



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Doutorado em Matemática

A Álgebra de Gauss de uma Álgebra Monomial

Kalasar Vasconcelos de Araujo

Tese de Doutorado

Recife
Fevereiro, 2007

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Kalajas Vasconcelos de Araujo

A Álgebra de Gauss de uma Álgebra Monomial

*Trabalho apresentado ao Programa de Doutorado em
Matemática do Departamento de Matemática da Univer-
sidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para
obtenção do grau de Doutor em Matemática.*

Orientador: *Aron Simis*

Recife
Fevereiro, 2007

*Dedicado ao meu pai Edilberto de Araujo (in memorian),
minha magnífica mãe Enozelita Vasconcelos de Araujo e
meu querido filho Kalil Gomes de Araujo.*

Agradecimentos

Primeiramente à minha maravilhosa esposa Karina. Agradeço profundamente ao professor Aron Simis por iniciar-me nos rudimentos da álgebra comutativa e orientar-me com prestreza e competência indefiníveis. Aos entes da banca examinadora que se dispuseram para avaliar meu trabalho e cujas observações resultaram nesta versão final. Em especial, ao examinador Manoel Lemos que sempre se dispôs generosamente para discutir minhas idéias combinatórias (admiro sua mente extremamente aguçada). Ao prof. Villarreal pela generosa (e valiosa!) atenção com que discutiu meus manuscritos. Ao amigo Cleto por partilhar comigo tudo o que um doutorado pode proporcionar. Aos colegas do DMAT com os quais compartilhei muitas alegrias (em especial à Cláudio Cristino e César Castilho). Aproveito aqui, para deixar registrado minha admiração a este que foi meu exemplo de conduta e verdadeiro mestre: Israel Vaisencher. Finalmente, ao CNPq pelo suporte financeiro sem o qual não seria possível a execução deste trabalho.

Come as you are
—KURT COBAIN

Resumo

A álgebra de Gauss associada à k -subálgebra de um anel polinomial $k[t_0, \dots, t_d]$ gerado por um número finito de formas de mesmo grau corresponde ao anel de coordenadas homogêneo da imagem de Gauss de uma variedade projetiva uniracional sobre k . Focaremos o caso onde os geradores são monômios. Por caracterizar os menores da matriz jacobiana de um conjunto de monômios como certos *n-produtos* tornaremos mais concreta a natureza da álgebra de Gauss associada à subálgebra monomial correspondente. A versão reticulada destes *n-produtos* permite uma abordagem combinatória ao tema. Neste caminho, provaremos resultados já obtidos e estudaremos em detalhes a álgebra de Gauss associada ao conjunto dos monômios livre de quadrados de grau dois.

Palavras-chave: Álgebra monomial, Álgebra de Gauss, mapa de Gauss, matriz log, matriz jacobiana, monóide.

Abstract

The Gauss algebra associated to the k -subalgebra of a polynomial ring $k[t_0, \dots, t_d]$ generated by a finite set of forms of the same degree incorporates the homogeneous coordinate ring of the Gauss image of a unirational projective variety over k . In this work we look at the case where the generators are monomials. By reinterpreting the minors of the Jacobian matrix of a set of monomials as certain *n-products* we are able to deal more appropriately with the nature of the Gauss algebra associated to the corresponding monomial subalgebra. A suitable lattice version allows for a combinatorial approach of this algebra one. In this vein, we have shown earlier results and as a benchmark case we study the details of the Gauss algebra associated to the set of squarefree monomials of degree 2.

Keywords: Monomial algebra, Gauss algebra, Gauss map, log matrix, Jacobian matrix, monoid.

Sumário

1	Preliminares sobre álgebras de Gauss	5
1.1	A imagem de Gauss de uma imersão projetiva	5
1.2	A álgebra de Gauss de uma álgebra uniracional	5
2	A álgebra de Gauss de uma álgebra monomial	7
2.1	Introdução	7
2.2	Matriz Jacobiana versus matriz “Log” de expoentes de monômios	7
2.3	A álgebra de Gauss expressa por r -produtos	9
3	Álgebras de Gauss monomiais e subconjuntos reticulados de $\mathbb{R}^n$	11
3.1	Introdução	11
3.2	$(i_1, \dots, i_r)$ -produtos em termos de reticulados	11
3.3	Caso de uma álgebra de Veronese	12
4	Estudo de caso: a álgebra de Gauss de $k[V_{n,2}]$	15
4.1	Introdução	15
4.2	A excepcionalidade de $\mathbb{G}(k[V_{4,2}])$	16
4.3	Estudo de $\mathbb{G}(k[V_{n,2}]), n \geq 5$	18
4.3.1	Geradores I	18
4.3.2	Dimensão de mergulho	22
4.3.3	Geradores II. Álgebras onduladas	23
4.3.4	Normalidade	26
4.3.5	Birracionalidade	28
A	Álgebras Monomiais	31
B	Geometria Convexa	33
C	Polimatróides Discretas	35
C.1	Polimatróides	35
C.2	Polimatróides Discretas	36
C.3	O anel de Ehrhart de uma polimatróide discreta	37
D	Grafos simples e anéis de arestas	41

Introdução

Esta tese trata da versão algébrica da imagem de Gauss de certas variedades tóricas projetivamente imersas. Começaremos por resumir os antecedentes deste tratamento, que tiveram sua origem no trabalho de P. Brumatti *et. al.* [1]. Neste artigo, os autores focalizam uma subálgebra $k[\mathbf{g}] := k[g_0, \dots, g_n] \subset B = k[\mathbf{t}] = k[t_0, \dots, t_d]$, onde B é anel de polinômios sobre um corpo k de característica zero, $\mathbf{g}$ conjunto finito de polinômios que se anulam em $(0, \dots, 0)$ e o posto da matriz Jacobiana $\Theta(\mathbf{g})$ é $d + 1$ (máximo). O resultado preliminar básico desse trabalho pode ser resumido, a saber: o anel de coordenadas homogêneas da imagem de Gauss, mergulhada via imersão de Plücker, da imagem de uma aplicação racional definida por formas $g_0, \dots, g_n \in k[t_0, \dots, t_d]$ do mesmo grau, é k -isomorfo à álgebra gerada pelos menores máximos da matriz Jacobiana $\Theta(\mathbf{g})$.

Esta última álgebra, foi denotada por $\mathbb{G}(k[\mathbf{g}])$ e denominada a *álgebra de Gauss* associada à álgebra $k[\mathbf{g}]$. Anteriormente fôra provado que, no caso de $\mathbf{g}$ serem monômios, todo menor de $\Theta(\mathbf{g})$ é um monômio ([15]; ver [18, Section 3] para uma extensa generalização deste princípio). Deste modo, pode-se concluir [1, Lemma 3.1] que a imagem de Gauss de uma imersão projetiva tórica ainda é tórica. Ainda em [1, Proposition 3.2, Proposition 3.8, Theorem 3.9], os autores elaboram a teoria no caso das imersões de Veronese e das curvas projetivas monomiais.

O objetivo desta tese é retomar a consideração da imagem de Gauss de algumas subclasses dessas álgebras tóricas. Os principais resultados obtidos aqui são:

Lema 2.2.1 Dá uma informação mais precisa ao resultado [15, Lemma 1.1], mediante uma caracterização explícita de um conjunto de geradores da álgebra de Gauss no caso monomial.

Corolário 3.3.3 Dá uma caracterização de natureza topológico-combinatória da álgebra de Gauss de uma álgebra Veronesiana. Tal caracterização possibilitou uma nova prova do resultado em [1] de que a álgebra de Gauss de uma álgebra Veronesiana é uma álgebra Veronesiana.

Teorema 4.3.5 Caracteriza um conjunto de geradores da álgebra de Gauss de uma álgebra gerada pelos monômios livres de quadrados de grau 2, aqui denotada por $\mathbb{G}(k[V_{n,2}])$.

Teorema 4.3.8 Exibe uma fórmula para a dimensão de mergulho de $\mathbb{G}(k[V_{n,2}])$.

Teorema 4.3.4 Mostra que $\mathbb{G}(k[V_{n,2}])$ é normal para $n \geq 5$.

Teorema 4.3.21 Mostra a birracionalidade da aplicação de Gauss associada à variedade projetiva uniracional parametrizada pelos monômios livres de quadrados de grau dois.

A caracterização obtida no Lema 2.2.1 permite uma abordagem de natureza combinatória (geometria convexa) da álgebra de Gauss, através de técnicas bem estabelecidas na literatura. Nesta direção, daremos uma nova caracterização da álgebra de Gauss de uma álgebra Veronesiana. Mostraremos que os geradores naturais do semigrupo $\text{LI}\Sigma_n(\text{Log}(\mathcal{G}er(\mathcal{V}_{n,d})))$ constituem os pontos reticulados do interior relativo ao politopo $\text{conv}(\text{Log}(\mathcal{V}_{n,nd}))$ (Teorema 3.3.1).

A expectativa inicial de que também outras álgebras de tipo veronesiano satisfizessem a este princípio – e a subsequente constatação de que o princípio falha em geral – levou-nos a estabelecer a noção de *álgebra ondulada*. No caso de $A = k[\mathbf{g}]$, onde $\mathbf{g}$ designam monômios livres de quadrados de grau 2, este conceito veio a facilitar o resultado de que a álgebra de Gauss associada a A é polimatroidal. A noção de *polimatróide*, originalmente desenvolvida por Edmonds ([6]) foi revisitada por J. Herzog e T. Hibi de um ponto de vista algébrico ([9]). Um sub-produto deste resultado é a normalidade da álgebra de Gauss $\mathbb{G}(A)$ associada a $A = k[\mathbf{g}]$, onde $\mathbf{g}$ designam monômios livres de quadrados de grau 2. Um outro resultado é a fórmula para a dimensão de mergulho de $\mathbb{G}(A)$ (Teorema 4.3.8). Finalizamos com a birracionalidade da aplicação de Gauss neste caso.

Esta tese se compõe de quatro capítulos, que passamos a descrever em maior detalhe.

O Capítulo 1 é de caráter introdutório e serve para definir nosso objeto de estudo: a álgebra de Gauss de uma álgebra finitamente gerada sobre um corpo k de característica zero. As referências básicas para a abordagem algébrica da imagem de Gauss são [1] e [14].

No Capítulo 2, restringimos nosso estudo ao caso monomial. O resultado básico é a relação precisa entre um menor $r \times r$ da matriz jacobiana associada a um conjunto finito de monômios $\mathbf{g} := \{g_1, \dots, g_m\}$ e o respectivo menor da matriz $\text{Log}(\mathbf{g})$ dos expoentes associada (Lema 2.2.1). Nomeadamente, mostraremos que

$$[i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r](\Theta(\mathbf{g})) = [i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r](\text{Log}(\mathbf{g})) \cdot \frac{g_{i_1} \cdots g_{i_r}}{X_{j_1} \cdots X_{j_r}},$$

Esta relação motiva a noção de um $(i_1, \dots, i_r)$ -produto em um conjunto finito de monômios. Trabalharemos com esta noção quando $r = n$, aqui chamada simplesmente de n -produto. Em particular, damos neste capítulo alguns resultados gerais sobre n -produtos para o conjunto dos monômios livres de quadrados de grau d em n variáveis, $V_{d,n}$ (Veronese). Os principais resultados são o Lema 2.3.3 que nos permitirá usarmos a hipótese indutiva e a Proposição 2.3.4 que será usada em uma caracterização de $\mathbb{G}(k[V_{n,2}])$ obtida no Teorema 4.3.1.

A consequência fundamental do Lema 2.2.1 é a caracterização de um conjunto de geradores monomiais da álgebra de Gauss de uma álgebra monomial como o conjunto de certos n -produtos provenientes de um conjunto de monômios cujos vetores de expoentes correspondentes são linearmente independentes (esta é a motivação da definição do conjunto $\text{LI}\Sigma_n(S)$ associado a um conjunto de vetores reticulados S em $\mathbb{R}^n$).

No Capítulo 3, partimos do resultado que se P é um politopo reticulado de dimensão afim $n - 1$ e dimensão linear n então $\text{LI}\Sigma_n(P \cap \mathbb{Z}^n) \subset \text{relint}(nP) \cap \mathbb{Z}^n$. Aqui, a igualdade não vale em geral (ver Exemplo 3.3.6). O principal resultado deste capítulo é a igualdade entre tais conjuntos se P é o fecho convexo dos vetores reticulados associados ao conjunto de geradores naturais de uma álgebra de Veronese.

O último capítulo é um estudo particular da álgebra de Gauss da álgebra $k[V_{n,2}]$ gerada pelos

monômios em n variáveis livres de quadrados de grau 2. No primeiro caso relevante, $n = 4$, verificamos os seguintes fatos:

- $\mathbb{G}(k[V_{4,2}])$ é gerada pelos monômios de grau 4 cujo suporte tem exatamente três variáveis, resultando assim que $\text{edim } \mathbb{G}(k[V_{4,2}]) = 12$. Fazendo uso da teoria dos grafos concluímos que

$$\mathbb{G}(k[V_{4,2}]) = k \left[\frac{g_1 \dots g_4}{X_1 \dots X_4} \mid g_1 \dots g_4 \text{ é um 4-produto em } V_{4,2} \text{ distinto de } X_1^2 X_2^2 X_3^2 X_4^2 \right];$$

- O fecho normal $\overline{\mathbb{G}(k[V_{4,2}])}$ de $\mathbb{G}(k[V_{4,2}])$ é gerado, como k -álgebra, pelos monômios acima e o monômio $X_1 \dots X_4$;
- A aplicação de Gauss $\Gamma : \text{Proj}(k[V_{4,2}]) \dashrightarrow \text{Proj}(\mathbb{G}(k[V_{4,2}]))$ é birracional.

Na Seção 4.3.1 provaremos que a álgebra de Gauss $\mathbb{G}(k[V_{n,2}])$, com $n \geq 5$, é gerada pelos monômios de grau n cujo suporte tem ao menos 3 variáveis – isto revela-nos que o caso $n = 4$ é excepcional. Em linhas gerais, o argumento procede da seguinte maneira. Primeiramente, como consequência do Lema 2.2.1, temos a seguinte inclusão:

$$\mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{n,2}])) \subset k \left[\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{X}} \mid \mathbf{g} \text{ é um } n\text{-produto em } V_{n,2} \right],$$

onde $\mathcal{G}er$ denota um conjunto de monômios geradores. Designando por $\text{Mon}^s(r, d)$ o conjunto dos monômios $\mathbf{X}^v$ em r variáveis tais que $|v| = \sum v_i = d$ e $\#\text{supp}(v) \geq 3$, onde $\#$ denota a cardinalidade de um conjunto, mostraremos inicialmente as inclusões:

$$\text{Mon}^3(n, n) \subset \mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{n,2}])) \subset \left\{ \frac{g}{X_1 \dots X_n} \mid g \text{ é um } n\text{-produto em } V_{n,2} \right\}$$

(Proposições 4.3.2 e 4.3.3). O Lema 4.3.4 então conclui o argumento, mostrando a inclusão

$$\left\{ \frac{g}{X_1 \dots X_n} \mid g \text{ é } n\text{-produto} \right\} \subset \text{Mon}^3(n, n).$$

Como consequência da igualdade desses três conjuntos de monômios – coletadas, por comodidade no Teorema 4.3.5 – temos a seguinte caracterização:

$$\mathbb{G}(k[V_{n,2}]) \cong k[\mathbf{g} \mid \mathbf{g} \text{ é } n\text{-produto em } V_{n,2}] \subset k[V_{n,2}]$$

com esta inclusão definindo a aplicação de Gauss associada. A inclusão não trivial é

$$\mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{n,2}])) \supset k\left[\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{X}} \mid \mathbf{g} \text{ é um } n\text{-produto em } V_{n,2}\right].$$

Na Seção 4.3.2 exibimos uma expressão combinatória fechada para o número de elementos do conjunto $\text{Mon}^3(n, n)$, isto é, para a dimensão de mergulho da álgebra de Gauss de $k[V_{n,2}]$, com $n \geq 5$. (Teorema 4.3.8).

A seção seguinte acrescenta às já existentes mais uma caracterização de um conjunto de monômios geradores da álgebra de Gauss $\mathbb{G}(k[V_{n,2}])$, $n \geq 5$. Na linguagem reticulada, tal caracterização é obtida a partir da observação que este pode ser obtido do vetor $(1, \dots, 1)$. O processo para se obter tais geradores foi denominado *ondulação*. Nestes termos, $\mathbb{G}(k[V_{n,2}])$ é vista como a álgebra ondulada plana centrada em $(1, \dots, 1)$ com vetores de amplitudes máximas $\mathbf{A}^+ = (n-3, \dots, n-3)$ e $\mathbf{A}_- = (1, \dots, 1)$ cujas ondas têm comprimento negativo não excedendo $n-3$.

A Seção 4.3.4 mostra que $\mathbb{G}(k[V_{n,2}])$ é normal para $n \geq 5$. Para mostrarmos este fato recorreremos à teoria das polimatróides discretas. O elo entre estes objetos é dado através da intermediação da noção de álgebras onduladas desenvolvida na Subseção 4.3.3. Em grandes linhas, seja $\mathbb{G}(V_{2,n}) \hookrightarrow k[V_{2,n}]$ o k -homomorfismo (de k -álgebras) injetivo induzido pela multiplicação do monômio $X_1 \dots X_n$ – este homomorfismo induz a aplicação de Gauss da variedade tórica parametrizada pelos monômios livres de quadrados de grau 2 em n variáveis. Segue do Teorema 4.3.1 que a álgebra $\mathbb{G}(k[V_{2,n}])$ pode ser vista como a k -subálgebra de $k[V_{2,n}]$ gerada pelos monômios de grau $2n$ cujos suportes contêm todas as n variáveis, das quais no máximo $n-3$ variáveis comparecem com expoente 1. Esta é uma álgebra ondulada plana centrada em $2 \cdot \mathbf{1}_n = (2, \dots, 2)$ com amplitudes positivas máximas $\mathbf{A}^+ = (n-1, \dots, n-1)$ e amplitudes negativas máximas $\mathbf{A}_- = \mathbf{1}_n$ cujas ondas têm comprimento negativo $\leq n-3$. Logo, é o anel das bases de uma polimatróide discreta pela Proposição 4.3.19. Por um resultado de Herzog-Hibi é normal (em particular, é um anel de Cohen–Macaulay por [10, Theorem 1]).

Preliminares sobre álgebras de Gauss

1.1 A imagem de Gauss de uma imersão projetiva

Seja $X \subset \mathbb{P}_k^n$ uma variedade projetiva de dimensão d definida sobre um corpo k de característica zero. Denotando X_{sm} o conjunto dos pontos não-singulares de X e por $\mathbf{G}(d+1, n+1)$ a Grassmanniana dos $(d+1)$ -planos em k^{n+1} , o morfismo $\Gamma : X_{\text{sm}} \rightarrow \mathbf{G}(d+1, n+1)$ que associa ao ponto $x \in X_{\text{sm}}$ o espaço tangente projetivo $T_{x,X}$ de X em x é chamado a *aplicação de Gauss associada* ao mergulho $X \subset \mathbb{P}_k^n$. A variedade projetiva $\overline{\text{Im } \Gamma} = \overline{\Gamma(X_{\text{sm}})} \subset \mathbf{G}(d+1, n+1)$, denotada por $\Gamma(X)$, é chamada a *imagem de Gauss* de X .

Se definirmos a aplicação de Gauss como sendo a aplicação $\Gamma^\perp$ que a cada ponto $x \in X_{\text{sm}}$ associa o complemento ortogonal $T_{x,X}^\perp \subset \mathbf{G}(n-d, n+1)$ de $T_{x,X}$, todas as informações de $\Gamma(X)$ são preservadas nesta definição “dual” da imagem de Gauss via o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} X_{\text{sm}} & \xrightarrow{\Gamma} & \Gamma(X) \subset \mathbf{G}(d+1, n+1) & \xhookrightarrow{\iota_1} & \mathbb{P}_k^{N-1} = \mathbb{P}\left(\wedge^{d+1}(k^{n+1})\right) \\ \parallel & & \downarrow \perp & & \downarrow \sigma \\ X_{\text{sm}} & \xrightarrow{\Gamma^\perp} & \Gamma^\perp(X) \subset \mathbf{G}(n-d, n+1) & \xhookrightarrow{\iota_2} & \mathbb{P}_k^{N'-1} = \mathbb{P}\left(\wedge^{n-d}(k^{n+1})\right) \end{array}$$

onde ι_1 e ι_2 são as imersões de Plücker (ver Apêndice ??) e $\perp$ é a aplicação que a cada subespaço $W \subset k^{n+1}$ de dimensão $d+1$ associa seu complemento ortogonal $W^\perp$. A aplicação σ é o isomorfismo dado por $[\dots : Z_\alpha : \dots] \mapsto [\dots : Z_{\sigma(\alpha)} : \dots]$ onde $\sigma(\alpha)$ denota o complementar do conjunto $\alpha \subset \{1, \dots, n\}$ ordenado de maneira crescente. Adotaremos aqui, a definição “dual” da imagem de Gauss devido ao seu forte apelo algébrico e a denotaremos daqui por diante por $\Gamma(X)$.

1.2 A álgebra de Gauss de uma álgebra uniracional

A álgebra de Gauss pode ser definida de maneira inteiramente algébrica. Consideramos um anel polinomial $\mathbf{B} := k[\mathbf{t}] = k[t_0, \dots, t_d]$ sobre um corpo k de característica zero e um subconjunto $\mathbf{g} := \{g_0, \dots, g_n\} \subset (\mathbf{t})\mathbf{B}$ tal que a k -subálgebra $\mathbf{A} := k[\mathbf{g}] \subset \mathbf{B}$ tem dimensão $d+1$. Seja $\Delta = \Delta(\mathbf{g})$ o conjunto dos menores de ordem $(d+1) \times (d+1)$ da matrix jacobiana $\Theta = \Theta(\mathbf{g})$ de $\mathbf{g}$. Por um resultado conhecido, nem todos tais menores são nulos (ver, por exemplo, [16, Proposition 1.1]).

Definição 1.2.1. A *álgebra de Gauss associada a $\mathbf{g}$* é a k -subálgebra $\mathbb{G}(\mathbf{g}) := k[\Delta] \subset \mathbf{B}$.

Se $\mathbf{g}$ são homogêneos de mesmo grau, a álgebra $A = k[\mathbf{g}]$ é, a menos de normalização de grau, uma k -álgebra “standard”. Neste caso $\mathbb{G}(\mathbf{g})$ será simplesmente denominada a *álgebra de Gauss* de A e denotada por $\mathbb{G}(A)$. A justificativa para esta terminologia foi estabelecida em [1], a saber: seja $k[\mathbf{X}]/\mathbf{P} = k[X_0, \dots, X_n]/\mathbf{P} \cong k[\mathbf{g}]$ uma apresentação da álgebra “standard” A , com P ideal primo homogêneo de altura $n - d$. Sejam $\mathbf{F} = F_{d+1}, \dots, F_n \in \mathbf{P}$ formas tais que $\mathbf{P}_{\mathbf{P}} = (F_{d+1}, \dots, F_n)_{\mathbf{P}}$. Pelo resultado básico [1, Main lemma 2.3,(iii)], existe um isomorfismo de k -álgebras graduadas $k[\Delta(\mathbf{g})] \cong k[\Delta(\mathbf{F})(\mathbf{g})]$. Deste modo, a álgebra de Gauss de $A = k[\mathbf{g}]$, $\mathbb{G}(A)$, é isomorfa ao anel de coordenadas homogêneas da imagem de Gauss mergulhada via a imersão de Plücker, da variedade projetiva uniracional $X \subset \mathbb{P}^n$ parametrizada pelas formas $\mathbf{g}$ (Ver [1, Remark 2.5. (ii), (iii)] para maiores detalhes).

CAPÍTULO 2

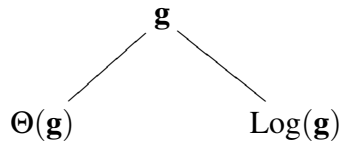
A álgebra de Gauss de uma álgebra monomial

2.1 Introdução

Neste capítulo, restringimos nosso estudo ao caso monomial. Como antes, supomos que o corpo k de base tem característica zero (ver [18] para uma maneira de contornar este problema quando $\text{car}(k) = p > 0$). O resultado básico é a relação precisa entre um menor $r \times r$ da matriz jacobiana associada a um conjunto finito de monômios $\mathbf{g} := \{g_1, \dots, g_m\}$ e o respectivo menor da matriz $\text{Log}(\mathbf{g})$ dos expoentes associada (Lema 2.2.1). Esta relação motiva a noção de um $(i_1, \dots, i_r)$ -produto em um conjunto finito de monômios. Trabalharemos com esta noção quando $r = n$, aqui chamada simplesmente de n -produto. Em particular, damos neste capítulo alguns resultados gerais sobre n -produtos para o conjunto dos monômios livres de quadrados de grau d em n variáveis, $V_{n,d}$ (“Veronese”). Os principais resultados são os Lemas 2.3.2 e 2.3.3, necessários na hipótese indutiva dos capítulos subsequentes.

2.2 Matriz Jacobiana versus matriz “Log” de expoentes de monômios

Seja $\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_m\} \subset k[X_1, \dots, X_n]$ um conjunto de monômios, com $g_i = \mathbf{X}^{\mathbf{a}_i}$, $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{Z}_+^n$. Podemos associar a $\mathbf{g}$ as duas matrizes seguintes



onde $\Theta(\mathbf{g})$ é a matriz jacobiana de $\mathbf{g}$ e $\text{Log}(\mathbf{g}) = (a_{ij})_{m \times n}$ é a matriz numérica cujas linhas são os vetores dos expoentes de cada monômio em $\mathbf{g}$ (cf. [23], onde se toma a transposta da matriz). Observemos que o elemento de $\Theta(\mathbf{g})$ na linha i e coluna j é o monômio

$$\frac{\partial g_i}{\partial X_j} = a_{ij} X_1^{a_{i1}} \dots X_j^{a_{ij}-1} \dots X_n^{a_{in}} = a_{ij} \frac{g_i}{X_j}.$$

Dados $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, m\}$ e $\{j_1, \dots, j_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ tais que $i_1 < \dots < i_r$ e $j_1 < \dots < j_r$ denotamos

$$[i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r](\Theta(\mathbf{g})) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i_1}}{\partial X_{j_1}} & \dots & \frac{\partial g_{i_1}}{\partial X_{j_r}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{i_r}}{\partial X_{j_1}} & \dots & \frac{\partial g_{i_r}}{\partial X_{j_r}} \end{pmatrix}$$

Pela multilinearidade do determinante segue que

$$\begin{aligned}
 X_{j_1} \cdots X_{j_r} \cdot [i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r](\Theta(\mathbf{g})) &= \det \begin{pmatrix} X_{j_1} \frac{\partial g_{i_1}}{\partial X_{j_1}} & \cdots & X_{j_r} \frac{\partial g_{i_1}}{\partial X_{j_r}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{j_1} \frac{\partial g_{i_r}}{\partial X_{j_1}} & \cdots & X_{j_r} \frac{\partial g_{i_r}}{\partial X_{j_r}} \end{pmatrix} \\
 &= \det(X_{j_t} \frac{\partial g_{i_s}}{\partial X_{j_t}})_{1 \leq s \leq r, 1 \leq t \leq r} \\
 &= \det(a_{i_s t} g_{i_s})_{1 \leq s \leq r, 1 \leq t \leq r}
 \end{aligned}$$

Pelo mesmo princípio, temos então

$$X_{j_1} \cdots X_{j_r} \cdot [i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r](\Theta(\mathbf{g})) = g_{i_1} \cdots g_{i_r} \cdot [i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r](\text{Log}(\mathbf{g}))$$

onde $[i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r](\text{Log}(\mathbf{g}))$ é o r -menor da matriz $\text{Log}(\mathbf{g})$ correspondente às linhas $i_1, \dots, i_r$ e colunas $j_1, \dots, j_r$. Se $X_{j_1} \cdots X_{j_r}$ não divide o monômio $g_{i_1} \cdots g_{i_r}$ então $X_{j_t} \notin \bigcup_{1 \leq s \leq r} \text{supp}(g_{i_s})$ para algum $1 \leq t \leq r$, logo, neste caso, $\frac{\partial g_{i_s}}{\partial X_{j_t}} = 0$, para todo $1 \leq t \leq r$, do que resulta

$$[i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r](\Theta(\mathbf{g})) = 0.$$

Assim, $[i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r](\Theta(\mathbf{g})) \neq 0$ implica que $X_{j_1} \cdots X_{j_r}$ divide $g_{i_1} \cdots g_{i_r}$. Deste modo, acabamos de provar o seguinte

Lema 2.2.1. *Todo r -menor $\Delta := [i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r](\Theta(\mathbf{g}))$ da matriz jacobiana associada a um conjunto finito $g_1, \dots, g_m$ de monômios em n -variáveis é da forma*

$$[i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r](\text{Log}(\mathbf{g})) \frac{g_{i_1} \cdots g_{i_r}}{X_{j_1} \cdots X_{j_r}},$$

onde $[i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r](\text{Log})$ é o menor da matriz de expoentes com as mesmas linhas e colunas. Além disso, se $\Delta \neq 0$, tem-se $\{X_{j_1}, \dots, X_{j_r}\} \subset \bigcup_{1 \leq s \leq r} \text{supp}(g_{i_s})$; por outro lado, se $\Delta = 0$, com $\{X_{j_1}, \dots, X_{j_r}\} \subset \bigcup_{1 \leq s \leq r} \text{supp}(g_{i_s})$, então $[i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r](\text{Log}(\mathbf{g})) = 0$. Em particular, se

$\text{char}(k) = 0$, as duas matrizes têm o mesmo número de menores nulos ou não-nulos de um dada ordem e , portanto, $\text{rank}(\Theta(\mathbf{g})) = \text{rank}(\text{Log}(\mathbf{g}))$. $\square$

O fato que qualquer menor da matriz jacobiana de um conjunto finito de monômios ainda é um monômio bem como a igualdade (em característica zero) entre os postos desta matriz e a matriz Log foram provados em [15, Lemma 1.2 e Proposition 1.2]. A identificação entre o número de menores nulos e não-nulos das duas matrizes foi verificada em [18]. A prova dada aqui fornece, adicionalmente, a relação explícita de um menor da matriz jacobiana com o respectivo menor da matriz Log , que será de utilidade na sequência.

2.3 A álgebra de Gauss expressa por r -produtos

O lema 2.2.1 motiva o desenvolvimento da técnica de produtos de monômios, uma noção que convém precisar.

Definição 2.3.1. Dados um conjunto de monômios $\mathbf{g}$ em $k[X_1, \dots, X_n]$ e índices $i_1 < \dots < i_r$, um $(i_1, \dots, i_r)$ -produto em $\mathbf{g}$ é um monômio g que pode ser escrito na forma $g = g_1 \cdots g_r$ para certos $g_1, \dots, g_r \in \mathbf{g}$, com $\text{supp}(g_1 \cdots g_r) \supset \{X_{i_1}, \dots, X_{i_r}\}$ e $g_i \neq g_j$, para todo $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq r$. Um $(1, \dots, r)$ -produto será chamado simplesmente um r -produto. Um $(i_1, \dots, i_r)$ -produto é dito ser *puro* se $\text{supp}(g_1 \cdots g_r) = \{X_{i_1}, \dots, X_{i_r}\}$.

Um monômio da forma $\mathbf{X}^v = X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}$, com $a_i \leq 1$, para todo $1 \leq i \leq n$ é dito ser *livre de quadrados*. Fixado um inteiro $d \geq 1$, a subálgebra $S_{n,d}$ gerada pelo conjunto $V_{n,d}$ dos monômios livres de quadrados de grau d em $k[\mathbf{X}] = k[X_1, \dots, X_n]$ será chamada a *álgebra livre de quadrados de grau d* (cf. [23, Chapter 7], onde esta álgebra é designada como o *subanel monomial dos d -produtos*). Alternativamente, se e_i é o i -ésimo vetor coordenado de $\mathbb{R}^n$, $S_{n,d}$ é a álgebra associada ao monóide gerado pelo conjunto de vetores reticulados

$$\{e_{i_1} + \dots + e_{i_d} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n\}.$$

Evidentemente, o conjunto dos geradores naturais de $S_{n,d}$ coincide com o conjunto dos $(i_1, \dots, i_d)$ -produtos puros em $\{X_1, \dots, X_n\}$.

Lema 2.3.2. Se $g = g_1 \cdots g_n$ é um n -produto, com $g_i \in V_{n,d}$, então existem $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n \in V_{n,d}$ tais que $g = \tilde{g}_1 \cdots \tilde{g}_n$ e $X_i \in \text{supp}(\tilde{g}_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Prova: Observemos que um n -produto em $k[X_1, \dots, X_n]$ é puro. Procederemos por indução simultânea em d, n . O resultado é trivial para $d = 1$ ou $n = 2$. Suponhamos $d > 1$ ou $n > 2$. Se alguma variável, digamos X_1 , tem expoente n no n -produto, então necessariamente devemos ter $X_1 \in \text{supp}(g_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Tem-se então $g_i = X_1 \tilde{g}_i$, $1 \leq i \leq n$, com $\tilde{g}_i$ um monômio livre de quadrados de grau $d - 1$ em $X_2, \dots, X_n$. Como alguma outra variável tem expoente 2 em g , podemos supor que X_2^2 divide g e $X_2 \in \text{supp}(g_1)$. Deste modo, $g_1 = X_2 X_1 \cdot \frac{\tilde{g}_1}{X_2}$, $g_2 = X_1 \tilde{g}_2$, ..., $g_n = X_1 \tilde{g}_n$ com $\tilde{g} = X_1 \frac{\tilde{g}_1}{X_2} \cdots \tilde{g}_n$ um n -produto de monômios em $V_{n,d-1}$. Pela hipótese indutiva podemos supor $X_2 \mid \tilde{g}_2, \dots, X_n \mid \tilde{g}_n$. Assim, $X_i \mid g_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Se alguma variável tem grau 1, digamos X_n , então, a menos de uma permutação, temos $g_n = X_n \tilde{g}_n$. Como $g_1 \cdots g_{n-1}$ é um $(n - 1)$ -produto de monômios $g_i \in V_{n-1,d}$, o resultado segue novamente por indução.

Resta considerar o caso em que $X_i^2 \mid g$, para todo $1 \leq i \leq n$. Digamos, $g = X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}$, com $r_i \geq 2, \forall i$. Podemos supor que $g_1 = X_1 \tilde{g}_1, \dots, g_{r_1} = X_1 \tilde{g}_{r_1}$ com $X_2 \in \text{supp}(\tilde{g}_1)$. Então $X_1 \notin \bigcup_{r_1+1 \leq i \leq n} \text{supp}(g_i)$. Sejam $X_{i_{r_1+1}}, \dots, X_{i_n}$ variáveis (não necessariamente distintas) tais que $X_{i_j} \in \text{supp}(g_j)$ para todo j , $r_1 + 1 \leq j \leq n$. Consideremos o monômio (de grau n) $m = X_1^{r_1-1} X_2 X_{i_{r_1+1}} \cdots X_{i_n}$. Então, o monômio $\frac{g}{m} = X_1 \frac{\tilde{g}_1}{X_2} \cdot \tilde{g}_2 \cdots \tilde{g}_{r_1} \tilde{g}_{r_1+1} \cdots \tilde{g}_n$, onde $\tilde{g}_j = \frac{g_j}{X_{i_j}}$ para todo j , $r_1 + 1 \leq j \leq n$, é um n -produto de grau $(d - 1)n$ com X_1 comparecendo com expoente 1. Pelo caso anterior, $X_1 \frac{\tilde{g}_1}{X_2} = X_1 g'_1$, $\tilde{g}_2 = X_2 g'_2$, ..., $\tilde{g}_{r_1} = X_{r_1} g'_{r_1}$, $\tilde{g}_{r_1+1} = X_{r_1+1} g'_{r_1+1}$, ...,

$\tilde{g}_n = X_n g'_n$. Assim, $g = m \cdot (X_1 g'_1)(X_2 g'_2) \cdots (X_n g'_n)$. Finalmente, distribuindo as variáveis que comparecem efetivamente em m entre os n monômios $X_i \cdot g'_i$, $1 \leq i \leq n$, de maneira que ainda resulte em monômios livres de quadrados, concluímos a demonstração do lema. $\square$

Lema 2.3.3. *Suponhamos $d = 2$. Dado $g = g_1 \cdots g_n$, com $g_i \in V_{n,2}$ e dadas variáveis $X_{j_1}, \dots, X_{j_k} \in \text{supp}(g)$, com expoentes $2 + r_1, \dots, 2 + r_k$, $r_i > 0$ para $1 \leq i \leq k$, então a matriz jacobiana associada aos monômios $g_1, \dots, g_n$ admite $r_1 + \dots + r_k$ colunas constando em cada uma destas exatamente uma entrada não-nula.*

Prova: Permutando os índices podemos supor

$$g_1 \cdots g_n = X_1^{2+r_1} \cdots X_k^{2+r_k} X_{k+1}^{r_{k+1}} \cdots X_n^{r_n} \quad \text{com} \quad r_j \geq 1, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Notemos que a uma variável em $\text{supp}(g)$, com expoente 1, corresponde em $\Theta(g_1, \dots, g_n)$ uma coluna com único elemento não nulo. Deste modo, basta mostrar que pelo menos $r_1 + \dots + r_k$ variáveis das $n - k$ variáveis $X_{k+1}, \dots, X_n$ têm expoente 1 em g . Primeiramente, temos $r_1 + \dots + r_k \leq n - k$. De fato, se $r_1 + \dots + r_k > n - k$ então

$$\begin{aligned} \lambda &= 2k + r_1 + \dots + r_k + r_{k+1} + \dots + r_n \\ &> 2k + n - k + r_{k+1} + \dots + r_n. \end{aligned}$$

Como $r_i \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, segue que $r_{k+1} + \dots + r_n \geq n - k$. Assim, $\lambda > 2k + n - k + n - k = 2n$, o que contradiz o fato de g ter grau $2n$. Para concluir, se apenas s variáveis, $s < r_1 + \dots + r_k$, dentre $X_{k+1}, \dots, X_n$ comparecessem com expoente 1, então as $n - k - s > 0$ variáveis figurariam com expoentes ≥ 2 , donde

$$\begin{aligned} r_{k+1} + \dots + r_n &\geq 2(n - k - s) + s \\ &\geq 2(n - k) - s \end{aligned}$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} 2k + r_1 + \dots + r_k + r_{k+1} + \dots + r_n &\geq 2k + r_1 + \dots + r_k + 2n - 2k - s \\ &> 2n \end{aligned}$$

uma vez que $r_1 + \dots + r_k > s$. Isto é uma contradição pela mesma razão descrita acima. $\square$

Proposição 2.3.4. *Todo n -produto $g = g_1 \cdots g_n$ de monômios $g_i \in V_{n,d}$, $d \leq n - 1$, tem pelo menos $d + 1$ variáveis distintas em seu suporte comparecendo com expoente ≥ 2 (equivalentemente, no máximo $n - d - 1$ variáveis comparecem com expoente 1).*

Prova: Seja $g = g_1 \cdots g_n$ um n -produto nos monômios livres de quadrado de grau d . Suponhamos por absurdo que

$$g = X_1 \cdots X_{n-d} \cdot X_{n-d+1}^{a_{n-d+1}} \cdots X_n^{a_n}, \quad a_k \geq 1, \quad n - d + 1 \leq k \leq n.$$

Pelo Lema 2.3.2, podemos supor $g_1 = X_1 \tilde{g}_1, \dots, g_{n-d} = X_{n-d} \tilde{g}_{n-d}$ com $\tilde{g}_i \in V_{n,d-1}$ não admitindo X_j , $1 \leq j \leq d - 1$, em seu suporte. Uma vez que as variáveis X_j , $1 \leq j \leq d - 1$, figuram efetivamente apenas nos $n - d$ primeiros monômios, os d monômios restantes $g_{n-d+1}, \dots, g_n \in V_{n,d}$ teriam suportes nas d variáveis restantes $X_{n-d+1}, \dots, X_n$. Então, necessariamente $g_{n-d+1} = \dots = g_n$ o que é uma contradição pois um n -produto é composto por fatores distintos. $\square$

Álgebras de Gauss monomiais e subconjuntos reticulados de $\mathbb{R}^n$

3.1 Introdução

Seja $A = k[\mathbf{g}] \subset k[X_1, \dots, X_n]$ uma álgebra monomial de dimensão n . Da relação fundamental $[i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r](\Theta(\mathbf{g})) = [i_1, \dots, i_r | j_1, \dots, j_r](\text{Log}(\mathbf{g})) \frac{g_{i_1} \dots g_{i_r}}{X_{j_1} \dots X_{j_r}}$, obtida no Lema 2.2.1, vemos que um conjunto de geradores da álgebra de Gauss $\mathbb{G}(A)$ é obtido pelos n -produtos divididos pelo monômio fixo $\mathbf{X} = X_1 \cdots X_n$. Mais ainda, tais n -produtos devem provir de monômios cujos vetores reticulados associados aos seus respectivos expoentes são linearmente independentes.

Seja $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(A))$ o conjunto de geradores da álgebra de Gauss de uma álgebra monomial $A = k[\mathbf{g}] \subset k[X_1, \dots, X_n]$ (de dimensão n) obtida como no parágrafo anterior. A multiplicação dos elementos de $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(A))$ pelo monômio $\mathbf{X}$ induz uma inclusão de álgebras $\mathbb{G}(A) \hookrightarrow A$. A imagem de tal inclusão é a k -subálgebra de A gerada pelos n -produtos de $\mathbf{g}$ cujos vetores reticulados dos fatores são linearmente independentes em $\mathbb{R}$. Durante todo este trabalho denotaremos esta inclusão com a notação $\mathbb{G}(A) \hookrightarrow A$.

Seja $\text{Mon}(A) \subset \text{Mon}(k[X_1, \dots, X_n])$ o semigrupo dos monômios de A . A restrição da aplicação

$$\text{Log} : \text{Mon}(k[X_1, \dots, X_n]) \longrightarrow \mathbb{Z}^n$$

a $\text{Mon}(A)$ é um isomorfismo de semigrupos sobre sua imagem S , gerada por $\text{Log}(\mathcal{G}er(A)) = \text{Log}(\mathbf{g})$. Além disso, da inclusão $\mathbb{G}(A) \hookrightarrow A$ segue a inclusão $\text{Log}(\text{Mon}(\mathbb{G}(A))) \hookrightarrow S$ de semigrupos. Neste sentido, $\text{Log}(\text{Mon}(\mathbb{G}(A)))$ é o subsemigrupo de $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ (mais precisamente de S) gerado pelo conjunto de vetores reticulados de suporte $\{1, \dots, n\}$ obtidos mediante somas de n vetores linearmente independentes de $\text{Log}(\mathbf{g})$.

Isto sugere uma versão “reticulada” da Definição 2.3.1. Mostraremos que a álgebra de Gauss de uma álgebra Veronesiana satisfaz uma igualdade peculiar em termos de reticulados e interiores relativos de politopos, que não se estende, em geral, a outras álgebras de Gauss.

3.2 $(i_1, \dots, i_r)$ -produtos em termos de reticulados

Lembremos que o suporte de um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto $\text{supp}(v) = \{i : v_i \neq 0\}$. Remetemos o leitor ao Apêndice B para a terminologia e resultados básicos de geometria convexa, baseados na referência [7].

A noção de $(i_1, \dots, i_r)$ -produtos puros (Definição 2.3.1) admite a seguinte versão na terminologia de reticulados em $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.2.1. Seja $K \subset \mathbb{Z}^n$ um conjunto de vetores reticulados em $\mathbb{R}^n$. Uma $(i_1, \dots, i_r)$ -soma em K é um vetor $w \in \mathbb{Z}^n$ que pode ser escrito na forma $w = v_1 + \dots + v_r$, para certos $v_1, \dots, v_r \in K$, com $\text{supp}(w) \supset \{i_1, \dots, i_r\}$ e $v_i \neq v_j$, para todo $1 \leq i, j \leq r$, $i \neq j$. Uma $(1, \dots, r)$ -soma é chamada simplesmente de r -soma. Uma $(i_1, \dots, i_r)$ -soma é dita pura se $\text{supp}(v_1 + \dots + v_r) = \{i_1, \dots, i_r\}$.

Introduzamos a seguinte notação:

$$\text{LI}\Sigma_r(K) = \{v_1 + \dots + v_r \mid v_1, \dots, v_r \in K \text{ são linearmente independentes sobre } \mathbb{R}\}.$$

Seja $A = k[\mathbf{g}] \subset k[X_1, \dots, X_n]$ uma k -álgebra de dimensão n gerada pelos monômios $\mathbf{g}$. Pelo Lema 2.2.1 e seu corolário, um conjunto de geradores da álgebra de Gauss $\mathbb{G}(A) \subset A$ é dado pelos monômios correspondentes aos vetores reticulados $\text{LI}\Sigma_n(\text{Log}(\mathbf{g}))$. Temos a inclusão $\text{LI}\Sigma_n(\text{Log}(\mathbf{g})) \subset n\text{conv}(\text{Log}(\mathbf{g})) = \text{conv}(n\text{Log}(\mathbf{g}))$, onde $n\text{conv}(\text{Log}(\mathbf{g}))$ é o múltiplo do politopo $\text{conv}(\text{Log}(\mathbf{g}))$ considerado como uma soma de Minkowski com n parcelas iguais.

Lema 3.2.2. Se $P \subset \mathbb{R}^n$ é um politopo reticulado tal que $\dim \text{aff } P = n - 1$ e $\text{lin } P = \mathbb{R}^n$ então

$$\text{LI}\Sigma_n(P \cap \mathbb{Z}^n) \subset \text{relint}(nP) \cap \mathbb{Z}^n.$$

Prova: Seja $x = v_1 + \dots + v_n \in \text{LI}\Sigma_n(P \cap \mathbb{Z}^n)$. Então, por definição, $\dim \text{lin}(v_1, \dots, v_n) = n$. Além disso,

$$\frac{x}{n} = \frac{v_1 + \dots + v_n}{n} \in P$$

donde $\frac{x}{n} \in \text{relint conv}(v_1, \dots, v_n) \subset P$ (o baricentro de um r -simplexo $v_1, \dots, v_{r+1}$ está no interior relativo de $\text{conv}(v_1, \dots, v_{r+1})$). Se $x \in \partial nP$ então $\frac{x}{n} \in \partial P$. Seja então $F_1 = H_1 \cap P$, onde $P = H_1^- \cap \dots \cap H_m^-$, uma faceta de P tal que $\frac{x}{n} \in F_1$. Por definição de face e ponto interior segue que $\text{conv}(v_1, \dots, v_n) \subset F_1$ donde $\mathbb{R}^n = \text{lin}(v_1, \dots, v_n) \subset \text{lin}(F_1)$ o que é uma contradição pois $\dim F_1 = n - 2$. $\square$

3.3 Caso de uma álgebra de Veronese

Seja $\mathcal{V}_{n,d} \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto de vetores reticulados correspondendo ao conjunto de geradores naturais da álgebra Veronesiana de grau d em $k[X_1, \dots, X_n]$. Deste modo,

$$\mathcal{V}_{n,d} = \{v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}_+^n : |v| = v_1 + \dots + v_n = d\}.$$

Consideremos o politopo $P_{n,d} = \text{conv}(\mathcal{V}_{n,d})$ cujos hiperplanos de suporte são os hiperplanos coordenados $H_i = H^+(e_i, 0)$ juntamente com o hiperplano $H = H^+(\mathbf{1}_n, d)$, onde $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)$. Para tal família de politopos vale a recíproca da proposição anterior.

Teorema 3.3.1. $\text{LI}\Sigma_n(P_{n,d} \cap \mathbb{Z}^n) = \text{relint}(nP_{n,d}) \cap \mathbb{Z}^n$

Prova: Basta mostrar a inclusão $\text{relint}(nP_{n,d}) \cap \mathbb{Z}^n \subset \text{LI}\Sigma_n(P_{n,d} \cap \mathbb{Z}^n)$. Seja

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{relint}(nP_{n,d}) \cap \mathbb{Z}^n$$

Então, $x_i > 0$ e $\sum x_i = nd$. Existem dois casos:

Caso 1: $x = (d, \dots, d)$. Pondo $v_i = de_i$, temos que $v_1, \dots, v_n$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ e $\sum v_i = x$ com $\text{supp}(x) = \{1, \dots, n\}$. Logo, $x \in \text{LI}\Sigma_n(P_{n,d} \cap \mathbb{Z}^n)$.

Caso 2: $x \neq (d, \dots, d)$. Neste caso, digamos, $x_1 < d$ e $x_2 > d > x_1$. Consideremos $v_1 = (x_1, d - x_1, 0, \dots, 0)$ e seja $x' = x - v_1$. O cone $\mathbb{R}_+^n \mathcal{V}_{n,d}$ admite $H^+(e_1, 0)$ como um de seus hiperplanos de suporte. Então,

$$x' \in \text{lin}(H^+(e_1, 0)) = \mathbb{R}^{n-1}$$

com $|x'| = (n-1)d$ e $x'_i > 0$ para todo i , $2 \leq i \leq n$. Deste modo,

$$x' \in \text{relint}((n-1)P_{n-1,d}) \subset \mathbb{R}_+^{n-1}.$$

Pela hipótese indutiva, existem $v_2, \dots, v_n$ na faceta $H(e_1, 0) \cap P_{n,d}$, linearmente independentes, tais que

$$v_2 + \dots + v_n = x' = x - v_1$$

Então, $x = v_1 + \dots + v_n$, onde $v_1, \dots, v_n$ são linearmente independentes uma vez que $v_1 \notin H(e_1, 0)$. $\square$

Observação 3.3.2. Em geral, o politopo associado a uma álgebra monomial $k[\mathbf{g}]$ é a envoltória convexa do conjunto de vetores reticulados $\text{Log}(\mathbf{g})$, i. é., o politopo reticulado $\text{conv}(\text{Log}(\mathbf{g}))$. Tal interface, assim originada, entre álgebra e geometria convexa combinatorial é bastante profícua e determina um interessante dicionário entre tais áreas (Ver [7] e [20] para uma introdução sobre estes tópicos).

Corolário 3.3.3. *Seja $k[\mathcal{V}_{n,d}]$ a álgebra Veronesiana de grau d em $k[X_1, \dots, X_n]$. Então, $\mathbb{G}(k[\mathcal{V}_{n,d}])$ é isomorfa à álgebra $k[\text{relint}(nP_{n,d}) \cap \mathbb{Z}^n]$.*

Prova: Tem-se $P_{n,d} \cap \mathbb{Z}^n = \mathcal{V}_{n,d}$. Assim,

$$\mathbb{G}(k[\mathcal{V}_{n,d}]) = k[\text{LI}\Sigma_n(\mathcal{V}_{n,d})] = k[\text{LI}\Sigma_n(P_{n,d} \cap \mathbb{Z}^n)] = k[\text{relint}(nP_{n,d}) \cap \mathbb{Z}^n]. \quad \square$$

Consideremos a aplicação injetiva

$$\Phi : P_{n,n(d-1)} \longrightarrow P_{n,nd} \quad , \quad \mathbf{v} \longmapsto \mathbf{v} + \mathbf{1}_n$$

Obviamente, $\text{Im } \Phi \subset \text{relint } P_{n,nd}$. Além disso, $\mathbf{v} \in \text{relint } P_{n,nd}$ implica $\mathbf{v} = (\mathbf{v} - \mathbf{1}_n) + \mathbf{1}_n \in \text{Im } \Phi$. Logo, $\text{Im } \Phi = \text{relint } P_{n,nd}$. Podemos concluir então que Φ é bijetiva sobre o conjunto $\text{relint } P_{n,nd}$. Em particular, lembrando que $P_{n,d} \cap \mathbb{Z}^n = \mathcal{V}_{n,d}$, obtemos a seguinte aplicação bijetiva

$$\Phi|_{\mathcal{V}_{n,n(d-1)}} : \mathcal{V}_{n,n(d-1)} \longrightarrow \text{relint}(P_{n,nd}) \cap \mathbb{Z}^n$$

Temos ainda que $P_{n,nd} = nP_{n,d}$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{n,n(d-1)} &= (\text{relint}(P_{n,nd}) \cap \mathbb{Z}^n) - \mathbf{1}_n \\ &= (\text{relint}(nP_{n,d}) \cap \mathbb{Z}^n) - \mathbf{1}_n \\ &= \text{LI}\Sigma_n(P_{n,d} \cap \mathbb{Z}^n) - \mathbf{1}_n \end{aligned}$$

Acabamos de provar a seguinte:

Proposição 3.3.4. *A álgebra de Gauss associada a uma álgebra Veronesiana é uma álgebra Veronesiana. Mais precisamente, $\mathbb{G}(k[\mathcal{V}_{n,d}]) = k[\mathcal{V}_{n,n(d-1)}]$.*

Observação 3.3.5. O resultado acima foi obtido originalmente em [1, Proposition 3.2] por métodos diferentes.

Exemplo 3.3.6. O Teorema 3.3.1 não vale para as álgebras livres de quadrados consideradas neste trabalho. Com efeito, seja

$$P = \text{conv}(V_{5,2})$$

o politopo reticulado associado ao conjunto de pontos

$$V_{5,2} = \{e_{i_1} + e_{i_2} : 1 \leq i_1 < i_2 \leq 5\}.$$

Evidentemente, $P \cap \mathbb{Z}^5 = V_{5,2}$ bem como $V(P) = V_{5,2}$. O cone $\mathbb{R}_+P$ tem as seguintes facetas:

$$\begin{array}{lll} -X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 & \geq & 0 \quad : \quad H^+((-1, 1, 1, 1, 1), 0) \\ X_1 - X_2 + X_3 + X_4 + X_5 & \geq & 0 \quad : \quad H^+((1, -1, 1, 1, 1), 0) \\ X_1 + X_2 - X_3 + X_4 + X_5 & \geq & 0 \quad : \quad H^+((1, 1, -1, 1, 1), 0) \\ X_1 + X_2 + X_3 - X_4 + X_5 & \geq & 0 \quad : \quad H^+((1, 1, 1, -1, 1), 0) \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - X_5 & \geq & 0 \quad : \quad H^+((1, 1, 1, 1, -1), 0) \end{array}$$

$$x_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

Como se pode verificar nas desigualdades acima o ponto reticulado $(4, 3, 1, 1, 1)$ está no interior relativo do politopo $5P$. Entretanto, usando a natureza dos monômios que constituem um conjunto de geradores $\mathbb{G}(k[V_{n,2}])$, obtida no Teorema 4.3.5, vemos tal ponto não corresponde sequer a um monômio de $\mathbb{G}(k[V_{5,2}])$. Em geral, para $n \geq 5$, $(n-1, 3, 1, 1, \dots, 1)$ está no interior relativo ao politopo $\text{conv}(V_{n,2})$, mas seu monômio correspondente não está na álgebra $\mathbb{G}(k[V_{n,2}])$.

Seria interessante caracterizar os polítopos reticulados nas condições do Lema 3.2.2 em que ocorre a igualdade $\text{LI}\Sigma_n(P \cap \mathbb{Z}^n) = \text{relint}(nP) \cap \mathbb{Z}^n$.

CAPÍTULO 4

Estudo de caso: a álgebra de Gauss de $k[V_{n,2}]$

4.1 Introdução

Recordemos que $k[V_{n,2}]$ denota a álgebra gerada pelos monômios livre de quadrados de grau dois em n variáveis. Esta álgebra pode ser vista como o anel de arestas do grafo completo $\mathcal{K}_n$ (ver Apêndice D para as noções da teoria dos grafos usadas aqui).

O caso em que $n = 4$ é tratado na seção 4.2, pela sua particularidade. O restante do capítulo é dedicado ao estudo da álgebra de Gauss das álgebras $k[V_{n,2}]$ para $n \geq 5$.

Na Subseção 4.3.1, focamos na natureza do conjunto de monômios $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{n,2}]))$, $n \geq 5$. Recordemos que este conjunto é o conjunto de geradores obtido no Lema 2.2.1. O resultado aqui é que para $n \geq 5$ vale a igualdade

$$\mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{n,2}])) = \left\{ \frac{g}{X_1 \dots X_n} \mid g \text{ é um } n\text{-produto em } V_{n,2} \right\} = \text{Mon}^3(n, n)$$

onde $\text{Mon}^3(n, n)$ designa o conjunto dos monômios de grau n em n variáveis com suporte contendo pelo menos três variáveis. Na Seção 4.3.2 deduzimos uma fórmula fornecendo o número de elementos do conjunto de geradores $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{n,2}]))$ acima. Trata-se de uma expressão combinatória fechada para a dimensão de mergulho de $\mathbb{G}(k[V_{n,2}])$ (ver Teorema 4.3.8).

Na Seção 4.3.3 é introduzida a noção de *álgebra ondulada*. Mostramos que a álgebra de Gauss $\mathbb{G}(k[V_{n,2}])$ é uma álgebra ondulada para $n \geq 5$. Na Seção 4.3.4, mostraremos que uma álgebra ondulada é polimatroidal (ver Apêndice C para o significado de polimatroidal). Como consequência, obtemos que o domínio $\mathbb{G}(k[V_{n,2}])$ é normal se $n \geq 5$.

Dada uma sequência $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq d$ e um inteiro positivo d tal que $|\mathbf{a}| = \sum a_i > d$, a álgebra

$$\mathbf{A}(\mathbf{a}, d) = k[\mathbf{X}^{\mathbf{t}} \mid |\mathbf{t}| = d \text{ e } t_i \leq a_i]$$

é chamada a *álgebra de tipo Veronese* de grau d associada à sequência $\mathbf{a}$. Estas álgebras foram extensivamente tratadas em [4] e [20]. O conjunto de vetores reticulados associados aos geradores naturais de $\mathbf{A}(\mathbf{a}, d)$ é o conjunto de tipo Veronese dado por

$$\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n; d) = \{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n : \alpha_i \leq a_i \text{ e } |\alpha| = d \}.$$

Tal conjunto satisfaz a propriedade forte da troca, portanto, é o conjunto das bases de uma polimatróide discreta. Deste modo, o anel de tipo Veronese é normal e, consequentemente, é um anel graduado de Cohen–Macaulay por [10, Theorem 1].

O caso em que $a_i = 1$, para todo $1 \leq i \leq n$, fornece a álgebra

$$\mathbf{A}(\mathbf{a}, d) = k[X_{i_1} \dots X_{i_d} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n]$$

que, recordemos, foi designada na Seção 2.3 como a álgebra livre de quadrados de grau d em n variáveis e denotada também por $S_{n,d}$.

4.2 A excepcionalidade de $\mathbb{G}(k[V_{4,2}])$

Consideremos a álgebra livre de quadrados de grau dois em 4 variáveis

$$S_{4,2} = k[V_{4,2}] = K[X_1X_2, X_1X_3, X_1X_4, X_2X_3, X_2X_4, X_3X_4].$$

Lebramos que $S_{4,2}$ é o anel de arestas associado ao grafo $\mathcal{K}_4$, aqui denotado para ser o grafo completo de 4 vértices. Nesta identificação, a matriz de incidência do grafo $\mathcal{K}_4$ coincide com a matriz $\text{Log}(\mathcal{G}er(S_{4,2}))$ de expoentes associada ao conjunto de monômios $\mathcal{G}er(S_{4,2})$. Assim, das conclusões obtidas na introdução ao Capítulo 3, o conjunto $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(S_{4,2}))$ é composto dos monômios cujos expoentes provêm da soma de 4 linhas linearmente independentes da matriz de incidência de $\mathcal{K}_4$. Ao todo, são $\binom{6}{4} = 15$ combinações possíveis de 4 linhas dentre as seis linhas de $\text{Log}(\mathcal{G}er(S_{4,2}))$. Dentre estas, são linearmente dependentes aquelas linhas cujas 4 arestas formam um ciclo. Em $\mathcal{K}_4$ temos somente 3 ciclos distintos com 4 arestas. Logo, a dimensão de mergulho da álgebra de Gauss $\mathbb{G}(S_{4,2})$ é $15 - 3 = 12$. Denotando os vértices de $\mathcal{K}_4$ por X_1, X_2, X_3, X_4 obtemos um conjunto explícito de geradores da álgebra $\mathbb{G}(S_{4,2})$:

$$\begin{aligned} \{X_1X_2, X_2X_3, X_3X_1, X_1X_4\} &\mapsto X_1^2X_2X_3 \\ \{X_2X_1, X_1X_3, X_3X_2, X_2X_4\} &\mapsto X_1X_2^2X_3 \\ \{X_3X_1, X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4\} &\mapsto X_1X_2X_3^2 \\ \{X_1X_2, X_2X_4, X_4X_1, X_1X_3\} &\mapsto X_1^2X_2X_4 \\ \{X_2X_1, X_1X_4, X_4X_2, X_2X_3\} &\mapsto X_1X_2^2X_4 \\ \{X_4X_1, X_1X_2, X_2X_4, X_4X_3\} &\mapsto X_1X_2X_4^2 \\ \{X_1X_3, X_3X_4, X_4X_1, X_1X_2\} &\mapsto X_1^2X_3X_4 \\ \{X_3X_1, X_1X_4, X_4X_3, X_3X_2\} &\mapsto X_1X_3^2X_4 \\ \{X_4X_1, X_1X_3, X_3X_4, X_4X_2\} &\mapsto X_1X_3X_4^2 \\ \{X_2X_3, X_3X_4, X_4X_2, X_2X_1\} &\mapsto X_2^2X_3X_4 \\ \{X_3X_2, X_2X_4, X_4X_3, X_3X_1\} &\mapsto X_2X_3^2X_4 \\ \{X_4X_2, X_2X_3, X_3X_4, X_4X_1\} &\mapsto X_2X_3X_4^2 \\ \{X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, X_4X_1\} &\mapsto 0 \\ \{X_1X_2, X_2X_4, X_4X_3, X_3X_1\} &\mapsto 0 \\ \{X_1X_3, X_3X_2, X_2X_4, X_4X_1\} &\mapsto 0 \end{aligned}$$

onde as sequências de arestas à esquerda representam caminhos de ordem par no grafo $\mathcal{K}_4$, ao passo que os caminhos dando origem a 0 são os três ciclos pares e correspondem ao 4-produto $X_1^2X_2^2X_3^2X_4^2$. Assim,

$$\mathbb{G}(S_{4,2}) = k \left[\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{X}} \mid \mathbf{g} \text{ é um 4-produto} \neq X_1^2X_2^2X_3^2X_4^2 \right].$$

Note-se também que $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(S_{4,2}))$ é o conjunto de monômios de grau 4 em 4 variáveis, com suporte tendo ao menos três variáveis, exceto $X_1X_2X_3X_4$. A caracterização de um conjunto de geradores da álgebra de Gauss em termos de monômios de certo grau tendo uma cota mínima de variáveis no suporte vale para o caso de álgebras livres de quadrados de grau dois em qualquer número de variáveis (ver Seção 4.3.1).

Proposição 4.2.1. *A aplicação de Gauss*

$$\Gamma : \text{Proj}(S_{4,2}) \dashrightarrow \text{Proj}(\mathbb{G}(S_{4,2}))$$

é birracional.

Prova: Seja $\mathbb{G}(S_{4,2}) \hookrightarrow S_{4,2}$ a inclusão de álgebras induzida pela multiplicação do monômio $\mathbf{X}$ pelos elementos de $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(S_{4,2}))$ e seja B a imagem de $\mathbb{G}(S_{4,2})$ nesta inclusão. Fixado um monômio $g_{ij} = X_iX_j \in S_{4,2}$, existe um 3-ciclo $C = \{g_1, g_2, g_3\}$ cujo conjunto de arestas, aqui denotado por $E(C)$, não contém a aresta $\{X_i, X_j\}$. Então, o 4-produto $g_{ij}g_1g_2g_3$ é um monômio pertencente a $\mathbb{G}(S_{4,2})$. Seja $g_{rs} = X_rX_s \neq X_iX_j$ um monômio arbitrário em $\mathbb{G}(S_{4,2})$. Com respeito à aresta $\{X_i, X_j\}$ temos somente duas possibilidades:

- a) A aresta $\{X_i, X_j\}$ é uma das diagonais de $\mathcal{K}_n$. Neste caso, se a aresta $\{X_r, X_s\}$ (aresta associada ao gerador g_{rs}) não pertence ao conjunto das arestas do ciclo C então a fração

$$\frac{g_{rs}}{g_{ij}} = \frac{g_{rs} \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot g_3}{g_{ij} \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot g_3}$$

pertence ao anel

$$K \left[\frac{g}{g_{ij} \cdot C} \mid g \in \mathcal{G}er(B), g \neq g_{ij}C \right]$$

onde a notação $g \cdot C$ denota o produto do monômio g com os monômios correspondentes às arestas que compõem o ciclo C . Por outro lado, se a aresta $\{X_r, X_s\}$ pertence ao conjunto $E(C)$ analisemos as condições da aresta $\{X_r, X_s\}$ coincidir ou não com a outra diagonal de $\mathcal{K}_4$. No caso afirmativo, seja $\{X_l, X_k\}$ qualquer uma das duas arestas fora do ciclo C e distinta de $\{X_i, X_j\}$. Seja C' o caminho de $\mathcal{K}_4$ obtido pela operação entre conjuntos $(E(C) \setminus \{X_r, X_s\}) \cup \{X_i, X_j\}$. Das igualdades

$$\begin{aligned} \frac{g_{rs}}{g_{ij}} &= \left(\frac{g_{lk}}{g_{rs}} \right)^{-1} \cdot \frac{g_{lk}}{g_{ij}} \\ &= \left(\frac{g_{lk} \cdot C'}{g_{rs} \cdot C'} \right)^{-1} \cdot \frac{g_{lk} \cdot C}{g_{ij} \cdot C}, \end{aligned}$$

segue que

$$\frac{g_{rs}}{g_{ij}} \in K \left[\frac{g}{g_{ij} \cdot C} \mid g \in \mathcal{G}er(B), g \neq g_{ij}C \right].$$

Se $\{X_r, X_s\}$ não é a outra diagonal, seja $\{X_l, X_k\}$ a aresta não tendo vértices em comum com a aresta $\{X_r, X_s\}$. Então, o caminho C' obtido pela mesma operação entre conjuntos

acima, $(E(C) \setminus g_{rs}) \cup g_{ij}$, é tal, que de acordo com as igualdades

$$\begin{aligned} \frac{g_{rs}}{g_{ij}} &= \left(\frac{g_{lk}}{g_{rs}} \right)^{-1} \cdot \frac{g_{lk}}{g_{ij}} \\ &= \left(\frac{g_{lk} \cdot C'}{g_{rs} C'} \right)^{-1} \cdot \frac{g_{lk} \cdot C}{g_{ij} \cdot C}, \end{aligned}$$

resulta

$$\frac{g_{rs}}{g_{ij}} \in K \left[\frac{g}{g_{ij} \cdot C} \mid g \in \mathcal{G}er(B), g \neq g_{ij}C \right].$$

- b) A aresta $\{X_i, X_j\}$ não é uma das diagonais de $\mathcal{K}_n$. Como no item a) devemos analisar a possibilidade da aresta $\{X_r, X_s\}$ coincidir ou não com uma das arestas do ciclo C . O caso em que $\{X_r, X_s\} \notin E(C)$ é tratado de maneira análoga ao do item a). No outro caso, podemos considerar uma aresta $\{X_l, X_k\}$ tal que o caminho de arestas $\{X_l, X_k\} \cup (C \setminus \{X_r, X_s\} \cup \{X_i, X_j\})$ não seja um 4-ciclo. Seja C' o caminho com conjunto de arestas $(E(C) \setminus \{X_r, X_s\} \cup \{X_i, X_j\})$. Então, segue das igualdades

$$\begin{aligned} \frac{g_{rs}}{g_{ij}} &= \left(\frac{g_{lk}}{g_{rs}} \right)^{-1} \cdot \frac{g_{lk}}{g_{ij}} \\ &= \left(\frac{g_{lk} \cdot C'}{g_{rs} C'} \right)^{-1} \cdot \frac{g_{lk} \cdot C}{g_{ij} \cdot C}, \end{aligned}$$

que

$$\frac{g_{rs}}{g_{ij}} \in K \left[\frac{g}{g_{ij} \cdot C} \mid g \in \mathcal{G}er(B), g \neq g_{ij}C \right].$$

Mostramos, assim, a inclusão de k -álgebras

$$K \left[\frac{g_{rs}}{g_{ij}} \mid \{X_r, X_s\} \neq \{X_i, X_j\} \right] \subset K \left[\frac{g}{g_{rs} \cdot C} \mid g \in \mathcal{G}er(B), g \neq g_{rs}CC \right].$$

Como a inclusão $\mathbb{G}(S_{4,2}) \hookrightarrow S_{4,2}$ define a aplicação de Gauss

$$\Gamma : \text{Proj}(S_{4,2}) \dashrightarrow \text{Proj}(\mathbb{G}(S_{4,2})),$$

segue a birracionalidade de Γ sobre a imagem de Gauss. $\square$

4.3 Estudo de $\mathbb{G}(k[V_{n,2}]), n \geq 5$

4.3.1 Geradores I

Denotemos por $\text{Mon}^s(r, d)$ o conjunto dos monômios em r variáveis de grau d com suporte contendo ao menos s variáveis. Na seção anterior vimos que $\mathbb{G}(k[V_{4,2}])$ é gerada por $\text{Mon}^3(4, 4) \setminus \{\mathbf{X}\}$. Nesta parte, mostraremos que, para $n \geq 5$, tem-se $\mathbb{G}(k[V_{n,2}]) = k[\text{Mon}^3(n, n)]$, o que põe em evidência a excepcionalidade do caso $n = 4$.

Lema 4.3.1. *Seja $g_{i_1} \dots g_{i_n}$ um n -produto com fatores no conjunto $\{g_i\}_{1 \leq i \leq m}$ dos monômios livres de quadrados de grau 2 a n -variáveis. Se alguma variável no suporte de $g_{i_1} \dots g_{i_n}$ comparece com grau ≥ 3 , então $\frac{g_{i_1} \dots g_{i_n}}{X_1 \dots X_n} \in \mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{n,2}]))$*

Prova: Aplicaremos indução em n . O caso $n = 4$ foi provado na seção anterior. Pelo Lema 2.3.3, a cada variável X_r do n -produto $g_{i_1} \dots g_{i_n}$ com expoente $2 + a_r$ correspondem a_r colunas na matriz Jacobiana cada uma das quais tem somente uma entrada não nula e esta é, necessariamente, X_r . Além disso, para cada uma dessas a_r colunas a outra variável X_s figurando na linha que contém X_r tem expoente 1 no n -produto. Suponhamos $g_{i_k} = X_r X_s$. Apliquemos a regra de Laplace ao longo de uma dessas colunas, onde o cofator A_{ks} de X_r (de ordem $(n-1) \times (n-1)$) é, a menos de sinal, a matriz Jacobiana da $(n-1)$ -upla $\{g_{i_1}, \dots, \widehat{g_{i_k}}, \dots, g_{i_n}\}$. Podemos supor que

$$g_{i_1} \dots g_{i_n} = X_1^{r_1} \dots X_{n-1}^{r_{n-1}} X_n, \quad r_1 \geq 3.$$

Ora, um dos r_j 's para $j \geq 2$ é ≥ 2 pois, caso contrário, $r_1 + n - 1 = 2n$, donde $r_1 = n + 1$. Mas, o expoente máximo de uma variável em um n -produto dos monômios livres de quadrados de grau 2 a n -variáveis é $n - 1$. Assim, podemos supor $r_2 \geq 2$ e aplicar o argumento acima para $g_{i_k} = g_{i_n} = X_2 X_n$. Deste modo,

$$\begin{aligned} \det(\Theta(g_{i_1}, \dots, g_{i_n})) &= (-1)^{2n} X_2 A_{nn} \\ &= X_2 \det(\Theta(g_{i_1}, \dots, g_{i_{n-1}})) \end{aligned}$$

Mas, $g_{i_1} \dots g_{i_{n-1}} = X_1^{r_1} X_2^{r_2-1} \dots X_{n-1}^{r_{n-1}}$ é um $(n-1)$ -produto com fatores no conjunto dos monômios livres de quadrados de grau 2 a $n-1$ variáveis com $r_1 \geq 3$. Pela hipótese indutiva,

$$\det(\Theta(g_{i_1}, \dots, g_{i_{n-1}})) = \frac{X_1^{r_1} X_2^{r_2-1} \dots X_{n-1}^{r_{n-1}}}{X_1 \dots X_{n-1}}$$

donde

$$\det(\Theta(g_{i_1}, \dots, g_{i_n})) = \frac{X_1^{r_1} X_2^{r_2} \dots X_{n-1}^{r_{n-1}}}{X_1 \dots X_{n-1}} \quad \square$$

Proposição 4.3.2. *Se $g = X_{i_1}^{r_1} \dots X_{i_k}^{r_k}$, $3 \leq k \leq n-1$ e $\sum_1^k r_i = n$, então $g \in \mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{n,2}]))$.*

Prova: O suporte do monômio $X_1 \dots X_n g$ contém pelo menos uma variável comparecendo com expoente ≥ 3 . Assim, pela proposição anterior basta mostrar que tal monômio é um n -produto.

Temos

$$\begin{aligned}
X_1 \dots X_n g &= X_{i_1}^{r_1+1} \dots X_{i_k}^{r_k+1} \cdot \overbrace{\prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}} X_j}^{n-k \text{ fatores}} \\
&= \underbrace{\left(X_{i_1}^{r_1-1} \dots X_{i_k}^{r_k-1} \cdot \prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}} X_j \right)}_{(n-k)\text{-produto}} \cdot X_{i_1}^2 \dots X_{i_k}^2 \\
&= \underbrace{\tilde{g}_1 \dots \tilde{g}_{n-k} X_{i_1} X_{i_2} \cdot \left(\prod_{r=1}^{r=k-2} X_{i_r} X_{i_{r+2}} \right)}_{k\text{-produto}} \cdot X_{i_{k-1}} X_{i_k} \\
&= \tilde{g}_1 \dots \tilde{g}_n
\end{aligned}$$

com $\tilde{g}_i$ um monômio livre de quadrados de grau dois a n -variáveis. $\square$

No que segue, não faremos distinção entre a aresta $\{X_i, X_j\}$ de $\mathcal{K}_n$ e o monômio $g_{ij} = X_i X_j$ de $V_{n,2}$. Além disso, se $D = \{g_{i_1, i_2}, \dots, g_{i_{r-1}, i_r}\}$ é um caminho em $\mathcal{K}_n$ denotaremos por $\Theta(D)$ a matriz Jacobiana dos monômios correspondentes às arestas de D em sua ordem dada.

Em resumo, temos:

1. $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{n,2}])) \subset \left\{ \frac{g}{X_1 \dots X_n} : g \text{ é } n\text{-produto} \right\}$ (Lema 2.2.1);
2. $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{n,2}])) \supset \text{Mon}^3(n, n) \setminus \{X_1 X_2 \dots X_n\}$ (Proposição 4.3.2);
3. $X_1 X_2 X_3 X_4 \notin \mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{4,2}]))$ (Seção 4.2).

Nosso objetivo é mostrar as igualdades

$$\mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{n,2}])) = \text{Mon}^3(n, n) = \left\{ \frac{g}{X_1 \dots X_n} \mid g \text{ é } n\text{-produto} \right\}$$

para $n \geq 5$.

Proposição 4.3.3. *Se $n \geq 5$ então $X_1 X_2 \dots X_n \in \mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{n,2}]))$.*

Prova: O argumento é de natureza combinatória.

Consideramos primeiro o caso de n ímpar. O n -produto $g = (X_1 X_2)(X_2 X_3) \dots (X_n X_1)$, induzido pelo ciclo $C = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, X_1\}$, fornece, segundo a convenção feita, a matriz Jacobiana $\Theta(C) = (a_{ij})$ cujas linhas $L_1, \dots, L_n$ se escrevem da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
L_1 &= (X_2, X_1, 0, \dots, 0) \\
L_n &= (X_n, 0, \dots, 0, X_1) \\
L_i &= (0, \dots, 0, \underbrace{X_{i+1}}_i, X_i, 0, \dots, 0), \quad 2 \leq i \leq n-1.
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o determinante como forma multilinear, tem-se

$$\Theta(C) = s(\sigma_1)a_{1\sigma_1(1)} \cdots a_{n\sigma_1(n)} + s(\sigma_2)a_{1\sigma_2(1)} \cdots a_{n\sigma_2(n)},$$

onde $s(\sigma)$ denota o sinal de uma permutação σ , σ_1 é a permutação identidade e σ_2 é o ciclo de ordem par $(123 \dots n)$.

Logo, $\Theta(C) \neq 0$ e, pelo Lema 2.2.1, segue que $\Theta(C) = 2X_1X_2 \dots X_n$.

Suponhamos agora n par e ponhamos $n = 2k$, $k \geq 3$. Consideremos o 3-ciclo $C_1 = (1, 2, 3)$ e o $(n-3)$ -ciclo $C_2 = (4, 5, \dots, n)$, que são disjuntos. Em correspondência a tais ciclos, temos, respectivamente, o 3-produto $(X_1X_2)(X_2X_3)(X_3X_1)$ e o $(4, 5, \dots, n)$ -produto $(X_4X_5)(X_5X_6) \cdots (X_nX_4)$ (ambos puros). Então, $g = C_1C_2$ é um n -produto cujo determinante $\Theta(C_1C_2)$, desenvolvido como no caso anterior, é $(\sum_{i=1}^4 s(\sigma_i))X_1 \dots X_n$ onde

$$\sigma_1 = I_n \text{ par}$$

$$\sigma_2 = (45 \dots n) \text{ (que é par, pois } n-3 \text{ é ímpar)}$$

$$\sigma_3 = (123) \text{ (par)}$$

$$\sigma_4 = (123)(45 \dots n) \text{ (par, pois são ciclos disjuntos)}$$

Logo, $\Theta(C_1C_2) = 4X_1X_2 \dots X_n$. $\square$

Deste modo, para $n \geq 5$, é válida a seguinte sequência de inclusões:

$$\text{Mon}^3(n, n) \subset \mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{n,2}])) \subset \left\{ \frac{g}{X_1 \cdots X_n} \mid g \text{ é } n\text{-produto} \right\}$$

Resta então mostrar que

$$\left\{ \frac{g}{X_1 \cdots X_n} \mid g \text{ é } n\text{-produto} \right\} \subset \text{Mon}^3(n, n).$$

Lema 4.3.4. *O suporte de um n -produto de monômios livres de quadrados de grau 2 contém pelo menos 3 variáveis distintas comparecendo com expoente pelo menos 2 (Isto é, no máximo $n-3$ variáveis comparecem com expoente 1).*

Prova: Aplicamos a Proposição 2.3.4 com $n = 2$. $\square$

Podemos agora enunciar o principal resultado deste capítulo:

Teorema 4.3.5. *Se $n \geq 5$ tem-se*

$$\mathbb{G}(k[V_{n,2}]) = k[\text{Mon}^3(n, n)] = k \left[\frac{g}{X_1 \cdots X_n} \mid g \text{ é } n\text{-produto} \right].$$

com tal conjunto de geradores mínimo. $\square$

Observação 4.3.6. A minimalidade do conjunto de geradores acima decorre do fato que tal conjunto é composto por monômios de mesmo grau.

Corolário 4.3.7. *A imagem da inclusão de álgebras $\mathbb{G}(k[V_{n,2}]) \hookrightarrow k[V_{n,2}]$ é gerada, como k -álgebra, pelos n -produtos de $V_{n,2}$. $\square$*

4.3.2 Dimensão de mergulho

Nas subseções anteriores vimos que

$$\text{edim } \mathbb{G}(S_{n,2}) = \begin{cases} \lambda - 1 & \text{se } n = 4 \\ \lambda & \text{se } n \geq 5 \end{cases},$$

onde λ denota a cardinalidade de $\text{Mon}^3(n, n)$.

Teorema 4.3.8. *Seja $\lambda = \#\text{Mon}^3(n, n)$. Então*

$$\lambda = \binom{2n-1}{n} - (n-1) \binom{n}{2} - n.$$

Prova: Basta lembrarmos que o número combinatório $\binom{n+d-1}{n}$ expressa a quantidade de monômios de grau n em d variáveis. Assim, na fórmula acima, a primeira parcela quantifica o número de monômios de grau n em n variáveis; a segunda, o número de monômios em n variáveis de grau n com suporte de cardinalidade exatamente 2 e, finalmente, a terceira corresponde aos n monômios $X_1^n, \dots, X_n^n$. $\square$

Observação 4.3.9. Seja r um inteiro positivo fixado representando o número de variáveis de um anel de polinômios. De acordo com a demonstração do teorema anterior, o número combinatório $\lambda_{2,d} = (d-1)$ expressa a quantidade de monômios em 2 variáveis de grau d com suporte de cardinalidade exatamente 2. Do mesmo modo,

$$\lambda_{3,d} = \binom{3+d-1}{d} - \left[3 + \lambda_{2,d} \binom{3}{2} \right]$$

quantifica o número de monômios de grau d em 3 variáveis com exatamente 3 variáveis no suporte. Indutivamente, podemos então concluir que a fórmula

$$\lambda_{r,d} = \binom{r+d-1}{d} - \left[r + \lambda_{2,d} \binom{r}{2} + \dots + \lambda_{r-1,d} \binom{r}{r-1} \right]$$

fornece o número de monômios de grau d em r variáveis com exatamente r variáveis no suporte. Assim, fazendo $d = n$, poderíamos definir o inteiro λ da seguinte maneira recursiva:

$$\lambda = \sum_{i=3}^{n-1} \lambda_{i,n} \binom{n}{i} + 1,$$

com

$$\lambda_2 = \binom{2+n-1}{n} - 2 = n-1$$

e

$$\lambda_r = \binom{r+n-1}{n} - \left\{ r + \sum_{s=2}^{r-1} \lambda_{s,n} \binom{r}{s} \right\} \quad (r > 2).$$

4.3.3 Geradores II. Álgebras onduladas

Nesta seção estaremos sempre supondo a álgebra de Gauss $\mathbb{G}(S_{n,2})$ imersa em $S_{n,2}$ mediante o monomorfismo de álgebras induzido pelo produto dos elementos de $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(S_{n,2}))$ por $X_1 \dots X_n$.

Com a identificação usual, o conjunto $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(S_{4,2}))$ coincide com o conjunto de vetores reticulados v da forma $v = (2, 2, 2, 2) + e_i - e_j$ com i e j distintos variando no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Isto poderia ser o indício de que, em geral, $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(S_{n,2}))$ satisfizesse a “propriedade da troca” que caracteriza um conjunto reticulado como o conjunto das bases de uma polimatróide discreta. Acontece que $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(S_{n,2}))$ não é polimatroidal (ver Exemplo 4.3.15), contudo, existe um princípio geral do qual gozam os geradores de $\mathbb{G}(S_{n,d})$ nesta nova maneira de abordá-los. Seja e_i o vetor reticulado de i -ésima coordenada 1 e demais coordenadas nulas. Se $v \in \text{Log}(\text{Mon}^3(n, n))$ então $v + \mathbf{1}_n$ tem a forma

$$2 \cdot \mathbf{1}_n + \sum_{i \in I} a_i e_i - \sum_{j \in J} a_j e_j$$

onde $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, $I \cap J = \emptyset$, $0 \leq a_i \leq n-3$ para todo $i \in I$, $0 \leq a_j \leq 1$ para todo $j \in J$, $\#J \leq n-3$ e $\sum a_i - \sum a_j = 0$. O objetivo desta seção é mostrar que o conjunto de todos os vetores obtido por meio destas “perturbações” no vetor $2\mathbf{1}_n$, satisfazendo tais condições, caracteriza o conjunto $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(S_{n,2}))$. Isto leva-nos à seguinte noção, que será de relevância a seguir:

Definição 4.3.10. Seja $v \in \mathbb{Z}^n$ um vetor reticulado e sejam dados dois vetores reticulados não-negativos $w^+, w_- \in \mathbb{Z}_+^n$ de suportes disjuntos. A *ondulação* em v de *onda* $\mathcal{W}_{w^+, w_-} = w^+ - w_-$ é o vetor reticulado

$$\mathcal{W}_{w^+, w_-}(v) = v + \mathcal{W}_{w^+, w_-}.$$

Os vetores w^+ e w_- são chamados, resp., os *vetores de amplitudes positivas e negativas* da ondulação. A ondulação é dita negativa, positiva ou plana conforme o módulo da onda $|\mathcal{W}_{w^+, w_-}|$ seja negativo, positivo ou nulo.

Observação 4.3.11. Seja $v \in \mathbb{Z}^n$. Podemos gerar ondulações a partir de um vetor fixado $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_+^n$ do seguinte modo: para cada dois subconjuntos disjuntos $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ com $I \cup J = \text{supp}(\mathbf{a})$ associamos a ondulação

$$\mathcal{W}_{I, J}(v) = v + \sum_{i \in I} (a_i) e_i + \sum_{j \in J} (-a_j) e_j$$

de onda $\mathcal{W}_{I, J} = \sum_{i \in I} (a_i) e_i + \sum_{j \in J} (-a_j) e_j$. O caso vazio associamos a ondulação nula.

O *comprimento positivo* e o *comprimento negativo* de um vetor $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ são, respectivamente, os inteiros não negativos

$$\ell^+(\mathbf{a}) = \#\{i : a_i > 0\}$$

$$\ell^-(\mathbf{a}) = \#\{i : a_i < 0\}$$

Em particular, podemos falar do comprimento positivo (resp. negativo) de uma onda $\mathcal{W}_{w^+, w_-}$: a saber, $\ell^+(\mathcal{W}_{w^+, w_-}) = \# \text{Supp}(w^+)$ (resp. $\ell^-(\mathcal{W}_{w^+, w_-}) = \# \text{Supp}(w_-)$).

Sejam $u, v \in \mathbb{Z}^n$. Denotaremos por $\mathcal{W}_{i,j}(u)$, $i \neq j$, a ondulação em u de onda $\mathcal{W}_{i,j} = -e_i + e_j$. De outro modo, verificando-se previamente as desigualdades $u_i > v_i$ e $u_j < v_j$ denotaremos por $\mathcal{W}_{i,j}(u, v)$ a ondulação em u dada por $u - e_i + e_j$. Assim, na ondulação $\mathcal{W}_{i,j}(u, v)$ sobre u estão implícitas as condições $u_i > v_i$ e $u_j < v_j$ envolvendo as i -ésimas e j -ésimas coordenadas de ambos os vetores u e v . Tais ondulações são denominadas *polimatroidais* em conformidade com a teoria de polimatróides discretas (ver Apêndice C).

Proposição 4.3.12. *Sejam $u, v \in \mathbb{Z}_+^n$ com $|u| = |v|$. As ondulações polimatroidais $\mathcal{W}_{ij}(u, v)$ satisfazem as seguintes propriedades:*

1. $\# \text{supp}(u) > \# \text{supp}(\mathcal{W}_{i,j}(u, v))$ se e somente se $u_i = 1$ e $u_j \geq 1$.
2. $\# \text{supp}(u) = \# \text{supp}(\mathcal{W}_{i,j}(u, v))$ se e somente se $u_i > 1$ e $u_j \geq 1$ ou $u_i = 1$ e $u_j = 0$.
3. $\# \text{supp}(u) < \# \text{supp}(\mathcal{W}_{i,j}(u, v))$ se e somente se $u_i > 1$ e $u_j = 0$.
4. Se $\text{supp}(u) \subset \text{supp}(v)$ então $\# \text{supp}(u) \leq \# \text{supp}(\mathcal{W}_{i,j}(u, v))$ qualquer que seja a ij -ondulação possível entre u e v .

Prova: A seguir (e somente durante esta demonstração) os símbolos $\wedge$, $\vee$ e $\sim$ serão usados de acordo com a simbologia usual da lógica simbólica. Por hipótese, as coordenadas de ambos vetores u e v são não-negativas. Pela definição, numa ondulação polimatroidal $\mathcal{W}_{i,j}(u, v)$ as condições $u_i > v_i$ e $u_j < v_j$ são verificadas. Assim, u_i necessariamente é positivo, isto é, $u_i \geq 1$. Além disso, desde que ondulações polimatroidais $\mathcal{W}_{i,j}(u, v)$ alteram somente a i -ésima e j -ésima coordenadas de u podemos nos fixar somente nestas duas coordenadas. Considere p, q, r, s as seguintes e respectivas proposições (lógicas): $u_i > 1$, $u_j \leq 1$, $u_i = 1$ e $u_j = 0$. Deste modo, o item 2 pode ser expressado do seguinte modo:

$$\# \text{supp}(u) = \# \text{supp}(\mathcal{W}_{i,j}(u, v)) \text{ se e somente se } (p \wedge q) \vee (r \wedge s).$$

Tal proposição é evidente de acordo com as definições de suporte e de ondulação polimatroidal. Temos então verdadeiro que

$$\# \text{supp}(u) \neq \# \text{supp}(\mathcal{W}_{i,j}(u, v)) \text{ se e somente se } \sim [(p \wedge q) \vee (r \wedge s)].$$

onde a proposição à direita é equivalente a

$$[(\sim p \wedge \sim r) \vee (\sim q \wedge \sim r)] \vee [(\sim p \wedge \sim s) \vee (\sim q \wedge \sim s)].$$

Como r equivale a $\sim p$ e s equivale a $\sim q$ a proposição acima reduz-se a

$$(\sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim s)$$

que significa, de acordo com as convenções acima: $(u_j = 0 \text{ e } u_i > 1)$ ou $(u_i = 1 \text{ e } u_j \geq 1)$. A condição $(u_j = 0 \text{ e } u_i > 1)$ equivale ao item 3 e a condição $(u_i = 1 \text{ e } u_j \geq 1)$ equivale ao item 1. O item 4 prova-se de acordo com a seguinte sequência lógica:

$$\begin{aligned} \# \text{supp}(u) > \# \text{supp}(\mathcal{W}_{i,j}(u, v)) &\xrightarrow{\text{item 1}} u_i = 1 (> v_i, \text{ definição de } \mathcal{W}_{i,j}(u, v)) \text{ e } u_j \geq 1 \\ &\implies v_i = 0 \text{ e } u_i = 1 > 0 \\ &\implies \text{supp}(u) \not\subset \text{supp}(v) \quad \square \end{aligned}$$

Dados dois conjuntos A e B denotamos para $A \sqcup B$ a união disjunta (isto é, a concatenação) de A e B . Dado $r \in \mathbb{Z}_+^n$, denotamos $[r]$ e $[[r]]$ para representar, resp., os conjuntos $\{1, \dots, r\}$ e $\{0, 1, \dots, r\}$. Seja $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ uma n -upla de inteiros não-negativos. Definimos os seguintes conjuntos:

$$\mathbf{A}_{[\mathbf{r}]} := [r_1] \times \dots \times [r_n]$$

$$\mathbf{A}_{[[\mathbf{r}]]} := [[r_1]] \times \dots \times [[r_n]]$$

Definimos ainda $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} = A_1 \times \dots \times A_n$ o produto cartesiano de n fatores envolvendo uma combinação qualquer entre os fatores de $\mathbf{A}_{[\mathbf{r}]}$ e $\mathbf{A}_{[[\mathbf{r}]]}$.

Sejam $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ e $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ duas n -uplas de inteiros não-negativos e sejam $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} = A_1 \times \dots \times A_n$ e $\mathbf{A}_{\mathbf{s}} = B_1 \times \dots \times B_n$ como acima. Denotemos $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} \vee \mathbf{A}_{\mathbf{s}}$ para ser o seguinte conjunto:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{r}} \vee \mathbf{A}_{\mathbf{s}} =: A_1 \sqcup B_1 \times \dots \times A_n \sqcup B_n.$$

Assim, dado $S \subseteq \mathbb{Z}^n$, podemos definir a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mathbf{A}_{\mathbf{r}}, \mathbf{A}_{\mathbf{s}}} : (\mathbf{A}_{\mathbf{r}} \vee \mathbf{A}_{\mathbf{s}}) \times S &\longrightarrow \mathbb{Z}^n \\ (\mathbf{a}, v) &\longmapsto (v_1 \pm a_1, \dots, v_n \pm a_n) \end{aligned}$$

onde $v_i \pm a_i = v_i + a_i$ se $a_i \in A_i$ ou $v_i \pm a_i = v_i - a_i$ se $a_i \in B_i$. A imagem de $\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{\mathbf{r}}, \mathbf{A}_{\mathbf{s}}}$ é o conjunto das ondulações em S de amplitudes positivas máximas $\mathbf{A}^+ = \mathbf{r}$ e amplitudes negativas máximas $\mathbf{A}^- = \mathbf{s}$.

Denotamos ainda por $\mathbb{F}_{\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{\mathbf{r}}, \mathbf{A}_{\mathbf{s}}}}(S)$ o subconjunto da imagem de $\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{\mathbf{r}}, \mathbf{A}_{\mathbf{s}}}$ constituído pelas ondulações planas. Se $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} = \mathbf{A}_{\mathbf{s}}$, escreveremos simplesmente $\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{\mathbf{r}}}$ em vez de $\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{\mathbf{r}}, \mathbf{A}_{\mathbf{s}}}$ e $\mathbb{F}_{\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{\mathbf{r}}}}$ em vez de $\mathbb{F}_{\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{\mathbf{r}}, \mathbf{A}_{\mathbf{s}}}}$.

Definição 4.3.13. Fixado um conjunto de amplitudes $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} \vee \mathbf{A}_{\mathbf{s}}$, a k -álgebra ondulada centrada em $v \in \mathbb{Z}^n$ é a subálgebra de Laurent

$$k[\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{\mathbf{r}}, \mathbf{A}_{\mathbf{s}}}(v)] =: k[\mathbf{X}^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{W}_{\mathbf{A}_{\mathbf{r}}, \mathbf{A}_{\mathbf{s}}}(v)].$$

Denominamos ainda a álgebra

$$k[\mathbb{F}_{\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{\mathbf{r}}, \mathbf{A}_{\mathbf{s}}}}(v)] = k[\mathbf{X}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \mathbb{F}_{\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{\mathbf{r}}, \mathbf{A}_{\mathbf{s}}}}(v)]$$

de álgebra ondulada plana centrada em v .

Observação 4.3.14. Seja $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} \vee \mathbf{A}_{\mathbf{s}}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{r}} = A_1 \times \dots \times A_n$ e $\mathbf{A}_{\mathbf{s}} = B_1 \times \dots \times B_n$, um conjunto de amplitudes. Se existir i , $1 \leq i \leq n$, tal que $A_i = [r_i]$ e $B_i = [s_i]$ então acrescentamos o atributo *perfurada* à álgebra ondulada pelo fato do monômio correspondente ao vetor v não pertencer à mesma.

Exemplo 4.3.15. Usando o homomorfismo injetivo de k -álgebras $\mathbb{G}(V_{4,2}) \hookrightarrow k[V_{4,2}]$ obtivemos anteriormente que

$$\begin{aligned} \text{Log}(\mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{4,2}]))) &= \{(3, 2, 2, 1), (3, 2, 1, 2), (3, 1, 2, 2), (2, 3, 2, 1), (2, 3, 1, 2), (1, 3, 2, 2) \\ &\quad (2, 2, 3, 1), (2, 1, 3, 2), (1, 2, 3, 2), (2, 2, 1, 3), (2, 1, 2, 3), (1, 2, 2, 3)\}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{G}(k[V_{4,2}])$ não é o anel de base de uma polimatróide discreta. De fato, $v = (3, 2, 2, 1)$ e $u = (1, 2, 2, 3)$ pertencem ambos ao conjunto de vetores reticulados $\text{Log}(\mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{4,2}])))$ com $v_1 = 3 > 2 = u_1$ e $u_4 > v_4$ (única desigualdade reversa restrita possível entre as coordenadas de u e v) e, no entanto,

$$v - e_1 + e_4 = (2, 2, 2, 2) \notin \text{Log}(\mathcal{G}er(\mathbb{G}(k[V_{4,2}]))).$$

Contudo, $\mathbb{G}(k[V_{4,2}])$ é uma álgebra ondulada plana perfurada centrada em $(2, 2, 2, 2)$ de amplitudes $\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_s = [1] \times [1] \times [1] \times [1]$ e ondulações de comprimento negativo igual a 1. Em símbolos, lembrando que $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}(V_{4,2}) &= k[\mathcal{W}_{I,J}(2, 2, 2, 2) : \mathcal{W}_{I,J} \in \mathbb{F}_{\mathcal{W}_{[1_4]}}(2, 2, 2, 2) \text{ com } \ell^-(\mathcal{W}_{I,J}) = 1] \\ &= k[\mathcal{W}_{i,j}(2, 2, 2, 2) : 1 \leq i, j \leq n]. \end{aligned}$$

Sejam $\mathbf{r} = (n-3, \dots, n-3)$ e $\mathbf{s} = (1, \dots, 1)$ dois conjuntos de amplitudes com n coordenadas, $n \geq 5$. Considere a álgebra ondulada plana $k[\mathcal{B}]$, centrada em $\mathbf{v} = (2, \dots, 2)$, onde

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{W}_{I,J}(2, \dots, 2) \in \mathbb{F}_{\mathbf{A}_{[[\mathbf{r}]]}, \mathbf{A}_{[[\mathbf{s}]]}}(2, \dots, 2) \mid \ell^-(\mathcal{W}_{I,J}) \leq n-3\}.$$

Teorema 4.3.16. A álgebra de Gauss de $S_{n,2}$, $n \geq 5$, imersa em $S_{n,2}$ mediante o homomorfismo injetor $\mathbb{G}(S_{n,2}) \hookrightarrow S_{n,2}$ se identifica com a álgebra ondulada plana $k[\mathcal{B}]$. Mais precisamente, $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(S_{n,2})) + \mathbf{1}_n = \mathcal{B}$.

Prova: Pelo Teorema 4.3.5 temos $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(S_{n,2})) = \text{Mon}^3(n, n)$. Seja $v \in \mathcal{B}$. Por definição, $v = (2, \dots, 2) + w$ com $|w| = 0$ e $\ell^-(w) \leq n-3$. Como o vetor de amplitudes negativas é $\mathbf{1}_n$ segue então que $v - \mathbf{1}_n \in \text{Mon}^3(n, n)$. Assim, $\mathcal{B} - \mathbf{1}_n \subset \text{Mon}^3(n, n)$. Por outro lado, $\text{Mon}^3(n, n) + \mathbf{1}_n \subset \mathcal{B}$. Logo, $\mathcal{B} - \mathbf{1}_n = \text{Mon}^3(n, n)$. Deste modo, através do homomorfismo injetor $\mathbb{G}(S_{n,2}) \hookrightarrow S_{n,2}$ concluímos que a álgebra de Gauss de $S_{n,2}$, para $n \geq 5$, se identifica com a álgebra ondulada plana $k[\mathcal{B}]$. $\square$

4.3.4 Normalidade

As duas primeiras caracterizações para $\mathcal{G}er(\mathbb{G}(S_{n,2}))$, $n \geq 5$, não evidenciam a normalidade das álgebras $\mathbb{G}(S_{n,2})$. Entretanto, usaremos a última, obtida na seção anterior, para este fim.

Seja $A = k[V_{4,2}] \subset k[X_1, X_2, X_3, X_4]$. Supondo $\mathbb{G}(A) \subset A$ temos

$$\mathcal{G}er(\mathbb{G}(A)) = k[\mathcal{W}_{i,j}(2, 2, 2, 2) : i, j \in [4]] = \text{LI}\Sigma_4(\text{Log}(\mathcal{G}er(A))).$$

Assim, $(2, 2, 2, 2) \notin \text{Log}(\mathcal{G}er(\mathbb{G}(A)))$. No entanto, se $v \in \text{Log}(\mathcal{G}er(\mathbb{G}(A)))$ então existem $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq j$, tal que $v = (2, 2, 2, 2) + e_i - e_j$. Reciprocamente, $(2, 2, 2, 2) + e_i - e_j \in \text{Log}(\mathcal{G}er(\mathbb{G}(A)))$ quaisquer que sejam $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq j$. Este processo é remanescente dos atributos de um conjunto de bases de uma polimatróide. Na verdade, o conjunto de vetores reticulados $\{\mathcal{W}_{i,j}(2, 2, 2, 2) : i, j \in [4]\}$ seria o conjunto das bases de uma polimatróide se $(2, 2, 2, 2) \in \{\mathcal{W}_{i,j}(2, 2, 2, 2) : i, j \in [4]\}$. Deste modo, a operação $\text{LI}\Sigma_n(S)$, com $S \subset \mathbb{Z}_+^n$, em geral não preserva o atributo de um conjunto de bases de uma polimatróide discreta.

Seja $B = k[\mathcal{G}er(\mathbb{G}(A))]$, $X_1 X_2 X_3 X_4$ a k -álgebra gerada pelos geradores de $\mathbb{G}(A)$ e o monômio $\mathbf{X} = X_1 X_2 X_3 X_4$. Mostremos que $\overline{\mathbb{G}(A)} = B$, onde $\overline{\mathbb{G}(A)}$ denota o fecho inteiro de $\mathbb{G}(A)$ em seu corpo de frações. Note que $\mathbf{X} = X_1 X_2 X_3 X_4$ está no corpo de frações de $\mathbb{G}(A)$ – por ex., $\mathbf{X} = (X_1^2 X_2 X_3 \cdot X_1 X_2 X_4^2) / X_1^2 X_2 X_4 - e$, por outro lado, é inteiro sobre $\mathbb{G}(A)$ – de fato, $\mathbf{X}^2 = X_1^2 X_2 X_3 \cdot X_2 X_3 X_4^2$. Assim, $\mathbb{G}(A) \subset B \subset \overline{\mathbb{G}(A)}$. Mas, B é inteiramente fechado desde que

$$\text{Log}(\mathcal{G}er(B)) = (\text{LI}\Sigma_4(\text{Log}(\mathcal{G}er(A)) \cup (2, 2, 2, 2))$$

é o conjunto das bases de uma polimatróide discreta. Logo, $\overline{\mathbb{G}(A)} \subset \overline{B} = B$ donde $\overline{\mathbb{G}(A)} = B$.

Veremos em seguida que a álgebra $\mathbb{G}(S_{n,2})$ é normal para $n \geq 5$. De fato, vamos mostrar que a álgebra de Gauss de uma álgebra livre de quadrado de grau 2 em n variáveis, $k[V_{n,2}]$, $n \geq 5$, é o anel das bases de uma polimatróide discreta. Segue então por um resultado de Herzog-Hibi que $\mathbb{G}(k[V_{n,2}])$ é normal (logo C-M por [10, Theorem 1]).

Lembramos que uma ondulação polimatroidal $\mathcal{W}_{i,j}(u, v)$ é uma ondulação da forma $\mathcal{W}_{i,j}(u)$ onde se verificou previamente as desigualdades $u_i > v_i$ e $u_j < v_j$.

Proposição 4.3.17. *Sejam $\mathbf{A}_{[[r]]} = [[r_1]] \times \dots \times [[r_n]]$ e $\mathbf{A}_{[[s]]} = [[s_1]] \times \dots \times [[s_n]]$ conjuntos de amplitudes e $v \in \mathbb{Z}^n$. Então, $\mathbb{F}_{\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{[[r]]}, \mathbf{A}_{[[s]]}}}(v)$ satisfaz a propriedade forte da troca.*

Prova: Basta mostrar que dados $u, w \in \mathbb{F}_{\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{[[r]]}, \mathbf{A}_{[[s]]}}}(v)$ tem-se $\mathcal{W}_{i,j}(u, w) \in \mathbb{F}_{\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{[[r]]}, \mathbf{A}_{[[s]]}}}(v)$ qualquer que seja a ondulação polimatroidal possível envolvendo u e w . Seja

$$\mathcal{W}_{I,J}(v) = v + \sum_{i \in I} a_i e_i u - \sum_{j \in J} a_j e_j$$

uma ondulação em $\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{[[r]]}, \mathbf{A}_{[[s]]}}(v)$. Por definição, $I \cup J = [n]$ (união disjunta), $0 \leq a_i \leq r_i$ e $0 \leq b_j \leq s_j$. Então, $\mathcal{W}_{i,j}(\mathcal{W}_{I,J}(v)) \notin \mathcal{W}_{\mathbf{A}_{[[r]]}, \mathbf{A}_{[[s]]}}(v)$ se e somente se $j \in I$ e $a_j = r_j$ ou $i \in J$ e $b_i = s_i$. Mas, estes são os únicos casos que não ocorrem quando $\mathcal{W}_{i,j}(\mathcal{W}_{I,J}(v))$ é polimatroidal. Assim, o conjunto $\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{[[r]]}, \mathbf{A}_{[[s]]}}(v)$ contém todas as possíveis ondulações polimatroidais envolvendo dois vetores arbitrários diferentes. Em particular, como $\mathbb{F}_{\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{[[r]]}, \mathbf{A}_{[[s]]}}}(v) \subset \mathcal{W}_{\mathbf{A}_{[[r]]}, \mathbf{A}_{[[s]]}}(v)$, temos que $\mathcal{W}_{i,j}(\mathcal{W}_{I,J}(v)) \in \mathcal{W}_{\mathbf{A}_{[[r]]}, \mathbf{A}_{[[s]]}}(v)$ qualquer que seja a ondulação polimatroidal $\mathcal{W}_{i,j}(\mathcal{W}_{I,J}(v))$ com $\mathcal{W}_{I,J}(v) \in \mathbb{F}_{\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{[[r]]}, \mathbf{A}_{[[s]]}}}(v)$. Como ondulações polimatroidais são planas e uma ondulação plana de uma ondulação plana ainda é plana temos $\mathcal{W}_{i,j}(\mathcal{W}_{I,J}(v)) \in \mathbb{F}_{\mathcal{W}_{\mathbf{A}_{[[r]]}, \mathbf{A}_{[[s]]}}}(v)$ qualquer que seja a ondulação polimatroidal possível envolvendo o vetor $\mathcal{W}_{I,J}(v)$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Corolário 4.3.18. *Álgebras onduladas centradas planas são normais.*

Prova: Conjuntos reticulados com vetores de mesmo módulo satisfazendo a propriedade forte da troca é o conjunto das bases de uma polimatróide discreta e o anel de base de uma polimatróide discreta é normal (ver Apêndice C). $\square$

Proposição 4.3.19. *Sejam $\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_s$ dois conjuntos de amplitudes com $s_i = 1$ para todo i , $1 \leq i \leq n$. Seja v um vetor reticulado em $\mathbb{R}^n$. Se k é um inteiro não negativo tal que $k \leq n$ então o conjunto de vetores reticulados $\mathcal{B}_k = \{\mathbb{F}_{\mathcal{W}_{\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_s}}(v) \mid \ell^-(\mathcal{W}_{\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_s}) \leq k\}$ satisfaz a propriedade da troca.*

Prova: Sejam $u_1 = v + w_1$ e $u_2 = v + w_2$ duas ondulações planas em v tais que $\ell^-(w_i) \leq k$. Note que

$$\ell^-(w) - 1 \leq \ell^-(w - e_i + e_j) \leq \ell^-(w) + 1$$

qualquer que seja a onda w com $\ell^-(w - e_i + e_j) = \ell^-(w) + 1$ se e somente se $w_i = 0$ e $w_j \neq -1$. Assim, podemos supor $\ell^-(w_1) = k$. Considere uma coordenada i tal que $v_i + w_{1i} > v_i + w_{2i}$. Se $w_{1i} \neq 0$ então

$$\ell^-(\mathcal{W}_{ij}(u_1, u_2)) = \ell^-(w_1 - e_i + e_j) \leq \ell^-(w_1) = k$$

e $u - e_i + e_j \in \mathcal{B}_k$ qualquer que seja a ondulação polimatroidal $\mathcal{W}_{ij}(u, v)$. Se $w_{1i} = 0$ então $w_{2i} < 0$. Como $\ell^-(w_2) \leq k = \ell^-(w_1)$ tem-se

$$\ell^-(w_{21}, \dots, \hat{w}_{2i}, \dots, w_{2n}) \leq k - 1 < k = \ell^-(w_{11}, \dots, w_{1i} = 0, \dots, w_{1n})$$

Existe então um j tal que $w_{2j} \geq 0$ e $w_{1j} = -1$. Assim, $w_{2j} > w_{1j} = -1$ donde $v_j + w_{2j} > v_j + w_{1j}$ com $\mathcal{W}_{ij}(u_1, u_2) \in \mathcal{B}_k$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Corolário 4.3.20. *Para $n \geq 5$ a álgebra $\mathbb{G}(k[V_{n,2}])$ é normal. Para todo $n \geq 5$, a álgebra $\mathbb{G}(k[V_{n,2}])$ é, portanto, Cohen–Macaulay.*

Prova: Pela proposição anterior, o conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{n-3}$ satisfaz a propriedade da troca, logo, é o conjunto das bases de uma polimatróide discreta e, consequentemente, normal (ver Apêndice C). $\square$

4.3.5 Birracionalidade

Recordemos o isomorfismo de álgebras obtido no Corolário 4.3.7 mediante a multiplicação pelo monômio $\mathbf{X}$. Tal inclusão é a inclusão de álgebras associada à aplicação de Gauss da variedade projetiva parametrizada pelos monômios livre de quadrado de grau 2 em n variáveis. Deste modo, se $B \subset S_{n,d}$ é a inclusão da álgebra de Gauss mencionada acima então a igualdade dos corpos de frações $k(B)$ e $k(S_{n,d})$ implica a birracionalidade da aplicação de Gauss. Lebramos ainda que a álgebra B imersa em $S_{n,d}$, $n \geq 5$, é gerada em grau $2n$ pelos n -produtos no conjunto $V_{n,2}$ de geradores de $S_{n,2}$.

Teorema 4.3.21. *A aplicação de Gauss $\Gamma : \text{Proj}(S_{n,2}) \dashrightarrow \text{Proj}(\mathbb{G}(S_{n,2}))$ é birracional para todo $n \geq 4$.*

Prova: O caso $n = 4$ foi verificado na seção 4.2. Assim, podemos supor $n \geq 5$. É suficiente mostrar que, para todos $i < j \in \{1, \dots, n\}$, a álgebra $k[\frac{X_r X_s}{X_i X_j} \mid 1 \leq r < s \leq n]$ está contida em algum transformado monoidal da álgebra $k[\mathbf{g} \mid \mathbf{g} \text{ é } n\text{-produto em } V_{n,2}]$. Fixado $X_i X_j$ consideremos um subgrafo H gerador de $\mathcal{K}_n$, com n arestas incluindo $\{X_i, X_j\}$. Então, o subgrafo $\tilde{H} = H \setminus \{X_i, X_j\}$, obtido pela remoção da aresta $\{X_i, X_j\}$, é ainda um subgrafo gerador de $\mathcal{K}_n$ com $n - 1$ arestas. Neste caso, afirmamos que

$$k\left[\frac{X_r X_s}{X_i X_j} \mid 1 \leq r < s \leq n\right] \subset k\left[\frac{\mathbf{g}}{X_i X_j \tilde{H}} \mid \mathbf{g} \text{ é } n\text{-produto em } V_{n,2}\right]$$

onde $\tilde{H}$ denota também o produto das arestas que compõem $\tilde{H}$. Ora, dado $X_r X_s \in S_{n,2}$, se $X_r X_s \notin E(\tilde{H})$ então $\frac{X_r X_s}{X_i X_j} = \frac{X_r X_s \cdot \tilde{H}}{X_i X_j \tilde{H}}$. Se $X_r X_s \in E(\tilde{H})$, consideramos uma aresta $\{X_l, X_m\} \notin E(H)$. Então,

$$\frac{X_r X_s}{X_i X_j} = \left(\frac{X_l X_m \cdot H'}{X_r X_s \cdot H'} \right)^{-1} \frac{X_l X_m \cdot \tilde{H}}{X_i X_j \cdot \tilde{H}}$$

onde H' é o produto das arestas de $E(H) \setminus \{X_r, X_s\}$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Álgebras Monomiais

Seja k um corpo de característica zero. Denotemos por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros e $\mathbb{Z}_+$ o conjunto dos inteiros não-negativos. Um *monômio de Laurent* nas variáveis $X_1, \dots, X_n$ é um produto $X_1^{a_1} \dots X_n^{a_n} = \mathbf{X}^{\mathbf{a}}$, onde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. O *suporte* de um monômio $X_1^{a_1} \dots X_n^{a_n} = \mathbf{X}^{\mathbf{a}}$ é o conjunto $\text{supp}(\mathbf{X}^{\mathbf{a}}) := \{X_i : a_i \neq 0\}$. O *anel (dos polinômios) de Laurent* é o anel $k[X_1, \dots, X_n, X_1^{-1}, \dots, X_n^{-1}] = k[\mathbf{X}, \mathbf{X}^{-1}]$ com a estrutura subjacente de k -módulo livre gerado pelos monômios de Laurent. Assim, um polinômio de Laurent f admite uma expressão única na forma $f = \sum_{\text{finita}} \lambda_{\mathbf{a}} \mathbf{X}^{\mathbf{a}}$. O *suporte* de f é o conjunto $\text{supp}(f) := \{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n : \lambda_{\mathbf{a}} \neq 0\}$. Um subanel $R \subset k[\mathbf{X}, \mathbf{X}^{-1}]$ é chamado uma *álgebra monomial* se for uma k -álgebra gerada por monômios de Laurent. Adicionamos o adjetivo “positiva” quando a k -álgebra monomial é gerada por monômios habituais com expoentes não negativos. Neste trabalho só intervêm álgebras monomiais positivas finitamente geradas.

Um semigrupo é um conjunto não-vazio S munido com uma operação $*$ associativa e tendo um elemento neutro, i.é., existe $e \in S$ tal que $e * x = x$ para todo $x \in S$.

Lembramos que um monóide é um semigrupo¹ comutativo em que vale a lei do cancelamento $s + x = t + x \Rightarrow s = t$, $\forall s, t, x \in S$. Um monóide S é dito ser finitamente gerado se existem $a_1, \dots, a_r \in S$, chamados geradores, tais que $S = \mathbb{Z}_+ a_1 + \dots + \mathbb{Z}_+ a_r$. Um conjunto de geradores é chamado minimal se nenhum de seus elementos é gerado pelos outros.

Denotemos por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é chamado reticulado se $v \in \mathbb{Z}^n$. Um conjunto $\sigma \in \mathbb{R}^n$ é dito ser um cone reticulado se existem vetores reticulados $v_1, \dots, v_r$ tais que $\sigma = \mathbb{R}_+ v_1 + \dots + \mathbb{R}_+ v_r$. O lema de Gordan garante que se σ é um cone reticulado em $\mathbb{R}^n$ então o monóide $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$ é finitamente gerado (ver [7], p. 154). Os monômios de Laurent formam um grupo multiplicativo e a aplicação $\phi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow k[\mathbf{X}, \mathbf{X}^{-1}]$ que ao vetor reticulado $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ associa o monômio $\mathbf{X}^{\mathbf{a}}$ é um isomorfismo de grupos. O homomorfismo inverso é denotado por Log . Tais considerações constituem os ingredientes para a construção de variedades tóricas. Para mais detalhes ver [7], [8] ou [3]. Sejam $\mathbf{X}^{\mathbf{a}}, \mathbf{X}^{\mathbf{b}}$ dois monômios de Laurent. Usaremos a notação $\frac{\mathbf{X}^{\mathbf{a}}}{\mathbf{X}^{\mathbf{b}}} := \mathbf{X}^{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{X}^{-\mathbf{b}} = \mathbf{X}^{\mathbf{a}-\mathbf{b}}$. Dizemos que $\mathbf{X}^{\mathbf{a}}$ divide $\mathbf{X}^{\mathbf{b}}$ se $\frac{\mathbf{X}^{\mathbf{a}}}{\mathbf{X}^{\mathbf{b}}} \in k[\mathbf{X}]$, i. é., $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathbb{Z}_+^n = (\mathbb{Z}_+)^n$.

¹Um semigrupo é um conjunto não-vazio S munido com uma operação $*$ associativa e tendo um elemento neutro, i.é., existe $e \in S$ tal que $e * x = x$ para todo $x \in S$.

Geometria Convexa

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito ser *convexo* se, para quaisquer $x, y \in X$, o segmento de reta

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

está contido em X . Sejam $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$. Uma combinação linear $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r$ tal que $\lambda_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq r$) e $\sum \lambda_i = 1$ é chamada uma *combinação convexa* de $x_1, \dots, x_r$. Se a condição de positividade dos coeficientes for relaxada a combinação é chamada *afim*. Neste caso, os pontos $\sum \lambda_i x_i, x_1, \dots, x_r$ são ditos afinamente dependentes. Se $x, x_1, \dots, x_r$ não são afinamente dependentes, dizemos que eles são afinamente independentes. Os coeficientes em uma combinação afim de pontos afinamente independentes são chamados de coordenadas baricêntricas. Dado um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ denotamos por $\text{conv}(M)$ para ser o conjunto de todas as combinações convexas de pontos em M e o denominamos de completamente convexo de M . Analogamente, $\text{aff}(M)$ denota o conjunto de todas as combinações afins de pontos em M e é chamado completamente afim de M . Tem-se $M \subset \text{conv}(M) \subset \text{aff}(M)$. Um politopo é o completamente convexo de um conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}^n$. Se $M = \{x_1, \dots, x_r\}$ é afinamente independente, o politopo $\text{conv}(M)$ é denominado um $(r - 1)$ -simplexo e $\dim \text{conv}(M) = \dim \text{aff}(M) = r - 1$. Se $M \subset \mathbb{R}^n$, existe um único subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^n$ tal que $\text{aff}(M) = x_0 + V$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$. A dimensão de $\text{aff}(M)$ é definida como a dimensão vetorial de V . Se C é um conjunto convexo então define-se $\dim C = \dim \text{aff}(C)$.

Um conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ é chamado cone se é não vazio e fechado com respeito a multiplicação por escalares positivos, isto é, se $x \in C$ então $\lambda x \in C$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+$. O cone gerado por um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é, por definição, o conjunto

$$\mathbb{R}_+^n C = \{\lambda v : \lambda \geq 0, v \in C\}$$

Dado um vetor não nulo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e um escalar $b \in \mathbb{R}$ define-se o hiperplano

$$H(\mathbf{a}, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \mathbf{a} \rangle = b\}$$

Os dois semi-planos fechados de $\mathbb{R}^n$ delimitados por $H(\mathbf{a}, b)$ são

$$H^+(\mathbf{a}, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \mathbf{a} \rangle \geq b\} \text{ e } H^-(\mathbf{a}, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \mathbf{a} \rangle \leq b\}$$

Um poliedro convexo ou conjunto poliedral é a interseção de um número finito de semi-planos fechados de $\mathbb{R}^n$. Politopos são também caracterizados como conjuntos poliedrais limitados, ver [7, Theorems 1.4, 1.5]. Um hiperplano H é chamado um hiperplano de suporte de um conjunto convexo fechado $K \subset \mathbb{R}^n$ se $K \cap H \neq \emptyset$ e $K \subset H^+$ ou $K \subset H^-$. Se H é um hiperplano de suporte de K , o conjunto $F = H \cap K$ é chamado de face. Por convenção $\emptyset$ e K são

chamados faces impróprias de K . As faces são ainda conjuntos convexos fechados. Uma face de dimensão k é chamada uma k -face de K . Um vértice é uma 0-face, uma aresta é uma 1-face e uma $(\dim K - 1)$ -face é chamada de faceta.

Recordemos ainda a noção de soma de Minkowski.

Dados dois conjuntos quaisquer $M, N \subset \mathbb{R}^n$ define-se a *soma de Minkowski* (ou simplesmente a soma) de M e N como sendo o conjunto

$$M + N = \{x + y : x \in M, y \in N\}$$

Analogamente pode-se definir os seguintes conjuntos:

$$\lambda M = \{\lambda x : x \in M\} \quad (\text{o múltiplo de } M \text{ pelo número real } \lambda)$$

$$\lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_r M_r = \left\{ \sum \lambda_i x_i : x_i \in M_i \right\} \quad (\text{uma combinação linear de } M_1, \dots, M_r)$$

Para $\lambda \in \mathbb{Z}_{>0}$ tem-se $\underbrace{K + \dots + K}_{\lambda \text{ vezes}} = \lambda K$.

Proposição B.0.22. a) Se K, L são ambos convexos, convexos fechados ou convexos compactos então $K + L$ é convexo, convexo fechado ou convexo compacto, respectivamente.

b) Se F é uma face de $K + L$ então existem faces F_K, F_L de K e L , respectivamente, tais que $F = F_K + F_L$. Em particular, cada vértice de $K + L$ é a soma de vértices de K, L , respectivamente.

c) Se K, L são polítopos então $K + L$ é um polítopo.

d) Se K, L são reticulados então $K + L$ é reticulado.

Prova: Ver [7, Theorem 1.5].

Encerramos este apêndice com a noção de interior de um polítopo.

Definição B.0.23. Seja $P \subset \mathbb{R}^n$ um poliedro. Então, $x \in P$ é chamado um ponto interior de P se x está no interior de P , considerado como um subconjunto do espaço topológico $L = \text{aff } P$. (Onde L é visto com a topologia induzida de $\mathbb{R}^n$.) O conjunto de pontos interiores é denotado por $\text{relint } P$. Por convenção se $P = \{x\}$ então $\text{relint } P = P$. A fronteira de um poliedro P denotada por ∂P , significa a fronteira de P considerado como um subconjunto de $L = \text{aff } P$. Assim, $\partial P = P \setminus \text{relint } P$, desde que P é um subconjunto fechado de L .

Polimatróides Discretas

C.1 Polimatróides

Lembremos o conceito de matróide. Seja $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ e $2^{[n]}$ o conjunto das partes de $[n]$. Uma matróide $\mathcal{M}$ em $[n]$ é uma coleção não vazia de elementos, denominados independentes, do conjunto $2^{[n]}$ satisfazendo aos seguintes axiomas:

M₁. Se $F_1 \in \mathcal{M}$ então $2^{F_1} \subset \mathcal{M}$.

M₂. Se $F_1, F_2 \in \mathcal{M}$ e $|F_1| < |F_2|$ então existe $x \in F_2 \setminus F_1$ tal que $F_1 \cup x \in \mathcal{M}$.

Os elementos independentes maximais com respeito à inclusão são chamados de bases. O conjunto das bases é denotado por $\mathcal{B}(\mathcal{M})$. Segue de M₂ que quaisquer duas bases de uma matróide $\mathcal{M}$ têm mesma cardinalidade. Denotamos a cardinalidade de um conjunto $I \subset [n]$ por $\#I$. O conjunto das bases de uma matróide $\mathcal{M}$ é caracterizado pela propriedade da troca. Mais precisamente, uma coleção $\mathcal{B} \subset 2^{[n]}$ é o conjunto das bases de uma matróide $\mathcal{M}$ se e somente se para quaisquer $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, tem-se $\#B_1 = \#B_2$ e se $x \in B_1 \setminus B_2$ então existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tal que $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathcal{B}$.

Sejam $e_1, \dots, e_n$ os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$. A todo subconjunto $F \subset [n]$ pode-se associar o vetor reticulado $\sum_{i \in F} e_i$. Isto permite dar uma representação matricial de qualquer matróide $\mathcal{M}$ no conjunto dos (0,1)-vetores. Vejamos o que ocorre com o conjunto dos vetores linha correspondentes ao conjunto das bases $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ da representação matricial de $\mathcal{M}$. Sejam v e u (0,1)-vetores representando as bases B_1 e B_2 respectivamente. Se $i \in B_1 \setminus B_2$ então $v_i = 1$ e $u_i = 0$. A troca $(B_1 \setminus i) \cup j$ com $j \in B_2 \setminus B_1$ significa fazer a operação $v - e_i + e_j$ e este vetor ainda representar uma base. Assim o conjunto B dos (0,1)-vetores representando o conjunto das bases de uma matróide deve satisfazer a seguinte propriedade de troca:

Se $v, u \in B$ então sempre que $v_i = 1$ e $u_i = 0$ existe j tal que $u_j = 1$ e $v_j = 0$ com $v - e_i + e_j \in B$.

A versão do parágrafo anterior para subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ é o que se chama de polimatróide.

Dados dois vetores $u, v \in \mathbb{R}_+^n$ escrevemos $u \leq v$ se $v - u \in \mathbb{R}_+^n$. Escrevemos ainda $u < v$ se $u \leq v$ e $u \neq v$. Dizemos que u é subvetor de v se $u \leq v$. O inteiro $|u| = \sum u_i$ associado a um vetor $u \in \mathbb{R}^n$ é chamado o módulo de u . Finalmente, denotamos

$$u \vee v = (\max\{u_1, v_1\}, \dots, \max\{u_n, v_n\})$$

$$u \wedge v = (\min\{u_1, v_1\}, \dots, \min\{u_n, v_n\})$$

Definição C.1.1. Um polimatróide no conjunto $[n]$ é um subconjunto compacto não vazio $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ chamado conjunto de independentes tal que

P1. todo subvetor de um vetor independente é independente;

P2. se $u, v \in \mathcal{P}$ com $|v| > |u|$, então existe um vetor $w \in \mathcal{P}$ tal que $u < w \leq u \vee v$.

O conjunto das bases de uma polimatróide $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$, denotado por $\mathcal{B}(\mathcal{P})$, é o conjunto constituído de todos os vetores em $\mathcal{P}$ maximais com respeito à relação de ordem $\leq$ dada acima. Deste modo, um vetor v está em $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ se e somente se $v \in \mathcal{P}$ e não existe $u \in \mathcal{P}$ com $u > v$. Usando P_2 pode-se mostrar que duas bases quaisquer em $\mathcal{P}$ têm mesmo módulo. Este inteiro comum ao conjunto das bases de uma polimatróide $\mathcal{P}$, denotado por $\text{rank } \mathcal{P}$, é chamado o posto de $\mathcal{P}$. Polimatróides são politopos tendo como uma de suas faces o conjunto das bases de hiperplano suporte

$$\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = \text{rank } \mathcal{P}\}$$

(ver [24, p. 340] ou [9, Proposição 1.2]). Um polimatróide é reticulado se é reticulado como um politopo, i.é, tem todos seus vértices vetores reticulados. Assim como para politopos pode-se definir a soma de polimatróides. Sejam $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ polimatróides em $[n]$. O polimatróide soma de $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$, denotado por $\mathcal{P}_1 \vee \dots \vee \mathcal{P}_k$, é o subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{P}_1 \vee \dots \vee \mathcal{P}_k = \left\{ \sum_{i=1}^n v_i : v_i \in \mathcal{P}_i \right\}$$

Seja $\mathcal{B}$ o conjunto das bases de um polimatróide reticulado em $[n]$. Para o leitor interessado, gostaríamos de saber quando $L\Sigma_n \mathcal{B}$ é o conjunto das bases de algum polimatróide em $[n]$.

C.2 Polimatróides Discretas

A versão reticulada de polimatróide é chamada polimatróide discreta.

Definição C.2.1. Seja P um conjunto finito não vazio de vetores reticulados em $\mathbb{R}^n$ que contém para cada $u \in P$ todos seus subvetores reticulados. O conjunto P é chamado um polimatróide discreto em $[n]$ se para quaisquer $u, v \in P$ com $|v| > |u|$, existe um vetor em P tal que

$$u < w \leq u \vee v.$$

Uma base de P é um vetor $u \in P$ tal que não existe $v \in P$ satisfazendo a desigualdade $u < v$, i.é, u não é subvetor de nenhum outro vetor de P exceto ele mesmo. Denotamos o conjunto das bases de P por $\mathcal{B}(P)$. Como em polimatróides quaisquer duas bases têm o mesmo módulo. Este inteiro positivo comum aos elementos de $\mathcal{B}(P)$ é chamado posto de P . O principal resultado usado aqui é o seguinte teorema que, assim como acontece para matróides, caracteriza polimatróides discretas através de seu conjunto de bases.

Teorema C.2.2. Seja P um conjunto finito não vazio de vetores reticulados em $\mathbb{R}^n$ com a propriedade de conter todos os subvetores reticulados de qualquer um de seus vetores. Seja $\mathcal{B}(P)$ o conjunto dos vetores de P maximais com respeito à ordem $\leq$. As seguintes condições são equivalentes:

a) P é uma polimatróide discreta.

b) se $u, v \in P$ com $|v| > |u|$, então existe um inteiro i tal que $u + e_i \in P$ e

$$u + e_i \leq u \vee v.$$

c) i) todo $u \in \mathcal{B}(P)$ tem o mesmo módulo.

ii) se $u, v \in \mathcal{B}(P)$ com $u_i > v_i$, então existe j com $u_j < v_j$ tal que $u - e_i + e_j \in \mathcal{B}(P)$.

Prova: [9], teorema 2.3. $\square$

Definição C.2.3. Seja $\mathcal{B}$ um conjunto finito não vazio de vetores reticulados que têm o mesmo módulo. Então $\mathcal{B}$ satisfaz:

W. a propriedade fraca da troca, se para quaisquer $u, v \in \mathcal{B}$, $u \neq v$, existem i e j com $u_i > v_i$ e $u_j < v_j$ tais que $u - e_i + e_j \in \mathcal{B}$.

S. a propriedade forte da troca, se para quaisquer $u, v \in \mathcal{B}$, $u \neq v$, e quaisquer i e j com $u_i > v_i$ e $u_j < v_j$ tem-se $u - e_i + e_j \in \mathcal{B}$.

Seja $a_1, \dots, a_n$ e d inteiros não negativos. O conjunto

$$\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n; d) = \{u \in \mathbb{Z}_+^n : 0 \leq u_i \leq a_i \text{ e } \sum_{i=1}^n u_i = d\}$$

é chamado de tipo Veronese. Ele satisfaz a propriedade forte da troca. Um dos resultados centrais desta teoria é o que relaciona polimatróides discretas e polimatróides. Um conjunto finito não vazio $P \subset \mathbb{Z}^n$ é uma polimatróide discreta se e somente se $\text{conv}(P) \subset \mathbb{R}_+^n$ é uma polimatróide reticulado com $\text{conv}(P) \cap \mathbb{Z}^n = P$ (para detalhes ver [9], teorema 3.4). Entretanto, o que nos interessa aqui são as relações algébricas entre o anel associado a uma polimatróide discreta e o anel de base.

C.3 O anel de Ehrhart de uma polimatróide discreta

Seja $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ um politopo reticulado. Denotaremos por $G(\mathcal{P})$ o número inteiro positivo $\#(\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n)$. Seja t um inteiro não negativo. Lembramos que $t\mathcal{P}$ é o múltiplo de P com respeito à soma de Minkowski. Considere a seguinte questão: Como se comporta o inteiro $G(t\mathcal{P})$ ao variar t em $\mathbb{Z}_+^n$? A resposta é dada pelo seguinte

Teorema C.3.1. (Teorema de Ehrhart). Se $\mathcal{P}$ é um politopo em $\mathbb{R}^n$ então $G(t\mathcal{P})$ é um polinômio em $t \in \mathbb{Z}_+$. O polinômio assim determinado é chamado polinômio de Ehrhart de P .

Prova: [7], p. 137.

OBS: Seja $G(t\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$, $a_i \in \mathbb{Z}_+$ o polinômio de Ehrhart de $\mathcal{P}$. Se $\mathring{\mathcal{P}} = \text{relint } \mathcal{P}$ então pode-se mostrar a seguinte relação:

$$G(t\mathring{\mathcal{P}}) = (-1)^{\dim \mathcal{P}} \sum_{i=0}^n a_i (-t)^i.$$

para detalhes de tal relação ver [2] p. 265 teorema 6.3.11.

Dado um politopo reticulado $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ considere o cone reticulado $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}_+ \{(p, 1) : p \in P\}$$

A álgebra monomial associada ao monóide $\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^{n+1}$, denotada por $A(\mathcal{P})$, é chamada o anel de Ehrhart de $\mathcal{P}$. Desde modo,

$$A(\mathcal{P}) = k[\mathbf{X}^{\mathbf{u}} T^i : (\mathbf{u}, i) \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^{n+1}] = k[\mathbf{X}^{\mathbf{u}} T^i : \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n \cap i\mathcal{P}].$$

A normalidade de $A(\mathcal{P})$ segue da caracterização do fecho normal de álgebras monomiais finitamente geradas e por não existir inteiro entre 0 e 1. Seja

$$A(\mathcal{P})_i = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n \cap i\mathcal{P}} k\mathbf{X}^{\alpha} T^i.$$

Tem-se $A(\mathcal{P})_i \cap A(\mathcal{P})_j = 0$ se $i \neq j$. Disto e da proposição 2 do capítulo anterior segue que

$$A(\mathcal{P}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A(\mathcal{P})_i$$

é uma álgebra graduada finitamente gerada em grau 1.

Seja k um corpo e P uma polimatróide discreta de posto d em $[n]$ com conjunto de bases $\mathcal{B}$. Então, $\text{conv}(P)$ é um polimatróide $\mathcal{P}$ (logo um politopo) e $\text{conv}(P) \cap \mathbb{Z}^n = P$. Assim, P é o conjunto de vetores reticulados do politopo $\text{conv}(P)$ e, portanto, podemos estudar o anel de Ehrhart de $\mathcal{P}$. Desde que $P = \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$ e $A(\mathcal{P})$ é finitamente gerado em grau 1 segue que

$$k[P] = k[\mathbf{X}^{\mathbf{u}} T : \mathbf{u} \in P] = A(\mathcal{P}).$$

Em particular, $k[P]$ é normal. Considere os conjuntos

$$\tilde{P} = \{(u, 1) : u \in P\}$$

$$\tilde{B} = \{(u, 1) : u \in B\}$$

Tem-se $\mathbb{Z}\tilde{P} \cap \mathbb{R}_+\tilde{P} = \mathbb{N}\tilde{P}$. Considere o conjunto de vetores reticulados de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$H = \{(u, 1) : |u| = \text{rank } P\}.$$

Então, $H \supset \tilde{B}$ e $\mathbb{Z}\tilde{B} = \mathbb{Z}(H) \cap \mathbb{Z}\tilde{P}$. Portanto,

$$\mathbb{Z}\tilde{B} \cap \mathbb{R}_+\tilde{B} = \mathbb{Z}(H) \cap \mathbb{Z}\tilde{P} \cap \mathbb{R}_+\tilde{B} \subset \mathbb{Z}(H) \cap \mathbb{Z}\tilde{P} \cap \mathbb{R}_+\tilde{P} = \mathbb{Z}H \cap \mathbb{N}\tilde{P} = \mathbb{N}\tilde{B}$$

donde segue que o anel $k[\mathbf{X}^{\mathbf{u}}T : u \in B]$ é normal. Agora, $k[B] = k[\mathbf{X}^{\mathbf{u}} : \mathbf{u} \in B]$ é uma álgebra homogênea desde que todo vetor de B tem mesmo módulo. Assim $k[B] \cong k[\mathbf{X}^{\mathbf{u}}T : \mathbf{u} \in B] = k[\tilde{B}]$. Logo, o anel de base $k[B]$ é normal.

Outras propriedades passam do anel de Ehrhart de uma polimatróide discreta para o anel de base. Por exemplo, se $A(\mathcal{P})$ tem relações quadráticas, base de Groebner quadrática ou é de Koszul então assim também será o anel de base $k[B]$. Para mais detalhes ver [9].

Grafos simples e anéis de arestas

A álgebra $k[V_{n,2}] = k[X_i X_j : 1 \leq i < j \leq n]$ já foi intensamente estudada através da estrutura combinatória subjacente permitida pela relação entre tais objetos e a teoria dos grafos. Um grafo G consiste de um par $(V(G), E(G))$ constituído de um conjunto finito $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ de elementos distintos denominados vértices e uma coleção de pares de elementos $E(G) = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in G\}$ denominados arestas. Uma aresta (v_i, v_j) é chamada "loop" se $v_i = v_j$. Duas arestas $(v_i, v_j), (v_k, v_l)$ são ditas paralelas se $\{v_i, v_j\} = \{v_k, v_l\}$ como conjuntos. Um grafo $G = \{V(G), E(G)\}$ é dito simples se não admite nem loops nem arestas paralelas. Para todo grafo simples associa-se tanto o ideal quanto a álgebra de suas arestas do seguinte modo. Considera-se um corpo k e um anel de polinômios $k[\mathbf{X}] = k[X_1, \dots, X_n]$ em que $n = \#V(G)$. Em seguida, considera-se tanto o ideal de arestas $I(G) = (X_i X_j : (v_i, v_j) \in E(G))$ quanto a álgebra de arestas $k[G] = k[X_i X_j : (v_i, v_j) \in E(G)]$. Busca-se então obter informações estruturais destes entes algébricos a partir das propriedades do grafo. Ver, por exemplo, [15], [17], [21], [22], [12], [11] e [5]. Para uma compilação didática ver [23]. Segue algumas definições inerentes a um grafo segundo [23] p. 161-163. Um grafo H é dito ser um subgrafo de um grafo G se $V(H) \subset V(G)$ e $E(H) \subset E(G)$. Um subgrafo gerador é um subgrafo H de G contendo todos os vértices de G .

Seja G um grafo. Se $z = \{v_i, v_j\}$ é uma aresta de G dizemos que os vértices v_i e v_j são adjacentes ou conectados por z . Neste caso é também usual dizer que a aresta z é incidente com o vértice v_i . O grau de um vértice $v \in V(G)$, denotado por $\deg(v)$, é o número de arestas incidentes com v . Um vértice de grau zero é chamado um vértice isolado. Um grafo G é dito um grafo discreto se todos seus vértices são isolados.

Seja G um grafo no conjunto de vértices $V = \{v_i : i \in \mathcal{I}\}$. Um caminho (walk) de comprimento n em G é uma sequência de vértices e arestas

$$w = \{v_0, z_1, v_1, \dots, v_{n-1}, z_n, v_n\}$$

, onde $z_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ é a aresta unindo v_{i-1} e v_i . Um caminho pode também ser escrito na forma $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ com as arestas implícitas. Se $v_0 = v_n$, o caminho w é chamado um caminho fechado. Uma trilha (path) é um caminho com todos seus vértices distintos.

Dizemos que G é um grafo conexo se para qualquer par de vértices v_i e v_j existe uma trilha de v_i a v_j ; Note que todo grafo G admite uma decomposição disjunta

$$G = \bigcup_{i=1}^r G_i,$$

onde $G_1, \dots, G_r$ são os subgrafos conexos maximais (com respeito à inclusão) de G . Tais G_i são chamados as componentes conexas de G .

Se $z = \{v_i, v_j\}$ é uma aresta de um grafo G , denotamos por $G \setminus \{z\}$, o subgrafo de G obtido deletando z e mantendo todos os seus vértices. Note que $V(G \setminus \{z\}) = V(G)$ e $E(G \setminus \{z\}) = E(G) \setminus \{z\}$. A deleção de um vértice v de um grafo G resulta no subgrafo $G \setminus \{v\}$ de G consistindo de todos os vértices em G exceto v e todas as arestas não incidentes com v .

Se $A \subset V(G)$ é um subconjunto dos vértices de G definimos $G \setminus A$ recursivamente, i. é., deletando um vértice a cada vez.

Um ciclo de comprimento n é um caminho fechado $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ no qual $n \geq 3$ e os vértices $v_1, \dots, v_n$ são distintos. Um ciclo é par (resp. ímpar) se seu comprimento é par (resp. ímpar). Denotaremos por C_n o grafo consistindo de um ciclo com n vértices, C_3 será chamado um triângulo, C_4 um quadrado e assim por diante. Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos e uma floresta é um grafo acíclico. O grafo completo $\mathcal{K}_n$ é o grafo com conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e conjunto de arestas $E = \{(v_i, v_j) : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$, i. é., $\mathcal{K}_n$ tem todo par de seus n vértices adjacentes.

Um grafo G é bipartido se seu conjunto de vértices V pode ser particionado em subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 tais que $E(G) \subset V_1 \times V_2$.

Referências Bibliográficas

- [1] P. Brumatti, P. Gimenez e A. Simis, *On the Gauss Algebra Associated to a Rational Map $\mathbf{P}^d \rightarrow \mathbf{P}^n$* , Journal of Algebra, **207** (1998), 557–571.
- [2] W. Bruns e J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge studies in advanced mathematics **39**, Cambridge University Press (1993).
- [3] V. I. Danilov, *The geometry of toric varieties*, Russian Math. Surv. **33:2**, 97–154.
- [4] De Negri e T. Hibi, *Gorenstein Algebras of Veronese Type*, Journal of Algebra **193** (1997), 629–639.
- [5] L. R. Doering e T. Gunston, *Algebras arising from bipartite planar graphs*, Communications in Algebra **24(11)** (1996), 3589–3598.
- [6] J. Edmond, *Submodular functions, matroids and certain polyhedra*, Proc. Int. Conf. on Combinatorics (Calgary), Gordon and Breach (1970), 69–87.
- [7] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, GTM **168**, Springer (1996).
- [8] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of mathematics studies, Princeton University Press **Study 131** (1993).
- [9] J. Herzog e T. Hibi, *Discrete polymatroids*, J. Algebraic Combin. **16** (2002), 239–268.
- [10] M. Hochster *Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes*, Ann. of Math. **96** (1972), 318–337.
- [11] M. Katzman *Bipartite graphs whose edge algebras are complete intersections*, Journal of Algebra **220** (1999), 519–530.
- [12] H. Ohsugi e T. Hibi, *Normal polytopes arising from finite graphs*, Journal of Algebra **207** (1998), 409–426.
- [13] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Springer Verlag (1994).
- [14] A. Simis, *Remarkable graded algebras in algebraic geometry*, Monografias del IMCA **XII**, ELAM (1999).

- [15] A. Simis, *On the Jacobian Module Associated To A Graph*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 989–997.
- [16] A. Simis, *Two differential themes in characteristic zero*, Topics in Algebraic and Noncommutative Geometry, Proceedings in Memory of Ruth Michler (Eds. C. Melles, J. P. Brasselet, G. Kennedy, K. Lauter e L. McEwan), Contemporary Mathematics **324**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2003), 195–204.
- [17] A. Simis, W. V. Vasconcelos e R. Villarreal, *On the ideal theory of graphs*, Journal of Algebra **167** (1994), 389–416.
- [18] A. Simis e R. H. Villarreal, *Linear syzygies and birational combinatorics*, Results in Math. **48** (2005), 326–343.
- [19] R. P. Stanley *Combinatorics and Commutative Algebra*, Progress in Mathematics **41**, Birkhauser (1996).
- [20] B. Sturmfels *Groebner Bases and Convex Polytopes*, University Lecture Series **8**, American Mathematical Society, Rhode Island (1996).
- [21] R. H. Villarreal, *Cohen-Macaulay Graphs*, Manuscripta Math. **66** (1990), 277–293.
- [22] R. H. Villarreal, *Rees algebras of edge ideals*, Communications in Algebra **23**(9) (1995), 3513–3524.
- [23] R. H. Villarreal *Monomial Algebras*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics **238**, Marcel-Dekker (2001).
- [24] D. J. A. Welsh, *Matroid Theory*, Academic Press, London, New York (1976).
- [25] F. L. Zak, *Tangents and secants of algebraic varieties*, Translation of Mathematical Monographs **127**, AMS, Providence, Rhode Island (1993).
- [26] O. Zariski, *The concept of a simple point of an abstract algebraic variety*, Trans. Amer. Math. Soc. **62** (1947), 1–52.

N244g Araujo, Kalasas Vasconcelos de.
A álgebra de Gauss de uma álgebra monominal / Kalasas
Vasconcelos de Araujo. – Recife: O autor, 2007.
xv. 44 folhas

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco.
CCEN. Matemática, 2007.

Inclui bibliografia e anexo.

1. Matemática. 2. Álgebra comutativa. I. Título.

510 CDD (22.ed.) MEI2010 - 0122

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Ciências.

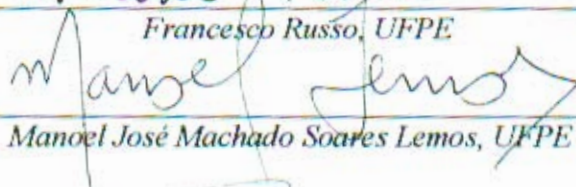
Aprovado:


Aron Simis, UFPE

Orientador

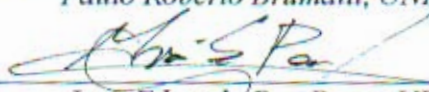


Francesco Russo, UFPE



Manoel José Machado Soares Lemos, UFPE


Paulo Roberto Brumatti, UNICAMP


Ivan Edgardo Pan Perez, UFRGS

**A ÁLGEBRA DE GAUSS DE UMA
ÁLGEBRA MONOMIAL**

por

Kalásas Vasconcelos de Araújo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415 – Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro - 2007