



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Pós-graduação em Matemática

**Existência de Soluções e Estabilidade de
Equilíbrios de um Modelo de
Retroalimentação Clima-Vegetação**

Marcos Luiz Henrique

Tese de Doutorado

Recife
23 de Fevereiro de 2011

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Marcos Luiz Henrique

**Existência de Soluções e Estabilidade de Equilíbrios de um
Modelo de Retroalimentação Clima-Vegetação**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em
Matemática do Departamento de Matemática da Universi-
dade Federal de Pernambuco como requisito parcial para
obtenção do grau de Doutor em Matemática.*

Orientador: *Prof. Dr. Eduardo Leandro*
Co-orientador: *Pro. Dr. Marcos Rabelo*

Recife
23 de Fevereiro de 2011

Catálogo na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Henrique, Marcos Luiz

Existência de soluções e estabilidade de equilíbrios de um
modelo de retroalimentação clima-vegetação / Marcos Luiz
Henrique - Recife: O Autor, 2011.

91 folhas

Orientador: Eduardo Shirlipe Goes Leandro.

Tese (doutorado) Universidade Federal de Pernambuco.
CCEN. Matemática, 2011.

Inclui bibliografia.

1. Análise funcional. 2. Sistema dinâmico. 3. Teoria de
semigrupos de operadores. 4. Problema de Cauchy abstrato. I.
Leandro, Eduardo Shirlipe Goes (orientador). II. Título.

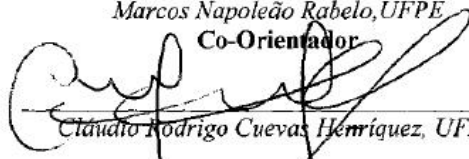
515.7

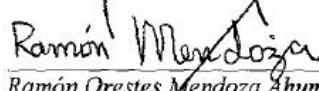
CDD (22. ed.)

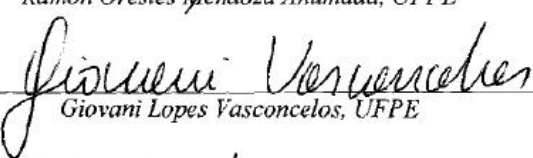
MEI2011 – 023

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: 
Marcos Napoleão Rabelo, UFPE
Co-Orientador


Claudio Rodrigo Cuevas Henríquez, UFPE


Ramón Orestes Mendoza Ahumada, UFPE


Giovani Lopes Vasconcelos, UFPE


Fágner Dias Araruna, UFPB

**EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES E ESTABILIDADE DE EQUILÍBRIOS
DE UM MODELO DE RETROALIMENTAÇÃO CLIMA-VEGETAÇÃO**

Por
Marcos Luiz Henrique

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Fevereiro - 2011

*Dedico este trabalho matemático a todos os que,
sinceramente, querem promover o desenvolvimento
científico e tecnológico.*

De modo particular, dedico-o a todos da minha família.

Porque família é tudo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por todas as oportunidades e conquistas.

Aos meus pais, irmãos e irmãs por todas as orações, apoio e solidariedade.

A minha esposa e filhos que também sempre esteve junto de mim em todas essas conquistas e nas dificuldades.

Ao meu orientador Eduardo Leandro pelo grande apoio e incentivo.

Ao meu co-orientador Marcos Rabelo, que, junto com meu orientador, teve uma participação importante no desenvolvimento desse trabalho.

Agradeço aos professores: Claudio Cuevas, Francisco Brito, Henrique Araújo, Paulo figueiredo, Pablo Braz, Paulo Santiago, Ramón Mendonza e a todos que participaram na minha formação acadêmica.

Aos funcionários e meus colegas do DMat por todo o apoio, companheirismo e amizade.

Aos professores, funcionários e alunos da UPE- Campus Caruaru pelo incentivo e apoio.

Agradeço também aos meus amigos e amigas que contribuíram direta ou indiretamente dessa conquista.

As condições químicas e físicas da Terra, da Atmosfera, e dos oceanos tem sido, e continuam a ser, ajustadas (ativamente) para criar condições confortáveis para a presença da vida, pelos próprios elementos vivos. Isto se coloca em sentido oposto ao saber convencional que considera ocorrer o contrário, que a vida se adaptou as condições de vida planetárias existentes na Terra e, desde então, ambas evoluíram por caminhos diferentes (sem interações).
— JAMES LOVELOCK (GAIA, 1979)

Resumo

Neste trabalho de tese, estudamos uma modelagem de um sistema de três equações diferenciais parciais com condição de fronteira do tipo Neumann do modelo Daisyworld unidimensional, problema de retroalimentação clima-vegetação com difusão, dando origem a uma equação diferencial funcional ordinária abstrata, onde a parte linear gera um semigrupo analítico em um espaço de Banach X e a parte não-linear satisfaz a condição localmente contínua Lipschitz com respeito à α -norma. Para isto primeiro estudaremos teoria de semi-grupos de operadores e operadores setoriais e depois determinaremos a extensão de Friedrichs do operador Laplaciano unidimensional com condição de fronteira do tipo Neumann.

Estudamos também a existência e unicidade de soluções fortes locais do problema de valor inicial associado ao modelo, com condições iniciais em um aberto de uma potência fracionária de X , cuja existência é demonstrada usando o teorema do ponto fixo de Banach e as propriedades do operador linear da equação. Usando o argumento princípio do máximo, determinamos um subconjunto fechado positivamente invariante C para as condições iniciais, tais que as soluções são globais, para isso usaremos o lema de Gronwall, a desigualdade de Young, características da parte não linear e o intervalo de valores para a radiação solar R do modelo.

Por fim, estudamos algumas soluções de equilíbrios e o comportamento assintótico das soluções, por uma aproximação linear numa vizinhança de um ponto de equilíbrio. Usando a solução global com condições iniciais em C , definimos um sistema dinâmico S em C .

Palavras-chave: Modelo Daisyworld, extensão de Friedrichs, semigrupos de operadores, operador Laplaciano, potência fracionária de operadores, problema de Cauchy abstrato, sistema dinâmico, soluções de equilíbrios e comportamento assintótico de soluções .

Abstract

In this thesis, we study a model of a system of three partial differential equations with of Neumann boundary condition of model Daisyworld dimensional, problem of climate-vegetation feedback with diffusion, giving rise to a ordinary differential equation abstract functional, where the linear part generates an analytic semi-group in a Banach space X and the nonlinear part satisfies the condition locally Lipschitz continuous with respect the α -norm, for this first will study the theory of semi-groups and sectorial operators and after we will determine the Friedrichs extension of the one-dimensional Laplacian operator with Neumann boundary condition.

We also study the existence and uniqueness local strong solutions of initial value problem associated with the model, with initial conditions in an open of a fractional power of X , whose existence is demonstrated using the Banach fixed point theorem and properties of the linear operator the equation. Using the argument maximum principle, we determine a closed subset positively invariant C for the initial conditions such that the solutions are global, for this we will use the Grönwall lemma, Young inequality, characteristics of the nonlinear part and ranges of values for solar radiation R of the model.

Finally, we study some solutions equilibria and asymptotic behavior of solutions, by a linear approximation in a neighborhood of an equilibrium point. Using the global solution with initial conditions in C , we define a dynamical system S in C .

Keywords: Model Daisyworld, Friedrichs extension, semigroups of operators, Laplacian operator, fractional power operators, abstract Cauchy problem, dynamic system, equilibria solutions and asymptotic behavior of solutions.

Sumário

1	Introdução	10
1.1	Descrição do modelo e sua relação com a forma zero-dimensional	11
2	Preliminares	14
2.1	Espaços de Funções	14
2.2	Operadores e Semigrupos	19
2.2.1	Operador Resolvente	19
2.2.2	Operador Setorial	19
2.2.3	Semigrupo de Operadores Lineares	21
2.2.4	Potência Fracionária de Operador	24
3	Existência, Unicidade e Dependência Contínua	27
3.1	O Problema Linear de Cauchy	27
3.2	O Problema Não Linear de Cauchy	28
4	Extensão de Friedrichs e o Operador Laplaciano	31
4.1	Operador Linear Não-Limitado em Espaço de Hilbert	31
4.2	Forma Positiva Fechada	32
4.3	Extensão de Friedrichs do Operador Laplaciano	33
4.4	Autovalores e Autofunções do Operador Laplaciano	36
4.5	Funções do Operador Laplaciano	37
5	Modelo de Retroalimentação de Clima-Vegetação	39
5.1	Formulação Abstrata	39
5.2	Existência e Unicidade de Soluções Locais	41
5.3	Solução Global	48
6	Equilíbrio e Estabilidade	57
6.1	Estabilidade e instabilidade por uma aproximação linear	57
6.2	Estudo da Estabilidade dos Equilíbrios do Modelo	58
6.2.1	Estabilidade de Todos os Equilíbrios zero	63
6.2.2	Estabilidade de Todos os Equilíbrios Brancos	69
6.2.3	Estabilidade de Todos os Equilíbrios Pretos	76
6.2.4	Estabilidade do Equilíbrio de Coexistência	82
6.3	Sistema Dinâmicos e Estabilidade de Liapunov	86
	Bibliografia	89

CAPÍTULO 1

Introdução

O clima global e a biosfera terrestre formam um complexo sistema acoplado da qual existe uma necessidade cada vez mais urgente de aprofundar nossa compreensão. Sofisticados modelos de simulação climática podem dar alguma idéia, mas a sua própria complexidade pode muitas vezes ser um obstáculo. Em contraste a isso, modelos transparentes muito simples podem ser úteis para identificar e compreender os mecanismos fundamentais de um sistema. Daisyworld é apenas um tal modelo. Este foi originalmente desenvolvido por Wastson e Lovelock [35], em apoio à idéia de que o biota coletivo da Terra ativamente manipula o clima através da retroalimentação, controla e equilibra a fim de manter um melhor ambiente para a sobrevivência da vida. Isto não é um novo conceito [23], mas foi pela primeira vez cientificamente formulada na década de 1970 por Margulis e Lovelock [24]. Daisyworld visa demonstrar como um tal mecanismo poderia funcionar sem o conhecimento global do biota e a compreensão do sistema climático. É formulada como um modelo de equação diferencial ordinária descrevendo um planeta hipotético, aquecido pelo sol com densidade populacional de apenas dois tipos de plantas, margaridas pretas e margaridas brancas, idênticas em todos os sentidos, exceto a cor. As margaridas têm uma taxa de crescimento dependente da temperatura. A superfície branca reflete mais energia do sol do que a preta, por isso a variação de temperatura local estabelece uma diferença entre as duas. Na ausência das margaridas, um aumento da radiação solar leva a um aumento equivalente da temperatura da superfície. No entanto Wastson e Lovelock [35] concluíram que quando as margaridas são incluídas no seu modelo, suas áreas relativas se ajustam de tal forma que a temperatura superficial permanece muito próxima da ótima para a sobrevivência das margaridas sobre uma ampla gama de valores para a radiação solar.

Houve um considerável estudo dos mecanismos de controle no modelo Daisyworld [14, 31, 36] e um número de extensões, incluindo a adição de novos níveis tróficos [15], envolvendo margaridas [30, 22] e espaço bidimensional, formulada como uma célula automática [4]. Também tem sido investigado como um sistema de controle da glicose no organismo [20]. Uma versão unidimensional foi construída aplicando as equações originais em cada ponto no espaço de uma projeção unidimensional de uma esfera. Soluções numéricas deste modelo foram descritas em [2]. Uma explicação matemática para os padrões observados no modelo Daisyworld unidimensional foi feita com base num modelo mais simples, projeção unidimensional de um plano [1]. O modelo usado em [1] é dado pelas equações (1.0.1)-(1.0.3).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = uf(u, v, w) = u[(1 - \delta(C - 5(u - v - 1) - w)^2)(1 - u - v) - \gamma], \quad (1.0.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = vg(u, v, w) = v[(1 - \delta(C - 5(u - v + 1) - w)^2)(1 - u - v) - \gamma], \quad (1.0.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = h(u, v, w) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = (2 - u + v)R - \sigma w^4 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.0.3)$$

para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e com condições de fronteiras de Neumann $w_x = 0$ em $x = \pm \frac{\pi}{2}$. Uma descrição mais detalhada do modelo é dada na próxima seção

Nas equações (1.0.1)-(1.0.3), $u = u(x, t)$ e $v = v(x, t)$ representam as populações, em termos de frações de áreas ocupadas, de duas plantas hipotéticas (margaridas) e $w = w(x, t)$ representa a temperatura da superfície. R , σ , C , δ e γ são constantes. $R \sim 200 \text{ W/m}^2$ determina a radiação solar que atinge a superfície, $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ é a constante de Stefan-Boltzmann e é usada para determinar a saída de ondas longas de radiação da superfície, $C = 295,5 \text{ K}$ é a temperatura ideal para crescimento das margaridas, $\delta = 0,003265 = \frac{1}{17,5^2}$ é a taxa intrínseca de crescimento e $\gamma = 0,3$, a taxa de mortalidade. Estes valores dos parâmetros são mantidos do modelo Daisyworld original [35].

O objetivo deste trabalho é investigar a existência e estabilidade de soluções para o sistema de equações diferenciais parciais (1.0.1)-(1.0.3) com condições de fronteiras de Neumann, tratando como uma equação diferencial funcional ordinária abstrata em um espaço de Banach, da forma

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + By = \mathcal{F}(y), & t > t_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

onde $-B$ é o gerador infinitesimal de um semi-grupo analítico de operadores lineares $T(t)$, $t \geq 0$, o domínio de $\mathcal{F}$ é um espaço de funções definido apropriadamente e $\mathcal{F}(y)$ é localmente contínua Lipschitz com respeito a uma potência fracionária de $B_1 = B + aI$, para algum $a > 0$.

1.1 Descrição do modelo e sua relação com a forma zero-dimensional

As equações para o modelo Daisyworld original [35] e sua extensão para o caso unidimensional [2] são descritas brevemente aqui.

A temperatura da superfície w do planeta encontra-se na hipótese de equilíbrio, isto é, a radiação é igual a energia absorvida na superfície. Assim, w é a solução de equilíbrio de:

$$\frac{dw}{dt} = (1 - A)R^* - \sigma w^4, \quad (1.1.4)$$

onde R^* é a energia solar atingindo a superfície, A é a albedo da superfície que é dada por

$$A = A_g \alpha_g + A_w u + A_b v, \quad (1.1.5)$$

onde A_g , A_w e A_b são as albedos da terra nua, margaridas brancas e margaridas pretas, respectivamente, e α_g , u e v são as respectivas áreas como uma proporção de 1. A temperatura local de cada tipo de margarida é dada por

$$T_w = q(A - A_w) + w \quad \text{e} \quad T_b = q(A - A_b) + w, \quad (1.1.6)$$

onde o parâmetro q expressa o grau em que a energia solar, após ter sido absorvida pelo planeta, é redistribuída entre os três tipos de superfícies.

Duas equações diferenciais ordinárias, baseadas no modelo de competição por área [9], descrevem a dinâmica das margaridas:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(\alpha_g \beta_w - \gamma) \\ \frac{dv}{dt} = v(\alpha_g \beta_b - \gamma), \end{cases} \quad (1.1.7)$$

onde γ é a taxa de mortalidade (constante) e β_w, β_b são taxas de crescimento parabólico dada por

$$\beta_w = 1 - \delta(C - T_w)^2 \quad \text{e} \quad \beta_b = 1 - \delta(C - T_b)^2, \quad (1.1.8)$$

onde δ é uma constante pequena e C é a temperatura ótima para crescimento.

Definindo $A_g = 0,50$, $A_w = 0,75$, $A_b = 0,25$ e $q = 20$ (valores de parâmetro usado no modelo original [35]), a equação (1.1.5) torna-se

$$\begin{aligned} A &= A_g \alpha_g + A_w u + A_b v \\ A &= \frac{1 - u - v}{2} + \frac{3u}{4} + \frac{v}{4} \\ A &= \frac{2 + u - v}{4} \end{aligned}$$

e as equações em (1.1.6) tornam-se

$$T_w = 5(u - v - 1) + w \quad \text{e} \quad T_b = 5(u - v + 1) + w.$$

Usando isto temos o modelo de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{du}{dt} = u[(1 - \delta(C - 5(u - v - 1) - w)^2)(1 - u - v) - \gamma], \quad (1.1.9)$$

$$\frac{dv}{dt} = v[(1 - \delta(C - 5(u - v + 1) - w)^2)(1 - u - v) - \gamma], \quad (1.1.10)$$

$$\frac{dw}{dt} = (2 - u + v)R - \sigma w^4, \quad (1.1.11)$$

com $R = R^*/4$.

Finalmente, um termo para representar a difusão de calor é adicionado ao lado direito da equação (1.1.11). Para o modelo simplificado no plano este é o Laplaciano cartesiano unidimensional, dando a equação:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (2 - u + v)R - \sigma w^4 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Para o modelo operando sobre a superfície esférica este é o Laplaciano esférico (com r e ϕ constante visto que somente uma dimensão é considerada). Para o caso esférico devemos levar em conta a desigual distribuição da radiação solar sobre a superfície. Assim, R é ponderado usando a função cosseno: $\tilde{R}(x) = R \cos(x)$. As três equações descrevendo a projeção unidimensional do sistema esférico são então:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \left[\left(1 - \delta \left(C - 5(u - v - 1) - w \right)^2 \right) (1 - u - v) - \gamma \right], \quad (1.1.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \left[\left(1 - \delta \left(C - 5(u - v + 1) - w \right)^2 \right) (1 - u - v) - \gamma \right], \quad (1.1.13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (2 - u + v)R - \sigma w^4 + \frac{1}{\cos(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (1.1.14)$$

CAPÍTULO 2

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos um resumo dos resultados necessários para a modelagem e o estudo da existência e unicidade de soluções do sistema de equações diferenciais parciais do modelo de retroalimentação clima-vegetação unidimensional.

2.1 Espaços de Funções

Na presente seção serão fixadas terminologias, teoria das distribuições e espaços de Sobolev, que serão usados na modelagem abstrata do sistema de equações diferenciais. Para maiores detalhes ver Henry [16], Brézis [7], Adams [3].

Um ponto típico em $\mathbb{R}^n$ é denotado por $x = (x_1, \dots, x_n)$. Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, chamamos α um *multi-index* e denotamos por x^α o monômio $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, que tem grau $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Similarmente, se $D_i = \partial / \partial x_i$ para $1 \leq i \leq n$, então

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

denota-se o operador de derivação de ordem $|\alpha|$. Define $D^{(0, \dots, 0)} u = u$ para toda função u .

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ são dois multi-índices, escreve-se $\beta \leq \alpha$ quando $\beta_i \leq \alpha_i$ para $1 \leq i \leq n$. Neste caso $\alpha - \beta$ é também um multi-índice e $|\alpha - \beta| + |\beta| = |\alpha|$. Também denotamos

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

e se $\beta \leq \alpha$,

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

Tem-se a regra de Leibniz dada por

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!} (D^\beta u) (D^{\alpha - \beta} v)$$

válidas para funções u e v que são $|\alpha|$ vezes diferenciáveis.

Sejam E e F dois espaços topológicos com $E \subset F$. Para indicar que a imersão de E em F é contínua será usada a notação $E \hookrightarrow F$.

Por Ω representa-se um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Se $G \subset \mathbb{R}^n$, denotamos por $\overline{G}$ o fecho de G em $\mathbb{R}^n$. Vamos escrever $G \subset\subset \Omega$ se $\overline{G} \subset \Omega$ e $\overline{G}$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Se u é uma função definida em G , definimos o *suporte* de u como

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in G \mid u(x) \neq 0\}}.$$

Dizemos que u tem suporte compacto em Ω se $\text{supp } u \subset\subset \Omega$.

Um subconjunto A de um espaço normado X é chamado *compacto* se toda sequência de pontos em A possui uma subsequência convergindo em X para um elemento em A . Conjuntos compactos são fechados e limitados, mas conjuntos fechados e limitados não são compactos em geral, a menos que X tenha dimensão finita. A é chamado *precompacto* se seu fecho $\overline{A}$ é compacto.

Sejam X, Y espaços normados e f um operador de X em Y . O operador f é chamado *compacto* se $f(A)$ é precompacto em Y sempre que A é limitado em X . f é limitado se $f(A)$ é limitado em Y sempre que A é limitado em X .

Seja X um espaço de Banach. Denota-se por $C(S, X)$ o *espaço das funções contínuas limitadas* de um espaço métrico S em X com norma

$$\|f\|_{C(S, X)} = \sup\{\|f(s)\|_X \mid s \in S\}.$$

Para qualquer inteiro não-negativo k , seja $C^k(S, X)$ o espaço vetorial de todas as funções u as quais, junto com todas as suas derivadas parciais $D^\alpha u$ de ordem $|\alpha| < k$, são contínuas em S , um aberto de um espaço de Banach. Escrevemos

$$C^0(S, X) = C(S, X) \quad \text{e} \quad C^\infty(S, X) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(S, X).$$

Os subespaços $C_0(S, X)$ e $C_0^\infty(S, X)$ consistem de todas as funções em $C(S, X)$ e $C^\infty(S, X)$, respectivamente, que tenham suporte compacto em S . Os elementos de $C_0^\infty(S, X)$ são denominados *funções-testes* em S .

Seja Ω um espaço mensurável. Se designa por $L^p(\Omega, X)$ o espaço das funções em Ω com valores em X , com a p -ésima potência integrável, ou seja, existe a integral:

$$\|f\|_{L^p(\Omega, X)} = \left\{ \int_{\Omega} \|f(t)\|_X^p dt \right\}^{1/p}.$$

Como de costume, se identifica as funções de $L^p(\Omega, X)$ que coincidem em q.t.p. (quase em toda parte, isto é, exceto em um conjunto de medida nula).

Por $L^\infty(\Omega, X)$ denota-se o espaço das funções mensuráveis com valores em X e que são fortemente essencialmente limitadas em Ω , isto é, existe uma constante C tal que $\|f(t)\|_X \leq C$ q.t.p. em Ω , equipado com a norma:

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega, X)} = \sup \text{ess} \{\|f(t)\|_X \mid t \in \Omega\}.$$

Definição 2.1. Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Diz-se que uma sequência (ϕ_n) de funções em $C_0^\infty(\Omega, X)$ converge para zero, quando as seguintes condições forem satisfeitas:

- a) Os suportes de todas as funções-testes ϕ_n , da sequência dada, estão contidos num compacto fixo K .
- b) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sequência $(D^\alpha \phi_n)$ converge para zero uniformemente em K .

Se $\phi \in C_0^\infty(\Omega, X)$, diz-se que a sequência (ϕ_n) de elementos de $C_0^\infty(\Omega, X)$ converge para ϕ em $C_0^\infty(\Omega, X)$, quando a sequência $(\phi_n - \phi)$ converge para zero no sentido dado acima.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega, X)$ com esta noção de convergência é representado por $\mathcal{D}(\Omega, X)$ é denominado *espaço das funções-testes em Ω* .

Define-se como *distribuição sobre Ω* a toda forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega, X)$ que é contínua no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(\Omega, X)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega, X)$. Representamos o número complexo $T(\phi)$ por $\langle T, \phi \rangle$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, X)$.

Neste espaço vetorial diz-se que uma sequência (T_n) de vetores de $\mathcal{D}'(\Omega, X)$ converge para zero em $\mathcal{D}'(\Omega, X)$, quando para toda função teste $\phi \in \mathcal{D}'(\Omega, X)$, a sequência $(\langle T_n, \phi \rangle)$ converge para zero.

Uma função u definida quase toda parte em Ω é dita *localmente integrável* em Ω desde que $u \in L^1(A, X)$ para todo subconjunto mensurável $A \subset \subset \Omega$. Neste caso escrevemos $u \in L_{loc}^1(\Omega, X)$. Correspondendo a toda $u \in L_{loc}^1(\Omega, X)$ existe uma distribuição $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega, X)$ definida por

$$\langle T_u, \phi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \phi(x) dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega, X). \quad (2.1.1)$$

Proposição 2.1 (Lema de Du Bois Raymond). *Seja $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se e somente se $u = 0$ quase toda parte em Ω .*

Do Lema de Du Bois Raymond segue-se que para cada $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, tem-se T_u univocamente determinada por u sobre Ω , quase toda parte, no seguinte sentido: se $u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$ então $T_u = T_v$ se e somente se $u = v$ quase toda parte em Ω . Por esta razão, identifica-se u com a distribuição T_u por ela definida e diz-se a distribuição u ao invés de dizer a distribuição T_u .

Definição 2.2. Considere uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T é a forma linear $D^\alpha T$ definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por:

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle \quad \text{para todo} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Agora definimos a conceito de derivada fraca de uma função localmente integrável. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Pode ou não existir uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $T_v = D^\alpha(T_u)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Se uma tal v existir, ela é única a menos de um conjunto de medida nula e chamada de *derivada parcial distribucional* or *fraca* de u e denotada por $D^\alpha u$. Assim, $D^\alpha u = v$ no sentido fraco (distribucional) desde que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfaça

$$\langle D^\alpha T_u, \phi \rangle = \langle T_v, \phi \rangle$$

$$(-1)^{|\alpha|} \langle T_u, D^\alpha \phi \rangle = \langle T_v, \phi \rangle$$

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \phi(x) dx$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Para funções $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, vemos que estas possuem derivadas de todas as ordens no sentido de distribuição $D^\alpha u = D^\alpha(T_u)$. Quando $D^\alpha u$ é uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$, define-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, as derivadas de u no sentido das distribuições $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$. Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ define-se a norma de u por:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|.$$

Os espaços normados $W^{m,p}(\Omega)$ são denominados espaços de Sobolev.

Proposição 2.2. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Denotamos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ no espaço $W^{m,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$, usualmente denotamos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$ e $W_0^{k,2}(\Omega)$ por $H_0^m(\Omega)$. Para $H^m(\Omega)$ utilizaremos a norma

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

que torna $H^m(\Omega)$ um espaço de Hilbert real munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx.$$

Quando Ω é limitado, existe uma constante $C(\Omega, m)$ tal que

$$\|u\|_{H_0^m(\Omega)} \leq C(\Omega, m) \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \quad \text{para todo } u \in H_0^m(\Omega).$$

A desigualdade acima é conhecida como desigualdade de Poincaré. Assim, é mais cômodo munirmos o espaço $H_0^m(\Omega)$ com o produto interno:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx.$$

Proposição 2.3. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$; então existe uma função $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ tal que*

$$u = \tilde{u} \quad \text{quase toda parte em } I \quad \text{e}$$

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t) dt \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

Demonstração: Ver [7, páginas 122-23]. ■

Teorema 2.1. *Existe uma constante C (dependendo só de $|I| \leq \infty$) tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad \forall 1 \leq p \leq \infty,$$

em outras palavras $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ com inclusão contínua para todo $1 \leq p \leq \infty$. Também, quando I é limitado se verificam:

a) *A inclusão $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$ é compacta para $1 < p \leq \infty$*

b) *A inclusão $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ é compacta para $1 \leq q < \infty$.*

Demonstração: Ver [7, página 129]. ■

Definição 2.3. Uma função definida em $[a, b] \subset \mathbf{R}$ é chamada *absolutamente contínua* se, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ de modo que

$$\sum_{k=1}^n |f(x'_i) - f(x_i)| < \varepsilon,$$

para toda coleção finita de intervalos $[x'_i - x_i]$ satisfazendo

$$\sum_{k=1}^n |x'_i - x_i| < \delta.$$

Teorema 2.2 (Teorema fundamental do cálculo). *Se f é absolutamente contínua em $[a, b]$, então f é diferenciável em quase todo ponto, $f'(x) \in L^1[a, b]$, e f é a integral indefinida de $f'(x)$. Reciprocamente, se $g(x) \in L^1[a, b]$, então a integral indefinida, $G(x)$, de $g(x)$ é absolutamente contínua e $G'(x) = g(x)$ em quase todo ponto.*

2.2 Operadores e Semigrupos

Nesta seção veremos um pouco sobre a teoria de semigrupos cujos conceitos e resultados aqui apresentados são encontrados em Henry [16] e Pazy [27].

2.2.1 Operador Resolvente

Seja $X \neq \{0\}$ um espaço normado e $T : D(T) \rightarrow X$ um operador linear com domínio $D(T) \subset X$. A T associamos o operador

$$T_\lambda = \lambda I - T,$$

onde λ é um número complexo e I é o operador identidade em $D(T)$. Se T_λ tem uma inversa, a denotaremos por $R_\lambda(T)$, isto é,

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (\lambda I - T)^{-1}.$$

$R_\lambda(T)$ é chamado o *operador resolvente* de T ou, simplesmente, *resolvente* de T .

Definição 2.4. Seja $X \neq \{0\}$ um espaço normado e $T : D(T) \rightarrow X$ um operador linear com domínio $D(T) \subset X$. Um *valor regular* λ de T é um número complexo tal que

- i) $R_\lambda(T)$ existe,
- ii) $R_\lambda(T)$ é limitado,
- iii) $R_\lambda(T)$ é definido num subconjunto denso de X .

O *conjunto resolvente* $\rho(T)$ é o conjunto de todos os valores regulares λ de T . Seu complemento $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ no plano complexo $\mathbb{C}$ é chamado o *espectro* de T , e um $\lambda \in \sigma(T)$ é chamado de um *valor espectral* de T . Além disso, o espectro $\sigma(T)$ é particionado em três conjuntos disjuntos como segue.

O **espectro pontual** ou *espectro discreto* $\sigma_p(T)$ é o conjunto dos λ complexos tais que $R_\lambda(T)$ não existe. Um $\lambda \in \sigma_p(T)$ é chamado um *autovalor* de T .

O **espectro contínuo** $\sigma_c(T)$ é o conjunto tal que $R_\lambda(T)$ existe e $R_\lambda(T)$ é definido num subconjunto denso de X mas $R_\lambda(T)$ não é limitado.

O **espectro residual** $\sigma_r(T)$ é o conjunto tal que $R_\lambda(T)$ existe (e pode ser ou não limitado) mas o domínio de $R_\lambda(T)$ não é denso em X .

2.2.2 Operador Setorial

Definição 2.5 (Operador linear fechado). Seja $T : D(T) \rightarrow H$ um operador linear, onde $D(T) \subset H$ é um espaço de Hilbert complexo. Então T é chamado um operador linear fechado se seu gráfico

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, y) \mid x \in D(T), y = Tx\}$$

é fechado em $H \times H$, onde a norma em $H \times H$ é definida por

$$\|(x, y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$$

que resulta do produto interno definido por

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2).$$

Teorema 2.3 (Operador linear fechado). *Seja $T : D(T) \rightarrow H$ um operador linear, onde $D(T) \subset H$ é um espaço de Hilbert complexo. Então:*

a) T é fechado se e somente se

$$x_n \rightarrow x \quad [x_n \in D(T)] \quad \text{e} \quad Tx_n \rightarrow y$$

implicam que $x \in D(T)$ e $Tx = y$.

b) Se T é fechado e $D(T)$ é fechado, então T é limitado.

c) Seja T limitado. Então T é fechado se e somente se $D(T)$ é fechado.

Dizemos que um operador A é *densamente definido* em um espaço de Banach X quando seu domínio $D(A)$ é denso em X .

Definição 2.6. Chamaremos um operador linear A em um espaço de Banach X um *operador setorial* se A é um operador fechado densamente definido tal que, para algum θ em $(0, \frac{\pi}{2})$, algum $M \geq 1$ e algum a real, o setor

$$S_{a,\theta} = \{\lambda \mid \theta \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}$$

está no conjunto resolvente $\rho(A)$ de A e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq M/|\lambda - a| \quad \text{para todo} \quad \lambda \in S_{a,\theta}.$$

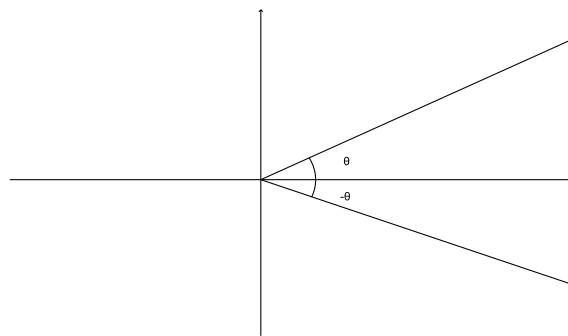


Figura 2.1 Setor $S_{a,\theta}$

Exemplo 2.2.1. Se A é um operador linear auto-adjunto densamente definido em um espaço de Hilbert, e se A é limitado inferiormente, então A é setorial.

Exemplo 2.2.2. Se A é um operador linear limitado em um espaço de Banach, então A é setorial.

2.2.3 Semigrupo de Operadores Lineares

Definição 2.7. Seja X um espaço de Banach. Uma família a um parâmetro $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores linear limitado de X em X é um *semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados* sobre X se

- (i) $T(0) = I$,
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para $t \geq 0, s \geq 0$
- (iii) $T(t)x \rightarrow x$ quando $t \rightarrow 0^+$, para cada $x \in X$

Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados sobre X pode ser chamado de *semigrupo de classe C_0* or simplesmente *C_0 -semigrupo*.

O gerador infinitesimal A deste semigrupo é definido por

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (T(t)x - x),$$

seu domínio $D(A)$ consiste de todos os $x \in X$ para os quais os limites existem. Usualmente escrevemos $T(t) = e^{At}$.

Teorema 2.4. Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo. Existe uma constante $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tal que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \text{para} \quad 0 \leq t < \infty.$$

Corolário 2.1. Se $T(t)$ é um C_0 -semigrupo então para todo $x \in X$,

$$t \rightarrow T(t)x$$

é uma função contínua de $\mathbb{R}_+$ (os reais não negativo) em X .

Teorema 2.5. Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo e seja A seu gerador infinitesimal. Então

(a) Para $x \in X$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x.$$

b) Para $x \in X$, $\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A)$ e

$$A \left(\int_0^t T(s)x \, ds \right) = T(t)x - x.$$

c) Para $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

d) Para $x \in D(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax \, d\tau.$$

Corolário 2.2. Se A é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$ então $D(A)$, o domínio de A , é denso em X e A é um operador linear fechado.

Teorema 2.6. Seja A é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $T(t)$. Se $D(A^n)$ é o domínio de A^n , então $\cap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em X .

Definição 2.8. Um C_0 -semigrupo $T(t)$ é chamado *compacto* para $t > t_0$ se para todo $t > t_0$, $T(t)$ é um operador compacto. $T(t)$ é chamado *compacto* se é compacto para $t > 0$.

Teorema 2.7. Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo e seja A seu gerador infinitesimal. $T(t)$ é um semigrupo compacto se e somente se $T(t)$ é contínuo na topologia uniforme do operador para $t > 0$ e o operador resolvente $R_\lambda(A)$ é compacto para $\lambda \in \rho(A)$.

Definição 2.9. Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo sobre um espaço de Banach X . O semigrupo $T(t)$ é chamado *diferenciável* para $t > t_0$ se para todo $x \in X$, $t \rightarrow T(t)x$ é diferenciável para $t > t_0$. $T(t)$ é *diferenciável* se é diferenciável para todo $t > 0$.

Se $T(t)$ é um C_0 -semigrupo com gerador infinitesimal A e $x \in D(A)$ então $t \rightarrow T(t)x$ é diferenciável para $t \geq 0$. Se $T(t)$ é diferenciável então para todo $x \in X$, $t \rightarrow T(t)x$ é diferenciável para $t > 0$. Note que se $t \rightarrow T(t)x$ é diferenciável para todo $x \in X$ e $t \geq 0$ então $D(A) = X$ e visto que A é fechado é necessariamente limitado.

Definição 2.10. Um *semigrupo analítico* sobre um espaço de Banach X é uma família de operadores lineares contínuos sobre X , $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, satisfazendo

- (i) $T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)T(s)$ para $t \geq 0$, $s \geq 0$
- (ii) $T(t)x \rightarrow x$ quando $t \rightarrow 0^+$, para cada $x \in X$
- (iii) $t \rightarrow T(t)x$ é analítica real sobre $0 < t < \infty$ para cada $x \in X$.

Para motivar os próximos resultados apresentaremos o lema 2.1 que exhibe o semigrupo exponencial $T(t) = e^{tA}$, definido no sentido usual, de um operador linear limitado A em função do seu operador resolvente $R(\lambda : A)$. Para isso necessitamos dos teoremas abaixo (2.8-2.9) para operadores limitados.

Teorema 2.8 (Inversa). Seja $A \in \mathcal{L}(X, X)$, onde X é um espaço de Banach. Se $\|A\| < 1$, então $(I - A)^{-1}$ existe como um operador limitado em todo espaço X e

$$(I - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j = I + A + A^2 + \dots \quad (2.2.2)$$

Teorema 2.9 (Espectro). *O espectro $\sigma(A)$ de um operador linear limitado $A : X \rightarrow X$ em um espaço de Banach complexo X é compacto e encontra-se no disco dado por*

$$|\lambda| \leq \|T\|.$$

Consequentemente o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A é não-vazio.

Lema 2.1. *Seja A um operador linear limitado. Se $a > \|B\|$ então*

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda. \quad (2.2.3)$$

A convergência é na topologia uniforme do operador e uniformemente em t sobre intervalos limitados.

Demonstração: Seja $a > \|A\|$. Escolha r tal que $a > r > \|A\|$ e seja C_r o círculo de raio r centrado na origem. Para $|\lambda| > r$ implica $\|\frac{A}{\lambda}\| < 1$, pelos teoremas 2.8-2.9 temos

$$R_\lambda(A) = [\lambda(I - \frac{A}{\lambda})]^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{(k+1)}}, \quad (2.2.4)$$

onde a convergência é na topologia uniforme do operador para $|\lambda| \geq r$. Multiplicando (2.2.4) por $\frac{1}{2\pi i} e^{\lambda t}$ e integrando sobre C_r termo a termo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda : T) d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{(k+1)}} d\lambda$$

usando a identidade

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{e^{zt}}{z^{k+1}} dz = \frac{t^k}{k!} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

obtemos

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda. \quad (2.2.5)$$

Fora de C_r o integrando de 2.2.5 é analítico, usando o teorema de Cauchy para $\gamma_1 + \gamma_2 \sim C_r$, onde γ_1 um semicírculo esquerdo com centro em a e raio ρ

$$\{\gamma_1\} = \{a + \rho e^{i\theta} \mid \pi/2 < \theta < 3\pi/2\}$$

e γ_2 o segmento vertical $x = a$ de $-\rho$ a ρ

$$\{\gamma_2\} = \{a + i\eta \mid -\rho < \eta < \rho\},$$

com ρ suficientemente grande temos,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} e^{\lambda t} R(\lambda : T) d\lambda.$$

Usando os fatos

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{C}{\|\lambda\|} \quad e \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{\rho \cos \theta} d\theta = 0,$$

obtemos

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} e^{\lambda t} R(\lambda : T) d\lambda = 0.$$

Portanto

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda \\ e^{tA} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A) d\lambda. \end{aligned}$$

Teorema 2.10. Se A é operador setorial, então $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$,

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda,$$

onde Γ é uma curva em $\rho(-A)$ com o $\arg \lambda \rightarrow \pm \vartheta$ quando $|\lambda| \rightarrow \infty$ para algum ϑ em $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Além disso e^{-At} pode ser estendido analiticamente em um setor $\{t \neq 0 : |\arg t| < \varepsilon\}$ contendo o eixo real positivo, e se $\operatorname{Re} \sigma(A) > a$, isto é, se $\operatorname{Re} \lambda > a$ sempre que $\lambda \in \sigma(A)$, então para $t > 0$

$$\|e^{-At}\| \leq C e^{-at}, \quad \|A e^{-At}\| \leq \frac{C}{t} e^{-at}$$

para alguma constante C .

Finalmente

$$\frac{d}{dt} e^{-At} = -A e^{-At} \quad \text{para} \quad t > 0.$$

2.2.4 Potência Fracionária de Operador

Definição 2.11. Suponha A operador setorial e $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$; então para qualquer $\alpha > 0$

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} dt,$$

onde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

Exemplo 2.2.3. Se $A = a$ é um escalar positivo ($X = \mathbb{R}$), então $A^{-\alpha}$ como definido é a usual potência $-\alpha$ de A

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-at} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} e^{-t} \frac{1}{a} dt = a^{-\alpha}.$$

Exemplo 2.2.4. Se A é um operador auto-adjunto positivo definido em um espaço de Hilbert com representação espectral $A = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$, então

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} dE(\lambda) \right) dt \\ A^{-\alpha} &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt \right) dE(\lambda) \\ A^{-\alpha} &= \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} dE(\lambda). \end{aligned}$$

Teorema 2.11. Se A é operador setorial em X com $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$, então para qualquer $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado sobre X , é injetivo, e satisfaz $A^{-\alpha} A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$ sempre que $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Além disso, para $0 < \alpha < 1$,

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda + A)^{-1} d\lambda.$$

Definição 2.12. Com A como acima, defina A^α como a inversa de $A^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$), $D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha})$; A^0 identidade de X

Teorema 2.12. Seja A^α como definida na 2.12 então,

- a) Se $\alpha > 0$, A^α é fechado densamente definido;
- b) Se $\alpha > \beta$ então $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$;
- c) $A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}$ sobre $D(A^\gamma)$, onde $\gamma = \max(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$;
- d) $T(t) : X \rightarrow D(A^\alpha)$ para todo $t > 0$ e $\alpha \geq 0$;
- e) $A^\alpha e^{-At} = e^{-At} A^\alpha$ sobre $D(A^\alpha)$, $t > 0$.

O teorema seguinte exhibe duas desigualdades que são utilizadas na demonstração de existência de soluções de equações diferenciais $du/dt + Au = f(u)$, onde $0 \in \rho(A)$. No entanto farei observações para as desigualdades no caso em que $\operatorname{Re} \sigma(A) > a$.

Teorema 2.13. Suponha que A é operador setorial e $\operatorname{Re} \sigma(A) > \delta > 0$. Para $\alpha > 0$ existe $C_\alpha < \infty$ tal que

$$\|A^\alpha e^{-At}\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t} \quad \text{para} \quad t > 0,$$

e se $0 < \alpha \leq 1$, $x \in D(A^\alpha)$,

$$\|(e^{-At} - I)x\| \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^\alpha \|A^\alpha x\|.$$

Também, C_α é limitada para α em qualquer intervalo compacto de $(0, \infty)$.

Definição 2.13. Se A é operador setorial em um espaço de Banach X , defina para cada $\alpha \geq 0$ $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ com a norma do gráfico

$$\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|, \quad x \in X^\alpha,$$

onde $A_1 = A + aI$ com a escolhido de modo que $\operatorname{Re} \sigma(A_1) > 0$. Diferentes escolhas de a dar normas equivalentes sobre X^α .

Notemos que, pelo Teorema 2.10

$$\|e^{-A_1 t}\| \leq C, \quad \|A_1 e^{-A_1 t}\| \leq \frac{C}{t}.$$

Consequentemente, pelo Teorema 2.13

$$\begin{aligned} \|A_1^\alpha e^{-A_1 t}\| &= \|A_1^\alpha e^{-At}\| e^{-at} \leq C_\alpha t^{-\alpha}, \\ \|A_1^\alpha e^{-At}\| &\leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{at}. \end{aligned}$$

Teorema 2.14. Se A é operador setorial em um espaço de Banach X , então X^α é um espaço de Banach na norma $\|\cdot\|_\alpha$ para $\alpha \geq 0$, $X^0 = X$, e para $\alpha \geq \beta \geq 0$, X^α é um subespaço denso de X^β com inclusão contínua. Se A possui o resolvente compacto, a inclusão $X^\alpha \subset X^\beta$ é compacta quando $\alpha > \beta \geq 0$.

Existência, Unicidade e Dependência Contínua

Neste capítulo estudaremos a existência e unicidade de soluções forte para o problema de valor inicial para uma classe de equações diferenciais abstratas em um espaço de Banach X com operador linear A setorial, aplicável ao modelo de retroalimentação clima-vegetação unidimensional estudado neste trabalho. Os resultados apresentados podem ser vistos em Henry [16].

3.1 O Problema Linear de Cauchy

Primeiro consideramos o problema linear homogêneo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + Ax = 0, & t > 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

onde A é um operador setorial em um espaço de Banach X e $x_0 \in X$ é dado.

Definição 3.1. Uma *solução* de (3.1.1) sobre $0 < t < T$ é uma função contínua $x : [0, T) \rightarrow X$ a qual é continuamente diferenciável sobre o intervalo aberto $(0, T)$, tem $x(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$, e satisfaz (3.1.1) sobre $(0, T)$ com $x(t) \rightarrow x_0$ em X quando $t \rightarrow 0^+$.

Do teorema 2.10, é claro que $x(t) = e^{-At}x_0$ é uma solução de (3.1.1); esta é a única solução.

Agora consideremos a equação linear não homogênea

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + Ax = f(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Definição 3.2. Seja I um intervalo. Uma função $f : I \rightarrow X$ é Hölder contínua com expoente θ , $0 < \theta < 1$ sobre I se existe uma constante L tal que

$$\|f(t) - f(s)\| \leq L|t - s|^\theta \quad \text{para } s, t \in I.$$

É localmente Hölder contínua se todo $t \in I$ tem uma vizinhança na qual f é Hölder contínua.

Lema 3.1. Seja $f : (0, T) \rightarrow X$ localmente Hölder contínua com $\int_0^\rho \|f(s)\| ds < \infty$ para algum $\rho > 0$. Para $0 \leq t < T$, defina

$$F(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds.$$

Então $F(\cdot)$ é contínua sobre $[0, T)$, continuamente diferenciável sobre $(0, T)$, com $F(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$, e $dF(t)/dt + AF(t) = f(t)$ sobre $0 < t < T$, $F(t) \rightarrow 0$ em X quando $t \rightarrow 0^+$.

Demonstração: Ver [16, páginas 50-51] . ■

Definição 3.3. Uma função $u : [0, T) \rightarrow X$ é uma *solução forte* de (3.1.2) em $[0, T)$ se u é contínua em $[0, T)$, continuamente diferenciável em $(0, T)$, $u(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$ e (3.1.2) é satisfeita sobre $(0, T)$ com $x(t) \rightarrow x_0$ em X quando $t \rightarrow 0^+$.

Teorema 3.1. Suponha que A é um operador setorial em X , $x_0 \in X$, $f : (0, T) \rightarrow X$ é localmente Hölder contínua e $\int_0^p \|f(t)\| dt < \infty$ para algum $p > 0$; então existe uma única solução forte $x(\cdot)$ de (3.1.2), a saber

$$x(t) = e^{-At}x_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds.$$

3.2 O Problema Não Linear de Cauchy

Agora consideremos a equação não linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + Ax = f(t, x), & t > t_0 \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.2.3)$$

onde assumiremos que A é um operador setorial de modo que a potência fracionária de $A_1 = A + aI$ estar bem definida, e o espaço $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ com a norma do gráfico $\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|$ é definida para $\alpha \geq 0$. Assumiremos que f aplica algum conjunto aberto U em $\mathbb{R} \times X^\alpha$ em X , para algum α em $0 \leq \alpha < 1$, e f é localmente Hölder contínua em t e localmente Lipschitz em x sobre U . Mais precisamente, se $(t_1, x_1) \in U$, existe uma vizinhança $V \subset U$ de (t_1, x_1) tal que para $(t, x) \in V, (s, y) \in V$,

$$\|f(t, x) - f(s, y)\| \leq L(|t - s|^\theta + \|x - y\|_\alpha),$$

para alguma constante $L > 0$, $\theta > 0$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\operatorname{Re} \sigma(A) > \delta > 0$, para algum $\delta > 0$. Caso contrário consideremos $A_1 = A + aI$ e $f_1(t, x) = f(t, x) + ax$, de modo que em 3.2.3 teríamos $\frac{dx}{dt} + A_1x = f_1(t, x)$.

Definição 3.4. Uma *solução forte* do problema de Cauchy em (t_0, t_1) é uma função contínua $x : [t_0, t_1) \rightarrow X^\alpha$ tal que $x(t_0) = x_0$ e em (t_0, t_1) temos $(t, x(t)) \in U$, $x(t) \in D(A)$, $\frac{dx}{dt}(t)$ existe, $t \rightarrow f(t, x(t))$ é localmente Hölder contínua, e $\int_{t_0}^{t_0+p} \|f(t, x(t))\| dt < \infty$ para algum $p > 0$, e a equação diferencial (3.2.3) é satisfeita em (t_0, t_1) .

Lema 3.2. Se x é uma solução de 3.2.3 em (t_0, t_1) , então

$$x(t) = e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s, x(s))ds. \quad (3.2.4)$$

Reciprocamente, se x é uma função contínua de (t_0, t_1) em X^α , e $\int_{t_0}^{t_0+p} \|f(s, x(s))\| ds < \infty$ para algum $p > 0$, e se a equação integral (3.2.4) é verdadeira para $t < t_0 < t_1$, então $x(\cdot)$ é uma solução da equação diferencial (3.2.3) em (t_0, t_1) .

Demonstração: A primeira alegação é imediata da definição da solução e o teorema 3.1. Suponha que x é uma solução da equação integral 3.2.4 e $x \in C((t_0, t_1); X^\alpha)$. Primeiro provaremos que x é localmente Hölder contínua de (t_0, t_1) em X^α . Se $t_0 < t < t+h < t_1$, então

$$\begin{aligned} x(t+h) - x(t) &= (e^{-Ah} - I)e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t (e^{-Ah} - I)e^{-A(t-s)}f(s, x(s))ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)}f(s, x(s))ds. \end{aligned}$$

Agora se $0 < \alpha < \alpha + \delta < 1$, então pelo teorema 2.13, para qualquer $z \in X$,

$$\begin{aligned} \|(e^{-Ah} - I)e^{-A(t-s)}z\|_\alpha &= \|(e^{-Ah} - I)A_1^{-\delta}A_1^{\alpha+\delta}e^{-A(t-s)}z\| \leq \frac{1}{\delta}C_{1-\delta}h^\delta \|A_1^{\alpha+\delta}e^{-A(t-s)}z\| \\ \|(e^{-Ah} - I)e^{-A(t-s)}z\|_\alpha &\leq \frac{1}{\delta}C_{1-\delta}h^\delta C_{\alpha+\delta}(t-s)^{-(\alpha+\delta)}e^{a(t-s)}\|z\|. \end{aligned}$$

Consequentemente para $t \in [t'_0, t'_1] \subset (t_0, t_1)$

$$\begin{aligned} \|x(t+h) - x(t)\|_\alpha &\leq \frac{1}{\delta}C_{1-\delta}h^\delta C_{\alpha+\delta}(t-t_0)^{-(\alpha+\delta)}e^{a(t-t_0)}\|x_0\| \\ &\quad + \frac{1}{\delta}C_{1-\delta}h^\delta C_{\alpha+\delta}(t-s)^{-(\alpha+\delta)}e^{a(t-s)} \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\|ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} C_\alpha(t+h-s)^{-\alpha}e^{a(t+h-s)}\|f(s, x(s))\|ds. \quad (3.2.5) \\ \|x(t+h) - x(t)\|_\alpha &\leq \text{constante } h^\delta. \end{aligned}$$

Segue-se que $t \rightarrow f(t, x(t))$ é localmente Hölder contínua em (t_0, t_1) , pelo teorema 3.1 x resolve a equação linear

$$\frac{dy}{dt} + Ay = f(t, x(t)) \quad \text{em} \quad t_0 < t < t_1, \quad y(t_0) = x_0$$

consequentemente x também é uma solução de 3.2.3 em (t_0, t_1) . ■

Teorema 3.2. Assuma que A é um operador setorial, $0 \leq \alpha < 1$, $f : U \rightarrow X$, U um subconjunto de $\mathbb{R} \times X^\alpha$, $f(t, x)$ localmente contínua Hölder em t , localmente Lipschitziana em x ; então para qualquer $(t_0, x_0) \in U$ existirá $T = T(t_0, x_0)$ tal que 3.2.3 possui uma única solução x em $(t_0, t_0 + T)$ com valor inicial $x(t_0) = x_0$.

Demonstração: Veja [16, páginas 54-55].

Teorema 3.3. Assuma A , f como no teorema 3.2 acima, e assumo que para todo conjunto fechado limitado $B \subset U$, a imagem $f(B)$ é limitada em X . Se x é uma solução de (3.2.3) em (t_0, t_1) e t_1 é maximal, de modo que não existe solução de (3.2.3) em (t_0, t_2) se $t_2 > t_1$, então ou $t_1 = \infty$ ou existe uma sequência $t_n \rightarrow t_1^-$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que $(t_n, x(t_n)) \rightarrow \partial U$. (se U é ilimitado, o ponto no infinito é incluído em ∂U .)

O próximo teorema garante a continuidade das soluções com relação as condições iniciais.

Teorema 3.4. *Suponha que A é um operador setorial. Seja $f(t, x)$ uma função definida sobre um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ (algum α em $[0, 1)$) em X , localmente Lipschitz em x , localmente Holder contínua em t . Também assuma $\|x_n - x_0\|_\alpha \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ com $(t_0, x_n) \in U$. Sejam $\phi_n(t)$ as soluções maximalmente definidas de*

$$\frac{d\phi_n}{dt} + A\phi_n = f(t, \phi_n), \quad t > t_0$$

$$\phi_n(t_0) = x_n,$$

a qual existe em $(t_0, t_0 + T_n)$. Então $T_0 \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} T_n$ e $\|\phi_n(t) - \phi_0(t)\|_\alpha \rightarrow 0$ uniformemente em subintervalos compacto de $[t_0, t_0 + T_0)$.

Demonstração: Um caso particular do [16, teorema (3.4.1)]. ■

Extensão de Friedrichs e o Operador Laplaciano

Neste capítulo vamos determinar um operador auto-adjunto densamente definido pela extensão de Friedrichs do operador Laplaciano com as condições de fronteira de Neumann, definido em um domínio denso de um espaço de Hilbert, de tal modo que o problema fique bem posto. Veremos alguns conceitos básicos sobre operadores não-limitados, que podem ser vistos em Kreyszig [21].

4.1 Operador Linear Não-Limitado em Espaço de Hilbert

Teorema 4.1 (Hellinger-Toeplitz). *Se um operador linear T é definido em todo espaço de Hilbert complexo H e satisfaz $(Tx, y) = (x, Ty)$ para todo $x, y \in H$, então T é limitado.*

O teorema mostra que um operador não-limitado T satisfazendo

$$(Tx, y) = (x, Ty)$$

não pode ser definido em todo H .

No caso limitado, o operador adjunto-Hilbert T^* é definido por

$$(Tx, y) = (x, T^*y).$$

T^* existe sobre todo H e é um operador linear limitado com norma

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

No caso geral podemos usar

$$(Tx, y) = (x, y^*), \quad y^* = T^*y.$$

Claramente T^* será definido para todo $y \in H$ para os quais existe y^* tal que

$$(Tx, y) = (x, y^*), \quad y^* = T^*y,$$

é válido para todo $x \in D(T)$, ou seja: $y \in D(T^*)$ se e somente se,

$$x \mapsto (Tx, y)$$

é um funcional linear limitado sobre $D(T)$.

Para cada y no domínio $D(T^*)$ de T^* , o correspondente $y^* = T^*y$ deve ser único. Isto é verdade se, somente se T é densamente definido em H [21, página 527].

Definição 4.1 (Operador adjunto-Hilbert). Seja $T : D(T) \rightarrow H$ um operador linear densamente definido em um espaço de Hilbert H . Então o operador adjunto $T^* : D(T^*) \rightarrow H$ de T é definido como segue. O domínio $\mathcal{D}(T^*)$ de T^* consiste de todos os $y \in H$ tal que existe um $y^* \in H$ satisfazendo

$$(Tx, y) = (x, y^*)$$

para todo $x \in D(T)$. Para cada tal $y \in D(T^*)$ o operador adjunto T^* é definido em termo de y^* por

$$y^* = T^*y.$$

Definição 4.2 (Operador linear simétrico). Seja $T : D(T) \rightarrow H$ um operador linear densamente definido em um espaço de Hilbert H . Então T é chamado um *operador linear simétrico* se para todo $x, y \in D(T)$,

$$(Tx, y) = (x, Ty).$$

Por definição, $S \subset T$ significa que o operador T é uma extensão do operador S ; Assim

$$D(S) \subset D(T) \quad \text{e} \quad S = T|_{D(S)}.$$

Lema 4.1 (Operador simétrico). *Um operador linear densamente definido em um espaço de Hilbert H é simétrico se e somente se*

$$T \subset T^*.$$

Definição 4.3 (Operador linear auto-adjunto). Seja $T : D(T) \rightarrow H$ um operador linear densamente definido em um espaço de Hilbert H . Então T é chamado um *operador linear auto-adjunto* se

$$T = T^*.$$

Teorema 4.2. *O operador adjunto-Hilbert T^* definido em 4.1 é fechado.*

4.2 Forma Positiva Fechada

Seja T um operador simétrico densamente definido no espaço de Hilbert H (com produto escalar (ξ, η) , norma $|\xi|$) com dual H' . Se para todo $\xi \in D(T)$, $(T\xi, \xi) \geq 0$, dizemos que T é um operador não-negativo.

Definição 4.4. Seja H um espaço de Hilbert. Uma *forma positiva fechada* em H é uma aplicação

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que

- (i) a é um produto escalar no espaço vetorial V .

- (ii) V é um espaço de Hilbert com respeito a a (com $a(\xi, \eta) = ((\xi, \eta))$ e norma $\|\eta\|$).
- (iii) V é um subespaço denso em H .
- (iv) a é coercivo, isto é, existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(\eta, \eta) > \alpha \|\eta\|^2, \quad \eta \in V.$$

Identificando H e seu dual H' , pelo teorema de representação de Riesz, obtemos

$$V \subset H \equiv H' \subset V',$$

onde cada espaço é denso no seguinte, sendo as inclusões contínuas.

Seja a uma forma positiva fechada em H . Definimos um operador A da seguinte forma:

$$D(A) = \{\eta \in V \mid \xi \rightarrow a(\eta, \xi) \text{ é um funcional antilinear representável por um vetor } \phi \in H\}.$$

Se $\eta \in D(A)$, $A\eta$ é o único vetor em H tal que

$$a(\eta, \xi) = \langle A\eta, \xi \rangle = (A\eta, \xi) \quad \text{para todo} \quad \xi \in V,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto de dualidade entre V' e V . A unicidade de $A\eta$ segue da densidade de V em H .

Proposição 4.1. *Se a é uma forma positiva fechada, então A é um operador auto-adjunto e $A \geq \alpha I$, isto é, $(A\eta, \eta) \geq \alpha \|\eta\|^2$, para todo $\eta \in D(A)$.*

Demonstração: ver [34, páginas 136-37]. ■

4.3 Extensão de Friedrichs do Operador Laplaciano

Seja T o operador linear definido por

$$T : D(T) \subset L^2(-\pi/2, \pi/2) \rightarrow L^2(-\pi/2, \pi/2)$$

$$T\phi(x) = -\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

com domínio

$$D(T) = \{\phi \in C^2[-\pi/2, \pi/2] \mid \phi'(-\pi/2) = \phi'(\pi/2) = 0\}.$$

Mostraremos que T é um operador simétrico densamente definido não-negativo e em seguida associaremos uma forma positiva fechada.

$D(T)$ contém o subespaço das funções suaves com suporte compacto $C_0^\infty(-\pi/2, \pi/2)$, logo o domínio de T é denso em $L^2(-\pi/2, \pi/2)$.

Sejam $\xi, \eta \in D(T)$, temos

$$\begin{aligned}(T\xi, \eta) &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \xi''(x) \eta(x) dx \\(T\xi, \eta) &= -\eta(x) \xi'(x) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \xi'(x) \eta'(x) dx \\(T\xi, \eta) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\xi'(x)) \eta'(x) dx = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \xi(x) \eta''(x) dx = (\xi, T\eta)\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}(T\xi, \xi) &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \xi''(x) \xi(x) dx \\(T\xi, \xi) &= -\xi(x) \xi'(x) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\xi'(x))^2 dx \\(T\xi, \xi) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\xi'(x))^2 dx \geq 0.\end{aligned}$$

Portanto T é um operador simétrico densamente definido não-negativo no espaço de Hilbert $H = L^2(-\pi/2, \pi/2)$.

Agora associaremos uma forma positiva fechada ao operador T . Consideremos a forma bilinear dada por

$$a(\xi, \eta) = (T\xi, \eta) + (\xi, \eta), \quad \xi, \eta \in D(T),$$

integrando por partes, temos

$$a(\xi, \eta) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\xi' \eta' + \xi \eta) dx.$$

Como $V = H^1(-\pi/2, \pi/2)$ é um espaço de Hilbert com respeito ao produto escalar

$$a(\xi, \eta) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\xi' \eta' + \xi \eta) dx,$$

com $D(T) \subset V$ (o completamento de $D(T)$ com respeito a a), então a é uma forma positiva fechada definida em $V \subset H$. As propriedades (i), (ii) e (iii) são evidentes. A propriedade (iv) segue do fato que

$$a(\xi, \xi) = (\xi', \xi') + (\xi, \xi) \geq (\xi, \xi) = |\xi|^2, \quad \xi \in H^1\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Agora vamos determinar um operador A_T auto-adjunto densamente definido pela extensão de Friedrichs do operador T .

Seja A_T o operador associado a forma positiva fechada a definida acima. Desta forma para

$$\eta \in D(A_T) = \{\eta \in V = H^1(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \mid A_T \eta \in H = L^2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\},$$

temos

$$\begin{aligned} a(\eta, \xi) &= (A_T \eta, \xi) \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\eta' \xi' + \eta \xi) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A_T \eta \xi dx \quad \forall \xi \in H^1(-\pi/2, \pi/2). \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Escrevendo

$$a(\eta, \xi) = (\phi, \xi)$$

com $\eta \in D(A_T)$, $A_T \eta = \phi$ e $\xi \in \mathcal{D}(-\pi/2, \pi/2)$, espaço das funções testes, deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\eta' \xi' + \eta \xi) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \phi \xi dx \\ \langle \eta', \xi' \rangle + \langle \eta, \xi \rangle &= \langle \phi, \xi \rangle \\ -\langle \eta'', \xi \rangle + \langle \eta, \xi \rangle &= \langle \phi, \xi \rangle \\ -\eta'' + \eta &= \phi \end{aligned}$$

é satisfeita no sentido de distribuições, consequentemente

$$\eta'' = \eta - \phi \in H = L^2(-\pi/2, \pi/2),$$

isto é, $\eta \in H^2(-\pi/2, \pi/2) \subset C^1([-\pi/2, \pi/2])$ e também

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\eta'' + \eta - \phi) \xi dx + \eta'(\pi/2) \xi(\pi/2) - \eta'(-\pi/2) \xi(-\pi/2) = 0, \quad \forall \xi \in H^1(-\pi/2, \pi/2). \quad (4.3.2)$$

Em 4.3.2 escolhendo primeiro $\xi \in H_0^1(-\pi/2, \pi/2)$, obtemos $-\eta'' + \eta = \phi$ em quase toda parte. Voltando a 4.3.2

$$\eta'(\pi/2) \xi(\pi/2) - \eta'(-\pi/2) \xi(-\pi/2) = 0 \quad \forall \xi \in H^1(-\pi/2, \pi/2).$$

Como $\xi(-\pi/2)$ e $\xi(\pi/2)$ são arbitrários, segue que $\eta'(-\pi/2) = 0$ e $\eta'(\pi/2) = 0$. Portanto

$$D(A_T) = \{\eta \in H^2(-\pi/2, \pi/2) \mid \eta'(-\pi/2) = \eta'(\pi/2) = 0\}.$$

Proposição 4.2. *Seja T o operador não negativo definido acima. Então $A = A_T - I = -\frac{d^2}{dx^2}$ com domínio*

$$D(A) = \{\eta \in H^2(-\pi/2, \pi/2) \mid \eta'(-\frac{\pi}{2}) = \eta'(\frac{\pi}{2}) = 0\}.$$

é um operador auto-adjunto não negativo que estende T .

Demonstração: Pela proposição 4.1 A_T é auto-adjunto $\geq I$. Logo, $A_T - I$ é auto-adjunto ≥ 0 . Se $\eta \in D(T)$, então para todo $\xi \in D(T)$

$$([T + I]\eta, \xi) = a(\eta, \xi) = (A_T \eta, \xi).$$

Por continuidade e densidade, esta identidade é válida para todo $\xi \in V = H^1(-\pi/2, \pi/2)$. Portanto, $\eta \in D(A_T)$ e

$$A_T \eta = (T + I)\eta.$$

■

O operador $A = A_T - I$ é chamado a *extensão de Friedrichs* de T .

4.4 Autovalores e Autofunções do Operador Laplaciano

Seja A a extensão de Friedrichs do operador Laplaciano como definido na proposição 4.2. Quais os valores λ que conduzem a soluções ϕ do problema

$$A\phi = \lambda\phi \tag{4.4.3}$$

$$\phi_x(-\pi/2) = \phi_x(\pi/2) = 0. \tag{4.4.4}$$

Estamos interessados nas soluções ϕ não identicamente nulas. Há três possibilidades para λ .

Se $\lambda = 0$, a solução geral de (4.4.3-4.4.4) é da forma

$$\phi(x) = c.$$

Se $\lambda = -\sigma^2 < 0$ a solução geral de 4.4.3 é

$$\phi(x) = c_1 e^{\sigma x} + c_2 e^{-\sigma x}.$$

Portanto, para tal $\phi(x)$ satisfazer as condições de fronteira de Neumann (4.4.4) é necessário que $c_1 = c_2 = 0$, isso implica que $\phi \equiv 0$.

Se $\lambda = \sigma^2 > 0$, a solução geral de 4.4.3 é da forma

$$\phi(x) = c_1 \cos \sigma x + c_2 \sin \sigma x.$$

De fato,

$$\phi_x = \sigma(-c_1 \sin \sigma x + c_2 \cos \sigma x)$$

$$\phi_{xx} = -\sigma^2(c_1 \cos \sigma x + c_2 \sin \sigma x)$$

$$A\phi = -\phi_{xx} = \sigma^2 \phi.$$

Para que uma tal ϕ satisfaça 4.4.4, devemos ter

$$\begin{cases} \phi_x(-\pi/2) = 0 \\ \phi_x(\pi/2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma(c_1 \sin \sigma \frac{\pi}{2} + c_2 \cos \sigma \frac{\pi}{2}) = 0 \\ \sigma(-c_1 \sin \sigma \frac{\pi}{2} + c_2 \cos \sigma \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \sin \sigma \frac{\pi}{2} = 0 \\ c_2 \cos \sigma \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

$$c_1 \neq 0 \Rightarrow \sin \sigma \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \sigma = 2n \Rightarrow c_2 = 0$$

$$c_2 \neq 0 \Rightarrow \cos \sigma \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \sigma = 2n - 1 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Portanto o espectro pontual $\sigma_p(A)$ de A consiste dos autovalores

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{2n-1} = (2n-1)^2 \quad \text{e} \quad \lambda_{2n} = (2n)^2,$$

com autofunções correspondentes

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \phi_{2n-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2n-1)x \quad \text{e} \quad \phi_{2n}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2nx,$$

$n = 1, 2, 3, \dots$. As autofunções ϕ_r de A formam um conjunto ortonormal, isto é,

$$(\phi_r, \phi_s) = \delta_{rs} \quad \text{para} \quad r, s = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

onde $\delta_{rs} = 0$ se $r \neq s$ e $\delta_{rs} = 1$ se $r = s$.

4.5 Funções do Operador Laplaciano

Para o operador A como definido acima temos

$$e^{-At} \psi = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} E_n(\psi),$$

$$A^\alpha \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^\alpha E_n(\psi),$$

$$(\lambda I - A)^{-1} \psi = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_n)^{-1} E_n(\psi) \quad \text{se} \quad \lambda \neq \lambda_n, \quad \text{para todo} \quad n,$$

onde E_n é a projeção sobre a n -ésima autofunção,

$$E_n \psi(x) = \phi_n(x) (\phi, \psi).$$

Observamos que o operador exponencial e^{-At} e o operador resolvente $R_\lambda(A)$ de A são limites uniformes de operadores compactos (posto finito), portanto compactos. Assim, concluímos que $-A$ é gerador infinitesimal de um semigrupo compacto e o espectro de A é igual ao seu espectro pontual $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.

Usando o fato que

$$\| \psi \|^2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n, \psi)^2$$

segue-se facilmente que para qualquer $\alpha \geq 0$

$$D(A^\alpha) = \{\psi \in L^2(-\pi/2, \pi/2) : \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{2\alpha} (\phi_n, \psi)^2 < \infty\}$$

e que

$$\|A^\alpha e^{-At} \phi\| \leq \max_{n \geq 1} \{\lambda_n^\alpha e^{-\lambda_n t}\} \|\phi\| \leq b_\alpha(t) \|\phi\|,$$

$$b_\alpha(t) = \begin{cases} (te/\alpha)^{-\alpha} & \text{para } 0 < t \leq \alpha/\lambda_1 \\ \lambda_1^\alpha e^{-\lambda_1 t} & \text{para } t \geq \alpha/\lambda_1. \end{cases}$$

De fato, seja $f(\lambda) = \lambda^\alpha e^{-\lambda t}$, temos

$$f'(\lambda) = \lambda^\alpha e^{-\lambda t} (\alpha \lambda^{-1} - t),$$

como $\alpha/\lambda_1 \geq \alpha/\lambda_n$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$, então para $t \geq \alpha/\lambda_1$, f é decrescente. Portanto

$$\lambda_n^\alpha e^{-\lambda_n t} \leq \lambda_1^\alpha e^{-\lambda_1 t}.$$

Se $t \leq \alpha/\lambda_1$, existe um N tal que

$$\frac{\alpha}{\lambda_{N+1}} < \frac{\alpha}{\lambda_N} \leq t \leq \frac{\alpha}{\lambda_{N-1}} < \dots < \frac{\alpha}{\lambda_1},$$

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_{N-1} < \frac{\alpha}{t} \leq \lambda_N < \dots$$

consequentemente f é decrescente para $\lambda_n \geq \frac{\alpha}{t}$ e crescente para $\lambda_n < \frac{\alpha}{t}$. Assim,

$$f(\lambda_n) \leq f(\alpha/t)$$

$$\lambda_n^\alpha e^{-\lambda_n t} \leq (te/\alpha)^{-\alpha},$$

para todo $n = 1, 2, 3, \dots$

Deste modo $R(e^{-At}) \subset D(A^\alpha)$ para todo $\alpha \geq 0$, sempre que $t > 0$, e

$$\|A^\alpha e^{-At}\| = O(t^{-\alpha}) \quad \text{quando } t \rightarrow 0.$$

Modelo de Retroalimentação de Clima-Vegetação

Estudaremos a existência e unicidade de soluções para o problema de valor inicial associado ao sistema de equações diferenciais parciais do modelo retroalimentação clima-vegetação (Modelo Daisyworld) unidimensional, como descrito na introdução deste trabalho.

5.1 Formulação Abstrata

O modelo retroalimentação clima-vegetação é dado pelo sistema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = uf(u, v, w) = u \left[\left(1 - \delta (C - 5(u - v - 1) - w)^2 \right) (1 - u - v) - \gamma \right], \quad (5.1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = vg(u, v, w) = v \left[\left(1 - \delta (C - 5(u - v + 1) - w)^2 \right) (1 - u - v) - \gamma \right], \quad (5.1.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = h(u, v, w) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = (2 - u + v)R - \sigma w^4 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5.1.3)$$

para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e com condições de fronteiras de Neumann $w_x = 0$ em $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

Nas equações (5.1.1)-(5.1.3), $u = u(x, t)$ e $v = v(x, t)$ representam as populações, em termos de frações de áreas ocupadas, de duas plantas hipotéticas (margaridas) e $w = w(x, t)$ representa a temperatura superficial. R , σ , C , δ , e γ são constantes. $R \sim 200 \text{ W/m}^2$ determina a radiação solar sobre a superfície, $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ é a constante de Stefan-Boltzmann e é usada para determinar a saída de ondas longas de radiação na superfície, $C = 295,5 \text{ K}$ é a temperatura ideal para crescimento das margaridas, $\delta = 0,003265 = \frac{1}{17,5^2}$ é a taxa intrínseca de crescimento e $\gamma = 0,3$ a taxa de mortalidade. Estes valores dos parâmetros são os mesmos usados no modelo Daisyworld original [35].

Expandindo o lado direito do sistema, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = (1 - 25\delta - 10C\delta - C^2\delta - \gamma)u + (-1 + 75\delta + 20C\delta + C^2\delta)u^2 + \\ \quad (-75\delta - 10C\delta)u^3 + 25\delta u^4 + (-1 - 25\delta + C^2\delta)uv + \\ \quad 50\delta u^2v - 25\delta u^3v + (25\delta + 10C\delta)uv^2 - 25\delta u^2v^2 + 25\delta uv^3 + \\ \quad 10\delta uw + 2C\delta uw - \delta(20 + 2C)u^2w + 10\delta u^3w - 2C\delta uvw \\ \quad - 10\delta uv^2w - \delta uw^2 + \delta u^2w^2 + \delta uvw^2, \\ \\ \frac{\partial v}{\partial t} = (1 - 25\delta + 10C\delta - C^2\delta - \gamma)v + (-1 + 75\delta - 20C\delta + C^2\delta)v^2 + \\ \quad (-75\delta + 10C\delta)v^3 + 25\delta v^4 + (-1 - 25\delta + C^2\delta)uv + \\ \quad (25\delta - 10C\delta)u^2v + 25\delta u^3v + 50\delta uv^2 - 25\delta u^2v^2 + \\ \quad - 25\delta uv^3 - 10\delta vw + 2C\delta vw - 2C\delta uvw + 10\delta u^2vw + \\ \quad \delta(20 - 2C)v^2w - 10\delta v^3w - \delta vw^2 + \delta uvw^2 + \delta v^2w^2, \\ \\ \frac{\partial w}{\partial t} = (2 - u + v)R - \sigma w^4 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{array} \right. \quad (5.1.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -294,13u + 303,642u^2 - 9,89625u^3 + 25\delta u^4 + \\ \quad 284,019uv + 601\delta uw + 50\delta u^2v - 25\delta u^3v + 2980\delta uv^2 + \\ \quad - 25\delta u^2v^2 + 25\delta uv^3 - 611\delta u^2w + \\ \quad 10\delta u^3w - 591\delta uvw - 10\delta uv^2w - \delta uw^2 + \delta u^2w^2 + \delta uvw^2, \\ \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -274,834v + 265,259v^2 + 9,4032v^3 + 25\delta v^4 + \\ \quad 284,019uv + 581\delta vw - 2930\delta u^2v + 25\delta u^3v + \\ \quad 50\delta uv^2 - 25\delta u^2v^2 - 25\delta uv^3 - 591\delta uvw + 10\delta u^2vw + \\ \quad 571\delta v^2w - 10\delta v^3w - \delta vw^2 + \delta uvw^2 + \delta v^2w^2, \\ \\ \frac{\partial w}{\partial t} = (2 - u + v)R - \sigma w^4 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{array} \right. \quad (5.1.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -294,13u + F(u, v, w), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -274,834v + G(u, v, w), \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H(u, v, w). \end{array} \right. \quad (5.1.6)$$

Podemos escrever o sistema acima junto com as condições de fronteiras de Neumann $w_x = 0$ em $x = \pm \frac{\pi}{2}$ como uma equação diferencial funcional ordinária abstrata

$$\frac{dy}{dt} + By = \mathcal{F}(y), \quad (5.1.6)$$

sobre o espaço de Banach $X = L^\infty(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times L^\infty(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times L^2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ com norma

$$\|(u, v, w)\| = \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty} + \|w\|_{L^2},$$

onde $y = (u, v, w)$, $\mathcal{F}(y) = (F(y), G(y), H(y))$, B é o operador linear definido por

$$B(u, v, w) = (a \times b \times A)(u, v, w) = (au, bv, Aw)$$

com domínio $D(B) = L^\infty(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times L^\infty(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times D(A)$,

$$a = 294, 13, \quad b = 274, 834, \quad A = -\frac{d^2}{dx^2},$$

$$D(A) = \{\phi \in H^2(-\pi/2, \pi/2) \mid \phi'(-\pi/2) = 0, \phi'(\pi/2) = 0\}.$$

5.2 Existência e Unicidade de Soluções Locais

Lema 5.1. O operador $A : D(A) \subset L^2(-\pi/2, \pi/2) \rightarrow L^2(-\pi/2, \pi/2)$

$$A\phi(x) = -\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

com

$$D(A) = \{\phi \in H^2(-\pi/2, \pi/2) \mid \phi'(-\pi/2) = 0, \phi'(\pi/2) = 0\}$$

é um operador setorial.

Demonstração: Pela proposição 4.2 (Teorema de Friedrichs) A é um operador auto-adjunto não negativo, portanto um operador linear fechado densamente definido. Como o operador resolvente $R_\lambda(A)$ de A é compacto, então $\sigma(A) = \sigma_p(A)$, que está contido nos reais não negativo, logo para θ em $(0, \frac{\pi}{2})$ o setor

$$S_{0,\theta} = \{\lambda \mid \theta \leq |\arg \lambda| \leq \pi, \lambda \neq 0\}$$

está contido no conjunto resolvente $\rho(A)$ de A .

Seja $\lambda \in S_{0,\theta}$

$$(\lambda I - A)^{-1}\psi = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_n)^{-1} E_n(\psi) \text{ se } \lambda \neq \lambda_n, \quad \text{para todo } n.$$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\psi\| \leq \max_n \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} E_n(\psi) \right\|$$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\psi\| \leq \max_n \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|} \|\psi\|$$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \max_n \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|}.$$

Para $\theta \leq |\arg \lambda| < \pi/2$, temos

$$|\lambda - \lambda_n| \geq |\operatorname{Im} \lambda| = |\lambda| |\sin(\arg \lambda)| \geq |\lambda| \sin \theta$$

e para $\pi/2 \leq |\arg \lambda| \leq \pi$,

$$|\lambda - \lambda_n| \geq |\lambda| \geq |\lambda| \sin \theta$$

para todo n . Portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|} &\leq \frac{1}{|\lambda| \sin \theta} = \frac{\csc \theta}{|\lambda|} \\ \max_n \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|} &\leq \frac{\csc \theta}{|\lambda|} \\ \|(\lambda I - A)^{-1}\| &\leq \max_n \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|} \leq \frac{\csc \theta}{|\lambda|} \\ \|R_\lambda\| &\leq \frac{\csc \theta}{|\lambda|}. \end{aligned}$$

■

Lema 5.2. Se A é um operador linear limitado em um espaço de Banach X , então A é setorial.

Demonstração: Como A é limitado e $D(A) = X$ temos que A é fechado densamente definido.

Seja

$$\lambda \in S_{a,\theta} = \{\lambda \mid \theta \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}$$

para θ em $(0, \frac{\pi}{2})$ e $a = -\frac{\|A\|}{\sin \theta}$.

Se $\operatorname{Re} \lambda = a$ temos que $|\lambda| > \|A\|$, pelo teorema 2.9, λ está no conjunto resolvente de A . Suponhamos que $\operatorname{Re} \lambda \neq a$. Por simetria, estudaremos apenas o caso positivo. Temos

$$\theta \leq \arg(\lambda - a) = \arctan \frac{\operatorname{Im}(\lambda - a)}{\operatorname{Re}(\lambda - a)} = \arctan \frac{\operatorname{Im} \lambda}{\operatorname{Re}(\lambda - a)}$$

$$\tan \theta \leq \frac{\operatorname{Im} \lambda}{\operatorname{Re}(\lambda - a)} < \frac{\operatorname{Im} \lambda}{\operatorname{Re} \lambda + \frac{\|A\|}{\sin \theta}}$$

$$\tan \theta \operatorname{Re} \lambda + \frac{\|A\|}{\cos \theta} < \operatorname{Im} \lambda$$

Substituindo, a desigualdade acima, em $|\lambda|^2 = \operatorname{Re}^2 \lambda + \operatorname{Im}^2 \lambda$ temos que

$$|\lambda|^2 > \operatorname{Re}^2 \lambda + \tan^2 \theta \operatorname{Re}^2 \lambda + 2\|A\| \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \operatorname{Re} \lambda + \frac{\|A\|^2}{\cos^2 \theta}$$

$$|\lambda|^2 > \operatorname{Re}^2 \lambda (1 + \tan^2 \theta) + 2\|A\| \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \operatorname{Re} \lambda + \frac{\|A\|^2}{\cos^2 \theta}.$$

Estudando o valor mínimo y_v da equação do segundo grau em $\|A\|$, obtemos

$$\Delta = 4\|A\|^2 \frac{\tan^2 \theta}{\cos^2 \theta} - 4\|A\|^2 \frac{\tan^2 \theta}{\cos^2 \theta} - 4 \frac{\|A\|^2}{\cos^2 \theta} = -4 \frac{\|A\|^2}{\cos^2 \theta}$$

$$y_v = 4 \frac{\|A\|^2}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{4 \sec^2 \theta} = \|A\|^2.$$

Assim, $|\lambda| > \|A\|$. Portanto, pelo teorema 2.9, $S_{a,\theta}$ está contido no conjunto resolvente de A .

Agora mostraremos, para $\lambda \in S_{a,\theta}$, o decaimento do operador resolvente $R_\lambda(A)$. Temos

$$\left\| \frac{1}{\lambda} A \right\| < 1,$$

pelo teorema 2.8, obtemos a representação

$$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} (I - \frac{1}{\lambda} A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} A \right)^j,$$

a série converge na norma do operador. Assim,

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{\lambda} A \right\|^j$$

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{(1 - \left\| \frac{1}{\lambda} A \right\|)} = \frac{M_1}{|\lambda|} \quad \text{com } M_1 \geq 1.$$

Mas,

$$|\lambda - a|^2 = |\operatorname{Re} \lambda - a|^2 + |\operatorname{Im} \lambda|^2 = |\operatorname{Re} \lambda|^2 - 2a \operatorname{Re} \lambda + a^2 + |\operatorname{Im} \lambda|^2$$

$$|\lambda - a|^2 = |\lambda|^2 - 2a \operatorname{Re} \lambda + a^2$$

escolhendo

$$-a = \frac{\|A\|}{\sin \theta} < \frac{|\lambda|}{\sin \theta}$$

$$|\lambda - a|^2 \leq |\lambda|^2 + 2 \frac{|\lambda|}{\sin \theta} \operatorname{Re} \lambda + \frac{|\lambda|^2}{\sin^2 \theta}$$

$$|\lambda - a|^2 \leq |\lambda|^2 + 2 \frac{|\lambda|^2}{\sin \theta} + \frac{|\lambda|^2}{\sin^2 \theta} = |\lambda|^2 \left(1 + \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \right)$$

$$|\lambda - a| \leq M_2 |\lambda| \quad \text{com } M_2 \geq 2$$

$$\frac{1}{|\lambda|} \leq \frac{M_2}{|\lambda - a|}$$

consequentemente

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \quad \text{para } M \geq 2.$$

Isto conclui que o operador linear limitado A é setorial. ■

Lema 5.3. Se A é setorial em X , B é setorial em Y , C é setorial em Z , então $A \times B \times C$, é setorial em $X \times Y \times Z$, onde $(A \times B \times C)(x, y) = (Ax, By, Cz)$ para $x \in D(A)$, $y \in D(B)$, $z \in D(C)$.

Lema 5.4. O operador linear $B : D(B) \subset X \rightarrow X$

$$B(u, v, w) = (a \times b \times A)(u, v, w) = (au, bv, Aw)$$

com domínio $D(B) = L^\infty(-\pi/2, \pi/2) \times L^\infty(-\pi/2, \pi/2) \times D(A)$ é um operador setorial em

$$X = L^\infty(-\pi/2, \pi/2) \times L^\infty(-\pi/2, \pi/2) \times L^2(-\pi/2, \pi/2).$$

Demonstração: Conforme os lemas (5.1-5.2-5.4). ■

Agora vamos determinar uma potência fracionária para o operador B . Observamos que a parte real do espectro de A é maior ou igual a zero, $\operatorname{Re} \sigma(A) \geq 0$. Escolhemos $A_1 = A + I$ de modo que $\operatorname{Re} \sigma(A_1) > 0$, definimos $B_1 = a \times b \times A_1$ e consequentemente $B_1^{1/2} = a^{1/2} \times b^{1/2} \times A_1^{1/2}$.

Como $[L^2(-\pi/2, \pi/2)]^{1/2} \equiv D(A_1^{1/2}) = H^1(-\pi/2, \pi/2)$ e

$$\|\phi\|_{1/2}^2 = \|A_1^{1/2}\phi\|^2 = (A_1^{1/2}\phi, A_1^{1/2}\phi) = (A_1\phi, \phi) = a(\phi, \phi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \phi'(x)^2 + \phi(x)^2 dx = \|\phi\|_{H^1}^2,$$

temos

$$X^{1/2} \equiv D(B_1^{1/2}) = L^\infty(-\pi/2, \pi/2) \times L^\infty(-\pi/2, \pi/2) \times H^1(-\pi/2, \pi/2),$$

com norma

$$\begin{aligned} \|(u, v, w)\|_{1/2} &= \|B_1^{1/2}(u, v, w)\| = \|(a^{1/2}u, b^{1/2}v, A_1^{1/2}w)\| \\ &= \|a^{1/2}u\|_{L^\infty} + \|b^{1/2}v\|_{L^\infty} + \|A_1^{1/2}w\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Usaremos a norma equivalente

$$\|(u, v, w)\|_{1/2} = \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty} + \|w\|_{1/2}.$$

Proposição 5.1. Seja U um subconjunto aberto de $X^{1/2} = D(B_1^{1/2})$, então a função

$$\mathcal{F} : U \subset X^{1/2} \rightarrow X,$$

$$\mathcal{F}(u, v, w) = (F(u, v, w), G(u, v, w), H(u, v, w))$$

da equação (5.1.6) é localmente Lipschitz e limitada em conjunto limitado.

Demonstração: Primeiro observamos que, para $\phi \in H^1(-\pi/2, \pi/2)$,

$$\phi(x) = \int_{-\pi/2}^x \phi'(\xi) d\xi,$$

de modo que ϕ é absolutamente contínua com

$$\sup_x |\phi(x)| \leq \sup_x \int_{-\pi/2}^x |\phi'(\xi)| d\xi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\phi'(\xi)| d\xi$$

pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \sup_x |\phi(x)| &\leq \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\phi'(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ \sup_x |\phi(x)| &\leq \sqrt{\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\phi'(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \\ \|\phi\|_{L^\infty} &\leq \sqrt{\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\phi'(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Consequentemente,

$$\|\phi\|_{L^\infty} \leq \sqrt{\pi} \|\phi\|_{H^1} = \sqrt{\pi} \|\phi\|_{1/2} \quad \text{para toda} \quad \phi \in H^1(-\pi/2, \pi/2), \quad (5.2.8)$$

conforme teorema 2.1. Para $\phi \in L^\infty(-\pi/2, \pi/2)$ temos

$$\|\phi\|_{L^2} \leq \sqrt{\pi} \|\phi\|_{L^\infty}. \quad (5.2.9)$$

Sejam $y_0 = (u_0, v_0, w_0) \in U$, $V \subset U$ uma vizinhança de $y_0 = (u_0, v_0, w_0)$, $y_1 = (u, v, w) \in V$ e $y_2 = (r, s, k) \in V$. Por definição

$$\|\mathcal{F}(y_1) - \mathcal{F}(y_2)\| = \|F(y_1) - F(y_2)\|_{L^\infty} + \|G(y_1) - G(y_2)\|_{L^\infty} + \|H(y_1) - H(y_2)\|_{L^2},$$

então devemos mostrar que

$$\begin{aligned} \|F(u, v, w) - F(r, s, k)\|_{L^\infty} &\leq L_1(\|u - r\|_{L^\infty} + \|v - s\|_{L^\infty} + \|w - k\|_{1/2}), \\ \|G(u, v, w) - G(r, s, k)\|_{L^\infty} &\leq L_2(\|u - r\|_{L^\infty} + \|v - s\|_{L^\infty} + \|w - k\|_{1/2}), \\ \|H(u, v, w) - H(r, s, k)\|_{L^2} &\leq L_3(\|u - r\|_{L^\infty} + \|v - s\|_{L^\infty} + \|w - k\|_{1/2}). \end{aligned}$$

Para $H(u, v, w) = (2 - u + v)R - \sigma w^4$, temos

$$\|H(u, v, w) - H(r, s, k)\|_{L^2} \leq R(\|r - u\|_{L^2} + \|v - k\|_{L^2}) + \sigma \|k^4 - w^4\|_{L^2}$$

$$\begin{aligned} \| H(u, v, w) - H(r, s, k) \|_{L^2} &\leq R(\| r - u \|_{L^2} + \| v - k \|_{L^2}) + \\ &+ \sigma \| (k - w)(k^3 + k^2w + kw^2 + w^3) \|_{L^2}, \end{aligned}$$

pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \| H(u, v, w) - H(r, s, k) \|_{L^2} &\leq R(\| r - u \|_{L^2} + \| v - k \|_{L^2}) + \\ &+ C\sigma(\| k \|_{L^\infty}^3 + \| w \|_{L^\infty}^3) \| k - w \|_{L^2} \end{aligned}$$

usando as desigualdades 5.2.8 e 5.2.9

$$\begin{aligned} \| H(u, v, w) - H(r, s, k) \|_{L^2} &\leq R\sqrt{\pi}(\| r - u \|_{L^\infty} + \| v - k \|_{L^\infty}) + \\ &+ C\pi\sigma(\| k \|_{L^\infty}^3 + \| w \|_{L^\infty}^3) \| k - w \|_{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| H(u, v, w) - H(r, s, k) \|_{L^2} &\leq R\sqrt{\pi}(\| r - u \|_{L^\infty} + \| v - k \|_{L^\infty}) + \\ &+ C\pi\sqrt{\pi^3}\sigma(\| k \|_{1/2}^3 + \| w \|_{1/2}^3) \| k - w \|_{1/2} \end{aligned}$$

$$\| H(u, v, w) - H(r, s, k) \|_{L^2} \leq L_3(\| r - u \|_{L^\infty} + \| v - k \|_{L^\infty} + \| k - w \|_{1/2}),$$

para alguma constante L_3 .

As funções $F(u, v, w)$ e $G(u, v, w)$ são polinomiais do tipo

$$F(u, v, w) = \sum_{2 \leq i+j+k \leq 4} a_{ijk} u^i v^j w^k, \quad G(u, v, w) = \sum_{2 \leq i+j+k \leq 4} b_{ijk} u^i v^j w^k.$$

Usando as fatorações

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + \dots + b^{n-1}),$$

$$ab - cd = a(b - d) + d(a - c),$$

$$abc - def = ab(c - f) + af(b - e) + ef(a - d),$$

as desigualdades $\| ab \|_{L^\infty} \leq \| a \|_{L^\infty} \| b \|_{L^\infty}$, triangular e 5.2.8, existem constantes L_1 e L_2 tais que

$$\| F(u, v, w) - F(r, s, k) \|_{L^\infty} \leq L_1(\| u - r \|_{L^\infty} + \| v - s \|_{L^\infty} + \| w - k \|_{1/2}),$$

$$\| G(u, v, w) - G(r, s, k) \|_{L^\infty} \leq L_2(\| u - r \|_{L^\infty} + \| v - s \|_{L^\infty} + \| w - k \|_{1/2}).$$

Com isso concluímos que

$$\| \mathcal{F}(u, v, w) - \mathcal{F}(r, s, k) \| \leq L(\| u - r \|_{L^\infty} + \| v - s \|_{L^\infty} + \| w - k \|_{1/2}),$$

$$\| \mathcal{F}(u, v, w) - \mathcal{F}(r, s, k) \| \leq L \| (u, v, w) - (r, s, k) \|_{1/2}$$

para alguma constante L .

Resta mostrar que $\mathcal{F}(y) = (F(y), G(y), H(y))$ é limitada em conjuntos limitados. Para a função H temos

$$\begin{aligned} \|H(u, v, w)\|_{L^2} &\leq R(2\sqrt{\pi} + \|u\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}) + \sigma \|w^4\|_{L^2} \\ \|H(u, v, w)\|_{L^2} &\leq R\sqrt{\pi}(2 + \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}) + \sqrt{\pi}\sigma \|w\|_{L^\infty}^4 \\ \|H(u, v, w)\|_{L^2} &\leq R\sqrt{\pi}(2 + \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}) + \sqrt{\pi^5}\sigma \|w\|_{1/2}^4. \end{aligned}$$

Portanto H aplica conjuntos limitados em $X^{1/2}$ em conjuntos limitados em L^2 . Analogamente, as funções $F(u, v, w)$ e $G(u, v, w)$ levam conjuntos limitados em $X^{1/2}$ em conjuntos limitados em L^∞

$$\begin{aligned} \|F(u, v, w)\|_{L^\infty} &\leq L_1(\|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty} + \|w\|_{1/2}), \\ \|G(u, v, w)\|_{L^\infty} &\leq L_2(\|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty} + \|w\|_{1/2}). \end{aligned}$$

■

Teorema 5.1. *Seja U um subconjunto aberto de*

$$X^{1/2} = L^\infty(-\pi/2, \pi/2) \times L^\infty(-\pi/2, \pi/2) \times H^1(-\pi/2, \pi/2),$$

então para qualquer $y_0 \in U$ existirá $T = T(t; t_0, y_0) > 0$ tal que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + By = \mathcal{F}(y), & t > t_0 \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (5.2.10)$$

associado ao sistema de equações diferenciais parciais do modelo de retroalimentação clima-vegetação (5.1.1-5.1.3), possui uma única solução local $y(t; t_0, y_0)$ definida no seu intervalo de existência $[t_0, t_0 + T)$ dada por

$$y(t) = e^{-B(t-t_0)}y_0 + \int_{t_0}^t e^{-B(t-s)}\mathcal{F}(y(s))ds.$$

A solução é definida para todo $t > t_0$ ou se $T < +\infty$, então

$$\limsup_{t \rightarrow T^-} \|y(t, y_0)\|_{1/2} = +\infty.$$

A aplicação $y_0 \rightarrow y(t; t_0, y_0)$, definida de U em $C([t_0, t_0 + T); X^{1/2})$, é uniformemente contínua em subintervalos compactos de $[t_0, t_0 + T)$.

Demonstração: Pelo lema 5.4 o operador B é setorial, pela proposição 5.1 a função $\mathcal{F}(y)$ é localmente Lipschitz e limitada em conjunto limitado, então pelos teoremas 3.2, 3.3 e 3.4 segue-se o resultado. ■

5.3 Solução Global

Nesta seção usaremos o argumento do princípio do máximo para estabelecer que uma solução que é não negativa no instante inicial ainda será não negativa para todos os instantes posteriores, ao longo da existência da solução. As desigualdades Gronwall e Young exerceram um papel fundamental no desenvolvimento desta seção. As referências utilizadas foram [16], [26] e [33].

Definição 5.1. Suponha X um espaço de Banach real com uma relação de ordem $\geq$ tal que para qualquer $x, y, z \in X$,

- (a) $x \geq x$;
- (b) $x \geq y$ e $y \geq z$ implica $x \geq z$;
- (c) $x \geq y$ implica $x + z \geq y + z$ e $\lambda x \geq \lambda y$ para qualquer real $\lambda \geq 0$;
- (d) o conjunto $\{x \in X \mid x \geq 0\}$ é fechado.

Uma função $f : X \rightarrow X$ é *crescente* se $x \geq y$ implica $f(x) \geq f(y)$.

Se Y é um subespaço Banach de X , a ordem induzida em Y de X também satisfaz (a) – (d).

Se $X = L^p(\Omega)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$, então dizemos $x \geq y$ quando $x(t) \geq y(t)$ para quase todo $t \in \Omega$; pode-se mostrar que isto satisfaz (a) – (d).

As idéias para demonstração dos dois lemas seguintes podem ser vistas em [16, paginas 60-61].

Lema 5.5. *Suponha A setorial em um espaço X com uma ordem e suponha que $(\lambda + A)^{-1}$ é crescente ($(\lambda + A)^{-1} \geq 0$) para todo $\lambda > 0$, então $e^{-At} \geq 0$ para todo $t \geq 0$.*

Lema 5.6. *Suponha que X é um espaço de Banach com uma ordem, A é setorial com $(\lambda + A)^{-1} \geq 0$ para todo $\lambda > 0$, e $f : [t_0, t_1) \times X^\alpha \rightarrow X$ é localmente Lipschitziana e satisfaz a seguinte condição*

$$\text{se } x \in X^\alpha, \quad x \geq 0, \quad t_0 \leq t < t_1 \quad \text{implica} \quad f(t, x) \geq 0.$$

Então, se $x_0 \in X^\alpha$, $x_0 \geq 0$ e $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ é solução de

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t, x) \quad \text{com} \quad x(t_0) = x_0,$$

então $x(t) \geq 0$ para todo $t \in [t_0, t_1)$.

Lema 5.7 (Gronwall). *Suponha que $r(t)$ é uma função a valores reais contínua que satisfaz $r(t) \geq 0$ e*

$$r(t) \leq C + K \int_0^t r(s) ds$$

para todo $t \in [0, a]$ onde C e K são constantes positivas. Então segue-se que para todo $t \in [0, a]$,

$$r(t) \leq Ce^{Kt}.$$

Temos casos em que precisamos de versões mais gerais, por exemplo.

Lema 5.8. *Sejam g , h , r , três funções localmente integrável em $(t_0, +\infty)$ que satisfaz*

$$\frac{dr}{dt} \leq gr + h \quad \text{para} \quad t \geq t_0. \quad (5.3.11)$$

Então a função $\frac{dr}{dt}$ será também localmente integrável e para $t \geq t_0$,

$$r(t) \leq r(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \right) + \int_{t_0}^t h(s) \exp \left(- \int_t^s g(\tau) d\tau \right) ds, \quad t \geq t_0. \quad (5.3.12)$$

Demonstração: Multiplicamos 5.3.11 por

$$\exp\left(-\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau\right),$$

observe que a desigualdade resultante é

$$\frac{d}{dt}\left(r(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau\right)\right) \leq h(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau\right).$$

Consequentemente, por integração entre t_0 e t ,

$$\begin{aligned} r(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau\right) - r(t_0) &\leq \int_{t_0}^t h(s)\exp\left(-\int_{t_0}^s g(\tau)d\tau\right)ds \\ r(t) &\leq r(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau\right) + \int_{t_0}^t h(s)\exp\left(-\int_t^s g(\tau)d\tau\right)ds. \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

■

Lema 5.9 (Desigualdade de Young). *Sejam p e q números reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então para todo par de números a e b não negativos vale a desigualdade*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

A desigualdade de Young também pode tomar a seguinte forma

$$\begin{aligned} ab &\leq \varepsilon a^p + \frac{1}{q(p\varepsilon)^{q/p}} b^q \\ ab &\leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q \quad \text{para} \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Seja $A = -d^2/dx^2$, com as condições de Neumann, mostraremos que $(\lambda + A)^{-1} \geq 0$, para $\lambda > 0$. Este resultado será utilizado na demonstração da existência de solução global para problema de valor inicial 5.3.22.

Dado $f \in C([-\pi/2, \pi/2])$, consideremos um caso particular do *problema de Sturm-Liouville*, que consiste em achar uma função y solução do sistema

$$\begin{cases} -y'' + \lambda y = f & \text{em} \quad [-\pi/2, \pi/2] \\ y'(-\pi/2) = 0 \\ y'(\pi/2) = 0. \end{cases} \quad (5.3.15)$$

Pelo [18, teorema 2.9], existe uma função contínua

$$G : [-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que, $y \in C^2([-\pi/2, \pi/2])$ é solução de 5.3.15 se, e somente se,

$$y(s) = (A + \lambda)^{-1} f(s) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(s, t) f(t) dt. \quad (5.3.16)$$

A função G se chama *função de Green* do problema .

Segue de 5.3.16 que não negatividade da função de Green $G(s, t)$ implica que $(A + \lambda)^{-1} \geq 0$.

Para a construção da função de Green seguiremos as idéias de [18, páginas 111-12]. Sejam y_1 e y_2 duas soluções a valores reais não-nulas linearmente independentes de

$$-y'' + \lambda y = 0, \quad \text{com} \quad \lambda > 0,$$

tal que $y_1'(-\pi/2) = 0$ e $y_2'(\pi/2) = 0$. Definimos a função de Green da forma

$$G(s, t) = \begin{cases} -\frac{y_1(t)y_2(s)}{W[y_1, y_2]} & \text{se} \quad -\pi/2 \leq t \leq s \leq \pi/2 \\ -\frac{y_2(t)y_1(s)}{W[y_1, y_2]} & \text{se} \quad -\pi/2 \leq s \leq t \leq \pi/2, \end{cases} \quad (5.3.17)$$

onde $W[y_1, y_2]$ é o determinante do Wronskiano. Calculando y_1 e y_2 , encontramos

$$y_1(t) = e^{\sqrt{\lambda}(\pi+t)} + e^{-\sqrt{\lambda}t}, \quad (5.3.18)$$

$$y_2(t) = e^{\sqrt{\lambda}t} + e^{-\sqrt{\lambda}(\pi-t)}. \quad (5.3.19)$$

Seja

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad (5.3.20)$$

o determinante do Wronskiano. Substituindo (5.3.18) e (5.3.19) em (5.3.20) obtemos,

$$W[y_1, y_2] = \sqrt{\lambda} \begin{vmatrix} e^{\sqrt{\lambda}(\pi+t)} + e^{-\sqrt{\lambda}t} & e^{\sqrt{\lambda}t} + e^{-\sqrt{\lambda}(\pi-t)} \\ e^{\sqrt{\lambda}(\pi+t)} - e^{-\sqrt{\lambda}t} & e^{\sqrt{\lambda}t} - e^{-\sqrt{\lambda}(\pi-t)} \end{vmatrix}.$$

Assim temos

$$W[y_1, y_2] = \sqrt{\lambda}(2 - 2e^{2\sqrt{\lambda}\pi}),$$

o que implica a não negatividade de $G(s, t)$, pois

$$W[y_1, y_2] = -\sqrt{\lambda}(2e^{2\sqrt{\lambda}\pi} - 2) < 0 \quad \text{para todo} \quad \lambda > 0. \quad (5.3.21)$$

Agora demonstraremos a existência de solução global para o problema de valor inicial (5.3.22).

Proposição 5.2. *Seja U um subconjunto aberto de $X^{1/2}$, munido com uma relação de ordem $\geq$. A solução $y(t) = y(t; t_0, y_0)$ do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + By = \mathcal{F}(y), & t > t_0 \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (5.3.22)$$

em $[t_0, t_0 + T)$, associado ao modelo de retroalimentação clima-vegetação, com condições iniciais $y_0 = (u_0, v_0, w_0 - 280) \geq 0$, isto é, $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$ e $w_0 - 280 \geq 0$, está definida para todo $t > t_0$.

Demonstração: Pelo teorema 5.1 é suficiente mostrar que

$$\limsup_{t \rightarrow T^-} \|y(t; t_0, y_0)\|_{1/2} < +\infty,$$

onde

$$\|y(t; t_0, y_0)\|_{1/2} = \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty} + \|w\|_{1/2}.$$

Observando os coeficientes das funções polinomiais $\mathcal{F}(y) = (F(y), G(y), H(y))$, concluímos que, para um grande intervalo de valores de R ,

$$\text{se } y \in X^{1/2}, \quad y \geq 0, \quad t_0 \leq t < t_1 \quad \text{implica} \quad \mathcal{F}(y) = (F(y), G(y), H(y)) \geq 0.$$

Para $\lambda > 0$, $a > 0$, $b > 0$ e $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, temos

$$(\lambda + a)^{-1} > 0, \quad (\lambda + b)^{-1} > 0 \quad \text{e} \quad (\lambda + A)^{-1} \geq 0,$$

consequentemente

$$(\lambda + B)^{-1} = (\lambda + a)^{-1} \times (\lambda + b)^{-1} \times (\lambda + A)^{-1} \geq 0 \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Pelos os lemas (5.5)-(5.6), segue-se que $y(t) = y(t; t_0, y_0) \geq 0$ para todo $t \in [t_0, t_1)$ sobre o seu intervalo de existência.

Mostraremos que $u(t) + v(t) + \gamma - 1 = O(\delta)$ é um equilíbrio estável, no sentido que $u(t) + v(t) + \gamma - 1$ converge para $O(\delta)$.

Para isto definimos $z = u + v + \gamma - 1$. Derivando

$$\frac{dz}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = (u + v)(1 - u - v - \gamma) - (1 - u - v)[u(C - 5(u - v - 1) - w)^2 + v(C - 5(u - v + 1) - w)^2] \delta$$

$$\frac{dz}{dt} = (u + v)(1 - u - v - \gamma) + O(\delta)$$

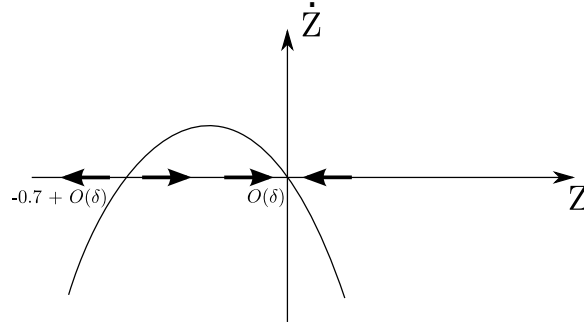


Figura 5.1 $\frac{dz}{dt} = -z(z + 1 - \gamma) + O(\delta)$

$$\frac{dz}{dt} = -z(z + 1 - \gamma) + O(\delta). \quad (5.3.23)$$

A equação 5.3.23 possui os equilíbrios $z = O(\delta)$ estável e $z = \gamma - 1 + O(\delta)$ instável. Isto é, $u + v + \gamma - 1 = O(\delta)$ estável e $u + v = 0$ instável.

Usando o fato que $u \geq 0$ e $v \geq 0$, concluímos que

$$\limsup_{t \rightarrow T^-} \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty} < +\infty.$$

Agora provaremos que

$$\limsup_{t \rightarrow T^-} \|w(t)\|_{1/2} < +\infty.$$

Como a norma $\|\cdot\|_{1/2}$ é dada por

$$\|w\|_{1/2} = \|w\|_{H^1}^2 = \|w\|^2 + \|w'\|^2,$$

então vamos calcular os limite superior de cada termo separadamente.

Primeiro estimaremos o limite superior da norma $\|w\|$ de w . Usando a desigualdade de Young inferimos de

$$-H(u, v, w) = \sigma w^4 - (2 - u + v)R$$

a existência de uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$|-(2 - u + v)Rw| = |-(2 - u + v)R| \cdot |w| \leq \frac{1}{2} \sigma w^5 + c_1$$

e consequentemente

$$\frac{1}{2} \sigma w^5 - c_1 \leq -H(u, v, w)w = \sigma w^5 - (2 - u + v)Rw \leq \frac{3}{2} \sigma w^5 + c_1. \quad (5.3.24)$$

Multiplicamos por $w(t, x)$ a terceira equação do sistema 5.1.4

$$\frac{dw}{dt} + Aw + \sigma w^4 - (2 - u + v)R = 0$$

e integramos sobre $(-\pi/2, \pi/2)$

$$\left(\frac{dw}{dt}, w\right) + (Aw, w) + (\sigma w^4 - (2 - u + v)R, w) = 0.$$

Usando o fato que $w(t) \in D(A)$ para $t \in [t_0, t_0 + T)$, encontramos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (w, w) + (w', w') + (\sigma w^4 - (2 - u + v)R, w) = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \|w'\|^2 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sigma w^5 - (2 - u + v)Rw) dx = 0.$$

Temos escrito $\|\cdot\|$ e $(\cdot, \cdot)$ para norma e produto interno em $L^2(-\pi/2, \pi/2)$,

$$\|w\| = \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} w^2 dx \right)^{1/2}.$$

Por 5.3.24 obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \|w'\|^2 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} \sigma w^5 - c_1 \right) dx \leq 0$$

$$\frac{d}{dt} \|w\|^2 + 2\|w'\|^2 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma w^5 dx \leq 2\pi c_1. \quad (5.3.25)$$

Devido as desigualdades de Hölder, Young e usando o fato que $w > 0$, existe uma constante $c_2 > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} w^2 dx \leq \pi^{3/5} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} w^5 dx \right)^{2/5} \\ \|w\|^2 &\leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma w^5 dx + \frac{3}{5} \frac{\pi}{\left(\frac{5}{2}\sigma\right)^{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2}}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma w^5 dx + c_2, \end{aligned}$$

fazendo $c = 2\pi c_1 + c_2$ inferimos de 5.3.25 que

$$\frac{d}{dt} \|w\|^2 + 2\|w'\|^2 + \|w\|^2 \leq 2\pi c_1 + c_2$$

$$\frac{d}{dt} \|w\|^2 + \|w\|^2 \leq c$$

$$\frac{d}{dt} \|w\|^2 \leq -\|w\|^2 + c.$$

Usando o lema de Gronwall clássico vemos que

$$\|w(t)\|^2 \leq \|w(t_0)\|^2 e^{-(t-t_0)} + c \int_{t_0}^t e^{s-t} ds.$$

o que implica

$$\|w(t)\|^2 \leq \|w(t_0)\|^2 e^{-(t-t_0)} + c(1 - e^{-(t-t_0)}). \quad (5.3.26)$$

Assim,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|w(t)\| \leq \sqrt{c}. \quad (5.3.27)$$

Resta agora mostrar que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|w'(t)\| < +\infty.$$

Multiplicamos a equação

$$\frac{dw}{dt} + Aw + \sigma w^4 - (2 - u + v)R = 0$$

por Aw e integramos sobre $(-\pi/2, \pi/2)$

$$\left(\frac{dw}{dt}, Aw\right) + (Aw, Aw) + (\sigma w^4 - (2 - u + v)R, Aw) = 0. \quad (5.3.28)$$

Temos

$$\left(\frac{dw}{dt}, Aw\right) = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial t} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w'\|^2 \quad (5.3.29)$$

(Obs: aqui foi necessário que $\partial w / \partial t \in H^1(-\pi/2, \pi/2)$. Isto pode ser garantido pelo teorema 3.5.2 em [16, página 71].

Para o terceiro termo de 5.3.28 temos

$$\begin{aligned} (\sigma w^4 - (2 - u + v)R, Aw) &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma w^4 w'' dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 - u + v)R w'' dx, \\ (\sigma w^4 - (2 - u + v)R, Aw) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\sigma w^3 (w')^2 dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 - u + v)R w'' dx. \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

Vamos estimar o termo $(2 - u + v)R w''$, para isto usaremos a desigualdade de Young, as limitações de u e v .

Existe uma constante $c_3 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |(2 - u + v)R w''| &\leq \frac{(w'')^2}{2} + \frac{[(2 - u + v)R]^2}{2} \leq \frac{(w'')^2}{2} + c_3 \\ -\frac{(w'')^2}{2} - c_3 &\leq (2 - u + v)R w'' \leq \frac{(w'')^2}{2} + c_3. \end{aligned} \quad (5.3.31)$$

Substituindo 5.3.31 em 5.3.30 obtemos

$$- \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c_3 dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (w'')^2 dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\sigma w^3 (w')^2 dx \leq (\sigma w^4 - (2 - u + v)R, Aw),$$

$$-\pi c_3 - \frac{1}{2} \|Aw\|^2 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\sigma w^3 (w')^2 dx \leq (\sigma w^4 - (2 - u + v)R, Aw) \quad (5.3.32)$$

substituindo 5.3.29 e 5.3.32 em 5.3.28 temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w'\|^2 + \|Aw\|^2 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\sigma w^3 (w')^2 dx - \pi c_3 - \frac{1}{2} \|Aw\|^2 \leq 0$$

$$\frac{d}{dt} \|w'\|^2 + \|Aw\|^2 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8\sigma w^3 (w')^2 dx \leq \pi c_3.$$

Como $w \geq 280$, isto implica que $8\sigma w^3 (w')^2 > (w')^2$, consequentemente

$$\frac{d}{dt} \|w'\|^2 + \|Aw\|^2 + \|w'\|^2 \leq \pi c_3,$$

$$\frac{d}{dt} \|w'\|^2 \leq -\|w'\|^2 + \pi c_3,$$

fazendo $c' = \pi c_3$, usando o lema de Gronwall

$$\|w'(t)\|^2 \leq \|w'(t_0)\|^2 e^{-(t-t_0)} + c' \int_{t_0}^t e^{s-t} ds,$$

o que implica

$$\|w'(t)\|^2 \leq \|w'(t_0)\|^2 e^{-(t-t_0)} + c'(1 - e^{-(t-t_0)}). \quad (5.3.33)$$

Assim,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|w'(t)\| \leq \sqrt{c'}. \quad (5.3.34)$$

■

Equilíbrio e Estabilidade

6.1 Estabilidade e instabilidade por uma aproximação linear

Definição 6.1. Se A é um operador linear com domínio e imagem em um espaço de Banach X , e $\sigma(A)$ denota o espectro, um conjunto $\sigma \subset \sigma(A) \cup \{\infty\} \equiv \widehat{\sigma}(A)$ é um *conjunto espectral* se ambos σ e $\widehat{\sigma}(A) \setminus \sigma$ são fechados no plano estendido $\mathbb{C} \cup \infty$.

Sejam A um operador linear setorial em um espaço de Banach X e $f : U \rightarrow X$, onde U é uma vizinhança cilíndrica em $\mathbb{R} \times X^\alpha$ (para algum $\alpha < 1$) de $(\tau, \infty) \times \{x_0\}$. Dizemos que x_0 é um *ponto de equilíbrio* se $x(t) \equiv x_0$ é uma solução de

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t, x), \quad t > t_0,$$

isto é, se $x_0 \in D(A)$ e $Ax_0 = f(t, x_0)$ para todo $t > t_0$.

Uma solução $\bar{x}(\cdot)$ sobre $[t_0, \infty)$ é *estável* (em X^α) se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que qualquer solução x com

$$\|x(t_0) - \bar{x}(t_0)\|_\alpha < \delta$$

existe sobre $[t_0, \infty)$ e satisfaz

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\|_\alpha < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t > t_0$$

isto é,

$$x_0 \mapsto x(t; t_0, x_0)$$

é contínua (em X^α) em $x_0 = \bar{x}(t_0)$, uniformemente em $t \geq t_0$. A solução $\bar{x}$ é *uniformemente estável* se

$$x_1 \mapsto x(t; t_1, x_1)$$

é contínua com $x_1 \rightarrow \bar{x}(t_1)$, uniformemente em $t > t_1$ e $t_1 > t_0$.

A solução $\bar{x}(\cdot)$ é *uniformemente assintoticamente estável* se é uniformemente estável e

$$x(t; t_1, x_1) - \bar{x}(t) \rightarrow 0$$

quando $t - t_1 \rightarrow +\infty$, uniformemente em $t \geq t_1$ e $\|x_1 - \bar{x}(t_1)\|_\alpha < \delta$ para alguma constante $\delta > 0$.

Teorema 6.1. *Seja A, f como acima e seja x_0 um ponto de equilíbrio. Suponha*

$$f(t, x_0 + z) = f(t, x_0) + Bz + g(t, z),$$

onde B é um aplicação linear limitada de X^α em X e $\|g(t, z)\| = o(\|z\|_\alpha)$ quando $\|z\|_\alpha \rightarrow 0$, uniformemente em $t > \tau$, e $f(t, x)$ localmente contínua Hölder em t , localmente Lipschitziana em x , em U .

Se o espectro de $A - B$ encontra-se em $\{Re \lambda > \beta\}$ para algum $\beta > 0$, ou equivalentemente se a linearização

$$\frac{dz}{dt} + Az = Bz$$

é uniformemente assintoticamente estável, então a equação original tem a solução x_0 uniformemente assintoticamente estável em X^α . Mais precisamente existe $\rho > 0$, $M \geq 1$ tal que se $t_0 > \tau$ e $\|x_1 - x_0\|_\alpha \leq \rho/2M$ então existe uma única solução de

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t, x), \quad t > t_0, \quad x(t_0) = x_1$$

existindo sobre $t_0 \leq t < \infty$ e satisfazendo para $t > t_0$

$$\|x(t; t_0, x_1) - x_0\|_\alpha \leq 2Me^{-\beta(t-t_0)}\|x_1 - x_0\|_\alpha.$$

Teorema 6.2 (Instabilidade). *Assuma que A é setorial e $f(t, x)$ é localmente Lipschitz em x , Hölder contínua em t em uma vizinhança cilíndrica de $\mathbb{R} \times \{x_0\}$ em $\mathbb{R} \times X^\alpha$. Assuma também que $Ax_0 = f(t, x_0)$ para $t \geq t_0$,*

$$f(t, x_0 + z) = f(t, x_0) + Bz + g(t, z), \quad g(t, 0) = 0,$$

$$\|g(t, z_1) - g(t, z_2)\| \leq k(\rho) \|z_1 - z_2\|_\alpha \quad \text{para} \quad \|z_1\|_\alpha \leq \rho, \quad \|z_2\|_\alpha \leq \rho$$

e $k(\rho) \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow 0$.

Se $L = A - B$, assuma que $\sigma(L) \cap \{Re \lambda < 0\}$ é um conjunto espectral não vazio. Então a solução equilíbrio x_0 é instável. Especificamente, existe um $\varepsilon_0 > 0$ e $\{x_n, n \geq 1\}$ com $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, mas para todo n ,

$$\sup_{t \geq 0} \|x(t; t_0, x_n) - x_0\|_\alpha \geq \varepsilon_0 > 0.$$

Aqui o supremo é tomado sobre o intervalo maximal de existência de $x(\cdot; t_0, x_n)$.

6.2 Estudo da Estabilidade dos Equilíbrios do Modelo

O sistema do modelo é dado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = uf(u, v, w) = u[(1 - \delta(C - 5(u - v - 1) - w)^2)(1 - u - v) - \gamma], \quad (6.2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v g(u, v, w) = v[(1 - \delta(C - 5(u - v + 1) - w)^2)(1 - u - v) - \gamma], \quad (6.2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = h(u, v, w) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = (2 - u + v)R - \sigma w^4 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (6.2.3)$$

escrito na forma

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -au + F(u, v, w) \\ \frac{dv}{dt} = -bv + G(u, v, w) \\ \frac{dw}{dt} = -Aw + H(u, v, w), \end{cases} \quad (6.2.4)$$

$$\frac{dy}{dt} + By = \mathcal{F}(y), \quad (6.2.5)$$

sobre o espaço de Banach $X = L^\infty(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times L^\infty(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times L^2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ com norma

$$\| (u, v, w) \| = \| u \|_{L^\infty} + \| v \|_{L^\infty} + \| w \|_{L^2}.$$

Suponhamos que $y_0 = (u_0, v_0, w_0)$ seja um ponto de equilíbrio da equação 6.2.5, então

$$By_0 = \mathcal{F}(y_0).$$

Para $y = y_0 + z$ próximo de y_0 temos

$$\frac{d(y_0 + z)}{dt} + By_0 + Bz = \mathcal{F}(y_0 + z),$$

supondo

$$\mathcal{F}(y_0 + z) = \mathcal{F}(y_0) + Cz + \mathcal{G}(z),$$

obtemos

$$\frac{dz}{dt} + Bz = Cz + \mathcal{G}(z).$$

A linearização da equação 6.2.5 próximo ao equilíbrio y_0 é definida por

$$\frac{dz}{dt} + Lz = 0,$$

onde $L = B - C$.

No lema seguinte mostraremos que o modelo de retroalimentação clima-vegetação possui as hipóteses necessárias para o estudo da estabilidade de equilíbrios, usando aproximação linear.

Lema 6.1. *Seja $y_0 = (u_0, v_0, w_0)$ um equilíbrio da equação 6.2.5, então*

$$\mathcal{F}(y_0 + z) = \mathcal{F}(y_0) + Cz + \mathcal{G}(z), \quad \mathcal{G}(0, 0, 0) = (0, 0, 0),$$

$\|\mathcal{G}(z_1) - \mathcal{G}(z_2)\| \leq k(\rho) \|z_1 - z_2\|_{1/2}$ para $\|z_1\|_{1/2} \leq \rho, \|z_2\|_{1/2} \leq \rho$
e $k(\rho) \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow 0^+$, onde

$$z = (u, v, w), \quad \mathcal{G}(z) = (g_1(z), g_2(z), g_3(z)),$$

$$C = D\mathcal{F}(u_0, v_0, w_0) = \begin{bmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DF \\ DG \\ DH \end{bmatrix}$$

é um operador linear limitado em X e

$$\frac{dz}{dt} + Bz = Cz$$

é a linearização em y_0 .

Demonstração: Analisando a função

$$H(u, v, w) = (2 - u + v)R - \sigma w^4$$

definida de $U \subset X^{1/2}$ em L^2 no ponto $y_0 + z$, temos

$$H(u_0 + u, v_0 + v, w_0 + w) = (2 - u_0 - u + v_0 + v)R - \sigma(w_0 + w)^4$$

$$H(u_0 + u, v_0 + v, w_0 + w) = ((2 - u_0 + v_0)R - \sigma w_0^4) + (-uR + vR - \sigma 4w_0^3 w) - \sigma(6w_0^2 w^2 + 4w_0 w^3 + w^4),$$

$$H(u_0 + u, v_0 + v, w_0 + w) = H(u_0, v_0, w_0) + DH(u_0, v_0, w_0)(u, v, w) - \sigma(6w_0^2 w^2 + 4w_0 w^3 + w^4)$$

definindo

$$g_3(u, v, w) = -\sigma(6w_0^2 w^2 + 4w_0 w^3 + w^4)$$

obtemos

$$H(y_0 + z) = H(y_0) + DH(y_0)z + g_3(z), \quad g_3(0, 0, 0) = 0,$$

usando a fatoração

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + \dots + b^{n-1}),$$

as desigualdades 5.2.8, 5.2.9, $\|z_1\| \leq \rho$ e $\|z_2\| \leq \rho$ temos

$$\|g_3(u_1, v_1, w_1) - g_3(u_2, v_2, w_2)\|_{L^2} = \sigma \|(6w_0^2 w_1^2 + 4w_0 w_1^3 + w_1^4) - (6w_0^2 w_2^2 + 4w_0 w_2^3 + w_2^4)\|_{L^2}$$

$$\|g_3(u_1, v_1, w_1) - g_3(u_2, v_2, w_2)\|_{L^2} \leq \frac{k_3(\rho)}{\pi} (\|w_1^2 - w_2^2\|_{L^2} + \|w_1^3 - w_2^3\|_{L^2} + \|w_1^4 - w_2^4\|_{L^2})$$

$$\|g_3(u_1, v_1, w_1) - g_3(u_2, v_2, w_2)\|_{L^2} \leq k_3(\rho) (\|w_1^2 - w_2^2\|_{1/2} + \|w_1^3 - w_2^3\|_{1/2} + \|w_1^4 - w_2^4\|_{1/2})$$

$$\begin{aligned}\|g_3(u_1, v_1, w_1) - g_3(u_2, v_2, w_2)\|_{L^2} &\leq k_3(\rho) \|w_1 - w_2\|_{1/2} \\ \|g_3(u_1, v_1, w_1) - g_3(u_2, v_2, w_2)\|_{L^2} &\leq k_3(\rho) \|(u_1, v_1, w_1) - (u_2, v_2, w_2)\|_{1/2} \\ \|g_3(z_1) - g_3(z_2)\|_{L^2} &\leq k_3(\rho) (\|z_1 - z_2\|_{1/2})\end{aligned}$$

com $k_3(\rho) \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow 0^+$.

Para

$$\begin{aligned}F(u, v, w) &= 303,642u^2 - 9,89625u^3 + 25\delta u^4 + 284,019uv + \\ &+ 601\delta uw + 50\delta u^2v - 25\delta u^3v + 2980\delta uv^2 + \\ &- 25\delta u^2v^2 + 25\delta uv^3 - 611\delta u^2w + 10\delta u^3w + \\ &- 591\delta uvw - 10\delta uv^2w - \delta uw^2 + \delta u^2w^2 + \delta uvw^2,\end{aligned}$$

definida de $U \subset X^{1/2}$ em L^∞ , escrita na forma

$$F(u, v, w) = \sum_{2 \leq i+j+k \leq 4} a_{ijk} u^i v^j w^k$$

temos

$$F(u_0 + u, v_0 + v, w_0 + w) = \sum_{2 \leq i+j+k \leq 4} a_{ijk} (u_0 + u)^i (v_0 + v)^j (w_0 + w)^k$$

$$\begin{aligned}F(u_0 + u, v_0 + v, w_0 + w) &= \sum_{2 \leq i+j+k \leq 4} a_{ijk} u_0^i v_0^j w_0^k \\ &+ \sum_{2 \leq i+j+k \leq 4} a_{ijk} (i u_0^{i-1} v_0^j w_0^k u + j v_0^{j-1} u_0^i w_0^k v + k w_0^{k-1} u_0^i v_0^j w) \\ &+ g_1(u, v, w)\end{aligned}$$

$$F(u_0 + u, v_0 + v, w_0 + w) = F(u_0, v_0, w_0) + DF(u_0, v_0, w_0)(u, v, w) + g_1(u, v, w),$$

$$F(y_0 + z) = F(y_0) + DF(y_0)z + g_1(z), \quad g_1(0, 0, 0) = 0,$$

usando as fatorações

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + \dots + b^{n-1}),$$

$$ab - cd = a(b - d) + d(a - c),$$

$$abc - def = ab(c - f) + af(b - e) + ef(a - d),$$

a desigualdade $\|uv\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{L^\infty}$, a desigualdade triangular e (5.2.8), obtemos para $\|z_1\| \leq \rho$ e $\|z_2\| \leq \rho$,

$$\|g_1(u_1, v_1, w_1) - g_1(u_2, v_2, w_2)\|_{L^\infty} \leq k_1(\rho) (\|u_1 - u_2\|_{L^\infty} + \|v_1 - v_2\|_{L^\infty} + \|w_1 - w_2\|_{1/2})$$

$$\|g_1(u_1, v_1, w_1) - g_1(u_2, v_2, w_2)\|_{L^\infty} \leq k_1(\rho) \|(u_1, v_1, w_1) - (u_2, v_2, w_2)\|_{1/2}$$

$$\|g_1(z_1) - g_1(z_2)\|_{L^\infty} \leq k_1(\rho) (\|z_1 - z_2\|_{1/2})$$

$k_1(\rho)$ é um polinômios em ρ com o termo constante nulo. Portanto $k_1(\rho) \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow 0^+$.

Analogamente, para

$$\begin{aligned} G(u, v, w) = & 265,259v^2 + 9,4032v^3 + 25\delta v^4 + \\ & + 284,019uv + 581\delta vw - 2930\delta u^2v + 25\delta u^3v + \\ & + 50\delta uv^2 - 25\delta u^2v^2 - 25\delta uv^3 - 591\delta uvw + 10\delta u^2vw + \\ & + 571\delta v^2w - 10\delta v^3w - \delta vw^2 + \delta uvw^2 + \delta v^2w^2, \end{aligned}$$

definida de $U \subset X^{1/2}$ em L^∞ , temos

$$G(y_0 + z) = G(y_0) + DG(y_0)z + g_2(z), \quad g_2(0, 0, 0) = 0$$

e para $\|z_1\| \leq \rho$, $\|z_2\| \leq \rho$

$$\|g_2(z_1) - g_2(z_2)\|_{L^\infty} \leq k_2(\rho)(\|z_1 - z_2\|_{1/2}),$$

com $k_2(\rho) \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow 0^+$.

Assim, usando a notação matricial

$$\begin{bmatrix} F(y_0 + z) \\ G(y_0 + z) \\ H(y_0 + z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(y_0) \\ G(y_0) \\ H(y_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} DF(y_0) \\ DG(y_0) \\ DH(y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(z) \\ g_2(z) \\ g_3(z) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{F}(y_0 + z) = \mathcal{F}(y_0) + Cz + \mathcal{G}(z), \quad \text{com } \mathcal{G}(0, 0, 0) = (0, 0, 0),$$

$$\|g(z_1) - g(z_2)\| \leq k(\rho) \|z_1 - z_2\|_{1/2} \quad \text{para } \|z_1\|_{1/2} \leq \rho, \quad \|z_2\|_{1/2} \leq \rho$$

e $k(\rho) \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow 0^+$.

Escrevendo o operador C na forma

$$Cz = (DF(y_0)z, DG(y_0)z, DH(y_0)z)$$

com norma

$$\|C\| = \sup_{\|z\|_{1/2}=1} \|Cz\|$$

$$\|C\| = \sup_{\|(u,v,w)\|_{1/2}=1} \|(DF(y_0)z, DG(y_0)z, DH(y_0)z)\|$$

$$\|C\| = \sup_{\|(u,v,w)\|_{1/2}=1} (\|DF(y_0)(u, v, w)\|_{L^\infty} + \|DG(y_0)(u, v, w)\|_{L^\infty} + \|DH(y_0)(u, v, w)\|_{L^2}),$$

deduzimos que, para $y_0 \in D(B)$ o operador C é composto de operadores produto definido por aplicações definidas em um intervalo limitado, logo C é limitado. ■

Sejam $y_0 = (u_0, v_0, w_0)$ um equilíbrio da equação 6.2.5, C operador linear de $X^{1/2}$ em X definido próximo a y_0

$$C = \begin{bmatrix} DF(y_0) \\ DG(y_0) \\ DH(y_0) \end{bmatrix}$$

e a linearização da equação (6.2.5) definida por

$$\frac{dz}{dt} + Lz = 0,$$

onde $L = B - C$. Então

$$L = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ -R & R & -4\sigma w_0^3 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} a - F_u & -F_v & -F_w \\ -G_u & b - G_v & -G_w \\ R & -R & A + 4\sigma w_0^3 \end{bmatrix}.$$

No sistema de equações (6.2.1 - 6.2.3) temos

$$F = (f + a)u \quad \text{e} \quad G = (g + b)v,$$

desta forma podemos escrever

$$a - F_u = -f - uf_u, \quad F_v = uf_v, \quad F_w = uf_w$$

$$G_u = vg_u, \quad b - G_v = -g - vg_v, \quad G_w = vg_w$$

$$L = \begin{bmatrix} -f - uf_u & -uf_v & -uf_w \\ -vg_u & -g - vg_v & -vg_w \\ R & -R & A + 4\sigma w_0^3 \end{bmatrix}.$$

6.2.1 Estabilidade de Todos os Equilíbrios zero

Neste estudo de estabilidade de ponto de equilíbrio, usando aproximação linear, observe que o operador L na linearização está no lado esquerdo da equação, isto significa que o operador L com autovalor que possui parte real negativa implica instabilidade do ponto de equilíbrio.

Equilíbrio Zero Independente do Espaço

Seja $y_0 = (u_0, v_0, w_0)$ uma solução de equilíbrio para o sistema (6.2.1)-(6.2.3), com $u_0 = v_0 = 0$ e w_0 a solução do sistema Newtoniano

$$w_{xx} + 2R - \sigma w^4 = 0 \Rightarrow w_{xx} - k(w) = 0. \quad (6.2.6)$$

Seja $w_0 = \bar{w}$ a solução independente do espaço de 6.2.6, temos

$$2R = \sigma \bar{w}^4.$$

O operador L da linearização no equilíbrio zero $y_0 = (0, 0, w_0) \in D(B) \subset X^{1/2}$ é dada por

$$L = \begin{bmatrix} -f(0, 0, w_0) & 0 & 0 \\ 0 & -g(0, 0, w_0) & 0 \\ R & -R & A + 4\sigma w_0^3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -0,7 + \delta(300,5 - w_0)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -0,7 + \delta(290,5 - w_0)^2 & 0 \\ R & -R & A + 4\sigma w_0^3 \end{bmatrix}.$$

Estudaremos os autovalores de L . Isto é, os λ tais que

$$Lz = \lambda z$$

$$(L - \lambda I)z = (0, 0, 0),$$

como

$$(L - \lambda I)(u, v, w) = \left((-f(0, 0, w_0) - \lambda)u, (-g(0, 0, w_0) - \lambda)v, Ru - Rv + (A + 4\sigma w_0^3 - \lambda)w \right),$$

então estudaremos os λ que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} (-f(0, 0, w_0) - \lambda)u = 0 \\ (-g(0, 0, w_0) - \lambda)v = 0 \\ Ru - Rv + (A + 4\sigma w_0^3 - \lambda)w = 0 \end{cases} \quad (6.2.7)$$

com $z = (u, v, w) \neq (0, 0, 0)$.

Em particular analisaremos os autovalores λ para as autofunções $z = (u, v, w)$, restrita à $z = (u, v, \rho \phi_k)$, para algum ρ , onde ϕ_k são as autofunções do operador A associadas aos autovalores k^2 , $k = 0, 1, 2, \dots$. Neste caso particular os λ são os zeros de

$$E(\lambda) = \det(L - \lambda I)$$

$$E(\lambda) = (f(0, 0, w_0) + \lambda)(g(0, 0, w_0) + \lambda)(k^2 + 4\sigma w_0^3 - \lambda),$$

logo

$$\lambda = -f(0, 0, w_0), \quad \lambda = -g(0, 0, w_0) \quad \text{e} \quad \lambda = k^2 + 4\sigma w_0^3 > 0$$

são autovalores do operador L . Verificamos que

$$\begin{array}{lll} f(0, 0, w_0) > 0 & \text{em} & 285,86 < w_0 < 315,14 \quad (189,30 < R < 279,62), \\ g(0, 0, w_0) > 0 & \text{em} & 275,86 < w_0 < 305,14 \quad (164,17 < R < 245,78), \end{array} \quad (6.2.8)$$

a igualdade $f(0, 0, w_0) = g(0, 0, w_0)$ ocorre quando $w_0 = C = 295,5$ ($R = 216,164$).

Portanto, para os valores R de radiação solar no intervalo $164,17 < R < 279,62$ temos $\lambda = -f(0, 0, w_0) < 0$ ou $\lambda = -g(0, 0, w_0) < 0$, pelo lema 6.1 e o teorema 6.2 o equilíbrio $y_0 = (0, 0, w_0)$ é **instável**.

Analisaremos as autofunções associadas aos autovalores do operador da linearização no equilíbrio zero.

i) Suponhamos

$$\lambda = -f(0, 0, w_0) = -g(0, 0, w_0) = -0,7 + 25\delta = -0,61837,$$

então as duas primeiras equações do sistema 6.2.7 são satisfeitas para qualquer u e v . Para terceira equação

$$Ru - Rv + (A + 4\sigma C^3 + f(0, 0, C))w = 0$$

com $w = \rho \phi_k$, para ρ real não nulo suficientemente pequeno, onde

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \phi_{2n-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2n-1)x \quad \text{e} \quad \phi_{2n}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2nx,$$

$n = 1, 2, \dots$, são as autofunções do operador A com autovalores $\lambda_k = k^2$, temos que

$$(k^2 + 5,85215 + 0,61837)\rho \phi_k = 216,164(v - u)$$

$$\frac{(k^2 + 6,47053)}{216,164} \rho \phi_k = (v - u)$$

$$z_k = (u, u + \frac{(k^2 + 6,47053)}{216,164} \rho \phi_k, \rho \phi_k)$$

são as autofunções associadas ao autovalor $\lambda = -0,61837$, próximo ao equilíbrio $y_0 = (0, 0, C)$.

Algumas autofunções particulares, $k = 0, 1, 2$

$$z_0 = (u, u + 0,0299334\rho \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \rho \frac{1}{\sqrt{\pi}})$$

$$z_1 = (u, u + 0,0345595\rho \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \rho \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x)$$

$$z_2 = (u, u + 0,0484379\rho \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2x, \rho \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2x).$$

Concluimos que para $\rho < 0$, as margaridas pretas estão em quantidade menor do que as margaridas brancas e a temperatura menor do que a de equilíbrio. Inversamente, para $\rho > 0$, as margaridas pretas estão em quantidade maior do que margaridas brancas e temos temperatura

maior do que a de equilíbrio.

ii) Para os autovalores

$$\lambda = -f(0,0,w_0) \quad \text{e} \quad \lambda \neq -g(0,0,w_0),$$

temos u qualquer, $v = 0$ e

$$Ru + (A + 4\sigma w_0^3 + f(0,0,w_0))w = 0$$

com $w = \rho \phi_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$(k^2 + 4\sigma w_0^3 + f(0,0,w_0))\rho \phi_k = -Ru$$

$$u = \frac{-f(0,0,w_0) - 4\sigma w_0^3 - k^2}{R} \rho \phi_k,$$

para $k = 0$ e $\rho < 0$ temos

$$u = -\rho \frac{4\sigma w_0^3 + f(0,0,w_0)}{R} \frac{1}{\sqrt{\pi}} > 0.$$

para $k = 1, 2, \dots$ temos $-1 < \phi_k < 1$, logo não existe ϕ_k que satisfaça $u > 0$ ($y = y_0 + z > 0$). Portanto

$$z = \left(-\rho \frac{4\sigma w_0^3 + f(0,0,w_0)}{R} \frac{1}{\sqrt{\pi}}, 0, \rho \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right).$$

é a autofunção associada ao autovalor $\lambda = -f(0,0,w_0)$. Isto significa que o ponto $y = y_0 + z$ possui a temperatura menor que a temperatura de equilíbrio, como esperado.

iii) Para os autovalores

$$\lambda = -g(0,0,w_0) \quad \text{e} \quad \lambda \neq -f(0,0,w_0),$$

temos v arbitrário, $u = 0$ e

$$-Rv + (A + 4\sigma w_0^3 + g(0,0,w_0))w = 0$$

com $w = \rho \phi_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$(k^2 + 4\sigma w_0^3 + g(0,0,w_0))\rho \phi_k = Rv$$

$$v = \rho \frac{k^2 + 4\sigma w_0^3 + g(0,0,w_0)}{R} \phi_k,$$

para $k = 0$ e $\rho > 0$ temos

$$v = \rho \frac{4\sigma w_0^3 + g(0,0,w_0)}{R} \frac{1}{\sqrt{\pi}} > 0,$$

não existe ϕ_k que satisfaça $v > 0$ ($y = y_0 + z > 0$), para $k = 1, 2, \dots$. Logo,

$$z = (0, \rho \frac{4\sigma w_0^3 + g(0, 0, w_0)}{R} \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \rho \frac{1}{\sqrt{\pi}})$$

é a autofunção associada ao autovalor $\lambda = -g(0, 0, w_0)$. Isto diz que o ponto $y = y_0 + z$ possui a temperatura maior que a temperatura de equilíbrio.

iv) Para os autovalores

$$\lambda \neq -f(0, 0, w_0), \lambda \neq -g(0, 0, w_0) \quad \text{e} \quad \lambda = k^2 + 4\sigma w_0^3,$$

onde $w = \rho \phi_k$, temos autofunções com $u = v = 0$. Portanto

$$z_k = (0, 0, \rho \phi_k)$$

é a autofunção associada ao autovalor positivo $\lambda = k^2 + 4\sigma w_0^3 > 0$. Em particular, $z = (0, 0, \rho \frac{1}{\sqrt{\pi}})$ é uma autofunção de $\lambda = 4\sigma w_0^3 > 0$.

Equilíbrio Zero Dependente do Espaço

Estudaremos a existência de soluções w_0 , dependente do espaço, da equação

$$w_{xx} + 2R - \sigma w^4 = 0 \Rightarrow w_{xx} - k(w) = 0$$

no domínio de A , $D(A) \subset H^1(-\pi/2, \pi/2)$.

Esta equação diferencial pode ser escrita como um sistema em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} w' = v \\ v' = k(w) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w' = v \\ v' = -2R + \sigma w^4. \end{cases} \quad (6.2.9)$$

Seja

$$X' = EX \quad (6.2.10)$$

a linearização de 6.2.9 em $(\bar{w}, 0)$, onde

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4\sigma \bar{w}^3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{w} = (2R\sigma^{-1})^{1/4}$$

e $X = (w, v)$ tangente em $(\bar{w}, 0)$. Os autovalores de E são $\pm\lambda$, $\lambda = \sqrt{4\sigma \bar{w}^3}$, com autovetores $(1, -\lambda)$ e $(1, \lambda)$, associado à $-\lambda$ e λ , respectivamente.

A matriz mudança de coordenada tem a forma

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda & \lambda \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2\lambda} \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix},$$

então a solução de 6.2.10 passando por $X_0 = (\alpha - \bar{w}, v_0)$ é dada por

$$X(x) = P \operatorname{diag}[e^{-\lambda(x+\pi/2)}, e^{\lambda(x+\pi/2)}] P^{-1} X_0$$

$$\begin{cases} w = \frac{\alpha - \bar{w}}{2} \left(e^{\sqrt{4\sigma\bar{w}^3}(x+\pi/2)} + e^{-\sqrt{4\sigma\bar{w}^3}(x+\pi/2)} \right) + \frac{v_0}{2\lambda} \left(e^{\sqrt{4\sigma\bar{w}^3}(x+\pi/2)} - e^{-\sqrt{4\sigma\bar{w}^3}(x+\pi/2)} \right) \\ v = \frac{(\alpha - \bar{w})\lambda}{2} \left(e^{\sqrt{4\sigma\bar{w}^3}(x+\pi/2)} - e^{-\sqrt{4\sigma\bar{w}^3}(x+\pi/2)} \right) + \frac{v_0}{2} \left(e^{\sqrt{4\sigma\bar{w}^3}(x+\pi/2)} + e^{-\sqrt{4\sigma\bar{w}^3}(x+\pi/2)} \right), \end{cases}$$

usando a condição de fronteira $v_0 = v(-\pi/2) = w'(-\pi/2) = 0$, temos

$$\begin{cases} w = \frac{\alpha - \bar{w}}{2} \left(e^{\sqrt{4\sigma\bar{w}^3}(x+\pi/2)} + e^{-\sqrt{4\sigma\bar{w}^3}(x+\pi/2)} \right) \\ v = \frac{(\alpha - \bar{w})\lambda}{2} \left(e^{\sqrt{4\sigma\bar{w}^3}(x+\pi/2)} - e^{-\sqrt{4\sigma\bar{w}^3}(x+\pi/2)} \right), \end{cases}$$

deduzimos

$$4\sigma\bar{w}^3 w^2 - v^2 = 4\sigma\bar{w}^3 (\alpha - \bar{w})^2.$$

Portanto, soluções de 6.2.9 passando por $(\alpha, 0)$ próxima a solução constante $(\bar{w}, 0)$ são quase hipérbole e são aproximada por curva solução de sua linearização 6.2.10 no ponto $(\bar{w}, 0)$.

As soluções com $\alpha - \bar{w} \neq 0$ não satisfaz a condição de fronteira $y(\pi/2) = w'(\pi/2) = 0$. Isto confirma o fato de que

$$Aw = -4\sigma\bar{w}^3 w$$

não possui solução não nula no domínio de A , $D(A)$. Concluimos que as soluções de equilíbrios são independentes do espaço

$$w_0 = \bar{w} = (2R\sigma^{-1})^{1/4}.$$

De fato, a energia total para o sistema 6.2.9 é

$$H(w, v) = T(v) + U(w),$$

onde $T(v) = v^2/2$ é a energia cinética e

$$U(w) = - \int_0^w k(s) ds = \int_0^w (2R - \sigma s^4) ds = 2Rw - \sigma \frac{w^5}{5}$$

é a energia potencial. Com esta definição de

$$H(w, v) = \frac{v^2}{2} + 2Rw - \sigma \frac{w^5}{5}$$

o sistema 6.2.9 pode ser escrita como um sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} w' = H_v \\ v' = -H_w. \end{cases}$$

Derivando $H(w, v)$ em relação a x

$$\frac{dH}{dx} = -k(w)w' + vv' = -v'v + vv' = 0,$$

concluimos que $H(w, v)$ é uma primeira integral do sistema. Assim, soluções de 6.2.9 com $(w, v) = (\alpha, 0)$ na fronteira $x = -\pi/2$ são dadas por

$$H(w, v) = H(\alpha, 0) = U(\alpha)$$

$$\frac{w'^2}{2} = U(\alpha) - U(w).$$

Como o zero $\bar{w} = (2R\sigma^{-1})^{1/4}$ da função $k(w)$ é um máximo local da função $U(w)$, então $(\bar{w}, 0)$ é um ponto sela para 6.2.9 e o seu retrato de fase é simétrico com respeito ao eixo w , (ver [28, teorema 3 página 172]).

Se $\alpha > \bar{w}$, então $U(w)$ é decrescente e conseqüentemente $w > \alpha > \bar{w}$. Analogamente, se $\alpha < \bar{w}$, então $U(w)$ é crescente e $w < \alpha < \bar{w}$. Assim,

$$w'^2 = 2[U(\alpha) - U(w)] \neq 0, \quad \text{para todo} \quad x \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Isto implica que $w'(\pi/2) \neq 0$. Portanto o sistema 6.2.9 não possui soluções dependentes do espaço no domínio de $A, D(A)$.

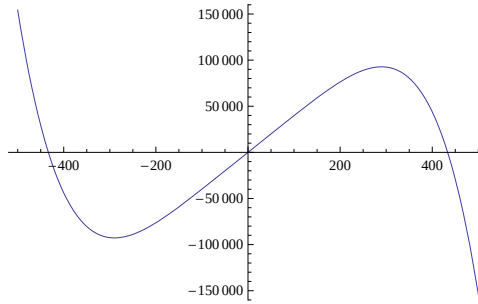


Figura 6.1 $U(w) = 2Rw - \sigma \frac{w^5}{5}$, $R = 200$

6.2.2 Estabilidade de Todos os Equilíbrios Brancos

Seja $y_0 = (u_0, 0, w_0)$ solução de equilíbrio das equações (6.2.1)-(6.2.3) com $u_0 \neq 0$, então $u = u_0$ e $w = w_0$ é solução do sistema

$$\begin{cases} f(u, 0, w) = 0 \\ h(u, 0, w) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [1 - \delta(C - 5(u-1) - w)^2](1-u) - \gamma = 0 \\ (2-u)R - \sigma w^4 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

Equilíbrio Branco Independente do Espaço

Analisaremos as soluções de equilíbrios $(u_0, 0, w_0)$ que não depende de x , isto é as soluções de

$$\begin{cases} [1 - \delta(C - 5(u-1) - w)^2](1-u) - \gamma = 0 \\ (2-u)R - \sigma w^4 = 0. \end{cases} \quad (6.2.11)$$

Para que $(u_0, 0, w_0)$ seja uma solução do sistema 6.2.11 é necessário que $u = u_0(w)$ satisfaça a equação $f(u, 0, w) = \left(1 - \delta(C - 5(u - 1) - w)^2\right)(1 - u) - \gamma = 0$.

Visto que o coeficiente de u^3 em $f(u, 0, w)$ é positivo, $f(0, 0, w) > 0$ para o intervalo de temperatura $286 < w < 315$,

$$f(1, 0, w) = -\gamma < 0 \quad \text{e} \quad f_u = -1 + O(\delta),$$

existe uma única solução $u = u_0(w)$ para $f(u, 0, w) = 0$ no intervalo $286 < w < 315$.

Podemos obter uma aproximação para $u = u_0(w)$ aplicando o Teorema da Função Implícita, fazendo uso do pequeno parâmetro δ e a Fórmula de Taylor.

Escrevendo a equação $f(u, 0, w) = 0$ como $f(\delta, u) = 0$, onde δ é visto como uma variável, temos para $(\delta, u) = (0, 1 - \gamma)$

$$f(\delta, u) = \left(1 - \delta(C - 5(u - 1) - w)^2\right)(1 - u) - \gamma$$

$$f(\delta, u) = 1 - u - \gamma - (1 - u)\delta(C - 5(u - 1) - w)^2$$

$$f(0, 1 - \gamma) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \delta}(0, 1 - \gamma) = -\gamma(C - 5\gamma - w)^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(0, 1 - \gamma) = -1 < 0.$$

Como $\frac{\partial f}{\partial u}$ é contínua, existem $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0,003265$ tais que

$$u \in J = (1 - \gamma - \varepsilon_0, 1 - \gamma + \varepsilon_0), \quad \delta \in I = (-\delta_0, \delta_0)$$

com $286 < w < 305$, consequentemente $(w - C - 5\gamma)^2$ não é muito grande, temos

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\delta, u) = -1 + \delta \left((C - 5(u - 1) - w)^2 + 10(1 - u)(C - 5(u - 1) - w) \right) < 0 \quad \text{em} \quad I \times J.$$

Assim, podemos escrever $u = u(\delta)$ no intervalo I em particular para $\delta_0 = 0,003265$. Tem-se

$$u(0) = 1 - \gamma$$

$$u'(\delta) = -\frac{\partial f / \partial \delta}{\partial f / \partial u}(\delta, u(\delta)).$$

$$u'(0) = -\frac{\partial f / \partial \delta}{\partial f / \partial u}(0, 1 - \gamma).$$

$$u'(0) = -\gamma(C + 5\gamma - w)^2.$$

Usando a Fórmula de Taylor para $u_0(\delta)$ temos que

$$u_0(\delta) = u_0(0) + u_0'(0)\delta + O(\delta^2)$$

$$u_0 = 1 - \gamma - \gamma\delta(w - C - 5\gamma)^2 + O(\delta^2). \quad (6.2.12)$$

Isolando u na segunda equação do sistema 6.2.11

$$(2 - u)R - \sigma w^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 2 - \sigma \frac{w^4}{R},$$

substituindo em

$$f(u, 0, w) = \left(1 - \delta(C - 5(u - 1) - w)^2\right)(1 - u) - \gamma$$

temos

$$f(R, w) = \left(1 - \delta\left(C - 5\left(1 - \sigma \frac{w^4}{R}\right) - w\right)^2\right)\left(-1 + \sigma \frac{w^4}{R}\right) - \gamma.$$

Supondo $286 < w < 305$, então

$$f(R, 286) = -1,20123 - \frac{4272780}{R^3} - \frac{13706,6}{R^2} + \frac{404,307}{R} < 0$$

para um grande intervalo de R , então é necessário que

$$f(R, 305) = 0,613534 - \frac{9642073,62}{R^3} + \frac{1333628}{R^2} - \frac{78,4526}{R} > 0$$

para garantir a existência de solução $w = w_0$ para $f(R, w) = 0$, isto determina um intervalo de valores para R . Resolvendo

$$f(R, 305) \geq 0 \quad \text{com} \quad R > 0$$

temos aproximadamente $77,88 \leq R \leq 357,95$. No entanto, para satisfazer $0 < u_0 < 1$ é necessário que $267 < R < 357$ com $286 < w_0 < 305$.

Estabilidade dos Equilíbrios Branco Independente do Espaço

A linearização do sistema (6.2.4) próximo a um equilíbrio y_0 é dada por

$$\frac{dz}{dt} + Lz = 0,$$

onde $L = B - C$,

$$L = \begin{bmatrix} a - F_u & -F_v & -F_w \\ -G_u & b - G_v & -G_w \\ R & -R & A + 4\sigma w^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f - uf_u & -uf_v & -uf_w \\ -vg_u & -g - vg_v & -vg_w \\ R & -R & A + 4\sigma w^3 \end{bmatrix},$$

para $y_0 = (u_0, 0, w_0)$ temos

$$L = \begin{bmatrix} -u_0 f_u(y_0) & -u_0 f_v(y_0) & -u_0 f_w(y_0) \\ 0 & -g(y_0) & 0 \\ R & -R & A + 4\sigma w_0^3 \end{bmatrix}.$$

Estudaremos os autovalores do operador L , isto é, os λ tais que

$$Lz = \lambda z$$

$$(L - \lambda I)z = (0, 0, 0),$$

$$\begin{cases} (-u_0 f_u(y_0) - \lambda)u - u_0 f_v(y_0)v - u_0 f_w(y_0)w = 0 \\ (-g(y_0) - \lambda)v = 0 \\ Ru - Rv + (A + 4\sigma w_0^3 - \lambda)w = 0. \end{cases} \quad (6.2.13)$$

Para perturbações $z = (u, v, w)$, com $w = \rho \phi_k$, ao equilíbrio $y_0 = (u_0, 0, w_0)$, onde ϕ_k são os autovetores de A associados aos autovalores k^2 , $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, o operador L da linearização é dada por

$$L = \begin{bmatrix} -u_0 f_u(y_0) & -u_0 f_v(y_0) & -u_0 f_w(y_0) \\ 0 & -g(y_0) & 0 \\ R & -R & k^2 + 4\sigma w_0^3 \end{bmatrix}.$$

Neste caso particular os zeros de

$$E(\lambda) = \det(L - \lambda I)$$

$$E(\lambda) = (-g - \lambda)[(-u_0 f_u - \lambda)(k^2 + 4\sigma w_0^3 - \lambda) + Ru_0 f_w]$$

são autovalores do operador L . Temos

$$\begin{aligned} (-g - \lambda) = 0 \quad \text{ou} \quad & (-u_0 f_u - \lambda)(k^2 + 4\sigma w_0^3 - \lambda) + Ru_0 f_w = 0 \\ \lambda = -g(y_0) \quad \text{ou} \quad & \lambda^2 + \lambda(u_0 f_u - k^2 - 4\sigma w_0^3) - u_0 f_u(k^2 + 4\sigma w_0^3) + Ru_0 f_w = 0, \end{aligned}$$

i) Vamos estudar o sinal do autovalor $\lambda = -g(u_0, 0, w_0)$.

Para o equilíbrio $y_0 = (u_0, 0, w_0)$, solução do sistema 6.2.11, segue-se que

$$\begin{cases} (2 - u_0)R - \sigma w_0^4 = 0 \\ f(u_0, 0, w_0) = 0 \end{cases}$$

$$1 - u_0 - \gamma = \delta(1 - u_0)(C - 5(u_0 - 1) - w_0)^2,$$

substituindo em

$$g(u_0, 0, w_0) = (1 - \delta(C - 5(u_0 + 1) - w_0)^2)(1 - u_0) - \gamma$$

$$g(u_0, 0, w_0) = \delta(C - 5(u_0 - 1) - w_0)^2(1 - u_0) - \delta(C - 5(u_0 + 1) - w_0)^2(1 - u_0)$$

$$g(u_0, 0, w_0) = 2\delta(1 - u_0)[(C - 5u_0 - w_0 + 5)^2 - (C - 5u_0 - w_0 - 5)^2]$$

$$g(u_0, 0, w_0) = 2\delta(1 - u_0)[10(C - 5u_0 - w_0) + 10(C - 5u_0 - w_0)]$$

$$g(u_0, 0, w_0) = 20\delta(1 - u_0)(C - 5u_0 - w_0).$$

Seja $(u_1, 0, w_1)$ o equilíbrio, para algum R_1 , que anula $g(u_0, 0, w_0)$, isto é $C - 5u_1 - w_1 = 0$. Substituindo em

$$1 - u_0 - \gamma = \delta(1 - u_0)(C - 5(u_0 - 1) - w_0)^2,$$

obtemos

$$\begin{aligned} (1 - 25\delta)(1 - u_1) &= \gamma \\ u_1 &= 1 - \gamma(1 - 25\delta)^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto

$$u_1 = b, \quad w_1 = C - 5b \quad \text{e} \quad R_1 = \frac{\sigma(C - 5b)^4}{2 - b}, \quad (6.2.14)$$

onde

$$b = 1 - \gamma(1 - 25\delta)^{-1} = 1 - \gamma + O(\delta) \quad (6.2.15)$$

$$b = 1 - 0,3(1 - 25 \times 0,003265)^{-1}$$

$$b = 1 - 0,3(1 - 0,081625)^{-1}$$

$$b = 0,6733, \quad w_1 = 292,13 \quad \text{e} \quad R_1 = 311,25.$$

Usando a aproximação para u_0

$$u_0(w) = 1 - \gamma - \gamma\delta(w - C - 5\gamma)^2 + O(\delta^2)$$

deduzimos que $C - 5u_0 = C - 5b + O(\delta) = w_1 + O(\delta)$, substituindo em

$$g(u_0, 0, w_0) = 20\delta(1 - u_0)(C - 5u_0 - w_0),$$

$$g(u_0, 0, w_0) = 20\delta(1 - u_0)(w_1 + O(\delta) - w_0),$$

logo

$$g(u_0, 0, w_0) > 0 \quad \text{para} \quad w_0 < w_1 + O(\delta)$$

$$g(u_0, 0, w_0) < 0 \quad \text{para} \quad w_0 > w_1 + O(\delta).$$

Para determinar a restrição que isto coloca sobre R , considere a equação

$$(2 - u_0)R - \sigma w_0^4 = 0$$

para o equilíbrio $y_0 = (u_0, 0, w_0)$ associado a radiação R . Visto que R e w_0 tem relação crescente,

$$w_0 < w_1 + O(\delta) \quad \text{implica que} \quad R < R_1 = \sigma(C - 5b)^4(2 - b)^{-1} = 311,25.$$

Concluimos que para $w_0 < w_1 + O(\delta)$ ($R < 311,25$), temos que $\lambda = -g(u_0, 0, w_0) < 0$ é um autovalor negativo para o operador L da linearização do sistema

$$\frac{dz}{dt} + Lz = 0.$$

Portanto $y_0 = (u_0, 0, w_0)$ é um equilíbrio **instável**.

Agora faremos uma análise da autofunção associada ao autovalor $\lambda = -g(u_0, 0, w_0)$. Seja $z = (u, v, w)$ uma perturbação ao equilíbrio $y_0 = (u_0, 0, w_0)$ com $v \geq 0$ e $w = \rho \phi_k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, então

$$\begin{cases} (-u_0 f_u(y_0) + g(y_0))u - u_0 f_v(y_0)v - u_0 f_w(y_0)\rho \phi_k = 0 \\ Ru - Rv + (k^2 + 4\sigma w_0^3 + g(y_0))\rho \phi_k = 0, \end{cases} \quad (6.2.16)$$

onde

$$\begin{aligned} f(u, v, w) &= \left(1 - \delta(C - 5(u - v - 1) - w)^2\right)(1 - u - v) - \gamma \\ f_u &= (1 - \delta(C - 5(u - v - 1) - w)^2)(-1) - 2\delta(C - 5(u - v - 1) - w_0)(-5)(1 - u - v) \\ f_u(y_0) &= -1 + \delta(C - 5(u_0 - 1) - w_0)^2 + 10\delta(C - 5(u_0 - 1) - w_0)(1 - u_0) \\ f_u(y_0) &= -1 + O(\delta) < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_v &= (1 - \delta(C - 5(u - v - 1) - w)^2)(-1) - 2\delta(C - 5(u - v - 1) - w_0)5(1 - u - v) \\ f_v(y_0) &= -1 + \delta(C - 5(u_0 - 1) - w_0)^2 - 10\delta(C - 5(u_0 - 1) - w_0)(1 - u_0) \\ f_v(y_0) &= -1 + O(\delta) < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_w &= -2\delta(C - 5(u - v - 1) - w)(1 - u - v)(-1) \\ f_w &= 2\delta(C + 5 - 5(u - v) - w)(1 - u - v) \\ f_w(u_0, 0, w_0) &= 2\delta(C + 5 - w_0 - 5u_0)(1 - u_0). \end{aligned}$$

usando a aproximação de u_0 para o equilíbrio branco, temos $C - 5u_0 = w_1 + O(\delta)$

$$f_w(u_0, 0, w_0) = 2\delta(w_1 + O(\delta) + 5 - w_0)(1 - u_0).$$

$$\begin{aligned} f_w(u_0, 0, w_0) &> 0 & \text{para} & \quad w_0 < w_1 + 5 + O(\delta) \\ f_w(u_0, 0, w_0) &< 0 & \text{para} & \quad w_0 > w_1 + 5 + O(\delta). \end{aligned}$$

Deduzimos da primeira equação do sistema 6.2.16

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_0 f_v(y_0)}{-u_0 f_u(y_0) + g(y_0)}v + \frac{u_0 f_w(y_0)}{-u_0 f_u(y_0) + g(y_0)}\rho \phi_k \\ u &= (-1 + O(\delta))v + O(\delta)\rho \phi_k \end{aligned}$$

substituindo na segunda equação

$$\begin{aligned} Ru - Rv + (k^2 + 4\sigma w_0^3 + g(y_0))\rho \phi_k &= 0 \\ v - u &= \frac{k^2 + 4\sigma w_0^3 + g(y_0)}{R}\rho \phi_k \end{aligned}$$

$$v \left(1 - \frac{u_0 f_v(y_0)}{-u_0 f_u(y_0) + g(y_0)} \right) = \left(\frac{u_0 f_w(y_0)}{-u_0 f_u(y_0) + g(y_0)} + \frac{k^2 + 4\sigma w_0^3 + g(y_0)}{R} \right) \rho \phi_k$$

para a existência de $v \geq 0$ é necessário $k = 0$, $\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ e ρ suficientemente pequeno

$$v(2 + O(\delta)) = \left(O(\delta) + \frac{4\sigma w_0^3}{R} \right) \frac{\rho}{\sqrt{\pi}}$$

$$v = \left(\frac{4\sigma w_0^3}{2R} + O(\delta) \right) \frac{\rho}{\sqrt{\pi}}.$$

Portanto o autoespaço associado a $\lambda = -g(u_0, 0, w_0)$ próximo ao equilíbrio $y_0 = (u_0, 0, w_0)$ é

$$(u, v, w) = \left(\left(-\frac{4\sigma w_0^3}{2R} + O(\delta) \right) \frac{\rho}{\sqrt{\pi}}, \left(\frac{4\sigma w_0^3}{2R} + O(\delta) \right) \frac{\rho}{\sqrt{\pi}}, \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} \right).$$

ii) Faremos uma análise para os autovalores λ que satisfazem

$$\lambda^2 + \lambda(u_0 f_u - k^2 - 4\sigma w_0^3) - u_0 f_u(k^2 + 4\sigma w_0^3) + R u_0 f_w = 0.$$

O delta e o termo independente c da equação do segundo grau acima são respectivamente

$$\Delta = (u_0 f_u - (k^2 + 4\sigma w_0^3))^2 + 4u_0 f_u(k^2 + 4\sigma w_0^3) - 4R u_0 f_w$$

$$\Delta = (u_0 f_u + k^2 + 4\sigma w_0^3)^2 - 4R u_0 f_w \quad \text{e}$$

$$c = -u_0 f_u(k^2 + 4\sigma w_0^3) + R u_0 f_w.$$

Tomando a aproximação de u_0 , $f_u(y_0)$ e $f_w(y_0)$ temos

$$\Delta = (-0,7 + k^2 + 4\sigma w_0^3)^2 - 1,29\sigma\delta w_0^4(297 - w_0) + O(\delta) > 0 \quad \text{e}$$

$$c = 0,7k^2 + 2,8\sigma w_0^3 + 0,32\sigma\delta w_0^4(297 - w_0) + O(\delta) > 0$$

para o intervalo de w considerado e $k = 0, 1, 2, \dots$. Assim,

$$\lambda = \frac{-u_0 f_u + k^2 + 4\sigma w_0^3 \pm \sqrt{(u_0 f_u + k^2 + 4\sigma w_0^3)^2 - 4R u_0 f_w}}{2}$$

são reais com

$$\lambda' = \frac{-u_0 f_u + k^2 + 4\sigma w_0^3 + \sqrt{(u_0 f_u + k^2 + 4\sigma w_0^3)^2 - 4R u_0 f_w}}{2} > 0$$

e também

$$\lambda'' = \frac{-u_0 f_u + k^2 + 4\sigma w_0^3 - \sqrt{(u_0 f_u + k^2 + 4\sigma w_0^3)^2 - 4R u_0 f_w}}{2} > 0$$

para todo $k = 0, 1, 2, \dots$.

As autofunções associadas aos autovalores λ' e λ'' são $z = (u, v, \rho\phi_k)$ que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} (-u_0 f_u(y_0) - \lambda)u - u_0 f_v(y_0)v - u_0 f_w(y_0)\rho\phi_k = 0 \\ (-g(y_0) - \lambda)v = 0 \\ Ru - Rv + (k^2 + 4\sigma w_0^3 - \lambda)\rho\phi_k = 0, \end{cases} \quad (6.2.17)$$

então $v = 0$ e

$$u = -\frac{u_0 f_w(y_0)}{u_0 f_u(y_0) + \lambda} \rho\phi_k = \frac{-k^2 - 4\sigma w_0^3 + \lambda}{R} \rho\phi_k.$$

Portanto

$$z = \left(-\frac{u_0 f_w(y_0)}{u_0 f_u(y_0) + \lambda} \rho\phi_k, 0, \rho\phi_k \right).$$

iii) Se $w_0 > w_1 = 292,13$ ($R > R_1 = 311,25$) temos

$$\lambda = -g(y_0) > 0, \quad \lambda = \lambda' > 0 \quad \text{e} \quad \lambda = \lambda'' > 0$$

para todo $k = 0, 1, 2, \dots$

Este autovalores são restrito as autofunções $z = (u, v, w)$ com $w = \rho\phi_k$. Assim, a princípio não podemos garantir a estabilidade do equilíbrio y_0 para este intervalo de valores de R .

6.2.3 Estabilidade de Todos os Equilíbrios Pretos

Seja $y_0 = (0, v_0, w_0)$ solução de equilíbrio das equações (6.2.1)-(6.2.3) com $v_0 \neq 0$, então $v = v_0$ e $w = w_0$ é solução do sistema

$$\begin{cases} g(0, v, w) = 0 \\ h(0, v, w) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [1 - \delta(C - 5(-v + 1) - w)^2](1 - v) - \gamma = 0 \\ (2 + v)R - \sigma w^4 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{cases}$$

Equilíbrio Preto Independente do Espaço

Analisaremos as soluções de equilíbrios independentes de x

$$\begin{cases} [1 - \delta(C - 5(-v + 1) - w)^2](1 - v) - \gamma = 0 \\ (2 + v)R - \sigma w^4 = 0. \end{cases} \quad (6.2.18)$$

Para que $y_0 = (0, v_0, w_0)$ seja uma solução do sistema 6.2.18 é necessário que $v = v_0(w)$ satisfaça a equação $g(0, v, w) = \left(1 - \delta(C - 5(-v + 1) - w)^2\right)(1 - v) - \gamma = 0$.

Visto que o coeficiente de v^3 em $g(0, v, w)$ é positivo, $g(0, 0, w) > 0$ para o intervalo de temperatura $276 < w < 305$,

$$g(0, 1, w) = -\gamma < 0 \quad \text{e} \quad g_v = -1 + O(\delta),$$

existe uma única solução $v = v_0(w)$ para $g(0, v, w) = 0$ no intervalo $276 < w < 305$.

De maneira análoga a seção do estudo dos equilíbrios brancos, podemos obter uma aproximação para $v = v_0(w)$, aplicando o Teorema da Função Implícita, fazendo uso do pequeno parâmetro δ e a Fórmula de Taylor.

$$v_0(w) = 1 - \gamma - \gamma\delta(w - C + 5\gamma)^2 + O(\delta^2), \quad (6.2.19)$$

a qual é válida se $(w - C + 5\gamma)^2$ não é muito grande.

Substituindo v_0 em

$$(2 + v)R - \sigma w^4 = 0$$

temos

$$(2 + 1 - \gamma - \gamma\delta(w - C + 5\gamma)^2 + O(\delta^2))R - \sigma w^4 = 0,$$

considerando $286 < w_0 < 305$ obtemos um intervalo de valores para R , $143 < R < 190$.

Estabilidade dos Equilíbrios Preto Independente do Espaço

A linearização do sistema (6.2.4) próximo a um equilíbrio y_0 é dada por

$$\frac{dz}{dt} + Lz = 0,$$

onde $L = B - C$,

$$L = \begin{bmatrix} a - F_u & -F_v & -F_w \\ -G_u & b - G_v & -G_w \\ R & -R & A + 4\sigma w^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f - uf_u & -uf_v & -uf_w \\ -vg_u & -g - vg_v & -vg_w \\ R & -R & A + 4\sigma w^3 \end{bmatrix},$$

para $y_0 = (0, v_0, w_0)$ temos

$$L = \begin{bmatrix} -f(y_0) & 0 & 0 \\ -v_0 g_u(y_0) & -v_0 g_v(y_0) & -v_0 g_w(y_0) \\ R & -R & A + 4\sigma w_0^3 \end{bmatrix},$$

Estudaremos os autovalores do operador L , isto é, os λ tais que

$$Lz = \lambda z$$

$$(L - \lambda I)z = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} (-f(y_0) - \lambda)u = 0 \\ -v_0 g_u(y_0)u + (-v_0 g_v(y_0) - \lambda)v - v_0 g_w(y_0)w = 0 \\ Ru - Rv + (A + 4\sigma w_0^3 - \lambda)w = 0. \end{cases} \quad (6.2.20)$$

Para perturbações $z = (u, v, w)$, com $w = \rho \phi_k$, ao equilíbrio $y_0 = (0, v_0, w_0)$, onde ϕ_k são os autovetores de A associado aos autovalores k^2 , $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, o operador L da linearização é dada por

$$L = \begin{bmatrix} -f(y_0) & 0 & 0 \\ -v_0 g_u(y_0) & -v_0 g_v(y_0) & -v_0 g_w(y_0) \\ R & -R & k^2 + 4\sigma w_0^3 \end{bmatrix}.$$

Neste caso particular os autovalores do operador L são os zeros de

$$E(\lambda) = \det(L - \lambda I)$$

$$E(\lambda) = (-f - \lambda)[(-v_0 g_v - \lambda)(k^2 + 4\sigma w_0^3 - \lambda) - R v_0 g_w].$$

Temos

$$\begin{aligned} (-f - \lambda) &= 0 & \text{ou} & & (-v_0 g_v - \lambda)(k^2 + 4\sigma w_0^3 - \lambda) - R v_0 g_w &= 0 \\ \lambda &= -f(y_0) & \text{ou} & & \lambda^2 + \lambda(v_0 g_v - k^2 - 4\sigma w_0^3) - v_0 g_v(k^2 + 4\sigma w_0^3) - R v_0 g_w &= 0. \end{aligned}$$

i) Vamos estudar o sinal do autovalor $\lambda = -f(0, v_0, w_0)$.

Visto que $y_0 = (0, v_0, w_0)$ é um equilíbrio, temos

$$\begin{cases} (2 + v_0)R - \sigma w_0^4 = 0 \\ g(0, v_0, w_0) = 0 \end{cases}$$

$$1 - v_0 - \gamma = \delta(1 - v_0)(C - 5(-v_0 + 1) - w_0)^2,$$

substituindo em

$$f(0, v_0, w_0) = (1 - \delta(C - 5(-v_0 + 1) - w_0)^2)(1 - v_0) - \gamma$$

$$f(0, v_0, w_0) = \delta(C - 5(-v_0 + 1) - w_0)^2(1 - v_0) - \delta(C - 5(-v_0 + 1) - w_0)^2(1 - v_0)$$

$$f(0, v_0, w_0) = \delta(1 - v_0)[(C + 5v_0 - w_0 - 5)^2 - (C + 5v_0 - w_0 + 5)^2]$$

$$f(0, v_0, w_0) = \delta(1 - v_0)[-10(C + 5v_0 - w_0) - 10(C + 5v_0 - w_0)]$$

$$f(0, v_0, w_0) = 20\delta(1 - v_0)(w_0 - C - 5v_0),$$

seja $(0, v_2, w_2)$ o equilíbrio que anula $f(0, v_0, w_0)$ para algum R_2 , isto é $w_2 - C - 5v_2 = 0$. Substituindo em

$$1 - v_0 - \gamma = \delta(1 - v_0)(C - 5(-v_0 + 1) - w_0)^2,$$

obtemos

$$(1 - 25\delta)(1 - v_2) = \gamma$$

$$v_2 = 1 - \gamma(1 - 25\delta)^{-1}$$

$$v_2 = b, \quad w_2 = C + 5b \quad \text{e} \quad R_2 = \frac{\sigma(C + 5b)^4}{2 + b}, \quad (6.2.21)$$

onde

$$b = 1 - \gamma(1 - 25\delta)^{-1} = 1 - \gamma + O(\delta) \quad (6.2.22)$$

$$b = 0,6733, \quad w_2 = 298,86 \quad \text{e} \quad R_2 = 169,22.$$

Usando a aproximação para v_0 (6.2.19), deduzimos que $C + 5v_0 = C + 5b + O(\delta) = w_2 + O(\delta)$, substituindo em

$$\begin{aligned} f(0, v_0, w_0) &= 20\delta(1 - u_0)(w_0 - C - 5u_0), \\ f(0, v_0, w_0) &= 20\delta(1 - u_0)(w_0 - w_2 + O(\delta)), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} f(0, v_0, w_0) &> 0 & \text{para} & \quad w_0 > w_2 + O(\delta) \\ f(0, v_0, w_0) &< 0 & \text{para} & \quad w_0 < w_2 + O(\delta). \end{aligned}$$

Para determinar a restrição que isto coloca sobre R , considere a equação

$$(2 + v_0)R - \sigma w_0^4 = 0$$

para o equilíbrio $y_0 = (0, v_0, w_0)$ associado a radiação R . Visto que R e w_0 tem relação crescente,

$$w_0 > w_2 + O(\delta) \quad \text{implica que} \quad R > R_2 = \sigma(C + 5b)^4(2 + b)^{-1} = 169,22.$$

Desta forma concluímos que para $w_0 > w_2 + O(\delta)$ ($R > 169,22$) temos $\lambda = -f(0, v_0, w_0) < 0$ é um autovalor negativo para o operador L da linearização do sistema

$$\frac{dz}{dt} + Lz = 0.$$

Portanto $y_0 = (0, v_0, w_0)$ é um ponto de equilíbrio **instável**.

Determinaremos as autofunções de $\lambda = -f(0, v_0, w_0)$. Seja $z = (u, v, w)$ perturbações ao equilíbrio $y_0 = (0, v_0, w_0)$ com $u \geq 0$ e $w = \rho \phi_k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, temos

$$\begin{cases} -v_0 g_u(y_0)u + (-v_0 g_v(y_0) + f(y_0))v - v_0 g_w(y_0)\rho \phi_k = 0 \\ Ru - Rv + (k^2 + 4\sigma w_0^3 + f(y_0))\rho \phi_k = 0, \end{cases} \quad (6.2.23)$$

onde

$$\begin{aligned} g(u, v, w) &= (1 - \delta(C - 5(u - v + 1) - w)^2)(1 - u - v) - \gamma \\ g_u &= (1 - \delta(C - 5(u - v + 1) - w)^2)(-1) - 2\delta(C - 5(u - v + 1) - w_0)(-5)(1 - u - v) \\ g_u(y_0) &= -1 + \delta(C - 5(-v_0 + 1) - w_0)^2 + 10\delta(C - 5(-v_0 + 1) - w_0)(1 - v_0) \\ g_u(y_0) &= -1 + O(\delta) < 0. \end{aligned}$$

$$g_v = (1 - \delta(C - 5(u - v + 1) - w)^2)(-1) - 2\delta(C - 5(u - v + 1) - w_0)5(1 - u - v)$$

$$g_v(y_0) = -1 + \delta(C - 5(-v_0 + 1) - w_0)^2 - 10\delta(C - 5(-v_0 + 1) - w_0)(1 - v_0)$$

$$g_v(y_0) = -1 + O(\delta) < 0.$$

$$g_w = -2\delta(C - 5(u - v + 1) - w)(1 - u - v)(-1)$$

$$g_w = 2\delta(C - 5 - 5(u - v) - w)(1 - u - v)$$

$$g_w(0, v_0, w_0) = 2\delta(C - 5 - w_0 + 5v_0)(1 - v_0).$$

Usando a aproximação de v_0 (6.2.19), temos $C + 5v_0 = w_2 + O(\delta)$

$$g_w(0, v_0, w_0) = 2\delta(w_2 + O(\delta) - 5 - w_0)(1 - v_0).$$

$$g_w(0, v_0, w_0) > 0 \quad \text{para} \quad w_0 < w_2 - 5 + O(\delta)$$

$$g_w(0, v_0, w_0) < 0 \quad \text{para} \quad w_0 > w_2 - 5 + O(\delta).$$

Deduzimos da primeira equação do sistema 6.2.23

$$v = \frac{v_0 g_u(y_0)}{-v_0 g_v(y_0) + f(y_0)} u + \frac{v_0 g_w(y_0)}{-v_0 g_v(y_0) + f(y_0)} \rho \phi_k$$

$$v = (-1 + O(\delta))u + O(\delta)\rho \phi_k$$

substituindo na segunda equação

$$Ru - Rv + (k^2 + 4\sigma w_0^3 + f(y_0))\rho \phi_k = 0$$

$$u - v = -\frac{k^2 + 4\sigma w_0^3 + f(y_0)}{R}\rho \phi_k$$

$$u\left(1 - \frac{v_0 g_u(y_0)}{-v_0 g_v(y_0) + f(y_0)}\right) = \left(\frac{v_0 g_w(y_0)}{-v_0 g_v(y_0) + f(y_0)} - \frac{k^2 + 4\sigma w_0^3 + f(y_0)}{R}\right)\rho \phi_k$$

para a existência de $u \geq 0$ é necessário $k = 0$, $\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ e ρ suficientemente pequeno

$$u(2 + O(\delta)) = \left(O(\delta) - \frac{4\sigma w_0^3}{R}\right)\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}$$

$$u = \left(-\frac{4\sigma w_0^3}{2R} + O(\delta)\right)\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}.$$

Portanto o autoespaço associado a $\lambda = -f(0, v_0, w_0)$ próximo ao equilíbrio $y_0 = (0, v_0, w_0)$ é

$$(u, v, w) = \left(\left(-\frac{4\sigma w_0^3}{2R} + O(\delta)\right)\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}, \left(\frac{4\sigma w_0^3}{2R} + O(\delta)\right)\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}, \frac{\rho}{\sqrt{\pi}}\right).$$

ii) Estudaremos os autovalores λ que satisfazem

$$\lambda^2 + \lambda(v_0 g_v - k^2 - 4\sigma w_0^3) - v_0 g_v(k^2 + 4\sigma w_0^3) - Rv_0 g_w = 0.$$

O valor de delta e do termo independente da equação são

$$\Delta = (v_0 g_v - (k^2 + 4\sigma w_0^3))^2 + 4v_0 g_v (k^2 + 4\sigma w_0^3) + 4R v_0 g_w$$

$$\Delta = (v_0 g_v + k^2 + 4\sigma w_0^3)^2 + 4R v_0 g_w$$

$$c = -v_0 g_v (k^2 + 4\sigma w_0^3) - R v_0 g_w.$$

Tomando a aproximação de v_0 , $f_v(y_0)$ e $g_w(y_0)$ temos, para o intervalo de w considerado e todo $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\Delta = (-0,7 + k^2 + 4\sigma w_0^3)^2 + 0,62\sigma\delta w_0^4(294 - w_0) > 0$$

$$c = 0,7k^2 + 2,8\sigma w_0^3 - 0,16\sigma\delta w_0^4(294 - w_0) > 0.$$

Assim,

$$\lambda = \frac{-v_0 g_v + k^2 + 4\sigma w_0^3 \pm \sqrt{(v_0 g_v + k^2 + 4\sigma w_0^3)^2 + 4R v_0 g_w}}{2}$$

é real com

$$\lambda' = \frac{-v_0 g_v + k^2 + 4\sigma w_0^3 + \sqrt{(v_0 g_v + k^2 + 4\sigma w_0^3)^2 + 4R v_0 g_w}}{2} > 0$$

e

$$\lambda'' = \frac{-v_0 g_v + k^2 + 4\sigma w_0^3 - \sqrt{(v_0 g_v + k^2 + 4\sigma w_0^3)^2 + 4R v_0 g_w}}{2} > 0.$$

As autofunções associadas aos autovalores λ' e λ'' são $z = (u, v, \rho\phi_k)$ que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} (-f(y_0) - \lambda)u = 0 \\ -v_0 g_u(y_0)u + (-v_0 g_v(y_0) - \lambda)v - v_0 g_w(y_0)\rho\phi_k = 0 \\ Ru - Rv + (k^2 + 4\sigma w_0^3 - \lambda)\rho\phi_k = 0, \end{cases} \quad (6.2.24)$$

temos $u = 0$ e

$$v = -\frac{v_0 g_w(y_0)}{v_0 g_v(y_0) + \lambda} \rho\phi_k = \frac{k^2 + 4\sigma w_0^3 - \lambda}{R} \rho\phi_k.$$

Portanto

$$z = (0, \frac{v_0 g_w(y_0)}{v_0 g_v(y_0) + \lambda} \rho\phi_k, \rho\phi_k).$$

iii) Se $w_0 < w_2 = 298,86$ ($R < R_2 = 169,22$), então

$$\lambda = -f(y_0) > 0 \quad \lambda = \lambda' > 0 \quad \text{e} \quad \lambda = \lambda'' > 0$$

para todo $k = 0, 1, 2, \dots$

A princípio não podemos determinar a estabilidade do equilíbrio $y_0 = (0, v_0, w_0)$, para este intervalo de valores de R , tendo em vista a restrição de $z = (u, v, w)$ próximo ao equilíbrio y_0 com $w = \rho\phi_k$.

6.2.4 Estabilidade do Equilíbrio de Coexistência

Seja $y_0 = (u_0, v_0, w_0)$ solução de equilíbrio das equações (6.2.1)-(6.2.3) com $u_0 \neq 0$ e $v_0 \neq 0$, então $u = u_0$, $v = v_0$ e $w = w_0$ é solução do sistema

$$\begin{cases} f(u, v, w) = 0 \\ g(u, v, w) = 0 \\ h(u, v, w) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - \delta(C - 5(u - v - 1) - w)^2)(1 - u - v) - \gamma = 0 \\ (1 - \delta(C - 5(u - v + 1) - w)^2)(1 - u - v) - \gamma = 0 \\ (2 - u + v)R - \sigma w^4 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

Equilíbrio de Coexistência Independente do Espaço

Analisaremos as soluções de equilíbrios independente de x . O equilíbrio de coexistência $y_0 = (u_0, v_0, w_0)$ é solução do sistema de equações

$$\begin{cases} (1 - \delta(C - 5(u - v - 1) - w)^2)(1 - u - v) - \gamma = 0 \\ (1 - \delta(C - 5(u - v + 1) - w)^2)(1 - u - v) - \gamma = 0 \\ (2 - u + v)R - \sigma w^4 = 0. \end{cases} \quad (6.2.25)$$

Comparando as duas primeiras equações

$$\delta(1 - u - v)((C - 5(u - v - 1) - w)^2 - (C - 5(u - v + 1) - w)^2) = 0,$$

$$\delta(1 - u - v)((C - 5(u - v) - w + 5)^2 - (C - 5(u - v) - w - 5)^2) = 0,$$

como $(1 - u - v) \neq 0$ temos

$$20(C - 5(u - v) - w) = 0$$

$$C - 5u + 5v - w = 0$$

$$u - v = \frac{C - w}{5},$$

substituindo na primeira equação

$$(1 - 25\delta)(1 - u - v) - \gamma = 0$$

$$1 - u - v = \gamma(1 - 25\delta)^{-1}$$

$$u + v = 1 - \gamma(1 - 25\delta)^{-1}$$

$$u + v = b$$

$$u_0 = \frac{C - w + 5b}{10}, \quad v_0 = \frac{w - C + 5b}{10}. \quad (6.2.26)$$

Usando os valores de w_1 e w_2 (6.2.14 - 6.2.21) temos

$$u_0 = \frac{w_2 - w}{10}, \quad v_0 = \frac{w - w_1}{10}. \quad (6.2.27)$$

O quadro acima mostra que a fase de coexistência degenera em fase branca $(u_0(w), 0, w)$ em $w = w_1$ ($v_0(w) = 0$) e em fase preta $(0, v_0(w), w)$ em $w = w_2$ ($u_0(w) = 0$). Para $w_1 < w < w_2$, temos que $u_0(w)$ e $v_0(w)$ estão entre 0 e 1, para w fora deste intervalo ou $u_0(w)$ ou $v_0(w)$ é negativo.

A fase de coexistência $(u_0(w), v_0(w), w)$ existe para $w_1 < w < w_2$. A temperatura de equilíbrio correspondente w_0 é uma solução de

$$[2 - u + v]R - \sigma w^4 = 0.$$

Usando os valores de $u_0(w)$ e $v_0(w)$ (6.2.26) obtemos

$$\left[2 + \frac{w - C}{5}\right]R - \sigma w^4 = 0. \quad (6.2.28)$$

Como mostrado por outros pesquisadores [35]-[36], isto mostra que a temperatura de equilíbrio na fase de coexistência do sistema independente do espaço não depende dos valores de u ou de v .

Seja

$$m(w, R) = \left[2 + \frac{w - C}{5}\right]R - \sigma w^4,$$

então

$$\begin{cases} m(w_1, R) = \left[2 + \frac{w_1 - C}{5}\right]R - \sigma w_1^4 \\ m(w_2, R) = \left[2 + \frac{w_2 - C}{5}\right]R - \sigma w_2^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(w_1, R) = (2 - b)R - \sigma w_1^4 \\ m(w_2, R) = (2 + b)R - \sigma w_2^4. \end{cases}$$

Logo

$$\begin{cases} m(w_1, R_1) = (2 - b)R_1 - \sigma w_1^4 = 0 \\ m(w_2, R_2) = (2 + b)R_2 - \sigma w_2^4 = 0, \end{cases}$$

consequentemente, para $R_2 < R < R_1$

$$m(w_1, R) < m(w_1, R_1) < 0 \quad \text{e} \quad m(w_2, R) > m(w_2, R_2) > 0.$$

Para $w_1 < w < w_2$,

$$m'(w, R) = \frac{R}{5} - 4\sigma w^3$$

$$5m'(w, R) = R - 20\sigma w^3,$$

usando $R > R_2 = \sigma(2 + b)^{-1}w_2^4$

$$5m'(w, R) > \sigma(2 + b)^{-1}w_2^4 - 20\sigma w_2^3$$

$$5(2 + b)m'(w, R) > \sigma w_2^4 - 20\sigma(2 + b)w_2^3$$

$$\begin{aligned}
5(2+b)m'(w, R) &> \sigma w_2^3(w_2 - 20(2+b)) \\
5(2+b)m'(w, R) &> \sigma w_2^3(C + 5b - 20(2+b)) \\
5(2+b)m'(w, R) &> \sigma w_2^3(C - 40 - 15b) > 0.
\end{aligned}$$

Assim, existe uma única solução de $m(w, R) = 0$ e uma única fase de coexistência.

Estabilidade do Equilíbrio de Coexistência Independente do Espaço

Vamos analisar a estabilidade do equilíbrio de coexistência. A linearização do sistema (6.2.4) próximo a um equilíbrio y_0 é dada por

$$\frac{dz}{dt} + Lz = 0,$$

onde $L = B - C$

$$L = \begin{bmatrix} a - F_u & -F_v & -F_w \\ -G_u & b - G_v & -G_w \\ R & -R & A + 4\sigma w^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f - uf_u & -uf_v & -uf_w \\ -vg_u & -g - vg_v & -vg_w \\ R & -R & A + 4\sigma w^3 \end{bmatrix},$$

para $y_0 = (u_0, v_0, w_0)$ temos

$$L = \begin{bmatrix} -u_0 f_u & -u_0 f_v & -u_0 f_w \\ -v_0 g_u & -v_0 g_v & -v_0 g_w \\ R & -R & A + 4\sigma w_0^3 \end{bmatrix}.$$

Estudaremos os autovalores do operador L , isto é, os λ tais que

$$Lz = \lambda z$$

$$(L - \lambda I)z = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} (-u_0 f_u(y_0) - \lambda)u - u_0 f_v(y_0)v - u_0 f_w(y_0)w = 0 \\ -v_0 g_u(y_0)u + (-v_0 g_v(y_0) - \lambda)v - v_0 g_w(y_0)w = 0 \\ Ru - Rv + (A + 4\sigma w_0^3 - \lambda)w = 0. \end{cases} \quad (6.2.29)$$

Para perturbações $z = (u, v, w)$ do equilíbrio $y_0 = (u_0, v_0, w_0)$, com $w = \rho \phi_k$, onde ϕ_k são os autovetores de A associado aos autovalores k^2 , $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, o operador L é da forma

$$L = \begin{bmatrix} -u_0 f_u(y_0) & -u_0 f_v(y_0) & -u_0 f_w(y_0) \\ -v_0 g_u(y_0) & -v_0 g_v(y_0) & -v_0 g_w(y_0) \\ R & -R & k^2 + 4\sigma w_0^3 \end{bmatrix}.$$

Neste caso particular os autovalores do operador L são os zeros de

$$E(\lambda) = \det(L - \lambda I)$$

$$E(\lambda) = \begin{vmatrix} -u_0 f_u(y_0) - \lambda & -u_0 f_v(y_0) & -u_0 f_w(y_0) \\ -v_0 g_u(y_0) & -v_0 g_v(y_0) - \lambda & -v_0 g_w(y_0) \\ R & -R & k^2 + 4\sigma w_0^3 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Expandindo o determinante usando a terceira coluna, temos

$$E(\lambda) = (k^2 + 4\sigma w_0^3 - \lambda) \begin{vmatrix} -u_0 f_u - \lambda & -u_0 f_v \\ -v_0 g_u & -v_0 g_v - \lambda \end{vmatrix} + v_0 g_w \begin{vmatrix} -u_0 f_u - \lambda & -u_0 f_v \\ R & -R \end{vmatrix} - u_0 f_w \begin{vmatrix} -v_0 g_u & -v_0 g_v - \lambda \\ R & -R \end{vmatrix}. \quad (6.2.30)$$

Vamos calcular os determinantes menores. Temos que

$$\begin{cases} C - 5u_0 + 5v_0 - w_0 = 0 \\ u_0 + v_0 = b, \end{cases}$$

então

$$\begin{aligned} f_u(y_0) &= -1 + 25\delta + 50\delta(1-b) \\ f_v(y_0) &= -1 + 25\delta - 50\delta(1-b) \\ f_w(y_0) &= 10\delta(1-b) \\ g_u(y_0) &= -1 + 25\delta - 50\delta(1-b) \\ g_v(y_0) &= -1 + 25\delta + 50\delta(1-b) \\ g_w(y_0) &= -10\delta(1-b). \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} f_v(y_0) &= g_u(y_0) \\ f_u(y_0) &= g_v(y_0) \\ f_w(y_0) &= -g_w(y_0), \end{aligned}$$

consequentemente

$$\begin{aligned} f_u g_v - g_u f_v &= (-1 + 25\delta + 50\delta(1-b))^2 - (-1 + 25\delta - 50\delta(1-b))^2 \\ f_u g_v - g_u f_v &= 100\delta(-1 + 25\delta)(1-b) + 100\delta(-1 + 25\delta)(1-b) \\ f_u g_v - g_u f_v &= -200\delta(1-b) + 5000\delta^2(1-b) \\ f_u g_v - g_u f_v &= \alpha\delta + O(\delta^2), \end{aligned}$$

onde $\alpha = -200(1-b) < 0$ é uma constante negativa e

$$\begin{aligned} u_0 f_u + v_0 g_v &= (u_0 + v_0) f_u \\ u_0 f_u + v_0 g_v &= b(-1 + 25\delta + 50\delta(1-b)) = -b + 25b\delta + 50b\delta(1-b) \\ u_0 f_u + v_0 g_v &= -b + O(\delta). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} -u_0 f_u - \lambda & -u_0 f_v \\ -v_0 g_u & -v_0 g_v - \lambda \end{array} \right| &= \lambda^2 - \lambda(b + O(\delta)) + u_0 v_0 \alpha \delta + O(\delta^2), \\ \left| \begin{array}{cc} -u_0 f_u - \lambda & -u_0 f_v \\ R & -R \end{array} \right| &= R(-\lambda + u_0 f_u + u_0 f_v) = R(-\lambda + 2u_0(-1 + 25\delta)), \\ \left| \begin{array}{cc} -v_0 g_u & -v_0 g_v - \lambda \\ R & -R \end{array} \right| &= R(v_0 g_u + v_0 g_v + \lambda) = R(\lambda + 2v_0(-1 + 25\delta)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &v_0 g_w \left| \begin{array}{cc} -u_0 f_u - \lambda & -u_0 f_v \\ R & -R \end{array} \right| - u_0 f_w \left| \begin{array}{cc} -v_0 g_u & -v_0 g_v - \lambda \\ R & -R \end{array} \right| \\ &= g_w R [v_0(-\lambda + 2u_0(-1 + 25\delta)) + u_0(-\lambda + 2v_0(-1 + 25\delta))] \\ &= -10\delta(1-b)R[-b\lambda + 4u_0 v_0(-1 + 25\delta)] \\ &= 40R(1-b)u_0 v_0 \delta + 10Rb(1-b)\delta\lambda - 1000R(1-b)u_0 v_0 \delta^2 \\ &= 40R(1-b)u_0 v_0 \delta + a(\delta)\lambda + O(\delta^2). \end{aligned}$$

A equação $E(\lambda) = 0$ toma a forma

$$(k^2 + 4\sigma w_0^3 - \lambda)[\lambda^2 - \lambda(b + O(\delta)) + u_0 v_0 \alpha \delta + O(\delta^2)] + 40R(1-b)u_0 v_0 \delta + a(\delta)\lambda + O(\delta^2) = 0,$$

como o coeficiente de λ^3 em $E(\lambda)$ é negativo e

$$E(0) = (k^2 + 4\sigma w_0^3)(u_0 v_0 \alpha \delta + O(\delta^2)) + 40R(1-b)u_0 v_0 \delta + O(\delta^2) < 0,$$

para k suficientemente grande, então $E(\lambda) = 0$ possui uma raiz negativa. Portanto $y_0 = (u_0, v_0, w_0)$ é **instável**.

6.3 Sistema Dinâmicos e Estabilidade de Liapunov

Definição 6.2. Um *sistema dinâmico* (semigrupo não linear) em um espaço métrico C é uma família de aplicações $\{S(t) : C \rightarrow C, t \geq 0\}$ tal que

- (i) para cada $t \geq 0$, $S(t)$ é contínua de C em C ;
- (ii) para cada $x \in C$, $t \rightarrow S(t)x$ é contínua;
- (iii) $S(0) = I$ em C ;
- (iv) $S(t)(S(s)x) = S(t+s)x$ para todo $x \in C$ e $t, s \geq 0$.

Exemplo 6.3.1. Suponha A setorial em um espaço de Banach X , V um conjunto aberto em X^α para algum $0 \leq \alpha < 1$, e $f : V \rightarrow X$ é localmente Lipschitziana. Assuma que C é subconjunto de fechado de V e que para qualquer solução $x(\cdot)$ de $dx/dt + Ax = f(x)$, $x(0) \in C$ implica que a solução existe e $x(t) \in C$ para todo $t \geq 0$ (C é positivamente invariante). Se $x(t, x_0)$ é a solução no instante t com valor inicial $x(0, x_0) = x_0$, então

$$S(t)x_0 = x(t, x_0), \quad (x_0 \in C, t \geq 0)$$

define um sistema dinâmico em C , na topologia induzida de X^α .

Sejam $C = \{(u, v, w) \in X^{1/2} \mid u \geq 0, v \geq 0, \text{ e } w - 280 \geq 0\}$, fechado positivamente invariante, e $y(t; t_0, y_0)$ a solução global do problema de valor inicial, associado ao modelo retroalimentação clima-vegetação,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + By = \mathcal{F}(y) & t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

no espaço de Banach $X = L^\infty(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times L^\infty(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times L^2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, com $y_0 \in C$. Pela proposição 5.2 concluímos que

$$S(t)y_0 = y(t; t_0, y_0) \quad (y_0 \in C, t \geq t_0),$$

define um sistema dinâmico em C , na topologia induzida de $X^{1/2}$.

Definição 6.3. Seja $\{S(t), t \geq 0\}$ um sistema dinâmico em C e para qualquer $x \in C$, seja $\gamma(x) = \{S(t)x, t \geq 0\}$ a *órbita positiva* passando por x . Dizemos que x é um *ponto de equilíbrio* se $\gamma(x) = \{x\}$; $\gamma(x)$ é uma *órbita periódica* se existe $p > 0$ tal que $\gamma(x) = \{S(t)x, 0 \leq t \leq p\} \neq \{x\}$. $\gamma(x)$ (ou as vezes um ponto x) é *estável* se

$$S(t)y \rightarrow S(t)x$$

quando $y \rightarrow x$, $y \in C$, uniformemente em $t \geq 0$; isto é, se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $t \geq 0$,

$$\text{dist}(S(t)x, S(t)y) < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad \text{dist}(x, y) < \delta, \quad y \in C.$$

Uma órbita $\gamma(x)$ é *instável* se não é estável. Uma órbita $\gamma(x)$ é *assintoticamente estável uniformemente* se é estável e também existe uma vizinhança $V = \{y \in C; \text{dist}(x, y) < r\}$ tal que

$$\text{dist}(S(t)y, S(t)x) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow +\infty,$$

uniformemente para $y \in V$.

Definição 6.4. Seja $\{S(t), t \geq 0\}$ um sistema dinâmico em C . Uma *função de Liapunov* é uma função contínua a valores reais V em C tal que

$$\dot{V}(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \{V(S(t)x) - V(x)\} \leq 0$$

para todo $x \in C$. Não excluimos a possibilidade $\dot{V}(x) = -\infty$.

Teorema 6.3. *Seja $\{S(t), t \geq 0\}$ um sistema dinâmico em C , e seja 0 um ponto de equilíbrio em C . Suponha que V é uma função de Liapunov em C a qual satisfaz $V(0) = 0$, $V(x) \geq c(\|x\|)$ para $x \in C$, $\|x\| = \text{dist}\{x, 0\}$, onde $c(\cdot)$ é uma função contínua estritamente crescente, $c(0) = 0$, e $c(r) > 0$ para $r > 0$. Então 0 é estável.*

Suponha em adição que $\dot{V}(x) \leq -c_1(\|x\|)$, onde $c_1(\cdot)$ é também contínua, crescente e positiva, com $c_1(0) = 0$. Então 0 é assintoticamente estável uniformemente.

De acordo com ([1]-[2]) soluções numéricas das equações (6.2.1-6.2.3) sugerem convergência para uma solução de equilíbrio estável. Fica para trabalhos futuros o estudo da existência de tal solução de equilíbrio e a análise de sua estabilidade, usando uma função de Liapunov, visto que existe um sistema dinâmico $\{S(t), t \geq 0\}$ para o modelo.

Referências Bibliográficas

- [1] B. Adams and J. Carr. Spatial pattern formationa in a model of vegetation-climate feed-back. *Institute Physics Publishing Nonlinearity*, (16):1339–1357, 2003.
- [2] B. Adams, J. Carr, T. M. Lenton, and A. White. One-dimensional daisyworld: spatial interaction and pattern formation. *J. Theor. B.*, (223):505–513, 2003.
- [3] Robert A. Adams. Sobolev spaces. In *Pure and Applied Mathematics*, number 65. Academic Press, 1975.
- [4] W. Von Bloh, A. Block, and P. T. Schellnluder. Self-stabilization of the biosphere under glolgal change: a tutorial geophysical approach. *Tellus B*, (49):249–62, 1997.
- [5] V. Brovkin, M. Claussen, V. Petoukhov, and Ganopolski. On the stability of the sahara/sahel region. *J. Geophys. Res.*, 103, 1998.
- [6] P. N. Brow, G. D. Byrne, and Hindmarsh. Vode: a variable coefficient ode solver siam. *J. Sci. Stat. Comput.*, (10):1038–51, 1989.
- [7] H. Brézis. *Análisis funcional Teoría y aplicaciones*. Masson, Paris, 1983.
- [8] J. Carr. Aplications of centre manifold theory. In *Applied Mathematical Sciences*, number 35. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [9] R. N. Carter and S. D. Prince. Epidemic models used to explain biogeographical distribution limits. *Nature*, (293):644–5, 1988.
- [10] A. N. Carvalho, S. M. Oliva, A. L. Pereira, and A. Rodriguez-Bernal. Attractors for parabolic problems with nonlinear boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 207(2):409–461, 1997.
- [11] E.A. Coddington and N. Levison. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1995.
- [12] John B. Conway. Functional of one complex variable. In *Gradate Texts in Mathematics*, number 11. Springer Verlag, 2 edition, 1978.
- [13] A. Friedman. *Partial Differential Equation*. Holt and Rinehart and Winston, New York, 1969.

- [14] S. De Gregorio, A. Pielke, and G. A. Dalu. Feedback between a simple biosystem and the temperature of the earth. *J. Nonlinear Sci.*, (2):263–92, 1992.
- [15] S. P. Harding and J. E. Lovelock. Exploiter-mediator coexistence and frequency-dependent selection in a numerical model of biodiversity. *J. Theor. Biol.*, (182):109–16, 1996.
- [16] Dan Henry. Geometric theory of semilinear parabolic equations. In *Lecture Notes in Mathematics*, number 840. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [17] M. Hirsch and S. Smale. Differential equations, dynamical systems, and linear algebra. In *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, New York, 1974.
- [18] C. Samuel Höning. *Análise funcional e o problema de Sturm-Liouville*. Edgard Blücher, SP, Brasil, 1978.
- [19] F. Hoppenstadt. Asymptotic series solutions of some nonlinear parabolic equations with a small parameter. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, (35):284–298, 1969.
- [20] J. H. Koelslag, P. T. Saunders, and J. A. Wessels. Glucose homeostasis with infinite gain: further lessons from the daisyworld parable? *J. Endocrinol.*, (154):187–92, 1997.
- [21] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, 1989.
- [22] T. M. Lenton and J. E. Lovelock. Daisyworld is darwinian: constraints on adaptation are important for planetary self-regulation. *J. Theor. Biol.*, (206):109–14, 2000.
- [23] J. E. Lovelock. *The ages of Gaia. A Biography of our Living Earth*. Oxford :OUP, New York, 1988.
- [24] L. Margulis and J. E. Lovelock. Biological modulation of the earth's atmosphere. *Icarus*, (31):471–89, 1974.
- [25] M. Milla Miranda. *Análise Espectral em Espaços de Hilbert*. IM-UFRJ, RJ, Brasil, 1990.
- [26] Hans F. Weinberger Murray H. Protter. *Maximum Principles in Differential Equations*. Springer, New York, 1984.
- [27] A. Pazy. *Semigroups of linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer- Verlag, New York, 1983.
- [28] L. Perko. Differential equations and dynamical systems. In *Texts in Applied Mathematics*, number 7. Springer Verlag, 2 edition, 1969.
- [29] F. Riesz and B. Sz-Nagy. *Functional Analysis*. Fredrick Ungar Publ., New York, 1995.
- [30] D. Robertson and J. Robinson. Darwinian daisyworld. *J. Theor. Biol.*, (195):129–34, 1998.

- [31] P. T. Saunders. Evolution without natural selection: further implications of the daisyworld parable. *J. Theor. Biol.*, (166):365–73, 1994.
- [32] J. Shukla, C. Nobre, and Sellers. Amazon deforestation and climate change. *Science*, (247):1322–5, 1990.
- [33] R. Temam. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics. In *Applied Mathematical Sciences* 68, number 68. Springer Verlag, 1988.
- [34] Javier Thayer. *Operadores auto-adjuntos e equações diferenciais parciais*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2007.
- [35] A. J. Watson and J. E. Lovelock. Biological homeostasis of the global environment: the parable of daisyworld. *Tellus B*, (35):284–289, 1983.
- [36] S. L. Weber. On homeostasis in daisyworld. *Climatic Change*, (48):465–85, 2001.
- [37] D. W. Woodcock. The rain on the plain: are there vegetation-clima feedbacks? *Global Planet. Change*, (97):191–201, 1992.
- [38] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1968.