



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Pós-Graduação em Matemática

**Dinâmica de Vórtices Pontuais Sobre um
Elipsóide Simétrico**

Hélio Machado da Silva Porto Neto

Tese de Doutorado

Recife
Novembro de 2009

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Hélio Machado da Silva Porto Neto

Dinâmica de Vórtices Pontuais Sobre um Elipsóide Simétrico

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: *César Augusto Rodrigues Castilho*

Recife
Novembro de 2009

Porto Neto, Hélio Machado da Silva
Dinâmica de vórtices pontuais sobre um
elipsóide simétrico / Hélio Machado da Silva
Porto Neto. - Recife: O Autor, 2009.
x, 84 folhas : il., fig., tab.

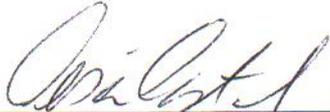
Tese (doutorado) – Universidade Federal
de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2009.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Dinâmica dos fluidos. I. Título.

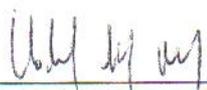
531.32 CDD (22. ed.) MEI2009
- 158

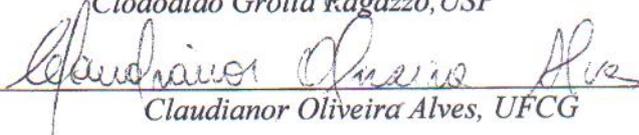
Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: 
César Augusto Rodrigues Castilho, UFPE
Orientador


Cláudio Rodrigo Cuevas Henriquez, UFPE


Hildeberto Eulálio Cabral, UFPE


Clodoaldo Grotta Ragazzo, USP


Claudianor Oliveira Alves, UFCG

DINÂMICA DE VÓRTICES PONTUAIS SOBRE
UM ELIPSÓIDE SIMÉTRICO

Por

Hélio Machado da Silva Porto Neto

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Novembro – 2009

A Deus

Agradecimentos

AGRADEÇO a Deus e a todas as pessoas que contribuíram para a realização deste trabalho.

Dentre estas, destaco o meu orientador, o professor César Castilho, que desde a graduação me inspirou e estimulou no estudo da matemática. Seu empenho e amizade foram fundamentais para a elaboração desta tese.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFPE, agradeço por contribuírem com a minha formação através da ministração de disciplinas e seminários ao longo deste Doutorado. São eles, Cláudio Vidal, Henrique Araújo, Marcus Vinícios, Hildeberto Cabral, Paulo Santiago, Maria Luísa, Sóstenes Lins e Manoel Lemos.

Lembro também os demais funcionários do DMAT e da Biblioteca do CCEN, indispensáveis ao bom funcionamento do curso. Meus agradecimentos a Tânia, Fátima, Cláudia, Antônio, Manoel Ronaldo, Carlos, Oscar, Raquel e Jane.

Minha turma de doutorado foi composta, além de mim, por Éder Mateus. Agradeço a este amigo, com quem cursei várias disciplinas e em todas fui enriquecido com nossos estudos e discussões.

Na pós-graduação em Matemática fiz vários amigos que contribuíram direta ou indiretamente com esta tese, agradeço a Rodrigo Gondin, Adriano Regis, Fábio Santos, Macarrão, Giovana, Humberto, Débora, Hugo, Tiaguinho, Carla, Walisson Rosa, Evaneide, Ricardo, Mardônio e João Paulo.

Ao amigo Cláudio Tadeu agradeço principalmente pela paciência em me ajudar com o \LaTeX .

Agradeço ao meu avô Hélio e à minha avó Norma, exemplos de justiça e generosidade.

À minha família e à Letícia, agradeço pelo apoio e afeto.

Ao CNPQ, meus agradecimentos pelo financiamento deste curso.

Resumo

NESTE trabalho estudamos o problema dos N -vórtices em um elipsóide de revolução do ponto de vista da teoria de perturbação. O elipsóide considerado consiste em uma perturbação da esfera. Aplicando técnicas canônicas da teoria de perturbação, construímos uma sequência de transformações conformes do elipsóide no plano complexo. Usando estas transformações, as equações de movimento do problema dos N -vórtices no elipsóide foram escritas como uma série formal na excentricidade da elipse geratriz do elipsóide. As equações de primeira ordem foram obtidas explicitamente. Mostramos numericamente que o sistema truncado de primeira ordem para a dinâmica de três vórtices é não integrável. Um estudo do traçador passivo foi realizado sob a influência de soluções que são equilíbrios relativos do problema de dois vórtices no elipsóide. Mostramos que na dinâmica do traçador não existe colisão com os vórtices e determinamos os equilíbrios relativos deste sistema, assim como suas respectivas estabilidades. Um estudo sobre anéis de vórtices no elipsóide também foi realizado. Determinando intervalos de latitude em função de N , em que o anel de N vórtices admite estabilidade linear e não linear, observamos que o anel de vórtices é mais instável no elipsóide prolato do que no oblato.

Palavras-chave: Vórtices pontuais; traçador passivo; elipsóide.

Abstract

WE consider the N -vortex problem on an ellipsoid of revolution. Applying standard techniques of classical perturbation theory, we construct a sequence of conformal transformations from the ellipsoid into the complex plane. Using these transformations, the equations of motions for the N -vortex problem on the ellipsoid are written as a formal series on the eccentricity of the ellipsoid's generating ellipse. First order equations are obtained explicitly. We show numerically that the truncated first order system for the three vortex system on the symmetric ellipsoid is nonintegrable. A passive tracer study was produced influenced by solutions which are the relative equilibria for the problem of two vortices on ellipsoid. We show that inside tracer dynamics there is no collision with the vortices. We have also established the system's relative equilibria, as well as its respective stabilities. A case study about ring of vortices on ellipsoid determines intervals of latitude as function of N , in which the ring of N vortices allow linear and non-linear stability. We conclude that ring of vortices are more unstable on prolate ellipsoid than on oblate ellipsoid.

Keywords: Point-vortices; passive tracer; ellipsoid.

Sumário

1	Equações dos N-vórtices no plano	7
2	Equações dos N-vórtices no elipsóide simétrico	13
2.1	Equações de Hally	14
2.1.1	Equações de Hally como um sistema Hamiltoniano no plano conforme	14
2.1.2	Das equações de Hally para as equações de Bogomolov	16
2.2	Equações dos N -vórtices do ponto de vista da teoria de perturbação	19
2.2.1	Equações dos N -vórtices	24
2.3	Aplicações: casos em que $N = 2$ ou $N = 3$	26
2.3.1	Problema dos dois vórtices	26
2.3.1.1	Equilíbrios	28
2.3.2	Problema dos três vórtices	30
3	O traçador passivo	33
3.1	Análise das singularidades	35
3.2	O traçador em relação à solução axial	38
3.3	O traçador no caso em que $\Gamma_1 = \Gamma_2$	39

3.3.1	Estabilidades dos equilíbrios	46
3.4	O traçador no caso em que $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ e $r_1(t) \neq -r_2(t)$	52
3.4.1	Estabilidade dos equilíbrios	59
3.5	O traçador no caso em que $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ e $r_1(t) = -r_2(t)$	63
4	Anel de vórtices	66
4.1	Estabilidade do anel de N vórtices	69
A	Cálculo de $D^2\tilde{H}(\tilde{X}^*)$	76

Introdução

O MODELO de vórtices pontuais estudados na atualidade foi introduzido por Helmholtz em 1867 [2] e descrito como um sistema Hamiltoniano por Kirchhoff em 1876 [3]. Interessado na estrutura do átomo, Thomson apresentou um trabalho em 1883 [13] sobre o problema de N vórtices idênticos (mesma vorticidade) dispostos nos vértices de um polígono regular de N lados. Tal configuração é chamada de *anel de vórtices*. Em seu estudo, Thomson obteve que para $N \leq 6$ o sistema é linearmente estável, enquanto que para $N = 7$ concluiu, erroneamente, a instabilidade do sistema. Para $N \geq 8$ Thomson conjecturou instabilidade. Em 1931, Havelock [14] mostrou que a conjectura de Thomson estava correta, ou seja, que para $N \geq 8$ a configuração de anel é linearmente instável. A questão de decidir a estabilidade do anel de 7 vórtices ficou conhecido como o problema do *Heptágono de Thomson*. Dritschel mostrou, em sua tese de doutorado (Princeton, 1985), que tal configuração é neutramente estável. Quanto à estabilidade não linear, em 1999 Cabral e Schmidt [15] aplicaram técnicas de normalização à respectiva função Hamiltoniana e mostraram estabilidade no sentido de Lyapunov. Em 2002, Kurakin e Yudovich [21] também provaram estabilidade não linear através de uma demonstração analítica.

Quando consideramos uma escala de tempo comparável ou superior a um dia o modelo de vórtices pontuais em um fluido planar não pode ser utilizado para estudar fluidos na atmosfera

terrestre e nos oceanos. Nem tampouco para fluidos cuja escala de movimento é da ordem do raio da Terra. Nestes casos a topologia da esfera, utilizada como modelo para a Terra, é de fundamental importância, não sendo possível o uso do plano tangente como aproximação. Assim, para a Geofísica foi indispensável considerar vórtices na esfera para estudar e localizar regiões de vorticidade concentrada, como por exemplo, nos casos dos furacões e dos ciclones [31]. As equações de movimento de N vórtices sobre a esfera foram primeiramente generalizadas por Bogomolov em 1977 [5]. Independente, Hally escreveu em 1980 [7] as equações de movimento para vórtices em superfícies conformes ao plano. O trabalho de Bogomolov foi posto numa sólida base matemática por Kimura e Okamoto em 1987 [8]. Em um artigo posterior, Bogomolov [6] estudou o movimento de três vórtices iguais na esfera. Kidambi e Newton [10] trataram o problema de três vórtices com vorticidades arbitrárias na esfera. A partir do comprimento do vetor vorticidade em relação ao raio da esfera eles classificaram as soluções em cinco tipos. Também classificaram todos os equilíbrios fixos e relativos e fizeram um estudo detalhado de colisão de vórtices.

Da mesma forma que no plano, a configuração de anel também aparece na esfera quando consideramos N vórtices com mesmas vorticidades e latitudes, dispostos nos vértices de um polígono regular de N lados. Esta configuração também é um equilíbrio relativo, o qual gira em torno de um eixo de rotação. Em 1993 Polvani e Dritschel [23] estenderam os resultados de Thomson e mostraram que o anel de vórtices é mais instável na esfera do que no plano. Em 2003, Boatto e Cabral [17] estudaram a estabilidade linear e não linear desta configuração. Estes pesquisadores determinaram intervalos de latitudes, em função de N , nos quais estes equilíbrios apresentam estabilidade tanto linear quanto não linear. Ainda em 2003, Cabral,

Meyer e Schmidt [16] estudaram a estabilidade de anéis de N vórtices unitários na esfera com a presença de um vórtice com vorticidade Γ localizado no polo norte. As regiões de estabilidade foram determinadas por curvas $\Gamma(\theta)$, em que θ se refere à latitude do anel.

Em 1999 Kimura [9] obteve as equações dos N -vórtices em superfícies com curvatura constante. Através da projeção estereográfica Kimura estudou as diferenças e semelhanças existentes nas dinâmicas de vórtices na esfera e no plano hiperbólico. Ele mostrou que a trajetória de um dipólo de vórtices, no limite em que a distância entre os vórtices tendem a zero, é uma geodésica nessas superfícies. Kimura também conjecturou que neste limite, e em qualquer superfície, a trajetória de um dipólo é uma geodésica. Em 2008 Boatto [19] estudou como a estabilidade do anel de vórtices em superfícies de curvatura constante depende da curvatura da superfície e da quantidade de vórtices.

Poucas são as referências sobre vórtices em superfícies que não possuem curvatura constante. Além do trabalho do Hally podemos mencionar os seguintes trabalhos. Em 2002 Soelière e Tokieda [26] apresentaram um método para encontrar soluções periódicas que não são equilíbrios relativos em algumas superfícies de revolução. Em 2008 Castilho e Machado [25] estudaram o problema dos N -vórtices no elipsóide de revolução utilizando técnicas da teoria de perturbação. De uma forma mais geral, a dinâmica de vórtices em superfícies fechadas (compacta, sem fronteira e orientável) foi tratada em 2008 por Koiller e Boatto [20]. Neste trabalho, entre outros resultados obtidos, eles demonstraram a conjectura de Kimura para o movimento de um dipólo de vórtices.

A presente tese contempla o artigo supracitado (Castilho e Machado [25]) e apresenta al-

gumas de suas aplicações. Nosso objetivo principal foi obter as equações perturbativas para a dinâmica de N vórtices no elipsóide de revolução dado por

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2(1+\varepsilon)} = 1, \quad (0.1)$$

em que ε é visto como um fator perturbador. Escrevemos as equações para o problema dos N vórtices no elipsóide (0.1) como uma série formal em ε , em que $|\varepsilon| \ll 1$. Para isto utilizamos as equações de Hally, as quais descrevem o movimento de vórtices pontuais em uma superfície conforme ao plano. Hally representou a superfície M no plano complexo com métrica conforme à Euclidiana: seja Γ_i a vorticidade do vórtice ξ_i . Denotando o fator conforme da superfície por $h(\xi, \bar{\xi})$. As equações de Hally são

$$\bar{\xi}'_n = h^{-2}(\xi_n, \bar{\xi}_n) \left(\sum'_k -i \frac{\Gamma_k}{\xi_n - \xi_k} + i\Gamma_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} \log(h(\xi_n, \bar{\xi}_n)) \right), \quad (0.2)$$

em que por \sum'_k denotamos o somatório em $k = 1, \dots, N$ com k diferente do outro índice existente no somatório, neste caso $k \neq n$. As dificuldades de se trabalhar com essas equações decorrem da necessidade do conhecimento explícito do fator conforme e do fato de que este fator não é conhecido para muitas superfícies além da esfera [5]-[10].

Para atingir nosso objetivo, escrevemos uma mudança de coordenadas do elipsóide (0.1) no plano (ver Eq. (2.12)). Tal mudança de coordenadas é escrita como uma série de potências na excentricidade da elipse geratriz do elipsóide de revolução. Impondo conformalidade em cada ordem, obtivemos que o termo de ordem n da transformação é dado pela solução de uma equação diferencial linear de primeira ordem. O termo de primeira ordem desta transformação foi calculado explicitamente (ver Eq. (2.14)). Usando as equações de Hally calculamos explicitamente o termo de primeira ordem das equações dos N -vórtices. Em coordenadas esféricas, as

equações truncadas de primeira ordem foram dadas por um sistema Hamiltoniano com função Hamiltoniana

$$H = H_0 + \varepsilon H_1, \quad (0.3)$$

e forma simplética

$$w = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \sin(\theta_i) d\theta_i \wedge d\phi_i,$$

em que

$$H_0 = -\frac{1}{2} \sum'_{ij} \Gamma_i \Gamma_j [\ln(2 - 2 \cos(\theta_i) \cos(\theta_j) - 2 \sin(\theta_i) \sin(\theta_j) \cos(\phi_i - \phi_j))],$$

$$H_1 = -\frac{1}{2} \sum'_{ij} \Gamma_i \Gamma_j [(\cos(\theta_i))^2 + (\cos(\theta_j))^2].$$

Por \sum'_{ij} denotamos o somatório em $i, j = 1, \dots, N$ com $i \neq j$.

Descrevemos a seguir a maneira como esta tese se encontra estruturada. No capítulo 1, deduzimos as equações dos N -vórtices no plano e as estendemos ao caso esférico. O capítulo 2 foi dividido em três seções. Na seção 2.1 introduzimos todos os conceitos utilizados na obtenção das equações dos N -vórtices no elipsóide (0.1). As equações de Hally foram escritas como um sistema Hamiltoniano invariante e, para o caso esférico, mostraram-se equivalentes às equações de Bogomolov. Na seção 2.2, obtivemos a expressão do termo perturbador de primeira ordem das equações de movimento. A idéia principal foi escrever a transformação conforme do elipsóide no plano como uma ε -série em que ε é função da excentricidade da

elipse geratriz do elipsóide. Na seção 2.3, exibimos duas aplicações simples da Eq. (0.3). O caso $N = 2$, apesar de ser integrável, parece não admitir soluções explícitas. Para $|\Gamma_1| = |\Gamma_2|$ caracterizamos todos os equilíbrios relativos deste problema. Mostramos numericamente que o problema dos três vórtices é caótico.

No capítulo 3 estudamos o problema restrito dos três vórtices no elipsóide (0.1). Foram considerados dois vórtices com vorticidades diferentes de zero e um vórtice (traçador passivo) com vorticidade nula. Este último não influencia o movimento dos outros dois vórtices, mas é afetado por eles. Mostramos que o sistema não admite colisão do traçador com os vórtices. Também foi feito um estudo dos equilíbrios relativos para o problema do traçador sob a influência de equilíbrios relativos do problema de dois vórtices.

No capítulo 4 consideramos anéis de vórtices sobre o elipsóide (0.1). Fizemos um estudo da estabilidade desta configuração de maneira análoga ao realizado por Cabral e Boatto [15], [19]. Utilizando coordenadas girantes, o anel de vórtices é visto como um equilíbrio absoluto. Desta forma foi possível determinar tanto a estabilidade linear quanto a não linear através de uma análise dos autovalores da matriz hessiana do Hamiltoniano correspondente avaliada neste equilíbrio. Mostramos que o anel de vórtices é mais instável no elipsóide prolato do que no oblato.

Equações dos N -vórtices no plano

APRESENTAMOS aqui uma dedução das equações de movimento relativas ao problema dos N -vórtices no plano. Dado um fluido com velocidade $U = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ associamos o campo vorticidade

$$W = \nabla \times U. \quad (1.1)$$

Utilizamos a notação $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ para escrever simbolicamente o rotacional de U como $\nabla \times U$ e o divergente de U como $\nabla \cdot U$. No que segue, consideramos fluidos ideais sem viscosidade, incompressíveis e com densidade constante $\rho = 1$. A incompressibilidade do fluido equivale a dizer que

$$\nabla \cdot U = 0. \quad (1.2)$$

Calculando o divergente em (1.1) temos que

$$\nabla \cdot W = 0. \quad (1.3)$$

A equação de Euler (ver [27]), derivada das leis de conservação de massa, energia e momento, para o movimento em um fluido ideal é dada por

$$\frac{DU}{Dt} \equiv U_t + (U \cdot \nabla)U = -\nabla p + f, \quad (1.4)$$

em que $U \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$, e $D/Dt \equiv \partial/\partial t + U \cdot \nabla$ é a *derivada material*, a qual leva em consideração que a posição de uma partícula do fluido muda com o tempo. Nesta equação

denotamos por p a função pressão, por ∇p o gradiente de p e por f a atuação de forças externas por unidade de massa. Calculando o rotacional em (1.4) obtemos que

$$W_t + \nabla \times ((U \cdot \nabla)U) = -\nabla \times \nabla p + \nabla \times f.$$

Como

$$(U \cdot \nabla)U = \frac{1}{2}\nabla(\langle U, U \rangle) - U \times W,$$

então,

$$W_t + \nabla \times \left(\frac{1}{2}\nabla(\langle U, U \rangle) - U \times W\right) = -\nabla \times \nabla p + \nabla \times f.$$

Utilizando que

$$\nabla \times (U \times W) = (W \cdot \nabla)U - (U \cdot \nabla)W$$

e que

$$\nabla \times \nabla g = 0$$

para toda função g de classe C^2 , concluímos que

$$\frac{DW}{Dt} = (W \nabla)U + \nabla \times f.$$

Supondo $U \subset \mathbb{R}^2$ e que f é um campo conservativo temos que

$$(W \nabla)U = 0 \text{ e } f = \nabla F$$

para alguma função F . Consequentemente,

$$\frac{DW}{Dt} = 0.$$

Isto nos diz que a vorticidade é conservada em um fluido bidimensional.

Dado um campo de velocidades U , encontramos facilmente o campo de vorticidades associado que, por definição, é $W = \nabla \times U$. Mas estamos interessados no contrário. Ou seja, queremos encontrar o campo velocidade U de um fluido incompressível, a partir de um campo vorticidade W tal que $W = \nabla \times U$. Mostramos esta inversão para o caso em que o fluido é planar e o campo vorticidade é diferente de zero apenas em um conjunto finito de pontos. Tais pontos são chamados de vórtices pontuais, ou apenas vórtices. De fato, (ver [28] e [31]) sejam A e P dois pontos do plano. Como o fluido é incompressível, a quantidade de fluido que passa por qualquer linha ligando o ponto A ao ponto P é a mesma. Portanto, se fixarmos A , o fluxo que passa por uma linha ligando A e P depende apenas da posição de P . Seja ψ esta função, mais precisamente, seja ψ o fluxo que passa através de \overline{AP} da esquerda para a direita. Analiticamente, se (l, m) é o campo normal unitário no sentido da esquerda para a direita em um elemento de linha δs de uma curva que liga A e P , então

$$\psi = \int_A^P (lu + mv) ds. \quad (1.5)$$

Se P move-se de forma que o valor de ψ não se altera, então o fluido não passa pela curva gerada pelo deslocamento de P , ou seja, o fluxo é paralelo a tal curva. Em virtude disto, as curvas $\psi = cte$ são chamadas de *linhas de fluxo* e ψ de *função fluxo*. Se P desloca-se paralelo ao eixo $\vec{o}\hat{y}$, então,

$$\begin{aligned} \psi(P_1, P_2 + y) - \psi(P_1, P_2) &= \int_{P_2}^y \langle (u, v), (1, 0) \rangle dy \\ &= \int_{P_2}^y u dy, \end{aligned}$$

logo,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Analogamente, considerando um deslocamento paralelo ao eixo \vec{ox} , obtemos que

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Portanto, se $U \subset \mathbb{R}^2$ e $\nabla \cdot U = 0$, então, existe função ψ tal que

$$U = J(\nabla \psi)^t, \quad (1.6)$$

em que

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A função ψ se comporta como uma função Hamiltoniana e (x, y) como coordenadas conjugadas canônicas para uma partícula que segue o fluxo. Tomando o rotacional em (1.6), concluímos que

$$\nabla \times U = (0, 0, -\nabla^2 \psi),$$

em que, $\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$. Portanto, o campo vorticidade de um fluido incompressível no plano é perpendicular a este plano. Contudo, para recuperarmos U a partir de $W = (0, 0, \omega)$, precisamos apenas resolver a equação de Poisson

$$\nabla^2 \psi = -\omega.$$

A solução desta equação, ver [22], é dada em termos da função de Green

$$\psi(r) = -\frac{1}{2\pi} \int G(r-r') \omega(r') dr'. \quad (1.7)$$

No plano, a função de Green tem a seguinte forma

$$G(r) = -\frac{1}{2\pi} \log \|r\|.$$

Logo,

$$\psi(r) = -\frac{1}{2\pi} \int \log \|r - r'\| \omega(r') dr'. \quad (1.8)$$

Estamos interessados em campos vorticidades diferentes de zero apenas em um conjunto finito de pontos. Portanto, escrevemos

$$W = (0, 0, \omega),$$

em que,

$$\omega = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta(r - r_i), \quad (1.9)$$

(ver [31]). Aqui δ é a função delta de Dirac (ver [22]) e Γ_i a vorticidade do vórtice r_i . Para deduzir as equações dos N -vórtices, denotados por $r_i = (x_i(t), y_i(t))$, $i = 1, \dots, N$, começamos por determinar a velocidade que um dos vórtices induz em uma partícula do fluido. Por (1.6), (1.8) e (1.9) temos que,

$$\dot{r} = U = J(\nabla \psi_i(r, t))^t$$

e

$$\psi_i(r, t) = -\frac{\Gamma_i}{2\pi} \log \|r - r_i\|.$$

O campo velocidade determinado pelos N vórtices é obtido pela superposição dos campos induzidos por cada vórtice. Sendo assim, para um elemento do fluido sua velocidade é dada por

$$\dot{r} = \sum_{i=1}^N J(\nabla \psi_i(r, t))^t.$$

Como cada vórtice move-se ao longo do fluxo e sua vorticidade é conservada, o campo velocidade no vórtice r_j é dado por

$$\dot{r}_j = \sum_{i \neq j}^N J(\nabla \psi_i(r_j, t))^t.$$

Ou seja, as equações para o problema dos N -vórtices no plano são

$$\dot{x}_j = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j}^N \frac{\Gamma_i (y_j - y_i)}{\|r_i - r_j\|^2},$$

$$\dot{y}_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j}^N \frac{\Gamma_i (x_j - x_i)}{\|r_i - r_j\|^2},$$

em que $r_i = (x_i, y_i)$.

As equações dos N -vórtices na esfera podem ser obtidas de forma análoga ao caso planar. De fato, como a esfera é bidimensional, a vorticidade é conservada. Se $\nabla \cdot U = 0$, então existe função ψ e variáveis (x, y) tais que o campo de velocidades é dado por $U = (\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x})$. Portanto, para encontrar as equações de movimento no caso esférico, precisamos apenas resolver a equação de Poisson

$$\nabla^2 \psi = -\omega$$

na esfera. Desta forma, ψ é dada pela Eq. (1.7), em que G é a função de Green na esfera, ou seja,

$$G(r) = -\frac{1}{2\pi} \log(1 - \cos(r)),$$

em que r é a distância geodésica.

Equações dos N -vórtices no elipsóide simétrico

AS EQUAÇÕES PERTURBATIVAS para o problema dos N -vórtices em um elipsóide simétrico, no caso em que o elipsóide está "próximo" da esfera, são apresentadas neste capítulo. Consideramos o elipsóide dado por

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2(1+\varepsilon)} = 1$$

em que ε é visto como um fator perturbador, com $|\varepsilon| \ll 1$. Para atingir nosso objetivo, escrevemos uma mudança de coordenadas deste elipsóide no plano (ver Eq. (2.12)). Tal mudança de coordenadas é escrita como uma série de potências na excentricidade da elipse geratriz do elipsóide de revolução. Impondo conformalidade em cada ordem, obtivemos que o termo de ordem n da transformação é dado pela solução de uma equação diferencial linear de primeira ordem. O termo de primeira ordem desta transformação foi calculado explicitamente (ver Eq. (2.14)). Usando as equações de Hally calculamos explicitamente o termo de primeira ordem para as equações dos N -vórtices.

2.1 Equações de Hally

Nesta seção, discutimos a Eq. (0.2) de um ponto de vista geométrico e invariante. Observamos que as equações de Hally foram deduzidas sob a restrição topológica na qual a soma de todas as vorticidades é zero e, de fato, isto é essencial para colocarmos as equações na forma Hamiltoniana. Mostramos também que, sob esta restrição nas vorticidades, as equações de Hally na esfera coincidem com as equações de Bogomolov.

2.1.1 Equações de Hally como um sistema Hamiltoniano no plano conforme

Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão dois com métrica g . Note que M é uma variedade simplética com forma simplética w dada pela forma área induzida por g . Seja $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ função Hamiltoniana. As equações Hamiltonianas são

$$w(X_H, \cdot) = dH, \quad (2.1)$$

em que X_H é o campo vetorial induzido por H . Suponha que M é conforme ao plano, isto é, que existe um sistema de coordenadas $x_i : M \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, em que a métrica é dada por

$$g(x_1, x_2) = h^2(x_1, x_2)(dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2)$$

para alguma função h . Nestas coordenadas, a forma simplética (área) é dada por

$$w = h^2(x_1, x_2)dx_1 \wedge dx_2.$$

Considere as coordenadas complexas $(\xi, \bar{\xi})$ no plano (x_1, x_2) dadas por

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + ix_2),$$

$$\bar{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - ix_2).$$

Utilizando $(\xi, \bar{\xi})$, obtemos que

$$g(\xi, \bar{\xi}) = h^2(\xi, \bar{\xi})(d\xi \otimes d\xi + d\bar{\xi} \otimes d\bar{\xi})$$

e

$$w = ih^2(\xi, \bar{\xi})d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

As equações Hamiltonianas (2.1) tornam-se

$$h^2(\xi, \bar{\xi})d\xi \wedge d\bar{\xi}(X_H, \cdot) = d(-iH).$$

Por conveniência, podemos pensar em $h^2(\xi, \bar{\xi})d\xi \wedge d\bar{\xi}$ como a nova forma área e $-iH$ como a nova função Hamiltoniana. Escrevendo $X_H = \dot{\xi}(\partial/\partial\xi) + \dot{\bar{\xi}}(\partial/\partial\bar{\xi})$, as equações Hamiltonianas tornam-se

$$h^2(\xi, \bar{\xi})\dot{\xi} = i\frac{\partial H}{\partial \bar{\xi}}. \quad (2.2)$$

As equações de Hally podem ser escritas como um sistema Hamiltoniano no plano conforme. De fato, as equações de Hally (ver [7]) são

$$\bar{\xi}'_n = h^{-2}(\xi_n, \bar{\xi}_n) \left(\sum_k \dot{\xi}_k \frac{\Gamma_k}{\xi_n - \xi_k} + i\Gamma_n \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_n} \log(h(\xi_n, \bar{\xi}_n)) \right). \quad (2.3)$$

Multiplicando cada termo do somatório por $(\bar{\xi}_n - \bar{\xi}_k)/(\xi_n - \xi_k)$ e adicionando o zero

$i\Gamma_n \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_n} \log(h(\xi_k, \bar{\xi}_k))$ ao lado direito, em que $n \neq k$, obtemos que

$$\bar{\xi}'_n = h^{-2}(\xi_n, \bar{\xi}_n) \left(\sum_k' -i\Gamma_k \frac{\partial}{\partial \xi_n} \log |\xi_n - \xi_k|^2 + i\Gamma_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} \log(h(\xi_n, \bar{\xi}_n)h(\xi_k, \bar{\xi}_k)) \right).$$

Considerando que a soma das vorticidades é zero, ou seja, que

$$\Gamma_n = - \sum_k' \Gamma_k.$$

Concluimos que

$$h^2(\xi_n, \bar{\xi}_n) \bar{\xi}'_n = -i \left(\sum_k' \Gamma_k \frac{\partial}{\partial \xi_n} \log |\xi_n - \xi_k|^2 + \sum_k' \Gamma_k \frac{\partial}{\partial \xi_n} \log(h(\xi_n, \bar{\xi}_n)h(\xi_k, \bar{\xi}_k)) \right).$$

Isto é,

$$h^2(\xi_n, \bar{\xi}_n) \bar{\xi}'_n = -i \sum_k' \Gamma_k \frac{\partial}{\partial \xi_n} \log(h(\xi_n, \bar{\xi}_n)h(\xi_k, \bar{\xi}_k) |\xi_n - \xi_k|^2). \quad (2.4)$$

Contudo, estas são as equações de Hamilton:

$$w(X_H, \cdot) = d(-iH), \quad (2.5)$$

para a forma simplética

$$\tilde{w} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i h^2(\xi_i, \bar{\xi}_i) d\xi_i \wedge d\bar{\xi}_i$$

e função Hamiltoniana

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{k,n} \Gamma_k \Gamma_n \log(h(\xi_n, \bar{\xi}_n)h(\xi_k, \bar{\xi}_k) |\xi_n - \xi_k|^2). \quad (2.6)$$

2.1.2 Das equações de Hally para as equações de Bogomolov

Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera dois dimensional

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

S^2 é uma variedade Riemanniana com a métrica induzida pela métrica Euclidiana em \mathbb{R}^3 . Utilizando coordenadas esféricas em S^2 dadas por

$$x = R \cos(\phi) \sin(\theta),$$

$$y = R \sin(\phi) \sin(\theta),$$

$$z = R \cos(\theta),$$

com $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$, temos que o mapa $\sigma : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\sigma(\theta, \phi) = u + iv$, em que

$$u = \tan(\theta/2) \cos(\phi),$$

$$v = \tan(\theta/2) \sin(\phi),$$

é conforme, com fator conforme

$$h(\xi, \bar{\xi}) = \frac{2R}{1 + \xi \bar{\xi}},$$

em que $\xi = u + iv$. Sejam $r_1, r_2 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$, a distância Euclidiana $\|r_1 - r_2\|^2$ em \mathbb{R}^3 pode ser computada nas variáveis conforme. De fato,

$$\begin{aligned} \|r_1 - r_2\|^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2, \\ &= R^2 \{2 - 2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - 2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\phi_1 - \phi_2)\}. \end{aligned}$$

Utilizando a identidade

$$1 - \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) = 2 \sin^2(\theta_1/2) \cos^2(\theta_2/2) + 2 \sin^2(\theta_2/2) \cos^2(\theta_1/2),$$

temos que

$$\begin{aligned} \|r_1 - r_2\|^2 &= 4 \cos(\theta_1/2)^2 \cos(\theta_2/2)^2 R^2 \{(u_1^2 + v_1^2) + (u_2^2 + v_2^2) - 2u_1u_2 - 2v_1v_2\}, \\ &= \frac{2R}{1+\xi_1\bar{\xi}_1} \frac{2R}{1+\xi_2\bar{\xi}_2} |\xi_1 - \xi_2|^2. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\|r_1 - r_2\|^2 = h(\xi_1, \bar{\xi}_1) h(\xi_2, \bar{\xi}_2) |\xi_1 - \xi_2|^2.$$

Agora, consideremos o mapa $F : S^2 \times \dots \times S^2 \rightarrow \mathbb{C}^N$ dado por

$$F(r_1, r_2, \dots, r_N) = (\sigma(r_1), \sigma(r_2), \dots, \sigma(r_N)).$$

O pull back por F da forma simplética

$$\tilde{w} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i h^2(\xi_i, \bar{\xi}_i) d\xi_i \wedge d\bar{\xi}_i$$

é

$$F^* \tilde{w} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i w_i,$$

em que por w_i denotamos a forma área canônica

$$w_i = x_i dy_i \wedge dz_i + y_i dz_i \wedge dx_i + z_i dx_i \wedge dy_i \quad (2.7)$$

induzida pela métrica Rimanniana em S^2 . O pull back da função Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \sum'_{k,n} \Gamma_k \Gamma_n \log(h(\xi_n, \bar{\xi}_n) h(\xi_k, \bar{\xi}_k) |\xi_n - \xi_k|^2)$$

é

$$F^* H = \frac{1}{2} \sum'_{k,n} \Gamma_k \Gamma_n \log(\|r_n - r_k\|^2). \quad (2.8)$$

As equações de Hamilton com relação à função Hamiltoniana (2.8) e à forma simplética (2.7) são precisamente as equações de Bogomolov para a interação de N vórtices na esfera.

Vimos que as equações de Hally são equivalentes às de Bogomolov apenas para o caso em que a soma das vorticidades é zero. Portanto, em se tratando do caso geral, devemos usar as equações de Bogomolov.

2.2 Equações dos N -vórtices do ponto de vista da teoria de perturbação

Seja $E^2 \subset \mathbb{R}^3$ o elipsóide de revolução

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2(1+\varepsilon)} = 1 \quad (2.9)$$

em que $R > 0$ e $|\varepsilon| \ll 1$. Se $\varepsilon > 0$, o elipsóide é prolato. Neste caso, a excentricidade e da elipse geratriz é dada por $e = \sqrt{\varepsilon/(1+\varepsilon)}$. Se $\varepsilon < 0$ o elipsóide é oblato e a excentricidade da elipse geratriz é dada por $e = \sqrt{-\varepsilon}$. Note que em ambos os casos $\varepsilon = O(e^2)$, portanto, esperamos que o sistema truncado de primeira ordem aproxime o sistema real para valores bastantes elevados da excentricidade. Introduzimos coordenadas em E^2 através das relações

$$x = R \cos(\phi) \sin(\theta),$$

$$y = R \sin(\phi) \sin(\theta), \quad (2.10)$$

$$z = R\sqrt{1+\varepsilon} \cos(\theta),$$

com $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$. Se $\varepsilon = 0$, a superfície é uma esfera de raio R . Neste caso, a projeção,

$$u = \tan(\theta/2) \cos(\phi), \quad (2.11)$$

$$v = \tan(\theta/2) \sin(\phi),$$

é uma transformação conforme. Queremos encontrar uma transformação conforme de E^2 no plano conforme para $\varepsilon \neq 0$. Pela simetria do elipsóide, o fator conforme depende apenas da variável radial r e não da variável angular ϕ . Procuramos por uma transformação da forma

$$\theta = 2 \arctan(r) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} f_i(r) \varepsilon^i, \quad (2.12)$$

$$\phi = \psi.$$

Observe que quando $\varepsilon = 0$, a inversa desta transformação é justamente a transformação (2.11) escrita em coordenadas polares.

A simetria do elipsóide implica que o equador é um círculo de raio R . Nas coordenadas (θ, ϕ) , o equador possui parametrização dada por $\theta = \pi/2$ e $\phi \in [0, 2\pi)$. Portanto, nas coordenadas conformes (u, v) , o equador se transforma no círculo de raio $r = u^2 + v^2 = 1$.

Observação 1. *O fator conforme do elipsóide, quando restrito ao círculo de raio 1, é justamente o fator conforme usualmente utilizado na esfera, pois o elipsóide E^2 e a esfera S^2 coincidem no equador. Isto é de grande importância para o que se segue. De fato, como vamos impor conformalidade em cada ordem, esta observação implica que $f_i(1) = 0$ para todo i . Esta é a condição que garante unicidade de nossa expansão em série.*

O algoritmo para determinar $f_i(r)$ é obtido impondo-se conformalidade em cada ordem e seguindo os procedimentos canônicos da teoria clássica de perturbação: trunca-se a série até a ordem n , encontra-se condições para serem satisfeitas, e então assume-se estas condições para encontrar o termo de ordem $n + 1$. Para encontrar $f_1(r)$, impomos que

$$\theta = 2 \arctan(r) + 2f_1(r)\varepsilon, \quad (2.13)$$

$$\phi = \psi,$$

gera uma transformação conforme até primeira ordem em ε . O elemento de linha para o elipse é dado por

$$ds^2 = R^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 + R^2 (1 + \varepsilon \sin^2(\theta)) d\theta^2.$$

Queremos escrever ds^2 em termos de r e ϕ . Para este objetivo é suficiente escrever $\sin(\theta)$ e θ em termos de r . Contudo,

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \sin(2 \arctan(r) + 2f_1(r)\varepsilon) \\ &= \sin(2 \arctan(r)) + 2 \cos(2 \arctan(r)) f_1(r)\varepsilon + 2f_1(r)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ &= 2 \sin(\arctan(r)) \cos(\arctan(r)) + 2(\cos(\arctan(r))^2 - \sin(\arctan(r))^2) f_1(r)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ &= 2 \frac{r}{1+r^2} + 2 \frac{1-r^2}{1+r^2} f_1(r)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\sin^2(\theta) = \frac{4r^2}{(1+r^2)^2} + \frac{8r(1-r^2)}{(1+r^2)^2} f_1(r)\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Temos que

$$d\theta = \left(2\frac{1}{1+r^2} + 2\frac{df_1(r)}{dr}\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right)dr.$$

Portanto,

$$d\theta^2 = \left(4\frac{1}{(1+r^2)^2} + \frac{8}{1+r^2}\frac{df_1(r)}{dr}\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right)dr^2.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{4R^2}{(1+r^2)^2} \left[1 + \frac{2(1-r^2)}{r}f_1(r)\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right] r^2 d\psi^2 \\ &+ \frac{4R^2}{(1+r^2)^2} \left[1 + \left(\frac{4r^2}{(1+r^2)^2} + 2(1+r^2)\frac{df_1(r)}{dr}\right)\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right] dr^2. \end{aligned}$$

Note que ds^2 será conforme ao plano se for um múltiplo de $r^2 d\psi^2 + dr^2$. Observe que se $\varepsilon = 0$, então a equação é conforme com fator conforme $\sqrt{4R^2/(1+r^2)^2}$. Para $\varepsilon \neq 0$, a única forma dessa transformação ser conforme é o coeficiente de ε no primeiro colchete ser igual ao coeficiente de ε no segundo colchete. Ou seja,

$$(1+r^2)\frac{df_1(r)}{dr} - \frac{(1-r^2)}{r}f_1(r) = -\frac{2r^2}{(1+r^2)^2}.$$

Isto é uma equação diferencial linear para $f_1(r)$. Sua solução geral para $r > 0$ é igual a

$$f_1(r) = \frac{\left(\frac{1}{1+r^2} + c\right)}{(1+r^2)}r. \quad (2.14)$$

Agora, pela observação 1, temos $f_1(1) = 0$, o que implica $c = -\frac{1}{2}$. Finalmente, temos que

$$f_1(r) = \frac{1-r^2}{2(1+r^2)^2}r.$$

Portanto, a transformação (2.12) torna-se

$$\theta = 2 \arctan(r) + \frac{(1-r^2)}{(1+r^2)^2} r \varepsilon + 2 \sum_{i=2}^{\infty} f_i(r) \varepsilon^i, \quad (2.15)$$

$$\phi = \psi.$$

O fator conforme, até primeira ordem em ε , é dado por

$$h(r)^2 = \frac{4R^2}{(1+r^2)^2} \left\{ 1 + \frac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^2} \varepsilon \right\},$$

isto é,

$$h(r) = \frac{2R}{1+r^2} \left\{ 1 + \frac{(1-r^2)^2}{2(1+r^2)^2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \right\}.$$

Escrevemos

$$h(r) = h_0(r) + h_1(r) \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (2.16)$$

em que

$$h_0(r) = \frac{2R}{1+r^2} \text{ e } h_1(r) = R \frac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^3}.$$

Para referências futuras, observe que com relação às variáveis θ e ϕ , temos

$$h_0(r) = 2R \cos^2(\theta/2) \text{ e } h_1(r) = R \cos^2(\theta) \cos^2(\theta/2).$$

Observação 2. O procedimento acima não pode ser explicitamente calculado até a segunda ordem. De fato, a expressão para o segundo fator é

$$\frac{df_2}{dr} + \frac{1}{2} \frac{r(r^2-1)}{r^2+1} f_2 + \frac{1-13r^2+46r^4-r^{10}-26r^6+9r^8}{4(1+r^2)^5} = 0.$$

A solução geral para esta equação é dada por

$$f_2(r) = \frac{\sqrt{1+r^2}}{4r^{2/4}} \left(\int \frac{((r^2-1)^2+4r^2)(r^6-3r^4+7r^2-1)}{(1+r^2)^{11/2}} e^{1/4r^2} dr + 4c \right),$$

em que c é uma constante arbitrária. A integral acima não pode ser calculada usando funções elementares.

2.2.1 Equações dos N -vórtices

Usando o fator conforme encontrado, escreveremos as equações dos N -vórtices no elipsóide de revolução até o termo de primeira ordem em ε . Para isto consideramos em E^2 a forma simplética

$$w = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

Utilizando as coordenadas (θ, ϕ) introduzidas pela Eq. (2.10), a forma simplética acima torna-se

$$w = \sqrt{1 + \varepsilon} d\phi \wedge d(\cos(\theta)).$$

Observando que

$$\sqrt{1 + \varepsilon} d\phi \wedge d(\cos(\theta))(X_H, \cdot) = d\phi \wedge d(\cos(\theta))(\sqrt{1 + \varepsilon} X_H, \cdot),$$

definimos o campo vetorial $\tilde{X} = \sqrt{1 + \varepsilon} X_H$. \tilde{X} satisfaz as equações de Hamilton

$$d\phi \wedge d(\cos(\theta))(\tilde{X}, \cdot) = dH \tag{2.17}$$

e o fluxo $\phi_s(x)$ do campo vetorial \tilde{X} é uma reparametrização no tempo do fluxo $\phi_t(x)$ induzido por X_H . De fato, $t = \sqrt{1 + \varepsilon} s$. Portanto, podemos considerar Eq. (2.17) com H e h dados por (2.6) e (2.16), respectivamente. Contudo

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j}^l \Gamma_i \Gamma_j \ln[(h_0(r_i) + \varepsilon h_1(r_i))(h_0(r_j) + \varepsilon h_1(r_j)) |\xi_i - \xi_j|^2 + O(\varepsilon^2)].$$

Expandindo em ε temos que

$$H = -\frac{1}{2} \sum'_{i,j} \Gamma_i \Gamma_j [\ln(h_0(r_i)h_0(r_j)|\xi_i - \xi_j|^2) + \varepsilon \left(\frac{h_1(r_i)}{h_0(r_i)} + \frac{h_1(r_j)}{h_0(r_j)} \right)] + O(\varepsilon^2).$$

A função Hamiltoniana H é uma função nas variáveis (θ, ϕ) . Mais ainda, a forma simplética (2.17) é a forma simplética canônica da esfera. Portanto, para primeira ordem em ε , a dinâmica de N vórtices no elipsóide é determinado por um sistema Hamiltoniano em S^2 com função Hamiltoniana

$$H = -\frac{1}{2} \sum'_{i,j} \Gamma_i \Gamma_j [\ln(2 - 2 \cos(\theta_i) \cos(\theta_j) - 2 \sin(\theta_i) \sin(\theta_j) \cos(\phi_i - \phi_j))] \quad (2.18)$$

$$- \frac{\varepsilon}{2} \sum'_{i,j} \Gamma_i \Gamma_j [(\cos(\theta_i))^2 + (\cos(\theta_j))^2]$$

e forma simplética

$$w = \sum_{i=1}^N \Gamma_i d\phi_i \wedge d(\cos(\theta_i)). \quad (2.19)$$

Alternativamente, utilizando coordenadas cartesianas, a função Hamiltoniana (2.18) é dada por

$$H = \frac{1}{2} \sum'_{i,j} \Gamma_i \Gamma_j \log \|r_i - r_j\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \sum'_{i,j} \Gamma_i \Gamma_j (z_i^2 + z_j^2), \quad (2.20)$$

e a forma simplética (2.19) é

$$w = \sum_{i=1}^N \Gamma_i (x_i dy_i \wedge dz_i + y_i dz_i \wedge dx_i + z_i dx_i \wedge dy_i). \quad (2.21)$$

2.3 Aplicações: casos em que $N = 2$ ou $N = 3$

2.3.1 Problema dos dois vórtices

Quando $N = 2$, o sistema Hamiltoniano dado por (2.20) e (2.21) se reduz à

$$\dot{r}_1 = \Gamma_2 \frac{r_2 \times r_1}{\|r_1 - r_2\|^2} + \varepsilon \Gamma_2 r_1 \times z_1 \hat{z}, \quad (2.22)$$

$$\dot{r}_2 = \Gamma_1 \frac{r_1 \times r_2}{\|r_1 - r_2\|^2} + \varepsilon \Gamma_1 r_2 \times z_2 \hat{z}.$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$w = \Gamma_1 r_1 - \Gamma_2 r_2, \quad (2.23)$$

$$c = \Gamma_1 r_1 + \Gamma_2 r_2.$$

Obtemos que

$$\dot{w} = \frac{c \times w}{\|\alpha_1 c + \alpha_2 w\|^2} + \varepsilon (\Delta_1(c_z, w_z) c \times \hat{z} + \Delta_2(c_z, w_z) w \times \hat{z}), \quad (2.24)$$

$$\dot{c} = \varepsilon (\Delta_2(c_z, w_z) c \times \hat{z} + \Delta_1(c_z, w_z) w \times \hat{z}),$$

em que

$$\alpha_1 \equiv \frac{1}{2} \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Gamma_1 \Gamma_2}, \quad \alpha_2 \equiv \frac{1}{2} \frac{\Gamma_2 + \Gamma_1}{\Gamma_1 \Gamma_2},$$

$$\Delta_1 \equiv \frac{\Gamma_2(c_z + w_z)}{4\Gamma_1} - \frac{\Gamma_1(c_z - w_z)}{4\Gamma_2} \quad \text{e} \quad \Delta_2 \equiv \frac{\Gamma_2(c_z + w_z)}{4\Gamma_1} + \frac{\Gamma_1(c_z - w_z)}{4\Gamma_2}.$$

O sistema (2.24) é singular quando $\alpha_1 c = \alpha_2 w$, isto é, $r_1 = r_2$. Quando $\varepsilon = 0$ a Eq. (2.24) se

reduz a um sistema linear e pode ser facilmente resolvido. Essas são as soluções bem conhecidas para o problema dos dois vórtices sobre a esfera. Em um sistema de coordenadas em que o eixo z está na mesma direção que o centro de vorticidade c , as soluções são dadas nas variáveis r_1, r_2 por

$$r_1(t) = \frac{1}{2\Gamma_1}(\mu \cos(\theta), \mu \sin(\theta), \|c\| + w_z), \quad (2.25)$$

$$r_2(t) = \frac{1}{2\Gamma_2}(-\mu \cos(\theta), -\mu \sin(\theta), \|c\| - w_z),$$

em que

$$\theta \equiv \gamma t + \phi,$$

com ϕ constante e

$$\gamma = \frac{\|c\|}{\alpha_2^2 \mu^2 + (\alpha_2 w_z + \alpha_1 \|c\|)^2}, \quad (2.26)$$

com

$$\mu^2 = w_x^2 + w_y^2 = \|w\|^2 - w_z^2 \text{ e } \mu \geq 0.$$

Observe que todas as soluções são periódicas e a distância relativa entre os vórtices é uma integral primeira.

Quando $\varepsilon \neq 0$, o centro de vorticidade c não é preservado. De fato, apenas sua componente z ou seja c_z é preservada. Esta integral primeira implica, por dimensionalidade, que o sistema é integrável. Como $\|r_1\| = \|r_2\| = 1$, obtemos que

$$\|c\|^2 + \|w\|^2 = k_1 \text{ e } c \cdot w = k_2$$

são constantes de movimento.

2.3.1.1 Equilíbrios

Os equilíbrios relativos e absolutos podem ser facilmente caracterizados quando $|\Gamma_1| = |\Gamma_2| \equiv \Gamma$. Neste caso,

$$\|c\|^2 + \|w\|^2 = \Gamma \text{ e } c \cdot w = 0.$$

Como

$$\|r_1 - r_2\|^2 = \|c\|^2 \alpha_1^2 + \|w\|^2 \alpha_2^2$$

e $|\Gamma_1| = |\Gamma_2|$, então, $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_2 = 0$, conseqüentemente $\|c\|^2$ e $\|w\|^2$ são constantes para os equilíbrios relativos. Portanto,

$$c \cdot \dot{c} = \varepsilon \Delta_1 c \cdot (w \times \hat{z}) = 0. \quad (2.27)$$

$\Delta_1 = 0$ implica $w_z = 0$, logo $\dot{w}_z = 0$. Contudo, pelas equações de movimento $c \cdot (w \times \hat{z}) = 0$. Portanto, a única forma da Eq. (2.27) ser zero é $c \cdot (w \times \hat{z}) = 0$. Ou seja, nos equilíbrios relativos os vetores c , w e \hat{z} são coplanares. Sendo assim $r_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $r_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e \hat{z} também são coplanares. Do fato de c_z e w_z serem constantes segue que z_1 e z_2 também são. Portanto, se r_1 e r_2 são equilíbrios relativos, eles giram em torno de \hat{z} com mesma velocidade angular.

Para encontrarmos os equilíbrios do sistema (2.22), tanto os relativos quanto os absolutos, consideramos que $r_1(t) = (A \cos(\Omega t), A \sin(\Omega t), z_1)$, $r_2(t) = (B \cos(\Omega t), B \sin(\Omega t), z_2)$ é solução do problema dos dois vórtices e chegamos aos seguintes resultados. Os pontos $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$ são equilíbrios absolutos, que chamaremos de *solução axial*. Supondo $z_1 \neq \pm 1$ e $z_2 \neq \pm 1$ dividimos o problema em dois casos:

Caso $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Aqui os equilíbrios relativos são dados por

$$r_1(t) = (x_1 \cos(\Omega t), x_1 \sin(\Omega t), z_1)$$

$$r_2(t) = (-x_1 \cos(\Omega t), -x_1 \sin(\Omega t), z_1),$$

em que

$$\Omega = \frac{\Gamma z_1}{2(1 - z_1^2)} - \varepsilon \Gamma z_1, \quad x_1^2 + z_1^2 = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma = \Gamma_1.$$

Note que se $z_1 = 0$, os equilíbrios são absolutos.

Caso $\Gamma_1 = -\Gamma_2$. Existem dois tipos de equilíbrios relativos. São eles

$$r_1(t) = (x_1 \cos(\Omega t), x_1 \sin(\Omega t), z_1),$$

$$r_2(t) = (x_1 \cos(\Omega t), x_1 \sin(\Omega t), -z_1),$$

em que

$$\Omega = \frac{\Gamma}{2z_1} + \varepsilon \Gamma z_1, \quad x_1^2 + z_1^2 = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma = \Gamma_1.$$

Aqui estamos considerando $z_1 \neq 0$, pois, caso contrário, teríamos $r_1(t) = r_2(t)$.

E os equilíbrios

$$r_1(t) = (x_1 \cos(\Omega t), x_1 \sin(\Omega t), z_1),$$

$$r_2(t) = (-x_1 \cos(\Omega t), -x_1 \sin(\Omega t), -z_1),$$

em que

$$\Omega = \varepsilon \Gamma z_1, \quad x_1^2 + z_1^2 = 1, \quad \text{e} \quad \Gamma = \Gamma_1.$$

Note que se $z_1 = 0$, os equilíbrios são absolutos.

2.3.2 Problema dos três vórtices

Nesta seção estudamos numericamente o problema dos três vórtices sobre o elipsóide simétrico. Dado que, a componente z do vetor centro de vorticidade é conservada, o sistema pode ser escrito como um sistema Hamiltoniano em um espaço de fase de dimensão 4. Fixada a energia determinamos numericamente as seções de Poincaré.

A quebra de simetria dada por $\varepsilon \neq 0$ pode ocasionar em quebra de integrabilidade para o problema dos três vórtices (sugerimos aos leitores as referências [33], [34] para perturbações que quebram simetria em domínios planares integráveis). De fato, observando o vetor centro de vorticidade, que é definido por

$$c = \Gamma_1 r_1 + \Gamma_2 r_2 + \Gamma_3 r_3.$$

Vemos que para $\varepsilon = 0$,

$$\dot{c} = 0.$$

Enquanto que para $\varepsilon \neq 0$ garantimos apenas que

$$\dot{c}_z = 0,$$

em que c_z é a componente z de c .

Mostramos numericamente que a integrabilidade é destruída. Não nos dedicamos a um estudo numérico completo do problema. Isto será feito em um trabalho futuro. Para calcular as seções de Poincaré para o problema dos três vórtices, introduzimos um sistema de coordenadas apropriado. Primeiramente, usamos um sistema de coordenadas cilíndricas $(z_1, z_2, z_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$

com $\phi_i \in [0, 2\pi)$ e $z_i \in (-1, 1)$ para $i = 1, 2, 3$. A transformação é definida da seguinte forma

$$x_i = \sqrt{1 - z_i^2} \cos(\phi_i),$$

$$y_i = \sqrt{1 - z_i^2} \sin(\phi_i),$$

$$z_i = z_i.$$

Como

$$w = \sum_{i=1}^3 \Gamma_i (x_i dy_i \wedge dz_i + y_i dz_i \wedge dx_i + z_i dx_i \wedge dy_i) = \sum_{i=1}^3 d\phi_i \wedge dz_i,$$

essa transformação é simplética e as equações em coordenadas cilíndricas são dadas por

$$\dot{\phi}_i = \frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial H}{\partial z_i} \text{ e } \dot{z}_i = -\frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial H}{\partial \phi_i} \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Para eliminar a simetria axial, definimos as coordenadas

$$q_1 = \Gamma_1 z_1 - \Gamma_3 z_3,$$

$$q_2 = \Gamma_1 z_1 - \Gamma_2 z_2,$$

$$q_3 = \Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2 + \Gamma_3 z_3,$$

$$p_1 = \frac{\phi_1}{3} + \frac{\phi_2}{3} - 2\frac{\phi_3}{3},$$

$$p_2 = \frac{\phi_1}{3} - 2\frac{\phi_2}{3} + \frac{\phi_3}{3},$$

$$p_3 = \frac{\phi_1}{3} + \frac{\phi_2}{3} + \frac{\phi_3}{3}.$$

Disto segue que,

$$dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2 + dq_3 \wedge dp_3 = \Gamma_1 dz_1 \wedge d\phi_1 + \Gamma_2 dz_2 \wedge d\phi_2 + \Gamma_3 dz_3 \wedge d\phi_3.$$

Portanto, nessas novas coordenadas, temos um sistema com forma simplética canônica. Observe que $q_3(t) = c_z$, logo, $\dot{q}_3(t) = \partial H / \partial p_3 = 0$. Então, p_3 é uma variável cíclica e o Hamilto-

niano (2.20) é dado por

$$H = H(q_1, q_2, p_1, p_2, c_z).$$

Como este Hamiltoniano é agora definido em um espaço de fases de dimensão 4, o mapa de Poincaré pode ser visualizado. As equações são integradas numericamente usando o Runge-Kuta Felberg 7(8). O erro relativo na energia é mantido menor que 10^{-10} . Um passo de tamanho constante igual à 10^{-3} é utilizado em todas as integrações.

A Figura 2.1 é a imagem de três mapas de Poincaré. Indícios de comportamento caótico são evidentes. Como esperado isso aparece em torno da solução homoclínica existente no caso integrável $\varepsilon = 0$. Observe que para $\varepsilon = 0.05$ e $\varepsilon = 0.10$, as excentricidades das elipses geratrizes são respectivamente 0.22 e 0.33.

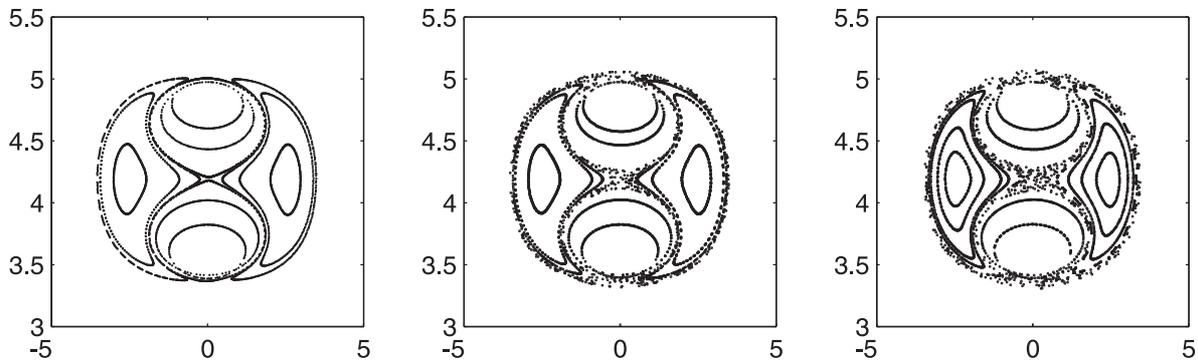


Figura 2.1 Mapas de Poincaré do problema dos três-vórtices. Consideramos, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 3$, energia $= -\frac{1}{2}$ e $c_z = -\frac{1}{4}$. q_2 é o eixo horizontal e p_2 é o eixo vertical. Os valores de ε são, respectivamente, 0.00, 0.05, 0.10.

O traçador passivo

UTILIZAMOS as equações deduzidas no capítulo anterior para estudar a dinâmica do traçador passivo no elipsóide (2.9). O traçador passivo é um elemento do fluido com vorticidade nula. Este elemento não altera o movimento dos vórtices, mas é afetado por estes. Estudamos a dinâmica do traçador sob a influência de dois vórtices que formam um equilíbrio relativo. Mostramos que o sistema truncado de primeira ordem não admite solução de colisão do traçador com os vórtices. Determinamos também os equilíbrios relativos deste sistema e estudamos suas estabilidades.

Para obter as equações de movimento até primeira ordem em ε , consideramos as equações truncadas de primeira ordem para o problema dos três vórtices e tomamos o limite quando uma das vorticidades tende a zero. Consideramos o traçador como sendo o vórtice cuja vorticidade tende à zero e assim obtivemos as equações de movimento.

As equações do problema dos três vórtices são

$$\begin{aligned}
 \dot{r}_1 &= \Gamma_2 \frac{r_2 \times r_1}{\|r_1 - r_2\|^2} + \Gamma_3 \frac{r_3 \times r_1}{\|r_3 - r_1\|^2} + \varepsilon(\Gamma_2 + \Gamma_3)r_1 \times z_1 \hat{z}, \\
 \dot{r}_2 &= \Gamma_1 \frac{r_1 \times r_2}{\|r_1 - r_2\|^2} + \Gamma_3 \frac{r_3 \times r_2}{\|r_3 - r_2\|^2} + \varepsilon(\Gamma_1 + \Gamma_3)r_2 \times z_2 \hat{z}, \\
 \dot{r}_3 &= \Gamma_1 \frac{r_1 \times r_3}{\|r_3 - r_1\|^2} + \Gamma_2 \frac{r_2 \times r_3}{\|r_3 - r_2\|^2} + \varepsilon(\Gamma_1 + \Gamma_2)r_3 \times z_3 \hat{z}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Tomando o limite quando $\Gamma_3 \rightarrow 0$, as duas primeiras equações se desacoplam da terceira e se transformam nas equações do problema dos dois vórtices, (ver Eq. (2.22)). Enquanto que a terceira se transforma na equação do traçador. Portanto, para uma solução $(r_1(t), r_2(t))$ do problema de dois vórtices a equação do traçador passivo é dada por

$$\dot{r} = \Gamma_1 \frac{r_1(t) \times r}{\|r - r_1(t)\|^2} + \Gamma_2 \frac{r_2(t) \times r}{\|r - r_2(t)\|^2} + \varepsilon(\Gamma_1 + \Gamma_2)r \times z\hat{z}. \quad (3.2)$$

Note que este sistema é Hamiltoniano com função Hamiltoniana

$$H = \frac{\Gamma_1}{2} \log(\|r - r_1(t)\|^2) + \frac{\Gamma_2}{2} \log(\|r - r_2(t)\|^2) + \frac{\varepsilon}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)z^2 \quad (3.3)$$

e forma simplética

$$w = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

Com o intuito de estudar a dinâmica do traçador passivo sob a influência dos equilíbrios relativos do problema de dois vórtices, os quais giram em torno do eixo z , adotamos o seguinte sistema de coordenadas girantes:

$$R = A_\Omega r,$$

em que A_Ω é a matriz ortogonal

$$A_\Omega = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & 0 \\ -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\dot{r} = \dot{A}_\Omega^t R + A_\Omega^t \dot{R},$$

as equações (3.2) tornam-se

$$\dot{A}_\Omega^t R + A_\Omega^t \dot{R} = \Gamma_1 \frac{A_\Omega^t R_1 \times A_\Omega^t R}{\|A_\Omega^t R - A_\Omega^t R_1\|^2} + \Gamma_2 \frac{A_\Omega^t R_2 \times A_\Omega^t R}{\|A_\Omega^t R - A_\Omega^t R_2\|^2} + \varepsilon(\Gamma_1 + \Gamma_2) A_\Omega^t R \times A_\Omega^t z \hat{z}.$$

Note que,

$$\dot{A}_\Omega^t = -A_\Omega^t \dot{A}_\Omega A_\Omega^t,$$

$$\dot{A}_\Omega A_\Omega^t R = \Omega R \times \hat{z},$$

$$A_\Omega^t R_i \times A_\Omega^t R = A_\Omega^t (R_i \times R),$$

$$\|A_\Omega^t (R_i - R)\|^2 = \|R_i - R\|^2.$$

Portanto, nessas coordenadas girantes, a Eq. (3.2) é dada por

$$\dot{R} = \Gamma_1 \frac{R_1(t) \times R}{\|R - R_1(t)\|^2} + \Gamma_2 \frac{R_2(t) \times R}{\|R - R_2(t)\|^2} + [\Omega + \varepsilon z(\Gamma_1 + \Gamma_2)] R \times \hat{z}. \quad (3.4)$$

3.1 Análise das singularidades

Suponha que $(r_1(t), r_2(t))$ é solução do problema de dois vórtices e que estas giram em torno do eixo \hat{z} com velocidade angular Ω . Em coordenadas que também giram em torno de \hat{z} com

mesma velocidade angular temos que

$$R_i(t) = A_{\Omega} r_i(t) = (x_i, y_i, z_i) = R_i$$

em que

$$r_i(0) = (x_i, y_i, z_i).$$

Em relação à esta solução, a Eq. (3.4) torna-se

$$\dot{R} = \Gamma_1 \frac{R_1 \times R}{\|R - R_1\|^2} + \Gamma_2 \frac{R_2 \times R}{\|R - R_2\|^2} + [\Omega + \varepsilon z(\Gamma_1 + \Gamma_2)] R \times \hat{z}. \quad (3.5)$$

O sistema (3.5) não é definido quando o traçador colide com os vórtices, isto é, quando $R(t) = R_1$ ou $R(t) = R_2$. Uma solução que leva a uma colisão em algum instante de tempo t^* (possivelmente $t^* = \pm\infty$) é chamada de solução de colisão.

Proposição 1. *O fluxo de (3.5) não admite soluções de colisão.*

Demonstração. Definimos um novo parâmetro s da seguinte forma

$$s(t) = \int_0^t \frac{1}{D_1(\xi)D_2(\xi)} d\xi, \quad (3.6)$$

em que a integral é realizada ao longo do movimento e $D_i(\xi) = \|\xi - R_i\|^2$. Para uma solução que não colide, temos que

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dR}{ds} \frac{1}{D_1 D_2} = R' \frac{1}{D_1 D_2},$$

em que por $'$ denotamos $\frac{d}{ds}$. Realizando uma mudança de parâmetro em (3.5), obtemos

$$R' = \Gamma_1 D_2 (R_1 \times R) + \Gamma_2 D_1 (R_2 \times R) + D_1 D_2 [\Omega + \varepsilon z(\Gamma_1 + \Gamma_2)] R \times \hat{z}. \quad (3.7)$$

Observe que (3.7) é livre de singularidades.

Lema 1. R_1 e R_2 são equilíbrios estáveis de (3.7) no sentido de Lyapounov

Demonstração. Provamos a proposição para R_1 . A prova para R_2 é análoga. Considere a função

$$F = \begin{cases} e^{H_\Omega} & \text{se } R \neq R_1 \text{ e } \Gamma_1 > 0, \\ e^{-H_\Omega} & \text{se } R \neq R_1 \text{ e } \Gamma_1 < 0, \\ 0 & \text{se } R = R_1, \end{cases} \quad (3.8)$$

em que H_Ω é a função Hamiltoniana de (3.5). Ou seja,

$$H_\Omega = \frac{\Gamma_1}{2} \log(\|R - R_1\|^2) + \frac{\Gamma_2}{2} \log(\|R - R_2\|^2) + \frac{\varepsilon}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)z^2 + \Omega z.$$

Portanto F é uma função contínua e positiva com mínimo global em R_1 . De fato, quando $R \rightarrow R_1$, $\|R - R_1\| \rightarrow 0$ e $H_\Omega \rightarrow -\infty$. Mais ainda, é diferenciável ao longo do fluxo. F é uma função de Lyapounov, pois para uma solução que não colide temos que

$$\frac{dF}{ds} = \frac{d}{ds} e^{H_\Omega} = e^{H_\Omega} \frac{dH_\Omega}{ds} = e^{H_\Omega} \frac{dH_\Omega}{dt} \frac{dt}{ds} = D_1 D_2 e^{H_\Omega} \frac{dH_\Omega}{dt} = 0.$$

A última igualdade segue do fato que o sistema é Hamiltoniano. □

Isto termina a prova da proposição 1. De fato, o sistema regularizado (3.7) é uma reparametrização de um sistema Hamiltoniano de dimensão 2. Seus pontos críticos estáveis são centros, portanto as variedades estáveis e instáveis são os próprios equilíbrios. □

Observação 3. O fato importante desta proposição é que nos diz que os vórtices se comportam topologicamente como centros. Este fato, combinado com a fórmula de Euler em S^2 , restringe as possibilidades de bifurcação dos pontos críticos.

3.2 O traçador em relação à solução axial

Nesta seção, estudamos o problema do traçador passivo sob a influência da solução axial $r_1 = (0, 0, 1)$, $r_2 = (0, 0, -1)$. A equação do traçador passivo em relação a este equilíbrio é dada por

$$\dot{R} = \left(\frac{\Gamma_1}{D_1} - \frac{\Gamma_2}{D_2} - \varepsilon z(\Gamma_1 + \Gamma_2) \right) (-y, x, 0), \quad (3.9)$$

em que

$$D_1 = \|r_1 - r\|^2 = 2(1 - z),$$

$$D_2 = \|r_2 - r\|^2 = 2(1 + z).$$

Proposição 2. Para $|\varepsilon| \ll 1$, o sistema dinâmico do traçador passivo dado por (3.9) não possui equilíbrio se $\Gamma_1 = -\Gamma_2 \neq 0$. Se $\Gamma_1 = \Gamma_2$, então os pontos do círculo $x^2 + y^2 = 1$ são equilíbrios de (3.9).

Demonstração. As soluções do sistema (3.9) são dadas por

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\cos\left(\left[\frac{\Gamma_1}{D_1} - \frac{\Gamma_2}{D_2} - \varepsilon(\Gamma_1 + \Gamma_2)\right]t + \alpha\right), \sin\left(\left[\frac{\Gamma_1}{D_1} - \frac{\Gamma_2}{D_2} - \varepsilon(\Gamma_1 + \Gamma_2)\right]t + \alpha\right), z \right),$$

em que $x = \cos(\alpha)$ e $y = \sin(\alpha)$. Os equilíbrios de (3.9) são os pontos tais que

$$\frac{\Gamma_1}{D_1} - \frac{\Gamma_2}{D_2} - \varepsilon z(\Gamma_1 + \Gamma_2) = 0. \quad (3.10)$$

Para o caso em que $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, a equação acima torna-se

$$(1 - 2\varepsilon(1 - z^2))z = 0.$$

Portanto,

$$1 - 2\varepsilon(1 - z^2) = 0 \text{ ou } z = 0.$$

Como $|\varepsilon| \ll 1$ e z é um número real tq. $|z| \leq 1$ então $1 - 2\varepsilon(1 - z^2) \neq 0$. Logo $z = 0$, ou seja, todo o círculo $x^2 + y^2 = 1$ é formado por pontos de equilíbrio.

No caso em que $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$, a equação (3.10) torna-se

$$2\Gamma(1 + z) + 2\Gamma(1 - z) = 0$$

$$2\Gamma = 0.$$

Logo, não existe equilíbrios se $\Gamma \neq 0$.

□

3.3 O traçador no caso em que $\Gamma_1 = \Gamma_2$

Nesta seção consideramos o problema do traçador passivo no elipsóide (2.9) sob a influência da solução do problema dos dois vórtices $(r_1(t), r_2(t))$ dada por

$$r_1(t) = (x_1 \cos(\Omega t), x_1 \sin(\Omega t), z_1), \tag{3.11}$$

$$r_2(t) = (-x_1 \cos(\Omega t), -x_1 \sin(\Omega t), z_1),$$

em que $\Omega = \Gamma z_1 \left(\frac{1}{2(1-z_1^2)} - \varepsilon \right)$ e $x_1^2 + z_1^2 = 1$. Como vimos na seção 2.3.1, esta solução é um equilíbrio relativo. Fazendo a mudanças de coordenadas

$$R = A_\Omega r$$

obtemos que

$$R_1 = (x_1, 0, z_1),$$

$$R_2 = (-x_1, 0, z_1),$$

(3.12)

$$D_1 = \|R - R_1\|^2 = 2(1 - x_1x - z_1z),$$

$$D_2 = \|R - R_2\|^2 = 2(1 + x_1x - z_1z).$$

Nestas coordenadas girantes a equação do traçador é dada por

$$\dot{R} = \frac{\Gamma}{D_1}(-z_1y, z_1x - x_1z, x_1y) + \frac{\Gamma}{D_2}(-z_1y, z_1x + x_1z, -x_1y) +$$

(3.13)

$$(2\varepsilon\Gamma z + \Gamma(\frac{z_1}{2x_1^2} - \varepsilon z_1))(y, -x, 0).$$

Proposição 3. Para $|\varepsilon| \ll 1$, o sistema dinâmico do traçador passivo dado por (3.13) pode pos-

suir até seis equilíbrios. Se $z_1 \in (-1, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1)$, os equilíbrios são $(0, 0, \pm 1)$, $(\pm \sqrt{1 - (\tilde{z})^2}, 0, \tilde{z})$

e $(0, \pm \sqrt{1 - (z_*)^2}, z_*)$. Se $z_1 \in (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$, os equilíbrios são $(0, 0, \pm 1)$ e $(0, \pm \sqrt{1 - (z_*)^2}, z_*)$.

Se $z_1 \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$, os equilíbrios são $(0, 0, \pm 1)$. E se $z_1 = 0$, os equilíbrios são $(0, \pm 1, 0)$ e $(0, 0, \pm 1)$. Em que

$$z_* = \frac{-2\epsilon x_1^2 z_1^2 + z_1^2 - 4\epsilon x_1^2 - \sqrt{(2\epsilon x_1^2 z_1^2 - z_1^2 + 4\epsilon x_1^2)^2 + 16\epsilon x_1^2 z_1 (-2z_1 x_1^2 + z_1 - 2\epsilon x_1^2 z_1)}}{-8\epsilon x_1^2 z_1},$$

$$\tilde{z} = \frac{3\epsilon z_1 - \frac{z_1}{2x_1^2} - \sqrt{(\frac{z_1}{2x_1^2} - 3\epsilon z_1)^2 - 8\epsilon(1 - \frac{z_1^2}{2x_1^2} + \epsilon z_1^2)}}{4\epsilon^2} \quad \text{se} \quad z_1 \in (-1, -\frac{2}{3}),$$

$$\tilde{z} = \frac{3\epsilon z_1 - \frac{z_1}{2x_1^2} + \sqrt{(\frac{z_1}{2x_1^2} - 3\epsilon z_1)^2 - 8\epsilon(1 - \frac{z_1^2}{2x_1^2} + \epsilon z_1^2)}}{4\epsilon^2} \quad \text{se} \quad z_1 \in (\frac{2}{3}, 1).$$

Demonstração. Consideramos $x_1 \neq 0$, pois caso contrário $r_1(t) = r_2(t) = (0, 0, 1)$. Os equilíbrios de (3.13) são os pontos tais que

$$(I) \quad \Gamma z_1 y \left(-\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} + \frac{1}{2x_1^2} - \epsilon\right) + 2\epsilon \Gamma y z = 0,$$

$$(II) \quad \frac{\Gamma}{D_1} (z_1 x - x_1 z) + \frac{\Gamma}{D_2} (z_1 x + x_1 z) - 2\epsilon \Gamma x z - \frac{\Gamma z_1 x}{2x_1^2} + \epsilon \Gamma z_1 x = 0, \quad (3.14)$$

$$(III) \quad \Gamma x_1 y \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right) = 0.$$

De (III) temos

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad D_1 = D_2.$$

Supondo $y \neq 0$, segue que $D_1 = D_2 = D = 2(1 - z_1 z)$. Consequentemente $x = 0$, e se existir equilíbrios eles estão no grande círculo $y^2 + z^2 = 1$. A Eq. (II) se reduz à $0 = 0$. De (I) obtemos

$$z_1 \left(-2 + \frac{D}{2x_1^2} - \varepsilon D \right) + 2\varepsilon z D = 0.$$

Desenvolvendo, temos que

$$-4\varepsilon x_1^2 z_1 z^2 + (2\varepsilon x_1^2 z_1^2 - z_1^2 + 4\varepsilon x_1^2)z - 2z_1 x_1^2 + z_1 - 2\varepsilon x_1^2 z_1 = 0. \quad (3.15)$$

Se $z_1 = 0$, então $z = 0$ e $(0, \pm 1, 0)$ são equilíbrios de (3.13). Se $z_1 \neq 0$, então para saber se este polinômio admite raízes reais com norma menor que um, usamos o seguinte lema:

Lema 2. O polinômio $ax^2 + bx + c$ tem

1) uma única raiz no intervalo $(-1, +1)$ se, e somente se, uma das condições a seguir são satisfeitas:

i) $|\frac{b}{2a}| < 1$ e $b^2 - 4ac = 0$,

ii) $|a + c| < |b|$.

2) duas raízes no intervalo $(-1, +1)$ se, e somente se, as três desigualdades a seguir são satisfeitas:

i) $|\frac{b}{2a}| < 1$,

ii) $(a + b + c) \left(\frac{4ac - b^2}{4a} \right) < 0$,

iii) $(a - b + c) \left(\frac{4ac - b^2}{4a} \right) < 0$.

Em relação ao polinômio (3.15) temos que

$$\left| \frac{b}{2a} \right| = \left| -\frac{1}{4} + \frac{1}{8\epsilon x_1^2} - \frac{1}{2z_1^2} \right|.$$

Como $|\epsilon| \ll 1$ o item (i) das partes 1) e 2) do lema 2 não é satisfeito. Logo o polinômio (3.15) pode ter no máximo uma raiz real se o item (ii) da parte 1) for satisfeito. Note que

$$|a + c| = |-4\epsilon x_1^2 z_1 - 2z_1 x_1^2 + z_1 - 2\epsilon x_1^2 z_1|,$$

$$|b| = |2\epsilon x_1^2 z_1^2 - z_1^2 + 4\epsilon x_1^2|.$$

Como $|\epsilon| \ll 1$, para $|a + c| < |b|$ basta que

$$|-2z_1 x_1^2 + z_1| < z_1^2.$$

Ou seja,

$$z_1 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Neste caso, os equilíbrios de (3.13) são

$$(0, \pm \sqrt{1 - (z_*)^2}, z_*),$$

em que

$$z_* = \frac{-2\epsilon x_1^2 z_1^2 + z_1^2 - 4\epsilon x_1^2 - \sqrt{(2\epsilon x_1^2 z_1^2 - z_1^2 + 4\epsilon x_1^2)^2 + 16\epsilon x_1^2 z_1 (-2z_1 x_1^2 + z_1 - 2\epsilon x_1^2 z_1)}}{-8\epsilon x_1^2 z_1}.$$

Suponha agora $y = 0$. Logo, se existem equilíbrios, eles estão no grande círculo $x^2 + z^2 = 1$.

De (II) temos que

$$D_2(z_1 x - x_1 z) + D_1(z_1 x + x_1 z) - 2\epsilon x z D_1 D_2 - \frac{z_1 x}{2x_1^2} D_1 D_2 + \epsilon z_1 x D_1 D_2 = 0. \quad (3.16)$$

Como

$$D_1 D_2 = 4(z_1 - z)^2,$$

$$D_1 + D_2 = 4(1 - z_1 z),$$

$$D_1 - D_2 = -4x_1 x.$$

Então (3.16) torna-se

$$(z_1 - z) \left[x - 2\epsilon x z (z_1 - z) - \frac{z_1 x}{2x_1^2} (z_1 - z) + \epsilon z_1 x (z_1 - z) \right] = 0.$$

Portanto,

$$z_1 - z = 0 \text{ ou } x - 2\epsilon x z (z_1 - z) - \frac{z_1 x}{2x_1^2} (z_1 - z) + \epsilon z_1 x (z_1 - z) = 0.$$

Se $z_1 - z = 0$ então $z = z_1$ e $x = \pm x_1$, ou seja, $R = R_1$ ou $R = R_2$. Suponha, então,

$$x - 2\epsilon x z (z_1 - z) - \frac{z_1 x}{2x_1^2} (z_1 - z) + \epsilon z_1 x (z_1 - z) = 0.$$

Logo,

$$x = 0 \text{ ou } 1 - 2\epsilon z (z_1 - z) - \frac{z_1}{2x_1^2} (z_1 - z) + \epsilon z_1 (z_1 - z) = 0.$$

Se

$$x = 0 \text{ então } z = \pm 1$$

e assim $(0, 0, \pm 1)$ são equilíbrios de (3.13) para quaisquer valores de z_1 . Se $x \neq 0$ então

$$1 - 2\epsilon z (z_1 - z) - \frac{z_1}{2x_1^2} (z_1 - z) + \epsilon z_1 (z_1 - z) = 0.$$

Ou seja,

$$2\epsilon z^2 + \left(\frac{z_1}{2x_1^2} - 3\epsilon z_1 \right) z + 1 - \frac{z_1}{2x_1^2} + \epsilon z_1^2 = 0. \quad (3.17)$$

Podemos supor $z_1 \neq 0$ pois caso contrário $z = \pm\sqrt{-1/2\varepsilon}$. Neste caso, se $\varepsilon > 0$ então z não é um número real, e se $\varepsilon < 0$ então $|z| > 1$, pois $|\varepsilon| \ll 1$. Pelo lema 2 o polinômio (3.17) não pode ter duas raízes reais. De fato,

$$\left| \frac{b}{2a} \right| = \left| -z_1 + \frac{z_1}{4\varepsilon x_1^2} - \frac{z_1}{2} \right| > 1$$

já que $|\varepsilon| \ll 1$. Ainda pode existir uma raiz real se o ítem (ii) da parte 1) do lema 2 for satisfeito.

Como $|\varepsilon| \ll 1$, em relação ao polinômio (3.17), temos que para

$$|a + c| < |b|$$

basta que

$$|2 - 3z_1^2| < |z_1|.$$

O conjunto solução desta inequação é

$$\left(-1, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right).$$

Sendo assim,

$$\left(\pm\sqrt{1 - (\tilde{z})^2}, 0, \tilde{z}\right)$$

são equilíbrios de (3.13), em que

$$\tilde{z} = \frac{3\varepsilon z_1 - \frac{z_1}{2x_1^2} - \sqrt{\left(\frac{z_1}{2x_1^2} - 3\varepsilon z_1\right)^2 - 8\varepsilon\left(1 - \frac{z_1^2}{2x_1^2} + \varepsilon z_1^2\right)}}{4\varepsilon^2} \quad \text{se } z_1 \in \left(-1, -\frac{2}{3}\right),$$

$$\tilde{z} = \frac{3\varepsilon z_1 - \frac{z_1}{2x_1^2} + \sqrt{\left(\frac{z_1}{2x_1^2} - 3\varepsilon z_1\right)^2 - 8\varepsilon\left(1 - \frac{z_1^2}{2x_1^2} + \varepsilon z_1^2\right)}}{4\varepsilon^2} \quad \text{se } z_1 \in \left(\frac{2}{3}, 1\right).$$

□

3.3.1 Estabilidades dos equilíbrios

Nesta seção analisamos a estabilidade dos equilíbrios descritos na proposição 3. A estabilidade foi determinada em função da coordenada z_1 dos vórtices, como vemos na proposição seguinte.

Proposição 4. *Os equilíbrios do sistema (3.13), descritos na proposição 3, têm as seguintes estabilidades:*

z_1	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, -1)$	$(0, y_*, z_*)$	$(0, -y_*, z_*)$	$(\tilde{x}, 0, \tilde{z})$	$(-\tilde{x}, 0, \tilde{z})$
$(-1, -\frac{2}{3})$	centro	sela	centro ou sela	centro ou sela	centro ou sela	centro ou sela
$(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2})$	sela	sela	centro	centro	×	×
$(-\frac{1}{2}, 0)$	centro	sela	×	×	×	×
$(0, \frac{1}{2})$	sela	centro	×	×	×	×
$(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$	sela	sela	centro	centro	×	×
$(\frac{2}{3}, 1)$	sela	centro	centro ou sela	centro ou sela	centro ou sela	centro ou sela

em que $y_* = \sqrt{1 - (z_*)^2}$, $\tilde{x} = \sqrt{1 - (\tilde{z})^2}$ e \times indica que o ponto deixa de ser equilíbrio no respectivo intervalo.

Observação 4. *Nos intervalos $(-1, -\frac{2}{3})$ e $(\frac{2}{3}, 1)$ os equilíbrios $(0, \pm y_*, z_*)$ e $(\pm \tilde{x}, 0, \tilde{z})$ são duas selas e dois centros.*

Nas extremidades dos intervalos a estabilidade depende de ε . Se $\varepsilon > 0$ então

z_1	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, -1)$	$(0, y_*, z_*)$	$(0, -y_*, z_*)$	$(0, 1, 0)$	$(0, -1, 0)$
$-\frac{2}{3}$	sela	sela	centro	centro	×	×
$-\frac{1}{2}$	centro	sela	×	×	×	×
0	centro	centro	×	×	sela	sela
$\frac{1}{2}$	sela	centro	×	×	×	×
$\frac{2}{3}$	sela	centro	sela ou centro	sela ou centro	×	×

Se $\varepsilon < 0$ então

z_1	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, -1)$	$(0, y_*, z_*)$	$(0, -y_*, z_*)$	$(0, 1, 0)$	$(0, -1, 0)$
$-\frac{2}{3}$	centro	sela	sela ou centro	sela ou centro	×	×
$-\frac{1}{2}$	centro	sela	×	×	×	×
0	sela	sela	×	×	centro	centro
$\frac{1}{2}$	sela	centro	×	×	×	×
$\frac{2}{3}$	sela	sela	centro	centro	×	×

Observação 5. Nos valores $z_1 = \frac{2}{3}$ para $\varepsilon > 0$, ou $z_1 = -\frac{2}{3}$ para $\varepsilon < 0$, os equilíbrios $(0, \pm y_*, z_*)$

são uma sela e um centro.

Demonstração. Considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$x = x,$$

$$y = \sqrt{1-x^2} \sin(\theta), \quad (3.18)$$

$$z = \sqrt{1-x^2} \cos(\theta).$$

Utilizando a notação $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ temos que

$$\dot{x} = \dot{x},$$

$$\dot{y} = \sqrt{1-x^2} \cos(\theta) \dot{\theta} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\theta) \dot{x}, \quad (3.19)$$

$$\dot{z} = -\sqrt{1-x^2} \sin(\theta) \dot{\theta} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cos(\theta) \dot{x}.$$

Substituindo essas equações em (3.13), obtemos as equações de movimento em relação às variáveis (θ, x) :

$$\dot{\theta} = \Gamma z_1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cos(\theta) \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} - \frac{1}{2x_1^2} + \varepsilon \right) - 2\varepsilon \Gamma x \cos(\theta)^2 + \Gamma x_1 \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1} \right), \quad (3.20)$$

$$\dot{x} = \Gamma z_1 \sqrt{1-x^2} \sin(\theta) \left(-\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} + \frac{1}{2x_1^2} - \varepsilon \right) + 2\varepsilon \Gamma (1-x^2) \cos(\theta) \sin(\theta),$$

em que

$$D_1 = 2(1 - x_1 x - z_1 \sqrt{1-x^2} \cos(\theta)), \quad (3.21)$$

$$D_2 = 2(1 + x_1 x - z_1 \sqrt{1-x^2} \cos(\theta)).$$

Seja $f = (f_1(\theta, x), f_2(\theta, x)) = (\dot{\theta}, \dot{x})$. Para estudar a estabilidade na vizinhança dos equilíbrios relativos, estudamos os autovalores de Df nestes equilíbrios. Note que

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = -2\Gamma z_1^2 \Delta_2 \cos(\theta) \sin(\theta) - \Gamma z_1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Delta \sin(\theta) + 4\varepsilon \Gamma x \cos(\theta) \sin(\theta) + 2\Gamma x_1 z_1 \Delta_1 \sqrt{1-x^2},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \Gamma z_1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cos(\theta) [2x_1 \Delta_1 - 2z_1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Delta_2 \cos(\theta)] + \Gamma z_1 (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \Delta \cos(\theta)$$

$$-2\varepsilon \Gamma \cos(\theta)^2 + \Gamma x_1 [-2x_1 \Delta_2 + 2z_1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Delta_1 \cos(\theta)],$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 2\Gamma z_1^2 (1-x^2) \Delta_2 \sin(\theta)^2 - \Gamma z_1 \sqrt{1-x^2} \Delta \cos(\theta) + 2\varepsilon \Gamma (1-x^2) (\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \Gamma z_1 \sqrt{1-x^2} \theta \sin[-2x_1 \Delta_1 + 2z_1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Delta_2 \cos(\theta)] + \Gamma z_1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Delta \sin(\theta)$$

$$-4\varepsilon \Gamma x \cos(\theta) \sin(\theta).$$

Em que

$$\Delta = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} - \frac{1}{2x_1^2} + \varepsilon,$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{D_1^2} - \frac{1}{D_2^2},$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{D_1^2} + \frac{1}{D_2^2}.$$

As coordenadas (θ, x) do equilíbrio relativo $(0, 0, 1)$ são $\theta = 0$ e $x = 0$. Consequentemente

$$D_1 = D_2 = D = 2(1 - z_1),$$

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\Gamma \frac{(3z_1+2)}{2x_1^2} + \varepsilon \Gamma(z_1 - 2) \\ -\Gamma z_1 \frac{(2z_1+1)}{2x_1^2} + \varepsilon \Gamma(2 - z_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de $Df(0, 0)$ são dados pela expressão

$$\lambda = \pm \frac{|\Gamma|}{2x_1^2} \sqrt{z_1(2z_1 + 1)(3z_1 + 2) + f(z_1, \varepsilon)}$$

em que $f(z_1, \varepsilon)$ é uma função real contínua tal que $f(z_1, \varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Como estamos considerando $|\varepsilon| \ll 1$, então para saber se λ é real ou imaginário puro basta estudar o sinal de

$$z_1(2z_1 + 1)(3z_1 + 2).$$

Contudo, concluímos que $(0, 0, 1)$ é ponto de sela se $z_1 \in (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}) \cup (0, 1)$ e centro se $z_1 \in (-1, -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{1}{2}, 0)$.

Com relação ao equilíbrio $(0, 0, -1)$, temos que $\theta = \pi$, $x = 0$ e $D_1 = D_2 = D = 2(1 + z_1)$.

Logo,

$$Df(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\Gamma \frac{(2-3z_1)}{2x_1^2} - \varepsilon \Gamma(z_1 + 2) \\ -\Gamma z_1 \frac{(2z_1-1)}{2x_1^2} + \varepsilon \Gamma(2 + z_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de $Df(\pi, 0)$ são dados pela expressão

$$\lambda = \pm \frac{|\Gamma|}{2x_1^2} \sqrt{z_1(2z_1 - 1)(2 - 3z_1) + g(z_1, \varepsilon)}$$

Em que $g(z_1, \varepsilon)$ é uma função real contínua tal que $g(z_1, \varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Como estamos considerando $|\varepsilon| \ll 1$, então para saber se λ é real ou imaginário puro basta estudar o sinal de

$$z_1(2z_1 - 1)(2 - 3z_1).$$

Contudo, concluímos que $(0, 0, -1)$ é ponto de sela se $z_1 \in (-1, 0) \cup (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ e centro se $z_1 \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}, 1)$.

Através da fórmula de Euler, podemos fazer algumas afirmações sobre a estabilidade dos outros equilíbrios. A equação de Euler em S^2 assume a seguinte forma

$$\sum_i \chi_i = 2,$$

em que a soma é nos pontos críticos. Sabemos que cada vórtice contribui com 1 e cada sela com -1 nesta equação. Vimos na observação 3 que os vórtices se comportam topologicamente como centros, portanto os demais equilíbrios existem aos pares, em que cada par é formado por uma sela e um centro. Se $z_1 \in (-1, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1)$, a Eq. (3.13) possui os seguintes equilíbrios: $(0, 0, \pm 1)$, $(\pm\sqrt{1 - (\tilde{z})^2}, 0, \tilde{z})$ e $(0, \pm\sqrt{1 - (z_*)^2}, z_*)$. Sabemos que $(0, 0, 1)$ é ponto de sela se $z_1 \in (\frac{2}{3}, 1)$ e centro se $z_1 \in (-1, -\frac{2}{3})$. Sabemos também que $(0, 0, -1)$ é centro se $z_1 \in (\frac{2}{3}, 1)$ e ponto de sela se $z_1 \in (-1, -\frac{2}{3})$. Portanto, pela fórmula de Euler, os outros quatro equilíbrios

$$(\pm\sqrt{1 - (\tilde{z})^2}, 0, \tilde{z}) \text{ e } (0, \pm\sqrt{1 - (z_*)^2}, z_*)$$

são dois centros e duas selas.

Se $z_1 \in (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$, existem quatro equilíbrios

$$(0, 0, \pm 1) \text{ e } (0, \pm \sqrt{1 - (z_*)^2}, z_*).$$

Como $(0, 0, \pm 1)$ são pontos de sela, pela equação de Euler temos que

$$(0, \pm \sqrt{1 - (z_*)^2}, z_*)$$

são centros. □

3.4 O traçador no caso em que $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ e $r_1(t) \neq -r_2(t)$

Nesta seção estudamos o problema do traçador passivo sob a influência da solução do problema dos dois vórtices, $(r_1(t), r_2(t))$ obtida na seção 2.3.1, dada por

$$r_1(t) = (x_1 \cos(\Omega t), x_1 \sin(\Omega t), z_1), \tag{3.22}$$

$$r_2(t) = (x_1 \cos(\Omega t), x_1 \sin(\Omega t), -z_1),$$

em que $\Omega = \frac{\Gamma}{2z_1} + \varepsilon \Gamma z_1$ e $x_1^2 + z_1^2 = 1$. Considerando as coordenadas girantes

$$R = A_\Omega r,$$

vemos que

$$\begin{aligned} R_1 &= (x_1, 0, z_1), \\ R_2 &= (x_1, 0, -z_1), \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$D_1 = \|R - R_1\|^2 = 2(1 - x_1x - z_1z),$$

$$D_2 = \|R - R_2\|^2 = 2(1 - x_1x + z_1z).$$

Contudo, as equações do traçador passivo dadas por (3.5) tornam-se

$$\dot{R} = \frac{\Gamma}{D_1}(-z_1y, z_1x - x_1z, x_1y) + \frac{\Gamma}{D_2}(-z_1y, z_1x + x_1z, -x_1y) + \Gamma\left(\frac{1}{2z_1} + \varepsilon z_1\right)(y, -x, 0) \tag{3.24}$$

Proposição 5. Para $|\varepsilon| \ll 1$, o sistema dinâmico do traçador passivo dado por (3.24) possui

quatro equilíbrios se $x_1 \in (-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$. São eles

$$(\tilde{x}, \pm\sqrt{1 - \tilde{x}^2}, 0)$$

e

$$(x_*, 0, \pm\sqrt{1 - x_*^2}),$$

em que

$$\tilde{x} = \frac{1 - 2(1 - x_1^2) + 2\varepsilon(1 - x_1^2)}{x_1 + 2\varepsilon x_1(1 - x_1^2)},$$

$$x_* = \frac{-x_1 - 2\varepsilon x_1 z_1^2 + \sqrt{(x_1 + 2\varepsilon x_1 z_1^2)^2 + 8z_1^2(1 + 2\varepsilon z_1^2)}}{-2 - 8\varepsilon z_1^2} \quad \text{se } x_1 \in (-1, -\frac{1}{2}),$$

$$x_* = \frac{-x_1 - 2\varepsilon x_1 z_1^2 - \sqrt{(x_1 + 2\varepsilon x_1 z_1^2)^2 + 8z_1^2(1 + 2\varepsilon z_1^2)}}{-2 - 8\varepsilon z_1^2} \quad \text{se } x_1 \in (\frac{1}{2}, 1).$$

Se $x_1 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ então não existem equilíbrios.

Demonstração. Os equilíbrios de (3.24) são os pontos tais que

$$\begin{aligned} (I) \quad & \Gamma z_1 y \left(-\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} + \frac{1}{2x_1^2} + \varepsilon \right) + \Gamma y \left(\frac{1}{2z_1} + \varepsilon z_1 \right) = 0, \\ (II) \quad & \Gamma z_1 x \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} - \frac{1}{2x_1^2} - \varepsilon \right) + \Gamma x_1 z \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1} \right) = 0, \\ (III) \quad & \Gamma x_1 y \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} \right) = 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Os casos $z_1 = \pm 1$ foram resolvidos na seção 3.2, portanto, supomos $z_1 \neq \pm 1$. Também supomos $z_1 \neq 0$, pois caso contrário $R_1 = R_2$.

De (III) temos que

$$y = 0 \text{ ou } D_1 = D_2.$$

Suponha $y \neq 0$, então $D_1 = D_2 = D = 2(1 - x_1 x)$ o que implica $z = 0$. Portanto, se existirem equilíbrios eles estão no grande círculo $x^2 + y^2 = 1$.

De (I) temos que

$$-2\Gamma z_1 + D \left(\frac{\Gamma}{2z_1} + \varepsilon \Gamma z_1 \right) = 0$$

logo,

$$(x_1 + 2\varepsilon z_1^2 x_1)x = 1 + 2\varepsilon z_1^2 - 2z_1^2.$$

Como $|\varepsilon| \ll 1$ e $x_1 \neq 0$ temos que

$$x_1 + 2\varepsilon z_1^2 x_1 \neq 0.$$

Consequentemente,

$$x = \frac{1 - 2z_1^2 + 2\epsilon z_1^2}{x_1 + 2\epsilon z_1^2 x_1}.$$

Como supomos $y \neq 0$ e estamos resolvendo a Eq. (3.25) em S^2 , nos interessa apenas os valores de x t.q. $|x| < 1$. Ou seja,

$$\left| \frac{1 - 2z_1^2 + 2\epsilon z_1^2}{x_1 + 2\epsilon z_1^2 x_1} \right| < 1.$$

Como $|\epsilon| \ll 1$ basta que

$$\left| \frac{1 - 2z_1^2}{x_1} \right| < 1.$$

O conjunto solução desta inequação é

$$x_1 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

De (II) temos que

$$x(2\Gamma z_1 + D(-\frac{\Gamma}{2z_1} - \epsilon\Gamma z_1)) = 0.$$

Ou seja,

$$x = 0 \text{ ou } 2\Gamma z_1 + D(-\frac{\Gamma}{2z_1} - \epsilon\Gamma z_1) = 0.$$

Note que

$$2\Gamma z_1 + D(-\frac{\Gamma}{2z_1} - \epsilon\Gamma z_1) = 0$$

é equivalente a (I). Logo, para $y \neq 0$ e

$$x_1 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

existem os seguintes equilíbrios

$$(\tilde{x}, \pm\sqrt{1 - \tilde{x}^2}, 0),$$

em que

$$\tilde{x} = \frac{1 - 2(1 - x_1^2) + 2\varepsilon(1 - x_1^2)}{x_1 + 2\varepsilon x_1(1 - x_1^2)}.$$

Suponha agora $y = 0$. Logo, se existir equilíbrios eles estão no grande círculo

$$x^2 + z^2 = 1.$$

De (II) temos que

$$\frac{\Gamma}{D_1}(z_1x - x_1z) + \frac{\Gamma}{D_2}(z_1x + x_1z) - \Gamma x \left(\frac{1}{2z_1} + \varepsilon z_1 \right) = 0.$$

Como

$$D_1 + D_2 = 4(1 - x_1x),$$

$$D_1 - D_2 = -4z_1z,$$

$$D_1D_2 = 4(x_1 - x)^2,$$

obtemos

$$(x - x_1)(z_1 - x(x - x_1)\left(\frac{1}{2z_1} + \varepsilon z_1\right)) = 0.$$

Ou seja,

$$x - x_1 = 0 \text{ ou } z_1 - x(x - x_1)\left(\frac{1}{2z_1} + \varepsilon z_1\right) = 0.$$

Se $x - x_1 = 0$ então

$$R = R_1 \text{ ou } R = R_2.$$

Logo, vamos supor $x - x_1 \neq 0$. Se

$$z_1 - x(x - x_1)\left(\frac{1}{2z_1} + \varepsilon z_1\right) = 0$$

então

$$(-1 - 2\epsilon z_1^2)x^2 + (x_1 + 2\epsilon z_1^2 x_1)x + 2z_1^2 = 0. \quad (3.26)$$

Para saber se este polinômio admite raízes reais com norma menor que um faremos uso do lema 2. Em relação a este polinômio

$$\left| \frac{b}{2a} \right| = \left| \frac{x_1 + 2\epsilon z_1^2 x_1}{-2 - 4\epsilon z_1^2} \right|.$$

Como $|\epsilon| \ll 1$, para o ítem (i) da parte 2) do lema 2 ser satisfeito basta que

$$\left| -\frac{x_1}{2} \right| < 1.$$

Isto se dá pois $|x_1| < 1$. O ítem (ii) da parte 2) é satisfeito se

$$(-1 - 2\epsilon z_1^2 + x_1 + 2\epsilon z_1^2 x_1 + 2z_1^2) \left(\frac{-x_1^2 - 4\epsilon z_1^2 x_1^2 - 4\epsilon^2 z_1^4 x_1^2 - 8z_1^2 - 16\epsilon z_1^4}{-2 - 4\epsilon z_1^2} \right) < 0.$$

Como $|\epsilon| \ll 1$ basta que

$$(-1 + x_1 + 2z_1^2) \left(\frac{x_1^2 + 8z_1^2}{2} \right) < 0.$$

O conjunto solução desta inequação é

$$S_1 = \left(-1, -\frac{1}{2}\right).$$

Em relação ao ítem (iii) devemos ter

$$(-1 - 2\epsilon z_1^2 - x_1 - 2\epsilon z_1^2 x_1 + 2z_1^2) \left(\frac{-x_1^2 - 4\epsilon z_1^2 x_1^2 - 4\epsilon^2 z_1^4 x_1^2 - 8z_1^2 - 16\epsilon z_1^4}{-2 - 4\epsilon z_1^2} \right) < 0.$$

Como $|\epsilon| \ll 1$ basta que

$$(-1 - x_1 + 2z_1^2) \left(\frac{x_1^2 + 8z_1^2}{2} \right) < 0.$$

O conjunto solução desta inequação é

$$S_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Como $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, não existem duas raízes reais com norma menor que um.

Ainda pode existir uma única raíz real do polinômio (3.26) com norma menor que um. Para isso precisamos verificar a parte 1) do lema 2. Em relação ao ítem (i) vimos que

$$\left|\frac{b}{2a}\right| = \left|\frac{x_1 + 2\epsilon z_1^2 x_1}{-2 - 4\epsilon z_1^2}\right| < 1.$$

Precisamos verificar ainda que

$$b^2 - 4ac = 0,$$

ou seja,

$$-4\epsilon^2 z_1^6 + (4\epsilon^2 - 12\epsilon)z_1^4 + (4\epsilon + 7)z_1^2 + 1 = 0.$$

Note que o gráfico de $7z_1^2 + 1$ é uma parábola com concavidade para cima e vértice (0,1). Como $|\epsilon| \ll 1$, o polinômio acima não se anula, conseqüentemente, o ítem (i) não é satisfeito. O ítem (ii) é verificado se

$$|-1 - 2\epsilon z_1^2 + 2z_1^2| < |x_1 + 2\epsilon z_1^2 x_1|.$$

Como $|\epsilon| \ll 1$ basta que

$$|-1 + 2(1 - x_1^2)| < |x_1|.$$

O conjunto solução desta inequação é

$$\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Portanto, se $y = 0$ existem dois equilíbrios de (3.24) apenas se $x_1 \in (-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$. Neste caso os equilíbrios são

$$(x_*, 0, \pm \sqrt{1 - x_*^2}),$$

em que

$$x_* = \frac{-x_1 - 2\epsilon x_1 z_1^2 + \sqrt{(x_1 + 2\epsilon x_1 z_1^2)^2 + 8z_1^2(1 + 2\epsilon z_1^2)}}{-2 - 8\epsilon z_1^2} \quad \text{se } x_1 \in (-1, -\frac{1}{2}),$$

$$x_* = \frac{-x_1 - 2\epsilon x_1 z_1^2 - \sqrt{(x_1 + 2\epsilon x_1 z_1^2)^2 + 8z_1^2(1 + 2\epsilon z_1^2)}}{-2 - 8\epsilon z_1^2} \quad \text{se } x_1 \in (\frac{1}{2}, 1).$$

□

3.4.1 Estabilidade dos equilíbrios

A estabilidade dos equilíbrios relativos descritos na proposição 5, foram determinadas em função da coordenada x_1 dos vórtices, como vemos na seguinte proposição.

Proposição 6. *Os equilíbrios do sistema (3.24), descritos na proposição 5, têm as seguintes estabilidades:*

x_1	$(x_*, 0, \sqrt{1 - (x_*)^2})$	$(x_*, 0, -\sqrt{1 - (x_*)^2})$	$(\tilde{x}, \sqrt{1 - \tilde{x}^2}, 0)$	$(\tilde{x}, -\sqrt{1 - \tilde{x}^2}, 0)$
$(-1, -\frac{1}{2})$	centro	centro	sela	sela
$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$	×	×	×	×
$(\frac{1}{2}, 1)$	centro	centro	sela	sela

Em que \times indica que o ponto deixa de ser equilíbrio no respectivo intervalo.

Demonstração. Considerando as coordenadas

$$x = \sqrt{1 - z^2} \sin(\theta),$$

$$y = \sqrt{1 - z^2} \cos(\theta),$$

$$z = z.$$

vemos que

$$\dot{x} = \sqrt{1 - z^2} \cos(\theta) \dot{\theta} - \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \sin(\theta) \dot{z},$$

$$\dot{y} = -\sqrt{1 - z^2} \sin(\theta) \dot{\theta} - \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \cos(\theta) \dot{z},$$

$$\dot{z} = \dot{z}.$$

Substituindo estas equações em (3.24), temos

$$\dot{\theta} = -\Gamma z_1 \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} - \frac{1}{2z_1^2} - \varepsilon \right) + \Gamma x_1 \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \sin(\theta) \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} \right),$$

$$\dot{z} = \Gamma x_1 \sqrt{1 - z^2} \cos(\theta) \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} \right),$$

em que

$$D_1 = 2(1 - x_1 \sqrt{1 - z^2} \sin(\theta) - z_1 z),$$

$$D_2 = 2(1 + x_1 \sqrt{1 - z^2} \sin(\theta) - z_1 z).$$

Seja $f = (f_1(\theta, z), f_2(\theta, z)) = (\dot{\theta}, \dot{z})$. Com a finalidade de determinar a estabilidade na vizinhança dos equilíbrios estudamos os autovalores de Df nestes equilíbrios. Note que

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = -2\Gamma z_1 x_1 \sqrt{1 - z^2} \Delta_2 \cos(\theta) + \Gamma x_1 \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \Delta \cos(\theta) + 2\Gamma x_1^2 z \Delta_1 \cos(\theta) \sin(\theta),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = -\Gamma z_1 \left[-2x_1 \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \Delta_2 \sin(\theta) + 2z_1 \Delta_1 \right] + \Gamma x_1 (1 - z^2)^{-\frac{3}{2}} \Delta \sin(\theta)$$

$$+ \Gamma x_1 \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \sin(\theta) \left[-2x_1 \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \Delta_1 \sin(\theta) + 2z_1 \Delta_2 \right],$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 2\Gamma x_1^2 (1 - z^2) \Delta_1 \cos(\theta)^2 - \Gamma x_1 \sqrt{1 - z^2} \Delta \sin(\theta),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \Gamma x_1 \sqrt{1 - z^2} \cos(\theta) \left[-2x_1 \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \Delta_1 \sin(\theta) + 2z_1 \Delta_2 \right] - \Gamma x_1 \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \Delta \cos(\theta).$$

em que

$$\Delta = \frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2},$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{D_1^2} - \frac{1}{D_2^2},$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{D_1^2} + \frac{1}{D_2^2}.$$

Se $z = 0$ então $D_1 = D_2 = D = 2(1 - x_1 \sin(\theta))$. Logo,

$$Df(\theta, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{4\Gamma x_1 z_1 \cos(\theta)}{D^2} & 0 \\ 0 & \frac{4\Gamma x_1 z_1 \cos(\theta)}{D^2} \end{pmatrix}.$$

Portanto, os equilíbrios $(\tilde{x}, \pm\sqrt{1 - \tilde{x}^2}, 0)$ são pontos de sela. Logo, pela equação de Euler temos que os equilíbrios

$$(x_*, 0, \pm\sqrt{1 - x_*^2})$$

são centros. □

3.5 O traçador no caso em que $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ e $r_1(t) = -r_2(t)$

Considere a solução $(r_1(t), r_2(t))$ do problema dos dois vórtices no elipsóide (2.9), obtida na seção 2.3.1, dada por

$$r_1(t) = (x_1 \cos(\Omega t), x_1 \sin(\Omega t), z_1), \quad (3.27)$$

$$r_2(t) = (-x_1 \cos(\Omega t), -x_1 \sin(\Omega t), -z_1).$$

Em que $x_1^2 + z_1^2 = 1$, $\Omega = \varepsilon \Gamma z_1$ e $\Gamma = \Gamma_1$. O caso $x_1 = 0$ foi resolvido anteriormente, portanto supomos $x_1 \neq 0$. Fazendo a mudanças de coordenadas $R = A_\Omega r$, vemos que

$$R_1(t) = (x_1, 0, z_1),$$

$$R_2(t) = (-x_1, 0, -z_1),$$

(3.28)

$$D_1 = \|R_1 - R\|^2 = 2(1 - x_1 x - z_1 z),$$

$$D_2 = \|R_2 - R\|^2 = 2(1 + x_1 x + z_1 z).$$

Desta forma, as equações do problema do traçador passivo (3.5) para essas soluções são

$$\dot{R} = \frac{\Gamma}{D_1} (-z_1 y, z_1 x - x_1 z, x_1 y) + \frac{\Gamma}{D_2} (-z_1 y, z_1 x - x_1 z, x_1 y) + \varepsilon \Gamma z_1 (y, -x, 0). \quad (3.29)$$

Proposição 7. Para $|\varepsilon| \ll 1$, o sistema dinâmico do traçador passivo dado por (3.29) tem como equilíbrios os pontos $(x_1, 0, -z_1)$ e $(-x_1, 0, z_1)$.

Demonstração. Os equilíbrios de (3.29) são os pontos:

$$\begin{aligned} (I) \quad & -\Gamma z_1 y \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} - \varepsilon \right) = 0, \\ (II) \quad & \Gamma(z_1 x - x_1 z) \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) - \varepsilon \Gamma z_1 x = 0, \\ (III) \quad & \Gamma x_1 y \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) = 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

De (III) segue que

$$y = 0 \text{ ou } D_1 = -D_2.$$

Se

$$D_1 = -D_2$$

então

$$R = R_1 = R_2.$$

Suponha $y = 0$. Logo, se existir equilíbrios, eles estão no grande círculo

$$x^2 + z^2 = 1.$$

De (II) temos que

$$(z_1 x - x_1 z)(D_1 + D_2) - \varepsilon z_1 x D_1 D_2 = 0.$$

Como

$$D_1 D_2 = 4(z_1 x - x_1 z)^2$$

e

$$D_1 + D_2 = 4.$$

Então

$$(z_1x - x_1z)[1 - \varepsilon z_1x(z_1x - x_1z)] = 0.$$

Ou seja,

$$z_1x - x_1z = 0 \text{ ou } 1 - \varepsilon z_1x(z_1x - x_1z) = 0.$$

Suponha

$$z_1x - x_1z = 0.$$

Se $z_1 = 0$ então $z = 0$ e os pontos $(\pm 1, 0, 0)$ são equilíbrios. Se $z_1 \neq 0$ então

$$x = \frac{x_1}{z_1}z.$$

Do fato que $x^2 + z^2 = 1$, segue que

$$\left(\frac{x_1}{z_1}z\right)^2 + z^2 = 1.$$

Ou seja,

$$z = \pm z_1.$$

Logo,

$$(x_1, 0, -z_1) \text{ e } (-x_1, 0, z_1)$$

são equilíbrios de (3.29). Considere agora

$$1 - \varepsilon z_1x(z_1x - x_1z) = 0.$$

Como $|\varepsilon| \ll 1$, não existe solução para esta equação.

□

Anel de vórtices

NESTE capítulo apresentamos um estudo de anéis de N vórtices idênticos no elipsóide (2.9). A configuração de anel é caracterizada por N vórtices com mesma vorticidade, dispostos nos vértices de um polígono regular de N lados. O anel de vórtices é um equilíbrio relativo que gira em torno do eixo z com certa velocidade angular γ . Com o intuito de determinar a estabilidade destes equilíbrios, seguimos de perto os seguintes trabalhos, Boatto e Cabral [17], e Boatto [19]. De maneira análoga à que estes pesquisadores abordaram o problema, adotamos um sistema de coordenadas girantes no qual a configuração de anel torna-se um equilíbrio fixo e determinamos intervalos de latitude em que estes equilíbrios possui estabilidade linear e não linear. Utilizando o critério de Dirichlet (teorema 1), foi possível determinar estes intervalos de maneira única por meio de uma análise dos autovalores da matriz hessiana do Hamiltoniano correspondente avaliada nesse equilíbrio. Para determinar esses autovalores fizemos uso da teoria de matrizes circulantes. A definição de matriz circulante e o resultado utilizado (ver [24]) é dado a seguir:

Definição 1. *Uma matriz C $n \times n$ é dita circulante se tem a seguinte forma*

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_N \\ c_N & c_1 & \cdots & c_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{pmatrix}.$$

Proposição 8. *Uma matriz C $n \times n$ circulante e simétrica possui n autovalores dados*

por

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^n c_k \cos\left(\frac{2\pi(j-1)(k-1)}{n}\right), \quad j = 1, \dots, n.$$

Para utilizar coordenadas girantes adequadas, é necessário o conhecimento da velocidade angular γ do anel. Com este intuito, considere as coordenadas

$$\phi_i = \theta_i,$$

$$z_i = \cos(\theta_i).$$

As equações de movimento dos N vórtices, dadas pelo Hamiltoniano (2.18) e forma simplética (2.19), são

$$\dot{X} = J\nabla_X H, \tag{4.1}$$

em que $X = (\phi_1, \dots, \phi_N, z_1, \dots, z_N)$, $\nabla_X H$ é o gradiente de H e

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}.$$

As condições iniciais para uma configuração de anel são dadas por

$$\phi_i = \frac{2\pi}{N}(i-1),$$

$$z_i = z_0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Como estamos considerando que os vórtices possuem a mesma vorticidade, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\Gamma_i = 1$ para $i = 1, \dots, N$. Em relação a essas condições iniciais temos

$$\frac{\partial H}{\partial \phi_i} = \sum_k' \frac{-\sin(2\pi(i-k)/N)}{1 - \cos(2\pi(i-k)/N)} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial z_i} = (N-1)z_0 \left(\frac{1}{1-z_0^2} - 2\varepsilon \right).$$

Portanto, a dinâmica do anel de N vórtices é dada por

$$\phi_i(t) = \gamma t + \frac{2\pi}{N}(i-1),$$

$$z_i(t) = z_0,$$

em que

$$\gamma = (N-1)z_0 \left(\frac{1}{1-z_0^2} - 2\varepsilon \right).$$

Adotando as coordenadas girantes

$$\tilde{\phi}_i = \phi_i - \gamma t, \quad \tilde{z}_i = z_i.$$

A forma simplética continua sendo a canônica e a função Hamiltoniana torna-se

$$\tilde{H}(\tilde{X}) = H(\tilde{X}) + \gamma \sum_{i=1}^N \tilde{z}_i, \quad (4.2)$$

com $\tilde{X} = (\tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_N, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_N)$. Contudo, as equações de movimento são

$$\dot{\tilde{X}} = -J\nabla_{\tilde{X}}\tilde{H}. \quad (4.3)$$

Note que a configuração de anel nessas coordenadas é o equilíbrio

$$\tilde{X}^* = (0, \dots, (i-1)2\pi/N, \dots, (N-1)2\pi/N, z_0, \dots, z_0).$$

Desta forma, a estabilidade do anel de N vórtices é determinada pela estabilidade de \tilde{X}^* .

4.1 Estabilidade do anel de N vórtices

O objetivo desta seção é demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 9. Para $|\varepsilon| \ll 1$ e $N \geq 4$ existe constante positiva K_N tal que o anel de N vórtices e latitude $\theta_0 = \arccos(z_0)$, no elipsóide (2.9), possui estabilidade linear e não linear se

$$0 \leq \theta_0 \leq \tilde{\theta} \quad \text{ou} \quad \pi - \tilde{\theta} \leq \theta_0 \leq \pi$$

em que $\tilde{\theta} = \arccos(\tilde{z})$ e

$$\tilde{z} = \begin{cases} \frac{N-2}{2\sqrt{N-1}} + \varepsilon K_N & \text{para } N \text{ par,} \\ \frac{\sqrt{N-3}}{2} + \varepsilon K_N & \text{para } N \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Para $N = 2$ ou $N = 3$, temos o seguinte: se $\varepsilon < 0$ então o anel de N vórtices admite estabilidade

linear e não linear para qualquer latitude $\theta_0 \in [0, \pi]$. Se $\varepsilon > 0$ então o anel admite estabilidade linear e não linear se

$$0 \leq \theta_0 \leq \tilde{\theta} \quad \text{ou} \quad \pi - \tilde{\theta} \leq \theta_0 \leq \pi,$$

em que $\tilde{\theta} = \arccos(\tilde{z})$ e

$$\tilde{z} = \left(\frac{1 + 4\varepsilon - ((1 + 4\varepsilon)^2 - 16\varepsilon^2)^{1/2}}{4\varepsilon} \right)^{1/2}.$$

Demonstração. Como observado, a estabilidade do anel de N vórtices é determinada pela estabilidade de \tilde{X}^* . A estabilidade linear é dada pela estabilidade do sistema

$$\dot{\tilde{X}} = JD^2\tilde{H}(\tilde{X}^*)\tilde{X}. \quad (4.4)$$

em que $D^2\tilde{H}(\tilde{X}^*)$ é a matriz Hessiana de \tilde{H} calculada em \tilde{X}^* . Do fato de $D^2\tilde{H}(\tilde{X}^*)$ ser matriz simétrica, segue que os autovalores de $D^2\tilde{H}(\tilde{X}^*)$ são reais e que $D^2\tilde{H}(\tilde{X}^*)$ pode ser diagonalizada por uma matriz que deixa a forma simplética invariante. Ou seja, existe matriz P tal que $J = P^TJP$ e $A = P^TD^2\tilde{H}(\tilde{X}^*)P$ em que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{2N} \end{pmatrix}.$$

Portanto, fazendo a mudança de coordenadas $Y = P^T\tilde{X}$, a equação (4.4) torna-se

$$\dot{Y} = JAY, \quad (4.5)$$

em que $Y = (\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N)$. Considerando as coordenadas

$$Z = (\bar{\phi}_1, \bar{z}_1, \dots, \bar{\phi}_N, \bar{z}_N).$$

O sistema (4.4) é equivalente a

$$\dot{Z} = BZ,$$

com

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{N+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_{2N} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_N & 0 \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores de B são as raízes do polinômio

$$p(x) = (x^2 + \lambda_1 \lambda_{N+1}) \dots (x^2 + \lambda_N \lambda_{2N}),$$

então o equilíbrio \tilde{X}^* é linearmente estável se λ_i tem o mesmo sinal que λ_{i+N} , para $i = 1, \dots, N$.

Quanto à estabilidade não-linear, note que a expansão em Taylor de \tilde{H} numa vizinhança de \tilde{X}^* é dada por

$$\tilde{H}(\tilde{X}) = \tilde{H}(\tilde{X}^*) + \nabla_{\tilde{X}} \tilde{H}(\tilde{X}^*)(\tilde{X} - \tilde{X}^*) + \frac{1}{2} D^2 \tilde{H}(\tilde{X}^*)(\tilde{X} - \tilde{X}^*)^2 + O(\|\tilde{X} - \tilde{X}^*\|^2).$$

Como \tilde{H} é integral primeira e $\nabla_{\tilde{X}}\tilde{H}(\tilde{X}^*) = 0$, então se $D^2\tilde{H}(\tilde{X}^*)$ for definida positiva ou definida negativa, o equilíbrio \tilde{X}^* possui estabilidade não linear. De fato, o critério de Dirichlet afirma que:

Teorema 1. (*Critério de Dirichlet*) *Seja X^* um equilíbrio de um sistema de equações diferenciais ordinárias autônomo*

$$\frac{dX}{dt} = f(X), \quad X \in \Omega \subset \mathbb{R}^{2N}, \quad (4.6)$$

isto é, $f(X^*) = 0$. Se existe uma integral Ψ definida positiva (ou negativa) para (4.6) numa vizinhança do equilíbrio X^* , então X^* é estável.

Portanto, os autovalores de $D^2\tilde{H}(\tilde{X}^*)$ determinam tanto a estabilidade linear quanto a estabilidade não linear de \tilde{X}^* . Com a finalidade de determinar os autovalores de $D^2\tilde{H}(\tilde{X}^*)$ observe que esta matriz tem a seguinte estrutura (ver apêndice)

$$D^2\tilde{H}(\tilde{X}^*) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

em que R e S são matrizes $N \times N$ simétricas e circulantes. Logo, podemos utilizar a proposição 8 para calcular os autovalores destas matrizes.

A matriz R é uma matriz circulante em que

$$r_1 = \frac{(N^2-1)}{6},$$

$$r_k = \frac{-1}{1 - \cos(\frac{2\pi}{N}(k-1))}, \quad k = 2, \dots, N.$$

Portanto, seus autovalores são

$$\lambda_{Rj} = (j-1)(N-j+1), \quad j = 1, \dots, N.$$

A matriz S também é circulante com

$$s_1 = \frac{1}{(1-z_0^2)^2} \left((N-1)(1+z_0^2) - \frac{N^2-1}{6} \right) - 2\varepsilon(N-1),$$

$$s_k = \frac{1}{(1-z_0^2)^2 (1 - \cos(\frac{2\pi}{N}(k-1)))}, \quad k = 2, \dots, N.$$

Seus autovalores são

$$\lambda_{Sj} = \frac{1}{(1-z_0^2)^2} \left((N-1)(1+z_0^2) - (j-1)(N-j+1) \right) - 2\varepsilon(N-1), \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.7)$$

Como $\lambda_{jR} \geq 0$, então o equilíbrio \tilde{X}^* possui estabilidade tanto linear quanto não linear se

$$\lambda_{Sj} \geq 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

De (4.7) vemos que existe \tilde{j} tal que $\lambda_{S\tilde{j}}$ é mínimo. De fato, para isto basta que $(j-1)(N-j+1)$ seja máximo. Ou seja,

$$\tilde{j} = \begin{cases} \frac{N+2}{2} & \text{se } N \text{ par,} \\ \frac{N+1}{2} & \text{se } N \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Se N é par então

$$\lambda_{S\tilde{j}} = \frac{1}{(1-z_0^2)^2} \left((N-1)(1+z_0^2) - \frac{N^2}{4} \right) - 2\varepsilon(N-1). \quad (4.8)$$

Se $\varepsilon = 0$ então $\lambda_{S\tilde{j}} \geq 0$ quando

$$|z_0| \geq \frac{N-2}{2\sqrt{N-1}}.$$

Como estamos considerando que $|\varepsilon| \ll 1$ e $|z_0| \leq 1$, então para $\varepsilon \neq 0$ esperamos que $\lambda_{S\bar{j}}$ seja não negativo se

$$|z_0| \geq \beta,$$

em que β é raiz da Eq. (4.8), que supomos ser da seguinte forma:

$$\beta = \frac{N-2}{2\sqrt{N-1}} + \varepsilon K_N + O(\varepsilon^2).$$

Note que

$$\frac{N-2}{2\sqrt{N-1}}$$

é raiz da Eq. (4.8) para $\varepsilon = 0$. Contudo, para $N \neq 2$ e considerando apenas valores da ordem de ε , obtemos que

$$K_N = \sqrt{N-1} \left(\frac{(N-2)^3}{(N-1)^2} + \frac{2}{N-2} - \frac{N-2}{N-1} \right)$$

e $\lambda_{S\bar{j}} \geq 0$ se

$$|z_0| \geq \frac{N-2}{2\sqrt{N-1}} + \varepsilon K_N.$$

Procedendo analogamente no caso em que N é ímpar e $N \neq 3$, obtemos que

$$\lambda_{S\bar{j}} \geq 0$$

se

$$|z_0| \geq \frac{\sqrt{N-3}}{2} + \varepsilon K_N,$$

em que

$$K_N = \left(\frac{N^2 - 14N + 49}{8\sqrt{N-3}} \right).$$

Para $N = 2$ ou $N = 3$, então

$$\lambda_{S\bar{j}} \geq 0$$

se

$$z_0^2 - 2\varepsilon(1 - z_0^2)^2 \geq 0.$$

Consequentemente, se $\varepsilon < 0$ o anel de N vórtices possui estabilidade linear e não linear para qualquer latitude $\theta_0 \in [0, \pi]$. Se $\varepsilon > 0$, então o anel possui estabilidade linear e não linear se

$$0 \leq \theta_0 \leq \tilde{\theta} \quad \text{ou} \quad \pi - \tilde{\theta} \leq \theta_0 \leq \pi,$$

em que $\tilde{\theta} = \arccos(\tilde{z})$ e

$$\tilde{z} = \left(\frac{1 + 4\varepsilon - ((1 + 4\varepsilon)^2 - 16\varepsilon^2)^{1/2}}{4\varepsilon} \right)^{1/2}.$$

□

APÊNDICE A

Cálculo de $D^2\tilde{H}(\tilde{X}^*)$

O CÁLCULO de $D^2\tilde{H}(\tilde{X}^*)$ e seus autovalores foi realizado utilizando os seguintes somatórios

$$\sum_{k=2}^N \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k-1)\right)} = \frac{N^2 - 1}{6} \quad (\text{A.1})$$

$$\sum_{k=2}^N \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{N}(j-1)(k-1)\right)}{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N}(k-1)\right)} = \frac{N^2 - 1}{6} - (j-1)(N-j+1). \quad (\text{A.2})$$

Para simplificar a notação desconsideramos os \sim no Hamiltoniano (4.2). Desta forma,

$$H(X) = -\frac{1}{2} \sum'_{ij} [\ln(2 - 2z_i z_j - 2\sqrt{(1-z_i^2)(1-z_j^2)} \cos(\phi_i - \phi_j)) + \varepsilon(z_i^2 + z_j^2)] + \gamma\left(\sum_{i=1}^N z_i\right),$$

em que $X = (\phi_1, \dots, \phi_N, z_1, \dots, z_N)$. Note que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \phi_i \partial z_j} = 0.$$

Sendo assim, $D^2H(\tilde{X}^*)$ tem a seguinte forma:

$$D^2H(\tilde{X}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \phi_i \partial \phi_j} & \frac{\partial^2 H}{\partial \phi_i \partial z_j} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial \phi_j} & \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Como

$$\frac{\partial H}{\partial \phi_i} = \sum_k' - \frac{\sqrt{(1-z_i^2)(1-z_k^2)}}{1-z_i z_k - \sqrt{(1-z_i^2)(1-z_k^2)} \cos(\phi_i - \phi_k)},$$

então

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \phi_i^2}(\tilde{X}^*) = \sum_k' \frac{1}{1 - \cos(\frac{2\pi}{N}(i-k))} = \frac{N^2 - 1}{6}.$$

E, para $i \neq j$, temos

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(\tilde{X}^*) = \frac{-1}{1 - \cos(\frac{2\pi}{N}(i-j))}.$$

Logo,

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_N \\ r_N & r_1 & \cdots & r_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_2 & r_3 & \cdots & r_1 \end{pmatrix},$$

em que

$$r_1 = \frac{N^2-1}{6},$$

$$r_k = \frac{-1}{1-\cos(\frac{2\pi}{N}(k-1))}, \quad k = 2, \dots, N.$$

Utilizamos a proposição 8 e os somatórios (A.1) e (A.2) para determinar autovalores de R . São eles:

$$\lambda_{jR} = (j-1)(N-j+1), \quad j = 1, \dots, N.$$

Com respeito a variável z_i , temos

$$\frac{\partial H}{\partial z_i} = \sum_k' \frac{z_k \sqrt{(1-z_i^2)(1-z_k^2)} - z_i(1-z_k^2) \cos(\phi_i - \phi_k)}{(1-z_i z_k - \sqrt{(1-z_i^2)(1-z_k^2) \cos(\phi_i - \phi_k)}) (\sqrt{(1-z_i^2)(1-z_k^2)})} - 2\mathcal{E}(N-1)z_i + \gamma.$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z_i^2}(\tilde{X}^*) = \frac{z_0^2}{(1-z_0^2)^2} \sum_k' \frac{1}{1-\cos(\frac{2\pi}{N}(i-k))} - \frac{1+z_0^2}{(1-z_0^2)^2} \sum_k' \frac{\cos(\frac{2\pi}{N}(i-k))}{1-\cos(\frac{2\pi}{N}(i-k))} - 2\mathcal{E}(N-1).$$

Pelas identidades (A.1) e (A.2), temos que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z_i^2}(\tilde{X}^*) = \frac{1}{(1-z_0^2)^2} \left(\frac{1-N^2}{6} + (N-1)(1+z_0^2) \right) - 2\varepsilon(N-1).$$

Para $j \neq i$, segue que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_j}(\tilde{X}^*) = \frac{1}{(1-z_0^2)^2 (1 - \cos(\frac{2\pi}{N}(i-j)))}.$$

Portanto,

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_N \\ s_N & s_1 & \cdots & s_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_1 \end{pmatrix},$$

em que

$$s_1 = \frac{1}{(1-z_0^2)^2} \left(\frac{1-N^2}{6} + (N-1)(1+z_0^2) \right) - 2\varepsilon(N-1),$$

$$s_k = \frac{1}{(1-z_0^2)^2 (1 - \cos(\frac{2\pi}{N}(k-1)))}, \quad k = 2, \dots, N.$$

Utilizamos a proposição 8 e os somatórios (A.1) e (A.2) para determinar os autovalores de S .

São eles:

$$\lambda_{jS} = \frac{-1}{(1-z_0^2)^2} \left((1-N)(1+z_0^2) + (j-1)(N-j+1) \right) - 2\epsilon(N-1), \quad j = 1, \dots, N.$$

Referências Bibliográficas

- [1] H. Helmholtz *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen* , Journal für die reine und angewandte Mathematik. V 55, P. 25-55, 1858.
- [2] H. Helmholtz *On integrals of the hydrodynamical equations with express vortex-motion*, Philos. Mag. **33**(4) (1867)
- [3] G. Kirchhoff *Vorlesungen Über Mathematische Physik* , 3rd ed. (Teubner, Leipzig, 1883)
- [4] E. A. Novikov *Dynamics and statistics of a system of vortices*, Sov. Phys. JETP **41**, 973-943 (1975)
- [5] V. A. Bogomolov *Dynamics of vorticity at a sphere*, Fluid. Dyn. (USSR) **6**, 863-870 (1977)
- [6] V. A. Bogomolov *Two dimensional fluid dynamics on a sphere*, Izv. Atmos. Ocean. Phys. **15**, 18-22 (1979)
- [7] D. Hally *Stability of streets of vortices on surfaces of revolution with a reflection symmetry*, J. Math. Phys. **21** (1) 211-217 (1979)
- [8] Y. Kimura and H. Okamoto *Vortex motion on a sphere*, J. Phys. Soc. Japan **56** (12) 4203-4206 (1987)

- [9] Y. Kimura *Vortex motion on surfaces with constant curvature*, Proc. R. Soc. Lond. A **455** 245-259 (1999)
- [10] R. Kidambi and P. K. Newton *Motion of three point vortices on a sphere*, Physica D **116**, 143-175 (1998)
- [11] S. Pekarsky and J. E. Marsden *Point Vortices on a sphere: Stability and relative equilibria*, J. math. Physics **39** (11), 5894-5907 (1998)
- [12] T. Ratiu and J. Marsden *Introduction to Mechanics and Symmetry* Springer-Verlag, New York 1994
- [13] J. J. Thomson *A Treatise on the Motion of Vortex Rings*, Macmillan, New-York (Adam Prize Essay) (1883); *Electricity and Matter*, Westmister Archibald Constable & Co., Ltd (1904).
- [14] T. H. Havelock *The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation*, Philos. Mag. S. 7, **11** (1931) 617-633.
- [15] H. E. Cabral, D. S. Schmidt, *Stability of relative equilibria in the problem of $N + 1$ vortices*, SIAM J. Math. Anal, **31** (2) (1999/2000) 231-250.
- [16] H. E. Cabral, K. R. Meyer and D. S. Schmidt, *Stability and bifurcation for the $N + 1$ vortex problem on the sphere*, Regular and Chaotic Dynamics, **8** (3) (2003).
- [17] S. Boatto and H. E. Cabral, *Nonlinear stability of a latitudinal ring of point vortices on a non-rotating sphere*, SIAM J. Appl. Math., **64** (2003), 216-230 (electronic).

- [18] S. Boatto and C. Simó, *Thomson's Heptagon: a case of bifurcation at infinity*, *Phisica D*, **237**, (2008), 2051-2055.
- [19] S. Boatto, *Curvature perturbations and stability of a ring of vortices*, *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, **10** (2&3) (2008), 349-375.
- [20] S. Boatto and J. Koiller, *Vortices on closed surfaces*, arXiv:0802.4313v1 [math.SG] (2008).
- [21] L. G. Kurakin, V. I. Yudovich, *The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon*, *Chaos*, **12** (2002), 574-595.
- [22] R. Courant, D. Hilbert *Methods of Mathematical Physics*, Vol I, II, Wiley, New York (1953).
- [23] L. M. Polvani and D. G. Dritschel, *Wave and vortex dynamics on the surface of a sphere*, *Journal of Fluid Mechanics* (1993), **255** 35-64.
- [24] Robert M. Gray, *Toeplitz and Circulant Matrix: A Review*, *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, **2** (3) (2006), 155-239.
- [25] C. Castilho and H. Machado *The N-vortex problem on a simetric ellipsoid: A perturbation approach*, *Journal of Mathematical Physics*, **49**, 022703 (2008).
- [26] A. Soulière and T. Tokieda, *Periodic motions of vortices on surfaces with symmetry*, *J. Fluid Mech.*, **460**, 83-92 (2002).

- [27] A. J. Chorin and J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1979).
- [28] G. L. Lamb, *Hydrodynamics*, Dover, New York, 1932.
- [29] A. E. Gill *Atmosphere-Ocean Dynamics*, International Geophysics Series, 30, Academic Press, New York, 1982.
- [30] J. Pedlosk *Geophysical Fluid Dynamics*, 2^a Ed., Springer-Verlag, New York, 1987.
- [31] P. K. Newton, *The N-Vortex Problem*, Volume 145, Applied Mathematical sciences. Springer-Verlag, 2001.
- [32] G. Haller and I. Mezic, *Reduction of three-dimensional, volume-preserving flows with symmetry*, Nonlinearity **11**, 319-339 (1998).
- [33] L. Zannetti and P. Franzese, *The non-integrability of the restricted problem of two vortices in closed domains*, Physica D **76**, 99-109 (1994).
- [34] L. Zannetti and P. Franzese, *Advection by a point vortices in closed domains*, Eur. J. Mech. B/Fluids **12**, 1-24 (1993).