



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Wagner Ferreira Santos

**TEOREMA DE GEOMETRIZAÇÃO PARA
GIRASSÓIS DE GRAFOS COM VALÊNCIA
MÍNIMA TRÊS**

Recife

2008

Wagner Ferreira Santos

TEOREMA DE GEOMETRIZAÇÃO PARA
GIRASSÓIS DE GRAFOS COM VALÊNCIA MÍNIMA
TRÊS

*Dissertação apresentada ao Departamento
de Matemática da Universidade Federal de
Pernambuco, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Matemática.*

Orientador: Sóstenes Lins

Recife

2008

Santos, Wagner Ferreira

Teorema de geometrização para girassóis de grafos com valência mínima três / Wagner Ferreira Santos. - Recife: O Autor, 2008.

53 folhas : il., fig.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2008.

Inclui bibliografia.

1. Teoria dos Grafos. 2. Combinatória. I. Título.

511.5

CDD (22. ed.)

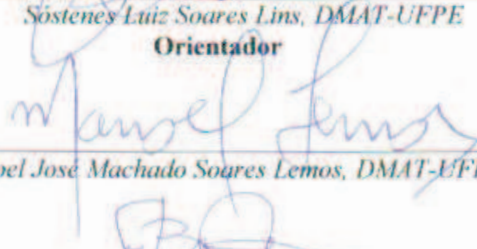
MEI2009- 103

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado:


Sóstenes Luiz Soares Lins, DMAT-UFPE

Orientador


Manoel José Machado Soares Lemos, DMAT-UFPE


Silvio de Barros Melo, DM-UFPE

**TEOREMA DE GEOMETRIZAÇÃO PARA GIRASSÓIS
DE GRAFOS COM VALÊNCIA MÍNIMA TRÊS**

Por

Wagner Ferreira Santos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Novembro - 2008

Aos meus pais e Vanessa

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por tantas graças recebidas em minha vida. À minha família, pelo apoio e confiança. A Vanessa, por todo amor e carinho. Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro e ao professor Sóstenes Lins pela orientação, paciência e motivação.

Agradeço a toda turma do Departamento de Matemática da UFPE, em especial a minha turma de mestrado: Paulo, André Ventura, Ricardo, Renato, Giovana, Thiago, Antônio; pelos finais de semana de estudo passados juntos. Aos colegas de condomínio: Éder, André Vinícius, Allyson, Manassés, Laudelino, Marcelo, Adecarlos, Joilson, Zaqueu, Bruno, Bruna e Renata; pelas conversas e descontrações. Aos professores, Aron Simis, Hildeberto Cabral, Lucas Ferreira, Pedro Hinojosa, Manoel Lemos e Sóstenes Lins pelos cursos ministrados; a Tânia Maranhão pelo trabalho desenvolvido na secretaria da Pós-Graduação.

Wagner Ferreira Santos

RESUMO

Dado um grafo G conexo e com valência mínima três, apresentamos um algoritmo que obtém o mapeamento de G numa superfície fechada S de tal forma que G possui apenas uma face. Ao dual G^* assim obtido, chamamos girassol de G . Particionamos então as arestas do girassol em arestas de fronteira e cordas internas. As cordas internas não se cruzam e as arestas de fronteira definem um polígono $\mathcal{P}$ super-regular com número par de lados. A este polígono super-regular com cordas internas, adicionamos as arestas primais de G , obtidas pela dualização de G^* e apresentamos geometricamente (geometrizamos) o domínio fundamental (G, G^*) . Aplicando a $\mathcal{P}$ reflexões hiperbólicas, obtemos o mergulho periódico do recobrimento universal de $G \cup G^*$ no plano hiperbólico.

Palavras-chave: Girassol, geometrização, domínio fundamental, plano hiperbólico.

ABSTRACT

Given a connected graph G with minimum valency three, we show an algorithm that obtains a mapping of G on a closed surface S so that G has just one face. The dual G^* of G so obtained is called a sunflower for G . We then partition the edges of the sunflower as boundary edges and internal chords. The internal chords do not cross each other and the boundary edges define a super regular polygon $\mathcal{P}$ with an even number of sides. To this super regular polygon with internal chords, we add the primal edges of G , obtaining $G \cup G^*$ geometrically embedded. Applying to $\mathcal{P}$ hyperbolic reflections, we obtain the periodic embedding of universal cover of $G \cup G^*$ on the hyperbolic plane.

Keywords: Sunflower, geometrization, fundamental domain, hyperbolic plane.

Sumário

1	Preliminares	11
2	Trinity	13
2.1	Mapeamento e trinity	13
2.2	Apresentação combinatória de um mapeamento	16
2.3	Dualização e conjugação	19
3	Operações sobre Arestas de uma Trinity	23
3.1	Torção de arestas	24
3.2	Remoção e recuperação de arestas	27
4	Geometria do Plano Hiperbólico	31
4.1	Quatro formas de visualização	33
4.1.1	Projeção estereográfica sobre $\mathbb{H}^2$	33
4.1.2	Projeção gnômica sobre $\mathbb{H}^2$	34
4.1.3	Expansão retificadora e contração encirculadora	34
4.1.4	Fórmula de Poincaré	36
4.2	A métrica do plano hiperbólico	38
4.2.1	O centróide de um conjunto de pontos em $\mathbb{H}^2$	40
4.2.2	Ângulos e comprimentos	41

	8
4.2.3 Isometrias	42
4.2.4 Grupo Γ de isometrias que preservam orientação . . .	45
4.2.5 Raio do 2p-polígono super-regular em $\mathbb{B}^2$ e $\mathbb{D}^2$	45
4.3 Teorema de Geometrização	51
Referências Bibliográficas	53

Introdução

Nesta dissertação provaremos o teorema de geometrização para girassóis de grafos com valência mínima três. Para isso a dividimos em quatro capítulos: preliminares; trinity; operações sobre arestas de uma trinity; e geometria do plano hiperbólico.

Após fazer breves definições da teoria de grafos no primeiro capítulo, partimos para o seguinte definindo mapeamento de grafo em superfície fechada e uma classe de grafos denominada trinity. Mostramos que todo grafo finito conexo que pode ser mapeado numa superfície fechada está associado a uma trinity. Mostramos como representar um mapeamento de um grafo conexo finito numa superfície fechada e como definir combinatorialmente tal mapeamento e obter a trinity a ele associada. Para concluir, definimos duas operações sobre mapeamentos: dualização e conjugação; e apresentamos seis mapeamentos de grafos em superfícies fechadas obtidos a partir da composição destas duas operações.

No terceiro capítulo definimos torção, remoção e recuperação de arestas de uma trinity. Mostramos como obter o mapeamento de G numa superfície tal que G possua apenas uma face e definimos o girassol como o dual deste mapeamento. Após isso, aplicamos ao dual G^* operação remover arestas. Mostramos como recuperar as arestas removidas e conseguir de volta o grafo dual G^* . Dessa forma, decompomos as arestas duais em

duas: as semi-arestas duais de fronteira, que não foram removidas; e arestas internas, que foram recuperadas.

Para concluir, apresentamos quatro modelos para o plano hiperbólico e suas isometrias que serão fundamentais na demonstração do teorema de geometrização para girassóis de grafos com valência mínima três e na obtenção do levantamento do grafo G e seu dual G^* no recobrimento universal da superfície S , $RecUniv(G, G^*)$, onde estão mapeados G e G^* .

Capítulo 1

Preliminares

Um *grafo* G é uma tripla $(V, E, \mathcal{I})$, onde V e E são conjuntos finitos e $\mathcal{I} \subseteq V \times E$ satisfaz $1 \leq |\{v \in V; (v, e) \in \mathcal{I}\}| \leq 2$, para qualquer $e \in E$. Chamamos $V(G)$, $E(G)$ e $\mathcal{I}$ de *vértices*, *arestas* e *relação de incidência* do grafo G , respectivamente.

Um grafo H é um *subgrafo* de G se $V(H) \subset V(G)$, $E(H) \subset E(G)$. Dado um conjunto $E' \subset E$, denotamos por $G[E']$ o *subgrafo aresta induzido* de G que é o subgrafo de G cujo conjunto de vértices é o conjunto das extremidades das arestas em E' e cujo conjunto de arestas é E' .

A *valência de um vértice* é definida pelo número de arestas incidentes àquele vértice. A *valência mínima* de um grafo é a menor dentre todas valências dos vértices de G . Quando todos os vértices de um grafo G possuem a mesma valência, digamos n , o grafo G é dito *n -regular*.

Um subconjunto M de E é dito um *emparelhamento* em G se seus elementos são dois a dois não adjacentes. Os dois vértices terminais de uma aresta que pertence ao emparelhamento são ditos *cobertos por M* . Se todos os vértices de G são cobertos por um emparelhamento M , dizemos que M é um *emparelhamento perfeito*. Uma partição $(E_1, E_2, \dots, E_k)$ de E , onde E_i

denota o subconjunto (que pode ser vazio) de E que possuem a cor i , é uma k *coloração de aresta* de um grafo G . Se os conjuntos E_i forem disjuntos, dizemos que $(E_1, E_2, \dots, E_k)$ é uma k *coloração de aresta própria* de G .

Em um grafo G , um *caminho* γ é uma seqüência $v_0, e_1, \dots, e_n, v_n$, onde $v_0, \dots, v_n$ são vértices de G , $e_1, \dots, e_n$ são arestas de G e, para $i \in \{1, \dots, n\}$, os vértices de G incidentes com e_i são v_{i-1} e v_i . Dizemos que um grafo G é *conexo* se, para quaisquer dois de seus vértices, existe um caminho que os liga.

Capítulo 2

Trinity

Na primeira seção deste capítulo definimos mapeamento de grafo em superfície fechada e uma classe de grafos denominada trinity. Mostra-se [Lins,1980] que todo grafo finito conexo que pode ser mapeado numa superfície fechada está associado a uma trinity. São apresentados dois algoritmos: o primeiro mostra como representar um mapeamento de um grafo conexo finito numa superfície fechada; o segundo, como definir combinatorialmente tal mapeamento e definir a trinity a ele associada. Definimos duas operações sobre mapeamentos: dualização e conjugação. Demonstra-se [Lins,1980] que o grafo conjugado é igual ao grafo original e que a dualização não muda a superfície onde o grafo e seu dual são mapeados. Por fim, são apresentados seis mapeamentos de grafos em superfícies fechadas obtidos a partir da composição daquelas duas operações.

2.1 Mapeamento e trinity

Definição 2.1 *Um mapeamento $(G \hookrightarrow S)$ de um grafo topológico finito G em uma superfície fechada S é um mergulho tal que $S \setminus G$ é um conjunto finito*

de discos abertos disjuntos, chamados faces de G .

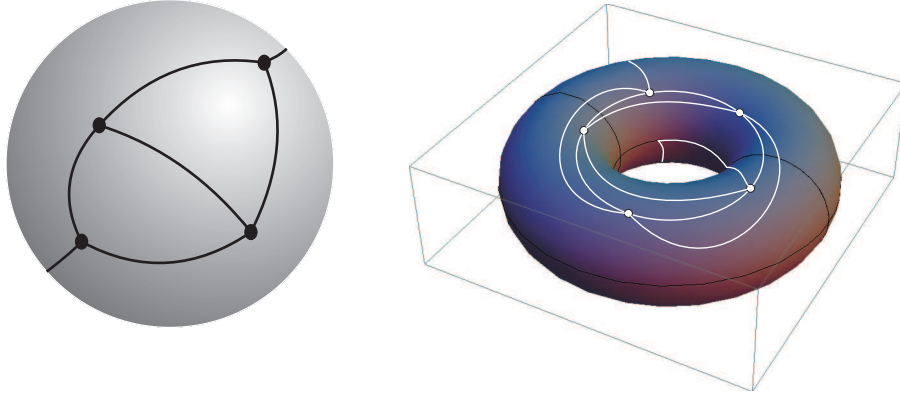


Figura 2.1: Mapeamentos do K_4 na esfera e do K_5 no toro

Definição 2.2 Uma trinity Υ é um grafo conexo 4-regular 4-aresta-colorido próprio usando cores $\alpha, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ de tal forma que cada componente conexa do subgrafo induzido por todas arestas de cores distintas a α forma o esqueleto de um tetraedro K_4 .

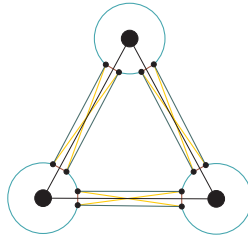


Figura 2.2: Trinity associada ao K_3

Em uma trinity, a componente conexa de um subgrafo gerado por quaisquer duas das quatro cores é um polígono, chamado polígono bi-colorido. Temos a seguinte associação:

- Bi-coloração $\alpha\tau_1$: v-polígono (vértices do grafo);
- Bi-coloração $\tau_1\tau_2$: e-retângulo (arestas do grafo);
- Bi-coloração $\alpha\tau_2$: f-polígono (faces do grafo).
- Bi-coloração $\alpha\tau_3$: z-polígono (zigzags do grafo).

Denotamos por C_M o grafo obtido de uma trinity Υ cujas arestas τ_3 -coloridas foram removidas. Um fato importante sobre mapeamento de grafos em superfícies fechadas e trinities é o seguinte:

Teorema 2.1 (Lins,1980) *Existe uma correspondência 1-1 entre a classe das trinities Υ e a classe dos grafos finitos conexos mapeados em superfícies fechadas $(G_M \hookrightarrow S_M)$.*

Demonstração: Dada a trinity Υ , tome seu grafo C_M e oriente arbitrariamente suas arestas. Tomando cada e-retângulo, cada v-polígono e cada f-polígono como discos abertos disjuntos, cada uma das arestas orientadas aparecem exatamente duas vezes na fronteira desses discos. Identifique o par de arestas na fronteira dos discos que vieram da mesma aresta respeitando as orientações. O resultado é uma superfície fechada S_M que tem C_M mapeada nela. Deforme $(C_M \hookrightarrow S_M)$ tal que as arestas τ_1 -coloridas sejam as curtas e as τ_2 -coloridas as longas. Para obter $(G_M \hookrightarrow S_M)$ contraia a um ponto cada disco limitado por um v-polígono. Esses pontos são os vértices V_M de G_M . Cada e-retângulo se torna um polígono bi-colorido limitado por duas arestas longas coloridas por τ_2 dos e-retângulos originais. Contraia esses polígono bi-colorido à sua linha média. Essas linhas são as arestas E_M de G_M e assim obtemos $G_M = (V_M, E_M)$ e o mapeamento $(G_M \hookrightarrow S_M)$.

Reciprocamente, para obter uma trinity Υ a partir de um grafo G_M mapeado numa superfície fechada S_M , considere C_M como sendo o esqueleto

do dual da subdivisão baricêntrica de $(G_M \hookrightarrow S_M)$. As arestas de C_M podem ser 3-coloridas com as cores α, τ_1, τ_2 tal que as componentes do subgrafo induzido pelas arestas de cores τ_1 e τ_2 são quadriláteros. Introduzindo as duas arestas diagonais, τ_3 -coloridas, desses quadriláteros temos a trinity Υ . $\square$

2.2 Apresentação combinatória de um mapeamento

Uma maneira simples de apresentar um mapeamento $(G_M \hookrightarrow S_M)$ é a seguinte:

1. Faça a imersão de G_M no plano tal que todos cruzamentos entre as arestas sejam transversais e tenham número finito. Não faça distinção entre G_M e sua imagem sob essa imersão. Ela define um conjunto de arestas ordenadas de forma cíclica ao redor dos vértices;
2. Para cada vértice v de grau k , considere um pequeno disco fechado D_v tal que sua intersecção com G_M é um grafo com k arestas formadas a partir da ligação de um vértice comum v no centro do disco e k vértices de grau 1 definidos pela intersecção da fronteira de D_v com as arestas incidentes a v ;
3. Escolha uma orientação arbitrária para as arestas de G_M e desenhe uma seta saindo longitudinalmente próximo à parte inicial da aresta e , $tail(e) = e^+$, e uma seta chegando longitudinalmente próximo à parte final da aresta e , $head(e) = e^-$;
4. Ponha também uma pequena seta transversal, com orientação arbitrária

porém fixa, cruzando ortogonalmente cada aresta e em $G_M \cap D_v$ tal que seja especificada sua direção de rotação ao redor do vértice v (horário ou anti-horário).

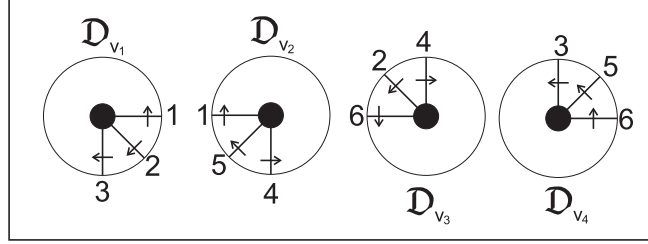


Figura 2.3: Discos da imersão dos vértices de K_4 no plano. O dado combinatório desta rotação de vértices é $R = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}\}$.

O dado combinatório necessário para especificar um mapeamento $M = (G_M \subset S_M)$ é a coleção $\mathcal{D}_{G_M} = \{G_M \cap D_v | v \in V_{G_M}\}$, onde cada aresta e em $G_M \cap D_v$ é nomeada e aparece com orientação dupla. Com efeito, não precisamos manter a aresta totalmente imergida, mas apenas seu começo em $G_M \cap D_{e^-}$ e seu final em $G_M \cap D_{e^+}$. A informação para tomar E_{G_M} é reconhecida combinatorialmente pelas duas arestas nomeadas com e nos discos D_{e^-} e D_{e^+} .

Dada uma apresentação combinatoria $\mathcal{D}_G$ com seus discos mergulhados no plano, construímos uma trinity Υ como segue:

1. O conjunto de vértices de C_M é constituído pelas extremidades das setas transversais; tais setas são as arestas τ_1 -coloridas de C_M . Note que C_M torna-se um grafo com $4|E_{G_M}|$ vértices e que suas arestas τ_1 -coloridas formam um emparelhamento perfeito;
2. O segundo emparelhamento perfeito é obtido ligando-se os vértices de $G_M \cap D_{e^-}$ aos de $G_M \cap D_{e^+}$ de tal forma que fiquem tail com tail e

head com head; estas duas arestas tornam-se as arestas τ_2 -coloridas que completam o e-retângulo associado à aresta $e \in E_{G_M}$;

3. Para cada $G_M \cap D_v$ ponha $\text{grau}(v)$ linhas α -coloridas se ligando tais que elas não interceptam G_M e formem, juntamente com as arestas τ_1 -coloridas, um v -polígono em $G_M \cap D_v$ tendo $2\text{grau}(v)$ lados. Estas são as arestas α -coloridas de C_M .
4. Introduzindo as arestas τ_3 -coloridas nas diagonais dos e-retângulos completamos a definição de Υ .

Definição 2.3 *O conjunto de arestas que possui ambas setas transversais apontando no mesmo sentido de rotação, denotado por $T = (\mathcal{D}_{G_M}) \subset E_{G_M}$, é dito torção da apresentação combinatória $\mathcal{D}_{G_M}$.*

A construção anterior pode ser invertida de forma que, a partir de uma trinity Υ , podemos obter uma apresentação combinatória de $(G_M \hookrightarrow S_M)$ escolhendo-se uma das duas possibilidades para mergulhar cada $G_M \cap D_v$ no plano. Existem $2^{|V_{G_M}|}$ escolhas induzindo diferentes torções que definem a mesma apresentação combinatória de um mapeamento.

Definição 2.4 *Dado um grafo finito $G = (V_G, E_G)$, a cofronteira de $W \subseteq V_G$, denotada por $\delta_G(W) \subseteq E_G$, é o subconjunto das arestas que tem uma extremidade em W e a outra em seu complemento $\overline{W}$.*

Proposição 2.2 *Inverter a orientação transversal de todas as arestas de $G_M \cap D_v \in \mathcal{D}_{G_M}$ não muda o mapeamento $M = (G_M \hookrightarrow S_M)$. Se a torção era $T = (\mathcal{D}_{G_M})$, a nova é $T \oplus_2 \delta_{G_M}(\{v\})$.*

Demonstração: O grafo G_M e a superfície S_M associados à construção da trinity Υ a partir de $G_M \cap D_v, v \in V, T \subseteq E_{G_M}$ são inalterados após inverter

a orientação transversal de todas as arestas de $G_M \cap D_v$. Essa operação transforma as arestas da cofronteira de v de forma que as arestas torcidas tornam-se não torcidas (e saem de T) e as arestas não torcidas tornam-se torcidas (e entram em T), ou seja, $T \oplus_2 \delta_{G_M}(\{v\})$. $\square$

Corolário 2.3 *Sejam T_1 e T_2 duas torções da apresentação combinatória do mesmo mapeamento $M = (G_M \hookrightarrow S_M)$. Então existe $W \subseteq V_{G_M}$ tal que $\delta_{G_M}(W) = T_1 \oplus_2 T_2$.*

Demonstração: Pelas definições, existe $W \subseteq V_{G_M}$ tal que iniciando com T_1 e invertendo a orientação transversal do conjunto $\{D_w; w \in W\}$ obtemos T_2 . Logo, $T_1 \oplus_2 \delta_{G_M}(W) = T_2$. $\square$

Corolário 2.4 *Seja T a torção da apresentação combinatória do mapeamento $M = (G_M \hookrightarrow S_M)$. Então S_M é orientável se, e somente se, existe $W \subseteq V_{G_M}$ tal que $T = \delta_{G_M}(W)$.*

Demonstração: Invertendo a orientação transversal das arestas dos discos no conjunto $\{D_w; w \in W\}$ obtemos o conjunto vazio, isto é, nenhuma aresta está torcida. Pela construção de C_M a partir de uma apresentação combinatória sem arestas torcidas, segue que C_M é bipartido e, portanto, S_M é orientável. $\square$

2.3 Dualização e conjugação

Denotando por v_M , e_M e f_M , respectivamente, o número de vértices, de arestas e de faces de M , a característica de Euler do mapa M é o número

inteiro $\chi_M = v_M - e_M + f_M$. O mapa M é orientável se C_M é bipartido; caso contrário, é chamado não-orientado. Então, definimos $o_M = 1$, se M é orientável e $o_M = 0$ se M é não orientável. A superfície S_M de um mapa M é então a superfície fechada de característica de Euler χ_M e orientabilidade dada por o_M . Denotaremos um grafo com v vértices, e arestas e f faces pela tripla (v, e, f) .

Um mapeamento $(G \hookrightarrow S)$ induz dois pares opostos de ordem cíclica na cofronteira $\delta_G(\{v\})$ de cada vértice $v \in V_G$. Existem várias correspondências 1-1 entre $(C_M \hookrightarrow S_M)$ e $(G_M \hookrightarrow S_M)$.

- e-retângulo em $C_M \longleftrightarrow$ aresta de G_M ;
- v-polígono em $C_M \longleftrightarrow$ vértice de G_M ;
- f-polígono em $C_M \longleftrightarrow$ caminho facial de $(G_M \hookrightarrow S_M)$;
- z-polígono em $C_M \longleftrightarrow$ caminho em zigzag de $(G_M \hookrightarrow S_M)$;
- arestas α -coloridas em $C_M \longleftrightarrow$ par adjacente em $\delta_{G_M}(\{v\}), v \in V_{G_M}$ de $(G_M \hookrightarrow S_M)$.

Definição 2.5 *Duas operações sobre as arestas de um mapeamento $M = (G_M \hookrightarrow S_M)$ estão bem definidas:*

1. *Dualização: Permutação das cores τ_1 e τ_2 da Υ associada a M .*
2. *Conjugação: Permutação das cores τ_2 e τ_3 da Υ associada a M .*

O grafo conexo G_D associado ao mapeamento $D = (G_D \hookrightarrow S_D)$ após a dualização é dito o dual de G_M .

Proposição 2.5 (Lins,1980) *O grafo associado ao mapa conjugado é igual ao grafo associado ao mapa de referência.*

Demonstração: Seja $M = (G_M \hookrightarrow S_M)$ um mapa e $\overline{M} = (G_{\overline{M}} \hookrightarrow S_{\overline{M}})$ seu mapa conjugado. Na trinity associada temos $M \equiv (\alpha; \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ e $\overline{M} \equiv (\alpha; \tau_1, \tau_3, \tau_2)$. Note inicialmente que essas permutações não alteram as arestas dos grafos G_M e $G_{\overline{M}}$, pois as arestas τ_2 -coloridas e τ_3 -coloridas fazem parte dos mesmos tetraedros que representam cada aresta do grafo mapeado; assim $e \in E(G_{\overline{M}}) \Rightarrow e \in E(G_M)$. Além disso, observe que $\overline{M}$ possui os mesmos polígonos $\alpha\tau_1$ -coloridos de M , logo $v \in V(G_{\overline{M}}) \Rightarrow v \in V(G_M)$. $\square$

Proposição 2.6 (Lins,1980) *Um grafo conexo e seu dual estão mapeados na mesma superfície fechada.*

Demonstração: Seja o mapa $M \equiv (\alpha; \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ associado ao mapeamento $M = (G_M \hookrightarrow S_M)$ de um grafo conexo G_M em uma superfície fechada S . Aplicando a dualização a M obtemos $D \equiv (\alpha; \tau_2, \tau_1, \tau_3)$. Como antes, essa operação não altera o número de arestas e de M ; logo $e_D = e_M$. Depois note que as arestas τ_3 -coloridas de M e D são iguais, logo $C_M = C_D$, e daí segue que $o_D = o_M$. Por fim, percebe-se que os polígonos $\alpha\tau_1$ -coloridos de D são os polígonos $\alpha\tau_2$ -coloridos de M , ou seja, $v_D = f_M$ e $f_D = v_M$. $\square$

O corolário que segue exibe a simetria abstrata entre vértices, faces e zigzags do mapeamento de um grafo numa superfície fechada: tomando o mapeamento complementar mantém-se os vértices e trocam-se faces e zigzags, tomando o mapeamento dual mantém-se os zigzags e trocam-se vértices e faces; tomando o mapeamento phial mantém-se as faces e trocam-se vértices e zigzags.

Corolário 2.7 (Lins,1980) *Seja Υ uma trinity. Então existem seis mapeamentos de grafos em superfícies fechadas que estão associados a Υ :*

1. Mapeamento de referência $M = (G_M \hookrightarrow S_M) \equiv (\alpha; \tau_1, \tau_2, \tau_3)$
2. Mapeamento conjugado $\overline{M} = (G_{\overline{M}} \hookrightarrow S_{\overline{M}}) \equiv (\alpha; \tau_1, \tau_3, \tau_2)$
3. Mapeamento dualizado $D = (G_D \hookrightarrow S_D) \equiv (\alpha; \tau_2, \tau_1, \tau_3)$
4. Mapeamento co-dual $\overline{D} = (G_{\overline{D}} \hookrightarrow S_{\overline{D}}) \equiv (\alpha; \tau_2, \tau_3, \tau_1)$
5. Mapeamento phial $P = (G_P \hookrightarrow S_P) \equiv (\alpha; \tau_3, \tau_2, \tau_1)$
6. Mapeamento co-phial $\overline{P} = (G_{\overline{P}} \hookrightarrow S_{\overline{P}}) \equiv (\alpha; \tau_3, \tau_1, \tau_2)$

Corolário 2.8 (Lins,1980) *Existem três grafos distintos:*

1. Grafo primal, $G_M = (V, E, F)$;
2. Grafo dual, $G_D = (F, E, V)$;
3. Grafo phial, $G_P = (V, F, E)$.

Que podem ser mergulhados em duas das três superfícies distintas:

1. $S_{-1} = (o_{\overline{P}}, \chi_{\overline{P}}) = (o_{\overline{M}}, \chi_{\overline{M}})$;
2. $S_0 = (o_M, \chi_M) = (o_D, \chi_D)$;
3. $S_1 = (o_{\overline{D}}, \chi_{\overline{D}}) = (o_P, \chi_P)$;

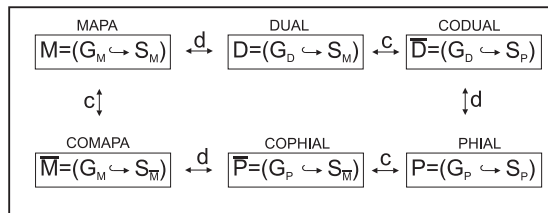


Figura 2.4: Seis mapas obtidos pela conjugação das operações de dualização e conjugação de uma trinity

Capítulo 3

Operações sobre Arestas de uma Trinity

Neste capítulo definimos as operações torção, remoção e recuperação de aresta. Mostramos que a torção de uma aresta que divide duas faces as colapsa. Então apresentamos um algoritmo que, aplicando torção ao conjunto $E_1 \subset E_G$, obtém o mapeamento de G com apenas uma face. O dual de G assim obtido é, portanto, um grafo G^* com um único vértice, que denominamos girassol. Aplicando-se em algumas arestas de G^* a operação remover arestas, obtemos um grafo com um vértice e uma face. Então geometrizamos esta face única como um polígono super-regular com $2e_1^*$ lados, onde e_1^* é o número de arestas que não foram removidas. Ao recuperarmos as arestas removidas E_2^* na ordem inversa à de remoção, adicionamos cordas internas ao polígono super-regular de tal forma que elas não se cruzam e conseguimos uma geometrização das faces de G^* .

3.1 Torção de arestas

Seja $\Upsilon = (R, T)$ uma trinity associada ao mapa $M = (v, e, f)$. Como vimos, cada par (R, T) define 4 permutações cíclicas, ou emparelhamentos, denotadas por α, τ_1, τ_2 e $\tau_3 = \tau_1\tau_2$ e a composição entre elas define 4 novas permutações $V = \alpha\tau_1, E = \tau_1\tau_2, F = \alpha\tau_2$ e $Z = \alpha\tau_3$, que, por sua vez, estão associadas aos polígonos bi-coloridos da trinity Υ .

Definição 3.1 *A operação torcer aresta e é a permutação das cores τ_2 e τ_3 no e -retângulo da Υ associada à aresta e .*

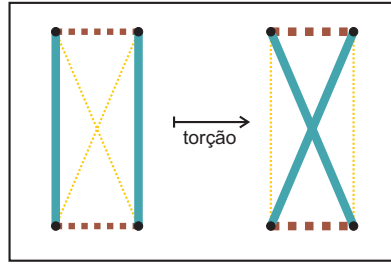


Figura 3.1: Torção de uma aresta.

Lema 3.1 *Seja $\Upsilon = (R, T)$. A torção de uma aresta e que divide duas faces as colapsa.*

Demonstração: Sejam f_1 e f_2 dois f -polígonos $\alpha\tau_2$ -coloridos de Υ associados a dois caminhos faciais distintos do grafo. Como os f -polígonos possuem uma aresta em comum e a torção permuta as cores τ_2 e τ_3 , muda caminho facial por caminho zigzag apenas naquela aresta, o caminho facial será a união dos caminhos faciais f_1 e f_2 . $\square$

Proposição 3.2 *Dada uma trinity $\Upsilon_0 = (R, T_0)$, existe $T \subset E_{G_M}$ tal que $\Upsilon = (R, T)$ possui face única.*

Demonstração: Com efeito, dois f-polígonos podem ser unidos pela torção de uma aresta em comum, diminuindo o número de faces do mapeamento em uma unidade. Então, enquanto existir aresta comum a dois f-polígonos, o procedimento de torção pode ser aplicando até obtermos uma trinity $\Upsilon = (R, T)$ com face única. $\square$

Definição 3.2 *Um T -girassol para G_M , que denotamos $Sunfl(M, T)$, é um grafo com apenas um vértice. Dualizando a trinity $\Upsilon = (R, T)$ obtida como na proposição 3.2 temos um T -girassol para G_M . Um girassol para o grafo G_M é um T -girassol para algum $T \subset E_{G_M}$.*

Exemplo 3.1 *Considere a trinity MapK4 com rotação*

$$\begin{aligned} R = & \{ \{1, 2, 3\}, \\ & \{1, 4, 5\}, \\ & \{2, 4, 6\}, \\ & \{3, 5, 6\} \} \end{aligned}$$

e torção $T_0 = \emptyset$. Então MapK4 possui 4 vértices, 6 arestas e 2 faces, ou simplesmente $(4, 6, 2)$ e característica de Euler 0. Fazendo $T = \{6\}$, obtemos uma trinity com apenas uma face, como mostrado na proposição 3.2 e temos $(4, 6, 1)$ e característica de Euler -1 . Dualizando este último resultado, obtemos um T -girassol de MapK4.

Exemplo 3.2 *Considere a trinity Random9 com rotação*

$$\begin{aligned}
 R = & \{ \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \\
 & \{8, 9, 10, 11, 1\}, \\
 & \{12, 13, 14, 8\}, \\
 & \{15, 16, 17, 2\}, \\
 & \{18, 19, 20, 3, 9\}, \\
 & \{21, 22, 4, 15, 18\}, \\
 & \{5, 12, 16, 19, 21\}, \\
 & \{23, 6, 10, 13, 22\}, \\
 & \{23, 20, 17, 14, 11, 7\} \}
 \end{aligned}$$

e torção $T_0 = \emptyset$. Dessa maneira, Random9 possui 9 vértices, 23 arestas

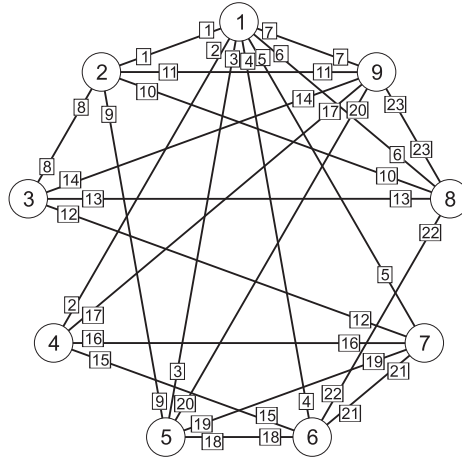


Figura 3.2: Definição do grafo Random9.

e 4 faces, ou seja, $(9, 23, 4)$ e característica de Euler -10 . Fazendo $T = \{22, 21, 17\}$, obtemos uma trinity com apenas uma face e assim temos $(9, 23, 1)$ e característica de Euler -7 . Dualizando este último resultado, obtemos um T -girassol de Random9.

3.2 Remoção e recuperação de arestas

Definição 3.3 Dada uma trinity $\Upsilon = (R, T)$, a operação remover aresta e é a atualização da permutação α de forma a eliminar a aresta e do conjunto R . Sua operação inversa é recuperar aresta removida, que recupera a permutação α anterior à remoção da aresta. Note que só podemos aplicar recuperação de aresta às arestas que foram removidas.

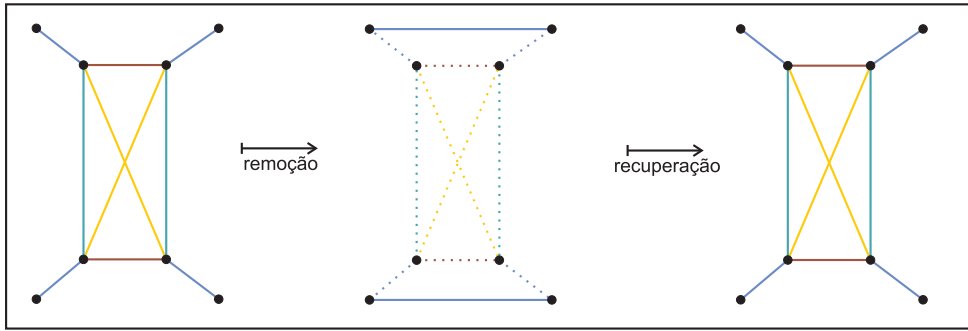


Figura 3.3: Remoção de uma aresta e recuperação de uma aresta removida.

Lema 3.3 Seja e^* uma aresta comum a duas faces em G^* . A remoção de e^* as colapsa.

Demonstração: De fato, sejam dois f^* -polígonos tais que e^* pertença aos dois. Após a remoção de e^* estes dois f^* -polígonos se colapsam, formando um novo f^* -polígono, devido à atualização da permutação α . $\square$

Proposição 3.4 Dado um girassol $\text{Sunfl}(M, T)$, existe $E_1^* \subset E_{\text{Sunfl}(M, T)}$ tal que após a remoção de todas arestas duais $E_2^* = E_{\text{Sunfl}(M, T)} \setminus E_1^*$ obtemos um grafo com uma face e um vértice. Além disso, a característica de Euler da superfície onde $\text{Sunfl}(M, T)$ está mergulhada é igual a $2 - e_1^*$.

Demonstração: Seja um girassol $Sunfl(M, T)$ com $(1, e, v)$ e $E_2^* = \{\}$. Se $v > 1$, existe e comum a duas faces. Aplicando 3.3 a e obtemos $(1, e, v - 1)$ e adicionamos e ao conjunto E_2^* . Repetindo esse procedimento até que $v = 1$ obtemos $(1, e, 1)$ e a decomposição $E_{Sunfl(M, T)} = E_1^* \cup E_2^*$. Note ainda que remover aresta não muda a característica de Euler da superfície, pois diminuimos simultaneamente uma face e uma aresta. Portanto, ao final deste procedimento, removemos e_2^* arestas e permanecem $e_1^* = e - e_2^*$, logo $1 - e + v = 1 - (e_1^* + e_2^*) + (1 + e_2^*) = 2 - e_1^*$. $\square$

Dividindo cada aresta do conjunto E_1^* em duas partes obtemos as semi-arestas que irão formar a fronteira do polígono super-regular com $2e_1^*$ lados. Já as arestas de E_2^* formarão o conjunto de cordas internas a tal polígono. Um resultado importante é o que segue.

Lema 3.5 *Sejam E_1^* as arestas que formam a fronteira do polígono super-regular e E_2^* seu conjunto de cordas. A recuperação das arestas de E_2^* na ordem inversa à de remoção, isto é, recuperando-se primeiro as que foram removidas por último, está bem definida. Além disso, as cordas E_2^* não se cruzam.*

Demonstração: Seja um grafo com $(1, e_1^*, 1)$. Desde que a remoção da aresta e_k^* foi motivada pela divisão de duas faces distintas, a recuperação de e_k^* dividirá a face única obtida pelo procedimento em duas, logo teremos $(1, e_1^* + 1, 2)$. Assim, ao recuperarmos a aresta e_{k-1}^* ela dividirá uma das duas faces obtidas, e portanto não cruza e_k^* e teremos $(1, e_1^* + 2, 3)$. Repetindo esse procedimento, conseguimos recuperar todas arestas E_2^* e portanto, recuperar $(1, e_1^* + e_2^*, 1 + e_2^*) = (1, e, v)$. $\square$

Definição 3.4 *O domínio fundamental de um mapa é uma partição do conjunto de arestas (semi-arestas) duais segundo os procedimentos 3.4 e 3.5; e um conjunto de arestas (semi-arestas) primais obtidas pela dualização das arestas (semi-arestas) duais.*

A geometrização do domínio fundamental, isto é, a apresentação geométrica do domínio fundamental será abordada no próximo capítulo. Vamos nos adiantar a ele fazendo a apresentação geométrica dos domínios fundamentais do *MapK4* e do *Random9*.

Exemplo 3.3 *Aplicando o procedimento 3.4 ao T-girassol de MapK4 obtido no exemplo 3.1 obtemos $E_2^* = \{6, 5, 3\}$. Recuperando as cordas internas segundo 3.5, obtemos o dual do grafo original. Por fim, obtemos o domínio fundamental do grafo original, por um procedimento que utiliza geometria hiperbólica e será explicado no próximo capítulo, cuja geometrização é dada pela figura abaixo. As arestas tracejadas indicam arestas (semi-arestas) duais*

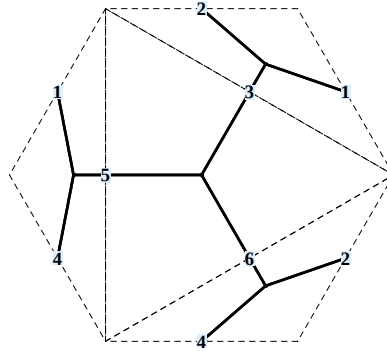


Figura 3.4: Geometrização do domínio fundamental de *MapK4* no modelo do disco projetivo $\mathbb{D}^2$.

e as arestas contínuas representam as arestas (semi-arestas) primais. Note que $E_2^* = \{3, 5, 6\}$ são cordas internas e seu complemento $E_1^* = \{1, 2, 4\}$

formam a fronteira do domínio fundamental. As arestas primais cuja dual é de fronteira aparecem apenas pela metade, isto é, são apresentadas apenas as semi-arestas primais. Já as arestas primais cuja dual é corda interna aparecem completas.

Exemplo 3.4 Como no exemplo anterior, aplicando 3.4 para o T -girassol de Random9 obtido no exemplo 3.2 temos $E_2^* = \{23, 22, 21, 20, 17, 14, 11, 7\}$. Recuperando as cordas internas segundo 3.5, obtemos o dual do grafo original. Assim, a geometrização do domínio fundamental do Random9 pode ser vista pela figura abaixo. Observe que $E_2^* = \{23, 22, 21, 20, 17, 14, 11, 7\}$ são cordas

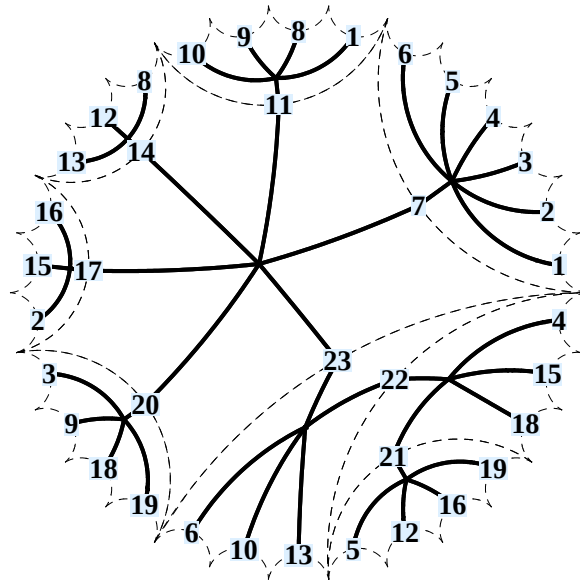


Figura 3.5: Geometrização do domínio fundamental de *Random9* no modelo da bola conforme de Poincaré $\mathbb{B}^2$.

internas e seu complemento formam a fronteira do domínio fundamental. As arestas primais cuja dual é de fronteira aparecem apenas pela metade, isto é, são apresentadas apenas as semi-arestas primais. Já as arestas primais cuja dual é corda interna aparecem completas.

Capítulo 4

Geometria do Plano

Hiperbólico

Utilizaremos quatro modelos para o plano hiperbólico. Cada um deles está relacionado por uma bijeção analítica computacionalmente simples que se tornarão isometrias entre espaços métricos: o modelo da bola conforme de Poincaré $\mathbb{B}^2$, o modelo do hiperbolóide $\mathbb{H}^2$, o modelo do disco projetivo $\mathbb{D}^2$ e o modelo do semi-plano superior $\mathbb{U}^2$. Os conjuntos de $\mathbb{B}^2$ e $\mathbb{D}^2$ são ambos $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. A razão para usar dois nomes diferentes é que as métricas associadas a eles são distintas. O modelo $\mathbb{U}^2$ é chamado modelo do semi-plano superior, seu conjunto é $\mathbb{U}^2 = \{z \in \mathbb{C}; \Im z > 0\}$. As bijeções entre esses conjuntos são muito simples e podemos ir e vir de um modelo para o outro de maneira muito barata (no sentido computacional). Os quatro modelos são efetivamente usados nesse trabalho:

- $\mathbb{H}^2$ é usado para definir o plano hiperbólico. Também para a definição do centróide de um conjunto de pontos, o análogo ao baricentro na geometria Euclideana, que é aplicado para encontrar um tipo de centro do polígono convexo aparecendo como faces dos girassóis, e então tendo

um ponto bem definido para os vértices do dual do girassol. O centróide de um conjunto de pontos não está diretamente disponível nos outros modelos.

- $\mathbb{B}^2$ é usado para definir, a partir de um girassol $(G^* \hookrightarrow S)$ e uma árvore geradora A de G , o domínio fundamental $\mathfrak{F}_0$ e um mapeamento $(G \cup G^* \hookrightarrow \mathfrak{F}_0 \subset \mathbb{B}^2)$. A isometria centrada na origem e com rotação θ é fácil de definir apenas em $\mathbb{B}^2$. A reflexão sobre a linha u é simplesmente tomar o conjugado $\bar{z}$ de $z = u + vi \in \mathbb{B}^2$.
- $\mathbb{U}^2$ é usado para definir uma fórmula concreta da distância hiperbólica entre quaisquer dois pontos de $\mathbb{U}^2$. Essa distância é então exportada para os outros modelos via bijeção.
- Os modelos $\mathbb{U}^2$ e $\mathbb{B}^2$ nos ajudam a visualizar o efeito geométrico de uma composição arbitrária finita de isometrias. A translação hiperbólica, ou mudança de coordenadas, é uma dessas composições de importância central. O modelo $\mathbb{U}^2$ é adequado para trabalhar com coordenadas (números complexos) codificadas como $z \equiv (l, a) = (\ln|z|, \arg(z))$. Ele é melhor do que os modelos $\mathbb{B}^2$ e $\mathbb{D}^2$ no sentido que os números complexos que aparecem são mais facilmente discriminados nesse modelo (a diferença entre eles aparece logo em suas expansões decimais).
- $\mathbb{D}^2$ é usado para efetivamente mergulhar $G \cup G^*$ no domínio fundamental $\mathfrak{F}_0$. Nesse mergulho, que é tão hiperbólico como os outros, a fronteira é um polígono Euclideano super-regular convexo de $2p$ lados. Além disso, cada aresta $e^* \in G^*$ aparece como um segmento reto e cada face de G^* como um polígono convexo; a aresta e no primal de G é subdividida em duas semi-arestas retas: e_1 ligando o início de e a $e^\times$ que é o ponto central de e^* e e_2 que liga $e^\times$ ao final de e . Obtendo $(G \cup G^* \hookrightarrow \mathfrak{F}_0)$ por

um algoritmo linear sobre o número n de arestas de G que é o ponto de partida do Splitting Algorithm.

4.1 Quatro formas de visualização

Definimos o produto interno Lorentziano de $x, y \in \mathbb{R}^3$ por

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$$

A norma Lorentziana é o número complexo $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$. Se $\langle x, x \rangle < 0$ tomamos $\|x\|$ como sendo o número complexo imaginário puro positivo. Nesse caso vamos denotar $||x||$ como o módulo do número imaginário $\|x\|$. Considere o conjunto $\mathbb{H}^2$, a folha positiva de um hiperbolóide de duas folhas em $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{H}^2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3; y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = -1, y_3 > 0\}$$

Observe que um ponto de $\mathbb{R}^3$ pertence a $\mathbb{H}^2$ se, e somente se, sua norma Lorentziana é i . O plano hiperbólico é o conjunto acima munido de uma métrica induzida pela métrica de um outro modelo do plano hiperbólico, o modelo do semi-plano superior $\mathbb{U}^2$, por meio das bijeções $\beta_{HU} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{U}^2$ e sua inversa $\beta_{UH} : \mathbb{U}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$.

4.1.1 Projeção estereográfica sobre $\mathbb{H}^2$

Seja $\mathbb{B}^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ e $C_\infty = \partial(\mathbb{B}^2)$. A *projeção estereográfica* a partir do pólo sul sobre a folha positiva do hiperbolóide de duas folhas

$\beta_{BH} : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ e sua inversa β_{HB} são dadas por:

$$\begin{aligned}\beta_{BH}(z) &= \left(\frac{2x_1}{1-|z|^2}, \frac{2x_2}{1-|z|^2}, \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2} \right), \\ \beta_{HB}(y) &= \frac{y_1}{1+y_3} + i \frac{y_2}{1+y_3}\end{aligned}$$

onde $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{B}^2$ e $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{H}^2$.

4.1.2 Projeção gnômica sobre $\mathbb{H}^2$

Seja $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Como conjunto temos $\mathbb{D}^2 = \mathbb{B}^2$, mas $\mathbb{D}^2$ e $\mathbb{B}^2$ terão métricas diferentes, por isso o nome distinto. A *projeção gnômica* é a bijeção $\beta_{DH} : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ definida como a composição da translação vertical de $\mathbb{D}^2$ por e_3 seguida pela projeção radial para $\mathbb{H}^2$. As fórmulas explícitas para β_{DH} e sua inversa β_{HD} são:

$$\begin{aligned}\beta_{DH}(z) &= \frac{(x_1, x_2, 1)}{||(x_1, x_2, 1)||} \\ \beta_{HD}(y) &= \frac{y_1}{y_3} + i \frac{y_2}{y_3},\end{aligned}$$

onde $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{D}^2$ e $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{H}^2$.

4.1.3 Expansão retificadora e contração encirculadora

De particular importância é a composição $\beta_{BD} = \beta_{HD} \circ \beta_{BH} : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$, que chamamos expansão retificadora. Sua expressão é dada por

$$\beta_{BD}(z) = \left(\frac{2}{1+|z|^2} \right) z.$$

Existem dois valores $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ que solucionam a equação $w = \beta_{BD}(z)$, a saber,

$$z_1 = \left(\frac{1-\sqrt{1-|w|^2}}{|w|^2} \right) w, \quad z_2 = \left(\frac{1+\sqrt{1-|w|^2}}{|w|^2} \right) w.$$

Lema 4.1 *A contração encirculadora β_{DB} , inversa da expansão retificadora β_{BD} , é dada por*

$$\beta_{DB}(w) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - |w|^2}}{|w|^2} \right) w$$

Demonstração: O produto das duas soluções é:

$$z_1 z_2 = \frac{(1 - (1 - |w|^2))w^2}{|w|^4} = \frac{w^4}{|w|^4},$$

logo, $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 1$. Suponha $|z_1| = 1$. Desde que $w \neq 0$, $|w| < 1$,

$$1 = \left| \frac{1 - \sqrt{1 - |w|^2}}{|w|^2} \right|^2 |w|^2 \Rightarrow |w|^2 = |1 - \sqrt{1 - |w|^2}|^2 = 2 - 2\sqrt{1 - |w|^2} - |w|^2 \Rightarrow 1 - |w|^2 = \sqrt{1 - |w|^2} \Rightarrow 1 - 2|w|^2 + |w|^4 = 1 - |w|^2 \Rightarrow |w| = \sqrt{2}.$$

Isso é uma contradição. Daí segue que a única solução é aquela com o menor valor absoluto, $z = z_1$. $\square$

A composição β_{BD} coincide com outra composição β' . O lema seguinte justifica as terminologias expansão retificadora e contração encirculadora.

Lema 4.2 *Seja $\beta' = \pi_3 \circ \zeta : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$. Então um arco de circunferência c' cruzando C_∞ sob um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ em dois pontos distintos a e b é projetado por β' sobre o segmento de reta ab . Além disso, $\beta' = \beta_{BD}$.*

Demonstração: A projeção estereográfica ζ preserva o ângulo entre duas curvas que se cruzam em $\mathbb{S}^2$; segue que ângulos são preservados para quaisquer pontos porque as isometrias de $\mathbb{S}^2$ correspondem com as aplicações conformes (que preservam ângulo) do plano. A curva c' cruza C_∞ sob o ângulo de $\frac{\pi}{2}$. Segue que $c = \zeta(c')$ cruza $\zeta(C_\infty) = C_\infty$ sob um ângulo de $\frac{\pi}{2}$, implicando que o disco planar limitado por c' e o segmento ab está mapeado sob ζ^{-1} sobre um disco plano limitado por c e ab ortogonal ao plano do equador. Então a projeção de c sob π_3 é o segmento de reta ab . Além disso, a projeção

estereográfica ζ tem expressão algébrica

$$\zeta(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right).$$

Logo, $\beta'(x_1, x_2) = \pi_3 \zeta(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right) = \beta_{BD}(x_1 + ix_2) = \beta_{BD}(z)$ $\square$

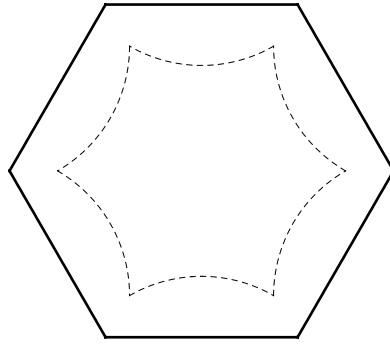


Figura 4.1: Hexágono regular nos modelos do disco projetivo $\mathbb{D}^2$ (linha contínua) e da bola conforme de Poincaré $\mathbb{B}^2$ (linha tracejada).

4.1.4 Fórmula de Poincaré

O modelo $\mathbb{U}^2$ é crucial para obter todas isometrias dos espaços hiperbólicos como matrizes complexas 2×2 especiais. Isso foi descoberto por Poincaré.

A partir das $\mathbb{U}^2$ -isometrias, as $\mathbb{B}^2$ -isometrias seguem pela conjugação com a matriz especial $E_{UB} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$. A inversa de E_{UB} é $E_{BU} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$.

Lema 4.3 *As aplicações $\beta_{UB} : \mathbb{U}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$ e $\beta_{BU} : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{U}^2$ dadas por*

$$\beta_{UB}(z) = \frac{iz + 1}{z + i} \text{ e } \beta_{BU}(w) = \frac{-iw + 1}{w - i},$$

são inversas.

Demonstração: Mostremos que β_{UB} é uma bijeção entre $\mathbb{U}^2$ e $\mathbb{B}^2$. Com efeito, seja z um número complexo, então:

$$\begin{aligned}
z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{U}^2 &\Leftrightarrow x_2 > 0 \\
&\Leftrightarrow |z - i| < |z + i| \\
&\Leftrightarrow \frac{|z - i|}{|z + i|} < 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{|z - i||i|}{|z + i|} < 1 \\
&\Leftrightarrow \left| \frac{iz + 1}{z + i} \right| < 1 \\
&\Leftrightarrow |\beta_{UB}(z)| < 1 \\
&\Leftrightarrow \beta_{UB}(z) \in \mathbb{B}^2
\end{aligned}$$

Provemos agora que β_{BU} é a inversa de β_{UB} . De fato,

$$\begin{aligned}
\beta_{UB}(z) = \frac{iz + 1}{z + i} = w &\Leftrightarrow iz + 1 = wz + wi \\
&\Leftrightarrow z(i - w) = wi - 1 \\
&\Leftrightarrow z = \frac{-iw + 1}{w - i} = \beta_{BU}(w)
\end{aligned}$$

□

Dada uma esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ de centro c e raio r em $\mathbb{R}^n$ a inversão sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ é a função $\sigma(c, r) = \sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\sigma(c, r, x) = \sigma(x) = c + \left(\frac{r}{\|x - c\|} \right)^2 (x - c).$$

A inversão fixa todos pontos de $\mathbb{S}^{n-1}$ e troca o interior com o exterior de $\mathbb{S}^{n-1}$. A função σ satisfaz $\|x - a\|\|\sigma(x) - a\| = r^2$. O caso particular de inversão $n = 2$ e $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ identifica β_{BU} com a composição de duas inversões. Usualmente a reflexão sobre um hiperplano é também considerado um caso especial de inversão sobre uma circunferência de raio ∞ . Isso é particularmente verdade na geometria hiperbólica, porque as linhas verticais se tornam semi-circunferências sob isometrias.

Proposição 4.4 *A bijeção β_{BU} é a restrição de $\mathbb{B}^2$ à composição da reflexão sobre o eixo- x η seguida pela inversão σ sobre a circunferência $\{z \in \mathbb{C}; |z + i| = \sqrt{2}\}$.*

Demonstração: Seja $w = u + iv \in \mathbb{B}^2$. Então:

$$\begin{aligned}
 \sigma \circ \eta(w) &= \sigma(\overline{w}) \\
 &= -i + \left(\frac{\sqrt{2}}{|\overline{w} + i|} \right)^2 (\overline{w} + i) \\
 &= -i + \frac{2}{|\overline{w} + i|^2} (\overline{w} + i) \\
 &= -i + \frac{2}{|u - iv + i|^2} (u - iv + i) \\
 &= -i + \frac{2}{|u + i(1 - v)|^2} (u + i(1 - v)) \\
 &= -i + \frac{2}{(u + i(1 - v))(u - i(1 - v))} (u + i(1 - v)) \\
 &= -i + \frac{2}{(u - i(1 - v))} \\
 &= \frac{-i(u + iv) + 1}{(u + iv - i)} \\
 &= \frac{-iw + 1}{(w - i)} \\
 &= \beta_{BU}(w)
 \end{aligned}$$

□

4.2 A métrica do plano hiperbólico

Um arco geodésico $a \frown b$ ligando dois pontos a e b do plano hiperbólico é a única curva no plano que alcança a distância mínima entre os dois pontos. O conceito generaliza a noção de segmento reto ligando dois pontos no plano Euclideano. O arco geodésico em $\mathbb{H}^2$ $a \frown b$, $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$ é suportado pela curva em $\mathbb{R}^3$ que é a interseção de $\mathbb{H}^2$ com o plano que passa pela origem e contém os pontos a e b . Essa curva é um arco de uma hipérbole. Então existe uma única subcurva nele ligando a e b . O arco geodésico em $\mathbb{B}^2$

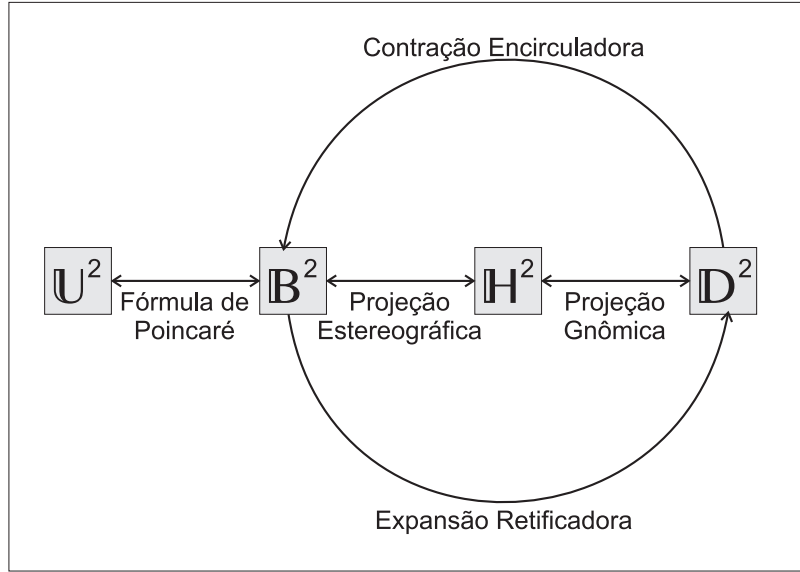


Figura 4.2: Bijeções entre os quatro modelos hiperbólicos

$a \frown b$ é ou o segmento de reta Euclideana ligando-os, se a e b são colineares com a origem, ou então, é o arco Euclideano de uma circunferência C ligando-os, de tal forma que C cruza $C_\infty = \partial(\mathbb{B}^2)$ em dois pontos distintos e em cada um deles por um ângulo de $\frac{\pi}{2}$. O arco geodésico em $\mathbb{D}^2$ $a \frown b$ é o segmento de reta Euclideana ligando a e b .

A distância hiperbólica entre dois pontos é definida no modelo $\mathbb{U}^2$ e exportada para os outros modelos. A função $\tanh^{-1}$ é a função inversa $\arctanh$ e é definida como

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), x \in \mathbb{R}, \|x\| < 1.$$

Os conjuntos $\mathbb{U}^2, \mathbb{B}^2, \mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$ tornam-se espaços métricos pela definição das

distâncias entre dois pontos em cada um desses modelos. Assim

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{U}}(a, b) &= 2 \tanh^{-1} \left| \frac{b - a}{b - \bar{a}} \right| \\ d_{\mathbb{B}}(a, b) &= d_{\mathbb{U}}(\beta_{BU}(a), \beta_{BU}(b)) \\ d_{\mathbb{H}}(a, b) &= d_{\mathbb{B}}(\beta_{HB}(a), \beta_{HB}(b)) \\ d_{\mathbb{D}}(a, b) &= d_{\mathbb{B}}(\beta_{DB}(a), \beta_{DB}(b)) \end{aligned}$$

É conveniente tornar a fórmula da distância $\mathbb{B}^2$ explícita, então segue o lema abaixo.

Lema 4.5 *A distância hiperbólica no modelo $\mathbb{B}^2$ é dada por*

$$d_{\mathbb{B}}(a, b) = 2 \tanh^{-1} \left| \frac{b - a}{1 - b\bar{a}} \right|.$$

Demonstração: Pela definição segue que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{B}}(a, b) &= d_{\mathbb{U}}(\beta_{BU}(a), \beta_{BU}(b)) \\ &= d_{\mathbb{U}}\left(\frac{-ia + 1}{a - i}, \frac{-ib + 1}{b - i}\right) \\ &= 2 \tanh^{-1} \left| \frac{(b - a)(i + \bar{a})}{1 - b\bar{a}(-i + a)} \right| \\ &= 2 \tanh^{-1} \left| \frac{b - a}{1 - b\bar{a}} \right| \end{aligned}$$

□

4.2.1 O centróide de um conjunto de pontos em $\mathbb{H}^2$

O modelo hiperbolóide $\mathbb{H}^2$ é usado para definir o *centróide* de um conjunto finito de pontos. O centróide é a generalização do baricentro na geometria Euclideana para as geometrias esférica e hiperbólica. Dado um conjunto finito de pontos $\{y_1, \dots, y_k\} \subset \mathbb{H}^2$ seu centróide é o ponto

$$c = \frac{(y_1 + \dots + y_k)/k}{\| (y_1 + \dots + y_k)/k \|}. \quad (4.1)$$

A projeção estereográfica β_{HB} sobre um hiperbolóide e a projeção gnômica β_{HD} nos permitem definir o $\mathbb{B}^2$ -centróide $\in \mathbb{B}^2$ e o $\mathbb{D}^2$ -centróide $\in \mathbb{D}^2$.

A fórmula para o $\mathbb{D}^2$ -centróide é utilizada para posicionar vértices do grafo primal G como o $\mathbb{D}^2$ -centróide dos vértices do $\mathbb{D}^2$ -polígono convexo (que é um polígono Euclidiano convexo) limitando a face F_v correspondente ao grafo dual G^* no domínio fundamental $\mathcal{F}_{2p}$.

4.2.2 Ângulos e comprimentos

Desde que a projeção estereográfica preserva ângulos, o modelo da bola conforme $\mathbb{B}^2$ e o modelo do hiperbolóide $\mathbb{H}^2$ têm os mesmos ângulos, embora tenham comprimentos distorcidos. No modelo projetivo $\mathbb{D}^2$, baseado na expansão retificadora, tanto ângulo como comprimento são distorcidos. No entanto, as retas são preservadas, pelo lema 4.2. Então arcos geodésicos em $\mathbb{D}^2$ são segmentos de reta Euclidianos distorcidos. Polígonos em $\mathbb{D}^2$ são polígonos Euclidianos, apenas o comprimento de seus lados e seus ângulos internos ficam medidos de maneira diferente. Contudo, a expansão retificadora tem uma propriedade importante: sobre ela, a imagem de um ângulo que é menor do que π continua sendo menor do que π . Isso deixa claro uma propriedade provada por Poincaré em 1880.

Teorema 4.6 (Poincaré, 1880) *Um polígono hiperbólico $\mathcal{P}$ é convexo se e somente se, expressado no modelo $\mathbb{B}^2$, cada ângulo Euclidiano interno de $\mathcal{P}$ é menor do que π e então é um polígono convexo Euclidiano.*

O melhor modelo para usar é o projetivo $\mathbb{D}^2$. A decisão essencial do algoritmo é verificar se dois arcos geodésicos se cruzam ou não. Para isso é mais eficiente ter linhas retas do que arcos de circunferências. Contudo o modelo conforme $\mathbb{B}^2$ é necessário para construir o domínio fundamental,

pois para encontrar esse domínio, a preservação de ângulos dada por ele é essencial. Nosso objetivo é mapear geometricamente um grafo arbitrário G , tal que seu dual tem apenas um vértice e faces convexas, no domínio fundamental.

Na seção seguinte, apresentamos três isometrias necessárias para obter o levantamento de $G \cup G^*$ a $\mathbb{D}^2$.

4.2.3 Isometrias

As seguintes aplicações são isometrias hiperbólicas:

1. (rotação θ em $\mathbb{B}^2$ centrada na origem) $\rho_\theta(w) = we^{i\theta}$;
2. (Conjugação complexa em $\mathbb{B}^2$) $r_B(w) = \bar{w}$;
3. (Conjugação complexa em $\mathbb{U}^2$) $r_U(z) = -\bar{z}$;
4. (translação horizontal em $\mathbb{U}^2$) $h_\xi(z) = z + \xi$
5. (κ -dilação em $\mathbb{U}^2$) $d_\kappa(z) = \kappa z$
6. (w_0 -translação hiperbólica em $\mathbb{B}^2$) $\tau_{w_0}(w) = \frac{w+w_0}{w_0w+1}$

Pela fórmula de distância hiperbólica em $\mathbb{U}^2$ e em $\mathbb{B}^2$ é direto checar que $1, \dots, 5$ são isometrias.

Lema 4.7 *Tomar o conjugado complexo via uma $\mathbb{B}^2$ -isometria, $\overline{r_B}$, corresponde em $\mathbb{U}^2$ à inversão na circunferência unitária centrada na origem.*

Demonstração: Seja $z = \beta_{BU}(w)$. Então,

$$\begin{aligned} z &= \frac{-iw + 1}{w - i} \\ r_B(z) &= \frac{-i\bar{w} + 1}{\bar{w} - i} \\ &= \frac{-i\frac{\overline{iz+1}}{z+i} + 1}{\frac{\overline{iz+1}}{z+i} - i} \\ &= \frac{1}{\bar{z}} \end{aligned}$$

Teorema 4.8 (Poincaré, 1882) *Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ e $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Então a aplicação*

$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

é uma isometria em $\mathbb{U}^2$.

Demonstração: O caso $\gamma = 0$ é fácil. Note que $\delta \neq 0, \alpha/\delta > 0$,

$$\begin{aligned} d_{\alpha/\delta}(z) &= \frac{\alpha z}{\delta} \\ (h_{\beta/\delta} \circ d_{\alpha/\delta})(z) &= \frac{\alpha z + \beta}{\delta} \end{aligned}$$

Já no caso que $\gamma \neq 0$ a demonstração usa seis isometrias de quatro tipos (2 a 5). Trocando $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ por $(-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta)$ se $\gamma < 0$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\gamma > 0$, e

$$\begin{aligned} d_\gamma(z) &= \gamma z \\ (h_{-\delta} \circ d_\gamma)(z) &= \gamma z - \delta \\ (d_\gamma \circ h_{-\delta} \circ d_\gamma)(z) &= \gamma(\gamma z - \delta) \\ (r_B \circ d_\gamma \circ h_{-\delta} \circ d_\gamma)(z) &= \frac{1}{\gamma(\gamma \bar{z} - \delta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(r_B \circ d_\gamma \circ h_{-\delta} \circ d_\gamma)(z) &= \frac{1}{\gamma(\gamma(-\bar{z}) + \delta)} \\
(r_U \circ r_B \circ d_\gamma \circ h_{-\delta} \circ d_\gamma)(z) &= -\frac{1}{\gamma(\gamma z + \delta)} \\
(h_{\frac{\alpha}{\gamma}} \circ r_U \circ r_B \circ d_\gamma \circ h_{-\delta} \circ d_\gamma)(z) &= \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma(\gamma z + \delta)} \\
(h_{\frac{\alpha}{\gamma}} \circ r_U \circ r_B \circ d_\gamma \circ h_{-\delta} \circ d_\gamma)(z) &= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}
\end{aligned}$$

□

Corolário 4.9 *Seja $a, b \in \mathbb{C}$ e $|\alpha|^2 - |\beta|^2 \neq 0$. Então a aplicação*

$$z \mapsto \frac{aw + b}{\bar{b}w + \bar{a}}$$

é uma isometria em $\mathbb{B}^2$.

Demonstração: Considere as matrizes E_{UB} , E_{BU} como definidas na seção 4.1.4 e $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Então o produto matricial $E_{UB}AE_{BU} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Assim, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ se, e somente se, $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Tome $a = \frac{1}{2}(\alpha + \delta + i(\beta - \delta))$ e $b = \frac{1}{2}(\beta + \gamma + i(\alpha - \delta))$. □

Corolário 4.10 *Seja $w_0 \in \mathbb{B}^2$. Então a aplicação*

$$\tau_{-w_0}(w) = \frac{w - w_0}{-\bar{w}_0 w + 1}$$

é uma isometria em $\mathbb{B}^2$ que leva w_0 na origem deixando invariante a linha suporte do arco geodésico $-w_0 \hat{} w_0$.

Demonstração: Esse é um caso especial do corolário 4.9 com $a = 1$ e $b = w_0$. O corolário se aplica pois $1 - |w_0|^2 > 0$. Note que τ_{w_0} é a inversa de τ_{-w_0} , que $\tau_{w_0}(0) = w_0$ e que $\tau_{w_0}(-w_0) = 0$. Daí segue que a linha suporte do arco geodésico $-w_0 \hat{} w_0$ é invariante sob τ_{w_0} , e portanto sob τ_{-w_0} □

4.2.4 Grupo Γ de isometrias que preservam orientação

Definição 4.1 (Condições aresta e ângulo) *Se um polígono compacto $\mathcal{P}$ é a região fundamental para um grupo Γ de isometrias que preservam orientação do plano hiperbólico, então:*

- (i) *Para cada aresta s de $\mathcal{P}$ existe uma única aresta s' de $\mathcal{P}$ tal que $s' = \gamma(s)$, para $\gamma \in \Gamma$;*
- (ii) *Dada uma reflexão de $\mathcal{P}$, para cada conjunto de vértices identificados, a soma dos ângulos tem que ser igual a 2π .*

Teorema 4.11 (Poincaré, 1882) *Um polígono compacto $\mathcal{P}$ satisfazendo as condições aresta e ângulo é uma região fundamental para o grupo Γ gerado pelas reflexões de $\mathcal{P}$.*

Dado um polígono com $2p$ lados $\mathcal{P}$, tal que seus $2p$ lados estão emparelhados, podemos obter o grupo Γ de isometrias que preservam orientação da seguinte maneira: para cada lado e de $\mathcal{P}$, verifique se seu par e' possui mesma orientação ou orientação contrária; caso possua orientação contrária, aplique reflexão sobre a reta que passa pelo centróide de e' e a origem; então aplique rotação em $\mathcal{P}$ tal que e' tome o lugar de e ; por fim faça a reflexão hiperbólica de $\mathcal{P}$ sobre o lado e' .

4.2.5 Raio do $2p$ -polígono super-regular em $\mathbb{B}^2$ e $\mathbb{D}^2$

Ângulos entre duas semi-geodésicas são preservados e coincidem com arcos de circunferências Euclidianas nos modelos $\mathbb{B}^2$ e $\mathbb{U}^2$. Um p -polígono superregular em $\mathbb{B}^2$ é um polígono com p lados de mesmo comprimento hiperbólico cujos ângulos internos são todos iguais a $\frac{2\pi}{p}$. No modelo $\mathbb{B}^2$

esses polígonos são, na geometria Euclideana, arcos de circunferências todas de mesmo raio que cruzam a circunferência C_∞ (de raio 1) em ângulos de $\frac{\pi}{2}$.

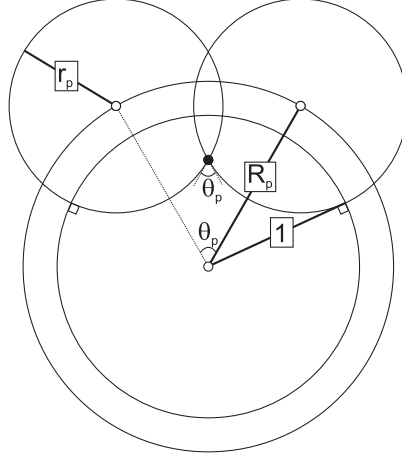


Figura 4.3: Definindo um p-polígono super-regular

Dada uma circunferência unitária com centro na origem $C_\infty = \partial(\mathbb{B}^2)$ e um inteiro $p > 4$, queremos encontrar dois raios $0 \leq r_p \leq 1$ e $R_p > 1$ satisfazendo as seguintes condições: tome p circunferências de raio r_p com centro em $R_p e^{\frac{2k\pi}{p}}$, $k = 0, 1, \dots, p-1$ que satisfaçam:

- (i) o ângulo θ_p de cruzamento de duas circunferências adjacentes é igual a $\frac{2\pi}{p}$;
- (ii) cada uma das p circunferências cruza C_∞ sob um ângulo de $\frac{\pi}{2}$.

Façamos a seguinte construção:

1. Considere o ponto O o centro de C_∞ e os pontos C_1, C_2 os centros de duas circunferências adjacentes de raio r_p que satisfazem as condições (i) e (ii) acima;

2. Seja A o ponto de interseção entre estas duas circunferências que é interior a C_∞ ;
3. Denote por E o ponto de interseção entre uma circunferência menor e C_∞ ;
4. Tomando a reta tangente à circunferência centrada em C_1 no ponto A , denote por B_1 sua interseção com o lado OC_1 e por D_1 a interseção com o lado C_1C_2 . Analogamente, a partir do ponto A da circunferência C_2 tome a reta tangente e denote B_2 sua interseção com o lado OC_2 e por D_2 com o lado C_1C_2 .

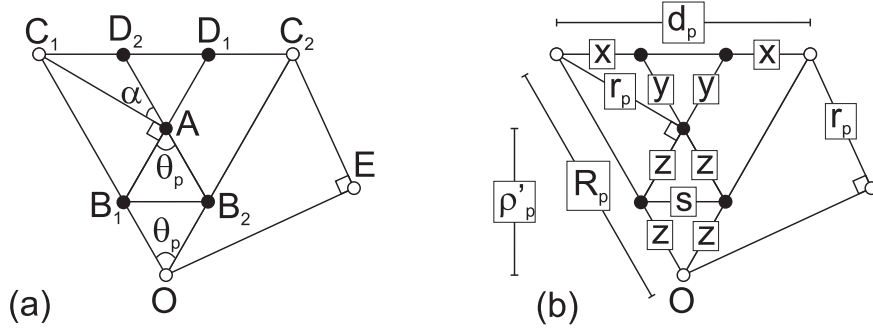


Figura 4.4: Obtenção da construção descrita:(a) pontos e ângulos; (b) distâncias.

A partir dessa construção, definimos as seguintes distâncias Euclidianas:

- $d_p = d(C_1, C_2)$;
- $s = d(B_1, B_2)$;
- $x = d(C_1, D_2) = d(C_2, D_1)$;

- $y = d(A, D_1) = d(A, D_2)$;
- $z = d(O, B_1) = d(O, B_2) = d(A, B_1) = d(A, B_2)$;
- $r_p = d(A, C_1)$ (raio das p circunferências menores);
- $R_p = d(O, C_1)$ (raio da circunferência maior);
- $\eta'_p = d(O, A)$ (raio do p -polígono superregular no modelo $\mathbb{B}^2$).

Corolário 4.12 *O valor de r_p é a única solução de*

$$2r_p^4 + r_p^2 - 2\sqrt{r_p^2 + 1}\sin\left(\frac{2\pi}{p}\right)r_p^3 - \sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right) = 0$$

no intervalo $(0, 1)$. De fato, quando p cresce r_p torna-se arbitrariamente próximo de $\frac{\pi}{p}$.

Demonstração: Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ΔC_1AD_2 , obtemos a relação:

$$x^2 = r_p^2 + y^2 - 2r_p y \cos(\alpha) \quad (4.2)$$

A partir do segmento de reta B_2D_2 , temos $\alpha + \frac{\pi}{2} + \theta_p = \pi$. Como $\theta_p = \frac{2\pi}{p}$, segue que

$$\alpha = \frac{2\pi}{p} - \frac{\pi}{2}. \quad (4.3)$$

Observe agora os triângulos retângulos ΔOEC_2 e ΔB_1AC_1 . Do primeiro, temos

$$R_p^2 = r_p^2 + 1. \quad (4.4)$$

Do segundo, $z = \frac{R_p^2 - r_p^2}{2R_p}$, que após substituição da equação anterior torna-se

$$z = \frac{1}{2R_p}. \quad (4.5)$$

Já pelo triângulo isósceles $\Delta B_1C_1D_1$, segue que $R_p - z = y + z$. Substituindo z e R_p obtidos anteriormente nesta equação obtemos

$$y = \frac{r_p^2}{\sqrt{1 + r_p^2}} \quad (4.6)$$

Aplicamos agora a lei dos cossenos ao triângulo ΔOC_1C_2 , a identidade trigonométrica $1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x)$ e substituindo R_p^2 encontramos

$$d_p^2 = 4(1 + r_p^2)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \quad (4.7)$$

Podemos então aplicar semelhança dos triângulos ΔAD_1D_2 e ΔOC_1C_2 para encontrar $\frac{d_p - 2x}{y} = \frac{d_p}{R_p}$. Substituindo y, z, R_p encontramos

$$x = \frac{d_p}{2(1 + r_p^2)} \quad (4.8)$$

Substituindo x, y, α na equação (4.2) obtemos

$$\frac{d_p^2}{4(1 + r_p^2)^2} = r_p^2 + \frac{r_p^4}{1 + r_p^2} - \frac{2r_p^3}{\sqrt{1 + r_p^2}} \cos\left(\frac{2\pi}{p} - \frac{\pi}{2}\right)$$

que, após substituição de d_p^2 e lembrando que $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$, segue que

$$2r_p^4 + r_p^2 - 2\sqrt{r_p^2 + 1}\sin\left(\frac{2\pi}{p}\right)r_p^3 - \sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right) = 0 \quad (4.9)$$

□

Corolário 4.13 *O valor do raio Euclideano de um p -polígono super-regular no modelo $\mathbb{B}^2$, em termos de p , é:*

$$\eta'_p = \frac{\cos(\frac{\pi}{p})}{R_p}$$

Demonstração: O raio Euclideano η'_p é igual ao dobro da altura do triângulo isósceles ΔOB_1B_2 . Como tal altura é igual a $\sqrt{z^2 - \frac{s^2}{2}}$, segue que η'_p é dado por

$$\eta'_p = \sqrt{4z^2 - s^2} \quad (4.10)$$

Queremos determinar η' em termos de p . Pelo triângulo isósceles ΔOB_1B_2 , podemos aplicar a lei dos cossenos e lembrar que $\theta_p = \frac{2\pi}{p}$ para encontrarmos $s^2 = 2z^2\sqrt{1 - \cos(\frac{2\pi}{p})}$. Usando a identidade trigonométrica $1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x)$ segue que

$$s^2 = 4z^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \quad (4.11)$$

Substituindo (4.11) em (4.10), aplicando a identidade trigonométrica $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, ao resultado substituindo (4.5) e lembrando que $p > 4$, logo $\left|\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\right| = \cos\left(\frac{\pi}{p}\right)$, obtemos

$$\eta'_p = \frac{\cos(\frac{\pi}{p})}{R_p} \quad (4.12)$$

□

Encontrado o número η'_p que define o raio Euclideano para o p -polígono superregular no modelo $\mathbb{B}^2$, podemos determinar o número análogo η_p relativo ao modelo $\mathbb{D}^2$. Para isso é suficiente calcular $\beta_B D(\eta'_p + 0i) = \eta_p + 0i$. Isso prova o seguinte resultado que será bastante útil:

Lema 4.14 *O valor do raio Euclideano de um p -polígono super-regular no modelo $\mathbb{D}^2$ é*

$$\eta = \frac{2R_p \cos(\frac{\pi}{p})}{R_p^2 + \cos^2(\frac{\pi}{p})}$$

Demonstração: Basta calcular

$$\beta_{BD}(\eta'_p + 0i) = \eta_p + 0i,$$

onde

$$\eta'_p = \frac{\cos(\frac{\pi}{p})}{R_p},$$

como no corolário (4.13). □

Devido à linearidade Euclideana das geodésicas no modelo $\mathbb{D}^2$, o valor do raio Euclideano do polígono super-regular com $2p$ lados é o único parâmetro que precisamos usar para iniciarmos a construção geométrica do domínio fundamental de um grafo.

4.3 Teorema de Geometrização

Definição 4.2 *Seja S uma superfície fechada com característica de Euler χ_S . O gênero de S é definido como:*

$$g_S = \begin{cases} \frac{2-\chi_S}{2}, & , \text{ se } S \text{ é orientável} \\ 2 - \chi_S, & , \text{ se } S \text{ é não-orientável} \end{cases}$$

Teorema 4.15 (7) *Dado um grafo G com valência mínima três, existe um mergulho do mesmo numa superfície fechada S de gênero orientável maior ou igual a um (se S for orientável) ou gênero não-orientável maior ou igual a dois (se S for não-orientável). Satisfazendo:*

1. (G, S) tem uma única face, isto é o dual G^* de G em S tem um único vértice;
2. qualquer pré-imagem de qualquer aresta de G^* é um único segmento geodésico;
3. qualquer pré-imagem de qualquer aresta de G é a união de no máximo dois segmentos geodésicos.
4. existe um grafo infinito $\text{RecUniv}(G, G^*)$ tal que o par $(G \cup G^*, S)$ é o quociente de $(\mathbb{H}^2, \text{RecUniv}(G, G^*))$ por um grupo Γ de isometrias gerado por reflexões de $\mathbb{H}^2$, de forma que S se torna uma superfície hiperbólica $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$.

5. o domínio fundamental do mergulho periódico de $\text{RecUniv}(G \cup G^*)$ em $\mathbb{H}^2$ é obtido em tempo linear no número de arestas de G .

Demonstração: Com efeito, por 3.4 temos que $\chi_S = 2 - e_1^*$. Como G tem valência mínima três, segue que $e_1^* \geq 2$, logo $2 - \chi_S \geq 2$. Daí segue que o gênero não-orientável de S é maior ou igual a dois e o gênero orientável de S é maior ou igual a um. O item (i) foi demonstrado na proposição 3.2. Considere $\tau = (e_1, \dots, e_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$ o caminho facial único de (G, S) . Contrair as arestas em τ é o mesmo que remover a sequência das arestas duais $\tau^* = (e_1^*, \dots, e_i^*, e_{i+1}^*, \dots, e_n^*)$. Na apresentação combinatorial de G^* essas arestas são simplesmente apagadas. Como vimos também na proposição 3.4, em G^* existe um único caminho facial $(e_{f_1}^*, \dots, e_{f_{2p}}^*)$ formado por $2p$ arestas e esse caminho facial se torna a fronteira de $\mathcal{F}_{2p}$. O disco hiperbólico $\mathcal{F}_{2p}$ é o disco Euclidiano regular limitado pelo polígono super-regular com $2p$ lados. Recuperando as arestas removidas $(e_{r_s}^*, \dots, e_{r_1}^*)$ como em 3.5, essas cordas não se cruzam e nós temos um mapeamento de G^* em $\mathcal{F}_{2p}$ tal que cada uma de suas faces é um polígono Euclidiano convexo. Calcule o $\mathbb{D}^2$ -centróide c_v para cada face convexa F_v^* de G^* correspondente a um vértice v de G e mapeie v neste ponto. Seja $e^\times$ o ponto médio, na métrica $\mathbb{D}^2$, da aresta e^* de G^* . Para cada aresta e^* em F_v^* ligue v a $e^\times$. Isso conclui o mapeamento de $G \cup G^* \subset \mathcal{F}_{2p}$ tal que cada aresta de G^* é um único segmento geodésico e cada aresta de F é a união de no máximo dois segmentos geodésicos. Como o plano hiperbólico $\mathbb{D}^2$ é conexo, segue de 4.11 que $\mathbb{D}^2$ é o recobrimento universal da superfície $S = \mathbb{D}^2/\Gamma$. Portanto, o levantamento de $G \cup G^*$ a $\mathbb{D}^2$ por reflexões de $\mathcal{F}_{2p}$ é um grafo infinito. Além disso, a construção de $G \cup G^* \subset \mathcal{F}_{2p}$ é feita por um algoritmo linear sobre o número de arestas de G . $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph theory with applications*. New York: North-Holland, 1976.
- [2] LINS, S. *Graph of Maps*. 1980. Tese (Doutorado em Matemática) - University of Waterloo.
- [3] LINS, S. *Graph encoded maps*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 32: 171-181, 1982.
- [4] LINS, S. *Combinatorics of orientation reversing polygons*. Aequationes Mathematicae, 29:123-131, 1985.
- [5] RATCHIFFE, J.G. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Springer, Berlin, 2 edition, 2006.
- [6] STILLWELL, J. *Geometry of Surfaces*. Springer, Berlin, 1992.
- [7] Comunicação pessoal de S. Lins.