramos lemas mais direcionados para a demonstração de 3.0.6, vamos fazer uso do seguinte lema, possivelmente demonstrado em outro lugar antes da fonte citada, mas não temos outra referência.

3.0.4 Lema: [Lemos, Melo, 2008] Se M é uma matroide 3-conexa, T um triângulo e T^* uma tríade de M , com $T \cap T^* \neq \emptyset$. Então:

(i) M/T e $M \setminus T^*$ são conexas.

(ii) Se $e \in T - T^*$, $co(M \setminus e)$ é 3-conexa e se $f \in T^* - T$, $si(M/f)$ é 3-conexa.

3.1 Demonstração de 3.0.6

3.1.1 Lema: Seja M uma matroide 3-conexa binária. Suponha que e e f sejam elementos de M tais que $co(M \setminus e, f)$ seja 3-conexa com ao menos 4 elementos, mas $co(M \setminus f)$ seja não 3-conexa. Digamos que $e \in co(M \setminus f)$. Então e está em um 2-circuito $\{e, g\}$ de $co(M \setminus f)$ e exatamente uma das seguintes alternativas ocorre:

(a) Os dois elementos e e g estão em classes em série não triviais $\{e, e_1\}$ e $\{g, g_1\}$ de $M \setminus f$ e $\{e, e_1, g, g_1\}$ é um 4-circuito e cocircuito de M . Em particular, neste caso $\{e, e_1, f\}$ e $\{g, g_1, f\}$ são tríades de M . Ou:

(b) Exatamente um elemento a de $\{e, g\}$ está numa classe em série não trivial de $M \setminus f$. O elemento h em série com a em $M \setminus f$ e o elemento b distinto de a em $\{e, g\}$ são tais que $co(M \setminus b)$ é 3-conexa, $\{e, g, h\}$ é um triângulo e $\{a, f, h\}$ é uma tríade de M . Em outras palavras:

(b1) $\{e, g, h\}$ é um triângulo e $\{f, g, h\}$ uma tríade de M e $co(M \setminus e)$ é 3-conexa; ou:

(b2) $\{e, g, h\}$ é um triângulo e $\{f, e, h\}$ uma tríade de M e $co(M \setminus g)$ é 3-conexa.

Prova: Suponha a não validade do lema. Pelo dual de 3.0.1 aplicado em $co(M \setminus f)$, temos que e está em paralelo com um elemento g nessa matroide. Como M é 3-conexa, ao menos um elemento de $\{e, g\}$ está numa classe em série não trivial de $M \setminus f$. Como M é binária, cada classe em série de $M \setminus f$ tem, no máximo, 2 elementos. Verifiquemos cada caso:

(a) Se ambos elementos e e g estão em classes em série não triviais $\{e, e_1\}$ e $\{g, g_1\}$ de $M \setminus f$. Neste caso, temos em M as tríades $T_1^* := \{f, e, e_1\}$ e $T_2^* := \{f, g, g_1\}$. Como M é binária, $\{f, e, g, e_1\}$ não é uma co-reta de M , logo $g_1 \neq e_1$. Veja que $X := T_1^* \Delta T_2^*$ é um 4-cocircuito de M . Mas X é também um circuito, pois $\{e, g\}$ é um circuito de $co(M \setminus f)$.

(b) Se apenas um elemento $a \in \{e, g\}$ está numa classe em série não trivial de $M \setminus f$ com um outro elemento h dessa matroide. Neste caso $\{a, f, h\}$ é uma tríade e $\{e, g, h\}$ um triângulo de M . Por 3.0.4, $co(M \setminus b)$ é 3-conexa. Assim, se $a = g$ e $b = e$, temos (b1), em caso contrário, temos (b2), e finalizamos a prova. \square

3.1.2 Lema: Seja M é uma matroide binária 3-conexa. Suponha que:

(i) e é um elemento de M tal que $M \setminus e$ é 3-conexa;

(ii) f é um elemento de $E(M) - e$ tal que $co(M \setminus e, f)$ seja 3-conexa com ao menos 4 elementos.

(iii) x e y são elementos de M tais que $\{e, x, y\}$ seja um triângulo e $\{x, y, f\}$ seja uma tríade de M .

(iv) Não existe um triângulo de M contendo y e f .

Então $M \setminus x / y$ é 3-conexa e é uma matroide cossimples associada a $M \setminus x$.

Prova: Seja $T := \{e, x, y\}$ e $T^* = \{x, y, f\}$. Como M é binária por dois elementos de M pode existir no máximo uma tríade. Se x está em alguma tríade T_1^* de M distinta de T^* , por ortogonalidade com T , $e \in T_1^*$. Mas $M \setminus e$ é 3-conexa e a única tríade de M contendo x é T^* . Concluímos que $M \setminus x / y$ é uma matroide cossimples associada a $M \setminus x$. Falta mostrar que essa matroide é 3-conexa.

Suponha, por contradição que $M \setminus x / y$ não seja 3-conexa. Observe que x e e são paralelos em M / y . Então $M \setminus x / y \cong M \setminus e / y$. Então existe uma 2-separação $\{A_1, A_2\}$ de $M \setminus e / y$. Digamos que $x \in A_1$. Temos:

$$r_{M/y}(A_1) + r_{M/y}(A_2) = r(M \setminus e / y) + 1 = r(M \setminus e) = rM,$$

portanto:

$$r(A_1 \cup y) + r(A_2 \cup y) = rM + 2 = r(M \setminus e) + 2 \quad (3.7)$$

Temos que A_2 gera y em M , pois, em caso contrário $r(A_2 \cup y) = r(A_2) + 1$. Substituindo essa última igualdade em (3.7), temos que $\{A_1 \cup y, A_2\}$ é uma 2-separação de $M \setminus e$. Uma contradição. Então temos um circuito C contido em $A_2 \cup y$ contendo y . Como $x \in A_1$, por ortogonalidade com T^* , $f \in C$, e portanto $f \in A_2$. Além disso $A_2 - f$ não gera f nem y em M . Pois nesse caso haveria um circuito D de M contido em $A_2 \cup y$, encontrando exatamente um elemento de $\{f, y\}$ e isso contraria a ortogonalidade com $T^* = \{x, y, f\}$. Então $r(A_2 \cup y) = r(A_2 - f) + 1$. Se substituirmos essa igualdade em (3.7), temos, em $M \setminus e, f$:

$$r(A_1 \cup y) + r(A_2 - f) = r(M \setminus e) + 1 = r(M \setminus e, f) + 1.$$

Então $\{A_1 \cup y, A_2 - f\}$ é uma 2-separação de $M \setminus e, f$ ou $|A_2 - f| \leq 1$. Se $|A_2 - f| \leq 1$, $|A_2 \cup y| \leq 3$, e $|C| \leq 3$, como M é 3-conexa com ao menos 4 elementos, $|C| = 3$. Mas isso contraria (iv). Então $\{A_1 \cup y, A_2 - f\}$ é uma 2-separação de $M \setminus e, f$.

Mas, por (ii), toda 2-separação de $M \setminus e, f$ contém um 2-cocircuito dessa matroide. Como $|A_1 \cup y| \geq 3$, então $A_2 - f$ é um 2-cocircuito de $M \setminus e, f$. Por ortogonalidade com $T = \{e, x, y\}$, e não está em nenhum cocircuito de M contido em $A_2 \cup e$. Como M é cossimples, A_2 é uma tríade de M . Como, por (iv), $|C| \geq 4$, então $C = A_2 \cup y$. Então $C \cap A_2$ é uma interseção de um circuito com um cocircuito de M com cardinalidade 3. Isso contraria o fato de M ser binária. Então $M \setminus e / y$, é 3-conexa, em portanto $M \setminus x / y$ também. \square

3.1.3 Lema: Suponha que M é uma matroide 3-conexa binária e:

(i) e é um elemento de M tal que $M \setminus e$ é 3-conexa;

(ii) f é um elemento de $E(M) - e$ tal que $co(M \setminus e, f)$ seja 3-conexa com ao menos 4 elementos e possua um menor isomorfo a uma matroide 3-conexa N .

(iii) y e x são elementos de M tais que $\{e, y, x\}$ seja um triângulo e $\{y, x, f\}$ seja uma tríade de M .

Então:

(a) Ou $co(M \setminus x)$ e $co(M \setminus f, x)$ são 3-conexas com menor isomorfo a N , ou existe um elemento $g \in E(M) - \{e, f, x, y\}$ tal que $\{y, f, g\}$ é um triângulo de M e $co(M \setminus g)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N .

(b) Existe um conjunto $I^* \in \mathcal{I}^*(M)$ com 3 elementos tal que para todo $z \in I^*$, $co(M \setminus z)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N ; e:

Prova: Primeiro mostremos (a). Observe que, em $M \setminus f$, x e y estão em série e que em $M \setminus f / y$ os elementos x e e são paralelos, então $M \setminus f / y \setminus e \cong M \setminus f / y \setminus x$. Por (ii), $co(M \setminus x)$ possui um menor isomorfo a N . Se $co(M \setminus x)$ é 3-conexa já temos (a). Suponha o contrário.

São satisfeitas as hipóteses (i), (ii) e (iii) de 3.1.2, mas $co(M \setminus x)$ não é 3-conexa. Então 3.1.2, (iv) não se verifica e existe um elemento g de M tal que $\{y, f, g\}$ é um triângulo de M . Se $e = g$, então $\{e, x, y\}$ e $\{e, f, y\}$ são triângulos de M com diferença simétrica de dois elementos, uma contradição com o fato de M ser 3-conexa e binária com ao menos 4 elementos. Portanto $e \neq g$.

Como $g \in \{y, f, g\} - \{x, y, f\}$, por 3.0.4, $co(M \setminus g)$ é 3-conexa. Só falta mostrar que $M \setminus g$ possui um menor isomorfo a N para concluir (a). Observe que x e y estão em série em $M \setminus e, f$, então, por (ii), $M \setminus e / y \setminus f$ possui menor isomorfo a N . Mas em $M \setminus e / y$, f e g são paralelos, e, com isso, $M \setminus e / y \setminus f \cong M \setminus e / y \setminus g$. Logo $M \setminus g$ e, portanto, $co(M \setminus g)$ possuem menor isomorfo a N . Está provado (a).

Vamos mostrar (b) agora. Por (a), existe um elemento $a \neq e$ tal que $a = x$ ou $\{a, f, y\}$ é um triângulo de M e $co(M \setminus a)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N . Observe que se trocarmos os papéis de y e x preservamos as hipóteses do lema, então, analogamente, existe $b \neq e$ tal que $b = y$ ou $\{b, f, x\}$ é um triângulo de M e $co(M \setminus b)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N . Para finalizar a demonstração de (b), basta mostrar que $\{e, a, b\}$ é um coindependente de M com 3 elementos. Vamos mostrar, primeiramente, que $a \neq b$. Suponha por contradição que $a = b$. Então $a \neq x$ ou $b \neq y$. Digamos que $a \neq x$. Então $\{a, f, y\}$ é um triângulo de M e $b = a \neq y$. Logo $\{b, f, x\} = \{a, f, x\}$ são dois triângulos de M com diferença simétrica de cardinalidade 2. Uma contradição. Então $a \neq b$. Se $\{e, a, b\}$ é codependente, esse conjunto é uma tríade de M . Mas isso contraria o fato de $M \setminus e$ ser 3-conexa com ao menos 4 elementos. Finalizamos então a prova de (b) e do lema. \square

3.1.4 Lema: Suponha que M é uma matroide binária 3-conexa, com ao menos 4 elementos, e:

(i) $\{e, f, y\}$ seja uma tríade e $\{e, x, y\}$ um triângulo de M ;

(ii) $co(M \setminus e, f)$ é 3-conexa com um menor 3-conexo N , com ao menos 4 elementos;

(iii) $co(M \setminus e)$ é 3-conexa mas $co(M \setminus f)$ não;

Então $co(M \setminus x)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N e:

(a) $co(M \setminus y)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N ; ou

(b) existe um elemento $g \in E(M) - \{e, f, x, y\}$ tal que $co(M \setminus g)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N , $\{e, x, g\}$ é um coindependente de M e $\{e, f, g\}$ um triângulo de M .

Em todo caso, existe $I^* \in \mathcal{I}^*(M)$ com $|I^*| = 3$, tal que para todo $a \in I^*$, $co(M \setminus a)$ é 3-conexa, com um menor isomorfo a N .

Prova: Observe que y é um colação de $M \setminus e, f$, então $co(M \setminus e, f)$ é isomorfa a um menor de $M \setminus e, f / y$ e, portanto, $M \setminus e, f / y$ possui menor isomorfo a N . Mas x e e são paralelos em $M \setminus f / y$, então $M \setminus e, f / y \cong M \setminus x, f / y$ e $co(M \setminus x)$ possui também um menor isomorfo a N . Além disso x está na tríade $\{e, x, y\}$ que intersecta o triângulo $\{e, f, y\}$, por 3.0.4, $co(M \setminus x)$ é 3-conexa e mostramos a primeira parte do lema.

Se vale (a) (resp. (b)), então para $I^* := \{e, x, y\}$ (resp. $I^* := \{e, x, g\}$), temos a validade da terceira parte do lema. O que falta mostrar é a validade de (a) ou (b).

Em $M \setminus f$, os elementos y e e estão em série, então $M \setminus e, f \cong M \setminus e, y$. Portanto $M \setminus y$, e $co(M \setminus y)$ possuem menor isomorfo a N . Se $co(M \setminus y)$ é 3-conexa, e, logo, temos a validade de (a). Podemos supor então que:

3.1.4.1 $co(M \setminus y)$ não é 3-conexa.

Só precisamos agora mostrar a validade de (b). Suponha, por contradição, que (b) não vale. Em $M \setminus e$, os elementos y e f estão em série. Então $co(M \setminus e, y)$ é isomorfa a $co(M \setminus e, f)$. Consequentemente, $co(M \setminus e, y)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N . Supomos sem perder generalidade que $e \in E(co(M \setminus y))$. Trocando os papéis de y e f , verificamos as hipóteses de 3.1.1.

Se vale 3.1.1, (a), existe um conjunto $X := \{e, e_1, g, g_1\} \in \mathcal{C}(M) \cap \mathcal{C}^*(M)$ com 4 elementos, de forma que $\{e, e_1, f\}$ e $\{g, g_1, f\}$ são tríades de M . Como M é binária e cossimples e $\{e, e_1, f\}$ e $\{e, y, f\}$ são tríades de M , então $e_1 = y$. Mas por 3.0.3, $co(M \setminus y) \cong co(M \setminus e)$, e $co(M \setminus y)$ é 3-conexa. Uma contradição com 3.1.4.1. Portanto vale 3.1.1, (b). Isso é:

3.1.4.2 Existem elementos g , de $co(M \setminus y)$, e h , de $M \setminus y$, tais que $\{e, g, h\}$ é um triângulo de $M \setminus y$ e:

(a') $\{y, g, h\}$ é uma tríade de M e $co(M \setminus e)$ é 3-conexa; ou

(b') $\{y, e, h\}$ é uma tríade de M e $co(M \setminus g)$ é 3-conexa.

Observe que $g \notin \{e, y\}$. Estamos assumindo que $e \in E(co(M \setminus y))$ com isso $f \notin co(M \setminus y)$ e, portanto, $f \neq g$. Se $g = x$, então $\{e, x, h\}$ é um triângulo de M distinto de $\{e, x, y\}$. Uma contradição com o fato de M ser binária e cossimples. Portanto $g \notin \{e, f, x, y\}$.

Pela ortogonalidade entre $\{e, g, h\}$ e $\{e, f, y\}$, temos que $h = f$, pois h foi definido como um elemento de $M \setminus y$. Não vale (a'), pois, como M é binária e cossimples, se $\{y, g, f\} \in \mathcal{C}(M)$, como $\{e, y, f\} \in \mathcal{C}(M)$, teríamos $e = g$. Uma contradição. Então Vale (b') e, com isso, $co(M \setminus g)$ é 3-conexa. Para finalizarmos a demonstração só falta mostrar que $\{e, g, x\}$ é

coindependente em M . Suponha o contrário. Então $\{e, g, x\} \in \mathcal{C}^*(M)$. O elemento y está no triângulo $\{e, x, y\}$, mas não em $\{e, g, x\}$. Por 3.0.4, isso implica que $co(M \setminus y)$ é 3-conexa. Uma contradição com 3.1.4.1. Com isso finalizamos a demonstração. \square

Demonstração de 3.0.8 Temos a validade das hipóteses de 3.1.1. Suponhamos a validade de 3.1.1(a), então e está num 4-subconjunto X de $E(M)$ pertencente a $\mathcal{C}(M) \cap \mathcal{C}^*(M)$. Além disso X é da forma $\{a, b, c, e\}$ com $\{a, e, f\}$ e $\{b, c, f\}$ em $\mathcal{C}^*(M)$. Se $g \in X$, por 3.0.3 existe um automorfismo de M que leva e e g e, portanto $co(M \setminus g)$ é 3-conexa com menor isomorfo a N , assim como $co(M \setminus e)$. Neste caso temos a validade de (a). Então assumimos a validade de 3.1.1 (b). Em particular, temos elementos x e y de M tais que $\{e, x, y\}$ é um triângulo que encontra uma tríade contendo f em M . Com isso em $M \setminus f$, temos uma classe em série S contida em $\{e, x, y\}$ e, após a contração de um elemento de S , os dois elementos de $\{x, e, y\}$ que restam são paralelos. Então

$$co(M \setminus x, f) \cong co(M \setminus y, f) \cong co(M \setminus e, f). \quad (3.8)$$

Ou seja, $co(M \setminus x)$ e $co(M \setminus y)$ possuem menores isomorfos a N . Podemos assumir que $co(M \setminus x)$ e $co(M \setminus y)$ não são ambas 3-conexas, se não, como $\{e, x, y\}$ é um triângulo que encontra uma tríade contendo f em M , teríamos a validade de (b) ou (c) para a e b escolhidos convenientemente em $\{x, y\}$. Supomos sem perder generalidade que $co(M \setminus y)$ não é 3-conexa. Por 3.0.4, $\{e, f, x\}$ não pode ser uma tríade de M porque $co(M \setminus y)$ não é 3-conexa.

Vejamus primeiramente o caso em que vale 3.1.1, (b2). Isso é, no nosso caso, $\{e, f, y\}$ é uma tríade de M . Por 3.1.4, existe um elemento $g \in E(M) - \{e, f, x, y\}$ tal que $co(M \setminus g)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N , $\{e, x, g\}$ é um coindependente de M e $\{e, f, g\}$ um triângulo de M . Então vale (e) para $b = g$, $a = x$ e $c = y$.

Então assumimos que vale 3.1.1, (b1), isso é, $\{x, y, f\}$ é uma tríade de M . Vamos analisar primeiro o caso em que não há nenhuma tríade de M contendo e , isso é, o caso em $M \setminus e$ é 3-conexa. Como $co(M \setminus y)$ não é 3-conexa, por 3.1.3 existe um elemento $g \in E(M) - \{e, f, y, x\}$ tal que $T_g := \{x, f, g\}$ é um triângulo de M e $co(M \setminus g)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N . Como $co(M \setminus y)$ não é 3-conexa, por 3.0.4 $\{e, g, x\}$ é coindependente em M . Se $co(M \setminus x)$ é 3-conexa, temos a validade de (d) para $c = y$, $a = x$ e $b = g$. Podemos então assumir que $co(M \setminus x)$ não é 3-conexa. Invertendo os papéis de x e y em 3.1.3, temos um elemento h tal que $T_h := \{f, y, h\}$ é um triângulo de M e $co(M \setminus h)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N . Então:

$$T := \{e, x, y\} \Delta T_g \Delta T_h = \{e\} \Delta \{g\} \Delta \{h\}$$

é um codependente de M , com isso, $g \neq h$ e $\{e, g, h\}$ é um triângulo de M , como M é binária e 3-conexa com ao menos 4 elementos, $\{e, g, h\}$ é coindependente. Temos então a validade de (f), para $a = g$ e $b = h$.

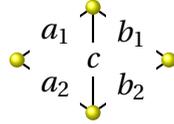
Nos resta analisar o caso em que há uma tríade T^* de M contendo e . Como $co(M \setminus y)$ não é 3-conexa, por 3.0.4, $y \in T^*$, mas x não pode estar em T^* pois $\{e, x, y\}$ é coindependente. Então T^* é da forma $\{e, y, f'\}$ com $f' \neq x$. Por 3.0.4, $co(M \setminus x)$ é 3-conexa. Por (3.8), se trocarmos os papéis de x e e satisfazemos as hipóteses de 3.1.4. Então, como $co(M \setminus y)$ não é 3-conexa, existe um elemento $g \in E(M) - \{e, f, x, y\}$ tal que $co(M \setminus g)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N , $\{e, x, g\}$ é um coindependente de M e $\{x, f, g\}$ um triângulo de M .

Então para $y = c$, $x = a$ e $g = b$ temos a validade de (d). Com isso esgotamos os casos e provamos o resultado. \square

Demonstração do teorema 3.0.6: Suponha que M e N constituem um contra-exemplo para o teorema. Note que podemos assumir que $|E(N)| \geq 4$. Por 3.0.1, temos elementos distintos e e e' de M , tais que, $co(M \setminus e)$ e $co(M \setminus e')$ são 3-conexas com menor isomorfo a N . Em $co(M \setminus e)$, por 3.0.3, podemos escolher um elemento $f \neq e'$ tal que $co(M \setminus e, f)$ seja 3-conexa com um menor isomorfo a N . Observe que $\{f, e, e'\}$ não é tríade de M . Se $co(M \setminus f)$ é 3-conexa, não há mais o que mostrar. Suponha então que $co(M \setminus f)$ não é 3-conexa. Então o resultado segue diretamente de 3.0.8. \square

3.2 Demonstração de 3.0.5

3.2.1 Lema: *Suponha que M seja uma matroide 3-conexa e que $X := \{c, a_1, a_2, b_1, b_2\}$ seja um 5-subconjunto de M tal que $\{c, a_1, a_2\}$ e $\{c, b_1, b_2\}$ sejam triângulos e $\{c, a_1, b_1\}$ e $\{c, a_2, b_2\}$ sejam tríades de M , então $M \cong M(K_4)$.*



Prova: Observe que $B^* := \{c, a_1, a_2\}$ gera X em M^* e $B := \{c, a_1, b_1\}$ gera X em M^* . Então $\xi_M(X) := rX + r^*X - |X| = 1$. Como M é 3-conexa, X não é 2-separador de M , $|E(M) - X| \leq 1$ e $|E(M)| \leq 6$. As únicas matroides 3-conexas com 5 elementos são $U_{2,5}$ e $U_{3,5}$, o que não é o caso. Então $|E(M)| = 6$. Observe que $rM = r^*M = 3$.

Seja f o elemento de $E(M) - X$. Por ortogonalidade com $\{c, a_2, b_2\}$, $c \notin C_M(B, f)$, logo $C_M(B, f) = \{a_1, b_1, f\}$. Analogamente $\{a_2, b_2, f\} = C_M(\{c, a_2, b_2\}, f) \in \mathcal{C}(M)$. Então M possui 4 triângulos distintos.

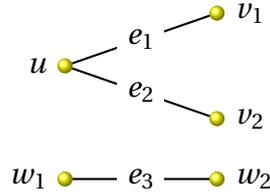
As únicas matroides 3-conexas de posto e coposto 3, a menos de isomorfismos, são, de acordo com [Oxley, 11.2.20], $M(K_4)$, W^3 , Q_6 , P_6 e $U_{3,6}$. Como M possui 4 triângulos distintos, M não é isomorfa a W^3 , Q_6 , P_6 ou $U_{3,6}$. Então $M \cong M(K_4)$. \square

Um **bond** de um grafo G é um conjunto $X \subseteq E(G)$ minimal com a propriedade de que $G \setminus X$ tenha mais componentes conexas que G . Definimos a **estrela** de um vértice $v \in V(G)$ como o conjunto $S_G(v)$ das arestas de G adjacentes a v . Usamos a palavra **circuito** para designar um ciclo(ou polígono) num grafo, tanto visto como um subgrafo como visto como simples conjunto de arestas.

É fácil observar que num grafo conexo G , se $F \subseteq E(G)$, cada componente conexa de $G \setminus F$ possui um vértice adjacente, em G a alguma aresta de F . Vamos usar esse fato sem menção nas próximas demonstrações.

3.2.2 Lema: *Em um grafo 3-conexo e simples G , um 3-bond que contém duas arestas adjacentes é a estrela de um vértice.*

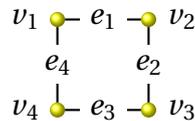
Prova: Suponha que, em G , as arestas e_1 e e_2 são adjacentes a um mesmo vértice u e $T^* := \{e_1, e_2, e_3\}$ seja um bond de G . Sejam v_1 e v_2 os respectivos vértices de G distintos de u e adjacentes a e_1 e e_2 . Sejam w_1 e w_2 os vértices de G adjacentes a e_3 . Vamos mostrar que T^* é a estrela de u em G . Suponha o contrário, isso é, que $u \notin \{w_1, w_2\}$ (figura abaixo).



Como G é 3-conexo, para $\{i, j\} = \{1, 2\}$, em $G \setminus u, w_i$, existem um w_j - v_1 -caminho e um w_j - v_2 -caminho. Além disso, em $G \setminus v_1, v_2$, existe um u - w_1 -caminho que evita e_3 ou um u - w_2 -caminho que evita e_3 . Observe que todos esses caminhos evitam T^* . Então, em $G \setminus T^*$, os vértices u, v_1, v_2, w_1 e w_2 estão todos na mesma componente conexa. Mas esses são os únicos vértices de G que incidem em arestas de T^* . Isso implica que $G \setminus T^*$ é conexo. Uma contradição. \square

3.2.3 Lema: *Seja G é um grafo 3-conexo com ao menos 5 vértices, não existe em $E(G)$ um 4-subconjunto que seja simultaneamente o conjunto de arestas de um circuito e um bond de G .*

Prova: Suponha por contradição que exista um circuito $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_1$ tal que $C^* := \{e_1, \dots, e_4\}$ seja um bond de G .



Como G é 3-conexo, $G \setminus v_1, v_3$ é conexo, logo existe um v_2 - v_4 -caminho que não encontra C^* . Analogamente, existe um v_1 - v_3 -caminho que também não encontra C^* . Como v_1, \dots, v_4 são os únicos vértices de G adjacentes a arestas de C^* , então $G \setminus C^*$ possui duas componentes conexas H_1 , contendo v_1 e v_3 , e H_2 , contendo v_2 e v_4 .

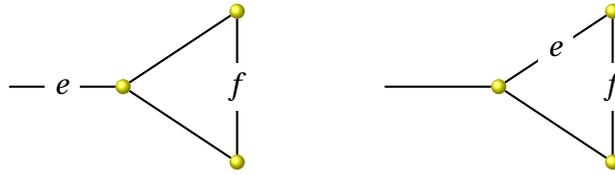
Como $|V(G)| \geq 5$, existe $w \in V(G) - \{v_1, \dots, v_4\}$. Podemos supor, sem perder generalidade, que $w \in V(H_1)$. Mas $G \setminus v_1, v_3$ é conexo, então existe, nesse grafo, um w - v_2 -caminho, o qual evita C^* . Uma contradição. \square

A partir deste ponto até o fim desta seção, vamos fixar algumas notações: G é um grafo 3-conexo e simples com um menor 3-conexo e simples H , com $|E(H)| \geq 4$. Além disso consideramos o conjunto:

$$X := \{e \in E(H) : G/e \text{ é 3-conexo com menor isomorfo a } H\}.$$

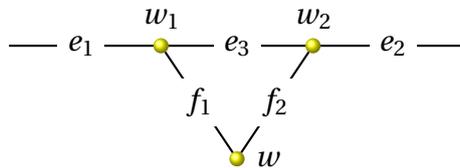
Observe que, se $|V(G)| \geq |V(H)| + 3$, $|V(G)| \geq 8$ e, pelo dual de 3.0.6, $r_{M(G)} X \geq 3$.

3.2.4 Lema: Se e e f são arestas de G tais que G/e e $G/e, f$ são 3-conexos mas G/f não é 3-conexo, então em G existe um triângulo contendo f e um vértice de grau 3, adjacente a e mas não adjacente a f .



Prova: Observe que $M(G)$ satisfaz às hipóteses da versão dual de 3.1.1. Mas, por 3.2.3, não temos a validade do dual de 3.1.1, (a). Portanto vale o dual de 3.1.1, (b). Isso é: existe em G um triângulo T contendo f e um 3-bond T^* contendo e tal que $f \notin T^*$ e, além disso, T e T^* se intersectam. Pelo lema 3.2.2, T^* é a estrela de um vértice de grau 3 e isso finaliza a demonstração. \square

3.2.5 Lema: Suponha que $|V(G)| - |V(H)| \geq 5$. Suponha também que em G tenhamos a seguinte configuração:



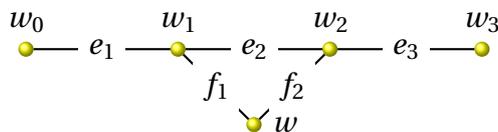
Onde $e_1, e_2, e_3 \in X$, $G/e_1, f_1$ é 3-conexo com menor isomorfo a H e os graus de w_1 e w_2 em G são ambos iguais a 3. Então $r_{M(G)} X \geq 4$.

Prova: Suponha o contrário. Seja $M := M(G)$. Então $r_M X = 3$. Sejam $T_1^* = S_G(w_1)$ e $T_2^* = S_G(w_2)$.

Por 3.2.1, como $M \not\cong M(K_4)$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ não é um triângulo de M . Logo $r_M \{e_1, e_2, e_3\} = 3$ e $X \subseteq cl_{M(G)} \{e_1, e_2, e_3\}$. Além disso, por ortogonalidade com T_1^* e T_2^* , temos que:

3.2.5.1 Não existe um triângulo de G com duas arestas em comum com $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Sejam w_0, w_3 os respectivos vértices de G distintos de w_1 e w_2 e adjacentes a e_1 e e_2 . Temos, portanto, em G a configuração:



Vejamos agora que:

$$X = \{e_1, e_2, e_3\}. \quad (3.9)$$

De fato, se existe $h \in X - \{e_1, e_2, e_3\}$, então, como $\{e_1, e_2, e_3\}$ gera X e por 3.2.5.1, $\{e_1, e_2, e_3, h\} \in \mathcal{C}(M)$. Seja w' o vértice formado pela fusão de w_0 e w_1 , em G/h . Como $|V(G)| \geq 8$, $G/h \setminus w, w'$ é desconexo, logo G/h não é 3-conexo e, portanto $h \notin X$. Ou seja, vale (3.9). Seja $A := \{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2\}$. Vamos verificar agora que:

3.2.5.2 Se $g \in E(\text{si}(M/e_3))$ e $g \notin \text{cl}_M A$ então $\text{si}(G/e_3, g)$ não é 3-conexo com menor isomorfo a H .

Suponha que tenhamos um elemento g contrariando 3.2.5.2. Então, por 3.2.4, existe uma tríade de $M(G)$ que contém e_3 e gera g . Mas as únicas tríades de $M(G)$ contendo e_3 são T_1^* e T_2^* , que estão ambas contidas em A . Uma contradição. Logo vale 3.2.5.2.

Assumimos sem perder generalidade que $f_1 \in E(\text{si}(M/e_3))$. Observe que em $\text{si}(M/e_3)$, $T_0^* := \{e_1, e_2, f_1\}$ é uma tríade. Pelo dual de 3.0.6, existe um 3-independente I de $\text{si}(M/e_3)$ tal que para todo $e \in I$, $\text{si}(M/e_3, e)$ é 3-conexo com menor isomorfo a $M(H)$. Vamos verificar que:

$$I = \{e_1, e_2, f_1\}. \quad (3.10)$$

Por 3.2.5.2, $I \subseteq \text{cl}_M A = \emptyset$, por consequência, $I \subseteq \text{cl}_{\text{si}(M/e_3)} T_0^*$. Mas se $h \in (\text{cl}_{\text{si}(M/e_3)} T_0^*) - T_0^*$, então existe um triângulo de $\text{si}(G/e_3)$ contendo h e contido em $T_0^* \cup h$, e $\text{si}(M/e_3, h)$ não é 3-conexo, o que implica que $h \notin I$. Portanto temos (3.10).

De (3.10), concluímos que $\text{si}(M/e_3, e_1)$ é 3-conexo, com menor isomorfo a H . Novamente, pelo dual de 3.0.6, em $\text{si}(G/e_3, e_1)$, existe um elemento g não gerado por $\{e_2, f_1\}$ tal que $\text{si}(M/e_3, e_1, g)$ é 3-conexo com menor isomorfo a H . Isso implica que $g \notin \text{cl}_{M(G)}(A)$. Por 3.2.5.1, $\text{si}(G/e_3, g)$ não é 3-conexo. Por 3.2.4, existe, em $\text{si}(G/e_3)$, um vértice w'' de grau 3, adjacente a e_1 mas não a g e um triângulo T , contendo g e w'' como $g \notin \text{cl}_{\text{si}(M/e_3)}(T_0)$, então $w'' = w_0$. Como e_3 não é adjacente a w_0 em G :

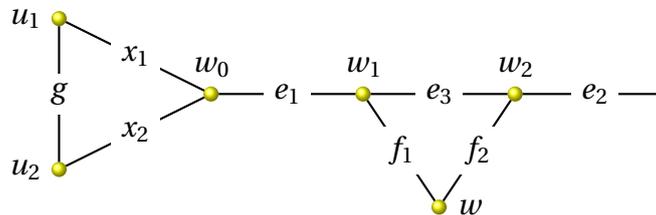
3.2.5.3 $\text{deg}_G(w_0) = 3$ e T é um triângulo de G contendo g e w_0 .

Sejam x_1 e x_2 os elementos de $T - g$. Vamos verificar agora que:

3.2.5.4 e_1 não está em nenhum triângulo de G .

Suponha, por contradição, que exista um triângulo T' de G contendo e_1 . Por ortogonalidade com T_1^* e por 3.2.5.1, $f_1 \in T'$. Além disso, por ortogonalidade com $S_G(w_0)$, x_1 ou x_2 está em T' . Digamos que $x_1 \in T'$. Então $x_2 \in S_G(w_0) - T'$ e, por 3.0.4, $\text{si}(M/x_2)$ é 3-conexo. Mas, em $\text{si}(M/g)$ (digamos que $x_2 \in \text{si}(M/g)$), x_2 e e_1 estão em série. Como $\text{si}(M/g, e_1)$ possui menor isomorfo a H então $\text{si}(M/g, x_2)$ e, conseqüentemente, $\text{si}(M/x_2)$ também possui menor isomorfo a H . Então $x_2 \in X$. Uma contradição com 3.9. Então temos 3.2.5.4.

Então em G temos uma configuração como a da figura abaixo:



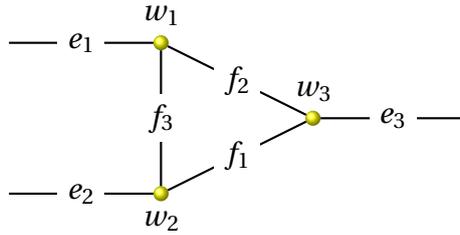
Em particular, 3.2.5.4 implica que G/e_1 é simples. Vamos verificar ainda que:

3.2.5.5 $\text{si}(M/e_1, g)$ é 3-conexo.

Suponha o contrário. Observe que o vértice w''' formado pela fusão de w_0 e w_1 em G/e_1 possui grau 4 nessa matroide. Como $si(M/e_1, e_3, g)$ é 3-conexa, por 3.2.4, existe em G/e_1 um vértice de grau 3 adjacente a e_3 , (que, necessariamente, é w_2 , pois o grau de w''' é 4 nesse grafo), o qual está num triângulo T_3 contendo g . Mas isso implica que as arestas de $T_3 - g$ estão em $\{e_3, f_2, e_2\}$ e, portanto A gera g . Uma contradição. Concluimos 3.2.5.5.

Como $si(G/e_1)$ e $si(G/e_1, g)$ são 3-conexos mas $si(G/g)$ não, como x_1 e x_2 não estão em X e como g/e_1 é simples, pelo dual de 3.1.3, existem elementos $y_1, y_2 \in X$ tais que, para $i = 1, 2$, $S(u_i) = \{g, x_i, y_i\}$. Temos que $y_1, y_2 \notin \{e_1, e_3\}$. Então $y_1 = y_2 = e_2$, por 3.9. Uma contradição. \square

3.2.6 Lema: *Suponha que $|V(G)| - |V(H)| \geq 6$ e que G possua um subgrafo da forma:*



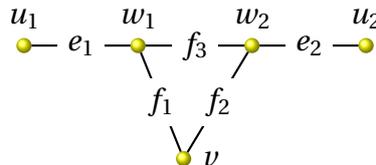
Onde $\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq X$, os graus de w_1, w_2 e w_3 em G são iguais a 3 e $si(G/e_3, f_3)$ é 3-conexo com menor isomorfo a H . Então $rX \geq 4$.

Prova: Suponha o contrário. Seja $M := M(G)$. Então $r_M(X) = 3$. Seja, para $i = 1, 2, 3$, u_i o vértice de G distinto de w_i adjacente a e_i . Se $u_1 = u_2 = u_3$, então, como G possui mais que 4 vértices, u_i separa w_1, w_2 e w_3 dos demais vértices de G , uma contradição. Se, para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, $u_i = u_j \neq u_k$. Então u_i e w_k separam w_i e w_j dos demais vértices de G , também uma contradição. Então os vértices u_1, u_2 e u_3 são distintos entre si. Em particular isso implica que $\{e_1, e_2, e_3\}$ não encontra nenhum triângulo de G .

Então $r_M\{e_1, e_2, e_3\} = 3$ e $X \subseteq cl_M\{e_1, e_2, e_3\}$. Se existe um circuito C de G tal que $|C - \{e_1, e_2, e_3\}| = 1$, então C intersecta $\{f_1, f_2, f_3\}$. Como G é simples e $\{e_1, e_2, e_3\}$ não encontra triângulos, então $X \subseteq C$. Mas isso implica que C intersecta $\{f_1, f_2, f_3\}$ em mais de uma aresta, uma contradição. Logo $\{e_1, e_2, e_3\}$ é fechado em M e, portanto:

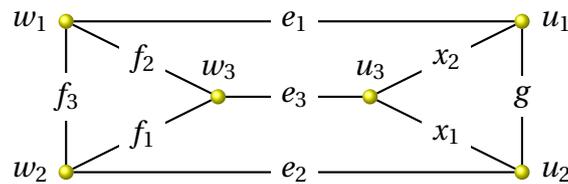
$$X = \{e_1, e_2, e_3\}. \quad (3.11)$$

Como e_3 não está em nenhum triângulo de G , G/e_3 é simples. Observe que em G/e_3 temos a configuração do lema 3.2.5 (re-rotulando f_3 , por e_3). Denotando v o vértice formado pela fusão de w_3 e u_3 em G/e_3 . Isso é, em G/e_3 temos a configuração:



Por 3.2.5 existe, em G/e_3 , uma aresta $g \notin cl_{M(G/e_3)}\{e_1, e_2, f_3\}$ tal que $si(G/e_3, g)$ é 3-conexo com menor isomorfo a H . Como $g \notin X$, e $si(G/g)$ possui menor isomorfo a H , então $si(G/g)$ não é 3-conexo. Por 3.2.4, e_3 é adjacente a um vértice u de G de grau 3, que está num triângulo T contendo g . Em particular, $e_3 \notin T$. Como $S_G(w_3)$ não gera g em M . Então $u = u_3$.

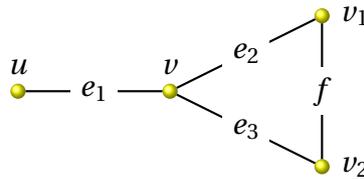
Seja $T - g = \{x_1, x_2\}$. Como X não encontra triângulos de G , $x_1, x_2 \notin X$. Digamos que $x_1 \in E(si(M/g))$. Então, em $si(M/g)$ e_3 e x_1 estão em série. Como $si(M/g, e_3)$ possui menor isomorfo a $M(H)$, $si(G/x_1)$ e $si(G/x_2)$ possuem menores isomorfos a H . Como $x_1, x_2 \notin X$, $si(G/x_1)$ e $si(G/x_2)$, não são 3-conexos. Sejam v_1 e v_2 os vértices de $T - w_3$, adjacentes a x_1 e x_2 , respectivamente. Pelo dual de 3.1.3, existe, para $i = 1, 2$, um elemento $y_i \in X$ tal que $S_G(v_i) = \{g, x_i, y_i\}$. Como $e_3 \notin \{y_1, y_2\}$, e $X = \{e_1, e_2, e_3\}$, então $\{e_1, e_2\} = \{y_1, y_2\}$. Assumimos, sem perder generalidade, que $e_1 = x_1$ e $e_2 = x_2$. Então $v_1 = u_1$ e $v_2 = u_2$. Portanto, em G , temos a configuração:



Onde os graus dos vértices na figura, em G são todos iguais a 3. Então G , que é conexo, é o grafo da figura acima. Mas isso contraria o tamanho de $V(G)$, que tem ao menos 7 vértices. \square

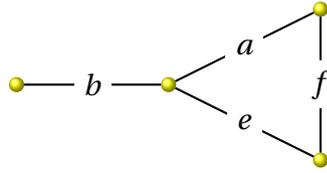
Demonstração de 3.0.5 Suponha que G e H contrariem 3.0.5. Seja $M := M(G)$. Por 3.0.6 existe $I \in \mathcal{I}(M)$ tal que para todo $e \in I$, $si(G/e)$ é 3-conexo com menor isomorfo a H . Fixemos $e \in I$. Novamente por 3.0.6, existe $f \in E(si(M/e))$ não gerado por $I - e$ nessa matroide tal que $si(G/e, f)$ é 3-conexo com menor isomorfo a H . Como G contraria 3.0.5, $si(G/f)$ possui menor isomorfo a H e $f \notin cl_M(I)$, então $si(G/f)$ não é 3-conexo. Então temos em M a dual de uma das configurações de 3.0.8, (a)-(f). Por 3.2.3, descartamos a configuração (a). Temos em M uma das seguintes situações:

Onde $a, b \in X$. Mas 3.2.5 e 3.2.6 demonstram o resultado no caso da ocorrência de (d), (e) ou (f). Ou seja, em G , temos uma configuração da forma:

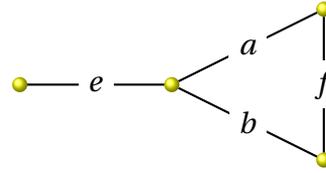


Com $\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq X$ e $deg_G(v_1), deg_G(v_2) \geq 4$. Por 3.0.6, existe em $E(si(M/e_1))$ um elemento g não pertencente ao fecho de $\{e_1, e_2, f\}$ tal que $si(G/e_1, g)$ é 3-conexo com menor isomorfo a H . Como $g \notin cl_M\{e_1, e_2, e_3\}$, $g \notin X$ e $si(M/g)$ não é 3-conexo.

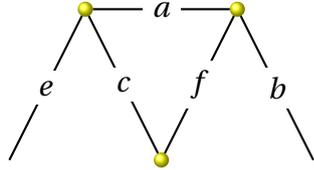
Então existe um triângulo T de G contendo g e u , como nas configurações duais de (b) e (c) acima. Como $g \notin cl_M\{e_1, e_2, e_3\}$, e_2 e e_3 não estão em T . Então os elementos de $T - g$ estão em X e não são gerados por $\{e_1, e_2, e_3\}$ em M . Uma contradição. \square



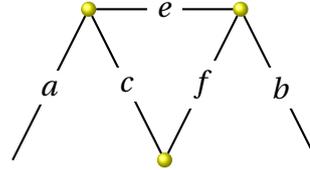
Duais de 3.0.8, (b).



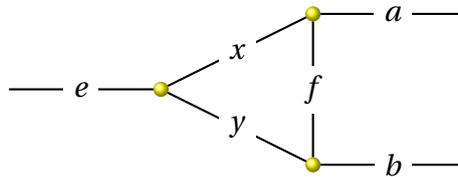
Dual de 3.0.8, (c).



Dual de 3.0.8, (d).



Dual de 3.0.8, (e).



Dual de 3.0.8, (f)

3.3 Alguns contra-exemplos

Definimos $K_{3,n}'''$ como o grafo bipartido completo com classes de vértices $\{u_1, u_2, u_3\}$ e $\{1, \dots, n\}$ acrescido das arestas $e_1 := u_1 u_2$, $e_2 := u_2 u_3$ e $e_3 := u_3 u_1$. Observe que $co(K_{3,n}''' \setminus e)$ é 3-conexo se só se $e \in \{e_1, e_2, e_3\}$.

Isso mostra a otimalidade de 3.0.6 em certo sentido. Isso é: k é o maior inteiro tal que, se M é uma matroide binária e 3-conexa com menor 3-conexo N e com $r(M) \geq r(N) + 3$ então existe um k -subconjunto $X \subseteq E(M)$ tal que $co(M \setminus e)$ para todo $e \in X$.

Vamos agora ver que, em um sentido mais restrito, temos uma otimalidade em 3.0.5.

Vamos construir um grafo planar, 3-conexo e simples G com menor 3-conexo e simples H , de forma que $|V(G)| - |V(H)| \leq 6$ e só existam 3 elementos e em $E(G)$ tais que G/e é 3-conexo com menor isomorfo a H .

Definimos primeiro, para $n \geq 2$ o grafo X_n como um grafo com conjunto de $4n+3$ vértices

$$\{a_1, \dots, a_{2n} = a_0, b_1, \dots, b_{2n} = b_0, c_1, c_2, c_3\}$$

e conjunto de arestas formado pela união dos conjuntos

$$\{a_{k-1} a_k, b_{k-1} b_k, a_{k-1} b_k : k = 1, \dots, 2n\};$$

$$\{c_1 a_k : k = 1, \dots, n\};$$

$$\{c_2 a_k : k = n+1, \dots, 2n\}; e$$

$$\{c_1c_2, c_1c_3, c_2c_3, a_1c_3, a_{2n}c_3\}.$$

Esse grafo foi assim construído para ser planar e 4-conexo, $X_n[c_1, c_2, c_3]$ ser completo, e a medida que aumentamos n os graus de c_1 e c_2 crescerem ilimitadamente, enquanto os graus dos outros vértices permanecem fixos. Na figura 3.2, mostramos uma planarização de X_4 , para valores de n distintos de 4, existe uma planarização análoga.

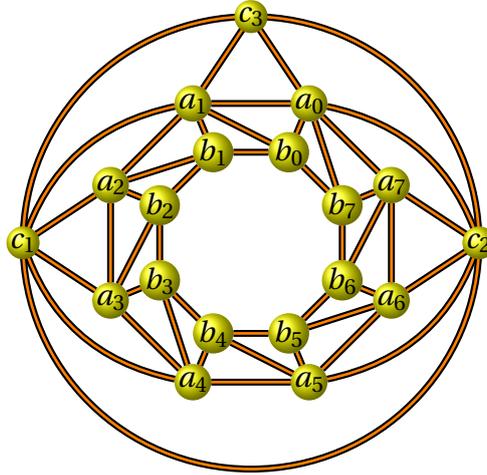


Figura 3.2: Planarização de X_4 .

Definimos o vértice c_3 de X_n como o seu **ligador central**.

Agora consideremos, para $n \geq 5$, três cópias de X_n , com conjuntos de vértices e arestas todos disjuntos: G_0 , G_1 e G_2 . Para $k \in \{0, 1, 2\}$, rotulemos em cada G_k , os vértices correspondentes a c_1, c_2 e c_3 por $v_{k(k-1)}, v_{k(k+1)}$ e v_{kk} (com aritmética módulo 3). Considere 3 vértices distintos u_0, u_1 e u_2 , fora de $V(G_0) \cup V(G_1) \cup V(G_2)$. Definimos $V(G)$ por $V(G_0) \cup V(G_1) \cup V(G_2) \cup \{u_0, u_1, u_2\}$ e $E(G)$ pela união de $E(G_0), E(G_1), E(G_2)$ e:

$$F := \{v_{kj}v_{jk}, u_kv_{kk} : j, k \in \{0, 1, 2\} \text{ e } j \neq k\}.$$

Para entender melhor a construção de G olhe a figura 3.3.

Vamos mostrar:

3.3.0.1 Se $H \in \{G/F, G/(F - u_2v_{22})\}$, e $e \in E(G)$ é tal que G/e é 3-conexo com menor isomorfo a H , então existe $k \in \{0, 1, 2\}$ tal que $e = u_kv_{kk}$.

O lema seguinte é muito provavelmente conhecido e intuitivo, não tenho uma referência mas não vou incluir uma prova para evitar delongas e não perder o foco do exemplo.

3.3.1 Lema: Suponha que G seja um grafo com menor $(k + 1)$ -conexo Y . Suponha que $W \subseteq V(G)$ tenha k elementos e que $G[W]$ é completo. Então existe uma componente conexa C de $G \setminus W$ tal que $G[W]$ possua um menor Y' isomorfo a Y e tal que todos os vértices usados para obtenção de Y' a partir de G também são usados para a obtenção de Y a partir de G .

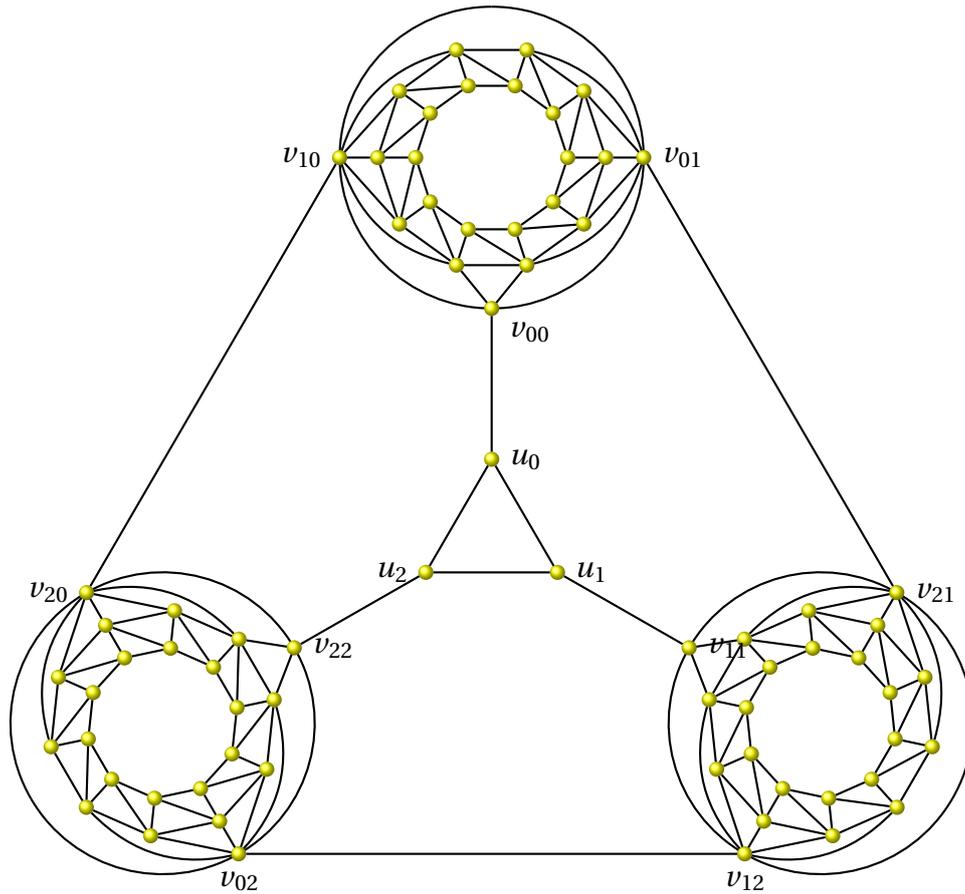


Figura 3.3: G construído para $n = 5$.

Dizemos que dois subconjuntos de vértices V_1 e V_2 de menores H_1 e H_2 se **encontram hereditariamente** se algum vértice v de G foi usado na obtenção tanto de um vértice de V_1 em H_1 como de um vértice de V_2 em H_2 .

Observe que H possui como subgrafos 3-cópias de X_n , cujos vértices excluindo os ligadores centrais não se encontram hereditariamente. Isso é uma propriedade que se preserva para qualquer menor G' de G o qual tenha menor isomorfo a H .

Seja $e \in E(G_0)$ suponha, por contradição, que $G' \in \{G \setminus e, G/e\}$ possui como subgrafos 3-cópias de X_n , cujos vértices não se intersectam fora dos ligadores centrais. Observe que G_0/e e $G_0 \setminus e$ não possuem menores isomorfos a X_n e que para $i = 0, 1, 2$ o único menor isomorfo a X_n de G_i é o próprio G_i . Aplicando 3.3.1 aos 3-separadores de G da forma $\{v_{ii}, v_{i(i-1)}, v_{i(i+1)}\}$ (ou os dois separadores obtidos desse em G' se for o caso) em G' , temos que, para cada $i \in \{0, 1, 2\}$ existe $k_i \in \{1, 2\}$ tal que G_{k_i} possui um menor isomorfo a X_n cujo conjunto de vértices sejam usado para a obtenção de S_i . Mas existem j e l em $\{0, 1, 2\}$ tais que $k_j = k_l$. Ou seja os vértices de G_{k_j} foram usados para a obtenção de S_j e S_l . Mas S_j e S_l não devem se encontrar hereditariamente fora dos ligadores centrais. Uma contradição.

Então nenhuma aresta de $E(G_0) \cup E(G_1) \cup E(G_2)$ pode ser deletada ou contraída em G a

fim de se obter um menor isomorfo a H .

Se contrairmos uma aresta da forma $v_{ij}v_{ji}$ em G obtemos um vértice de grau $2n+4 \geq 14$. Mas o vértice de maior grau de H tem grau, no máximo, 12. As arestas adjacentes ao vértice obtido nessa contração não podem ser deletadas ou contraídas para a obtenção de um menor isomorfo a H , pois estão em $E(G_0) \cup E(G_1) \cup E(G_2)$. Então arestas da forma $v_{ij}v_{ji}$ não podem ser contraídas para a obtenção de um menor isomorfo a H .

Agora, as arestas da forma $u_i u_i$ não resultam em um grafo 3-conexo. Portanto as únicas arestas de G cuja a contração resulta num grafo 3-conexo com menor isomorfo a H são as da forma $u_k v_{kk}$ com $k \in \{0, 1, 2\}$.

4 Matroides Complementares em Relação a Geometrias Projetivas

Se M é uma matroide representável sobre $GF(q)$, podemos olhar para M como uma restrição da geometria projetiva $PG(r-1, q)$ para $r \geq rM$. Quando q é igual a 2 ou 3, como veremos a seguir, temos bem definido o conceito que introduziremos aqui como a matroide complementar de M em relação a $PG(r-1, q)$ definida pela deleção em $PG(r-1, q)$ do conjunto de elementos cuja restrição é isomorfa a M . Na próxima seção vamos exemplificar uma aplicação desse conceito, para construir todas as matroides 3-conexas de posto 4, o que, posteriormente, vai ser útil para a demonstração do teorema 1.0.6.

Dizemos que duas representações matriciais de uma matroide M , sobre um corpo K , A e B com respectivas dimensões $(m \times n)$ e $(l \times n)$ são **representações equivalentes** de M sobre K se A pode ser obtida de B por uma sequência das seguintes operações:

- (a) Permutação de colunas;
- (b) Troca das entradas pelas respectivas imagens de um automorfismo de K ;
- (c) Adição ou remoção de linhas nulas; e
- (d) Operações elementares com linhas.

A demonstração do resultado seguinte também pode ser encontrada em [Oxley, 1992, 10.1.1].

4.0.2 Teorema: [Brylawski, Lucas, 1976] *Sejam $r, n \geq 1$ e $A_1 := [Id_r | D_1]$ e $A_2 := [Id_r | D_2]$ matrizes de dimensão $r \times n$ sobre um corpo K , com colunas rotuladas em ordem por e_1, \dots, e_n . Suponha que a identidade de $\{e_1, \dots, e_n\}$ seja um isomorfismo de $M[A_1]$ e $M[A_2]$. Se todas as entradas de D_1 e D_2 pertencem a $\{0, 1, -1\}$, então A_1 e A_2 são representações equivalentes de M sobre K .*

Segue diretamente desse teorema:

4.0.3 Corolário: *Se $q \in \{2, 3\}$ então quaisquer duas representações de uma matroide M sobre $GF(q)$ são equivalentes.*

Uma matriz A , com r linhas, que representa uma matroide simples M sobre $GF(q)$ induz naturalmente um mergulho $\theta_A : E(M) \rightarrow PG(r-1, q)$ no qual $\theta_A(e)$ é o elemento de $PG(r-1, q)$ que tem como coordenadas homogêneas os respectivos elementos da coluna de A rotulada por e .

4.0.4 Lema: *Suponha que as matrizes A e B , com $r \geq 3$ linhas, representam uma matroide M sobre $GF(q)$. Então elas são representações equivalentes de M sobre $GF(q)$ se e somente se:*

$$\begin{aligned}\varphi: \theta_A(E(M)) &\longrightarrow \theta_B(E(M)) \\ \theta_A(e) &\longrightarrow \theta_B(e)\end{aligned}$$

é uma restrição de um automorfismo de $PG(r-1, q)$.

Para a demonstração desse lema olhe, por exemplo [Oxley, 1992, 6.3.11].

4.0.5 Lema: *Suponha que $q \in \{2, 3\}$, $r \geq 3$, X e Y sejam subconjuntos de $E(PG(r-1, q))$ e que exista um isomorfismo de matroides $\varphi: PG(n, 2)|X \rightarrow PG(n, 2)|Y$. Então existe um automorfismo Φ de $PG(r-1, q)$ que estende φ e cuja restrição a $E(PG(r-1, q)) - X$ induz um isomorfismo de matroides entre $PG(r-1, q)\setminus X$ e $PG(r-1, q)\setminus Y$.*

Prova: Sejam A_X e A_Y as matrizes cujos vetores colunas são formados pelas respectivas coordenadas homogêneas dos elementos de X e Y . Por 4.0.3, A_X e A_Y são representações equivalentes de M . Então, por 4.0.4, existe um automorfismo Φ de $PG(r-1, q)$, cuja restrição a X é φ . A restrição de Φ a $PG(r-1, q) - X$ induz um isomorfismo de matroides entre $PG(r-1, q)\setminus X$ e $PG(r-1, q)\setminus Y$. \square

4.0.6 Definição: *Seja $q \in \{2, 3\}$ e $n \geq 3$. Se M é uma matroide representável sobre $GF(q)$ e $n \geq r_M$, então M é isomorfa a uma restrição $PG(n-1, q)|X$ de $PG(n-1, q)$. Neste caso definimos $PG(n-1, q)\setminus M := PG(n-1, q)\setminus X$. Observe que, pelo lema 4.0.5, a menos de isomorfismos, $PG(n-1, q)\setminus M$ não varia com uma mudança na escolha de X . Então $PG(n-1, q)\setminus M$ está bem definida e a denominamos **matroide complementar** de M em relação a $PG(n-1, q)$.*

4.0.7 Corolário: *Seja $q \in \{2, 3\}$ e $n \geq 3$. Suponha que M_1 e M_2 sejam matroides representáveis sobre $GF(q)$ com posto menor ou igual a n . Então M_1 é isomorfa a uma restrição de M_2 , se, e somente se, $PG(n-1, 2)\setminus M_2$ é isomorfa a uma restrição de $PG(n-1, 2)\setminus M_1$.*

4.1 Classificação das matroides binárias 3-conexas de posto 4

O corolário 4.0.7 nos permite reduzir a classificação das matroides binárias “grandes” de posto 4 ao estudo dos seus complementares em relação a $PG(3, 2)$. Segue agora lemas que fazem esse estudo.

4.1.1 Teorema: (Tutte, 1959) *Uma matroide é gráfica se e somente se não possui menor isomorfo a uma das matroides $U_{2,4}$, F_7 , F_7^* , $M^*(K_5)$ e $M^*(K_{3,3})$.*

4.1.2 Definição: Dada uma matroide M e $k \geq 1$ definimos $S_k(M)$ como a matroide obtida de M substituindo-se cada elemento por uma classe em série com k elementos.

4.1.3 Lema: As únicas matroides binárias simples e conexas com até 6 elementos e posto até 4, são, a menos de isomorfismos:

- (a) $U_{1,1}$, com 1 elemento;
- (b) $U_{2,3}$, com 3 elementos;
- (c) $U_{3,4}$, com 4 elementos;
- (d) $U_{4,5}$ e $P(U_{2,3}, U_{2,3})$, com 5 elementos; e
- (e) $M(K_4)$, $P(U_{2,3}, U_{3,4})$ e $S_2(U_{1,3})$, com 6 elementos.

Prova: Seja M uma tal matroide. Pelo teorema 4.1.1, M é gráfica. É fácil de ver que se $|E(M)| \leq 3$, então $M \cong U_{1,1}$ ou $M \cong U_{2,3}$. Suponha que $|E(M)| \geq 4$. Se $|E(M)| = 4$, M não possui um 3-circuito. Então M é o circuito com 4 elementos $U_{3,4}$. Podemos então supor que $|E(M)|$ é igual a 5 ou 6. Se $rM \leq 3$, M é isomorfa a um menor de F_7 obtido pela deleção de um ou dois elementos e, portanto, $M \cong M(K_4)$ ou $M \cong P(U_{2,3}, U_{2,3})$. Podemos supor que $rM = 4$. Logo M é a matroide de ciclos de um grafo simples G , 2-conexo, com 5 vértices. Se $|E(M)| = 5$ então $M \cong U_{4,5}$. Suponha, finalmente, que $|E(M)| = 6$. Se M possui um circuito de tamanho 5, então a aresta de G fora desse circuito liga dois vértices desse circuito e $M \cong P(U_{2,3}, U_{3,4})$. Se G possui um circuito C de tamanho 4, então sobra um vértice de G fora desse circuito, o qual deve ser adjacente às duas arestas de G fora de C . Essas arestas estão ligadas a vértices distintos de C . Então $M \cong P(U_{2,3}, U_{3,4})$ ou $S_2(U_{1,3})$. Só falta verificar o caso em que todos os circuitos de M são triângulos. Temos dois triângulos T_1 e T_2 de G com uma aresta em comum. A aresta de G fora de $T_1 \cup T_2$, para que não haja paralelismo ou laços, deve incidir aos dois vértices de grau 2 de $G[T_1 \cup T_2]$. Logo $G \cong K_4$ e $rM \neq 4$, uma contradição. Com isso esgotamos os casos e finalizamos a demonstração. \square

4.1.4 Corolário: As matroides binárias simples com no máximo 6 elementos e posto no máximo 4 são, a menos de isomorfismos, as seguintes:

- (a) $U_{1,1}$, com 1 elemento;
- (b) $U_{2,2}$, com 2 elementos;
- (c) $U_{2,3}$ e $U_{3,3}$, com 3 elementos;
- (d) $U_{3,4}$, $U_{4,4}$ e $U_{2,3} \oplus U_{1,1}$, com 4 elementos;
- (e) $U_{2,3} \oplus U_{2,2}$, $U_{3,4} \oplus U_{1,1}$, $U_{4,5}$ e $P(U_{2,3}, U_{2,3})$, com 5 elementos; e
- (f) $U_{2,3} \oplus U_{2,3}$, $U_{1,1} \oplus P(U_{2,3}, U_{2,3})$, $M(K_4)$, $P(U_{2,3}, U_{3,4})$ e $S_2(U_{1,3})$, com 6 elementos.

Definimos Z_r , o **spike binário** de posto r , como a matroide vetorial sobre $GF(2)$ associada à matriz:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_r & b_1 & b_2 & \dots & b_r & c \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $S_{2r} := Z_r \setminus b_r$.

Vamos usar para tratar as matroides menores o seguinte teorema:

4.1.5 Teorema: [Oxley, 1987] *Seja M uma matroide binária 3-conexa sem um menor isomorfo a W_4 . Então:*

(i) $M \cong Z_r, Z_r^*, Z_r \setminus c$ ou S_{2r} para algum $r \geq 4$; ou

(ii) $M \cong F_7, F_7^*$ ou $M(K_4)$; ou

(iii) $M \cong U_{0,1}, U_{1,1}, U_{1,2}, U_{1,3}$ ou $U_{2,3}$.

O resultado seguinte já é bem conhecido, pode ser encontrado em [Oxley, 1992, 8.1.10].

4.1.6 Lema: *Se $M \setminus e$ é 3-conexa e M não é 3-conexa, então e é um laço ou colaço de M ou e está em paralelo com algum outro elemento de M .*

4.1.7 Teorema: *As matroides 3-conexas binárias de posto 4 são, a menos de isomorfismos, exatamente as listadas abaixo:*

Com 7 elementos: $M \cong F_7^*$;

Com 8 elementos:

$$W_4 \cong PG(3,2) \setminus [M(K_5 \setminus \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{3,5\}\})]$$

$$S_8 \cong PG(3,2) \setminus (M(K_4) \oplus U_{1,1})$$

$$AG(3,2) \cong PG(3,2) \setminus F_7$$

Com 9 elementos:

$$PG(3,2) \setminus [U_{2,3} \oplus U_{2,3}] \cong M^*(K_{3,3})$$

$$PG(3,2) \setminus [U_{1,1} \oplus P(U_{2,3}, U_{2,3})]$$

$$PG(3,2) \setminus M(K_4) \cong Z_4$$

$$PG(3,2) \setminus P(U_{2,3}, U_{3,4}) \cong M(K_5 \setminus \{\{1,2\}\})$$

$$PG(3,2) \setminus S_2(U_{1,3})$$

Com 10 elementos:

$$PG(3,2) \setminus (U_{2,3} \oplus U_{2,2})$$

$$PG(3,2) \setminus (U_{3,4} \oplus U_{1,1})$$

$$PG(3,2) \setminus U_{4,5} \cong M(K_5)$$

$$PG(3,2) \setminus P(U_{2,3}, U_{2,3})$$

Com 11 elementos:

$$PG(3,2) \setminus U_{4,4}$$

$$PG(3,2) \setminus U_{3,4}$$

$$PG(3,2) \setminus (U_{2,3} \oplus U_{1,1})$$

Com 12 elementos:

$$PG(3,2) \setminus U_{3,3}$$

$$PG(3,2) \setminus U_{2,3}$$

Com 13 elementos: $PG(3,2) \setminus U_{2,2}$;

Com 14 elementos: $PG(3,2) \setminus U_{1,1}$; e

Com 15 elementos: $PG(3,2)$.

Prova: Por simplicidade, nesta demonstração vamos olhar todas as matroides como restrições de $PG(3,2)$ e abusar de linguagem tratando matroides isomorfas como iguais. Seja \mathcal{M} a família das matroides listadas no enunciado do teorema e \mathcal{M}' a família das matroides 3-conexas binárias de posto 4. Para $j = 7, \dots, 15$, denotamos \mathcal{M}_j (resp. \mathcal{M}'_j) o conjunto das matroides em \mathcal{M} (resp. \mathcal{M}') com j elementos. É consequência direta do teorema 4.1.5 que as matroides binárias 3-conexas de posto 4, com até 8 elementos são F_7^* , W_4 , $AG(3,2)$ e S_8 . Logo $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}'_k$ para $k \leq 8$.

Observe que as matroides de \mathcal{M} com ao menos 9 elementos, são exatamente os complementares, em relação a $PG(3,2)$, das matroides listadas em 4.1.4, exceto por $PG(3,2) \setminus S_2(U_{1,1})$ que não está listada neste teorema. Mas essa matroide não é 3-conexa, pelo seguinte argumento: vejamos duas matrizes que representam, respectivamente, $S_2(U_{1,1})$ e $PG(3,2) \setminus S_2(U_{1,1})$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se olharmos para a última linha da matriz à direita observamos que 4 e 9 estão em série nessa matriz, logo $PG(3,2) \setminus S_2(U_{1,1})$ não é 3-conexa.

Então $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$. Para concluir a inclusão contrária basta provar que todas as matroides de \mathcal{M} são 3-conexas. Seja $k \in \{9, \dots, 15\}$ observe que, se $M \in \mathcal{M}_k$, então existe uma matroide $N \in \mathcal{M}_{k-1}$ tal que $PG(3,2) \setminus N$ é uma extensão simples por um elemento de $PG(3,2) \setminus M$. Por 4.0.7, M é uma extensão simples, por um elemento, de N . Por construção, as matroides de \mathcal{M} são simples. Então, como as matroides de \mathcal{M}_8 são 3-conexas e para $k \geq 9$ toda matroide de \mathcal{M}_k é uma extensão simples, por um elemento distinto de um colço, de uma matroide de \mathcal{M}_{k-1} , segue indutivamente, por 4.1.6, que as matroides de \mathcal{M} são 3-conexas e com isso finalizamos a demonstração. \square

5 Graficidade e cocircuitos não-separadores em matroides binárias

Olhamos para $2^{E(M)}$ como um espaço vetorial sobre $GF(2)$. Com a diferença simétrica de conjuntos como soma e zero como o conjunto vazio. Dado $A \subseteq E(M)$, definimos $\mathcal{R}_A^*(M)$ como o conjunto dos cocircuitos não separadores de M que evitam A . Denotamos $\mathcal{R}_e^*(M)$ em vez de $\mathcal{R}_{\{e\}}^*(M)$. A dimensão do subespaço vetorial gerado por $\mathcal{R}_A^*(M)$ é denotada $dim_A M$. Analogamente usamos a notação $dim_e M$.

Denotamos $Y(M) := \{e \in E(M) : |\mathcal{R}_e^* M| \geq r^* M\}$, por 1.0.2, (a), temos que $Y(M)$ é o conjunto dos elementos de e de M tais que $\mathcal{R}_e^* M$ é linearmente dependente no espaço de cociclos de M . Denotamos também $\tilde{Y}(M)$ como o conjunto $E(M) - Y(M)$.

5.0.1 Definição: Uma k - \mathcal{C} -cadeia de uma matroide M é uma sequência de circuitos C_1, \dots, C_k de M tais que para $i = 2, \dots, k$, $C_i \not\subseteq C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$.

O seguinte lema é de fácil verificação:

5.0.2 Lema: Seja M uma matroide, $X \subseteq E(M)$ e k um inteiro não negativo. São equivalentes:

- (a) existe uma k - \mathcal{C} -cadeia de $M|X$;
- (b) X encontra todos os membros de $\{I \in \mathcal{I}(M^*); |I| > r^* M - k\}$; e
- (c) X encontra todos os membros de $\{Y \subseteq E(M); r^* Y > r^* M - k\}$.

5.0.3 Teorema: Seja M uma matroide binária, 3-conexa e não gráfica. Então existe uma 3- \mathcal{C} -cadeia de $M|Y(M)$.

5.1 Resultados Preliminares

Seja M uma matroide binária e 3-conexa. Em [Lemos, 2009] foi introduzida a definição $dep_A M := |\mathcal{R}_A^* M| - dim_A M$ que, de certa forma, mede o grau de dependência linear de $\mathcal{R}_A^* M$. Veja que $dep_A M = 0$ se e somente se $\mathcal{R}_A^* M$ é linearmente independente. Denotamos $dep_e M := dep_{\{e\}} M$. Veja também que:

$$Y(M) = \{e \in E(M) : dep_e M > 0\}.$$

5.0.1 Lema: [Lemos, 2009] *Seja M uma matroide 3-conexa e binária com coposto ao menos 4. Se e é um elemento de M tal que $N := co(M \setminus e)$ é 3-conexa, então podemos escolher o conjunto base de N de forma que, para todo subconjunto A de $E(N)$, temos:*

$$dep_A N \leq dep_{A'} M \leq dep_A M. \quad (5.1)$$

Onde A' é o conjunto minimal tal que toda tríade T^ de M que contém e e encontra A é tal que $T^* - e \subseteq A'$. Isso é: A' é a união de A com os elementos de $E(M) - (e \cup A)$ em tríade, em M , com e e um elemento de A .*

5.0.2 Lema: *Seja M uma matroide binária 3-conexa com coposto ao menos 4. Suponha que e é um elemento de M tal que $N := co(M \setminus e)$ seja 3-conexa. Podemos escolher o conjunto base de $co(M \setminus e)$ de forma que:*

$$Y(co(M \setminus e)) \cup \{b \in E(M) : \text{existe elemento de } Y(co(M \setminus e)) \text{ em série com } b \text{ em } M \setminus e\} \subseteq Y(M) \quad (5.2)$$

Prova: Escolha o conjunto base de N satisfazendo (5.1). Com isso temos $Y(N) \subseteq Y(M)$. Suponha que $a \in E(N)$ e $\{a, b, e\}$ é uma tríade de M . Como em (5.1), denotando $A := \{a\}$, temos $A' = \{a, b\}$. Se $a \in Y(N)$, então $dep_a N \geq 1$. Por (5.1), $dep_{\{a, b\}} M \geq 1$, logo $\mathcal{R}_{\{a, b\}}^* M$ é linearmente dependente. Mas $\mathcal{R}_{\{a, b\}}^* M \subseteq \mathcal{R}_a^* M \cap \mathcal{R}_b^* M$. Então $\mathcal{R}_a^* M$ e $\mathcal{R}_b^* M$ são linearmente dependentes e $\{a, b\} \subseteq Y(M)$. \square

5.0.3 Corolário: *Seja M uma matroide binária 3-conexa com coposto ao menos 4. Suponha que e é um elemento de M tal que $N := co(M \setminus e)$ seja 3-conexa e que o conjunto base de N seja escolhido satisfazendo (5.1). Então*

(a) *se C é um circuito de N contido em $Y(N)$ e D o circuito de M tal que $D \cap E(N) = C$ então $D \subseteq Y(M)$.*

(b) *se existe uma k - \mathcal{C} -cadeia em $N|Y(N)$, então existe uma k - \mathcal{C} -cadeia em $M|Y(M)$.*

5.0.4 Corolário: *Suponha que M é uma matroide binária 3-conexa, e que e seja um elemento de M tal que $N := co(M \setminus e)$ seja 3-conexa. Então:*

(a) *Se $\tilde{Y}(N) = \emptyset$, então $\tilde{Y}(M) \subseteq \{e\}$;*

(b) *Se $\tilde{Y}(N) = \{f\}$, então $\tilde{Y}(M) \subseteq \{e, f\}$ ou existe um elemento g de M em tríade com e e f tal que $\tilde{Y}(M) \subseteq \{e, f, g\}$; e*

(c) *Se existe um elemento e' distinto de e tal que $co(M \setminus e')$ seja 3-conexa com $\tilde{Y}(co(M \setminus e')) = \emptyset$, então $\tilde{Y}(M) = \emptyset$.*

5.1 Alguns casos iniciais

5.1.1 Definição: Uma *órbita* de M é uma classe de equivalência da relação em $E(M)$ na qual dois elementos x e y estão relacionados se e só se existe um automorfismo φ de M tal que $\varphi(x) = y$. Se O é uma órbita de M , observe que, para $e, f \in O$, $|R_e^* M| = |R_f^* M|$, $\dim_e M = \dim_f M$ e $\text{dep}_e M = \text{dep}_f M$. Em particular, se o grupo de automorfismos de M é transitivo, então $Y(M) = \emptyset$ ou $Y(M) = E(M)$.

5.1.2 Definição: Definimos por R_{10} a matroide com conjunto base formado pelos vetores de $GF(2)^5$ com exatamente 3 entradas não nulas na qual um conjunto é independente se é linearmente independente em $GF(2)^5$.

5.1.3 Lema: Existe uma 3- \mathcal{C} -cadeia de $M|Y(M)$ se $M \in \{M^*(K_5), F_7, R_{10}, F_7^*\}$.

Prova: Observe que todas essas matroides possuem grupos de automorfismos transitivos e, além disso, possuem 3- \mathcal{C} -cadeias. Pelas observações em 5.1.1, basta mostrar que, em cada uma delas, $Y(M) \neq \emptyset$. Caso por caso:

Observe que a contração de cada triângulo em K_5 é um grafo 2-conexo, isso é: cada triângulo de $M(K_5)$ é um cocircuito não-separador de $M^*(K_5)$. Considere uma restrição K_4 de K_5 . Veja que a diferença simétrica dos quatro triângulos de K_4 é vazia. Com isso verificamos que $\mathcal{R}_e^* M^*(K_5)$ é linearmente dependente para todo elemento dessa matroide.

Os hiperplanos de F_7 são suas respectivas retas e são todos conexos. Ou, seja todos os cocircuitos de F_7 são não-separadores. Além disso, cada elemento de F_7 é a interseção de três retas, cujos complementos possuem diferença simétrica vazia. Então $\mathcal{R}_e^* F_7$ é linearmente dependente para cada elemento e de F_7 .

A contração de cada triângulo em F_7 resulta em uma classe em paralelo, então cada triângulo de F_7 é um cocircuito não-separador de F_7^* . Agora observe que cada elemento de F_7 evita 4 triângulos e $r(F_7^*) = 4$. Com isso verificamos que $Y(F_7^*) = E(F_7^*)$.

Finalmente, verifiquemos o caso de R_{10} . Considere para i e j distintos em $\{1, \dots, 5\}$ os hiperplanos: $H_i := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in E(R_{10}) : x_i = 0\}$ e

$$H'_i := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in E(R_{10}) : x_1 + \dots + x_5 - x_i = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in E(R_{10}) : x_i = 1\}$$

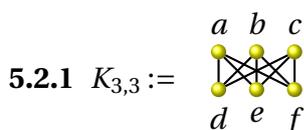
. Vamos observar que esses hiperplanos são conexos, abaixo seguem representações sobre $GF(2)$ de, respectivamente, $R_{10}|H_i$ e $R_{10}|H'_i$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos que $(1, 1, 1, 0, 0)$ está em H_4, H_5, H'_1, H'_2 e H'_3 , segue que esse elemento evita ao menos 5 cocircuitos não separadores dessa matroide, enquanto $r(R_{10}) = 5$, portanto $Y(R_{10}) \neq \emptyset$ e $Y(R_{10}) = E(R_{10})$. Assim finalizamos a demonstração. \square

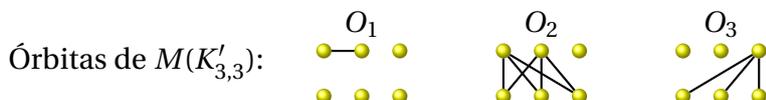
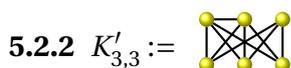
5.2 Circuitos contratíveis em grafos simples com 6 vértices que estendem $K_{3,3}$

As duais das matroides de ciclos dos grafos simples estendendo $K_{3,3}$ aparecem, na demonstração dos teoremas 1.0.6 e 5.0.3. Nesta seção estudamos, nesses grafos, as versões duais das suas estruturas relacionadas a cocircuitos não-separadores. Dizemos que um circuito C numa matroide conexa é **contratível** se M/C é conexa. Analogamente, um circuito C num grafo 2-conexo é contratível se a contração das suas arestas resulta num grafo 2-conexo. Denotamos por $Y^*(M)$ o conjunto dos elementos de M que evitam, ao menos r^*M circuitos contratíveis, ou equivalentemente, por 1.0.2, (a), evitam os membros uma família linearmente dependente de circuitos contratíveis. Vamos aqui classificar esses grafos e apresentar os seus respectivos conjuntos Y^* .

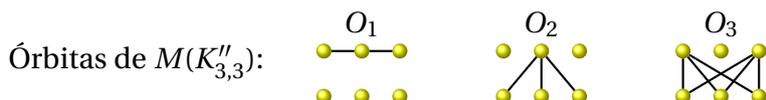
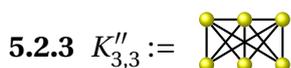
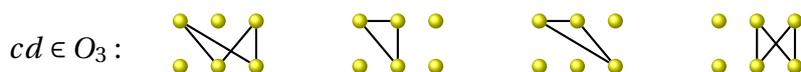
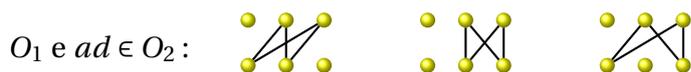


Os respectivos rótulos usados nos vértices dos grafos acima serão preservados, porém omitidos, nas próximas figuras.

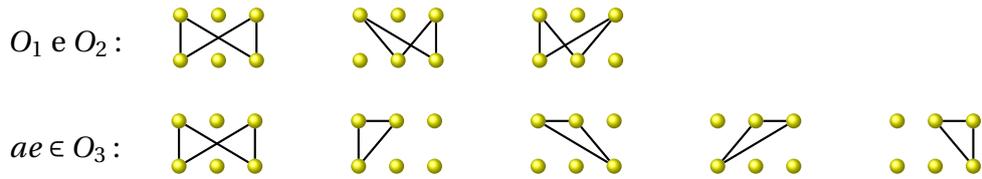
Cada 4-circuito de $K_{3,3}$ é contratível e cada aresta evita cinco 4-circuitos. Mas $rM^*(K_{3,3}) = 5$. Portanto $E(M^*(K_{3,3})) = Y(M^*(K_{3,3}))$.



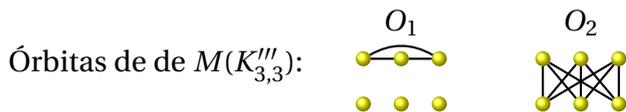
Listas de circuitos contratíveis linearmente dependentes evitando:



Listas de circuitos contratíveis linearmente dependentes evitando :



5.2.4 $K_{3,3}''' :=$ 



Listas de circuitos contratíveis linearmente dependentes evitando $be \in O_2$:

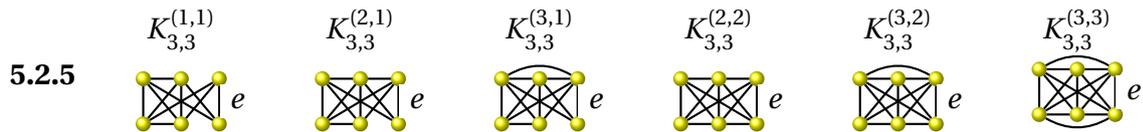


Porém os elementos de O_1 não evitam conjuntos linearmente dependentes de circuitos contratíveis nessa matroide. Um elemento de O_1 evita apenas 6 circuitos contratíveis em $K_{3,3}'''$. Por exemplo, ac evita exatamente os seguinte circuitos contratíveis:



Os quais formam um conjunto linearmente independente.

Os grafos restantes vamos analisar segundo um mesmo princípio:



Seja $G \in \{K_{3,3}^{(1,1)}, K_{3,3}^{(2,1)}, K_{3,3}^{(3,1)}, K_{3,3}^{(2,2)}, K_{3,3}^{(3,2)}, K_{3,3}^{(3,3)}\}$. Consideremos a aresta e indicada nas figuras. Observe que $si(G/e) \cong K_5$. Cada triângulo de K_5 é um circuito contratível dessa matroide. Os triângulos de K_5 evitando um dado vértice formam um conjunto linearmente dependente. Por 5.0.2, temos que $E(G) - e \subseteq Y(M(G))$. Para mostrar que $E(M^*(G)) = Y(M^*(G))$, só falta exibir uma lista linearmente dependente de circuitos contratíveis em G com os membros evitando e . A saber:



Vamos sintetizar as informações concluídas nessa seção no lema seguinte:

5.2.6 Lema: Se G é um grafo com 6 vértices estendendo $K_{3,3}$ então:

(a) Se G não possui conjunto independente de vértices com 3 elementos, existe uma aresta e de G tal que $K_5 \cong si(G/e)$ e, em outro caso, G não possui menor isomorfo a K_5 .

(b) Se G não é isomorfo a $K_{3,3}'''$, então $Y(M^*(G)) = E(M^*(G))$. Por outro lado, $Y(M^*(K_{3,3}''')) = E(K_{3,3})$.

Prova: Já vimos, acima a demonstração do item (b). Além disso vimos que, se G não possui conjunto independente de vértices com 3 elementos, então G possui um menor K_5 . Falta mostrar que em outro caso não há menor isomorfo a K_5 . Para isso basta mostrar que $G := K_{3,3}'''$ não possui menor isomorfo a K_5 . Como $K_{3,3}'''$ possui um vértice a mais que K_5 , basta mostrar que não existe uma aresta e de $K_{3,3}'''$ tal que $si(K_{3,3}'''/e)$ tem um menor isomorfo a K_5 . De fato, cada aresta de $K_{3,3}'''$ está, ao menos, em dois triângulos nesse grafo. Então:

$$|E(si(K_{3,3}'''/e))| \leq |E(K_{3,3}''')| - 3 = 9 < |E(K_5)| = 10.$$

Logo $K_{3,3}'''$ e suas restrições $K_{3,3}''$, $K_{3,3}'$ e $K_{3,3}$ não possuem menor K_5 . \square

5.3 Mais alguns preliminares

Os teoremas seguintes são alguns clássicos que serão aqui usados, suas demonstrações podem ser também encontradas em [Oxley, 1992].

5.3.1 Teorema: [Tutte, 1958] Uma matroide binária é regular se e somente se não possui menor isomorfo a F_7 ou F_7^* .

5.3.2 Teorema: [Tutte, 1959] Uma matroide cográfica é gráfica se e somente se não possui menor isomorfo a $M^*(K_5)$ ou $M^*(K_{3,3})$.

5.3.3 Definição: Definimos R_{12} como a matroide representada, sobre $GF(2)$ pela seguinte matriz:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ Id_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

5.3.4 Teorema: [Seymour, 1980] Seja M uma matroide 3-conexa e regular. Então M é gráfica, cográfica, $M \cong R_{10}$ ou M possui um menor isomorfo a R_{12} .

Seja \mathcal{M} uma classe de matroides. Dizemos que M é um **decompositor** de \mathcal{M} se não existe em \mathcal{M} uma matroide com menor próprio isomorfo a M . Segue no próximo lema uma lista de decompositores classicamente conhecidos.

5.3.5 Lema:

- (a) F_7 é um decompositor da classe das matroides binárias sem menor isomorfo a F_7^* .
- (b) R_{10} é, a menos de isomorfismos, o único decompositor da classe das matroides regulares.
- (c) $M(K_5)$ é um decompositor da classe das matroides gráficas sem menor isomorfo a $M(K_{3,3})$.

5.4 Demonstração do teorema 5.0.3

Demonstração do teorema 5.0.3: Suponha que M seja um contra-exemplo com o menor número de elementos para o teorema. Primeiro mostramos que:

5.4.1.1 Se N é um menor de M e N é não gráfica, então $r^*N = r^*M$.

Suponha o contrário. Como N é não gráfica e binária, $r^*N \geq 3$ e $r^*M \geq 4$. Por 3.0.1, temos a existência de $e \in E(M)$ tal que $co(M \setminus e)$ possui um menor isomorfo a N . Por 5.0.1, escolhemos $E(co[M \setminus e])$ satisfazendo (5.1). Pela minimalidade de M temos uma 3- \mathcal{C} -cadeia em $co(M \setminus e) | Y(co[M \setminus e])$. Por 5.0.3, temos uma 3- \mathcal{C} -cadeia de $M | Y(M)$. Uma contradição. Com isso mostramos 5.4.1.1.

Agora mostramos que M é regular. Suponha o contrário. Por 5.3.1, temos que M possui um menor F_7 ou um menor F_7^* . Por 5.1.3, $M \not\cong F_7$. Mas F_7 é um decompositor da classe das matroides que não têm menor isomorfo a F_7^* . Então M possui um menor isomorfo a F_7^* . Por 5.4.1.1, $r^*M = r^*F_7^* = 3$. Então $M = F_7^*$, uma contradição com 5.1.3.

Por 5.1.3, $M \not\cong R_{10}$. Como M é regular e não gráfica, por 5.3.2 M possui um menor isomorfo a $M^*(K_5)$ ou $M^*(K_{3,3})$. Por 5.1.3, $M \not\cong M^*(K_5)$. Mas $M(K_5)$ é um decompositor da classe das matroides cográficas sem menor isomorfo a $M^*(K_{3,3})$. Então M possui um menor isomorfo a $M^*(K_{3,3})$. Por 5.4.1.1, temos que $r^*M = 5$. Observe que M não possui menor isomorfo a R_{12} , então, por 5.3.4, M é cográfica ou isomorfa a R_{10} . Por 5.1.3, M é cográfica e tem $K_{3,3}$ como restrição. Ou seja M é a dual da matroide de ciclos de um grafo G com 6 vértices que possui subgrafo isomorfo a $K_{3,3}$. Por 5.2.6 as arestas correspondentes à restrição isomorfa a $K_{3,3}$ de G estão em $Y(M)$. Se $G \not\cong K_{3,3}'''$, $Y(M) = E(M)$ e as estrelas de vértices de G formam as 3- \mathcal{C} -cadeias procuradas, por outro lado, se $G \cong K_{3,3}'''$, basta tomar as estrelas dos vértices do conjunto independente de 3-vértices de G para forma uma 3- \mathcal{C} -cadeia. Assim finalizamos a demonstração do teorema. \square

5.5 Demonstração do teorema 1.0.6

5.5.1 Lema: Suponha que M é uma matroide binária 3-conexa e que e_1, e_2 e e_3 sejam elementos de M distintos tais que para $i = 1, 2, 3$, $co(M \setminus e_i)$ seja 3-conexa e que $|\tilde{Y}(co(M \setminus e_i))| \leq 1$. Então ou $|\tilde{Y}(M)| \leq 1$, ou $\tilde{Y}(M) \subseteq \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma tríade de M .

Prova: Suponha que $|\tilde{Y}(M)| \geq 2$, vamos mostrar que $\tilde{Y}(M) \subseteq \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma tríade de M . Por 5.0.4, (a) e (b), para cada $i = 1, 2, 3$, existe um conjunto F_i , não contendo e_i ,

com um ou dois elementos, tal que $\tilde{Y}(M) \subseteq (F_i \cup e_i)$ e $F_i \cup e_i$ é uma tríade de M se $|F_i| = 2$. Para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, se $|F_i| = |F_j| = 1$, então, como $|\tilde{Y}(M)| \geq 2$ e $\tilde{Y}(M) \subseteq (F_i \cup e_i) \cap (F_j \cup e_j)$, então $\tilde{Y}(M) = \{e_i, e_j\}$ e, como $\tilde{Y}(M) \subseteq F_k \cup e_k$, então $F_k = \{e_i, e_j\}$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma tríade de M . Então podemos supor, sem perder generalidade, que $|F_1| = |F_2| = 2$. Como $\tilde{Y}(M)$ possui ao menos dois elementos e está contido em $(F_1 \cup e_1) \cap (F_2 \cup e_2)$, então as tríades $(F_1 \cup e_1)$ e $(F_2 \cup e_2)$ se intersectam em dois elementos e são, portanto iguais, pois M é binária. Se $|F_3| = 2$, analogamente, temos:

$$(F_1 \cup e_1) = (F_2 \cup e_2) = (F_3 \cup e_3).$$

E, portanto, $(F_1 \cup e_1) = \{e_1, e_2, e_3\}$. Podemos então assumir que $|F_3| = 1$. Escrevemos $F_1 = \{e_2, f\}$. Então $\tilde{Y}(M) = F_3 \cup e_3$ e está contido em $\{e_1, e_2, f\}$ e $e_3 = f$, assim concluímos o resultado. \square

5.5.2 Proposição: *Seja \mathcal{M} uma classe de matroides fechada para menores, N uma matroide binária 3-conexa com ao menos 4 elementos e $k \in \{0, 1\}$. Suponha que toda matroide binária 3-conexa $M' \in \mathcal{M}$, com menor isomorfo a N e com $r^* M' \leq r^* N + k + 1$, satisfaça $|\tilde{Y}(M')| \leq k$. Se M é uma matroide binária 3-conexa em \mathcal{M} com menor isomorfo a N , então $|\tilde{Y}(M)| \leq k$.*

Prova: Suponha que \mathcal{M} , N , k e M constituem um contra-exemplo para o lema com $r^* M$ mínimo. Então $r^* M \geq r^* N + k + 2$. Por 3.0.3 e 3.0.6, existe um coindependente I^* de M , com $2 + k$ elementos tal que para todo $e \in I^*$, $co(M \setminus e)$ é 3-conexa, pertence a \mathcal{M} e possui um menor isomorfo a N .

Vejamus o caso em que $k = 0$. Pelo Teorema de Whittle(3.0.3), como $r^* M \geq r^* N + 2$, existem elementos distintos e e $e' \in E(M)$ tais que, $co(M \setminus e)$ e $co(M \setminus e')$ são 3-conexas com menor isomorfo a N e, por hipótese, $\tilde{Y}(co(M \setminus e)) = \tilde{Y}(co(M \setminus e')) = \emptyset$. Por 5.0.4 $\tilde{Y}(M) = \emptyset$.

Suponha agora que $k = 1$. Por 3.0.6, como $r^* M \geq r^* N + 3$, existe um coindependente I^* de M tal que para todo $e \in I^*$, $co(M \setminus e)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N , e, por hipótese, $|\tilde{Y}(co(M \setminus e))| \leq 1$. Por 5.5.1, $|\tilde{Y}(M)| \leq 1$. \square

5.5.3 Lema: *Se M é uma matroide regular 3-conexa e não gráfica, que possui um menor isomorfo a $M^*(K_5)$ e com $r^* M \leq 5$, então $Y(M) = E(M)$.*

Prova: Como M não é gráfica, por 5.3.4, M é cográfica, $M \cong R_{10}$ ou M possui menor isomorfo a R_{12} . Mas M não pode possuir menor isomorfo a R_{12} , pois $r^* M \leq 5$, e $M \not\cong R_{10}$, pois R_{10} não possui menor isomorfo a K_5 . Então M é cográfica. Se $M \cong M^*(K_5)$, verificamos o lema por 5.1.3. Suponha então que $M \not\cong M^*(K_5)$. Como $M^*(K_5)$ é um decompositor da classe das matroides cográficas sem menor $M^*(K_{3,3})$. Então M possui um menor isomorfo a $M^*(K_{3,3})$. Em particular $r^* M = 5$. Então M é a dual da matroide de ciclos de um grafo G com 6 vértices com um subgrafo isomorfo a $K_{3,3}$. Por 5.2.6, $G \not\cong K_{3,3}'''$ pois G possui K_5 como menor e, novamente por 5.2.6, $Y(M) = E(M)$. \square

5.5.4 Corolário: *Se M é uma matroide regular, 3-conexa e não gráfica, com menor isomorfo a $M^*(K_5)$, então $Y(M) = E(M)$.*

Prova: Basta aplicar 5.5.2 para $N = M^*(K_5)$ e $k = 0$, para a classe das matroides regulares, pois verificamos suas hipóteses por 5.5.3. \square

5.5.5 Lema:

(a) Se M é uma matroide 3-conexa binária de coposto 4 não isomorfa a S_8 , então $Y(M) = E(M)$. Por outro lado, $|\tilde{Y}(S_8)| = 1$.

(b) Se M é uma matroide 3-conexa binária e e é um elemento de M tal que $co(M \setminus e) \cong S_8$, então $|\tilde{Y}(M)| \leq 1$. E:

(c) Se M é uma matroide 3-conexa regular e e um elemento de M tal que $co(M \setminus e)$ é isomorfa a $M^*(K_{3,3})$, $M^*(K'_{3,3})$ ou $M^*(K''_{3,3})$, então $\tilde{Y}(M) = \emptyset$.

Prova: A prova desse resultado envolve passos computacionais e será desenvolvida no último capítulo. \square

5.5.6 Lema: Seja M uma matroide regular, 3-conexa, não gráfica, e sem menor isomorfo a $M^*(K'_{3,3})$. Então $Y(M) = E(M)$.

Prova: Podemos supor que M não possui menor isomorfo a R_{10} , pois nesse caso teríamos $M \cong R_{10}$, pois R_{10} é um decompositor da classe das matroides regulares, e já vimos que $E(R_{10}) = Y(R_{10})$ em 5.1.3. Se M possui menor isomorfo a $M^*(K_5)$ o resultado segue de 5.5.4. Então assumimos que M não possui menor isomorfo a $M^*(K_5)$. Seja \mathcal{M} a classe das matroides regulares sem menor isomorfo a $M^*(K_{3,3})$, $M^*(K_5)$ ou R_{10} . Por 5.3.2, M possui um menor isomorfo a $N := M^*(K_{3,3})$. As matroides de coposto 5 em \mathcal{M} com menores isomorfos a N , são cográficas por 5.3.4, já que $r^*R_{12} = 6$. Por 5.2.6 essas matroides são N , $M^*(K'_{3,3})$ e $M^*(K''_{3,3})$. Suponha que M' é uma matroide 3-conexa com coposto 6 em \mathcal{M} . Pelo lema de Whittle(3.0.1), existe um elemento $e \in E(M')$ tal que $co(M' \setminus e)$ é 3-conexa com um menor isomorfo a N . Logo $co(M' \setminus e)$ é isomorfa a N , $M^*(K'_{3,3})$ ou $M^*(K''_{3,3})$. Por 5.5.5, (c), $Y(M') = E(M')$. Mostramos então que todas as matroides M' em \mathcal{M} , com coposto menor ou igual $r^*N + 1 = 6$ e com menor isomorfo a N satisfazem $\tilde{Y}(M') = \emptyset$. Então, por 5.5.2, para $k = 0$, concluímos o lema. \square

5.5.7 Corolário: Se M é uma matroide regular, 3-conexa e não gráfica sem menor isomorfo a $M^*(K'''_{3,3})$ ou com menor isomorfo a $M^*(K_5)$, então $Y(M) = E(M)$.

Prova: Se M possui um menor isomorfo a $M^*(K_5)$ o resultado segue de 5.5.4. Em caso contrário, segue de 5.5.6. \square

5.5.8 Lema: Seja M uma matroide 3-conexa, binária, não regular e sem menor isomorfo a S_8 . Então $Y(M) = E(M)$.

Prova: Considere a classe \mathcal{M} das matroides binárias sem menor isomorfo a S_8 . Podemos supor que $M \not\cong F_7$ (por 5.1.3). Mas F_7 é um decompositor da classe das matroides binárias sem menor isomorfo a F_7^* . Portanto M possui um menor isomorfo a F_7^* . Seja M' uma matroide 3-conexa binária com menor F_7^* de coposto menor ou igual a 4 em \mathcal{M} . Se $r^* M' = 3$, então M'^* é isomorfa a um menor de $PG(2,2) = F_7$ e $M' \cong F_7^*$, por 5.1.3, $E(M') = Y(M')$ neste caso. Se $r^* M' = 4$, por 5.5.5, (a), também temos $E(M') = Y(M')$. Basta aplicar 5.5.2 para $N = F_7^*$ e $k = 0$ para concluir o resultado. \square

5.5.9 Lema: *Seja M uma matroide binária, 3-conexa e não regular, então $|\tilde{Y}(M)| \leq 1$.*

Prova: Podemos supor que $M \not\cong F_7$. Mas F_7 é um decompositor da classe das matroides binárias sem menor isomorfo a F_7^* . Portanto M possui um menor isomorfo a F_7^* . Vamos mostrar que

5.5.9.1 *Se M' uma matroide 3-conexa binária com menor isomorfo a F_7^* e com coposto menor ou igual a 5, então $|\tilde{Y}(M')| \leq 1$.*

Por 5.5.8 se M' não possui um menor isomorfo a S_8 , então $\tilde{Y}(M) = \emptyset$. Suponha então que M' possua um menor isomorfo a S_8 . Se $r^* M' = 4$, $|\tilde{Y}(M')| \leq 1$ por 5.5.5, (a). Suponha que $r^* M' = 5$. Pelo lema de Whittle(3.0.1), existe um elemento $e \in E(M')$ tal que $co(M' \setminus e)$ é 3-conexa e possui um menor isomorfo a S_8 . Se $co(M' \setminus e) \cong S_8$, por 5.5.5, (b) $|\tilde{Y}(M')| \leq 1$. Agora se $co(M' \setminus e) \not\cong S_8$, por 5.5.5, (a) $\tilde{Y}(co(M' \setminus e)) = \emptyset$. Por 5.0.4, (a) $\tilde{Y}(M') \subseteq \{e\}$ e $|\tilde{Y}(M')| \leq 1$. Com isso, mostramos 5.5.9.1.

Consideremos $N = F_7^*$, $k = 1$ e \mathcal{M} a classe de todas as matroides. Por 5.5.2 concluímos o lema. \square

Demonstração de 1.0.6 Suponha que M seja uma matroide 3-conexa, binária e não gráfica. Vejamos os casos:

- (a) Se M não é regular. Neste caso, o lema 5.5.9 assegura que $|Y(M) - E(M)| \leq 1$. Além disso, se M não possui menor isomorfo a S_8 , por 5.5.8, temos $E(M) = Y(M)$.
- (b) Se M é regular. Por 5.5.6, se M não possui menor isomorfo a $M^*(K_{3,3}''')$, então $E(M) = Y(M)$. Além disso, por 5.5.4, concluímos que, no caso de M possuir menor isomorfo a $M^*(K_5)$, também temos $E(M) = Y(M)$.

Concluímos então a demonstração do teorema. \square

5.6 Exemplos extremais

Em geral um spike de posto $r \geq 3$, pernas L_1, \dots, L_r e tip p , é uma matroide Z tal que L_1, \dots, L_r são triângulos de Z , se $i \neq j$ em $\{1, \dots, r\}$, $L_i \cap L_j = \{p\}$ e, para $k = 1, \dots, r - 1$, a união de k pernas de Z tem posto $k + 1$ nessa matroide. Além disso podemos notar que:

5.6.1 *Se C é um circuito de Z que não seja da forma L_i ou $L_i \Delta L_j$ para i e j distintos em $\{1, \dots, r\}$, então C intersecta $L_k - p$ para todo $k \in \{1, \dots, r\}$.*

De fato, digamos que C não encontra L_r . C não pode conter $L_i - p$ para mais de um índice $i \in \{1, \dots, r-1\}$. Então existe um índice, $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $|C \cap (L_j - p)| = 1$, digamos que $j = r-1$. Então, por causa do circuito C , $L_1 - p, \dots, L_{r-2} - p$ geram L_{r-1} . Uma contradição.

A menos de isomorfismos existe apenas um spike binário de posto r , o qual chamamos Z_r e é a matroide vetorial sobre $GF(2)$ representada por:

$$\begin{array}{cccccccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_r & b_1 & b_2 & \dots & b_r & c \\ \left(\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Definimos $S_{2r} := Z_r \setminus b_r$.

Por 5.6.1, os únicos circuitos que evitam b_r em S_{2n} são aqueles da forma $\{c, a_i, b_i\}$ ou $\{a_i, b_i, a_j, b_j\}$ com i e j distintos em $\{1, \dots, r-1\}$. Mas c é um laço de $S_{2r} / \{a_i, b_i, a_j, b_j\}$, então $\{a_i, b_i, a_j, b_j\}$ não é contratível em S_{2n} . Então b_r evita, no máximo, $r-1$ circuitos contratíveis de S_{2r} .

Pode-se mostrar que as matroides da forma Z_r e S_{2r} são 3-conexas indutivamente usando o fato de que são simples, cossimples e extensões ou coextensões por um elemento de matroides 3-conexas.

Observe que S_{2r} é auto-dual, pois a função $\phi : E(S_{2r}) \rightarrow E(S_{2r})$, tal que $\phi(a_i) = b_i$ e $\phi(b_i) = a_i$ para $i = 1, \dots, r-1$, $\phi(a_r) = c$ e $\phi(c) = a_r$, é um isomorfismo. Notemos ainda que, para $r \geq 4$, S_{2r} possui menor isomorfo a F_7 . Concluimos, pelo teorema 1.0.6, que:

5.6.1.1 Para $r \geq 4$, S_{2r} é uma matroide não regular, com $|\tilde{Y}(S_{2n})| = 1$.

Contudo essa não é a única classe de matroides 3-conexas não regulares para as quais o conjunto \tilde{Y} é unitário. Há outros exemplo computacionalmente construídos. Como a matroide associada a:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \left(\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Na qual, o último elemento evita apenas 5 cocircuitos não-separadores, os elementos rotulados por 6, 7 e 8 evitam 7 cocircuitos não separadores, encontrando apenas 2-cocircuitos não separadores dessa matroide e os demais evitam 6 cocircuitos não-separadores. Não conseguimos achar nenhum padrão nesses exemplos.

6 Computação com matroides binárias e cocircuitos não separadores

6.1 Formato de arquivos e funções de entrada e saída

O formato de arquivos `.matroid` que vamos trabalhar é bem simples. Armazenamos uma matroide binária, num arquivo texto, usando uma de suas representações matriciais da seguinte forma: começamos com uma chave `"{"` para indicar que a matriz começa a ser informada. A partir da primeira quebra de linha após essa chave o software começa a ler as entradas da matriz, ignorando todos os caracteres diferentes de zero e um. Além disso as quebras de linha do arquivo serão lidas como quebras de linha da matriz. Finalizamos a matriz com uma quebra de linha e uma chave `"}"`. Por exemplo a matriz abaixo representa a matroide F_7 .

```
1 2 3 4 5 6 7{
1 0 0 0 1 1 1
0 1 0 1 0 1 1
0 0 1 1 1 0 1
}
```

As entradas `"1 2 3 4 5 6 7"` na primeira linha indicam os rótulos das colunas. O programa as ignora, como ignora tudo o que estiver fora do primeiro par de chaves. Neste ponto podemos apresentar as funções de entrada e saída usadas nos programas.

A função `ReadInputFile` lê um arquivo de entrada e armazena a matriz nele contida na matriz apontada por `pmatrix`, e grava suas respectivas dimensões nos inteiros apontados por `m` e `n`.

```
ReadInputFile(int *pmatrix[],int *m, int *n,char *argv[]){
FILE *imput;
imput=fopen(argv[1],"r");
int i=1,j=0;
char c;
while((c=getc(imput))!='{');
while((c=getc(imput))!='\n');
while((c=getc(imput))!='}')
    if(c=='1')
```

```

        (*(pmatrix[i]+(++j)))=1;
    else if(c=='0')
        (*(pmatrix[i]+(++j)))=0;
    else if(c=='\n'){
        ++i;
        (*n)=j;
        j=0;
    }
    (*m)=i-1;
}

```

A próxima função grava a matriz apontada por `pmatrix`, de dimensões `m` e `n` no arquivo apontado por `output`.

```

int FPrintLabeledMatrix(FILE *output,int *pmatrix[],int m,int n){
int i,j;
for(j=1;j<=n;j++)
    fprintf(output,"%3d",j);
fprintf(output,"{");
for(i=1;i<=m;i++){
    fprintf(output,"\n");
    for(j=1;j<=n;j++)
        fprintf(output,"%3d",*(pmatrix[i]+j));
    }/*for i*/
fprintf(output,"\n}\n");
}/*FPrintLabeledMatrix*/

```

6.2 Estrutura de dados, conversão de formatos e escalonamento

Vamos fazer uma pequena revisão sobre operadores bit-a-bit em linguagem C. A linguagem C trabalha com álgebra booleana correspondendo o símbolo 1 com o valor “verdadeiro” e 0 com “falso”. Podemos olhar um inteiro como sua representação na base 2: $(a_1 \dots a_n)_2$. Temos os operadores bit-a-bit: negação (\sim), disjunção ($|$), conjunção ($\&$) e disjunção exclusiva (\wedge). Estes funcionam da seguinte forma:

(a) Negação: $\sim(a_1 \dots a_n)_2 = (1 - a_1 \dots 1 - a_n)$.

(b) Conjunção: $(a_1 \dots a_n) \& (b_1 \dots b_n) = (a_1 b_1 \dots a_n b_n)$.

(c) Disjunção: $(a_1 \dots a_n) | (b_1 \dots b_n) = (\max\{a_1, b_1\} \dots \max\{a_n, b_n\})$.

(d) Disjunção exclusiva: $(a_1 \dots a_n) \wedge (b_1 \dots b_n) = (\max\{a_1, b_1\} - a_1 b_1 \dots \max\{a_n, b_n\} - a_n b_n)$.

A estrutura de dados usada internamente no programa é bem elementar, porém um tanto “indigesta”. Lidamos com dados no formato `int`, às vezes vistos como inteiros, e outras vezes como um vetor de binários. Isso é identificamos $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in GF(2)^n$ com o inteiro $(a_{n-1}, \dots, a_0)_2 := a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \dots + a_{n-1} \cdot 2^{(n-1)}$. Uma matriz é identificada com um vetor de inteiros `r[m]`, no qual `r[k]` é o inteiro que representa o vetor em $GF(2)^n$ correspondente à k -ésima linha da matriz. Vamos aqui chamar essa estrutura de **formato R**.

Apesar de não humanamente amigável, essas estruturas são otimizadas para as máquinas e proporciona um excelente desempenho computacional. Isso porque operações com vetores sobre $GF(2)$ podem ser feitas usando as operações mais elementares possíveis para os computadores: os operadores lógicos bit-a-bit. Por exemplo, a soma dos vetores u e v é dada por $u \hat{+} v$.

Também usamos o formato `int`, para representar conjuntos. Em geral, podemos pensar no conjunto base $U := \{1, 1, \dots, n\}$, onde n é o número de bits usado no formato `int`. E identificar $X \subseteq U$ com o vetor de $GF(2)$ cuja k -ésima entrada é igual a 1 se e somente se $k \in X$, estes vetores por sua vez são identificados com os números inteiros como vimos antes. Nessa linguagem temos, para conjuntos x e y :

União de conjuntos: `x|y`;

Interseção de conjuntos: `x&y`;

Complemento: `~x`; e

Diferença simétrica: `x^y`.

A função seguinte escreve a matriz apontada por `pmatrix`, em formato convencional, com dimensões $m \times m$, na matriz `r[]`, no formato R.

```
Matrix2IntVector(int *pmatrix[], int m, int n, int r[]){
    int i, j, v;
    for(i=1; i<=m; i++){
        r[i]=0;
        v=1;
        for(j=1; j<=n; j++){
            if(*(pmatrix[i]+j))
                r[i]=r[i]|v;
            v=v<<1;
        }/*for j*/
    }/*for i*/
}
```

A função seguinte faz a conversão no sentido contrário da anterior.

```
int IntVector2Matrix(int r[], int m, int n, int *pmatrix[]){
    int i, j, v;
    for(i=1; i<=m; i++){
```

```

v=r[i];
for(j=1;j<=n;j++){
    (*(pmatrix[i]+j))=v&1;
    v=v>>1;
}/*for j*/
}/*for i*/
for(i=1;i<=m;i++){
    printf("\n");
    for(j=1;j<=n;j++){
        printf(" %i",(*(pmatrix[i]+j)));
    }/*for j*/
}/*for i*/
printf("\n");
}

```

Para finalizar a seção apresentamos uma implementação do algoritmo de escalonamento de Gauss-Jordan para matrizes binárias no formato R. Um dos fatores que mais influenciam no desempenho do programa é o uso do formato R nesse algoritmo. Essa função escala a matriz *r*, no formato R, de dimensões $m \times n$, e retorna como saída o posto da matriz.

```

int GaussJordan(int r[], int m, int n){
int i=1,j=1,ej=1,k,l,change;
int rank=0;
while(((i<=m)&&(j<=n))!=0){
    /*Escolhendo pivô na coluna j:*/
    for(k=i;k<=m;k++)
        if(r[k]&ej)
            break;
    /*Se k<=m, encontrado elemento k na coluna j e escolhido como pivô*/
    if(k<=m){
        /*Trocando linhas i e k*/
        change=r[k];
        r[k]=r[i];
        r[i]=change;
        /*Eliminando Acima*/
        for(k=1;k<i;k++)
            if(r[k]&ej)
                r[k]=r[k]^r[i];
        /*Eliminando Abaixo*/
        for(k=i+1;k<=m;k++)
            if(r[k]&ej)
                r[k]=r[k]^r[i];
        /*Incrementando linha, coluna e o posto da matriz*/
        rank++;
        i++;
    }
}

```

```

    j++;
    ej=ej<<1;
    }/*if k<=m*/
/*Se k=m+1, então a coluna j é nula. Apenas mudamos de coluna*/
else{
    j++;
    ej=ej<<1;
    }/*fecha "else" para "(if k<=m)...*/
}/*fecha while*/
return rank;/*retorna o posto*/
}

```

6.3 Preliminares sobre representações

Nos capítulos 2 e 4 há uma breve exposição sobre representabilidade de matroides, aqui vamos abordar mais alguns fatos.

6.3.1 *Seja A uma matriz com entradas num corpo K e $M := M[A]$. Então:*

- (a) *e é um laço de M se e somente se e rotula uma linha nula de A .*
- (b) *e e f são paralelos em M se, e só se, esses elementos rotulam colunas não nulas múltiplas uma da outra em A .*
- (c) *si(M) é a matroide associada à matriz B , obtida de A pela eliminação de todas as colunas nulas e de todas, exceto uma, coluna de cada classe de colunas com vetores não nulos e colineares.*
- (d) *Se $e \in E(M)$, então $M \setminus e$ é a matroide associada à matriz obtida de A pela eliminação da coluna rotulada por e .*
- (e) *Suponha que e é um elemento de M rotulando uma coluna de A com todas as entradas nulas, exceto a j -ésima. Então M/e é a matroide associada à matriz obtida de A pela eliminação da coluna rotulada por e e da j -ésima linha.*

6.3.2 *As seguintes operações na matriz A , com entradas num corpo K e colunas rotuladas, não alteram $M[A]$:*

- (a) *Permutação de colunas, acompanhada pela respectiva permutação dos rótulos.*
- (c) *Adição ou remoção de linhas nulas (Exceto a remoção da única linha de A).*
- (c) *Permutação de linhas.*
- (d) *Somar a uma linha um múltiplo de outra.*
- (e) *Multiplicar uma linha por uma constante não nula em K .*

(f) Substituir cada entrada de A por sua imagem por um automorfismo de K .

(g) Multiplicar uma coluna por uma constante não nula.

Por 6.3.2, podemos sempre supor que estamos lidando com uma representação de M na **forma padrão**, isso é uma matriz da forma $[Id_{r(M)}|D]$, com colunas rotuladas, que representa M .

O seguinte lema já é conhecido:

6.3.3 Lema: *Seja $A := [Id_m|D]$ uma matriz com entradas num corpo K . Considere os respectivos rótulos e_1, \dots, e_n para as colunas A . Então:*

$$(M[A])^* = M[-D^T|Id_{n-m}],$$

onde consideramos os rótulos e_1, \dots, e_n de $[D^T|Id_{n-m}]$ na mesma ordem que em A . Em particular $(M[A])^* \cong M[Id_{n-m}|D^T]$.

Com essas informações, podemos derivar o seguinte resultado:

6.3.4 Lema: *Seja $A := [Id_m|D]$ uma matriz com entradas num corpo K . Então $M[A]$ é cossimples se e só se, em D possui uma linha com menos que duas entradas não nulas ou D possui duas linhas, uma múltipla da outra.*

Prova: Por 6.3.3 e 6.3.1, $M[A]$ é cossimples se e só se $M[Id_{n-m}|D^T]$ não possui colunas nulas ou um par de colunas múltiplas. Mas uma coluna nula de $M[Id_{n-m}|D^T]$ corresponde a uma linha nula em D , equanto colunas múltiplas dessa matriz correspondem a linhas múltiplas em D ou a uma coluna de D^t múltipla de uma coluna de Id_{n-m} , isso é uma linha de D com exatamente uma entrada não nula. \square

6.4 Primeiros programas: dualizando matroides e testando cossimplicidade

Nesta seção apresentamos um programa simples que, recebe como entrada um arquivo `primal.matroid` com uma matriz $[Id_m|D]$ de dimensões $m \times n$ e retorna um arquivo `dual.matroid`, com a matriz $[Id_{n-m}|D^T]$, cuja matroide que representa é isomorfa àquela representada pela matriz do arquivo de entrada. No arquivo `nonsep-functions.c` estão as funções já apresentadas aqui e as funções avulsas que ainda apresentaremos.

Sintaxe:

```
$dualize primal.matroid dual.matroid
```

Código:

```

#include<stdio.h>
#include "nonsep-functions.c"

int IsoDualize(int *pin[], int m, int n, int *pout[]){
/*a matriz (m x n) apontada por pin[] é da forma
[Id_m|D], e a retornada em pout[], [Id_{n-m}|D^T]*/
int i,k,d=n-m;
for(i=1;i<=d;i++)
    for(k=1;k<=d;k++)
        (*(pout[i]+k))=0;
for(k=1;k<=d;k++)
    (*(pout[k]+k))=1;
for(i=1;i<=m;i++)
    for(k=1;k<=d;k++)
        (*(pout[k]+(d+i)))=*(pin[i]+(m+k));
}

int main(int argc, char *argv[]){
int i,j,k,l;
int m,n;

/*Declara a matriz de entrada e o respectivo apontador*/
int matrix[33][33], *pmatrx[33];
for(i=0;i<=32;i++)
    pmatrx[i]=&matrix[i][0];

/*Grava a matriz do arquivo de entrada em matrix[][]*/
ReadInputFile(pmatrx,&m,&n,argv);

/*Declara a matriz de saída e o respectivo apontador*/
int d=n-m;
int out[d+1][n+1];
int *pout[d+i];
for(k=1;k<=d;k++)
    pout[k]=&out[k][0];

/*grava uma matroide isomorfa a dual de matrix[][] em out[][]*/
IsoDualize(&pmatrx[0],m,n,&pout[0]);

/*Grava o arquivo de saída*/
FILE *output;
output=fopen(argv[2],"a");

```

```

FPrintLabeledMatrix(output,pout,m,n);
fclose(output);
}

```

O próximo programa, `cossimp`, testa a cossimplicidade de uma matroide. Sua sintaxe é simplesmente `$cossimp foo.matroid` para testar a cossimplicidade de `foo.matroid`. O programa retorna “The matroid IS cosimple” ou “The matroid is NOT cosimple”, dependendo do respectivo caso. Seu código é o seguinte:

```

int main(int argc, char *argv[]){
/*Matriz de entrada no formato padrão [Id|D]*/
int matrix[33][33];
int i,j,k,l;/*índices*/
int m,n;/*dimensões de matrix*/

int *pmatrix[33];/*apontador para matrix*/
for(i=0;i<=32;i++)
    pmatrix[i]=&matrix[i][0];

/*Lê a matriz do arquivo de entrada*/
ReadInputFile(pmatrix,&m,&n,argv);

/*Se alguma linha de D tem no máximo uma entrada
não nula, retorna que a matroide não é cossimples*/
for(i=1;i<=m;i++){
    int nentradas=0;/*número de entradas na linha de D*/
    for(j=m+1;j<=n;j++)
        nentradas+=matrix[i][j];
    if(nentradas<=1){
        printf("The matroid is NOT cosimple");
        return(0);
    }
}

int *pd[m+1]; /*aponta para a matriz D*/
for(i=0;i<=m;i++)
    pd[i]=&matrix[i][m];

/*coloca D no formato r em d[]*/
int d[m+1];
Matrix2IntVector(pd,m,n-m,d);

/*retorna que a matroide é não cossimples
em caso de linhas repetidas em D*/

```

```

for(i=1; i<m; i++)
  for(k=i+1; k<=m; k++)
    if(d[k]==d[i]){
      printf("The matroid is NOT cosimple");
      return(0);
    }

/*retorna que a matroide é cossimples se não foram
diagnosticados colaços ou elementos em série*/
printf("The matroid IS cosimple");
return(0);
}

```

6.5 Espaço de cocircuitos e representações

Seja M uma matroide binária e $E(M) = \{e_1, \dots, e_n\}$. Introduzimos em $2^{E(M)}$ uma estrutura de $GF(2)$ espaço vetorial usando como soma a diferença simétrica de conjuntos e como zero o conjunto vazio. Há um isomorfismo natural entre $2^{E(M)}$ e $GF(2)^n$: a cada $X \subseteq E(M)$ correspondemos o vetor $X \in GF(2)^n$, no qual a k -ésima coordenada é igual a 1 se e somente se $e_k \in X$. Esse isomorfismo será, adiante, considerado como correspondência padrão entre esses conjuntos, sem referência explícita.

O **espaço de circuitos** de uma matroide binária M é o subespaço de $2^{E(M)}$, gerado pelos circuitos de M . Analogamente definimos o **espaço de cocircuitos** de M . Considere uma representação padrão de uma matroide binária M sobre $GF(2)$: $[Id_r|D]$. Nessa representação as primeiras r colunas, são rotuladas pelos elementos de uma base B de M e as restantes rotuladas pelos elementos de uma cobase B^* de M^* . Observe que k -ésima linha da matriz tem as entradas do vetor de $GF(2)^n$ que corresponde ao cocircuito fundamental $C_M^*(B^*, e_k)$. Portanto as linhas de M correspondem a um conjunto *L.I.* de cocircuitos. Além disso se C^* é um cocircuito de M verifica-se que:

$$C^* = \Delta_{e \in C^*} C_M^*(B^*, e).$$

Então o espaço de cocircuitos de M corresponde ao espaço $\mathcal{R}[Id_r|D]$ gerado pelos vetores-linha da matriz. Definimos o **suporte** de $v \in 2^{E(M)}$ como o conjunto $\{k \in \{1, \dots, n\} : a_k \text{ é não nula}\}$. Então os cocircuitos de $M[Id_r|D]$ correspondem aos elementos com suporte minimal e não vazio em $\mathcal{R}[Id_r|D]$. Com isso temos um algoritmo para encontrar todos os cocircuitos de uma matroide, analisando todos elementos de $\mathcal{R}[Id_r|D]$. É um algoritmo exponencial em $r(M)$.

O algoritmo seguinte verifica, para cada elemento de $(a_1, \dots, a_m) \in GF(2)^m$ (identificado pelo vetor de inteiros `comb`) se `set = a1r[1] + ... + amr[m]` corresponde a um cocircuito de da matroide representada por `r[]` (i.e.: Possui suporte minimal em $GF(2)^n$).

```

int GetCocircuits(int r[], int m, int cocirc[], int *sizecocirc){
int j, k, v;

```

```

int comb; /*a combinação de linhas a ser testada*/
int set; /*o conjunto correspondente a comb*/
*sizecocirc=0;

for(comb=1;comb<(1<<m);comb++){
    /*preparando o conjunto set:*/
    /*v e o j-ésimo vetor da base canônica de GF(2)^m:*/
    set=0;
    v=1;
    for(j=1;j<=m;j++){
        /*se a j-ésima coordenada de comb é não nula,
        adiciona-se a j-ésima linha de r a set*/
        if(comb&v)
            set=set^r[j];
        v=v<<1; /*v passa para o próximo vetor da base canônica*/
    } /*for(j=1...*/

    /*verificando se set está contido em ou contém conjunto de cocirc*/
    for(k=1;k<=*sizecocirc;k++){
        /*se set está contido em cocirc[k], substitui cocirc[k] por
        set, remove todos os cocircuitos subsequentes da lista
        contendo set e passa para a próxima combinação*/
        if( !( set&( ~cocirc[k] ) ) ){
            cocirc[k]=set;
            int l;
            for(l=k+1;l<=*sizecocirc;l++)
                if(!(set&(~cocirc[l])))
                    cocirc[l]=cocirc[( *sizecocirc )--];
            goto skip;
        } /*if*/

        /*se cocirc[k] está contido em set passa para a próxima combinação*/
        else if( !( cocirc[k]&( ~set ) ) )
            goto skip;
    } /*for(k...*/

    /*se set não está contido em ou contém nenhum elemento
    de cocirc, acrescenta set no final da lista cocirc[]*/
    (*sizecocirc)++;
    cocirc[*sizecocirc]=set;
    skip:; /*passa para a próxima combinação*/
} /*for(comb...*/
}

```

6.6 Teste de conectividade

O seguinte lema já é conhecido, embora não tenho uma referência:

6.6.1 Lema: *Seja M uma matroide e B uma base de M , seja Z o conjunto dos colações de M . Então $M \setminus Z$ é conexa se e somente se $E(M) - B$ admite uma ordenação e_1, \dots, e_k , tal que para $j = 2, \dots, k$:*

$$C_M(e_j) \cap [C_M(B, e_1) \cup \dots \cup C_M(B, e_{j-1})] \neq \emptyset.$$

Esse lema serve de base para o algoritmo de teste de conectividade usado aqui. Considere uma matriz A na forma padrão representando uma matroide M . Seja Z o conjunto dos laços de M . Como as linhas de M são uma família de cocircuitos fundamentais em relação a uma base de M , de 6.6.1 segue:

6.6.2 Lema: *$M \setminus Z$ é conexa se e somente se existe uma reordenação $l_1, \dots, l_{r(M)}$ das linhas de M tal que para cada $k \in \{2, \dots, r(M)\}$, existe $i < k$ tal que l_i e l_k tenham uma entrada não nula em comum.*

Considere uma matriz $r[]$ com m , no formato R. O seguinte algoritmo retorna um separador da matroide associada à matriz no formato R caso exista, e retorna zero se a matroide é conexa.

```
FindSeparatorInStairMatrix(int r[], int m){
/*retorna um separador no formato R, caso exista
e retorna zero caso a matriz seja conexa*/
int k;
int s[m+1];/*cópia de r para alteração*/
for(k=1;k<=m;k++)
    s[k]=r[k];
int outsize=m-1; /*Número de elementos que não foram
                    confirmados de estar na mesma componente
                    conexa do cocircuito associado a r[m]*/
int loopnotinvain=1; /*Variável de decisão: assume valor 0 quando
                    em um loop inteiro não é encontrado novo elemento da
                    componente conexa de r[m] e 1 em caso contrário*/
int v=s[m];/*conjunto dos elementos da componente conexa de r[m]*/
while(outsize&&loopnotinvain){
    loopnotinvain=0;
    for(k=1;k<=outsize;k++)
        if((v&s[k])!=0){
            loopnotinvain=1;
            v=v|s[k];
            s[k]=s[outsize];
            outsize--;
            k--;
        }
    }
}
```

```

        }/*if(v&s[k]*/
    }/*while*/
if(outsize==0)
    return 0;
else
    return v;
}

```

6.7 Encontrando e contando cocircuitos não-separadores

Estamos agora em condições de encontrar todos os cocircuitos não-separadores de uma matroide binária. Agora que sabemos como coletar seus cocircuitos, basta fazes a deleção de cada cocircuito e descobrir aqueles que são não-separadores, já que também, a esta altura, temos um teste de conectividade.

O programa `nsep` faz essa tarefa. Esse programa recebe como entrada `foo.matroid` e retorna: $Y(M)=E(M)$, $|E(M)-Y(M)|=1$, $|E(M)-Y(M)|>1$ ou `Graphic`, dependendo do caso.

Sintaxe:

```
$nsep foo.matroid
```

Código:

```

#include<stdio.h>
#include "nonsep-functions.c"

int Deletion(int r[], int m, int deletedset, int s[]){
/*Grava em s[] a deleção do conjunto deletedset em r[]*/
int i;
deletedset=~deletedset;
for(i=1;i<=m;i++)
    s[i]=r[i]&deletedset;
}

GetNonSeparatingCocircuits
(int r[], int m, int n, int cocirc[], int sizcocirc, int nsep[], int *sizensep)
{/*Percorre a lista cocirc[], de todos os cocircuitos da matroide
representada por r[], testa individualmente se estes são
não-separadores e escreve aqueles com resposta positiva em nsep[]*/
int k,x;
*sizensep=0;
int s[m+1];

```

```

/*para todo cocircuito no vetor cocirc[*]:*/
for(k=1;k<=sizecocirc;k++){
    /*grava em s[] a deleção de cocirc[k] em r[*]*/
    Deletion(r,m,cocirc[k],s);
    /*escalona s[] e grava seu posto em ranks*/
    int ranks=GaussJordan(s,m,n);
    /*grava cocirc[k] no vetor nsep[] se s[] é conexa
    (i.e.: se cocirc[k] é não-separador)*/
    if(!(FindSeparatorInStairMatrix(s,ranks)))
        nsep[++(*sizensep)]=cocirc[k];
    }
}

CountNSepCocircs(int nsep[],int sizensep,int n,int meet[]){
/*Conta os cocircuitos não-separadores contendo cada elemento
e grava esses respectivos números no vetor meet[*]*/
int k,j,ej=1;
for(j=1;j<=n;j++){
    meet[j]=0;
    for(k=1;k<=sizensep;k++)
        if(ej&nsep[k])
            ++meet[j];
    ej<<=1;
    }
}

int main(int argc, char *argv[]){
int i,j,k,l,m,n; /*m e n são as dimensões da matriz
matrix [], as outras letras são meros índices*/

/*Grava na matriz convencional matrix[][]
a matriz do arquivo de entrada*/
int matrix[33][33], *pmatrix[33];
for(i=0;i<=32;i++)
    pmatrix[i]=&matrix[i][0];
ReadInputFile(&pmatrix[0],&m,&n,argv);

/*Grava o conteúdo de matrix[][] em r[], no formato R*/
int r[m+1];
Matrix2IntVector(&pmatrix[0],m,n,r);

/*escalona r[]. A partir desse momento, m é o posto da matroide

```

```

e relembramos que n é o seu número de elementos*/
m=GaussJordan(r,m,n);

/*grava os cocircuitos da matroide no vetor cocirc[]*/
int cocirc[1<m], sizecocirc=0;
GetCocircuits(r,m,cocirc,&sizecocirc);

/*grava os cocircuitos não-separadores da matroide no vetor cocirc[]*/
int nsep[sizecocirc+1], sizensep=0;
GetNonSeparatingCocircuits(r,m,n,cocirc,sizecocirc,nsep,&sizensep);

/*grava o número de cocircuitos não-separadores
contendo cada elemento no vetor meetnavoid[1][]*/
int meetnavoid[3][n+1];
CountNSepCocircs(nsep,sizensep,n,meetnavoid[1]);

/*grava o número de cocircuitos não-separadores
evitando cada elemento no vetor meetnavoid[2][]*/
int *pmeetnavoid[3];
for(i=0;i<=2;i++)
    pmeetnavoid[i]=&meetnavoid[i][0];
for(j=1;j<=n;j++)
    meetnavoid[2][j]=sizensep-meetnavoid[1][j];

/*calcula o tamanho do conjunto Y(M)*/
int Ysize=0, Xsize=0;
for(j=1;j<=n;j++)
    if(meetnavoid[2][j]>=m)
        ++Ysize;

/*Imprime a saída do programa*/
if(Ysize==n)
    printf("Y(M)=E(M)");
else
    if(Ysize==n-1)
        printf("|E(M)-Y(M)|=1");
    else
        if(Ysize==0)
            printf("Graphic");
        else
            printf("|E(M)-Y(M)|>1");
}/*main*/

```

6.8 Coextendendo matroides binárias

Considere uma matroide binária sem laços N . Como conseguir todas as matroides binárias sem laços M tais que existe $e \in E(M)$ com $N = si(M/e)$? Considere uma tal matroide M e uma matriz rotulada A_M que represente M . Por 6.3.2, podemos supor que e rotula a primeira coluna de A_M , a qual tem somente a primeira entrada não nula. Seja A_N a matriz obtida de A_M pela eliminação da primeira linha e primeira coluna, remoção das colunas nulas e remoção de toxdas, exceto uma coluna de cada classe de múltiplas não nulas. Seja $f \in E(N)$ e sejam f_N e f_M os respectivos vetores-colunas rotulados por f em A_N e A_M . Vale exatamente uma das três seguintes possibilidades:

6.8.1 :

(0) f_M é da forma $(0, f_N)$ e o vetor coluna $(1, f_N)$ não está presente em A_M ; ou

(1) f_M é da forma $(1, f_N)$ e o vetor coluna $(0, f_N)$ não está presente em A_M ; ou

(2) Ambos vetores coluna $(0, f_N)$ e $(1, f_N)$ estão presentes em A_M .

Observe que (2) ocorre se e só se f e e estão em um triângulo de M .

A fim de reconstituir a matriz M a partir de A_N , basta saber, para cada $e \in E(N)$ em que possibilidade de 6.8.1, e se enquadra. Vamos formalizar essa reconstrução.

Denotamos por $\mathcal{B}(m \times n)$ o conjunto das matrizes binárias de dimensões $(m \times n)$.

Considere uma matriz $A \in \mathcal{B}(m \times n)$ com respectivas colunas c_1, \dots, c_n e $v := (s_1, \dots, s_n) \in \{0, 1, 2\}^n$, sejam $i_1 < \dots < i_k$ os índices de $\{1, \dots, n\}$ tais que, para $j = 1, \dots, k$, $i_j = 2$. Definimos:

$$\Gamma(A, v) := \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & s_1 \text{ mod } 2 & \dots & s_n \text{ mod } 2 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 0 & & & & & & \\ \vdots & c_1 & \dots & c_n & c_{i_1} & \dots & c_{i_k} \\ \hline 0 & & & & & & \end{array} \right).$$

Concluimos que:

6.8.2 Lema: *Sejam N e M são matroides binárias e simples tais que $N = si(M \setminus e)$. Seja $A_N \in \mathcal{B}(m \times n)$ representando N com rótulos e_1, \dots, e_n . Então existe $v \in \{0, 1, 2\}^n$, tal que $M = M[A_M := \Gamma(A_N, v)]$, onde, em A_M , usamos os seguintes rótulos:*

e para a primeira colunas,

e_1, \dots, e_n , nessa respectiva ordem para a segunda até a $(n+1)$ -ésima coluna e

para $i_j = 1, \dots, k$ rotulamos a coluna de índice $(n+1) + i_j$ pelo elemento de M em triângulo com e e e_{i_j} .

Além disso, A_N é obtida de A_M pela eliminação da primeira linha e da primeira coluna.

Se temos o problema de, a partir de uma matroide 3-conexa e binária N , representada por uma matriz A_N , obter, a menos de isomorfismos, todas as matroides 3-conexas e binárias M tais que existe $e \in E(M)$ tal que $N = si(M/e)$, então nos deparamos com o problema de achar um critério que determine quando $M := M[\Gamma(A_N, v)]$ é 3-conexa. Primeiro observemos que M dessa forma é, obrigatoriamente, simples. Segue diretamente de 3.0.1:

6.8.3 Corolário: *Se M é uma matroide simples conexa e cossimples e e é um elemento de M tal que $si(M/e)$ é 3-conexa, então M é 3-conexa.*

Então nos reduzimos aos já conhecidos critérios de conectividade e cossimplicidade. Apresentamos agora o programa `code2matrix`, que é usado com a sintaxe:

```
$code2matrix in.matroid <string> out.matroid
```

onde `<string>` representa uma sequência de elementos de $\{0, 1, 2\}$, exemplo 100210021. Desde que `<string>` tenha tantos caracteres quanto as colunas da matriz A escrita em `in.matrix`, esse comando escreve em `out.matroid` a matriz $\Gamma(A, v)$, onde as coordenadas de v são os respectivos caracteres de `<string>`. Segue seu código:

```
#include<stdio.h>
#include"nonsep-functions.c"

int main(int argc, char *argv[]){
int i,j,k,l;
int m,n;

/*Matriz do arquivo de entrada*/
int matrix[33][33], *pmatriz[33];
for(i=0;i<=32;i++)
    pmatriz[i]=&matrix[i][0];
/*Lendo arquivo de entrada*/
ReadInputFile(pmatriz,&m,&n,argv);

int codesize=0;/*tamanho da palavra*/
char code[32];/*palavra*/
for(i=0;i<=32;i++)
    code[i]=0;

int outm=1+m, outn=n+1;

while(argv[2][codesize]!='\0'){
    if(argv[2][codesize]=='2'){
++codesize;
++outn;
code[codesize]=2;

```

```

        }/*if*/
    else if((argv[2][codesize]=='0')||(argv[2][codesize]=='1')){
        ++codesize;
        code[codesize]=argv[2][codesize-1]-'0';
    }/*else if*/
}/*while*/
/*Se o tamanho da matriz de saída excede 32 colunas,
retorna mensagem de erro e encerra o programa*/
if(outm>32){
    printf("\nErro! Matriz de saída não deve exceder 32 colunas.\n");
    return 1;
}

/*Matriz de saída*/
int out[outm+1][outn+1];
/*Escreve \Gamma(M,code) em out[][]*/
out[1][1]=1;
for(i=2;i<=outm;i++)
    out[i][1]=0;
for(i=1;i<=m;i++)
    for(j=1;j<=n;j++)
        out[i+1][j+1]=matrix[i][j];

k=n+1;
for(j=1;j<=n;j++){
    if(code[j]<2)
        out[1][j+1]=code[j];
    else{
        ++k;
        out[1][j+1]=0;
        out[1][k]=1;
        for(i=1;i<=m;i++)
            out[i+1][k]=matrix[i][j];
    }/*else*/
}/*for j...*/

/*Arquivo de saída*/
FILE *outfile;
outfile=fopen(argv[3],"a");
/*Apontador para matriz de saída*/
int *pout[outm+1];
for(i=1;i<=outm;i++)
    pout[i]=&out[i][0];
/*Grava a matriz de saída no arquivo de saída*/

```

```

FPrintLabeledMatrix(outfile,&pout[0],outm,outn);
fclose(outfile);
return 0;
}/*main*/

```

6.9 Demonstração do lema 5.5.5

Primeiro demonstraemos o item 5.5.5, (a) do lema. Isso é: toda a matroide M , binária, 3-conexa, não gráfica e de coposto 4, não isomorfa a S_8 satisfaz $Y(M) = E(M)$ e, além disso, que $|E(S_8) - Y(S_8)| = 1$.

Que $|E(S_8) - Y(S_8)| = 1$, já foi visto na seção 5.6. Suponha que $M \not\cong S_8$. O teorema 4.1.7 classifica as matroides 3-conexas e binárias de posto 4. Para verificar 5.5.5, (a), podemos nos reduzir a estudar as matroides M tais que: M^* esteja listada no teorema 4.1.7, M^* não é cográfica e M^* (e portanto M) não possui grupo de automorfismos transitivo. Isso porque nesse caso, sendo M não gráfica temos $Y(M) \neq \emptyset$ e sendo o grupo de automorfismos de M transitivo, temos $Y(M) = E(M)$. Uma análise mais superficial é suficiente para nos reduzirmos reduzirmos ao estudo das seguintes matroides:

Com 9 elementos:

$PG(3,2) \setminus [U_{1,1} \oplus P(U_{2,3}, U_{2,3})]$
 $PG(3,2) \setminus M(K_4) \cong Z_4$
 $PG(3,2) \setminus S_2(U_{1,3})$

Com 10 elementos:

$PG(3,2) \setminus (U_{2,3} \oplus U_{2,2})$
 $PG(3,2) \setminus (U_{3,4} \oplus U_{1,1})$
 $PG(3,2) \setminus P(U_{2,3}, U_{2,3})$

Com 11 elementos:

$PG(3,2) \setminus U_{4,4}$
 $PG(3,2) \setminus U_{3,4}$
 $PG(3,2) \setminus (U_{2,3} \oplus U_{1,1})$

Com 12 elementos:

$PG(3,2) \setminus U_{3,3}$
 $PG(3,2) \setminus U_{2,3}$

Com 13 elementos: $PG(3,2) \setminus U_{2,2}$;

Apresentamos aqui mais um programa: `escalona`, que simplesmente escalona a matriz de `in.matroid`, permuta as colunas para deixá-la no formato padrão e grava a matriz obtida em `out.matrix` usado com a sintaxe `$escalona in.matroid out.matroid`. Não vamos transcrever o código desse programa, já que trata-se de um procedimento básico de álgebra linear.

No processo computacional, criamos um diretório “duais”, com representações dessa matroides em arquivos .matroid. O diretório duais e o script que executa a demonstração estão no diretório corank4, o qual contém o mencionado diretório duais. Os programas nsep, code2matrix, dualize e cossimp, estão no diretório pai de corank4. O código do script está transcrito a seguir.

Creio que os comentários são suficientes para o entedimento do código sem conhecimento da linguagem bash. No código, o sinal sustentado (“#”) indica que o que os segue na linha são comentários.

```
#!/bin/bash
#cria o diretório "duais-padrao", que vai conter as matroides
#duais daquelas no diretorio "duais", no formato padrão
mkdir duais-padrao
#cria o diretório "primais", que vai conter as matroides
#duais daquelas no diretorio "duais", no formato padrão.
mkdir primais

#Entra no diretório "duais"
cd duais

#Para cada arquivo em "duais"...
for arquivo in *; do
    #...escalona a matriz no arquivo e a coloca no formato
    #padrão, no arquivo de mesmo nome no diretório "duais-padrao".
    ../../escalona $arquivo ../duais-padrao/$arquivo
done

#Entra no diretório "duais-padrao"
cd ../duais-padrao
#Para cada arquivo em "duais-padrao"...
for arquivo in *; do
    #...grava a dual da matroide do arquivo
    #em arquivo de mesmo nome, no diretório "primais".
    ../../dualize $arquivo ../primais/$arquivo
done

#Entra no diretório "duais-padrao"
cd ../primais

#Para cada arquivo em "primais"...
for arquivo in *; do
    #...grava, na variável var, a informação sobre "Y(M)"
    #retornada pelo programa nsep.
    var=$(../../nsep $arquivo)
```

```

#Se não se verifica  $Y(M)=E(M)$ ...
if [ "${var}" != "Y(M)=E(M)" ]; then
  #...e a matroide não é gráfica...
  if [ "${var}" != "Graphic" ]; then #...então...
    #...sinaliza a existência de contra-exemplo e finaliza.
    echo Contra-exemplo encontrado.
    exit
  fi
fi
done
#Em caso de não haver contra-exemplos após
#verificar todos os arquivos sinaliza sucesso
echo Nenhum contra-exemplo encontrado.
cd ..

```

O item 5.5.5, (b) diz que se M é uma matroide 3-conexa binária e e é um elemento de M tal que $co(M \setminus e) \cong S_8$, então $|\tilde{Y}(M)| \leq 1$

Seja $N := S_8^* \cong S_8$ e $n := |E(N)|$. Seja A_N uma matriz binária no formato padrão tal que $N = M[A_N]$. Para a demonstração de 5.5.5, (b) o procedimento para a demonstração é baseado no seguinte algoritmo:

- (0) Seja $v = (0, \dots, 0) \in \{0, 1, 2\}^n$.
- (1) Seja $M = M^*[\Gamma(A_N, v)]$.
- (2) Se M^* não é cossimples, vá para (5).
- (3) Se $|E(M) - Y(M)| \leq 1$, vá para (5).
- (4) Pare e retorne resposta negativa.
- (5) Se $v = (2, \dots, 2)$ retorne resposta positiva, em caso contrário, redefina v como seu sucessor na ordem lexicográfica natural de $\{0, 1, 2\}^n$ e retorne para (1).

O item 5.5.5, (c) diz que se M é uma matroide 3-conexa e regular e e um elemento de M tal que $co(M \setminus e)$ é isomorfa a $M^*(K_{3,3})$, $M^*(K'_{3,3})$ ou $M^*(K''_{3,3})$, então $Y(M) = E(M)$. Para a verificação desse item, nos utilizamos do algoritmo seguinte para $N = M(K_{3,3})$, $M(K'_{3,3})$ e $M(K''_{3,3})$:

- (0) Seja $n = |E(N)|$, A_N uma matriz binária no formato padrão tal que $N = M[A_N]$ e $v = (0, \dots, 0) \in \{0, 1, 2\}^n$.
- (1) Seja $M = M^*[\Gamma(A_N, v)]$.
- (2) Se M^* não é cossimples, vá para (6).
- (3) Se $|E(M) - Y(M)| \leq 1$, vá para (6).

- (4) Se M é gáfica, vá para (6).
- (5) Se M^* é gráfica retorne resposta negativa.
- (6) Se $\nu = (2, \dots, 2)$ retorne resposta positiva, em caso contrário, redefina ν como seu sucessor na ordem lexicográfica natural de $\{0, 1, 2\}^n$ e retorne para (1).

6.9.1 Obs: *Como as matroides M obtidas acima tem coposto no máximo 5 e não são isomorfias a R_{10} , então estas são regulares se e somente se são gráficas ou cográficas. Portanto, no passo (5) a condição de ser cográfica corresponde à condição de ser regular.*

No código seguinte implementamos esse algoritmo para $N = M(K_{3,3})$. A implementação para a demonstração do item (b) é mais simples que essa e análoga, por isso não a descrevemos aqui.

```
#!/bin/bash
#cria os diretórios para armazenar as extensões de M[A] e M*[A]
mkdir dualext
mkdir primalex
#o aninhamento de for's abaixo percorre todas as
#palavras de 9 letras no alfabeto em {0,1,2}
for(( k1=0;k1<=2;k1++ )); do
for(( k2=0;k2<=2;k2++ )); do
for(( k3=0;k3<=2;k3++ )); do
for(( k4=0;k4<=2;k4++ )); do
for(( k5=0;k5<=2;k5++ )); do
for(( k6=0;k6<=2;k6++ )); do
for(( k7=0;k7<=2;k7++ )); do
for(( k8=0;k8<=2;k8++ )); do
for(( k9=0;k9<=2;k9++ )); do
    #define a palavra corrente do laço em execução,
    #isso é, o elemento de  $\{0,1,2\}^8$  analisado.
word=$k1$k2$k3$k4$k5$k6$k7$k8$k9
    #grava no formato .matroid a matroide \Gamma(A,word)
../code2matrix foo.matroid $word dualext/$word.dual.matroid
    #escreve na variável "cos" se  $M^* := M[\Gamma(A,word)]$  é cossimples.
cos=$(./cossimp dualext/$word.dual.matroid)
    #Se  $M^*$  é cossimples então...
if [ "${cos}" = "The matroid IS cosimple" ]; then
    #grava M em primalex/$word.matroid
../dualize dualext/$word.dual.matroid primalex/$word.matroid
    #Grava na variavel var a informação sobre  $Y(M)$  retornada
    #pelo programa nsep.
var=$(./nsep primalex/$word.matroid)
    #se  $|E(M) - Y(M)| \geq 1 \dots$ 
```


7 Glossário de matroides

Estamos considerando todas as representações matriciais sobre $GF(2)$ a menos de especificação contrária.

7.0.0.1 F_7 , o plano projetivo binário.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.0.0.2 $PG(n, q)$, o espaço projetivo de dimensão n sobre q . É a matrôide vetorial sobre $GF(q)$ associada a uma matriz que tem como colunas um vetor não nulo de cada subespaço de dimensão 1 de $GF(q)^{(n+1)}$

7.0.0.3 R_{10} e R_{12} , ver 5.1.2, pg. 47 e 5.3.3, pg. 50, respectivamente.

7.0.0.4 S_8 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.0.0.5 $U_{r,n}$, a matriz uniforme de posto r e n elementos. Tem conjunto base $\{1, \dots, n\}$ e como independentes seus subconjuntos com até r elementos.

Referências Bibliográficas

- [Bixby, Cunningham, 1979] R. E. Bixby e W. H. Cunningham, *Matroids, graphs and 3-connectivity*, Graph theory and related topics (Proc. Conf., Univ Waterloo, Waterloo, Ont., 1979), Academic Press, New York, 91-103.
- [Brylawski, Lucas, 1976] T. H. Brylawski e D. Lucas, *Uniquely representable combinatorial geometries*. Em *Teorie Combinatorie* (Proc. 1973 Internat. Colloq.), p.83-104. Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976.
- [Kernigham, Ritchie, 1989] B. W. Kernigham e D. M. Ritchie, *C, a linguagem de programação: padrão ANSI*, trad. de Daniel Vieira, Elsevier, Rio de Janeiro, 1989.
- [Lai, Lemos, Reid, Shao, Wu] , H. Lai, M. Lemos, T. J. Reid, Y. Shao, H. Wu, *Obstructions to a binary matroid being graphic*, European Journal of Combinatorics, aceito para publicação.
- [Lemos, 2004] *Non-separating cocircuits in binary matroids*, Linear Algebra Appl. 382, 171-178.
- [Lemos, 2009] M. Lemos, *A characterization of graphic matroids using non-separating cocircuits*, Advances in Applied Mathematics, 42, 2004, 75-81.
- [Lemos, Melo, 2008] M. Lemos and T. R. B. Melo, *Non-Separating cocircuits in matroids*, Discrete Appl. Math., 156, , 2008, 1019-1024.
- [Oxley, 1987] J. G. Oxley, *The binary matroids with no $M(K_4)$ minor*. Trans. Amer. Math. Soc. 301, 1987, 63-75.
- [Oxley, 1992] J.G. Oxley, *Matroid Theory*, Oxford University Press, New York, 1992.
- [Seymour, 1980] , P. D. Seymour, *Decomposition of Regular Matroids*, J. Combin. Theory Ser. B 28, no. 3, 1980, 305-359.
- [Tutte, 1958] , W. T. Tutte, *A homotopy theorem for matroids, I, II*. Trans. Amer. Math. Soc. 88, 1958, 144-174.
- [Tutte, 1959] , W. T. Tutte, *Matroids and Graphs*. Trans. Amer. Math. Soc. 90, 1959, 527-552.
- [Tutte, 1963] , W. Tutte, *How to draw a graph*. Proc. London Math. Soc. 13, 1963, 734-768.
- [Whittle, 1999] G. Whittle, *Stabilizers of classes of representable matroids*, J. Combin. Theory Ser. B 77, no. 1, 1999, 39-72.

Glossário de símbolos

\oplus : Soma direta de matroides, pg. 19.

$|X|$: O número de elementos do conjunto X .

$(a_n, \dots, a_0)_2$: O número inteiro representado por a_n, \dots, a_0 na base dois, i.e.: $a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \dots + a_n \cdot 2^n$.

$2^X := \{Y : Y \subseteq X\}$, o conjunto potência de X .

Δ : diferença simétrica de conjuntos: $A \Delta B := (A \cup B) - (A \cap B)$.

$\Gamma(A, v)$: pg. 70.

$\xi_M(X)$: função conectividade de M , pg. 18.

$\mathcal{B}(M)$: família de bases de M , pg. 13.

$\mathcal{C}(M)$: família de circuitos de M , pg. 13.

$C(I, e)$ e $C(B, e)$: circuitos fundamentais de e em relação a I e B , pg. 14

$cl_M(X)$ e $cl(M)$: função fecho da matroide M , pg. 15.

$dep_A M$ e $dep_e M$: pg. 45.

$dim_A M$ e $dim_e M$: pg. 45.

$E(G)$: o conjunto das arestas do grafo G .

$E(M)$: o conjunto base de M , pg. 13.

$GF(q)$: o corpo finito com q elementos.

$\mathcal{I}(M)$: família dos independentes de M , pg. 13.

$M[A]$: matroide vetorial associada à matriz A , pg. 14.

$M(G)$: matroide de ciclos do grafo G , pg. 14.

$M|X$: restrição de M a X , pg. 15.

$M \cdot X$: a correstricção de M a X , pg. 17.

$M \setminus X$: deleção de X em M , pg. 17.

M / X : contração de X em M , pg. 17.

$P(M_1, M_2)$: A ligação em paralelo de M_1 e M_2 , 19.

$\mathcal{R}_A^* M$ e $\mathcal{R}_e^* M$: pg. 45.

$r(M)$: o posto da matroide M , pg. 15.

$r(X)$ e $r_M(X)$: função posto de M , pg. 15.

$V(G)$: o conjunto dos vértices do grafo G .

$Y(M)$ e $\tilde{Y}(M)$: pg. 45.

Índice Remissivo

- base, 13
- bond, 30

- circuito contratível, 48
- circuito de um grafo, 30
- circuito de uma matroide, 13
- circuito fundamental, 14
- classe em paralelo, 18
- classe em série, 18
- conjunto base, 13
- cossimplificação, 18

- decompositor, 50
- dependente, 13

- encontrar hereditariamente, 38
- espaço de circuitos, 64
- espaço de cocircuitos, 64
- estrela de um vértice, 30
- estrela de um vértice, 10

- fechado, 15
- fecho, 15
- forma padrão, 61
- formato R, 58
- função conectividade, 18

- hiperplano, 15

- independente, 13

- laço, 14
- ligação em paralelo, 19
- ligador central, 37

- matroide, 13
- matroide binária, 14
- matroide gráfica, 14
- matroide ternária, 14
- matroide vetorial, 14
- matroide representável, 14
- menor, 17

- órbita, 47
- ortogonalidade, 16

- paralelo, elementos em, 18
- posto, 15
- posto, função, 15

- representações equivalentes, 40
- restrição, 15

- k*-separação, 18
- k*-separador, 18
- série, elementos em, 18
- simplificação, 18
- soma direta, 19
- spike binário, 43
- suporte, 64

- tríade, 16
- triângulo, 13