



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Dept. Matemática

Pós-graduação em Matemática

Soluções Auto-similares e Comportamento
Assintótico para as Equações de Navier-Stokes

Marcelo Fernandes de Almeida

Dissertação de Mestrado

Recife

26 de Fevereiro de 2008



Marcelo Fernandes de Almeida

Soluções Auto-similares e Comportamento Assintótico para as Equações de Navier-Stokes

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em
Matemática do Dept. Matemática da Universidade Fed-
eral de Pernambuco como requisito parcial para obtenção
do grau de Mestre em Matemática.*

Orientador: *Lucas Catão de Freitas Ferreira*

Recife

26 de Fevereiro de 2008

Almeida, Marcelo Fernandes de
Soluções auto-similares e comportamento
assintótico para as equações de navier-Stokes /
Marcelo Fernandes de Almeida. – Recife: O Autor,
2008.

ix, 74 folhas : il., fig.

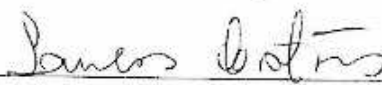
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal
de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2008.

Inclui bibliografia.

1. Equações diferenciais parciais I. Título.

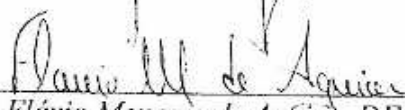
515.353 CDD (22.ed.) MEI2008-034

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: 
Lucas Catão de Freitas Ferreira, DMAT-UFPE

Orientador


Cláudio Rodrigo Cuevas Henriquez, DMAT-UFPE


Flávio Menezes de Aguiar, DF-UFPE

**SOLUÇÕES AUTO-SIMILARES E COMPORTAMENTO
ASSINTÓTICO PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES**

Por

Marcelo Fernandes de Almeida

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro - 2008

A minha família

Agradecimentos

Estou agradecido ao Professor Lucas C.F. Ferreira, a quem devo minha orientação de Mestrado, e a meus amigos Zaqueu (Cacaroto), Joilson (Profeta), Allyson (Vovô), AdeCarlos (Smalville).

A Eder (Gordo), Bruno , Paulo (Emo), Rodrigo (Gudan Feira), Antônio(Macarrão), Andre Ventura, Andre (Milky), Ricardo, Luiz, Tiago, Lucas(Lapa), Wagner. E ainda, Andre (bebê), Wilberclay e Manassés (Bana), os certinhos do departamento.

Agradeço também a Renata, Giovana (Gigi), Anete, Cristina e Chirley.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UFPE, os quais contribuíram, direto ou indiretamente, para minha formação durante o Mestrado.

A todos os meus amigos baianos os quais, mesmo indiretamente, inspiraram-me na realização desta dissertação.

A toda minha família, que sempre esteve presente durante todas as etapas de minha vida. Agradeço, pelos conselhos adequados nos momentos certos, e por outros motivos difíceis de expressar e mensurar; sou especialmente grato a minha mãe Sirlene, a minha avó Noemia, e ao meu avô Miguel, que Deus o tenha em um bom lugar.

Uma pessoa pela qual tenho um grande carinho e também merece um agradecimento especial, é minha irmã Cristiane.

Ao meu tio José Carlos, que sempre me ajudou durante boa parte de minha vida, e aos meus primos Marcos, Ana e Flávia.

Um agradecimento especial a Capes, pelo auxílio financeiro, e ao Departamento de Matemática da UFPE, pela confiança na concessão de minha bolsa de estudos.

*Tudo o que temos de decidir, é o que fazer com o tempo que nos é
dado.*

Christopher Tolkien

Resumo

Nesta dissertação estudaremos as equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^m$, assumindo que o fluido é incompressível e homogêneo. Analisaremos o problema de Cauchy associado em espaços de Marcinkiewicz com índices escolhidos de forma a permitir a existência de soluções auto-similares. Estudaremos também o comportamento assintótico das soluções, mostrando que as soluções auto-similares atraem as soluções que são iniciadas em pequenas perturbações de funções homogêneas. Além disso, abordaremos o problema de Cauchy nos espaços de Lebesgue $\mathcal{L}^p$, e assumindo mais regularidade na condição inicial, demonstraremos algumas estimativas de decaimento para as soluções. O conteúdo desta dissertação encontra-se nas seguintes referências [2, 3, 6, 11, 13, 17].

Palavras-chave: Soluções Auto-similares, Equações de Navier-Stokes, Comportamento Assintótico, Espaços de Lorentz.

Abstract

This master dissertation deals with the Navier-Stokes's equations on $\mathbb{R}^m$, assuming that the fluid is incompressible and homogeneous. We analyzed the Cauchy's problem in Marcinkiewicz spaces ($\mathcal{L}^p$ -weak), with the right index to allow the existence of self-similar solutions. We also study the asymptotic behavior of the solutions and show the existence of a basin of attraction for each self-similar solution. Furthermore, we study the problem of Cauchy's on $\mathcal{L}^p$, and assuming more regularity in the initial condition, we prove some decay estimates for the solution. The contents of this dissertation can be found in the following references [2, 3, 6, 11, 13, 17].

Keywords: Self-similar solutions, Navier-Stokes's equations, Asymptotic behavior, Lorentz spaces.

Sumário

INTRODUÇÃO	1
1 Preliminares	4
1.1 Definições e Notações	4
1.2 As funções distribuição e rearranjo	5
1.3 Desigualdade de Hardy-Littlewood	12
1.4 Espaço de Lorentz $\mathcal{L}(p, q)$	16
1.4.1 Propriedades Topológicas em $\mathcal{L}(p, q)$	22
1.5 Desigualdade de Young e de Hölder em $\mathcal{L}(p, q)$	27
1.5.1 Desigualdade de Young	27
1.5.2 Desigualdade de Hölder	30
1.6 Aproximação da Identidade em $\mathcal{L}(p, q)$	31
1.7 Transformada de Riesz em $\mathcal{L}(p, q)$	33
2 Soluções brandas em $\mathcal{L}(p, \infty)$ e $\mathcal{L}^p$	36
2.1 Soluções brandas globais em $\mathcal{L}(p, \infty)$	41
2.1.1 Boa-Colocação em $\mathcal{L}(p, \infty)$	41
2.1.2 Estimativas do termo não linear	44
2.1.3 Estimativas do termo linear	47
2.1.4 Prova do Teorema 2.5	49
2.1.5 Demonstração do Teorema 2.6	51
2.2 Soluções brandas globais em $\mathcal{L}^p$	54
2.2.1 Boa-Colocação em $\mathcal{L}^p$	54
2.2.2 Demonstração do Teorema 2.15	57
2.3 Soluções brandas locais em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m)$	59
2.3.1 Demonstração do Teorema 2.22	60

3	Soluções auto-similares e Comportamento assintótico	63
3.1	Estimativas de Decaimento	66
3.1.1	Prova do teorema 3.4	68
3.2	Estabilidade Assintótica	70
	BIBLIOGRAFIA	73

INTRODUÇÃO

Nesta dissertação iremos estudar as equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^m$ assumindo que o fluido é homogêneo e incompressível. Consideraremos ainda que o fluido é viscoso e não está submetido a nenhuma força externa. As equações que descrevem a evolução do campo velocidade das partículas de fluido, $u(t, x)$, e da pressão $p(t, x)$, na posição x e no tempo t , são dadas por:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial}{\partial t} u + \rho(u \cdot \nabla)u - \mu \Delta u + \nabla p = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}^m \\ \nabla \cdot u = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}^m \\ u(0, x) = a_0(x) \text{ e } \nabla \cdot a_0(x) = 0 & x \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (\text{NS})$$

Como usual, $\nabla \cdot u = \sum_{j=1}^m \partial_j u$ é o divergente do campo velocidade $u = (u_1, \dots, u_m)$, $\nabla p = (\partial_1 p, \dots, \partial_m p)$ é o gradiente da pressão p , a_0 é a velocidade inicial do fluido e a condição divergente nulo, expressa a incompressibilidade do fluido. Esta última condição advém do princípio da conservação da massa junto com a homogeneidade do fluido. Por outro lado, a primeira equação em (NS) é uma consequência da Segunda Lei Newton, ou seja, da conservação do momento. Mais precisamente, o termo $\partial_t + (u \cdot \nabla)u$ representa a derivada em relação ao tempo do campo velocidade ao longo das trajetórias de partículas do fluido, isto é, a derivada material do campo velocidade. O termo $-\Delta u + \nabla p$ aparece devido às forças que agem no fluido, sendo $-\Delta u$ associado a força de atrito entre as camadas do fluido, e o termo ∇p associado a pressão do fluido (para mais detalhes, ver [7]). Nas equações (NS) as constantes ρ e μ denotam, respectivamente, a densidade do fluido e o coeficiente de viscosidade os quais, por simplicidade, assumiremos $\rho = \mu = 1$. O sistema (NS) é um modelo clássico em mecânica dos fluidos.

O sistema (NS) tem sido muito investigado na últimas décadas, principalmente nas questões de formação de singularidades e existência global. O problema de formação de singularidade e de existência global de muitos modelos de mecânica dos fluidos são

questões de grande interesse em matemática. No caso das equações de Navier-Stokes em dimensão três (3DNS) uma solução completa ainda está em aberto; inclusive o Instituto de Matemática Clay oferece um prêmio de um milhão de dólares para quem apresentar uma solução completa para este problema. Mas precisamente, o problema número seis da lista dos "millenium prize problems" é o seguinte:

Se $u(0, x)$ é suave, então existe solução de (NS) suave, para todo tempo $t > 0$?

para mais detalhes ver [23]. Nessa direção o estudo de soluções auto-similares é importante porque pode dar informações sobre propriedades qualitativas de possíveis singularidades para o sistema (NS).

Nesta tese estudaremos a existência de soluções auto-similares para o sistema (NS) e analisaremos o comportamento assintótico das soluções. Desde que soluções auto-similares satisfazem a relação de escala característica da equação (ver Cap.3, Definição 3.1) é necessário assumir que o dado inicial é homogêneo com um certo grau, o qual é determinado pela relação de escala da equação.

Motivado por isso, o autor em [2], estudou o problema de Cauchy (NS) com o dado inicial em espaços de Marcinkiewicz ($\mathcal{L}^p$ -fraco), o qual contém funções homogêneas. Por outro lado em, [3, 6], os autores estudaram o comportamento assintótico das soluções em espaços de Marcinkiewicz. Eles mostraram que a solução auto-similar é um atrator local em certas normas $\mathcal{L}^p$ -fraca dependente do tempo.

O objetivo desta dissertação será demonstrar detalhadamente os resultados mencionados de existência de solução auto-similar e comportamento assintótico, para as equações de Navier-Stokes (NS). Devido a relação natural entre os espaços de Lebesgue $\mathcal{L}^p$ e os espaços $\mathcal{L}^p$ -fraco as técnicas usadas ainda funcionarão bem em $\mathcal{L}^p$. Assim, estudaremos o problema de Cauchy (NS) em espaços $\mathcal{L}^p$, cobrindo uma boa parte dos resultados encontrados no artigo [13]. Uma das diferenças entre a teoria $\mathcal{L}^p$ e $\mathcal{L}^p$ -fraco, é que a primeira permite naturalmente a existência de soluções locais no tempo, enquanto a segunda exige condições adicionais sobre o dado inicial. Por outro lado, com as técnicas explorados nesta dissertação, não é possível encontrar soluções auto-similares em espaços $\mathcal{L}^p$, pois este não contém funções homogêneas de qualquer grau. Para mais detalhes (ver Cap.3).

Nós organizamos a dissertação em três capítulos. O capítulo 1, são os preliminares essenciais para o desenvolvimento do presente trabalho. Neste capítulo, estudamos os

espaços de Lorentz $\mathcal{L}(p, q)$ detalhando as principais propriedades topológicas por exemplo, a completeza e a dualidade. A cerca da dualidade, mostramos que o dual do espaço $\mathcal{L}(p, q)$ é dado por $\mathcal{L}(p', q')$ para certos valores de p e q , isto é, os espaços de Lorentz são reflexivos. Destacamos, também, as desigualdades de Hölder e de Young, e o Teorema de Aproximação da Identidade em $\mathcal{L}(p, q)$ (Teorema 1.34). Finalizamos, os preliminares, demonstrando, com ajuda do Teorema de interpolação 1.39, que a k -transformada de Riesz, Definição 1.35, é contínua sobre os espaços de Lorentz. Em particular, os espaços de Marcinkiewicz ou $\mathcal{L}^p$ -fraco.

No capítulo 2, são destacados os principais resultados de existência e unicidade de soluções brandas para as equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^m$ (NS). Mostramos, via a formulação integral (2.14) e o Lema Abstrato 2.8, a existência de soluções brandas globais em $\mathcal{L}(p, \infty)$ e $\mathcal{L}^p$ para o sistema (NS), quando assumirmos que a norma dado inicial a_0 é suficientemente pequena nestes espaços (ver Teoremas 2.5, 2.15). Além disso, demonstramos que estas soluções têm todas as derivadas no tempo e no espaço, no sentido clássico. Demonstramos, também, a existência de soluções brandas locais em $\mathcal{L}^p$.

No capítulo 3, são investigados um tipo especial de solução, as chamadas soluções auto-similares (ver Definição 3.1), as quais descreve o comportamento do sistema (NS). Estudamos, também, o comportamento assintótico das soluções obtidas do Teorema 2.5 (ver capítulo 2). E, por fim, observamos que em certas normas $\mathcal{L}^p$ -fraco, a solução auto-similar do Teorema 3.2 atrai as soluções obtidas por certas pequenas perturbações do dado inicial, isto é, existe uma bacia de atração para cada solução auto-similar.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo estudaremos os espaços de Lorentz, introduzidos por G.G. Lorentz (ver [16]) no ano de 1950, denotados por $\mathcal{L}(p, q)$, os quais serão usados para estudar o problema de Cauchy associado as equações de Navier-Stokes incompressível (NS). Mostraremos algumas propriedades como a completude, dualidade e as desigualdades de Hölder e Young generalizadas para estes espaços. Estas propriedades serão de fundamental importância para provar a continuidade de termos não lineares que aparecem na equação integral associado com o problema de Cauchy de nosso interesse.

Os principais resultados lembrados neste capítulo são um subconjunto do conteúdo das seguintes referências [9, 14, 19, 22]. Nós iniciaremos o capítulo com algumas definições básicas.

1.1 Definições e Notações

Nesta dissertação o valor da constante $C > 0$ pode mudar de linha para linha, ou em uma mesma linha.

Seja $\mathcal{U}$ um aberto de $\mathbb{R}^m$ e $k \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $C^k(\mathcal{U})$ o espaço de todas funções em $\mathcal{U}$ com derivada parcial, contínua, até a ordem k , e o conjunto $C^\infty(\mathcal{U}) = \bigcap_1^\infty C^k(\mathcal{U})$. Quando $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, escreveremos simplesmente C^∞ para denotar $C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Denotamos por C_c^∞ , o espaço de todas funções f de classe C^∞ em $\mathbb{R}^m$ cujo suporte $\text{supp}(f)$ é compacto.

Usaremos uma notação compacta para derivadas parciais, escreveremos ∂_j em vez de $\frac{\partial}{\partial x_j}$, e para derivadas de ordem mais alta, usaremos a notação de *multi-index*, que é uma m -*upla* de inteiros não negativos. Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ é um multi-index, escrevemos

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^m \alpha_j, \quad \nabla^\alpha = \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)^{\alpha_m},$$

e para $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$x^\alpha = \prod_{j=1}^m x_j^{\alpha_j}.$$

Um espaço de funções C^∞ de particular importância, é o espaço de Schwartz $\mathcal{S}$, no qual todas as funções, juntamente com todas as suas derivadas, decaem mais rapidamente no infinito que qualquer potência de $|x|$. Mais precisamente:

Definição 1.1. *O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, é o conjunto de todas funções $f \in C^\infty$, tais que, a semi-norma*

$$\|f\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} (1 + |x|^N) |\partial^\alpha f(x)|, \quad (1.1)$$

é finita, para qualquer inteiro não negativo N e qualquer multi-index α .

Exemplos de funções em $\mathcal{S}$, são dados pela família de funções $f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-|x|^2}$, onde α é qualquer multi-index.

1.2 As funções distribuição e rearranjo

O objetivo desta seção, é discutir propriedades de rearranjo e função distribuição. No decorrer do capítulo, quando não mencionado contrário, a tripla $(\mathcal{U}, \mathcal{M}, \mu)$ denota um espaço de medida σ -finita e o termo **q.t.p** segunifica em quase toda parte.

Definição 1.2. *Seja f uma função $\mathcal{M}$ -mensurável em $\mathcal{U}$. A aplicação $\mu_f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida por*

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in \mathcal{U}; |f(x)| > \lambda\}), \quad (\lambda \geq 0)$$

é chamada a função distribuição de f .

A função μ_f depende somente do valor absoluto de f , é não-crescente e contínua à direita, como veremos adiante. A próxima proposição fornece algumas propriedades básicas de μ_f .

Proposição 1.3. *Se f e g são funções $\mathcal{M}$ -mensuráveis em $\mathcal{U}$, então*

- (i) μ_f é não-crescente e contínua à direita.

(ii) Se $|f(x)| \leq |g(x)|$ q.t.p em $\mathcal{U}$, então $\mu_f(\lambda) \leq \mu_g(\lambda)$, $\forall \lambda \geq 0$.

(iii) $\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.

Demonstração. Começaremos provando (i). Se $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$, então

$$\{x \in \mathcal{U}; |f(x)| > \lambda_2\} \subset \{x \in \mathcal{U}; |f(x)| > \lambda_1\},$$

pela monotonicidade de medida, temos

$$\mu_f(\lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1).$$

Para provar que μ_f é contínua à direita, seja

$$\mathcal{A}_f(\lambda) = \{x \in \mathcal{U}; |f(x)| > \lambda\},$$

e $\lambda_0 \geq 0$. Os conjuntos $\mathcal{A}_f(\lambda)$ são crescentes, quando λ decresce e

$$\mathcal{A}_f(\lambda_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_f(\lambda_0 + \frac{1}{n}).$$

Assim, pela continuidade por baixo de medidas, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_f(\lambda_0 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{A}_f(\lambda_0 + \frac{1}{n})) = \mu(\mathcal{A}_f(\lambda_0)) = \mu_f(\lambda_0),$$

ou seja, μ_f é contínua à direita.

Agora vamos provar (ii). Como $|f(x)| \leq |g(x)|$ q.t.p em $\mathcal{U}$, então

$$\mathcal{A}_f(\lambda) = \{x \in \mathcal{U}; |f(x)| > \lambda\} \subset \{x \in \mathcal{U}; |g(x)| > \lambda\} = \mathcal{A}_g(\lambda).$$

Portanto $\mu(\mathcal{A}_f(\lambda)) \leq \mu(\mathcal{A}_g(\lambda))$, isto é, $\mu_f(\lambda) \leq \mu_g(\lambda)$.

Para provar (iii), basta observar que

$$\{x \in \mathcal{U}; |f(x) + g(x)| > \lambda_1 + \lambda_2\} \subset \{x \in \mathcal{U}; |f(x)| > \lambda_1\} \cup \{x \in \mathcal{U}; |g(x)| > \lambda_2\}$$

e aplicar a monotonicidade de medidas.

□

Outra propriedade importante da função μ_f , afirma que ao assumir $(f_n)_n$ uma sequência de funções mensuráveis em $\mathcal{U}$, tal que, $|f_n| \leq |f_{n+1}|$ e $f_n \rightarrow f$ q.t.p., é possível mostrar que $\mu_{f_n}(\lambda) \rightarrow \mu_f(\lambda)$, $\forall \lambda \geq 0$. Com efeito, pela Proposição 1.3 (ii), temos que $\mathcal{A}_{f_n}(\lambda) \subset \mathcal{A}_{f_{n+1}}(\lambda)$, segue que $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_{f_n}(\lambda) \subset \mathcal{A}_f(\lambda)$. Além disso, dado $x \in \mathcal{A}_f$ tem-se $|f(x)| > \lambda$, mas por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $s < |f_{n_0}(x)|$, isto é, $x \in \mathcal{A}_{f_{n_0}}$. Portanto,

$$\mathcal{A}_f = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_{f_n}.$$

Pela continuidade por baixo de medidas, concluímos $\mu_{f_n}(\lambda) \rightarrow \mu_f(\lambda)$.

Pode-se definir um tipo de convergência associado com a função distribuição, a qual é chamada convergência em medida. Mais precisamente, dizemos que uma sequência (f_n) de funções mensuráveis, converge em medida para f , quando para todo $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0, \text{ com } n \rightarrow \infty.$$

Dizemos também, que a sequência $\{f_n\}$ é de Cauchy em medida, quando

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0, \text{ com } m, n \rightarrow \infty.$$

A próxima proposição mostra um tipo de "completeza" para a convergência em medida.

Proposição 1.4. *Suponha que (f_n) é de Cauchy em medida. Então existe uma função mensurável f , tal que, $f_n \rightarrow f$ em medida.*

Demonstração. Seja $(g_j) = (f_{n_j})$ uma subsequência de (f_n) , tal que, $E_j = \{x : |g_j(x) - g_{j+1}(x)| \geq 2^{-j}\}$. Então $\mu(E_j) < 2^{-j}$ logo, escrevendo $F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$, temos $\mu(F_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = \frac{1}{2^{1-k}}$. Quando $x \notin F_k$ para $i \geq j \geq k$, temos

$$|g_j(x) - g_i(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} |g_{l+1}(x) - g_l(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} 2^{-l} \leq 2^{1-j}. \quad (1.2)$$

Assim (g_j) é pontuamente de Cauchy em F_k^c . Seja $F = \bigcap_1^{\infty} F_k = \overline{\lim} E_j$, então $\mu(F) = 0$.

Considere

$$f(x) = \begin{cases} \lim g_j(x), & x \notin F \\ 0, & x \in F \end{cases} \quad (1.3)$$

então f é mensurável e $g_j \rightarrow f$ q.t.p. Também, pela desigualdade (1.2), temos $|g_j(x) - f(x)| \leq 2^{1-j}$, quando $x \notin F_k$ e $j \geq k$.

Desde que $\mu(F_k) \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$, segue que $g_j \rightarrow f$ em medida. Portanto, a sequência $f_n \rightarrow f$ em medida, de fato

$$\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{x : |f_n(x) - g_j(x)| \geq \varepsilon/2\} \cup \{x : |g_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\},$$

logo

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \mu(\{x : |f_n(x) - g_j(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}) + \mu(\{x : |g_j(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}), \quad (1.4)$$

mas $g_j \rightarrow f$ em medida e (f_n) é de Cauchy em medida, então para j e n suficientemente grande o lado direito de (1.4) é suficientemente pequeno, isto conclui a prova da proposição. $\square$

Exemplo 1.5. Vamos calcular formalmente a função distribuição μ_f de uma função simples. Seja f uma função positiva e simples em $\mathcal{U}$ da forma

$$f(x) = \sum_j \alpha_j \chi_{A_j}(x), \quad (1.5)$$

onde $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m > 0$ e $A_j = \{x \in \mathcal{U} : f(x) = \alpha_j\}$ são subconjuntos disjuntos. Se $\lambda \geq \alpha_1$, então $\mu_f(\lambda) = 0$. Portanto, se $\alpha_2 \leq \lambda < \alpha_1$, então $f(x)$ ultrapassa λ precisamente no conjunto A_1 , e assim $\mu_f(\lambda) = \mu(A_1)$. Similarmente, se $\alpha_3 \leq \lambda < \alpha_2$, então $f(x)$ ultrapassa λ precisamente no conjunto $A_1 \cup A_2$, e assim $\mu_f(\lambda) = \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Em geral, obtemos

$$\mu_f(\lambda) = \sum_j m_j \chi_{[\alpha_{j+1}, \alpha_j)}(\lambda), \quad (\lambda \geq 0), \quad (1.6)$$

onde

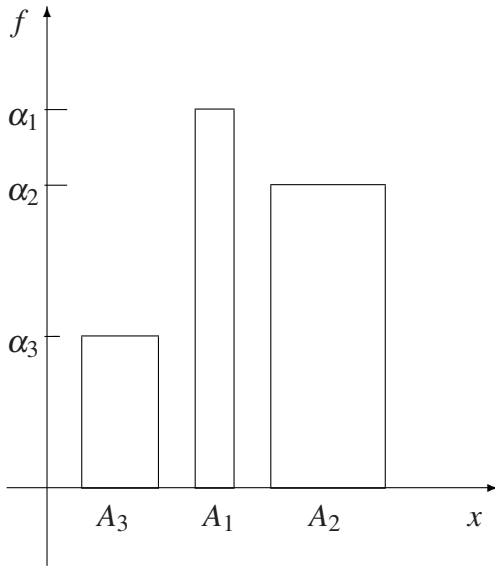
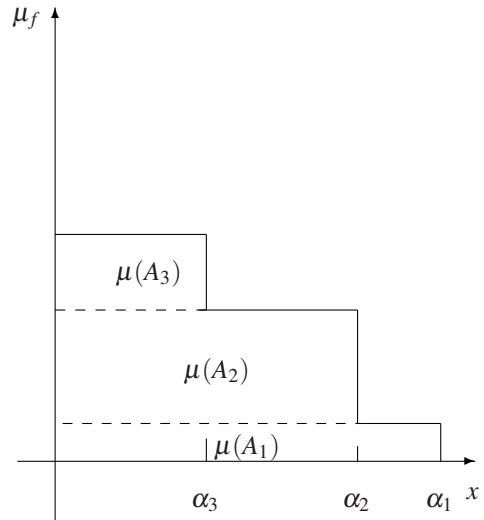
$$m_j = \sum_{i=1}^j \mu(A_i), \quad (j = 1, \dots, m) \quad (1.7)$$

e $\alpha_{m+1} := 0$, ver Figura 1.1 e 1.2.

Para cada função $\mathcal{M}$ -mensurável f , vamos associar uma função f^* definida no intervalo $[0, \infty)$, chamada na literatura de *rearranjo não-crescente de f* . Mostraremos que f^* , é não-crescente, contínua à direita e equimensurável a f , ou seja, a função distribuição dela coincide com a função distribuição μ_f .

Definição 1.6. Seja f uma função $\mathcal{M}$ -mensurável em $\mathcal{U}$. O rearranjo de f , é uma aplicação $f^* : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$, dada por

$$f^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0 : \mu_f(\lambda) \leq t\}. \quad (1.8)$$

Figura 1.1 Gráfico de f .Figura 1.2 Gráfico de μ_f .

Em (1.8), usaremos a convenção $\inf \emptyset = \infty$. Portanto, se $\mu_f(\lambda) > t$, então $f^*(t) = \infty$. Assumindo que $\mathcal{U}$ tem medida finita, então a função μ_f é limitada por $\mu(\mathcal{U})$ e concluímos que, $f^*(t) = 0 \quad \forall t \geq \mu(\mathcal{U})$.

Proposição 1.7. f^* é o rearranjo de f se, e somente se,

$$\begin{aligned} f^* : [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty] \\ t &\mapsto m_{\mu_f}(t), \end{aligned}$$

onde m denota a medida de Lebesgue na semi-reta.

Demonstração. Desde que μ_f é não-crescente, Proposição 1.3, temos

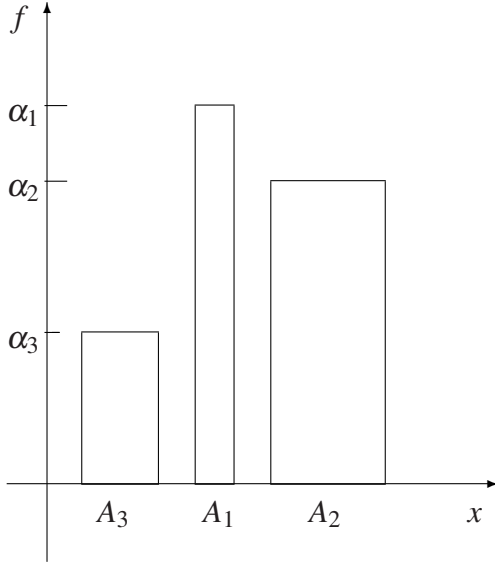
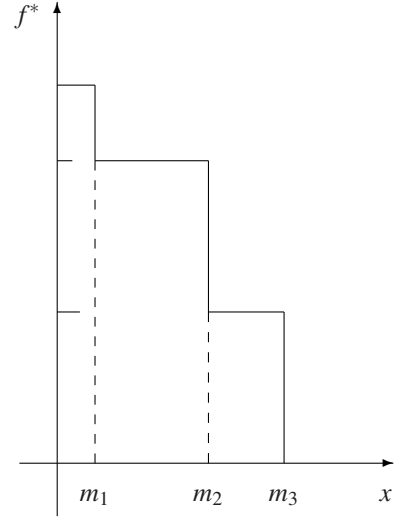
$$\sup\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\} = m\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\}.$$

Assim, pela definição de μ_f ,

$$m_{\mu_f}(t) = m\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\} = \sup\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\} = \inf\{\lambda \geq 0 : \mu_f(\lambda) \leq t\}.$$

□

Exemplo 1.8. Agora, vamos calcular o rearranjo não-crescente da função simples f dada por (1.5). Pela Definição 1.6 e a Figura 1.2, podemos ver que $f^*(t) = 0$, quando $t \geq m_3$.

Figura 1.3 Gráfico de f .Figura 1.4 Gráfico de f^* .

Também, se $m_3 > t \geq m_2$, então $f^*(t) = \alpha_3$, e se $m_2 > t \geq m_1$, então $f^*(t) = \alpha_2$. Mais precisamente,

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{[m_{j-1}, m_j)}(t), \quad (t \geq 0), \quad (1.9)$$

onde consideramos $m_0 = 0$.

Geometricamente, nós meramente rearranjamos os *blocos verticais* do gráfico de f em uma ordem não-crescente, para obter o rearranjo não-crescente f^* (ver Figuras 1.3, 1.4).

Segundo a Proposição 1.7, o rearranjo de f herda as mesmas propriedades da função distribuição de f . Outra propriedade de f^* , é a seguinte: $f^*(\mu_f(s)) \geq s$ e $\mu_f(f^*(t)) \leq t$. De fato, pela continuidade a direita de μ_f (ver Proposição 1.3), existe uma sequência (s_n) com $s_{n+1} \leq s_n$, tal que, $s_n \rightarrow f^*$ e $\mu_f(s_n) \leq t$. Logo, $\mu_f(f^*(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_f(s_n) \leq t$. Para ver que $f^*(\mu_f(s)) \geq s$, observemos que

$$f^*(\mu_f(s)) = \inf\{z > 0; \mu_f(z) \leq \mu_f(s)\} \geq \inf\{z; s < z\} = s,$$

pois μ_f é não-crescente. Portanto, assumindo que μ_f é crescente, concluímos que f^* é a função inversa de μ_f . Mais propriedades do rearranjo, são destacadas na próxima proposição.

Proposição 1.9. *As seguintes propriedades são válidas:*

- (i) $f^*(t) > \lambda \iff \mu_f(\lambda) > t$.
- (ii) $\mu_f(\lambda) = m_{f^*}(\lambda)$, onde m denota a medida de Lebesgue.
- (iii) Se $A \subset \mathcal{M}$, então $(f\chi_A)^* \leq f^*(t)\chi_{[0, \mu(A)]}$.
- (iv) Para $0 < p < \infty$, $(|f|^p)^*(t) = (f^*(t))^p$.
- (v) $(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + f^*(t_2)$.

Demonstração. Para provar (i), observaremos a contrapositiva deste item e usaremos o fato de f^* ser não-crescente. Assim,

$$\mu_f(\lambda) \leq t \Rightarrow f^*(t) \geq f^*(\mu_f(\lambda)) \geq \lambda.$$

A recíproca do item (i), o procedimento é semelhante.

Para provar (ii), seja m a medida de Lebesgue em $[0, \infty)$, por (i), tem-se

$$\begin{aligned} m_{f^*}(\lambda) &= m(\{t; f^*(t) > \lambda\}) \\ &\stackrel{(i)}{=} m(\{t; \mu_f(\lambda) > t\}) \\ &= m[0, \mu_f(\lambda)) = \mu_f(\lambda). \end{aligned}$$

Prova de (iii)

Desde que $(f\chi_A)(x) \leq f(x)$, pela Proposição 1.3 (ii) e a Proposição 1.7, temos

$$(f\chi_A)^*(t) \leq f^*(t), \text{ ou seja, } (f\chi_A)^*(t) = 0, t > \mu(A), \quad (1.10)$$

pois $\mu\{x \in \mathcal{U} : |f\chi_A(x)| > \lambda\} \leq \mu(A)$. Combinando as duas estimativas (1.10), concluímos o resultado.

Finalmente provaremos (iv), este item será importante para mostrar que $\|f\|_p^p = \int_0^\infty (f(t))^p dt$. Assumindo $0 \leq \lambda < \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} (|f|^p)^*(t) &= \inf\{\lambda : \mu(\{x \in \mathcal{U} : |f(x)|^p > \lambda\}) \leq t\} \\ &= \inf\{v^p : \mu(\{x \in \mathcal{U} : |f(x)| > v\}) \leq t\} = f^*(t)^p, \end{aligned}$$

onde tomamos $v = \lambda^{1/p}$. A demonstração do quinto item, podemos encontrar em [14, pg.12]. □

1.3 Desigualdade de Hardy-Littlewood

Nesta seção, mostraremos que a norma em $\mathcal{L}^p$ pode ser calculada a partir da função distribuição e do rearranjo de f . Depois, provaremos a famosa desigualdade de Hardy-Littlewood, a qual garante que a norma $\mathcal{L}^1$ do produto de duas funções mensuráveis não pode ser maior que a norma $\mathcal{L}^1$ do produto do rearranjo delas. A desigualdade de Hardy-Littlewood será de fundamental importância quando estudarmos o dual dos Espaços de Lorentz. Começaremos a seção com o lema.

Lema 1.10. *São válidas as igualdades*

$$\int_{\mathcal{U}} |f(x)| d\mu = \int_0^\infty \mu_f(\lambda) d\lambda \quad (1.11)$$

$$\int_{\mathcal{U}} |f(x)| d\mu = \int_0^\infty f^*(t) dt \quad (1.12)$$

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \mu_f(\lambda) = \sup_{t > 0} t f^*(t). \quad (1.13)$$

Demonstração. Provaremos este lema para funções simples. Seja s uma função positiva e simples em $\mathcal{U}$ da forma

$$s(x) = \sum_j \alpha_j \chi_{A_j}(x),$$

onde $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k > 0$ e A_j são subconjuntos disjuntos. Então

$$\mu_s(\lambda) = \sum_{j=1}^k \beta_j \chi_{B_j}(\lambda),$$

onde denotamos $\beta_j = \sum_{i=1}^j \mu(A_i)$, $B_k = [\alpha_{j+1}, \alpha_j)$, $j = 1, \dots, k$ e $\alpha_{k+1} = 0$.

Assim, pela definição de integral simples,

$$\int_0^\infty \mu_s(\lambda) d\lambda = \sum_{j=1}^k \beta_j m([\alpha_{j+1}, \alpha_j)) = \sum_{j=1}^k \beta_j (\alpha_j - \alpha_{j+1}).$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \beta_j (\alpha_j - \alpha_{j+1}) &= \beta_1 (\alpha_1 - \alpha_2) + \beta_2 (\alpha_2 - \alpha_3) + \dots + \beta_k \alpha_k \\ &= \beta_1 \alpha_1 + \alpha_2 (\beta_2 - \beta_1) + \dots + \alpha_{k+1} (\beta_{k-1} - \beta_{k-2}) \beta_k \alpha_k \\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(A_j), \end{aligned}$$

obtemos

$$\int_0^\infty \mu_s(\lambda) d\lambda = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(A_j) = \int_0^\infty s(x) d\mu.$$

Isto prova a igualdade (1.11) do lema. A prova da igualdade (1.12) segue da observação

$$s^*(t) = \sum_j^k \alpha_j \chi_{[\beta_{j-1}, \beta_j)}(t).$$

Portanto,

$$\int_0^\infty s^*(t) dt = \sum_{j=1}^k \alpha_j (\beta_j - \beta_{j-1}) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(A) = \int_u s(x) d\mu.$$

Agora provaremos (1.13). Assuma que $\mu_f(\lambda) < \infty$ e $f^*(t) < \infty$, provaremos que

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \mu_f(\lambda) \leq \sup_{t > 0} t f^*(t).$$

Com efeito, desde que $\mu_f(\lambda) < \infty$, então $f^*(\mu_f(\lambda)) \geq \lambda$ e

$$\sup_{t > 0} t f^*(t) \geq \mu_f(\lambda) f^*(\mu_f(\lambda)) \geq \mu_f(\lambda) \lambda.$$

Logo $\sup_{t > 0} t f^*(t)$ é uma cota superior. Dado $\varepsilon > 0$, pela Definição 1.6, temos $f^*(t) - \varepsilon < \lambda$. Pela Proposição 1.3 (i), obtemos.

$$\sup \lambda \mu_f(\lambda) \geq (f^*(t) - \varepsilon) \mu_f(f^*(t) - \varepsilon),$$

assim, pelo item (ii) da Proposição 1.9, temos

$$\begin{aligned} \sup \lambda \mu_f(\lambda) &\geq (f^*(t) - \varepsilon) \mu(\{s; f^*(s) > f^*(t) - \varepsilon\}) \\ &\geq (f^*(t) - \varepsilon) t, \end{aligned}$$

ou seja, a igualdade (1.13) é válida, quando μ_f e f^* são finitas. Se existe $\lambda_0 \in (0, \infty)$, tal que, $\mu_f(\lambda_0) = \infty$, então

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \mu_f(\lambda) = \infty \text{ e } \sup_{t > 0} t f^*(t) \geq \sup_{t > 0} t \lambda_0 = \infty.$$

reciprocamente, se existe $t_0 \in (0, \infty)$, tal que, $f^*(t_0) = \infty$, então $\sup_{t > 0} t f^*(t) = \infty$ e

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \mu_f(\lambda) \geq \sup_{\lambda > 0} \lambda t_0 = \infty$$

e a igualdade (1.13) é ainda verdadeira para o caso μ_f ou f^* infinitos. □

Agora estamos em condições de identificar a norma dos espaços $\mathcal{L}^p$, usando a função distribuição e o rearranjo, através do teorema.

Teorema 1.11. *Seja $0 < p < \infty$ e $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, então valem as seguintes igualdades*

$$\int_{\mathcal{U}} |f(x)|^p d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) d\lambda. \quad (1.14)$$

$$\int_{\mathcal{U}} |f(x)|^p d\mu = \int_0^\infty f^*(t)^p dt. \quad (1.15)$$

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \mu_f(\lambda)^{\frac{1}{p}} = \sup_{t > 0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t). \quad (1.16)$$

Para $p = \infty$, temos

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathcal{U}} |f(x)| = \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) = 0\} = f^*(0).$$

Demonstração. Primeiro assuma $0 < p < \infty$. Pelo Lema 1.10, temos

$$\int_{\mathcal{U}} |f(x)|^p d\mu = \int_0^\infty \mu_{|f|^p}(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \mu_{|f|}(\lambda^{\frac{1}{p}}) d\lambda$$

Considerando a mudança de variável, $v = \lambda^{\frac{1}{p}}$, obtemos

$$\int_0^\infty \mu_{|f|}(\lambda^{\frac{1}{p}}) d\lambda = \int_0^\infty \mu_f(v) d(v^p) = p \int_0^\infty v^{p-1} \mu_f(v) dv.$$

A prova da segunda igualdade (1.14), segue, respectivamente, da Proposição 1.9 (iv) e do Lema 1.10. De fato,

$$\int_0^\infty f^*(t)^p dt = \int_0^\infty (|f|^p)^*(t) dt = \int_{\mathcal{U}} |f(x)|^p d\mu.$$

Não é difícil verificar a última igualdade, quando usamos o Lema 1.10.

O caso $p = \infty$ é consequência das definições, de supremo essencial e da função distribuição. De fato,

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathcal{U}} |f(x)| &= \inf\{\lambda : \mu(\{x \in \mathcal{U} : |f(x)| > \lambda\}) = 0\} \\ &= \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) = 0\} \\ &= f^*(0). \end{aligned}$$

□

Para finalizar a seção, vamos provar a desigualdade de Hardy-Littlewood, a qual nos informa que a integral do produto de funções $\mathcal{M}$ -mensuráveis não pode ser maior que a integral do produto do rearranjo delas. A prova deste resultado basea-se na seguinte estimativa

$$\int_A |f(x)| d\mu \leq \int_0^a f^*(t) dt, \quad (1.17)$$

a qual é válida para qualquer conjunto mensurável A com medida $\mu(A) \leq a$. Com efeito, pelo Lema 1.10, segue que

$$\int_A |f(x)| d\mu = \int_{\mathcal{U}} |f(x)\chi_A(x)| d\mu = \int_0^\infty (f\chi_A)^*(t) dt.$$

Deixe-nos observar, que $(f\chi_A)^* \leq f^*\chi_{[0, \mu(A)]}$. Logo,

$$\int_0^\infty (f\chi_A)^*(t) dt \leq \int_0^\infty f^*(t)\chi_{[0, \mu(A)]}(t) dt = \int_0^{\mu(A)} f^*(t) dt.$$

Juntando as duas desigualdades acima, obtemos a desigualdade (1.17). Usaremos a estimativa (1.17), para provar a Desigualdade de Hardy-Littlewood.

Teorema 1.12. (*Desigualdade de Hardy-Littlewood*). *Sejam f e g duas funções $\mathcal{M}$ -mensuráveis, então*

$$\int_{\mathcal{U}} |f(x)g(x)| d\mu \leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t) dt.$$

Demonstração. Seja s uma função positiva e simples em $\mathcal{U}$ da forma

$$s(x) = \sum_j \alpha_j \chi_{A_j}(x),$$

onde $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k > 0$ e $A_j = \{x \in \mathcal{U} : s(x) = \alpha_j\}$ são subconjuntos disjuntos. Podemos reescrever s , como

$$s(x) = \sum_{j=1}^k \beta_j \chi_{B_j}(x),$$

onde $B_j = \bigcup_{i=1}^j A_i$ e $\beta_j = \alpha_j - \alpha_{j+1}$, $\alpha_{k+1} = 0$. Assim, pela estimativa (1.17), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{U}} |s(x)g(x)| d\mu &= \int_{\mathcal{U}} \left| \left[\sum_{j=1}^k \beta_j \chi_{B_j}(x) \right] g(x) \right| d\mu = \sum_j \beta_j \int_{B_j} |g(x)| d\mu \\ &\leq \sum_j \beta_j \int_0^{\mu(B_j)} g^*(t) dt = \sum_j (\alpha_j - \alpha_{j+1}) \int_0^{\mu(B_j)} g^*(t) dt \\ &= \sum_j \alpha_j \int_{\gamma_{j-1}}^{\gamma_j} g^*(t) dt = \int_0^\infty \sum_j \alpha_j \chi_{[\gamma_{j-1}, \gamma_j)}(t) g^*(t) dt \\ &= \int_0^\infty s^*(t) g^*(t) dt, \end{aligned}$$

onde $\gamma_j = \sum_i^j \mu(A_i)$ e $\gamma_0 = 0$. O caso geral, pode ser provado aplicando o teorema da convergência monótona, pois sabemos que qualquer função mensurável pode ser aproximada por uma sequência não-crescente de funções simples. $\square$

1.4 Espaço de Lorentz $\mathcal{L}(p, q)$

O objetivo desta seção é definir precisamente os espaços de Lorentz $\mathcal{L}(p, q)$ e extrair dela algumas propriedades importantes. Iniciaremos a seção definindo o duplo rearranjo, como a média da função f^* no intervalo de $(0, t)$, e em seguida provaremos algumas propriedades relevantes.

Definição 1.13. O duplo rearranjo, é uma função $f^{**} : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ definida por

$$f^{**}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds.$$

Observação 1.14. f^{**} é chamada, geralmente, de função maximal de f , pois podemos ver f^{**} , como a média da função não-crescente f^* .

A igualdade em $t = 0$ não foi incluída na definição acima, todavia observe que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{**}(t) = f^*(0) = \|f\|_\infty.$$

Proposição 1.15. Sejam f_n funções $\mathcal{M}$ -mensuráveis em $\mathcal{U}$, $n = 1, 2, \dots$. Então

- (i) f^{**} é não-crescente e contínua em $(0, \infty)$.
- (ii) $f^*(t) \leq f^{**}(t)$, para todo $t > 0$.
- (iii) Se $|f(x)| \leq |g(x)|$ q.t.p em $\mathcal{U}$, então $f^{**}(t) \leq g^{**}(t)$, para todo $t > 0$.
- (iv) Se (f_n) é uma sequência, tal que, $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ q.t.p em $\mathcal{U}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = |f(x)|$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n^{**}(t)| = f^{**}(t)$.

Demonstração. (i) A continuidade de f^{**} , segue da Definição 1.13. Para ver que f^{**} é

não-crescente, seja $0 < a < b$, então

$$\begin{aligned}
 f^{**}(b) &= \frac{1}{b} \int_0^b f^*(s) ds = \frac{1}{b} \int_0^a f^*(s) ds + \frac{1}{b} \int_a^b f^*(s) ds \\
 &\leq \frac{1}{b} \int_0^b f^*(s) ds + \frac{1}{b} f^*(a)(b-a) \\
 &= \frac{1}{b} \int_0^b f^*(s) ds + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) a f^*(a) \\
 &\leq \frac{1}{b} \int_0^b f^*(s) ds + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \int_0^a f^*(s) ds \\
 &= \frac{1}{a} \int_0^a f^*(s) ds = f^{**}(a).
 \end{aligned}$$

(ii) Desde que f^* é não-crescente, Proposição 1.7, temos

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \geq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(t) ds = f^*(t).$$

(iii) Se $|f(x)| \leq |g(x)|$ q.t.p em $\mathcal{U}$, pela Proposição 1.3 (ii) e a Proposição 1.7, obtemos

$$\begin{aligned}
 \mu_f(\lambda) \leq \mu_g(\lambda) &\Rightarrow m_{\mu_f}(t) \leq m_{\mu_g}(t) \\
 &\Rightarrow f^*(t) \leq g^*(t) \\
 &\Rightarrow \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t g^*(s) ds \\
 &\Rightarrow f^{**} \leq g^{**}.
 \end{aligned}$$

(iv) Pela hipótese, a Proposição 1.3 e a Proposição 1.7, segue que

$$\begin{aligned}
 |f(x)| = \lim |f_n(x)| &\Rightarrow \mu_f(\lambda) = \lim \mu_{f_n}(\lambda) \\
 &\Rightarrow m_{\mu_f}(\lambda) = \lim m_{\mu_{f_n}}(\lambda) \\
 &\Rightarrow f^*(t) = \lim f_n^*(t).
 \end{aligned}$$

Mas, $f_n^*(t) \leq f^*(t) \in \mathcal{L}^1(0, t)$, pelo Teorema da convergência dominda, temos

$$\begin{aligned}
 f^{**}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t \lim f_n^*(s) ds \\
 &= \lim \frac{1}{t} \int_0^t f_n^*(s) ds = f_n^{**}(t).
 \end{aligned}$$

□

Estamos em condições de definir os espaço de Lorentz e provar algumas propriedades relevantes ao desenvolvimento desta dissertação.

Definição 1.16. (*Espaços de Lorentz*) Sejam $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$. Os espaços de Lorentz, $\mathcal{L}(p, q)$ é o conjunto de todas funções $\mathcal{M}$ -mensuráveis, tal que, o funcional $\|\cdot\|_{(p,q)}^*$ definido por

$$\|f\|_{(p,q)}^* = \begin{cases} \left[\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}}, & \text{se } 0 < p < \infty, 0 < q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & \text{se } 0 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases}$$

é finito.

Observação 1.17. O espaço de Lorentz $\mathcal{L}(p, q)$ com $p = \infty$ e $0 < q < \infty$ não tem qualquer interesse. A razão é que $\|f\|_{(\infty,q)}^* < \infty$, implica que $f = 0$ q.t.p em $\mathcal{U}$. De fato, considere $q = 1$ e assuma, por redução ao absurdo, que $\mathcal{L}(\infty, q)$ é um espaço não trivial. Então existe uma função não nula $f \in \mathcal{L}(\infty, q)$, tal que, o conjunto $A = \{x : |f(x)| > c\} \in \mathcal{M}$. Pela Proposição 1.9 (iii), segue que

$$\|f\|_{(\infty,1)}^* = \int_0^\infty f^* \geq \int_0^\infty (f\chi_A)^* \geq \int_0^\infty f^* \chi_{[0, \mu_f(c))} = \infty,$$

pois $f^*(t) = \inf \emptyset = \infty$, quando $t > \mu_f(c)$, assim temos uma contradição.

Quando $q = \infty$, o espaço $\mathcal{L}(p, \infty)$ é conhecido na literatura como o espaço $\mathcal{L}^p$ -fraco ou espaço de Marcinkiewicz. Note, pelo Teorema 1.14, que $\|f\|_{(p,\infty)}^* = (\sup_{s>0} s^p \mu_f(s))^{1/p}$ isto é, a quase norma $\|\cdot\|_{(p,\infty)}^*$ coincide com a da definição clássica de $\mathcal{L}^p$ -fraco, ver [9, pg.191]. Os espaços de Lebesgue $\mathcal{L}^p$, também, são um caso particular dos espaços de Lorentz. De fato, tomando $0 < p = q < \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \|f\|_{(p,p)}^* &= \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t) \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^\infty t (f^*(t))^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^\infty f^*(t)^p dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Usando o Teorema 1.11, obtemos

$$\|f\|_{(p,p)}^* = \left(\int_0^\infty f^*(t)^p dt \right)^{1/p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Para $p = \infty$, obtemos, pelo Teorema 1.11,

$$\|f\|_{(\infty,\infty)}^* = \sup_{t>0} f^*(t) = f^*(0) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Portanto $\|f\|_{(p,p)}^* = \|f\|_p$, ou seja, $\mathcal{L}(p, p) = \mathcal{L}^p$.

Os espaços de Lorentz, têm a mesma relação de escala do espaço $\mathcal{L}^p$. Mas precisamente, dado $\lambda > 0$ e uma função mensurável em $\mathbb{R}^m$, tal que, $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$, temos

$$\|f_\lambda(x)\|_{(p,q)}^* = \lambda^{-\frac{m}{p}} \|f(x)\|_{(p,q)}^*, \quad (1.18)$$

onde $1 \leq p, q < \infty$. Com efeito, denotando por $\mathbf{v}$, a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^m$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{f_\lambda}(s) &= \mathbf{v}(\{x : |f(\lambda x)| > s\}) \\ &= \lambda^{-m} \mathbf{v}(\{x : |f(x)| > s\}) \\ &= \lambda^{-m} \mathbf{v}_f(s). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (f_\lambda)^*(t) &= \inf\{s : \mathbf{v}_{f_\lambda}(s) \leq t\} \\ &= \inf\{s \geq 0 : \mathbf{v}_f(s) \leq \lambda^m t\} \\ &= f^*(\lambda^m t). \end{aligned}$$

Logo, quando $0 < q < \infty$, tem-se

$$\begin{aligned} \|f_\lambda(x)\|_{(p,q)}^* &= \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} (f_\lambda)^*(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(\lambda^m t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \lambda^{-\frac{m}{p}} \left(\int_0^\infty \left[(\lambda^m t)^{\frac{1}{p}} f^*(\lambda^m t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} = \lambda^{-\frac{m}{p}} \|f(x)\|_{(p,q)}^*, \end{aligned}$$

e quando, $q = \infty$

$$\begin{aligned} \|f_\lambda(x)\|_{(p,\infty)}^* &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (f_\lambda)^*(t) = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (f_\lambda)^*(\lambda^m t) \\ &= \lambda^{-\frac{m}{p}} \sup_{t>0} (\lambda^m t)^{\frac{1}{p}} (f_\lambda)^*(\lambda^m t) = \lambda^{-\frac{m}{p}} \|f(x)\|_{(p,\infty)}^*. \end{aligned}$$

A seguir, mostraremos a desigualdade de Hardy, a qual será útil para munir os espaços $\mathcal{L}(p, q)$ de uma norma.

Lema 1.18. (*Desigualdade de Hardy*) Se $1 \leq q < \infty$ e $r > 0$ e f é uma função mensurável em $(0, \infty)$, então

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f(u) du \right)^q t^{-r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty (t f(t))^q t^{-r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.19)$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty f(u) du \right)^q t^{r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty (t f(t))^q t^{r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.20)$$

Demonstração. A demonstração deste lema é uma aplicação da desigualdade de Jensen (ver [21]) e o Teorema de Fubini. Vamos seguir o mesmo caminho da demonstração de [22, pg.35], outro caminho pode ser encontrado em [9, pg.188]). Como a função $\varphi(x) = x^q$ é convexa em $(0, \infty)$, então

$$\begin{aligned} \varphi\left(\int_0^t f(u)du\right) &= \left(\int_0^t f(u)du\right)^q = \\ &= \left(\int_0^t f(u)u^{1-\frac{r}{q}}u^{\frac{r}{q}-1}du\right)^q \left(\int_0^t u^{\frac{r}{q}-1}du\right)^q \left(\int_0^t u^{\frac{r}{q}-1}du\right)^{-q} \\ &\leq \left(\int_0^t \varphi(f(u)u^{1-\frac{r}{q}}u^{\frac{r}{q}-1})du\right) \left(\int_0^t u^{\frac{r}{q}-1}du\right)^{q-1} \\ &= \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1} t^{r-\frac{r}{q}} \int_0^t f(u)^q u^{q-r+\frac{r}{q}-1}du, \end{aligned}$$

integrando de 0 ao infinito e usando o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)du\right)^q t^{-r-1}dt &\leq \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1} \int_0^\infty t^{-\frac{r}{q}-1} \left(\int_0^t f(u)^q u^{q-r+\frac{r}{q}-1}du\right) dt \\ &= \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1} \int_0^\infty f(u)^q u^{q-r+\frac{r}{q}-1} \left(\int_u^\infty t^{-\frac{r}{q}-1}dt\right) du \\ &= \left(\frac{q}{r}\right)^q \int_0^\infty (uf(u))^q u^{-r-1}du. \end{aligned}$$

Assim, mostramos a desigualdade (1.19). O procedimento é semelhante, para a demonstração da desigualdade (1.20). $\square$

O espaço $\mathcal{L}(p, q)$ é um espaço vetorial topológico normado. De fato, veremos, na Proposição 1.19, que o funcional $\|\cdot\|_{(p, q)}^*$ é equivalente a norma $\|\cdot\|_{(p, q)}$, dada por

$$\|f\|_{(p, q)} = \begin{cases} \left[\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}}, & \text{se } 1 < p < \infty, 1 < q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t), & \text{se } 1 < p \leq \infty, q = \infty. \end{cases}$$

Assim, os espaços de Lorentz $\mathcal{L}(p, q)$, com topologia gerada pela norma $\|\cdot\|_{(p, q)}$, é um espaço vetorial topológico.

Proposição 1.19. *Se $f \in \mathcal{L}(p, q)$, $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, então $\|\cdot\|_{(p, q)}$ define uma norma e*

$$\|f\|_{(p, q)}^* \leq \|f\|_{(p, q)} \leq p' \|f\|_{(p, q)}^*, \quad (1.21)$$

onde $p' = \frac{p}{p-1}$.

Demonstração. Sabemos que $f^*(t) \leq f^{**}(t)$, logo primeira desigualdade da proposição é imediata. Para provar a segunda desigualdade, primeiro considere o caso $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, então, pela desigualdade de Hardy com $r = q(1 - 1/p)$, estimamos $\|f\|_{(p, q)}$ obtendo

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{(p, q)} &= \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)]^q dt/t \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f^*(s) ds \right)^q t^{-q(1-\frac{1}{p})-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f^*(s) ds \right)^q t^{-r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty (t f^*(t))^q t^{-r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \frac{p}{p-1} \|f\|_{(p, q)}^*.
 \end{aligned}$$

No caso $1 < p \leq \infty$, $q = \infty$, temos

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{(p, \infty)} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t f^*(s) ds \\
 &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{-\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p}} f^*(s) ds \\
 &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{-\frac{1}{p}} \left(\sup_{u>0} u^{\frac{1}{p}} f^*(u) \right) ds \\
 &= \|f\|_{(p, \infty)}^* \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{-\frac{1}{p}} ds \\
 &= p' \|f\|_{(p, \infty)}^*.
 \end{aligned}$$

O funcional $\|\cdot\|_{(p, q)}$ é uma norma, com efeito, se $1 < p \leq \infty$ e $1 < q \leq \infty$, então $\|f\|_{(p, q)} \geq 0$, $\|f\|_{(p, q)} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ q.t.p. Para provar a desigualdade triangular, deixe-nos observar que $(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t)$. Logo,

$$\begin{aligned}
 \|f+g\|_{(p, \infty)} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (f+g)^{**}(t) \\
 &\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) + \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t) \\
 &= \|f\|_{(p, \infty)} + \|g\|_{(p, \infty)},
 \end{aligned}$$

usando a desigualdade (1.19), obtemos a desigualdade triangular no caso $1 < q < \infty$. $\square$

1.4.1 Propriedades Topológicas em $\mathcal{L}(p, q)$

Nesta seção, vamos mostrar que os espaços de Lorentz $\mathcal{L}(p, q)$ munidos com a norma $\|\cdot\|_{(p,q)}$ com $1 \leq p, q < \infty$ e $p \neq 1$, são espaços de Banach. Mostraremos também, que o conjunto das funções simples é denso em $\mathcal{L}(p, q)$ e finalizaremos a seção, mostrando que os espaços de Lorentz são reflexivos para certos valores de p e q . Iniciaremos com um lema, devido a Calderón, que tem como consequência as inclusões contínuas $\mathcal{L}(p, q_1) \subset \mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}(p, q_2) \subset \mathcal{L}(p, \infty)$, para $1 < p < \infty$ e $1 \leq q_1 \leq p \leq q_2 \leq \infty$. Em particular, temos a inclusão contínua de $\mathcal{L}^p$ em $\mathcal{L}^p$ -fraco. De fato, a inclusão é própria. Seja $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ e $f(x) = |x|^{-\delta}$ ($\delta > 0$), $f \in \mathcal{L}(m/\delta, \infty)$ mas $f \notin \mathcal{L}^r$, $\forall 1 \leq r \leq \infty$. Outra importância destas inclusões ficará mais clara, quando mostrarmos que qualquer operador contínuo de $\mathcal{L}^p$ em $\mathcal{L}^q$ é um operador do tipo fraco (p, q) (ver Observação 1.38, pg. 34).

Lema 1.20. (Calderón) *Se $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < r \leq \infty$, então*

$$\mathcal{L}(p, q) \hookrightarrow \mathcal{L}(p, r),$$

ou seja,

$$\|f\|_{(p,r)} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \|f\|_{(p,q)}, \quad (1.22)$$

para toda $f \in \mathcal{L}(p, q)$.

Demonstração. A prova é baseada na seguinte desigualdade:

$$f^{**}(x) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{(p,q)}}{x^{\frac{1}{p}}}. \quad (1.23)$$

A prova da desigualdade (1.23), segue do fato que o duplo rearranjo f^{**} ser não-crescente. Assim, para provar a desigualdade (1.22), estimamos

$$\begin{aligned} \|f\|_{(p,q)}^q &= \int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)]^q dt/t \\ &\geq \int_0^x t^{\frac{q}{p}-1} [f^{**}(t)]^q dt \\ &\geq [f^{**}(x)]^q \int_0^x t^{\frac{q}{p}-1} dt = \frac{p}{q} [f^{**}(x)]^q x^{\frac{q}{p}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{(p,r)}^r &= \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1} [f^{**}(t)]^r dt \\
&= \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1} [f^{**}(t)]^q [f^{**}(t)]^{r-q} dt \\
&\leq \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1} [f^{**}(t)]^q \left[\left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{(p,q)}}{t^{\frac{1}{p}}} \right]^{r-q} dt \\
&= \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{r}{q}-1} \|f\|_{(p,q)}^{r-q} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} [f^{**}(t)]^q dt \\
&= \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{r}{q}-1} \|f\|_{(p,q)}^{r-q} \|f\|_{(p,q)}^q.
\end{aligned}$$

□

Como comentado no início da seção, pelo Lema de Calderón, em geral, os espaços de Marcinkiewicz $\mathcal{L}(p, \infty)$ são maiores que os espaços de Lebesgue $\mathcal{L}^p$. Contudo, a intersecção de dois espaços $\mathcal{L}(p, \infty)$ está contida em alguns espaços $\mathcal{L}^p$. Esse é o conteúdo da próxima proposição.

Proposição 1.21. *Seja $m > 1$. Se $m < r < q$, então $\mathcal{L}(q, \infty) \cap \mathcal{L}(m, \infty) \subset \mathcal{L}^r$.*

Demonstração. Como $f \in \mathcal{L}(m, \infty) \cap \mathcal{L}(q, \infty)$, então $\mu_f(\lambda) \leq C\lambda^{-m}$ e $\mu_f(\lambda) \leq \tilde{C}\lambda^{-q}$. Pelo Teorema 1.11, obtemos

$$\|f\|_r^r = r \int_0^\infty \lambda^{r-1} \mu_f(\lambda) d\lambda \leq r \int_0^A \lambda^{r-1} \tilde{C}\lambda^{-q} d\lambda + r \int_A^\infty \lambda^{r-1} C\lambda^{-m} d\lambda.$$

Mas por hipótese $m < r < q$, então as integrais $\int_A^\infty \lambda^{r-1-q} d\lambda$ e $\int_0^A \lambda^{r-1-m} d\lambda$ são finitas. Logo $\|f\|_r < \infty$, isto é, $f \in \mathcal{L}^r$.

□

Teorema 1.22. *Se $0 < p \leq \infty$ e $0 < q \leq \infty$, então o espaço $\mathcal{L}(p, q)$ é completo.*

Demonstração. Seja $(f_n)_n$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(p, q)$, isto é, $\|f_m - f_n\|_{(p,q)} \rightarrow 0$, quando $m, n \rightarrow \infty$. Pelo Teorema 1.14, temos

$$\begin{aligned}
\sup_{\lambda > 0} (\lambda^p \mu_{f_m - f_n}(\lambda))^{\frac{1}{p}} &= \sup_{t > 0} t^{\frac{1}{p}} (f_m - f_n)^*(t) \\
&= \|f_m - f_n\|_{(p, \infty)}^*,
\end{aligned}$$

mas, pelo Lema 1.23 (Calderon), obtemos

$$\|f_m - f_n\|_{(p, \infty)}^* \leq \|f_m - f_n\|_{(p, q)} \rightarrow 0.$$

Isto é, a sequência (f_n) é de Cauchy em medida. Usando a Proposição 1.4, existe uma função $\mathcal{M}$ -mensurável f , tal que, $f_n \rightarrow f$ em medida. Logo, existe uma subsequência $f_{n_k} \rightarrow f$ q.t.p (ver [9, pg.60]). Como

$$\|f_n - f_N\|_{(p, q)} < \varepsilon,$$

e $f_{n_k} - f_N \rightarrow f - f_N$ q.t.p, para algum $N \in \mathbb{N}$, pela Proposição 1.15 (iv), obtemos

$$(f - f_N)^{**}(t) = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (f_{n_k} - f_N)^{**}(t),$$

consequentemente, pelo Lema de Fatou, segue

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_{(p, q)} &= \left(\int_0^\infty [t^{1/p} (f - f_N)^{**}(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^\infty [t^{1/p} \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (f_{n_k} - f_N)^{**}(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &\leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty [t^{1/p} (f_{n_k} - f_N)^{**}(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &= \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f_N\|_{(p, q)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f - f_N\|_{(p, q)} \rightarrow 0, \text{ quando } N \rightarrow \infty$$

Desde que $f = f - f_N + f_N$, concluimos que $f \in \mathcal{L}(p, q)$. □

Note que, não usamos qualquer restrição sobre p e q . No entanto, com $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, podemos considerar $\mathcal{L}(p, q)$ normado e, portanto, um espaço de Banach pelo Teorema 1.22.

Teorema 1.23. *O conjunto S , de todas funções simples é denso em $\mathcal{L}(p, q)$.*

Demonstração. Para provar que o conjunto S é denso em $\mathcal{L}(p, q)$, mostraremos que existe uma sequência de funções simples (s_n) , tal que, $\|s_n - f\|_{(p, q)} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. De fato, seja $f \in \mathcal{L}(p, q)$, sem perda de generalidade, assuma f positiva, então existe

uma sequência de funções simples, tal que, $0 \leq s_n \leq f$ e $s_n \rightarrow f$, quando $n \rightarrow \infty$. Pela Proposição 1.9 (v), obtemos

$$(f - s_n)^*(t) \leq f^*(t/2) + s_n^*(t/2) \leq 2f^*(t/2) \in \mathcal{L}^1.$$

Então, pelo Teorema da convergência dominada, concluímos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\|_{(p,q)}^* = \left(\int_0^\infty [t^{1/p} \lim(f - s_n)^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} = 0$$

como f é arbitrário, segue que $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{L}(p, q)$. $\square$

Considere $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, p' e q' os respectivos expoentes conjugados. Se $f \in \mathcal{L}(p', q')$, então $T_f(g) = \int_{\mathcal{U}} f g dx$ define um funcional linear contínuo em $\mathcal{L}(p, q)$. De fato, usando a desigualdade de Hardy-Littlewood e a Desigualdade de Hölder em $\mathcal{L}^q(\mathbb{R})$, para $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$, obtem-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{U}} |f g| dx &\leq \int_0^\infty f^*(s) g^*(s) ds = \int_0^\infty [s^{\frac{1}{p'}} f^*(s)] [s^{\frac{1}{p}} g^*(s)] \frac{ds}{s} \\ &\leq \left(\int_0^\infty [s^{\frac{1}{p'}} f^*(s)]^{q'} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_0^\infty [s^{\frac{1}{p}} g^*(s)]^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|f\|_{(p', q')}^* \|g\|_{(p, q)}^*. \end{aligned}$$

Ou seja, o funcional T_f é limitado

$$\|T_f\|_{(\mathcal{L}(p, q))'} = \sup_{\|g\|=1} \{|T_f(g)|\} \leq \|f\|_{(p', q')}^*.$$

Os casos $q = \infty$ e $q = 1$, são essencialmente os mesmos. Considere o caso $q = 1$, então

$$\begin{aligned} |T_f(g)| &\leq \int_0^\infty [t^{1/p'} f^*(t)] [t^{1/p} g^*(t)] \frac{dt}{t} \\ &\leq \int_0^\infty [t^{1/p'} f^*(t)] \left(\sup_{s>0} s^{1/p} g^*(s) \right) \frac{dt}{t} \\ &\leq \|f\|_{(p', \infty)}^* \|g\|_{(p, 1)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|T_f\|_{(\mathcal{L}(p, 1))'} = \sup_{\|g\|=1} \{|T_f(g)|\} \leq \|f\|_{(p', \infty)}^*.$$

Isto demonstra, que $\mathcal{L}(p', q') \subset \mathcal{L}(p, q)$. A seguir, mostraremos que a inclusão contrária ainda é válida, isto é, o dual de $\mathcal{L}(p, q)$ é dado por $\mathcal{L}(p', q')$.

Teorema 1.24. (*Dualidade*) Sejam $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ e φ um funcional linear limitado em $\mathcal{L}(p, q)$. Então existe um único $f \in \mathcal{L}(p', q')$, tal que,

$$\varphi(g) = T_f(g).$$

Em outras palavras, $\mathcal{L}(p', q')$ é isomorfo isométrico ao dual topológico de $\mathcal{L}(p, q)$.

Demonstração. Vamos demonstrar somente o caso $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$. O passo inicial da demonstração, é mesmo contido na dualidade dos espaços de Lebesgue $\mathcal{L}^p$, como podemos ver [21, pg.127-128].

Seja $\varphi \in (\mathcal{L}(p, q))'$ e defina $\nu(A) = \varphi(\chi_A)$ para todo $A \in \mathcal{M}$. Afirmamos que ν é uma medida sobre $\mathcal{U}$. De fato, $\nu(\emptyset) = 0$ e se $\{A_n\}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos $\mathcal{M}$ -mensuráveis, tal que, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pela linearidade e continuidade de φ , temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \varphi(\chi_{A_n}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi\left(\sum_{n=1}^k \chi_{A_n}\right) = \varphi(\chi_A) = \nu(A).$$

Além disso, ν é absolutamente contínua com respeito a medida μ , pois se $\mu(A) = 0$, então $\nu(A) = 0$. Assim, pelo Teorema de Radon-Nicodyn (ver [21, pg.121]), existe uma única $f \in \mathcal{L}^1$, tal que,

$$\varphi(\chi_A) = \int_A f d\mu = \int_{\mathcal{U}} \chi_A f d\mu.$$

Usando o Teorema 1.23 e a linearidade de integrais, obtemos

$$\varphi(g) = \int_{\mathcal{U}} g f d\mu \quad \forall g \in \mathcal{L}(p, q).$$

Agora, pela desigualdade de Hardy-Littlewood, tem-se

$$\|\varphi\|_{(\mathcal{L}(p, q))'} = \sup_{g \in \mathcal{L}(p, q)} \frac{|\varphi(g)|}{\|g\|_{(p, q)}^*} \leq \sup_{g \in \mathcal{L}(p, q)} \frac{\int_0^{\infty} f^*(t) g^*(t) dt}{\|g\|_{(p, q)}^*}.$$

Desde que $1 < p, q < \infty$ e $p \neq q$, podemos escrever

$$g^*(t) = \int_{t/2}^{\infty} h(s) ds,$$

onde $h(s) = s^{q'/p'-1} f^*(s)^{q'-1}$. Assim, usando a Desigualdade de Hardy (1.20) e a desigualdade (1.21) (ver [14, 70-71]), temos

$$\|\varphi\|_{(\mathcal{L}(p, q))'} \geq C(p, q) \|f\|_{(p', q')},$$

ou seja, $f \in \mathcal{L}(p', q')$. Em resumo, mostramos que dado qualquer funcional linear $\varphi \in (\mathcal{L}(p, q))'$, existe uma única $f \in \mathcal{L}(p', q')$, tal que,

$$\varphi(g) = T_f(g).$$

Isto é, a aplicação $\mathcal{L}(p', q') \mapsto (\mathcal{L}(p, q))'$ é um isomorfismo isométrico, pois $\|\varphi\|_{(\mathcal{L}(p, q))'} = \|f\|_{(p', q')}^*$. $\square$

Corolário 1.25. (ver [12, 14]). O espaço conjugado de $\mathcal{L}(p, 1)$ é $\mathcal{L}(p', \infty)$, onde p' é o conjugado de p .

1.5 Desigualdade de Young e de Hölder em $\mathcal{L}(p, q)$

Iniciamos a seção, lembrando algumas propriedades importantes sobre convolução de funções e alguns resultados de duplo rearranjo, cujas demonstrações são essencialmente as mesmas contidas em [22].

1.5.1 Desigualdade de Young

Sejam $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Denote a convolução de f e g por $h(x) = f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)g(y)dy$. Inicialmente, discutiremos algumas propriedades do rearranjo do operador convolução. Começemos a recordar a estimativa conhecida para h^{**} .

Lema 1.26. Sejam $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Então

$$h^{**}(t) \leq t f^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^\infty f^*(s) g^*(s) ds, \quad (1.24)$$

para todo $t > 0$.

Omitiremos a demonstração, mas podemos encontrar em [12, 18], para um esclarecimento melhor. Uma consequência desta fórmula é a seguinte.

Proposição 1.27. Sejam $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Então

$$h^{**}(t) \leq \int_t^\infty f^{**}(s) g^{**}(s) ds,$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. A demonstração deste lema é baseada na demonstração do Lema 1.6 de [18]. Se a integral do lado direito for infinita, não há nada que mostrar. Caso contrario, como $f^{**}(t)$ e $g^{**}(t)$ são não-crescentes, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t f^{**}(t) g^{**}(t) = 0.$$

Usando o fato que $f^*(t) \leq f^{**}(t)$ e a desigualdade (1.24), obtemos

$$h^{**}(t) \leq t f^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^\infty f^{**}(s) g^*(s) ds, \quad \forall t > 0. \quad (1.25)$$

Agora, observando que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f^{**}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{t} f^*(t) - \frac{1}{t^2} \int_0^t f^*(s) ds \\ &= \frac{1}{t} (f^*(t) - f^{**}(t)), \end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{d}{dt} t g^{**}(t) = g^*(t).$$

Portanto, integrando por partes em 1.25, concluímos

$$\begin{aligned} h^{**}(t) &\leq t f^{**}(t) g^{**}(t) + [s f^{**}(s) g^{**}(s)]_t^\infty + \int_t^\infty [f^{**}(s) - f^*(s)] g^{**}(s) ds \\ &\leq \int_t^\infty f^{**}(s) g^{**}(s) ds - \int_t^\infty f^*(s) g^{**}(s) ds \\ &\leq \int_t^\infty f^{**}(s) g^{**}(s) ds. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.28. (*Desigualdade Generalizada de Young [18]*) Sejam $1 < p_1, p_2 < \infty$. Se $h = g * f$, onde

$$f \in \mathcal{L}(p_1, q_1), \quad g \in \mathcal{L}(p_2, q_2), \quad \text{e} \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1,$$

então $h \in \mathcal{L}(r, s)$ quando

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2},$$

e tal que,

$$\frac{1}{s} \leq \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}. \quad (s \geq 1)$$

Isto é,

$$\|h\|_{(r,s)} \leq C(r) \|f\|_{(p_1,q_1)} \|g\|_{(p_2,q_2)}. \quad (1.26)$$

Demonstração. Primeiro considere o caso $s = \infty$. Usando a Proposição 1.27, estimamos

$$\begin{aligned} \|h\|_{(r,\infty)} &= \sup_{t>0} [t^{\frac{1}{r}} h^{**}(t)] \leq \sup_{t>0} \left[t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty f^{**}(s) g^{**}(s) ds \right] \\ &\leq \sup_{t>0} \left[t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty s^{-1-\frac{1}{r}} [s^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(s)] [s^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(s)] ds \right] \\ &\leq \|f\|_{(p_1,\infty)} \|g\|_{(p_2,\infty)} \sup_{t>0} \left[t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty s^{-1-\frac{1}{r}} ds \right] \\ &= r \|f\|_{(p_1,\infty)} \|g\|_{(p_2,\infty)} \leq r \|f\|_{(p_1,q_1)} \|g\|_{(p_2,q_2)}. \end{aligned}$$

Considerando o caso s finito e usando a Proposição 1.27, podemos estimar

$$\|h\|_{(r,s)}^s = \int_0^\infty [t^{\frac{1}{r}} h^{**}(t)]^s \frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty f^{**}(s) g^{**}(s) ds \right]^s \frac{dt}{t}.$$

Fazendo a mudança de variável $t = \frac{1}{y}$, $s = \frac{1}{u}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|h\|_{(r,s)}^s &\leq \int_0^\infty \left[y^{-\frac{1}{r}} \int_0^y f^{**}\left(\frac{1}{u}\right) g^{**}\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2} \right]^s \frac{dy}{y}, \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^y \frac{f^{**}(1/u) g^{**}(1/u)}{u^2} du \right)^s y^{\frac{s}{r}} y^{-1} dy \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^y \frac{f^{**}(1/u) g^{**}(1/u)}{u^2} du \right)^s y^{\tilde{r}-1} dy, \text{ onde } \tilde{r} = \frac{s}{r} \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^y f(u) du \right)^s y^{\tilde{r}-1} dy, \end{aligned}$$

onde $f(u) = \frac{f^{**}(1/u) g^{**}(1/u)}{u^2}$. Usando a desigualdade de Hardy (1.19) e o Lema 1.18, obtemos

$$\begin{aligned} \|h\|_{(r,s)}^s &\leq \left(\frac{s}{\tilde{r}} \right)^s \int_0^\infty [y f(y)]^s y^{\tilde{r}-1} dy \\ &= r^s \int_0^\infty \left[y \frac{f^{**}(1/y) g^{**}(1/y)}{y^2} \right]^s y^{\frac{s}{r}} \frac{dy}{y} \\ &= r^s \int_0^\infty \left[y^{1-\frac{1}{r}} f^{**}(1/y) g^{**}(1/y) \right]^s \frac{dy}{y} \\ &= r^s \int_0^\infty \left[y^{1+\frac{1}{r}} f^{**}(t) g^{**}(t) \right]^s \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{s}$, existem $m_1 \geq 1$ e $m_2 \geq 1$, tais que,

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1 \text{ e } \frac{1}{m_1} \leq \frac{s}{q_1}, \frac{1}{m_2} \leq \frac{s}{q_2}.$$

Usando a desigualdade de Holder em $\mathcal{L}^p(0, \infty)$ com a medida $\mu = \frac{dx}{x}$ e o Lema 1.20, deduzimos que

$$\begin{aligned} \|h\|_{(r,s)} &\leq r \left(\int_0^\infty [t^{1+\frac{1}{r}} f^{**}(t) g^{**}(t)]^s \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{s}} = r \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(t)]^s [t^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(t)]^s \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq r \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(t)]^{sm_1} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{sm_1}} \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(t)]^{sm_2} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{sm_2}} \\ &= r \|f\|_{(p_1, sm_1)} \|g\|_{(p_2, sm_2)}. \end{aligned}$$

Como $q_1 \leq sm_1$ e $q_2 \leq sm_2$, pelo Lema 1.20, obtemos

$$\|h\|_{(r,s)} \leq C(r) \|f\|_{(p_1, q_1)} \|g\|_{(p_2, q_2)}.$$

□

Proposição 1.29. *Seja $g \in \mathcal{L}(p, \infty)$ com $1 < p < \infty$, e $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$, então $h = g * f \in \mathcal{L}(p, \infty)$ e*

$$\|h\|_{(p, \infty)} \leq C(p) \|f\|_1 \|g\|_{(p, \infty)}. \quad (1.27)$$

A demonstração desta proposição, pode ser encontrada em [9, pg. 232].

1.5.2 Desigualdade de Hölder

A seguir daremos uma generalização da Desigualdade de Hölder para os espaços de Lorentz $\mathcal{L}(p, q)$.

Proposição 1.30. *(Desigualdade de Hölder Generalizada [18]) Sejam $1 < p_1, p_2 < \infty$. Se $h = fg$, onde*

$$f \in \mathcal{L}(p_1, q_1), g \in \mathcal{L}(p_2, q_2) \text{ e } \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1,$$

então $h \in \mathcal{L}(r, s)$, quando

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2},$$

e,

$$\frac{1}{s} \leq \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \cdot (s \geq 1)$$

Isto é,

$$\|h\|_{(r,s)} \leq C(r') \|f\|_{(p_1, q_1)} \|g\|_{(p_2, q_2)}, \quad (1.28)$$

sendo r' o índice conjugado de r .

Demonstração. A demonstração é inspirada em uma idéia apresentada em ([12, pg. 271]). Seja $t > 0$. Escreva $h = fg$ e considere o conjunto $E = \{x \in \mathbb{R}^m : |h(x)| > h^*(t)\}$. Por definição de h^* , note que $m(E) \geq t$ e

$$\begin{aligned} h^*(t) &\leq \sup_{m(E) \geq t} \left\{ \frac{1}{m(E)} \int_E |h(x)|^{1/2} dx \right\}^2 \\ &\leq \sup_{m(E) \geq t} \left\{ \frac{1}{m(E)} \int_E |f(x)| dx \right\} \sup_{m(E) \geq t} \left\{ \frac{1}{m(E)} \int_E |g(x)| dx \right\} \\ &\leq f^{**}(t) g^{**}(t). \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{s}$, podemos encontrar $m_1 \geq 1$ e $m_2 \geq 1$, tais que,

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1 \text{ e } \frac{1}{m_1} \leq \frac{s}{q_1}, \frac{1}{m_2} \leq \frac{s}{q_2}.$$

Usando a desigualdade de Hölder em $\mathcal{L}^p(0, \infty)$ e o Lema 1.20, temos

$$\begin{aligned} \|h\|_{(r,s)} &\leq r' \|h\|_{(r,s)}^* = r' \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{r}} h^*(t)]^s dt/t \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq r' \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(t)]^s [t^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(t)]^s \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq r' \|f\|_{(p_1, sm_1)} \|g\|_{(p_2, sm_2)} \\ &\leq C(r') \|f\|_{(p_1, q_1)} \|g\|_{(p_2, q_2)}. \end{aligned}$$

□

Observação 1.31. Seja $(\cdot, \cdot) : \mathcal{L}(p_1, q_1) \times \mathcal{L}(p_2, q_2) \rightarrow \mathcal{L}(r, s)$ o operador bilinear dado por, $(f, g)(x) = f(x)g(x)$. A Desigualdade de Hölder Generalizada (1.28), afirma que este operador é contínuo sobre os Espaços de Lorentz $\mathcal{L}(p_1, q_1) \times \mathcal{L}(p_2, q_2)$.

1.6 Aproximação da Identidade em $\mathcal{L}(p, q)$

Os resultados desta seção foram retirados de [11]. Nosso objetivo, nesta seção, é demonstrar um teorema de aproximação (via regularização), em espaços de Lorentz $\mathcal{L}(p, q)$, análogo ao teorema que garante que convoluções por um molificador de Friedrichs

forneem uma aproximação da identidade em $\mathcal{L}^p$, ver [9, pg. 234]. A demonstração deste resultado, baseia-se na continuidade da translação em $\mathcal{L}(p, q)$, a qual é uma consequência da proposição abaixo.

Proposição 1.32. *Se $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, então o conjunto C_c^∞ é denso em $\mathcal{L}(p, q)$.*

Demonstração. Para demonstrar que o conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ é denso em $\mathcal{L}(p, q)$, basta mostrar que toda função característica X_A pode ser aproximada na norma $\|\cdot\|_{(p, q)}^*$ por uma função em $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$. Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto mensurável. Como a medida de Lebesgue é regular interior e exterior, dado $\varepsilon > 0$, existe um aberto U e um compacto K satisfazendo $K \subset A \subset U$ e $m(U \setminus K) < \varepsilon$. Pelo lema de Urysohn, podemos encontrar $g \in C_c^\infty$, tal que, $0 \leq g \leq 1$, $g(x) = 1$ se $x \in K$ e $g(x) = 0$ se $x \in U^c$. Note que, $|X_A - g| < X_{U \setminus K}$ e por isso $(X_A - g)^*(t) \leq X_{U \setminus K}^*(t)$ para todo $t > 0$. Por fim, calculando a norma $\|\cdot\|_{(p, q)}^*$, obtemos

$$\|X_A - g\|_{(p, q)}^* \leq \|X_{U \setminus K}\|_{(p, q)}^* = \left(\int_0^{m(U \setminus K)} t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} < \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \varepsilon^{\frac{1}{p}},$$

e, usando o Lema 1.21, concluímos a demonstração. $\square$

Proposição 1.33. *(Continuidade da Translação) Sejam $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$. Então*

$$\|f(x - z) - f(x)\|_{(p, q)} \rightarrow 0, \text{ quando } z \rightarrow 0.$$

Demonstração. Denote $A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^m : d(x, A) < \delta\}$. Como o conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ é denso em $\mathcal{L}(p, q)$, quando $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, basta assumir que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$. Denote $g_z(x) = f(x - z) - f(x)$. Como f tem suporte compacto ($\text{supp } f = A$), dado $\varepsilon > 0$ existe δ tal que, se $|z| < \delta$ então $|g_z(x)| \leq \varepsilon \cdot X_{A_\delta}(x)$ para todo x e portanto $g_z^*(t) \leq \varepsilon (X_{A_\delta})^*(t)$. Assim,

$$\limsup_{z \rightarrow 0} g_z^*(t) \leq \varepsilon, \text{ para todo } t > 0.$$

Como ε não depende t , então $g_z^*(t) \rightarrow 0$ para todo $t > 0$. Note que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} (g_z^*(t))^q dt &\leq \varepsilon^q \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} ((X_{A_\delta})^*)^q(t) dt \\ &= \varepsilon^q \cdot \int_0^{m(A_\delta)} t^{\frac{q}{p}-1} dt < \infty. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da convergência dominada, concluímos

$$\|g_z\|_{(p, q)}^* \rightarrow 0, \text{ quando } z \rightarrow 0.$$

Como os funcionais, $\|\cdot\|_{(p, q)}$ e $\|\cdot\|_{(p, q)}^*$, são equivalentes, segue que $\|g_z\|_{(p, q)} \rightarrow 0$. $\square$

A próxima proposição é uma generalização, para espaços de Lorentz, dos resultados de aproximação da identidade usando molificadores de Friedrichs em $\mathcal{L}^p$ (ver [9, Teorema 8.14, Cap.8]). A idéia principal da demonstração é, sem dúvida, umas das aplicações mais interessantes de dualidade em espaços de Lorentz.

Teorema 1.34. (*Aproximação da Identidade em $\mathcal{L}(p, q)$*) Seja $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$, tal que, $\int \varphi(y)dy = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, defina o molificador de Friedrichs $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^m} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$. Se $f \in \mathcal{L}(p, q)$ com $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, então

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{(p, q)} \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Demonstração. Fazendo a mudança de variável $\varepsilon z = y$ e usando que $\int \varphi_\varepsilon(y)dy = 1$, temos

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon * f - f &= \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_\varepsilon(y) [f(x-y) - f(x)] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(z) [f(x - \varepsilon z) - f(x)] dz. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Calculando a norma $\|\cdot\|_{(p, q)}$ de $\varphi_\varepsilon * f - f$ e usando a equação (1.29), obtemos

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{(p, q)} &= \sup_{\|\phi\|_{(p', q')}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^m} (\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)) \phi(x) dx \right| \\ &= \sup_{\|\phi\|_{(p', q')}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(z) [f(x - \varepsilon z) - f(x)] \phi(x) dz dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi(z)| \left(\sup_{\|\phi\|_{(p', q')}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^m} [f(x - \varepsilon z) - f(x)] \phi(x) dx \right| \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi(z)| \|f(x - \varepsilon z) - f(x)\|_{(p, q)} dz. \end{aligned}$$

Como $\|f(x - \varepsilon z) - f(x)\|_{(p, q)} \leq 2\|f(x)\|_{(p, q)}$ e $\|f(x - \varepsilon z) - f(x)\|_{(p, q)} \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Usando o Teorema da convergência dominada, concluímos a demonstração. $\square$

1.7 Transformada de Riesz em $\mathcal{L}(p, q)$

Nesta seção, mostraremos a continuidade da transformada de Riesz nos espaços de Lorentz $\mathcal{L}(p, q)$ e em particular no espaço de Marcinkiewicz $\mathcal{L}(p, \infty)$.

Definição 1.35. Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, a k -transformada de Riesz, R_k , é definida por

$$(\widehat{R_k f})(\xi) = \frac{i\xi_k}{\|\xi\|} \hat{f}(\xi), \quad (1.30)$$

onde $\hat{f}$, é a transformada de Fourier de f , dada por: $\hat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx$.

Uma definição equivalente a Definição 1.35, pode ser dada. De fato, pela inversa da transformada de Fourier, temos

$$R_k f = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} f \right),$$

onde $x = (x_1, \dots, x_m)$ e Δ é o operador laplaciano, o qual é dado por $\Delta = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

Um resultado importante, porém clássico, garante que a transformada de Riesz é contínua entre os espaços $\mathcal{L}^p$ (ver [20, pg. 39]). Mais precisamente.

Proposição 1.36. A k -transformada de Riesz, $R_k = \partial_k (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$, é contínua em $\mathcal{L}^p$, onde $1 < p < \infty$.

Para enuciarmos o Teorema de interpolação de operadores, precisaremos definir o que vem a ser operadores do tipo fraco (p, q) .

Definição 1.37. Sejam $(X, \mathcal{M}_x, \mu_x)$, $(Y, \mathcal{M}_y, \mu_y)$ espaços de medida. Seja T um operador sublinear definido de $\mathcal{L}(p, 1)(X)$ em $\mathcal{L}(p, q)(Y)$, onde $1 \leq p, q \leq \infty$. Dizemos que T é do tipo fraco (p, q) , quando existe $C > 0$, tal que,

$$\|Tf\|_{(p, q)} \leq C \|f\|_{(p, 1)}$$

Observação 1.38. Se T é um operador contínuo de $\mathcal{L}^p$ em $\mathcal{L}^q$, então T é do tipo fraco (q, ∞) . Com efeito, pelo Lema de Calderón, $\mathcal{L}(p, 1) \hookrightarrow \mathcal{L}^p$ e $L^q \hookrightarrow \mathcal{L}(q, \infty)$, então

$$\|Tf\|_{(q, \infty)} \leq C \|Tf\|_q \leq C \|f\|_p \leq C \|f\|_{(p, 1)}$$

Teorema 1.39. (Interpolação de Marcinkiewicz, ver [19, pg.225]) Sejam $(X, \mathcal{M}_x, \mu_x)$, $(Y, \mathcal{M}_y, \mu_y)$ espaços de medida. Suponha $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$ e $1 \leq q_0, q_1 < \infty$ com $q_0 \neq q_1$, tal que,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

onde $0 < \theta < 1$. Seja T um operador sublinear de $(\mathcal{L}(p_0, 1) + \mathcal{L}(p_1, 1))(\mu_x)$ em um espaço de funções mensuráveis em Y . Se T é do tipo fraco (p_i, q_i) $i = 0, 1$, então existe $B = B(p_i, q_i, \theta)$, tal que, para $1 \leq r \leq \infty$ tem-se

$$T : \mathcal{L}(p, r) \rightarrow \mathcal{L}(q, r),$$

é contínuo de $\mathcal{L}(p, r)$ em $\mathcal{L}(q, r)$, isto é,

$$\|Tf\|_{(q, r)} \leq B\|f\|_{(p, r)}.$$

O teorema original de Marcinkiewicz foi estabelecido no caso particular $p_i = q_i$. Por curiosidade ver [9, pg. 203].

Corolário 1.40. A k -transformada de Riesz, $R_k = \partial_k(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$, $k = 1, \dots, m$ é contínua em $\mathcal{L}(p, \infty)$, com $1 < p < \infty$.

Demonstração. Sabemos que a transformada de Riesz é um operador sublinear contínuo em $\mathcal{L}^p$ (ver Proposição 1.36). Considere $1 < p_0 < p < p_1 < \infty$, satisfazendo $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Como R_k é contínuo em L^{p_i} , então, pela Observação 1.38, este operador é do tipo fraco (p_i, p_i) . Assim, pelo Teorema de interpolação 1.39, obtemos

$$\|R_k f\|_{(p, r)} \leq B\|f\|_{(p, r)},$$

onde $1 \leq r \leq \infty$. □

CAPÍTULO 2

Soluções brandas em $\mathcal{L}(p, \infty)$ e $\mathcal{L}^p$

Uma forma clássica de abordar equações diferenciais é buscar soluções do problema original em um sentido mais fraco de forma que toda solução no sentido original seja uma solução no sentido mais fraco. Posteriormente busca-se propriedades regularizantes e em que condições a solução fraca obtida é uma solução do problema original. Dois tipos muito utilizados das soluções fracas, são as soluções no sentido de distribuições e soluções integrais.

Para o problema de evolução, um tipo de soluções integrais são as soluções brandas as quais advêm do princípio de D'uhamel. Esta será o tipo de formulação que usaremos para estudar o problema de Cauchy (NS).

Antes de definir precisamente o sentido no qual buscaremos as soluções dos sistema (NS), precisaremos fazer algumas considerações. Sejam dois campos u e v tais que $\nabla \cdot u = \nabla \cdot v = 0$, então podemos escrever:

$$(u \cdot \nabla)v = \nabla(u \otimes v) = \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j v_1), \dots, \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j v_m) \right),$$

onde $u \otimes v$ é a matriz dada por: $(u \otimes v)_{ij} = u_i v_j$.

Uma técnica básica para encontrar soluções para as equações de Navier-Stokes (NS) é transformar este sistema o qual depende das incógnitas u e p , em um sistema apenas nas incógnitas $u = (u_1, \dots, u_m)$, e posteriormente encontrar a incógnita p (a pressão) através de u . Para isso desempenha um papel fundamental o projetor de Leray, o qual é dado por

$$\mathbb{P}u = u + (R_1 \sigma, R_2 \sigma, R_3 \sigma, \dots, R_m \sigma), \quad (2.1)$$

onde $\sigma = \sum_{j=1}^m R_j u_j$ e R_j é a j -transformada de Riesz. R_j é definida via transformada de Fourier da seguinte forma:

$$\widehat{(R_j f)}(\xi) = \frac{i \xi_j}{\|\xi\|} \hat{f}(\xi).$$

Usando propriedades básicas de transformada de Fourier, podemos expressar

$$R_j f(x) = \widehat{R_j f}(\xi)^\vee = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} f(x) \right).$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} R_k \sigma &= \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} u_j \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \nabla \cdot \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} u \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{(-\Delta)} \nabla \cdot u, \end{aligned}$$

portanto, podemos reescrever o projetor $\mathbb{P}$, como

$$\mathbb{P}u = u + \nabla \left(\frac{1}{(-\Delta)} \nabla \cdot u \right). \quad (2.2)$$

Para mais detalhes sobre o projetor de Leray, referimos [4, 10, 13, 17].

Aplicando formalmente o projetor de Leray no sistema (NS), podemos reduzi-lo ao seguinte problema equivalente

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \mathbb{P} \nabla(u \otimes u) = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}^m \\ \nabla \cdot u = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}^m \\ u(0, x) = a_0(x), \nabla \cdot a_0 = 0 & x \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (2.3)$$

Problema Linear Associado

Antes de derivar, a formulação integral com a qual trabalharemos nesta dissertação, precisaremos estudar o problema linear associado as equações (2.3),

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}^m \\ u(0, x) = a_0(x) & x \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (2.4)$$

o qual é o problema de Cauchy para a equação linear do calor em $\mathbb{R}^m$. Aplicando, formalmente, a transformada de Fourier em (2.4), obtemos para cada $\xi \in \mathbb{R}^m$ fixo, uma equação diferencial ordinária, isto é:

$$\begin{cases} (\partial_t + 4\pi^2 |\xi|^2) \hat{u}(t, \xi) = 0 \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{a}_0(\xi), \end{cases} \quad (2.5)$$

cujas a única solução é dada por:

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{a}_0(\xi) \hat{g}(t, \xi), \quad (2.6)$$

onde $\hat{g}(t, \xi) = e^{-4t\pi^2|\xi|^2}$.

Portanto, calculando a transformada inversa de Fourier em (2.6), obtemos que a solução do problema linear (2.4), pode ser expressa via convolução da seguinte forma:

$$u(t, x) = g(t, x) * a_0(x), \text{ onde } g(t, x) = (e^{-4t\pi^2|\xi|^2})^\vee(x) = (4t\pi)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}. \quad (2.7)$$

A única solução (2.7) do problema de evolução linear (2.4), gera um semi-grupo $S(t)$ (ver [8]) via convolução com o núcleo de Gauss-Weierstrass (2.7), isto é,

$$u(t, x) = g(t, x) * a_0(x) = S(t)a_0. \quad (2.8)$$

Muitas vezes chamaremos $S(t)$ e $g(t, x)$ de o semi-grupo do calor e o núcleo do calor, respectivamente.

Claramente, todas as operações formais feitas para obter (2.8) são verdadeiras para $a_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ ou $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$. A seguir, demonstraremos algumas estimativas para o núcleo de Gauss-Weierstrass $g(t, x)$ e o semi-grupo $S(t)$ em Espaços de Lorentz.

Estimativas do Semi-Grupo $S(t)$

Observemos que valem as seguintes propriedades de homogeneidade de $g(t, x)$:

$$g(t, x) = t^{-\frac{m}{2}} g(1, xt^{-\frac{1}{2}}), \quad (2.9)$$

$$(\nabla_x^k g)(t, x) = t^{-\frac{m+k}{2}} (\nabla_x^k g)(1, xt^{-\frac{1}{2}}) \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (2.10)$$

De fato (2.9), segue de

$$\begin{aligned} g(t, x) &= (4t\pi)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} = t^{-\frac{m}{2}} (4\pi)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{\|t^{-\frac{1}{2}}x\|^2}{4}} \\ &= t^{-\frac{m}{2}} g(1, t^{-\frac{1}{2}}x). \end{aligned}$$

A prova da igualdade (2.10) é uma aplicação da regra da cadeia k vezes na igualdade (2.9).

Com o auxílio das igualdades (2.9), (2.10), a Desigualdade Generalizada de Young (1.26) e a relação de escala em espaços de Lorentz (1.18), mostraremos o seguinte lema:

Lema 2.1. *Sejam $1 < p \leq r < \infty$, $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \infty$ e $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Se $f \in \mathcal{L}(p, d_1)$, então $\nabla_x^k S(t)f \in \mathcal{L}(r, d_2)$ e*

$$\|\nabla_x^k S(t)f\|_{(r, d_2)} \leq C t^{\frac{m}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})-\frac{k}{2}} \|f\|_{(p, d_1)} \quad (2.11)$$

Demonstração. Primeiro, observe que $\nabla_x^k S(t)f = (\nabla_x^k g(t, x)) * f$. Sejam $q \geq 1$, $l \geq 1$ tais que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ e $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{l} \geq \frac{1}{d_2}$. Como $f \in \mathcal{L}(p, d_1)$ aplicando a Desigualdade Generalizada de Young (1.26) com $p < r$ e, aplicando a desigualdade (1.27) no caso $r = p$, obtem-se $\nabla_x^k S(t)f \in \mathcal{L}(r, d_2)$ e

$$\|\nabla_x^k S(t)f\|_{(r, d_2)} \leq C(r) \|(\nabla_x^k g)(t, x)\|_{(q, l)} \|f\|_{(p, d_1)}. \quad (2.12)$$

Por outro lado pela igualdade (2.10) e a relação de escala em espaços de Lorentz $\mathcal{L}(q, l)$ (1.18), obtemos

$$\begin{aligned} \|(\nabla_x^k g)(t, x)\|_{(q, l)} &= \|t^{-\frac{m+k}{2}} (\nabla_x^k g)(1, xt^{-\frac{1}{2}})\|_{(q, l)} \\ &= t^{-\frac{m+k}{2}} \|(\nabla_x^k g)(1, xt^{-\frac{1}{2}})\|_{(q, l)} \\ &= t^{-\frac{m+k}{2}} t^{\frac{m}{2q}} \|(\nabla_x^k g)(1, xt^{-\frac{1}{2}})\|_{(q, l)} \\ &= C(q, l) t^{\frac{m}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})-\frac{k}{2}}. \end{aligned}$$

Substituindo $\|(\nabla_x^k g)(t, x)\|_{(q, l)} = C(q, l) t^{\frac{m}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})-\frac{k}{2}}$ em (2.12) o resultado segue. $\square$

Observação 2.2. *No caso dos espaços de Lebesgue $\mathcal{L}^r$, pode-se provar (2.11) para $1 \leq p \leq r \leq \infty$ (assim, inclui-se os casos extremos $p = 1$ e $r = \infty$), isto é,*

$$\|\nabla_x^k S(t)f\|_r \leq C t^{\frac{m}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})-\frac{k}{2}} \|f\|_p. \quad (2.13)$$

De fato, a prova é essencialmente a mesma do Lema 2.1, com exceção que neste caso, aplicamos a desigualdade de Young em $\mathcal{L}^r$, a qual é dada por: $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ para $1 \leq p, q, r \leq \infty$, com $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ (ver [9, pg. 235]. Como a norma $\|g(t, x)\|_m = 1 \ \forall t > 0$, note que no caso $k = 0$ $r = p$, a constante $C = 1$.

Formulação integral

Para finalizar a seção, vamos derivar a formulação integral associada ao sistema (2.3). Seja u uma solução clássica de (2.3) e considere $\psi(s) = S(t-s)u(s, x)$, ψ é diferenciável

e usando as propriedades básicas de convolução (ver [9, pg. 233]), temos

$$\begin{aligned}
 \partial_s \psi &= S(t-s) \partial_s u - \Delta S(t-s) u(s, x) \\
 &= S(t-s) (\Delta u - \mathbb{P} \nabla(u \otimes u)(s, x)) - \Delta S(t-s) u(s, x) \\
 &= S(t-s) \Delta u - S(t-s) \Delta u - S(t-s) \mathbb{P} \nabla(u \otimes u)(s, x) \\
 &= -S(t-s) \mathbb{P} \nabla(u \otimes u)(s, x).
 \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t a última igualdade e usando $\psi(0) = S(t-0)u(0, x) = S(t)a_0(x)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
 \psi(t) - \psi(0) &= - \int_0^t S(t-s) \mathbb{P} \nabla(u \otimes u)(s, x) ds \\
 u(t, x) - S(t)a_0 &= - \int_0^t S(t-s) \mathbb{P} \nabla(u \otimes u)(s, x) ds.
 \end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}$ comuta com derivadas, e a ação do semi-grupo $S(t)$ é expressa por uma convolução, podemos escrever

$$u(t, x) = S(t)a_0 - \int_0^t \nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes u)(s, x) ds. \quad (2.14)$$

Portanto, toda solução clássica do sistema (2.3) satisfaz a equação integral (2.14). Usaremos como a nossa noção de solução, as soluções da equação integral (2.14), as quais chamaremos de soluções brandas do sistema (2.3).

Para simplificar a formulação integral (2.14) denotaremos a parte não linear por:

$$B(u, v)(t, x) = - \int_0^t \nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x) ds, \quad (2.15)$$

portanto, podemos escrever a equação (2.14) na seguinte forma:

$$u(t, x) = S(t)a_0 + B(u, u)(t, x). \quad (2.16)$$

A formulação integral (2.14) pode ser estudada em diversos espaços funcionais. Nesta dissertação um de nossos objetivos é obter soluções brandas auto-similares para as equações de Navier-Stokes (2.3). Para tal, precisaremos que o dado inicial a_0 seja homogêneo de um certo grau (ver Teorema 3.2). Portanto, estudaremos a equação integral (2.14) em espaços funcionais dependentes do tempo e baseados em espaços de Marcinkiewicz, os quais contêm funções homogêneas.

2.1 Soluções brandas globais em $\mathcal{L}(p, \infty)$

O principal objetivo desta seção é mostrar resultados de existência e unicidade de soluções nos espaços $\mathcal{L}^p$ –fraco.

2.1.1 Boa-Colocação em $\mathcal{L}(p, \infty)$

Por simplicidade, estaremos abusando da notação ao representar espaços de funções vetoriais e espaços de funções da mesma forma. Nas estimativas encontradas nesta dissertação, esse abuso de notação não representa um problema, já que a norma da função vetorial é tomada como o máximo (ou outra equivalente) das normas das coordenadas. Os seguintes espaços funcionais serão úteis para o nosso propósito.

Definição 2.3. *Sejam $m \geq 2$ um inteiro positivo e $1 \leq p, q < \infty$ qualquer número fixo. Definimos os seguintes espaços de Banach de todas funções vetoriais $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$:*

- $F = \{u ; u(t, x) \in BC((0, \infty), \mathcal{L}(m, \infty)), \nabla \cdot u = 0\},$
- $F_q = \{u(t, x) \in F ; t^{\frac{1}{2} - \frac{m}{2q}} u(t, x) \in BC((0, \infty), \mathcal{L}(q, \infty))\},$
- $F_{q,p} = \{u(t, x) \in F_q ; u(t, x) \in BC((0, \infty), \mathcal{L}(p, \infty))\},$

cujas normas são dadas por:

$$\|u\|_F \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t>0} \|u(t, x)\|_{(m, \infty)} \quad (2.17)$$

$$\|u\|_{F_q} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{2} - \frac{m}{2q}} \|u(t, x)\|_{(q, \infty)} + \sup_{t>0} \|u(t, x)\|_{(m, \infty)} \quad (2.18)$$

$$\|u\|_{F_{q,p}} \stackrel{\text{def}}{=} \|u(t, x)\|_{F_q} + \sup_{t>0} \|u(t, x)\|_{(p, \infty)}. \quad (2.19)$$

Aqui $BC((0, \infty), X)$ denota a classe das funções contínuas e limitadas com valores num espaço de Banach X . Desde que os espaços de Lorentz $\mathcal{L}(p, q)$ são espaços de Banach, ver Teorema 1.22, os espaços F, F_q e $F_{q,p}$, com as respectivas normas $\|\cdot\|_F, \|\cdot\|_{F_q}$ e $\|\cdot\|_{F_{q,p}}$, são de Banach.

A seguir daremos a noção precisa de solução branda em $\mathcal{L}(p, \infty)$ associada as equações de Navier-Stokes (2.3).

Definição 2.4. *Seja $a_0 \in \mathcal{L}(m, \infty)$ com $\nabla \cdot a_0 = 0$. Dizemos que $u = u(t, x)$ é uma solução branda global em F_q do problema de valor inicial (2.3), quando u satisfaz a equação integral (2.14), isto é,*

$$u(t, x) = S(t)a_0(t) + B(u, u)(t, x)$$

e

$$u(t, x) \rightharpoonup a_0 \text{ quando } t \rightarrow 0^+,$$

onde o limite é tomado na topologia fraca-* de $\mathcal{L}(m, \infty)$.

O primeiro item do próximo teorema pode encontrado em [2, Seção 2, Teorema 1]. Por outro lado, o segundo item é uma consequência da junção de resultados e técnicas encontrados em [5, 11, 13], e adaptados no contexto de $\mathcal{L}(p, \infty)$.

Teorema 2.5.

- (i) *(Existência e unicidade) Seja $a_0 \in \mathcal{L}(m, \infty)$. Existem $\varepsilon > 0$ e $C > 0$ tais que, se $\|a_0\|_{(m, \infty)} < \varepsilon$, então existe uma solução branda global, $u(t, x) \in F_q$, para o problema de valor inicial (2.3) satisfazendo $\|u\|_{F_q} \leq 2C\varepsilon$. Além disso, ela é única na bola fechada $\overline{B}_{2C\varepsilon}(0)$.*
- (ii) *Seja $a_0 \in \mathcal{L}(m, \infty) \cap \mathcal{L}(p, \infty)$ com $1 < p < m$ e seja $\varepsilon > 0$ obtido no item (i). Existe $\varepsilon_p > 0$, tal que, se $\|a_0\|_{(m, \infty)} < \varepsilon_p$, então a solução obtida no item (i) tem a propriedade adicional*

$$u(t, x) \in BC(0, \infty), \mathcal{L}(p, \infty).$$

O conteúdo do próximo teorema garante que as soluções, obtidas no Teorema 2.5, possuem todas as derivadas no tempo e no espaço, no sentido clássico, para todo $t > 0$.

Teorema 2.6. (Regularidade) *Sejam $m < q < \infty$ e $u(t, x) \in F_q$ a solução branda global obtida no Teorema 2.5. Então*

$$\partial_t^k \partial_x^n u(t, x) \in BC((0, \infty), \mathcal{L}(q, \infty) \cap \mathcal{L}(m, \infty)), \quad (2.20)$$

para todo $k, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Observação 2.7. O Teorema 2.6 implica que u tem todas as derivadas no tempo e no espaço. De fato, desde que $\mathcal{L}(q, \infty) \cap \mathcal{L}(m, \infty) \subset \mathcal{L}^r$, onde $m < r < q$ (Proposição 1.21, pg.23), por imersão de Sobolev e (2.20), segue a afirmação.

Antes de passarmos às demonstrações dos Teoremas 2.5 e 2.6 mostraremos um lema abstrato cuja demonstração é uma aplicação do Teorema de Banach de ponto fixo de contrações (ver [15, pg. 198]).

Lema 2.8. (Lema abstrato) Seja o par $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach e $\mathcal{B} : X \times X \rightarrow X$ um operador bilinear contínuo, isto é, existe um $K > 0$, tal que,

$$\|\mathcal{B}(x, y)\|_X \leq K\|x\|_X\|y\|_X.$$

Seja $y \in X$, $y \neq 0$ e $\|y\|_X \leq \varepsilon$. Se $4K\varepsilon < 1$, então existe uma solução $x \in X$ para a equação $x = y + \mathcal{B}(x, x)$, tal que $\|x\|_X \leq 2\varepsilon$, a qual é única na bola fechada $\overline{B}_{2\varepsilon}(0)$. Além disso, esta solução depende continuamente de y . Isto é, se $\|\tilde{y}\|_X \leq \varepsilon$, $\tilde{x} = \tilde{y} + \mathcal{B}(\tilde{x}, \tilde{x})$, e $\|\tilde{x}\|_X \leq 2\varepsilon$, então

$$\|x - \tilde{x}\|_X \leq \frac{1}{1 - 4K\varepsilon} \|y - \tilde{y}\|_X \quad (2.21)$$

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto y + \mathcal{B}(x, x) \end{aligned}$$

vamos mostrar que f restrita a uma bola fechada de raio 2ε , a saber, $\overline{B}_{2\varepsilon}(0) = \{x \in X ; \|x\|_X \leq 2\varepsilon\}$ é uma contração tal que $f(\overline{B}_{2\varepsilon}(0)) \subset \overline{B}_{2\varepsilon}(0)$.

Afirmamos que $f(\overline{B}_{2\varepsilon}(0)) \subset \overline{B}_{2\varepsilon}(0)$, para todo $x \in \overline{B}_{2\varepsilon}(0)$. Com efeito,

$$\|f(x)\|_X \leq \|y\|_X + K\|x\|_X^2 \leq \varepsilon + 4K\varepsilon\varepsilon < 2\varepsilon,$$

além disso, dados $x, x' \in \overline{B}_{2\varepsilon}$, temos:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x')\|_X &= \|\mathcal{B}(x, x) - \mathcal{B}(x', x')\|_X \\ &= \|\mathcal{B}(x, x) - \mathcal{B}(x, x') + \mathcal{B}(x, x') - \mathcal{B}(x', x')\|_X \\ &= \|\mathcal{B}(x - x', x) + \mathcal{B}(x', x - x')\|_X \\ &\leq \|\mathcal{B}(x - x', x)\|_X + \|\mathcal{B}(x', x - x')\|_X \\ &\leq K\|x\|_X\|x - x'\|_X + K\|x'\|_X\|x - x'\|_X \\ &= 4K\varepsilon\|x - x'\|_X. \end{aligned}$$

Por hipótese $4K\varepsilon < 1$, então f restrita ao conjunto $\overline{B}_{2\varepsilon}$ é uma contração, tal que, $f(\overline{B}_{2\varepsilon}) \subset \overline{B}_{2\varepsilon}$.

$\overline{B}_{2\varepsilon}(0) \subset X$ é um conjunto fechado em X . Munindo $\overline{B}_{2\varepsilon}(0)$ com a métrica $d(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \|a - b\|_X$, temos que o par $(\overline{B}_{2\varepsilon}(0), d)$ é um espaço métrico completo. Assim f tem um único ponto fixo em $\overline{B}_{2\varepsilon}(0)$, ou seja, existe $x \in X$, tal que, x é uma solução da equação $x = f(x) = y + \mathcal{B}(x, x)$, e esta solução é única na bola $\overline{B}_{2\varepsilon}(0)$.

Para finalizar, vamos mostrar a continuidade em relação ao parâmetro inicial y . De fato,

$$\begin{aligned} \|x - \tilde{x}\|_X &\leq \|y - \tilde{y}\|_X + \|\mathcal{B}(x - \tilde{x}, x)\|_X + \|\mathcal{B}(\tilde{x}, x - \tilde{x})\|_X \\ &\leq \|y - \tilde{y}\|_X + K\|x\|_X \|x - \tilde{x}\|_X + K\|\tilde{x}\|_X \|x - \tilde{x}\|_X \\ &\leq \|y - \tilde{y}\|_X + 4K\varepsilon \|x - \tilde{x}\|_X, \end{aligned}$$

desde que $4K\varepsilon < 1$, obtemos (2.21). $\square$

Para aplicarmos o Lema 2.8 com $X = F_q$ mostraremos, nas próximas subseções, que a parte não linear da equação integral (2.14) é contínua de $F_q \times F_q \rightarrow F_q$ e a norma em F_q da parte linear pode ser controlada pela norma do dado inicial $a_0 \in \mathcal{L}(m, \infty)$.

2.1.2 Estimativas do termo não linear

Nas preliminares vimos que a j -transformada de Riesz é contínua sobre os espaços de Lebesgue $\mathcal{L}^p$, (ver Proposição 1.36), e sobre os espaços de Marcinkiewicz $\mathcal{L}(p, \infty)$, (ver Teorema 1.40, pg. 35). Logo o operador projeção de Leray definido em (2.1) também é contínuo sobre estes espaços. O próximo lema mostra que o operador bilinear $B(u, v)$ é contínuo em F_q .

Lema 2.9. *Sejam $1 < m < q$, $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{m}{2q}$ e $u, v \in F_q$. Então existem constantes K_1 e $K_2 > 0$, tais que,*

$$\|B(u, v)(t, x)\|_{(m, \infty)} \leq K_1 \sup_{t>0} \|u(t, x)\|_{(m, \infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q, \infty)} \quad (2.22)$$

$$t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u, v)(t, x)\|_{(q, \infty)} \leq K_2 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_{(q, \infty)} \cdot \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q, \infty)}, \quad (2.23)$$

assumindo que $u, v \in F_{q,p}$, com $1 < p < \infty$. Existe $K_3 > 0$, tal que,

$$\|B(u, v)(t, x)\|_{(p, \infty)} \leq K_3 \sup_{t>0} \|u(t, x)\|_{(p, \infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q, \infty)}, \quad (2.24)$$

Demonstração. Vamos mostrar as estimativas (2.22) e (2.24) simultaneamente. De fato, como $1 < m < q$, existe $r > 1$, tal que, $\frac{1}{m} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$. Assim $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{l} + \frac{1}{m}$, para algum $l > 1$.

Usando, respectivamente, o Lema 2.1 com $k = 1$, $d_1 = d_2 = \infty$, a continuidade do projetor de Leray e a Desigualdade Generalizada de Hölder (1.28), obtemos:

$$\begin{aligned} \|B(u, v)(t, x)\|_{(r, \infty)} &\leq \int_0^t \|\nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x)\|_{(r, \infty)} ds \\ &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{m}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{m})-\frac{1}{2}} \|u(s, x)\|_{(q, \infty)} \|v(s, x)\|_{(r, \infty)} ds \\ &= C \int_0^t (t-s)^{\frac{m}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{m})-\frac{1}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s, x)\|_{(q, \infty)} \|v(s, x)\|_{(r, \infty)} ds \\ &\leq C \sup_{s>0} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s)\|_{(q, \infty)} \sup_{s>0} \|v(s)\|_{(r, \infty)} \int_0^t (t-s)^{\frac{m}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{m})-\frac{1}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}} ds. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{l} + \frac{1}{q} = 1$, então $\frac{m}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{m})-\frac{1}{2} = \frac{m}{2}(\frac{1}{l}-1)-\frac{1}{2} = -\frac{m}{2q} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{\alpha}{2} - 1$. Assim, a integral $\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} ds < \infty$, pois $\frac{\alpha}{2} - 1 > -1$ e $-\frac{\alpha}{2} > -1$, quando $1 < m < q$. Logo, fazendo $z = \frac{s}{t}$, temos

$$\|B(u, v)(t, x)\|_{(r, \infty)} \leq C \sup_{s>0} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s, x)\|_{(q, \infty)} \sup_{s>0} \|v(s, x)\|_{(r, \infty)} t^{\frac{\alpha}{2}-1-\frac{\alpha}{2}+1} I(z) \quad (2.25)$$

$$\leq K_r \sup_{s>0} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s, x)\|_{(q, \infty)} \sup_{s>0} \|v(s, x)\|_{(r, \infty)}, \quad (2.26)$$

onde $I(z) = \int_0^1 (1-z)^{\frac{\alpha}{2}-1} z^{-\frac{\alpha}{2}} dz$, e K_r é uma constante que independe de u e v . Tomando $r = m$, e depois $r = p$, na desigualdade (2.26), concluímos a demonstração das estimativas (2.22) e (2.24).

Para verificar a estimativa (2.23), temos

$$\|B(u, v)(t, x)\|_{(q, \infty)} \leq \int_0^t \|\nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x)\|_{(q, \infty)} ds,$$

como $1 < m < q < \infty$, podemos escrever $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{m} + \frac{1}{r}$, com $r > 1$. Assim, aplicando a estimativa (2.11) e a continuidade do projetor de Leray em $\mathcal{L}(q, \infty)$, obtemos

$$\|B(u, v)(t, x)\|_{(q, \infty)} \leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{m}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}} \|u(s, x) \otimes v(s, x)\|_{(r, \infty)} ds.$$

Seja $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q}$, então $\frac{m}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{2} - 1$ e, pela Desigualdade Generalizada de Hölder (1.28), concluímos que

$$\begin{aligned} \|B(u, v)(t, x)\|_{(q, \infty)} &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} \|u(s, x)\|_{(q, \infty)} \|v(s, x)\|_{(q, \infty)} ds \\ &= C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\alpha} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s, x)\|_{(q, \infty)} s^{\frac{\alpha}{2}} \|v(s, x)\|_{(q, \infty)} ds \\ &\leq C \sup_{s>0} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s, x)\|_{(q, \infty)} \cdot \sup_{s>0} s^{\frac{\alpha}{2}} \|v(s, x)\|_{(q, \infty)} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\alpha} ds. \end{aligned}$$

A restrição $1 < m < q$, garante que a integral $\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\alpha} ds$ converge, pois $-\alpha$ e $\frac{\alpha}{2} - 1$ são maiores que -1 . Logo, considerando a mudança de variável $z = \frac{s}{t}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|B(u, v)(t, x)\|_{(q, \infty)} &\leq C \sup_{s>0} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s)\|_{(q, \infty)} \cdot \sup_{s>0} s^{\frac{\alpha}{2}} \|v(s)\|_{(q, \infty)} t^{\frac{\alpha}{2}-1-\alpha+1} I(z) \\ &= K_3 \sup_{s>0} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s, x)\|_{(q, \infty)} \sup_{s>0} s^{\frac{\alpha}{2}} \|v(s, x)\|_{(q, \infty)} t^{-\frac{\alpha}{2}}, \end{aligned}$$

onde K_3 denota uma contante positiva, e o lema está demonstrado. $\square$

Para mostrar que a solução u converge fraco-* em $\mathcal{L}(m, \infty)$ para o dado inicial, quando $t \rightarrow 0^+$, precisaremos do seguinte lema.

Lema 2.10. *Se $u(t, x) \in F_q$, então*

$$B(u, u)(t, x) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+.$$

Demonstração. Como o conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ é denso em $\mathcal{L}(m', 1)$ (ver Proposição 1.32), logo pela desigualdade (2.24) do Lema 2.9 é suficiente mostrar por um argumento de densidade que dada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, então

$$\langle B(u, u)(t, x), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_0^t \nabla S(t-s) \mathbb{P}u(s, x) \otimes u(s, x) ds \right) \varphi dx \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow 0^+$.

Portanto, seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, temos que

$$\begin{aligned} |\langle B(u, u)(t, x), \varphi \rangle| &= \left| \int_0^t \langle \nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes u)(s, x), \varphi \rangle ds \right| \\ &\leq \int_0^t \|\nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes u)(s, x)\|_{(r', \infty)} \|\varphi\|_{(r, 1)} ds. \end{aligned}$$

Escrevendo $\frac{1}{r'} = \frac{1}{l} + \frac{1}{b} - 1$ e $\frac{1}{b} = \frac{1}{m} + \frac{1}{q}$. Pelo Lema 2.1, a continuidade do projetor Leray e a Desigualdade Generalizada de Hölder (1.28), obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla S(t-s)\mathbb{P}(u \otimes u)(s, x)\|_{(r', \infty)} &\leq C(t-s)^{\frac{m}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}) - \frac{1}{2}} \|u(s, x)\|_{(m, \infty)} \|u(s, x)\|_{(q, \infty)} \\ &= C(t-s)^{\frac{m}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}) - \frac{1}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}} \|u(s, x)\|_{(m, \infty)} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s, x)\|_{(q, \infty)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$| \langle B(u, u)(t, x), \varphi \rangle | \leq C \|\varphi\|_{(r, 1)} \int_0^t (t-s)^{\frac{m}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}) - \frac{1}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}} ds \quad (2.27)$$

$$= C \|\varphi\|_{(r, 1)} t^{\frac{m}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}) - \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} + 1} I(z) \quad (2.28)$$

$$= C \|\varphi\|_{(r, 1)} t^{\frac{m}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{m})} I(z), \quad (2.29)$$

onde $I(z) = \int_0^1 (1-z)^{\frac{m}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b}) - \frac{1}{2}} z^{-\frac{\alpha}{2}} dz$. Calculando o limite, em ambos os lados da desigualdade (2.29), obtem-se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} | \langle B(u, u)(t, x), \varphi \rangle | \leq C I(z) \|\varphi\|_{(r, 1)} \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{m}{2}(\frac{1}{r'} - \frac{1}{m})} = 0.$$

□

2.1.3 Estimativas do termo linear

Para aplicar o Lema 2.8 falta provar apenas que a norma da parte linear pode ser controlada pela norma em $\mathcal{L}(m, \infty)$ do dado inicial a_0 , e mostrar que a parte linear converge fraco-* em $\mathcal{L}(m, \infty)$ para o dado inicial, quando $t \rightarrow 0^+$. De fato, o controle da norma já foi essencialmente provado no Lema 2.1. O próximo lema trata com essas questões.

Lema 2.11. *Sejam $m < q < \infty$ e $a_0 \in \mathcal{L}(m, \infty)$. Então existe $C > 0$ tal que*

$$\|S(t)a_0\|_{F_q} \leq C \|a_0\|_{(m, \infty)}$$

e

$$S(t)a_0 \rightharpoonup a_0 \text{ quando } t \rightarrow 0^+,$$

onde o limite é tomado na topologia fraco-* de $\mathcal{L}(m, \infty)$. Além disso, se $1 < p \leq \infty$ e $a_0 \in \mathcal{L}(p, \infty)$, então existe $C > 0$, tal que,

$$\|S(t)a_0\|_{(p, \infty)} \leq C \|a_0\|_{(p, \infty)}.$$

Demonstração. Aplicando primeiro, o Lema 2.1 com $r = p = m$ e $d_1 = d_2 = \infty$, e depois com $r = q$, $p = m$ e $d_1 = d_2 = \infty$, obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} \|S(t)a_0\|_{(m, \infty)} &\leq C t^{\frac{m}{2}(\frac{1}{m} - \frac{1}{m})} \|a_0\|_{(m, \infty)} \\ &= C \|a_0\|_{(m, \infty)}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|S(t)a_0\|_{(q, \infty)} &\leq C(q') t^{\frac{m}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{m})} \|a_0\|_{(m, \infty)} \\ &= C(q') t^{\frac{m}{2q} - \frac{1}{2}} \|a_0\|_{(m, \infty)} \\ &= C(q') t^{-\frac{\alpha}{2}} \|a_0\|_{(m, \infty)}. \end{aligned}$$

Analogamente, quando $a_0 \in \mathcal{L}(p, \infty)$, tem-se

$$\|S(t)a_0\|_{(p, \infty)} \leq C \|a_0\|_{(p, \infty)}.$$

Agora vamos verificar a convergência, da parte linear da equação integral (2.14), para o dado inicial a_0 na topologia $\sigma(\mathcal{L}(m, \infty), \mathcal{L}(m', 1))$, isto é, na topologia fraco-* de $\mathcal{L}(m, \infty)$. Primeiro, vamos relembrar que $f_n \rightharpoonup f$ (fraco-*) é equivalente a convergência das integrais $\langle f_n, \tilde{g} \rangle \rightarrow \langle f, \tilde{g} \rangle$, $\forall \tilde{g} \in \mathcal{L}(m', 1)$. Portanto, para uma fixada $\tilde{g} \in \mathcal{L}(m', 1)$, temos

$$|\langle S(t)a_0 - a_0, \tilde{g} \rangle| = |\langle a_0, S(t)\tilde{g} - \tilde{g} \rangle| \leq \|a_0\|_{(m, \infty)} \|S(t)\tilde{g} - \tilde{g}\|_{(m', 1)}.$$

Aplicando o Teorema 1.34, ver Observação 2.12 abaixo, obtemos que $\|S(t)\tilde{g} - \tilde{g}\|_{(m', 1)} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0^+$, e então $S(t)a_0 \rightharpoonup a_0$. $\square$

Observação 2.12. *Ja vimos que o semi-grupo $S(t)$ é a convolução com o núcleo do calor, ou seja, $S(t)\tilde{g} = g(t, x) * \tilde{g}$. Note que $g(t, x) = t^{-\frac{m}{2}} g(1, t^{-\frac{1}{2}}x) = \varepsilon^{-m} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$, onde $\varepsilon = t^{\frac{1}{2}}$ e $\varphi(x) = g(1, x)$. Desde que $\varepsilon \rightarrow 0 \Leftrightarrow t^{1/2} \rightarrow 0$, e $\int_{\mathbb{R}^m} g(t, x) dx = \int t^{-\frac{m}{2}} g(1, t^{-\frac{1}{2}}x) dx = \int t^{-\frac{m}{2} + \frac{m}{2}} g(1, x) dx = \int (4\pi)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4}} = 1$, ver [9, pg.76], observa-se que a família $g(t, x)$, indexada em $t > 0$, é uma aproximação da identidade em $\mathcal{L}(p, q)$. Portanto, aplicando o Teorema 1.34, segue que $\|S(t)\tilde{g} - \tilde{g}\|_{(m', 1)} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0^+$.*

2.1.4 Prova do Teorema 2.5

Prova do item (i)

Pelo Lema 2.9 temos que o operador bilinear de $F_q \times F_q \rightarrow F_q$ dado por:

$$B(u, v)(t, x) = - \int_0^t \nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x) ds$$

é contínuo. Primeiro, note que pela definição do projetor de Leray, $\operatorname{div}(\mathbb{P}(u \otimes v)) = 0$.

Logo usando que a ação do semi-grupo $S(t)$ é via convolução, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(B(u, v)) &= -\operatorname{div} \int_0^t \nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x) ds \\ &= - \int_0^t \operatorname{div} \nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x) ds \\ &= - \int_0^t \nabla S(t-s) \operatorname{div} \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x) ds = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando as desigualdades (2.22) e (2.23) do Lema 2.9, obtemos:

$$\|B(u, v)\|_{F_q} \leq K \|u\|_{F_q} \|v\|_{F_q}.$$

Como F_q é um espaço de Banach, vamos aplicar o Lema 2.8 para mostrar que a equação integral (2.14) tem uma solução branda neste espaço.

Pela hipótese de pequenez do dado inicial, no enunciado do Teorema 2.5, e pelo Lema 2.11, temos que

$$4K \|S(t)a_0\|_{F_q} < 4KC \|a_0\|_{(m, \infty)} < 4KC\varepsilon. \quad (2.30)$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$, tal que, $0 < \varepsilon < (4KC)^{-1}$, então $4K \|S(t)a_0\|_{F_q} < 1$. Se $y = S(t)a_0$, então $\operatorname{div} y = S(t) \operatorname{div} a_0 = 0$, e por (2.30), $y \in F_q$. Portanto, o Lema 2.8 garante a existência para a equação integral (2.14) em F_q , a qual é única na bola fechada $\overline{B}_{2C\varepsilon}(0)$. Por outro lado, pelos Lemas 2.10 e 2.11, é fácil ver que $u(t, x) \rightarrow a_0$, quando $t \rightarrow 0^+$, na topologia fraca-* de $\mathcal{L}(m, \infty)$. Logo, a solução $u \in F_q$ é de fato uma solução branda da Definição 2.4.

Prova do item (ii)

A solução do item (i) foi obtida via um argumento de ponto fixo, de fato, pela prova do Lema 2.8, a solução u é o limite em F_q de uma sequência de Picard, $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$, definida recursivamente por

$$\begin{cases} u_1(t, x) = S(t)a_0 \\ u_{k+1}(t, x) = u_1(t, x) + B(u_k, u_k)(t, x). \end{cases} \quad (2.31)$$

Supondo que $a_0 \in \mathcal{L}(m, \infty)$ iremos mostrar que a sequência u_k é de Cauchy no espaço $BC((0, \infty), \mathcal{L}(p, \infty))$.

Pelo Lema 2.11, temos que

$$\|u_1(t, x)\|_{(p, \infty)} = \|S(t)a_0\|_{(p, \infty)} \leq C\|a_0\|_{(p, \infty)},$$

e

$$\begin{aligned} \|u_{k+1}(t, \cdot)\|_{(p, \infty)} &\leq \|u_1(t, \cdot)\|_{(p, \infty)} + \|B(u_k, u_k)(t, \cdot)\|_{(p, \infty)} \\ &\leq C\|a_0\|_{(p, \infty)} + K_1 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u_k(t, \cdot)\|_{(q, \infty)} \sup_{t>0} \|u_k(t, \cdot)\|_{(p, \infty)}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade decorre da estimativa (2.24) do Lema 2.9. Agora escolha $0 < \varepsilon_p < \varepsilon$, tal que, $2K_1 C \varepsilon_p < 1$. Se $\|a_0\|_{(m, \infty)} < \varepsilon_p$ então, pela prova do Teorema 2.5 e do Lema 2.8, a sequência de Picard u_k está contida na bola fechada $\bar{B}_{2C\varepsilon_p}(0)$, isto é,

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u_k(t, x)\|_{(q, \infty)} \leq 2C\varepsilon_p \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

Logo, podemos estimar

$$\begin{aligned} M_{k+1} = \sup_{t>0} \|u_{k+1}(t, \cdot)\|_{(p, \infty)} &\leq C\|a_0\|_{(p, \infty)} + 2K_1 C \varepsilon_p \sup_{t>0} \|u_k(t, \cdot)\|_{(p, \infty)} \\ &= M_0 + 2K_1 C \varepsilon_p M_k, \end{aligned}$$

onde $M_k = \sup_{t>0} \|u_k(t, \cdot)\|_{(p, \infty)}$. Escrevendo $r = 2K_1 C \varepsilon_p < 1$, a sequência $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfaz

$$M_k \leq (1 + r + r^2 \cdots r^k) M_0 \leq \frac{1}{1-r} M_0.$$

Usando a bilinearidade de B , temos

$$\begin{aligned} w_{k+1} = u_{k+1} - u_k &= B(u_k, u_k) - B(u_{k-1}, u_{k-1}) \\ &= B(u_k - u_{k-1}, u_k) + B(u_k, u_{k-1} - u_k) \\ &= B(w_k, u_k) + B(u_k, w_k), \end{aligned}$$

e, pela estimativa (2.24) do Lema 2.9, obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \|w_k(t, x)\|_{(p, \infty)} &\leq \sup_{t>0} \|B(w_k, u_k)\|_{(p, \infty)} + \sup_{t>0} \|B(u_k, w_k)\|_{(p, \infty)} \\ &\leq 2K_1 \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w_k(t, x)\|_{(q, \infty)} \sup_{t>0} \|u_k(t, x)\|_{(p, \infty)}. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w_{k+1}\|_{F_q} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t > 0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w_{k+1}(t, x)\|_{(q, \infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t > 0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u_{k+1} - u_k\|_{(q, \infty)} = 0$$

então a sequência (u_k) é de Cauchy em $BC((0, \infty), \mathcal{L}(p, \infty))$. Seja $\bar{u}(t, x)$ o limite desta sequência. Pela unicidade do limite q.t.p em $\mathbb{R}^m$, tem-se $u(t, x) = \bar{u}(t, x) \in BC((0, \infty), \mathcal{L}(p, \infty))$.

2.1.5 Demonstração do Teorema 2.6

Vamos fazer a demonstração por indução sobre k e n , isto é, sobre a derivada temporal e a derivada espacial da solução u do Teorema 2.5.

Seja u a única solução do Teorema 2.5 e $a = u(\sigma, x)$, $\sigma > 0$. Considere a equação integral

$$u(t, x) = S(t - \sigma)a - \int_{\sigma}^t \nabla S(t - s) \mathbb{P}(u \otimes u)(s, x) ds. \quad (2.32)$$

Pelo Teorema 2.5, a relação (2.20) é válida para $k = n = 0$. Assumindo que este resultado seja válido para todo $0 \leq i \leq n - 1$ e $k = 0$, vamos mostrar a existência de uma solução para a equação integral (2.32), no espaço de Banach H , o qual é o espaço das funções vetoriais, $h : (\sigma, T) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, tais que

$$\begin{aligned} \partial_x^i h(t, x) &\in BC((\sigma, T), \mathcal{L}(m, \infty) \cap \mathcal{L}(q, \infty)), \quad i = 0, 1, \dots, n - 1 \\ (t - \sigma)^{\frac{1}{2}} \partial_x^n h(t, x) &\in BC((\sigma, T), \mathcal{L}(m, \infty) \cap \mathcal{L}(q, \infty)), \end{aligned}$$

cujas normas, é dada por:

$$\begin{aligned} \|h\|_H &= \sup_{t \in (\sigma, T)} \left[(t - \sigma)^{\frac{1}{2}} (\|\partial_x^n h\|_{(q, \infty)} + \|\partial_x^n h\|_{(m, \infty)}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{n-1} (\|\partial_x^i h\|_{(q, \infty)} + \|\partial_x^i h\|_{(m, \infty)}) \right]. \end{aligned}$$

Começamos mostrando que $S(t - \sigma)a \in H$. Pela hipótese de indução, temos

$$\partial_x^i a = \partial_x^i u(\sigma) \in \mathcal{L}(m, \infty) \cap \mathcal{L}(q, \infty) \quad \text{para } 0 \leq i \leq n - 1.$$

e usando que a ação do semi-grupo $S(t)$ é via convolução, obtemos

$$\partial_x^i S(t - \sigma)a = S(t - \sigma) \partial_x^i a \in \mathcal{L}(m, \infty) \cap \mathcal{L}(q, \infty) \quad \text{para } 0 \leq i \leq n - 1.$$

A seguir vamos estimar as derivadas de ordem n . Pelo Lema 2.1 com $r = p = q$ e $d_1 = d_2 = \infty$, temos

$$\begin{aligned} \|\partial_x^n S(t - \sigma)a\|_{(q, \infty)} &= \|(\partial_x^n g(t - \sigma)) * a\|_{(q, \infty)} \\ &= \|\partial_x g(t - \sigma) * \partial_x^{n-1} a\|_{(q, \infty)} \\ &= \|\partial_x S(t - \sigma)(\partial_x^{n-1} a)\|_{(q, \infty)} \\ &\leq C (t - \sigma)^{-\frac{1}{2}} \|\partial_x^{n-1} a\|_{(q, \infty)}, \end{aligned}$$

e analogamente,

$$\begin{aligned} \|\partial_x^n S(t - \sigma)a\|_{(m, \infty)} &= \|(\partial_x^n g(t - \sigma)) * a\|_{(m, \infty)} \\ &= \|\partial_x g(t - \sigma) * \partial_x^{n-1} a\|_{(m, \infty)} \\ &= \|\partial_x S(t - \sigma)(\partial_x^{n-1} a)\|_{(m, \infty)} \\ &\leq C (t - \sigma)^{-\frac{1}{2}} \|\partial_x^{n-1} a\|_{(m, \infty)}, \end{aligned}$$

Agora, denote o termo não linear como

$$B_\sigma(u, v)(t, x) = - \int_\sigma^t \nabla S(t - s) \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x) ds.$$

Pelo Lema 2.1, a continuidade do projetor de Leray (2.1) e a Desigualdade Generalizada de Hölder (1.28), podemos estimar

$$\begin{aligned} \|B_\sigma(u, v)(t, x)\|_{(q, \infty)} &\leq C \int_\sigma^t \|\nabla S(t - s) \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x)\|_{(q, \infty)} ds \\ &\leq C \int_\sigma^t (t - s)^{\frac{\alpha}{2} - 1} \|\mathbb{P}(u \otimes v)(s, x)\|_{(\frac{q}{2}, \infty)} ds \\ &\leq C \int_\sigma^t (t - s)^{\frac{\alpha}{2} - 1} \|u(s, x)\|_{(q, \infty)} \|v(s, x)\|_{(q, \infty)} ds \\ &\leq C \sup_{t \in (\sigma, T)} \|u(t, x)\|_{(q, \infty)} \sup_{t \in (\sigma, T)} \|v(t, x)\|_{(q, \infty)} \int_\sigma^t (t - s)^{\frac{\alpha}{2} - 1} ds \\ &\leq C(T - \sigma)^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{t \in (\sigma, T)} \|u(t, x)\|_{(q, \infty)} \sup_{t \in (\sigma, T)} \|v(t, x)\|_{(q, \infty)} \end{aligned}$$

e de forma análoga, temos

$$\|B_\sigma(u, v)(t, x)\|_{(m, \infty)} \leq C(T - \sigma)^{\frac{\alpha}{2}} \sup_{t \in (\sigma, T)} \|u(t, x)\|_{(q, \infty)} \sup_{t \in (\sigma, T)} \|v(t, x)\|_{(m, \infty)}. \quad (2.33)$$

Devido a bilinearidade de $B_\sigma(u, v)$, observemos que

$$\partial_x^i B_\sigma(u, v)(t, x) = B_\sigma(u, \partial_x^i v) + B_\sigma(\partial_x u, \partial_x^{i-1} v) + \cdots + B_\sigma(\partial_x^i u, v). \quad (2.34)$$

Assim, usando (2.34) e (2.33), e, (2.34) e (2.33), obtemos respectivamente

$$\|\partial_x^i B_\sigma(u, v)\|_{(q, \infty)} \leq C(T - \sigma)^{\frac{\alpha}{2}} \|u\|_H \|v\|_H \quad (2.35)$$

$$\|\partial_x^i B_\sigma(u, v)\|_{(m, \infty)} \leq C(T - \sigma)^{\frac{\alpha}{2}} \|u\|_H \|v\|_H, \quad (2.36)$$

$\forall i$, tal que, $0 \leq i \leq n-1$.

Por outro lado, para a n -ésima derivada temos

$$\begin{aligned} \partial_x^n B_\sigma(u, v) &= \partial_x(\partial_x^{n-1} B_\sigma(u, v)) = \partial_x(B_\sigma(u, \partial_x^{n-1} v) + \dots + B_\sigma(\partial_x^{n-1} u, v)) \\ &= \sum_{i+j=n-1} \int_\sigma^t \partial_x \nabla S(t-s) \mathbb{P}(\partial^i u \otimes \partial^j v)(s, x) ds. \end{aligned}$$

Pela estimativa do semi-grupo $S(t)$ (Lema 2.1 com $k=2$), a continuidade do projetor de Leray e a Desigualdade Generalizada de Hölder (1.28)

$$\begin{aligned} \|\partial_x^n B_\sigma(u, v)(t, x)\|_{(q, \infty)} &\leq C \sum_{i+j=n-1} \int_\sigma^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}} \|\partial_x^i u(s)\|_{(q, \infty)} \|\partial_x^j v(s)\|_{(q, \infty)} ds \\ &\leq C(t-\sigma)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} \sum_{i+j=n-1} \sup_{t \in (\sigma, T)} \|\partial_x^i u(s)\|_{(q, \infty)} \sup_{t \in (\sigma, T)} \|\partial_x^j v(s)\|_{(q, \infty)}. \end{aligned}$$

e analogamente,

$$\|\partial_x^n B_\sigma(u, v)(t, x)\|_{(m, \infty)} \leq C(t-\sigma)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} \sum_{i+j=n-1} \sup_{t \in (\sigma, T)} \|\partial_x^i u(s)\|_{(m, \infty)} \sup_{t \in (\sigma, T)} \|\partial_x^j v(s)\|_{(q, \infty)}.$$

Logo,

$$\sup_{t \in (\sigma, T)} (t-\sigma)^{\frac{1}{2}} \|\partial_x^n B_\sigma(u, v)(t, x)\|_{(q, \infty)} \leq C(T-\sigma)^{\frac{\alpha}{2}} \|u\|_H \|v\|_H \quad (2.37)$$

$$\sup_{t \in (\sigma, T)} (t-\sigma)^{\frac{1}{2}} \|\partial_x^n B_\sigma(u, v)(t, x)\|_{(m, \infty)} \leq C(T-\sigma)^{\frac{\alpha}{2}} \|u\|_H \|v\|_H. \quad (2.38)$$

Assim, por (2.35) e (2.36), (2.37) e (2.38), existe $K > 0$, tal que,

$$\|B_\sigma(u, v)\|_H \leq K(T-\sigma)^{\frac{\alpha}{2}} \|u\|_H \|v\|_H,$$

para todo $u, v \in H$.

Escolhendo $T - \sigma$ suficientemente pequeno, pelo Lema 2.8, segue que existe uma solução $u(t, x)$ em H da equação integral (2.32).

Como o conjunto $(0, \infty)$ é um aberto da reta, podemos escrever

$$(0, \infty) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\sigma_j, T_j).$$

Por unicidade, a solução $u \in H$ da equação integral (2.32) coincide com a do Teorema 2.5 e

$$\partial_x^i u \in \mathcal{C}((0, \infty), \mathcal{L}(m, \infty) \cap \mathcal{L}(p, \infty)).$$

O argumento por indução na derivada temporal é semelhante ao feito para a derivada espacial e assim concluímos a prova.

2.2 Soluções brandas globais em $\mathcal{L}^p$

2.2.1 Boa-Colocação em $\mathcal{L}^p$

Nesta seção, desejamos mostrar uma versão do Teorema 2.5 nos espaços de Lebesgue $\mathcal{L}^p$. Como anteriormente, definiremos os espaços funcionais adequados nos quais iremos procurar as soluções para as equações de Navier-Stokes incompressível em $\mathbb{R}^m$ (2.3).

Definição 2.13. *Sejam $m > 1$ e $1 \leq p, q < \infty$. Os espaços de Banach $\tilde{F}$, $\tilde{F}_q$ e $\tilde{F}_{q,p}$ são o conjunto de todas funções vetoriais $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, tais que,*

- $\tilde{F} = \{u ; u \in BC((0, \infty), \mathcal{L}^m(\mathbb{R}^m)), \nabla \cdot u = 0\},$
- $\tilde{F}_q = \{u(t, x) \in \tilde{F} ; t^{\frac{\alpha}{2}} u(t, x) \in BC((0, \infty), \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^m))\},$
- $\tilde{F}_{q,p} = \{u(t, x) \in \tilde{F}_q ; u(t, x) \in BC((0, \infty), \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m))\},$

cujas normas são dadas por

$$\begin{aligned} \|u\|_{\tilde{F}} &= \sup_{t>0} \|u(t)\|_{\mathcal{L}^m}. \\ \|u\|_{\tilde{F}_q} &= \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t)\|_q + \|u\|_{\tilde{F}}. \\ \|u\|_{\tilde{F}_{q,p}} &= \|u\|_{\tilde{F}_q} + \sup_{t>0} \|u(t)\|_p. \end{aligned}$$

A seguir, daremos a definição precisa de soluções brandas em espaços $\mathcal{L}^p$. A definição é a mesma dos espaços $\mathcal{L}^p$ -fraco, com a diferença que agora exigimos a convergência forte para o dado inicial. Deixe-nos observar que é razoável, esperar que essa condição mais forte seja satisfeita. Os motivos, são que o núcleo do calor é uma aproximação da identidade em $\mathcal{L}^p$, e que $\mathcal{L}^p$ tem "bons" subconjuntos densos (ver Lema 2.17 abaixo).

Definição 2.14. *Seja $u = u(t, x)$ uma função vetorial em $\tilde{F}_q$. Dizemos que u é uma solução branda global, quando ela satisfazer a equação integral*

$$u(t, x) = S(t)a_0 - \int_0^t \nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes u)(s, x) ds \quad (2.39)$$

e, se

$$u(t, x) \rightarrow a_0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+,$$

onde o limite é tomado na norma $\|\cdot\|_m$ de $\mathcal{L}^m$.

O próximo teorema pode ser encontrado em [13, Seção 1, Teoremas 2 e 4].

Teorema 2.15. *(Existência e unicidade) Sejam $m < q < \infty$ e $a_0 \in \mathcal{L}^m$. Existem $\varepsilon > 0$ e $C > 0$ tais que se $\|a_0\|_m < \varepsilon$, então o problema de valor inicial (2.3) tem uma solução branda global $u(t, x) \in \tilde{F}_q$ tal que $\|u\|_{\tilde{F}_q} \leq 2C\varepsilon$. Além disso, esta solução é única na bola fechada $\bar{B}_{2C\varepsilon}(0)$ de $\tilde{F}_q$ e satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_q = 0. \quad (2.40)$$

Seja $a_0 \in \mathcal{L}^m \cap \mathcal{L}^p$, com $1 < p < \infty$, existe $0 < \varepsilon_p < \varepsilon$, tal que, se $\|a_0\|_m < \varepsilon_p$, então a solução $u(t, x)$ tem a propriedade adicional

$$u(t, x) \in BC((0, \infty), \mathcal{L}^p).$$

Observação 2.16. *(Regularidade) Desde que $\mathcal{L}_m$ está incluso em $\mathcal{L}(m, \infty)$ e temos a unicidade de soluções, a solução u , do Teorema 2.15, é a mesma solução com condição inicial a_0 , do Teorema 2.5. Portanto, podemos aplicar o Teorema 2.6 para as soluções do Teorema 2.15 desde que ε seja suficientemente pequeno. Assim, a solução u do Teorema 2.15 possui todas as derivadas, no tempo e no espaço, no sentido clássico, para todo $t > 0$.*

Antes da prova do Teorema 2.15, precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.17. *Sejam $m < q < \infty$, $a_0 \in \mathcal{L}^m$ e $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{m}{2q}$. Então*

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)a_0\|_q \leq C\|a_0\|_m, \quad \sup_{t>0} \|S(t)a_0\|_m \leq \|a_0\|_m \quad (2.41)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)a_0\|_q = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)a_0 - a_0\|_m = 0. \quad (2.42)$$

Demonstração. A desigualdade (2.41) é facilmente provada através da versão em espaços de Lebesgue $\mathcal{L}^r$ (ver Observação 2.2). Logo, tomando $k = 0$, $r = q$ e $p = m$ e depois $k = 0$, $r = p = m$ na desigualdade (2.13), obtemos, respectivamente,

$$\|S(t)a_0\|_q \leq C t^{-\frac{\alpha}{2}} \|a_0\|_m, \quad \|S(t)a_0\|_m \leq \|a_0\|_m, \quad (2.43)$$

e as desigualdades (2.41) seguem das estimativas (2.43).

Agora vamos mostrar (2.42). Pela Observação 2.2, temos que $\{g(t, x)\}_{t>0}$ é uma aproximação da identidade em $\mathcal{L}^m$; então $S(t)a_0 \rightarrow a_0$, quando $a_0 \in \mathcal{L}^m$. Para concluir (2.42), falta mostrar a convergência para zero da norma q . Como $\mathcal{L}^m \cap \mathcal{L}^q$ é denso em $\mathcal{L}^q$, existe uma sequência, $\{a_{0,k}\}$ em $\mathcal{L}^m \cap \mathcal{L}^q$, tal que, $a_{0,k} \rightarrow a_0$ em $\mathcal{L}^m$. aplicando a desigualdade (2.13) com $r = p = q$, obtemos $\|S(t)a_{0,k}\|_q \leq C \|a_{0,k}\|_q$, quando $a_{0,k} \in \mathcal{L}^q$. Logo, $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)a_{0,k}\|_q \leq C \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|a_{0,k}\|_q = 0$. Mas, pela desigualdade (2.43), temos $t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)a_{0,k}\|_q \in BC((0, \infty), \mathcal{L}^q)$ e

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)a_{0,k} - S(t)a_0\|_q &= \lim_{k \rightarrow \infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)(a_{0,k} - a_0)\|_q \\ &= C \lim_{k \rightarrow \infty} \|a_{0,k} - a_0\|_m = 0. \end{aligned}$$

Ou seja, a convergência da sequência $\{t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)a_{0,k}\|_q\}_k$ é uniforme em t . Portanto, podemos comutar o limite e obter

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)a_0\|_q = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)a_{0,k}\|_q) = 0.$$

□

Observação 2.18. Para um dado arbitrário $a_0 \in \mathcal{L}(m, \infty)$, a versão fraca da igualdade (2.42) não é verdadeira. Isto é,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)a_0\|_{(q, \infty)} \neq 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)a_0 - a_0\|_{(m, \infty)} \neq 0. \quad (2.44)$$

De fato, suponha que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)a_0\|_{(q, \infty)} = 0$ seja válida. Considere $a_0(x) = \frac{1}{|x|} \in \mathcal{L}(m, \infty)$ e $u_1(t, x) = S(t)a_0(x) = g(t, x) * a_0$. Usando a propriedade de homogeneidade do núcleo do calor (2.9) obtemos, $u_1(t, x) = \lambda u_1(\lambda^2 t, \lambda x)$ (ver detalhes na demonstração do Teorema 3.2). Usando $\lambda = t^{-\frac{1}{2}}$ e a relação de escala em espaços de Lorentz (1.18), temos

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u_1(t, x)\|_{(q, \infty)} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \lambda \|u_1(\lambda^2 t, \lambda x)\|_{(q, \infty)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} + \frac{m}{2q}} \|u_1(1, x)\|_{(q, \infty)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \|u_1(1, x)\|_q = \|u_1(1, x)\|_{(q, \infty)}. \end{aligned}$$

Assim, $u_1(1, x) = 0$ q.t.p. E obtem-se uma contradição, pois a_0 e $g(t, x)$ são não nulas, no entanto, $g(t, x) * a_0 = u_1(t, x) = t^{-\frac{1}{2}} u_1(1, t^{-\frac{1}{2}} x) = 0$, para $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^m$. A contradição para igualdade envolvendo a norma $\|\cdot\|_{(m, \infty)}$ segue exatamente nas mesmas linhas.

2.2.2 Demonstração do Teorema 2.15

Existência e unicidade em $\tilde{F}_q$

Primeiro, deixe-nos observar que o projetor de Leray, $\mathbb{P}$, é contínuo nos espaços de Lebesgue $\mathcal{L}^r$. Isso é uma consequência da continuidade da j -transformada de Riesz em $\mathcal{L}^r$ (ver Proposição 1.36 e Definição 2.1).

Para demonstrar o Teorema 2.15 procedemos como no Teorema 2.5. Primeiro comecemos com a continuidade do operador bilinear $B(u, v)(t, x) = -\int_0^t \nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes v)(s, x) ds$ sobre o espaço $\tilde{F}_q$. De fato, podemos mostrar uma versão do Lema 2.9 para os espaços de Lebesgue $\mathcal{L}^r$. Isto é, as desigualdades (2.22)-(2.24) continuam verdadeiras, com as normas $\mathcal{L}^p$ -fraco substituídas pelas normas em $\mathcal{L}^p$. A prova é exatamente a mesma do Lema 2.9, com as seguintes excessões: Usa-se a estimativa (2.11) de $\mathcal{L}^p$ - $\mathcal{L}^r$ (ver Observação 2.2) em vez de $\mathcal{L}(p, \infty)$ - $\mathcal{L}(r, \infty)$, e usamos a Desigualdade de Hölder em $\mathcal{L}^p$ em vez da desigualdade de Hölder em $\mathcal{L}(p, \infty)$ (ver 1.28).

Por outro lado, o Lema 2.17 mostra que podemos controlar a norma em $\tilde{F}_q$, da parte linear da equação integral (2.14), pela norma do dado inicial em $\mathcal{L}^m$. Portanto, podemos aplicar o Lema 2.8 com $X = \tilde{F}_q$ e obter a existência e unicidade de solução para a formulação integral (2.14), assumindo que a norma $\|\cdot\|_m$ do dado inicial a_0 é suficientemente pequena.

Se assumirmos que $a_0 \in \mathcal{L}^m \cap \mathcal{L}^p$ e usarmos a versão em $\mathcal{L}^p$ da estimativa (2.23), pode-se mostrar, exatamente como no caso $\mathcal{L}^p$ -fraco, que a solução obtida $u(t, x) \in BC((0, \infty), \mathcal{L}^p)$. Para concluir a demonstração do Teorema 2.15, ainda falta mostrar que a solução converge em $\mathcal{L}^m$ para o dado inicial, quando $t \rightarrow 0^+$ e que a solução de fato está em $\tilde{F}_q^0$, isto é, $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_q = 0$. Com efeito, pelo Lema 2.17, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)a_0\|_q = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)a_0 - a_0\|_m = 0.$$

Portanto, mostraremos apenas que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u, u)(t, x)\|_q = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0^+} \|B(u, u)(t, x)\|_m = 0. \quad (2.45)$$

Desde que a solução u é o limite da sequência $(u_k)_k$,

$$\begin{cases} u_1(t, x) = S(t)a_0 \\ u_{k+1}(t, x) = u_1(t, x) + B(u_k, u_k)(t, x), \end{cases} \quad (2.46)$$

em $\tilde{F}_q$, isto é, o limite é tomado na norma $\sup_{t>0} \|\cdot\|_m + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\cdot\|_q$, é suficiente mostrar (2.45) para elementos da sequência (u_k) . Para $k = 1$, pela versão em $\mathcal{L}^p$ da estimativa (2.23) do Lema 2.9, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u_1, u_1)(t, x)\|_q \leq K_2 \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{0 < s < t} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u_1(s, x)\|_q \right)^2. \quad (2.47)$$

Usando a desigualdade (2.42) do Lema 2.17, tem-se que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u_1, u_1)\|_q = 0$. Agora assuma a igualdade (2.45) para u_k . Usando a hipótese de indução, a igualdade (2.41) e $u_{k+1} = u_1 + B(u_k, u_k)$, é fácil ver que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u_{k+1}\|_q = 0$. Portanto, exatamente como no caso $k = 1$, desigualdade (2.47), concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u_{k+1}, u_{k+1})(t, x)\|_q = 0.$$

Agora vamos tratar com a segunda igualdade em (2.45). Pela estimativa (2.22) do Lema 2.9 (Versão em $\mathcal{L}^p$), temos que

$$\|B(u, u)(t, x)\|_m \leq K_1 \sup_{0 < s < t} \|u(s, x)\|_m \sup_{0 < s < t} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s, x)\|_q.$$

Logo

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|B(u, u)(t, x)\|_m \leq C \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{0 < s < t} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s, x)\|_q,$$

onde $C = K_1 \sup_{0 < s < t} \|u(s, x)\|_m < \infty$. Como

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s, x)\|_q = 0,$$

concluimos a demonstração.

2.3 Soluções brandas locais em $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m)$

O principal objetivo desta seção é estabelecer condições sobre os espaços $\mathcal{L}^p$ para existência de soluções brandas locais para a equação integral (2.14) com $0 < t < T$. Diferente do teorema de existência de soluções globais em $\mathcal{L}^p$ (Teorema 2.5), a existência local não segue imediatamente dos argumentos do teorema de existência em $\mathcal{L}^p$ -fraco. A diferença essencial é que agora aplicaremos o Lema 2.8 em um subespaço de $\tilde{F}_{q,T}$ (ver definição abaixo) e posteriormente, mostraremos que a sequência de Picard associada também converge para a solução $u(t, x)$ na norma $\sup_{0 < t < T} \|\cdot\|_m$.

Definição 2.19. *Sejam $1 < m < q < \infty$, $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{m}{2q}$ e $T > 0$. O espaço de Banach $\tilde{F}_{q,T}$ é o espaço de todas as funções vetoriais $u(t, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $0 < t < T$, tal que,*

$$u(t, x) \in BC([0, T], \mathcal{L}^m) \quad \text{e} \quad t^{\frac{\alpha}{2}} u(t, x) \in BC([0, T], \mathcal{L}^q),$$

a norma em $\tilde{F}_{q,T}$ é dada por:

$$\|u\|_{\tilde{F}_{q,T}} = \sup_{0 < t < T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_q + \sup_{0 < t < T} \|u(t, x)\|_m.$$

A seguir, daremos a definição precisa de soluções brandas locais em espaços $\mathcal{L}^p$.

Definição 2.20. *Seja $u = u(t, x)$ uma função em $\tilde{F}_{q,T}$. Dizemos que u é uma solução branda local, quando ela satisfazer a equação integral*

$$u(t, x) = S(t)a_0 - \int_0^t \nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes u)(s, x) ds \quad \forall 0 < t < T \quad (2.48)$$

e, se

$$u(t, x) \rightarrow a_0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow 0^+,$$

onde o limite é tomado na norma $\|\cdot\|_m$ de $\mathcal{L}^m$.

Observemos, pelo Lema 2.17, que a parte linear da equação integral (2.48) é dominada pela norma do dado inicial a_0 . Além disso, o próximo lema garante que a parte não linear da equação (2.48) é contínua sobre o espaço $\tilde{F}_{q,T}$.

Lema 2.21. *Sejam $q' \leq p < \infty$, $m < q < \infty$ e $u, v \in \tilde{F}_{q,T}$. Então*

$$\|B(u, v)(t, x)\|_m \leq \tilde{K}_1 \sup_{0 < t < T} \|u(t, x)\|_m \sup_{0 < t < T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_q \quad (2.49)$$

$$t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(u, v)(t, x)\|_q \leq \tilde{K}_2 \sup_{0 < t < T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_q \sup_{0 < t < T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_q \quad (2.50)$$

$$\|B(u, v)(t, x)\|_p \leq \tilde{K}_3 \sup_{0 < t < T} \|u(t, x)\|_p \sup_{0 < t < T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_q, \quad (2.51)$$

onde $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{K}_3$ são constantes independentes de u e $T > 0$.

Demonstração. A demonstração do Lema 2.21 é exatamente a mesma do Lema 2.9, a única diferença é que agora tomamos o supremo na variável t no intervalo $(0, T)$, e tomamos as normas $\mathcal{L}^p$ em vez das normas em $\mathcal{L}^p$ -fraco. $\square$

O próximo teorema pode ser encontrado em [13, Seção 1, Teoremas 1 e 3].

Teorema 2.22. *(Soluções Locais) Sejam $a_0 \in \mathcal{L}^m$ e $m < q < \infty$. Existe $T > 0$, tal que, o problema de valor inicial (2.3) tem uma solução branda local, $u(t, x)$ em $\tilde{F}_{q,T}$. Além disso, quando assumimos $a_0 \in \mathcal{L}^p$, a solução u tem a propriedade adicional de está em $BC([0, T], \mathcal{L}^p)$.*

2.3.1 Demonstração do Teorema 2.22

Assumindo $a_0 \in \mathcal{L}^m$, vamos provar que existe $T_1 > 0$ e $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno e uma única solução para equação integral (2.48), tal que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_q = 0 \text{ e } \sup_{0 < t < T_1} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_q < 2\varepsilon_1. \quad (2.52)$$

Seja $H_{\varepsilon_1, T_1} = \{u : \|u\|_{H_{\varepsilon_1, T_1}} < 2\varepsilon_1\}$ um subespaço de $\tilde{F}_{q,T}$, onde a norma $\|\cdot\|_{H_{\varepsilon_1, T_1}}$ é dada por

$$\|u\|_{H_{\varepsilon_1, T_1}} = \sup_{0 < t < T_1} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_q.$$

Como $a_0 \in \mathcal{L}^m$, usando a desigualdade (2.42) do Lema 2.17, para cada $\varepsilon_1 > 0$, podemos encontrar T_1 suficientemente pequeno, tal que

$$\sup_{0 < t < T_1} t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)a_0\|_q < 2\varepsilon_1,$$

isto é, o espaço H_{ε_1, T_1} não é vazio.

Assim, escolhendo ε_1, T_1 suficientemente pequenos, a desigualdade (2.50) do Lema 2.21 garante que o operador bilinear B é contínuo sobre o espaço H_{ε_1, T_1} . Aplicando o Lema 2.8, com $X = H_{\varepsilon_1, T_1}$ e $y = S(t)a_0$, existe uma solução $u(t, x)$ da equação integral (2.48) em H_{ε_1, T_1} . A igualdade em (2.52) segue exatamente como no Teorema 2.15 (ver pg. 55).

Para finalizar a prova, precisamos mostrar que a solução $u \in BC([0, T], \mathcal{L}_m)$ para algum $0 < T \leq T_1$. A demonstração é semelhante à feita no item(ii) do Teorema 2.5, escolha, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ e $0 < T \leq T_1$, tal que, $2\tilde{K}_1\varepsilon < 1$ e $\sup_{0 < t < T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|a_0\|_q \leq 2\varepsilon$. Pelo Lema 2.8 sabemos que a solução u pode ser obtida através da seguinte sequência recursiva:

$$\begin{cases} u_1(t, x) = S(t)a_0 \\ u_{k+1}(t, x) = u_1(t, x) + B(u_k, u_k)(t, x), \quad (k \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (2.53)$$

usando a desigualdade (2.13) da Observação 2.2, com $k = 0, r = m$, $d_1 = d_2 = \infty$ e a desigualdade (2.49) do Lema 2.21, obtemos

$$\begin{aligned} \|u_1(t)\|_m &\leq \|a_0\|_m \\ \|u_{k+1}(t, x)\|_m &\leq \|u_1(t, x)\|_m + \|B(u_k, u_k)(t, x)\|_m \\ &\leq \|a_0\|_m + \tilde{K}_1 \sup_{0 < t < T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u_k(t, x)\|_q \sup_{0 < t < T} \|u_k(t, x)\|_m. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\sup_{0 < t < T} \|u_{k+1}(t, x)\|_m \leq \|a_0\|_m + 2\tilde{K}_1\varepsilon \sup_{0 < t < T} \|u_k(t, x)\|_m.$$

Denotando $M_0 = \|a_0\|_m$ e $M_k = \sup_{0 < t < T} \|u_k(t, x)\|_m$, a sequência $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfaz

$$M_{k+1} \leq M_0 + 2\tilde{K}_1\varepsilon M_k.$$

Tomando $r = 2\tilde{K}_1\varepsilon < 1$, temos

$$M_k \leq (1 + r + \dots + r^k)M_0 \leq \frac{1}{1-r}M_0.$$

Denote $w_{k+1} = u_{k+1} - u_k = B(w_k, u_k) + B(u_k, w_k)$, novamente, pela desigualdade (2.49), obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < T} \|w_{k+1}(t, x)\|_m &\leq 2\tilde{K}_1 \sup_{0 < t < T} \|u_k(t, x)\|_m \sup_{0 < t < T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w_k(t, x)\|_q \\ &\leq 2\tilde{K}_1 \frac{1}{1-r} M_0 \sup_{0 < t < T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w_k(t, x)\|_q. \end{aligned}$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{0 < t < T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w_{k+1}(t, x)\|_q = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{0 < t < T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u_{k+1}(t, x) - u_k(t, x)\|_q = 0$, então a sequência (u_k) é de Cauchy em $BC([0, T]; \mathcal{L}^m)$, e por unicidade do limite q.t.p, o limite desta sequência é a solução $u \in BC([0, T]; \mathcal{L}^m)$. ■

CAPÍTULO 3

Soluções auto-similares e Comportamento assintótico

Neste capítulo investigaremos o comportamento assintótico das soluções obtidas no capítulo anterior. Mostraremos que um tipo especial de solução, as chamadas soluções auto-similares, descreve o comportamento do sistema (2.3). Deixe-nos primeiramente, começar com algumas motivações e considerações formais.

Assuma que $u(t, x)$ é uma solução clássica (suave) das equações de Navier-Stokes (2.3), então $u_\lambda(t, x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ também é uma solução do sistema (2.3). De fato, usando regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(t, x) &= \lambda^3 \frac{\partial u}{\partial t}(\lambda^2 t, \lambda x) \\ \mathbb{P}(u_\lambda \cdot \nabla_x u_\lambda)(t, x) &= \lambda^3 \mathbb{P}(u \cdot \nabla_x u)(\lambda^2 t, \lambda x) \\ (-\Delta u_\lambda)(t, x) &= \lambda^3 (-\Delta u)(\lambda^2 t, \lambda x).\end{aligned}$$

Logo, somando as últimas igualdades e usando que $u(t, x)$ é solução de (2.3), é imediato que, $u_\lambda(t, x)$ é também uma solução de (2.3), para todo $\lambda > 0$. Esta consideração motiva a seguinte definição:

Definição 3.1. (*Solução auto-similar*) *Seja $u = u(t, x)$ uma solução branda do sistema (2.3). Dizemos que esta solução é auto-similar, quando ela satisfaz a seguinte propriedade*

$$u(t, x) = u_\lambda(t, x), \tag{3.1}$$

para todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda > 0$.

A propriedade (3.1) é chamada a relação de escala, do inglês "scaling", da Equação de Navier-Stokes (2.3). Voltando às considerações formais, se fizermos $t \rightarrow 0^+$ em (3.1), devemos esperar que $u(0, x)$ seja uma função homogênea de grau -1 . De fato, quando $t = 0$,

temos $u_0(\lambda x) = u(0, \lambda x) = \lambda^{-1} u(0, x) = \lambda^{-1} u_0(x)$. Isto nos indica que espaços adequados para se encontrar soluções auto-similares, são os que contêm funções homogêneas. Por exemplo, os espaços de Marcinkiewicz $\mathcal{L}(\frac{m}{\delta}, \infty)$ ($\delta > 0$) são os únicos espaços de Lorentz que contêm funções homogêneas de grau $-\delta$, em particular, a função $h(x) = \frac{1}{\|x\|^\delta}$. Por outro lado, se desejarmos obter soluções auto-similares de (2.3) em certos espaços funcionais, as normas destes devem ser, necessariamente, invariantes pela relação de escala (3.1). Nesse sentido, o espaço funcional F_q foi bem escolhido. De fato, usando a relação de escala em espaços de Lorentz (1.18)(ver preliminares) e lembrando que $\alpha = 1 - \frac{m}{q}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda(t, x)\|_{F_q} &= \sup_{t>0} \|u_\lambda(t, x)\|_{(m, \infty)} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u_\lambda(t, x)\|_{(q, \infty)} \\
&= \sup_{t>0} \lambda \|u(\lambda^2 t, \lambda x)\|_{(m, \infty)} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \lambda \|u(\lambda^2 t, \lambda x)\|_{(q, \infty)} \\
&= \sup_{t>0} \lambda \lambda^{-\frac{m}{q}} \|u(\lambda^2 t, x)\|_{(m, \infty)} + \sup_{t>0} (\lambda^2 t)^{\frac{\alpha}{2}} \lambda^{-\alpha} \lambda^{1-\frac{m}{q}} \|u(\lambda^2 t, x)\|_{(q, \infty)} \\
&= \sup_{t>0} \|u(\lambda^2 t, x)\|_{(m, \infty)} + \sup_{t>0} (\lambda^2 t)^{\frac{\alpha}{2}} \|u(\lambda^2 t, x)\|_{(q, \infty)} \\
&= \sup_{t>0} \|u(t, x)\|_{(m, \infty)} + \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_{(q, \infty)} \\
&= \|u(t, x)\|_{F_q}.
\end{aligned}$$

A seguir enunciaremos, precisamente, o teorema sobre a existência de soluções auto-similares em F_q . Este teorema pode encontrado em [2, Seção 2, Teorema 2].

Teorema 3.2. *Sejam $a_0 \in \mathcal{L}(m, \infty)$ e $\varepsilon > 0$ do Teorema 2.5, tal que, $\|a_0\|_{(m, \infty)} < \varepsilon$. Se a_0 é uma função homogênea de grau -1 , ou seja, $a_0(\lambda x) = \lambda^{-1} a_0(x)$, então a solução branda global $u(t, x)$ do Teorema 2.5 é auto-similar.*

Demonstração. Primeiro relembramos que a solução u obtida no Teorema 2.5 é o limite da seguinte sequência de Picard :

$$\begin{cases} u_1(t, \cdot) = S(t)a_0 \\ u_{k+1}(t, \cdot) = u_1(t, \cdot) + B(u_k, u_k)(t, \cdot), \end{cases} \quad (3.2)$$

isto é, o limite de u_k em F_q é o ponto fixo u da aplicação $f(u) = y + \mathcal{B}(u, u)$.

Observe que $u_1(t, x)$ satisfaz a relação de escala (3.1). Com efeito, usando a propriedade (2.9) do núcleo $g(t, x)$ e a hipótese de homogeneidade do dado inicial, temos

que

$$\begin{aligned}
u_1(\lambda^2 t, \lambda x) &= \int_{\mathbb{R}^m} g(\lambda^2 t, \lambda x - y) a_0(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} g(\lambda^2 t, \lambda(x - \lambda^{-1} y)) a_0(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^{-m} g(t, x - \lambda^{-1} y) a_0(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} g(t, x - z) a_0(\lambda z) dz \\
&= \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}^m} g(t, x - z) a_0(z) dz = \lambda^{-1} u_1(t, x).
\end{aligned}$$

Agora, vamos aplicar um argumento por indução. Assuma que u_k satisfaça a relação de escala (3.1). Usando a propriedade de homogeneidade do núcleo $g(t, x)$ (2.10) e fazendo a mudança de variável $s \rightarrow \lambda^2 s$ e $y \rightarrow \lambda y$, temos

$$\begin{aligned}
B(u_k, u_k)(\lambda^2 t, \lambda x) &= - \int_0^{\lambda^2 t} \int_{\mathbb{R}^m} \nabla_x g(\lambda^2 t - s, \lambda x - y) \mathbb{P}(u_k \otimes u_k)(s, y) dy ds \\
&= - \lambda^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \nabla_x g(\lambda^2(t - s), \lambda x - y) \mathbb{P}(u_k \otimes u_k)(\lambda^2 s, y) dy ds \\
&= - \lambda^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^m \nabla_x g(\lambda^2(t - s), \lambda(x - y)) \mathbb{P}(u_k \otimes u_k)(\lambda^2 s, \lambda y) dy ds \\
&= - \lambda^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^{m-m-1} \nabla_x g(t - s, x - y) \lambda^{-2} \mathbb{P}(\lambda u_k \otimes \lambda u_k)(\lambda^2 s, \lambda y) dy ds \\
&= - \lambda^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^{-1} \nabla_x g(t - s, x - y) [\lambda^{-2}] \mathbb{P}(u_k \otimes u_k)(s, y) dy ds \\
&= - \lambda^{-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \nabla_x g(t - s, x - y) \mathbb{P}(u_k \otimes u_k)(s, y) dy ds \\
&= \lambda^{-1} B(u_k, u_k)(t, x).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
u_{k+1}(\lambda^2 t, \lambda x) &= u_1(\lambda^2 t, \lambda x) + B(u_k, u_k)(\lambda^2 t, \lambda x) \\
&= \lambda^{-1} [u_1(t, x) + B(u_k, u_k)(t, x)] \\
&= \lambda^{-1} u_{k+1}(t, x).
\end{aligned}$$

Assim, as soluções brandas globais são obtidas como limite em F_q de uma sequência (u_k) , onde cada elemento satisfaz a propriedade de auto-similaridade (3.1). Logo, usando a

invariância da norma F_q , obtemos

$$\begin{aligned}
\|u(t,x) - \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x,)\|_{F_q} &= \|u(t,x) - u_k(t,x) + u_k(t,x) - \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x,)\|_{F_q} \\
&\leq \|u(t,x) - u_k(t,x)\|_{F_q} + \|\lambda u_k(\lambda^2 t, \lambda x) - \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)\|_{F_q} \\
&= 2\|u(t,x) - u_k(t,x)\|_{F_q} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $k \rightarrow \infty$. Portanto verificamos que $u(t,x)$

$$u(t,x) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t),$$

para todo $\lambda > 0, t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^m$. □

Observação 3.3. Desde que as soluções auto-similares são invariantes pela relação de escala (3.1), elas apresentam um perfil característico, o qual pode dar informações sobre propriedades qualitativas de possíveis singularidades; De fato, tomando, $\lambda = t^{-\frac{1}{2}}$ e $U = u(1,x)$ temos

$$u(t,x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x) = t^{-\frac{1}{2}} u(1, t^{-\frac{1}{2}} x) = \frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

onde $U = u(1,x)$ é o perfil característico.

3.1 Estimativas de Decaimento

Nesta seção, mostraremos que a norma $\mathcal{L}^m$ da solução obtida no Teorema 2.15 vai a zero no infinito. Isso mostra que a norma $\mathcal{L}^m$ da solução do Teorema 2.15 não é preservada pelo scaling (3.1) da equação; o que é um impedimento para a existência de solução auto-similar em espaços de Lebesgue $\mathcal{L}^p$. De fato, pelas considerações do início do capítulo, de maneira informal, vimos que o dado inicial a_0 de uma solução auto-similar de (2.3) deve ser homogêneo de grau -1. Mais precisamente, seja $u(t,x)$ solução branda auto-similar, tal que, $u(t,x) \rightarrow a_0$, por exemplo, no sentido de distribuição, quando $t \rightarrow 0^+$.

Então, para $\varphi \in C_c^\infty$, temos

$$\begin{aligned} \int u(t, x) \varphi(x) dx &= \int \lambda u_\lambda(\lambda^2 t, \lambda x) \varphi(x) dx \\ &= \int \lambda^{1-m} u_\lambda(\lambda^2 t, \lambda x) \varphi(\lambda x) dx \\ &\rightarrow \int \lambda^{1-m} a_0(\lambda x) \varphi(\lambda x) dx \\ &= \int \lambda a_0(\lambda x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Isto é, $u_\lambda(t, x) \rightharpoonup \lambda a_0(\lambda x)$ no sentido de distribuição. Como $u(t, x) = u_\lambda(t, x)$, pela unicidade do limite no sentido fraco, temos $a_0(\lambda x) = \lambda^{-1} a_0(x)$, ou seja, o dado inicial é homogêneo de grau -1. Desde que, os espaços $\mathcal{L}^p$ não contém qualquer função homogênea, concluímos que a única solução auto-similar em $\mathcal{L}^p$ é a trivial, ou melhor, a solução nula. Isso mostra a necessidade de buscar um espaço maior ou mais adequado para encontrar soluções auto-similares, como por exemplo, os espaços de Marcinkiewicz $\mathcal{L}(p, \infty)$.

O próximo teorema é uma adaptação de [13, Seção 1, Teorema 4] para o contexto de Marcinkiewicz. Por outro lado, o Corolário 3.5 pode ser encontrado em [13, final da pg.480].

Teorema 3.4. *Sejam p, q, m , tal que, $1 < p' < m < q < \infty$. Assuma que $a_0 \in \mathcal{L}(p, \infty) \cap \mathcal{L}(m, \infty)$ satisfaça as hipóteses do Teorema 2.5. Suponha que $1 < p \leq r$, tal que, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} < \frac{1}{m}$, então a solução obtida no Teorema 2.5 satisfaz*

$$t^{(\frac{m}{2p} - \frac{m}{2r})} u(t, x) \in BC((0, \infty), \mathcal{L}(r, \infty)).$$

Corolário 3.5. *Seja $a_0(t, x) \in \mathcal{L}^m$ com norma suficientemente pequena. Se $1 < m < q < \infty$, então a solução do Teorema 2.5 satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_m = 0$$

Observação 3.6. *O Corolário 3.5 nos diz que a norma $\|\cdot\|_m$ da solução u decai a zero quando $t \rightarrow \infty$. Como a norma $\|\cdot\|_m$ é invariante pela relação de escala (3.1), então o Corolário 3.5 fornece uma outra prova que a única solução auto-similar em $\mathcal{L}^p$ é a solução nula.*

3.1.1 Prova do teorema 3.4

Vimos que a solução do Teorema 2.5 satisfaz a equação integral

$$u(t, x) = S(t)a_0 - \int_0^t \nabla S(t-s) \mathbb{P}(u \otimes u)(s, x) ds \quad (3.3)$$

$$= S(t)a_0 + B(u, u). \quad (3.4)$$

Para mostrar

$$t^{(\frac{m}{2p} - \frac{m}{2r})} u(t, x) \in BC((0, \infty), \mathcal{L}(r, \infty)),$$

é suficiente estimar as normas

$$\sup_{t>0} t^{(\frac{m}{2p} - \frac{m}{2r})} \|B(u, u)\|_{(r, \infty)} \text{ e } \sup_{t>0} t^{(\frac{m}{2p} - \frac{m}{2r})} \|S(t)a_0\|_{(r, \infty)}$$

pelas normas $\|u\|_{F_{q,p}}$ e $\|u_0\|_{(p, \infty)}$, respectivamente.

O caso particular $r = p$, já vimos no item (ii) do Teorema 2.5. Portanto, a essência da demonstração do Teorema 3.4 é o seguinte lema:

Lema 3.7. *Assumindo as hipóteses do Teorema 3.4, temos*

$$\sup_{t>0} t^{(\frac{m}{2p} - \frac{m}{2r})} \|B(u, v)\|_{(r, \infty)} \leq C \|u\|_{F_{q,p}} \|v\|_{F_{q,p}}$$

e

$$\sup_{t>0} t^{(\frac{m}{2p} - \frac{m}{2r})} \|S(t)a_0\|_{(r, \infty)} \leq C \|a_0\|_{(p, \infty)}.$$

Demonstração. Desde que $p' < m < q$, temos $\frac{1}{m} < \frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$, ou seja, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. Então para algum $s > 1$, podemos escrever $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}$. E supondo $p < r$, obtemos $\frac{1}{s} > \frac{1}{p} > \frac{1}{r}$. Assim, podemos escrever $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{l}$, para algum $l > 1$.

Note, ainda, que a condição $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} < \frac{1}{m}$, nos garante

$$\begin{aligned} -\frac{m+1}{2} + \frac{m}{2l} &= -\frac{m}{2} - \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \left(-\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + 1 \right) \\ &> -\frac{m}{2} - \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \left(1 - \frac{1}{m} \right) = -1. \end{aligned}$$

Usando o Lema 2.1, a continuidade do projetor de Leray e a Desigualdade Generalizada de Hölder (1.28), obtenha

$$\begin{aligned}
\|B(u, v)(t, x)\|_{(r, \infty)} &\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{m+1}{2} + \frac{m}{2l}} \|u(s)\|_{(p, \infty)} \|v(s)\|_{(q, \infty)} ds \\
&\leq C \sup_{t>0} \|u(t)\|_{(p, \infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t)\|_{(q, \infty)} \int_0^t (t-s)^{-\frac{m+1}{2} + \frac{m}{2l}} s^{-\frac{\alpha}{2}} ds \\
&\leq C \|u\|_{F_{q,p}} \|v\|_{F_{q,p}} t^{-\frac{m+1}{2} + \frac{m}{2l} - \frac{\alpha}{2} + 1} \int_0^t (t-s)^{-\frac{m+1}{2} + \frac{m}{2l}} s^{-\frac{\alpha}{2}} ds \\
&\leq C t^{-\left(\frac{m}{2p} - \frac{m}{2r}\right)} \|u\|_{F_{q,p}} \|v\|_{F_{q,p}}
\end{aligned}$$

Para provar a outra desigualdade, precisamos estimar o

$$\sup_{t>0} t^{\frac{m}{2p} - \frac{m}{2r}} \|\cdot\|_{(r, \infty)}$$

da parte linear da equação integral (3.3) e mostrar que a norma pode ser controlada pela norma do dado inicial. Assuma que $a_0 \in \mathcal{L}(p, \infty)$; se $r > p$, existe $l > 1$, tal que, $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}$, usando a Desigualdade de Young (1.26) ou o Lema 2.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\|S(t)a_0\|_{(r, \infty)} &\leq \|g(t, x)\|_l \|a_0\|_{(p, \infty)} \\
&\leq C t^{-\frac{m}{2} + \frac{m}{2l}} \|a_0\|_{(p, \infty)} \\
&= C t^{-\left(\frac{m}{2p} - \frac{m}{2r}\right)} \|a_0\|_{(p, \infty)}.
\end{aligned}$$

□

Demonstração de Corolário 3.5

Como $m < q < \infty$, podemos escolher um p , tal que, $m < p \leq q$. Seja $u_{0,k} \in \mathcal{L}^m \cap \mathcal{L}^p$, $k \in N$, de norma suficientemente pequena. Fazendo $r = m$ no Teorema 3.4, temos

$$\|u_k(t)\|_{(m, \infty)} \leq C t^{-\left(\frac{m}{2p} - \frac{1}{2}\right)}.$$

Logo a solução com condição inicial $u_{0,k}$ satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_k(t)\|_m = 0. \quad (3.5)$$

Denote por C_0 o subespaço de BC consistindo de todas as funções que anulam-se no infinito. Se $u_0 \in \mathcal{L}^m$, então u_0 pode ser aproximado, na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^m}$, por funções $u_{0,k} \in \mathcal{L}^m \cap \mathcal{L}^p$, onde $1 < m < p$.

Pela continuidade em relação ao dado inicial das soluções obtidas no Teoremas 2.15 (ver desigualdade (2.21) do Lema 2.8), a solução $u_k(t, x)$ converge na norma do espaço $\tilde{F}_q$ para a solução branda $u(t, x)$. Por (3.5), vemos que $u_k \in C_0([0, \infty); \mathcal{L}^m)$ para todo $k \in N$. Como $C_0([0, \infty); \mathcal{L}^m)$ é um subespaço fechado de $BC([0, \infty); \mathcal{L}^m)$, segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{\mathcal{L}^m} = 0. \quad (3.6)$$

3.2 Estabilidade Assintótica

Nesta seção, mostraremos algumas propriedades de estabilidade assintótica das soluções brandas do Teorema 2.5. Para isto estimaremos a diferença, $w = u - v$ das soluções brandas e mostraremos que vai a zero quando $t \rightarrow \infty$. O próximo teorema é uma combinação de resultados encontrados em [3, 6].

Teorema 3.8. *Sejam u, v soluções do problema de valor inicial (2.3) dadas pelo Teorema 2.5, com os dados iniciais u_0 e $v_0 \in \mathcal{L}(m, \infty)$, respectivamente. Assumindo que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{(m, \infty)} = 0$, então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, x) - v(t, x)\|_{(m, \infty)} = 0. \quad (3.7)$$

Por outro lado, se $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{(q, \infty)} = 0$, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x) - v(t, x)\|_{(q, \infty)} = 0. \quad (3.8)$$

Observação 3.9. *Seja u uma solução branda auto-similar com condição u_0 uma função homogênea pequena, e v uma solução branda com condição inicial $v_0 = u_0 + \phi$, isto é, uma pequena perturbação de u_0 , tal que, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)\phi\|_{(m, \infty)} = 0$. Aplicando o Teorema 3.8, vemos que a solução perturbada v é atraída pela solução auto-similar. Por exemplo, tome $\phi \in C_c$, com norma suficientemente pequena em $\mathcal{L}(m, \infty)$. De fato, seja $1 < p < m$ e $\phi \in C_c \subset \mathcal{L}(p, \infty)$. Então*

$$\|S(t)\phi\|_{(m, \infty)} \leq Ct^{\frac{m}{2}(\frac{1}{m} - \frac{1}{p})} \|\phi\|_{(p, \infty)} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Demonstração do Teorema 3.8

Sejam $u = u(t, x)$ e $v = v(t, x)$ soluções brandas globais em F_q do problema de valor

inicial (2.3). Então

$$u(t, x) = S(t)u_0 + B(u, u)(t, x)$$

$$v(t, x) = S(t)v_0 + B(v, v)(t, x).$$

Agora, considere a diferença

$$\begin{aligned} w(t, x) = u(t, x) - v(t, x) &= S(t)(u_0 - v_0) + B(u, u) - B(v, v) \\ &= S(t)(u_0 - v_0) + B(u - v, v) + B(u, u - v) \\ &= S(t)(u_0 - v_0) + B(w, v) + B(u, w). \end{aligned}$$

Procedendo exatamente como na prova do Lema 2.9 (ver capítulo 2), obtemos

$$\begin{aligned} \|B(w, v)\|_{(m, \infty)} &\leq \int_0^t \|\nabla S(t-s)\mathbb{P}(u \otimes v)(s, x)\|_{(m, \infty)} ds \\ &\leq C \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t, x)\|_{(q, \infty)} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} \|w(s, x)\|_{(m, \infty)} ds. \end{aligned}$$

Analogamente podemos obter que

$$\|B(u, w)\|_{(m, \infty)} \leq C \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t, x)\|_{(q, \infty)} \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} \|w(s, x)\|_{(m, \infty)} ds.$$

Pelo Teorema 2.5, sabemos que $\|u\|_{F_q} \leq C\varepsilon$ e $\|v\|_{F_q} \leq C\varepsilon$. Assim, estimamos

$$\begin{aligned} \|B(w, v) - B(u, w)\|_{(m, \infty)} &\leq \|B(w, v)\|_{(m, \infty)} + \|B(u, w)\|_{(m, \infty)} \\ &\leq C(\|u\|_{F_q} + \|v\|_{F_q}) \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} \|w(s, x)\|_{(m, \infty)} ds \\ &\leq C\varepsilon \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} \|w(s, x)\|_{(m, \infty)} ds \\ &= C\varepsilon \int_0^1 (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} \|w(ts, x)\|_{(m, \infty)} ds. \end{aligned}$$

Considere

$$A = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|w(ts)\|_{(m, \infty)} = \lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} \|w(ts)\|_{(m, \infty)}.$$

Observe que

$$\sup_{t \geq k} \|w(ts)\|_{(m, \infty)} \leq \|u\|_{F_q} + \|v\|_{F_q} \leq C\varepsilon \in L^1((0, 1), ds).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada e a monotonicidade da integral, obtemos

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} \|w(ts)\|_{(m, \infty)} ds \leq A \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} ds.$$

Como os expoentes $\frac{\alpha}{2} - 1$ e α são maiores que -1 , segue que $\int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\alpha} ds < \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|w(t, x)\|_{(m, \infty)} &\leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{(m, \infty)} + C\varepsilon A \\ &= 0 + C\varepsilon A < A, \end{aligned}$$

quando escolhermos $0 < \varepsilon < (C)^{-1}$. Logo $A = 0$, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|w(t, x)\|_{(m, \infty)} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|w(t, x)\|_{(m, \infty)} = 0.$$

Isto finaliza a demonstração de (3.7).

De maneira semelhante podemos demonstrar (3.8). Estimamos a parte não linear de $t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{(q, \infty)}$, de forma semelhante a demonstração da desigualdade (2.23) do Lema 2.9, e obtemos

$$t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(w, v) + B(u, w)\|_{(q, \infty)} \leq C\varepsilon \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\alpha} \|w(ts, x)\|_{(q, \infty)} ds.$$

Assim,

$$\|w\|_{(q, \infty)} \leq t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{(q, \infty)} + t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(w, v) + B(u, w)\|_{(q, \infty)} \quad (3.9)$$

$$\leq t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{(q, \infty)} + C\varepsilon \int_0^1 (1-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} s^{-\alpha} \|w(ts, \cdot)\|_{(q, \infty)} ds. \quad (3.10)$$

Definindo

$$A = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w(ts)\|_{(q, \infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} t^{\frac{\alpha}{2}} \|w(ts)\|_{(q, \infty)}.$$

Aplicando o $\overline{\lim}$ em (3.9) e procedendo como na prova de (3.7), concluímos que $A = 0$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Brézis, H., Análises funcional teoría y aplicaciones, volume 38, Ed. cast Edition, 1984.
- [2] Barraza, O., Self-similar solutions in weak L^p -spaces of the navier-stokes equations, Revista Matemática Iberoamericana, 12(2), 1996.
- [3] Barraza, O., Regularity and stability for the solutions of the navier-stokes equation in lorentz spaces, Nonlinear Analysis, (35): 747–764, 1997.
- [4] Borchers, W., Miyakawa, T., On stability of exterior Navier-Stokes flows, Acta Math. 147, 311–82, 1995.
- [5] Carrillo, José A.; Ferreira, Lucas C. F., Self-similar solutions and large time asymptotics for the dissipative quasi-geostrophic equation. Monatsh. Math. 151, no. 2, 111–142, 2007.
- [6] Cannone, M., Karch, G., About the regularized Navier-Stokes equations, J. Math Fluid Mechanics 7:1–28, 2005.
- [7] Chorin, A., Marsden, J., An Introduction to Mathematical Fluid Mechanics. Springer Verlag, New York, 1979.
- [8] Evans, L.C., Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society, Providence RI, 1998.
- [9] Folland, G., Real Analysis, John Wiley & Sons, 1984.
- [10] Fujiwara, D., Morimoto, H., An L^r -Theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields Fac. Sci. Univ. Tokio 24 658–700, 1977.

- [11] Ferreira, Lucas C. F., Soluções auto-similares para a equação quase-geostrófica e comportamento assintótico, Tese de Doutorado, Departamento de Matemática, Março 2005.
- [12] Hunt, R., On $\mathcal{L}(p, q)$ spaces, L'Enseignement Mathématique, t. (12)(4) 249–276, 1966.
- [13] Kato, T., Strong $\mathcal{L}^p$ –Solutions of the Navier-Stokes Equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to Weak Solutions, Math. Z. 187 (1984) 471-480.
- [14] Kristiansson, E., Decreasing rearrangement and Lorentz $\mathcal{L}(p, q)$ spaces, Tese de Mestrado, Departament of Mathematics, december 2002.
- [15] Lages, E., Espaços Métricos, 2.ed. IMPA, 1983 (Projeto Euclides).
- [16] Lorentz, G. G., Some new functional space, Ann. of Math, 51:37–55, 1950.
- [17] Lemarié-Rieusset, P., Recent Developments in the Navier-Stokes Problem, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2002.
- [18] O’Neil, R., Convolution operators and $\mathcal{L}(p, q)$ spaces, Duke Math. J. 30 (1963) 129-142.
- [19] Sharpley, R., Bennett, C., Interpolation of Operators, Academic Press, New York, Mathematics vol. 129, 1988.
- [20] Stein, E., Singular integral and Differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [21] Walter, R., Real And complex Analysis, Mathematics Series, 3^o edition.
- [22] Ziemer, W., Weakly Differentiable Functions: Sobolev spaces and Functions of bounded variation, 120, Springer-Verlag, N.Y., 1980.
- [23] www.claymath.org/prizeproblems.