



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO MATEMÁTICA

Pós-graduação em Matemática

**REGULARIZAÇÃO DE
SINGULARIDADES EM MECÂNICA
CELESTE**

Lucas de Carvalho Lapa

Dissertação de Mestrado

RECIFE-PE

25 de janeiro de 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO MATEMÁTICA

Lucas de Carvalho Lapa

**REGULARIZAÇÃO DE SINGULARIDADES EM MECÂNICA
CELESTE**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática do DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA da
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO como
requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em
Matemática.*

Orientador: *César Augusto Rodrigues Castilho*

RECIFE-PE

25 de janeiro de 2008

Lapa, Lucas de Carvalho

Regularização de singularidades em mecânica celeste / Lucas de Carvalho Lapa. – Recife : O Autor, 2008.

iv, 80 folhas : il., fig.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2008.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Mecânica celeste. I. Título.

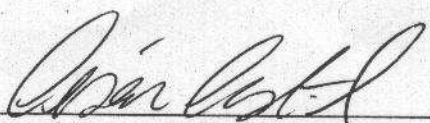
521

CDD (22.ed.)

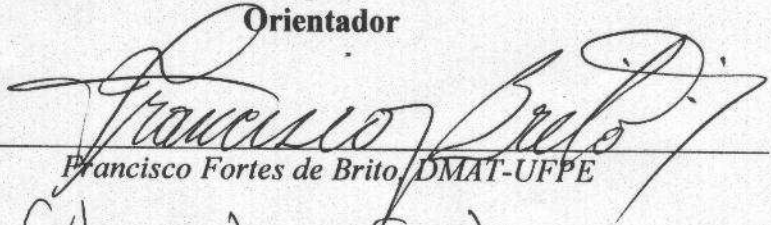
MEI2008-050

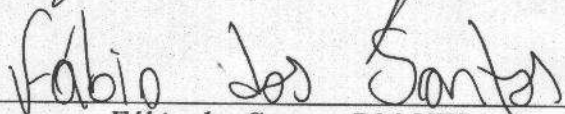
Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Ciências.

Aprovado:


César Augusto Rodrigues Castilho, DMAT-UFPE

Orientador


Francisco Fortes de Brito, DMAT-UFPE


Fábio dos Santos, DM-UFS

**REGULARIZAÇÃO DE SINGULARIDADES
EM MECÂNICA CELESTE**

Por

Lucas de Carvalho Lapa

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro - 2008

*Dedico este trabalho a Erika Lapa (meu amor),
Raoni Lapa (meu filho), Emília e Pedro (meus pais) e a
César Castilho (meu orientador).*

Agradecimentos

Agradeço a tremendamente aos protagonistas desta história:

A Erika, minha esposa;

A Raoni, meu filho;

A Pedro Lapa (meu pai e referência de vida); a Emília Lapa (minha mãe e referência de vida); a Chico e Lala (meus irmãos);

A César Castilho, meu orientador, super-incentivador, e referência na vida acadêmica de qualquer estudante;

Aos meus amigos e amigas: Maneco, Charles, Beto II, Tiago, Carol, Cris, Elizângela (Li), Maurício, Rodrigo Gondin(Gondam), Antônio (Antônios Macarrão), Eudes (Mestre Lama do Janga, Buraco Negro), Raphael (Mestre Neto), Tiago e Karla (Os pirraia), Anderson (Formiga), Zaqueu, Bruno, Adecarlos, Marcelo, Renata, Joilson, Luiz (Bula), Anete, Tarciana, Laudelino, Hélio, Éder, Alison, Fábio;

A Oscar Neto (do LAB-DMAT), sem o qual este trabalho não seria concretizado a tempo;

A Ricardo, Malu, Pedro, Filipe e Maria, que juntamente com minha família constituem a família Carvalho Lapa Martins Aléssio;

A todos os professores, desde o primário;

Em especial aos professores: Ednaldo Ernesto (responsável pela escolha da Matemática como profissão), Claudio Vidal, Hildeberto Cabral, Paulo Figueiredo e Antonio Carlos (especialíssimas pessoas);

A todos os meus tios, tias, primos e primas;

A meus Avós;

Parece-me que é preciso agradecer a todos os viventes, enfim (...).

*“Mesmo com asa de cera, Ícaro está em paz durante a alvorada!
Mesmo com toda impavidade do tempo, é o dia a nossa asa!”.*

—MANO BACCARELLI E LUCAS LAPA

Resumo

Estudamos nesta dissertação algumas técnicas para regularização de singularidades presentes em problemas específicos de Mecânica Celeste. Regularizamos as equações do movimento associadas aos problemas: dos dois corpos, restrito e planar dos três corpos. Tais métodos são essencialmente devidos a Birkhoff, Lemaître, Thiele, Burrau, J. Moser, Jörg Waldvogel e Victor Szebehely. São apresentadas regularizações dos problemas de Kepler e restrito dos três corpos fazendo-se uso de variáveis canônicas. Temos também a oportunidade de concluir que alguns dos procedimentos para eliminação de singularidades acima mencionados, estão intimamente relacionados.

Palavras-chave: Singularidades em EDO's; Regularização; Mecânica Celeste.

Abstract

In this dissertation we study some technics for the Regularization of Singularities that can be founded in specific problems in Celestial Mechanics. We regularize the motion equations related to the following problems: the 2-body, the restricted 3-body and the planar 3-body problem.

Such methods are essentially due to Birkoff, Lemaître, Thiele, Burrau, J. Moser, Jorg Waldvogel e Victor Szebehely. We present regularizations for the Kepler problem and the restricted 3-body problem by using the canonical variables. We also state that some of those regularization process are closely related among theirselves.

Keywords: Singularities on Ordinary Differential Equations; Regularization; Celestial Mechanics.

Conteúdo

Introdução	iii
1 Regularização no Problema dos Dois Corpos	1
1.1 Regularização das órbitas de colisão no problema dos dois corpos	1
1.1.1 Da dinâmica de colisão	1
1.1.2 Das variáveis de regularização	4
1.1.3 Uma transformação especial para a variável independente	7
1.1.4 Da dinâmica próximo a colisão	9
1.1.5 Uma regularização para órbita de colisão no problema dos dois corpos	11
1.2 Regularização do problema geral dos dois corpos	14
1.3 Regularização do problema dos dois corpos com variáveis canônicas	19
1.4 Fluxo geodésico na esfera e a regularização no problema de Kepler	25
2 Regularização no Problema Restrito dos Três Corpos	33
2.1 Regularização local no problema restrito dos três corpos	33
2.2 Regularização global de Birkhoff para o problema restrito dos três corpos . .	38
2.3 Regularização global de Thiele-Burrau	42
2.4 Regularização de Lemaître	45
2.5 Generalização dos métodos de regularização global no problema restrito dos três corpos	48
2.6 Comparação entre os métodos de regularização global no problema restrito dos três corpos	50

2.7	Da existência de soluções	52
2.8	Regularização do problema restrito dos três corpos com variáveis canônicas .	55
3	Coordenadas Simétricas e Regularizadas no Problema Planar dos Três	
	Corpos	59
3.1	Coordenadas simétricas	59
3.2	Regularização	64
	Apêndice A (A Projeção Estereográfica)	71
	Apêndice B (Adendo à Seção 1.4)	73
	Apêndice C (Sumário de Definições)	75
	Bibliografia	80

Introdução

Neste trabalho, apresentamos técnicas de regularização concernentes a três problemas da Mecânica Celeste: dos dois corpos, restrito e planar dos três corpos. Temos aqui a oportunidade de estudar procedimentos através dos quais a existência de soluções de equações diferenciais é estabelecida.

É motivante reconhecer a aplicabilidade da Mecânica Celeste às órbitas de colisão. Uma diferença significativa entre o movimento de corpos celestes naturais e artificiais, é o fato de que colisões e acentuadas aproximações raramente ocorrem no primeiro caso, enquanto que no segundo caso este fenômeno é comum. Sondas espaciais, por exemplo, comumente requerem órbitas que conectem dois corpos celestes.

Descrevemos, sem efetuar qualquer regularização, a dinâmica de uma colisão simples no problema dos dois corpos. Primeiramente, tratamos das órbitas de colisão sugerindo regularizações específicas. Depois, o problema geral é considerado e regulado.

Ainda no problema dos dois corpos, efetuamos a regularização usando variáveis canônicas. A transformação de regularização é obtida para o problema considerado no espaço de fase estendido 6-dimensional.

Estudamos uma curiosa técnica de regularização para o problema de Kepler devida a J. Moser (ver [2]). Aqui é determinado o tipo topológico da superfície de energia constante negativa para o problema dos dois corpos. Essa superfície de energia negativa possui uma singularidade em posições correspondentes às colisões das massas. Mas, após uma regularização apropriada, obtemos uma variedade compacta cujo tipo topológico é identificado (a saber, o plano projetivo P^3), e a singularidade é removida.

Tratamos a regularização do problema restrito dos três corpos localmente e globalmente. Isto é, apenas uma das colisões binárias é eliminada, e em seguida apresentamos técnicas que permitem a regularização das duas singularidades presentes no problema. No âmbito das regularizações conhecidas por globais, são estudadas as transformações de Birkhoff, Thiele-

Burrau e Lemaître. Os métodos de regularização global são generalizados e comparados.

Após investigarmos sucintamente a existência de soluções, encerramos a abordagem do problema restrito dos três corpos exibindo um método geral de regularização com variáveis canônicas, o qual está intimamente ligado a regularização local.

No último capítulo estudamos o problema planar dos três corpos, o qual é descrito em termos das coordenadas simétricas de Murnaghan. Introduzimos as variáveis de regularização de Lemaître e seus respectivos momentos conjugados. Por fim, a regularidade da equação do movimento transformada é avaliada para um caso particular. Eliminamos então as colisões binárias presentes no problema.

No apêndice, exploramos a projeção estereográfica e sua inversa, apresentando leis de formação para as mesmas. Apresentamos também uma aplicação dos resultados obtidos na Seção 1.4. Finalizamos com um sumário de conceitos e definições fundamentais ao texto.

Capítulo 1

Regularização no Problema dos Dois Corpos

1.1 Regularização das órbitas de colisão no problema dos dois corpos

1.1.1 Da dinâmica de colisão

Começamos descrevendo a dinâmica de uma colisão simples sem o uso de regularizações. Para tal, consideremos as equações do movimento do problema restrito dos três corpos em sua versão planar e circular:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y, \quad (1.1)$$

para o qual

$$\Omega = \frac{1}{2}[\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2] + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}, \quad (1.2)$$

$$r_1^2 = (x - \mu_2)^2 + y^2, \quad (1.3)$$

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2. \quad (1.4)$$

A integral jacobiana (ou energia) associada a (1.1) é dada por:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C,$$

para qual C é a constante jacobiana.

Sejam $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 0$. Então:

$$\Omega = \frac{1}{r} + \frac{1}{2}r^2, \quad (1.5)$$

onde $r^2 = r_1^2 = x^2 + y^2$. Ficamos neste caso com as seguintes equações do movimento:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x(1 - 1/r^3), \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = y(1 - 1/r^3). \quad (1.6)$$

Além disso, a energia é:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2 + 2/r - C. \quad (1.7)$$

As equações (1.6) são referentes ao problema restrito dos três corpos no qual uma das massas principais é nula. Isto é, as equações (1.6) descrevem o problema dos dois corpos. A fim de evitarmos a abordagem de equações mais complicadas consideremos as equações do movimento em um sistema fixo de coordenadas:

$$\ddot{\xi} = -\xi/\rho^3 \quad \text{e} \quad \ddot{\eta} = -\eta/\rho^3. \quad (1.8)$$

com $\rho^2 = r^2 = x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2$.

A energia associada a (1.8) é dada por:

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 2/\rho - C. \quad (1.9)$$

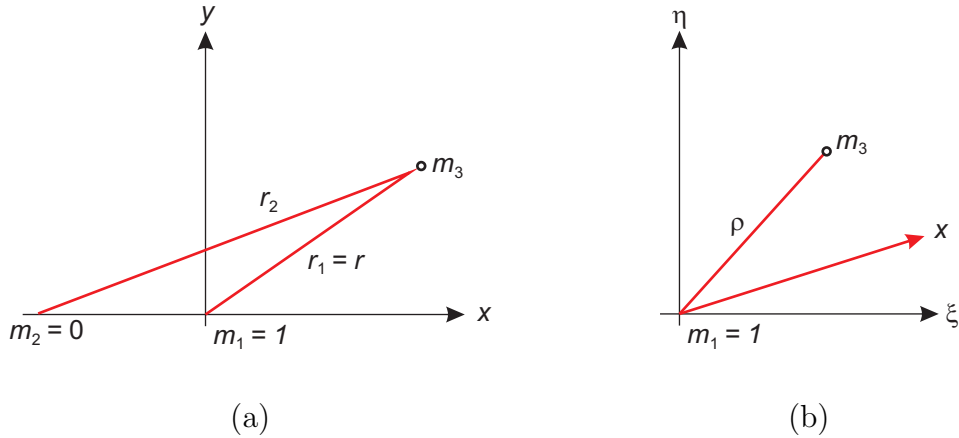


Figura 1.1: Problema dos dois corpos

Desde que uma órbita de colisão no problema dos dois corpos em um sistema fixo de coordenadas é uma reta, devemos especificar condições iniciais. Digamos:

$$\xi = \xi_0, \quad \dot{\xi} = \dot{\xi}_0 \quad \text{em} \quad t = 0, \quad \text{e} \quad \eta \equiv 0, \quad \dot{\eta} \equiv 0 \quad \forall t.$$

Observe que nesse caso, $\rho = |\xi|$, e desde que seja $\xi \neq 0$ segue-se de (1.8) que:

$$\ddot{\xi} = \pm 1/\xi^2. \quad (1.10)$$

De (1.9) obtemos:

$$\dot{\xi}^2 = 2/|\xi| - C = \pm 2/\xi - C. \quad (1.11)$$

Em $t = 0$

$$C = \pm 2/\xi_0 - \dot{\xi}_0^2. \quad (1.12)$$

Vamos restringir ainda mais nosso problema impondo que $\dot{\xi}_0 = 0$ e $\xi_0 > 0$. Então, $C = 2/\xi_0 > 0$. De (1.11) temos que

$$\pm \dot{\xi} \left(\frac{\xi}{2 - C\xi} \right)^{1/2} = 1, \quad \text{com } \xi \neq 2/C. \quad (1.13)$$

Aplicando-se o método das equações separáveis à (1.13) obtemos:

$$t = \pm \int_{\xi_0}^{\xi} \left(\frac{\xi}{2 - C\xi} \right)^{1/2} d\xi. \quad (1.14)$$

Considere o triângulo de lados $\sqrt{C}$, u e hipotenusa $\sqrt{u^2 + C}$. Efetuando-se as substituições $u^2 = 2/\xi - C$ e $u = \sqrt{C} + \operatorname{tg} r$, onde r é o ângulo oposto ao lado que mede u , obtemos de (1.14) que

$$t = \frac{1}{C} [\xi(2 - C\xi)]^{1/2} + \frac{2}{C^{3/2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2 - C\xi}{C\xi} \right)^{1/2}, \quad (1.15)$$

considerando-se apenas o sinal negativo em (1.14).

De (1.11) concluímos que $2/|\xi| - 2/\xi_0 \geq 0$ ou que $|\xi| \leq \xi_0$. Assim, a partícula sai da posição ξ_0 em $t = 0$, e durante o tempo decorrido antes da colisão, em $t := t_c$, a partícula não se afasta da origem mais do que sua posição inicial. Além disso, durante o tempo $0 < t < t_c$, a velocidade da partícula é negativa e está dirigida para origem. Isto é,

$$\dot{\xi} = - \left(\frac{2}{|\xi|} - C \right)^{1/2}, \quad (1.16)$$

sempre que $0 < \xi < \xi_0$.

A equação (1.10) nos diz que tal velocidade negativa aumenta em valor absoluto quando a partícula se aproxima do ponto de colisão. De fato, $\ddot{\xi} < 0$ sempre que $\xi > 0$, donde $|\dot{\xi}| \xrightarrow[\xi \rightarrow 0]{} \infty$.

Tomando limites em (1.15) quando $\xi \rightarrow 0$ obtemos:

$$t \rightarrow t_c = \pi/C^{3/2}. \quad (1.17)$$

Segue-se ainda a relação $\xi_0 = 2(t_c/\pi)^{2/3}$, pois $C = 2/\xi_0$.

Avaliando-se os sinais da primeira e segunda derivada de $\xi = \xi(t)$ concluímos que o gráfico desta função decrescente em $[0, t_c]$ é dado por:

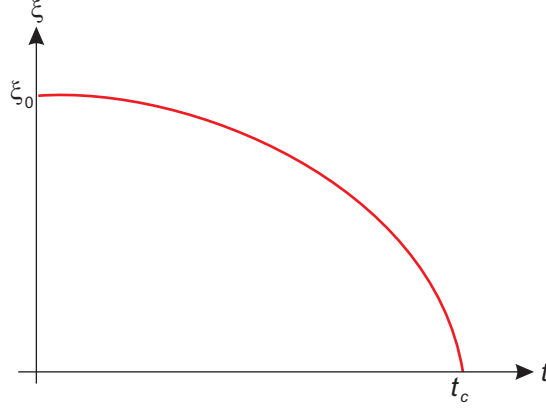


Figura 1.2: Órbita de colisão unidimensional

1.1.2 Das variáveis de regularização

A fim de eliminarmos a singularidade, introduzimos uma nova variável dependente, $\xi = f(u)$, e uma nova variável independente, $\tau = \int_{t_0}^t \frac{dt}{g(u)}$. O movimento no sistema novo é descrito pela função $u = u(\tau)$. Uma outra maneira de expressar o tempo reparametrizado, a qual é comum na literatura, é: $dt/d\tau = g(u)$. Faremos nos próximos parágrafos considerações a respeito da escolha das funções f e g .

A nova velocidade $u' = du/d\tau$ está relacionada com a velocidade real (ou física), $\dot{\xi} = d\xi/dt$, por

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}, \quad (1.18)$$

ou, introduzindo a notação $f' = df/du$,

$$\dot{\xi} = u' f' / g. \quad (1.19)$$

Logo,

$$u' = g \dot{\xi} / f'. \quad (1.20)$$

Para que seja finita a nova velocidade u' no momento da colisão, é necessário que $g/f' \rightarrow 0$ quando $\dot{\xi} \rightarrow \infty$.

Consideramos a seguinte escritura para a energia:

$$\dot{\xi}^2 = \frac{2}{\xi} - C = 2U, \quad (1.21)$$

com $\xi > 0$. A energia em termos das novas variáveis é então dada por:

$$(u')^2 = \frac{g^2}{(f')^2} \left(\frac{2}{f} - C \right) = \frac{g^2}{(f')^2} 2U. \quad (1.22)$$

De fato, multiplicando (1.21) por $\frac{g^2}{(f')^2}$ e levando em conta a equação (1.20), obtemos (1.22).

De (1.22) concluímos que a velocidade u' é finita na colisão se permanece finito o valor de $[g^2/(f')^2]U$ quando $\xi \rightarrow 0$. Desde que $2U = (2/\xi) - C$, $U \rightarrow \infty$ quando $\xi \rightarrow 0$, e próximo a colisão $U = 1/\xi = 1/f$. Assim, a velocidade no sistema (u, τ) é finita próximo a colisão se

$$\frac{g^2}{(f')^2 f}$$

permanece finito quando $\xi \rightarrow 0$. Ou,

$$\frac{g}{f'} \cdot \frac{1}{f^{1/2}}$$

é finito quando $f \rightarrow 0$.

Se g/f' é representado por uma série de potências em $f^{1/2}$, o termo de menor expoente é tipicamente dada por $\alpha f^{1/2}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. De fato, escrevendo $g/f' = (f^{1/2})^n$ temos que

$$\frac{g}{f'} \cdot \frac{1}{f^{1/2}} = (f^{1/2})^{n-1}.$$

Portanto, o requerimento para que a velocidade u' seja finita na colisão é: $n - 1 \geq 0$. Isto é, o menor expoente de $f^{1/2}$ na série acima deve ser 1. Assim,

$$\frac{g}{f'} = A_1 f^{1/2} + A_2 f + A_3 f^{3/2} + \dots \quad (1.23)$$

Conseqüentemente

$$\frac{g}{f' f^{1/2}} = A_1 + A_2 f^{1/2} + \dots, \quad (1.24)$$

e $g/f' f^{1/2} \rightarrow A_1$ quando $f \rightarrow 0$. Somente se $A_1 = 0$, o processo limite acima implica que $g/(f' f^{1/2}) = 0$. Então, a velocidade no sistema (u, τ) é finita na singularidade, e $u' = \sqrt{2}A_1$. Assim f e g devem satisfazer a equação (1.24). Por exemplo, se $\xi = f(u) = u^n$ temos que:

$$g = A_1 f' f^{1/2} = n A_1 u^{(3/2)n-1}. \quad (1.25)$$

O próximo passo é o estudo das equações do movimento e de suas singularidades.

Proposição 1.1 *A equação do movimento no sistema u, τ é dada por:*

$$u'' + u'^2 \cdot \frac{gf'' - f'g}{f''g} = \frac{g^2}{f'^2} \cdot \frac{dU}{du}. \quad (1.26)$$

Demonstração: Derivando ambos os membros da equação (1.18) obtemos

$$\ddot{\xi} = f'u' \frac{d^2\tau}{dt^2} + (f'u'' + f''u'^2) \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2.$$

Mas, $\frac{d^2\tau}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{g(u)} \right) = -\frac{g'u'}{g^3}$. Logo,

$$\ddot{\xi} = -u'^2 \cdot \frac{f'g'}{g^3} + \frac{f'u'' + f''u'^2}{g^2}. \quad (1.27)$$

Segundo a equação do movimento (1.10), $\ddot{\xi} = -1/\xi^2$ na região $\xi > 0$. Derivando (1.21) com respeito a u obtemos $\frac{1}{f'} \frac{dU}{du} = -\frac{1}{\xi^2}$. Substituindo em (1.27) segue-se que

$$u'' \frac{f'}{g^2} + u' \left(\frac{f''}{g^2} - \frac{f'g'}{g^3} \right) = \frac{1}{f'} \frac{dU}{du}.$$

ou

$$u'' + u'^2 \cdot \frac{gf'' - f'g'}{f'g} = \frac{g^2}{f'^2} \frac{dU}{du}.$$

como queríamos. $\square$

A fim de que a velocidade no sistema (u, τ) esteja regularizada, $[g^2/f(f')^2]2U$ deve, por (1.22), ser finito. Para que este requerimento seja de fato considerado na equação do movimento, observe que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left(U \frac{g^2}{f'^2} \right) &= \frac{g^2}{f'^2} \frac{dU}{du} + U \cdot \frac{2gg'f'^2 - 2f'f''g^2}{(f')^4} \\ &= \frac{g^2}{f'^2} \frac{dU}{du} + \frac{\dot{\xi}^2}{2} \cdot \frac{2g}{f'^3} (g'f' - gf'') \\ &= \frac{g^2}{f'^2} \frac{dU}{du} + \frac{u'^2}{f'g} (g'f' - gf''). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{du} \left(U \frac{g^2}{f'^2} \right) = \frac{g^2}{f'^2} \frac{dU}{du} + \frac{u'^2}{f'g} (g'f' - gf''). \quad (1.28)$$

Resolvendo (1.28) para o termo requerido e substituindo o resultado em (1.26) ficamos com

$$u'' = \frac{d}{du} \left(\frac{g^2}{f'^2} \right) U. \quad (1.29)$$

1.1.3 Uma transformação especial para a variável independente

Segundo Sundman e Levi-Civita, a transformação do tempo, ou seja, a escolha da função g , constitui a essência da regularização no problema dos dois corpos. A idéia básica proposta por estes autores consiste em especializar o método apresentado acima definindo,

$$dt/d\tau = g(\xi) \quad (1.30)$$

$$\xi = u. \quad (1.31)$$

Segue-se de (1.22) que a nova velocidade, $u' = \xi' = d\xi/d\tau$, é

$$\xi'^2 = g^2(2/\xi - C). \quad (1.32)$$

Para que ξ' seja finito quando $\xi \rightarrow 0$, devemos ter como antes:

$$g^2 = A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + \dots \quad (1.33)$$

Logo, substituindo-se (1.33) em (1.32),

$$\xi'^2 = 2A_1 + (2A_2 - CA_1)\xi + (2A_3 - CA_2)\xi^2 + \dots \quad (1.34)$$

donde a nova velocidade na colisão é $\sqrt{2A_1}$.

Façamos: $A_j = 0$, $\forall j \neq 2$, e $A_2 = 1$. Então, $g = \xi$, $\xi'^2 = 2\xi - C\xi^2$ e de acordo com (1.30),

$$dt/d\tau = \xi, \quad (1.35)$$

ou

$$d\tau = dt/\xi = \Omega(\xi)dt. \quad (1.36)$$

Concluimos portanto que a nova variável τ está diretamente relacionada com o potencial $\Omega(\xi) = \frac{1}{\xi}$ do nosso problema dinâmico. Lembrando que ξ é a distância da partícula à singularidade, temos que $\Omega(\xi) = 1/r$. Assim,

$$\tau = \int_{t_0}^t \frac{dt}{r}. \quad (1.37)$$

A solução do problema é obtida por integração a partir da equação (1.32). Ao invés de usar a forma geral de $g(\xi)$, equação (1.33), consideremos no caso especial acima descrito: $A_2 = 1$, $A_j = 0 \forall j \neq 2$. Continuamos com

$$\xi'^2 = \xi(2 - C\xi). \quad (1.38)$$

As condições iniciais são $t = 0$, $\tau = 0$ e $\xi = 2/C$. A solução deste problema de valor inicial é dada por:

$$\xi = \frac{1}{C}(1 + \cos C^{1/2}\tau). \quad (1.39)$$

Além disso, desde que $t = \int_0^\tau \xi d\tau$,

$$t = \frac{1}{C}[\tau + C^{-1/2}\sin C^{1/2}\tau]. \quad (1.40)$$

Observamos que o movimento tem início em $t = \tau = 0$, e na colisão $t_c = \pi/C^{3/2}$, $\tau_c = \pi/C^{1/2}$.

Passemos agora a apresentação e a uma breve justificativa dos gráficos de $\xi = \xi(\tau)$ e $t = t(\tau)$. No começo do movimento, $t = \tau = 0$, $\xi = \frac{2}{C} > 0$ e $\dot{\xi} = \xi' = 0$. A partícula move-se em direção a origem, $\xi = 0$, com $\dot{\xi}, \xi' < 0$, após o início do movimento. Em $t = t_c/2$, $t = [(2 + \pi)/2\pi]t_c$, $\xi = 1/C$, e $\dot{\xi}, \xi' < 0$. Observamos também que próximo a colisão, $|\dot{\xi}| \rightarrow 1/\xi^{1/2}$ e $\xi' \rightarrow 0$. Na colisão, $\xi = 0$, $t = t_c$, $\tau = \tau_c$, $\xi' = 0$ e $|\dot{\xi}| = +\infty$. Logo após a colisão, $t > t_c$, $\tau > \tau_c$, $\xi > 0$, $\xi' > 0$. Em $t = 2t_c$, $\tau = 2\tau_c$, a partícula retorna a $\xi = \frac{2}{C}$ com $\dot{\xi} = \xi' = 0$ e o ciclo se repete.

A função $\xi = \xi(\tau)$ é regular em toda parte, e também $\mathcal{O}$ é a nova velocidade:

$$\xi'(\tau) = -\frac{1}{C^{1/2}}\sin C^{1/2}\tau.$$

Por fim, destacamos que ξ é $2t_c$ -periódica.

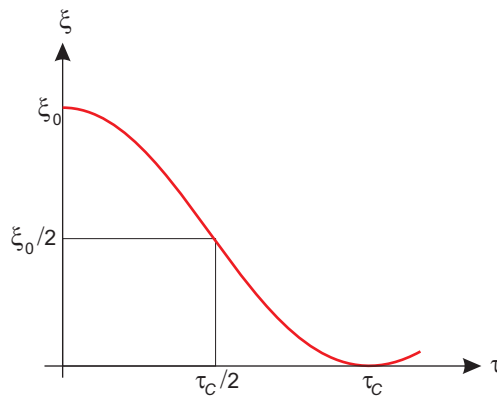


Figura 1.3: ξ como função do tempo regularizado τ .

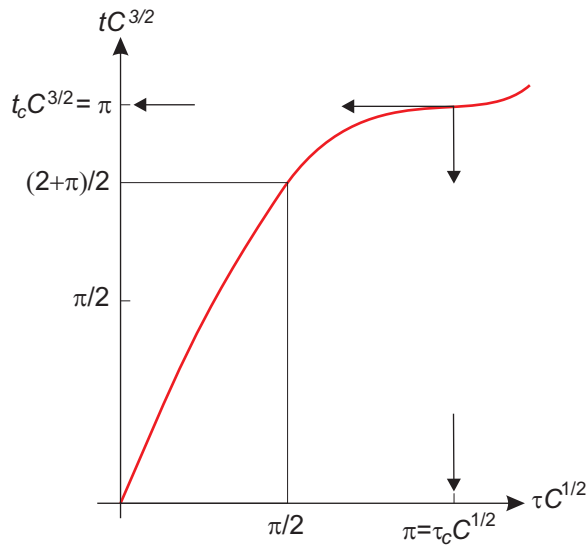


Figura 1.4: Relação entre o tempo físico t o pseudotempo τ .

1.1.4 Da dinâmica próximo a colisão

A velocidade regularizada ξ' troca de sinal na colisão. De fato, como $\xi'(\tau) = -\frac{1}{C^{1/2}} \sin C^{1/2} \tau$, segue-se que $\xi'(\tau) < 0$ quando $0 < \tau < \tau_c = \pi/C^{1/2}$ e $\xi'(\tau) > 0$ quando $\tau_c < \tau < 2\tau_c$. Além disso, como $|\dot{\xi}| = \infty$ na colisão, a partícula se aproxima da colisão com $\dot{\xi} \rightarrow -\infty$ e parte da colisão satisfazendo $\dot{\xi} \rightarrow \infty$. Vamos considerar o caso da órbita elíptica no problema dos dois corpos a fim de ilustrarmos o fenômeno acima descrito.

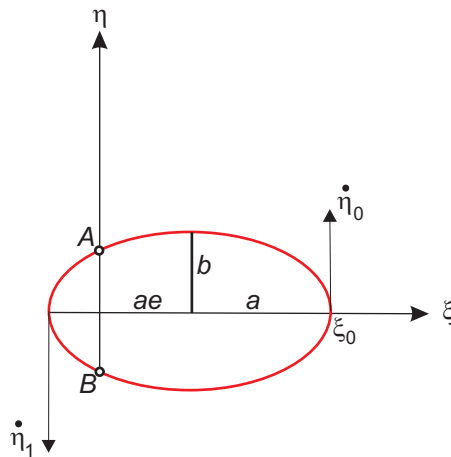


Figura 1.5: Dinâmica próxima a colisão.

Seja $\dot{\eta}_0 > 0$ no ponto (ξ_0, o) tal que

$$2/\xi_0 > \dot{\eta}_0^2.$$

A partícula descreve uma elipse com um de seus focos na origem do plano ξ, η . O semi-eixo maior da elipse está relacionado com as condições iniciais por meio da energia

$$2/r - 1/a = v^2, \quad (1.41)$$

ou

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{\xi_0} - \dot{\eta}_0^2. \quad (1.42)$$

A excentricidade da órbita elíptica é obtida da relação $\xi_0 = a(1 + e)$:

$$e = \frac{\xi_0 - a}{a}. \quad (1.43)$$

Se $\xi_0 = 2a$, então $e = 1$, $\dot{\eta}_0 = 0$ e $v^2 = \dot{\xi}_0^2$. Da última identidade obtemos

$$\frac{2}{\xi_0} - \frac{1}{a} = \dot{\xi}_0^2. \quad (1.44)$$

Desde que $\dot{\xi}^2 = 2/\xi - C$, segue-se de (1.44) que $C = 1/a$.

A velocidade no pericentro é

$$\dot{\eta}_1 = \frac{1}{a^{1/2}} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2}, \quad (1.45)$$

e no apocentro é

$$\dot{\eta}_0 = \frac{1}{a^{1/2}} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{1/2}. \quad (1.46)$$

Observe que $\dot{\eta}_1 \rightarrow \infty$ e $\dot{\eta}_0 \rightarrow 0$ quando $e \rightarrow 1$.

A velocidade da partícula no ponto $A = (0, \eta_A)$ é dada por:

$$v_A = \frac{1}{a^{1/2}} \left(\frac{1+e^2}{1-e^2} \right)^{1/2}. \quad (1.47)$$

Ficamos portanto com as seguintes componentes $\dot{\xi}_A$, $\dot{\eta}_A$ e $\dot{\xi}_B$, $\dot{\eta}_B$ da velocidade nos pontos A e B :

$$\dot{\xi}_A = -\frac{1}{[a(1-e^2)]^{1/2}} = -\dot{\xi}_B, \quad (1.48)$$

$$\dot{\eta}_A = -\frac{1}{[a(1-e^2)]^{1/2}} = +\dot{\eta}_B. \quad (1.49)$$

Observação: O cálculo das velocidades (1.45), (1.46) e (1.47) podem ser efetivados substituindo-se o valor de r diretamente em (1.43). Por exemplo, no pericentro, $r = a + ae$. Logo,

$$\dot{\eta}_1^2 = \frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e} \quad \therefore \quad \dot{\eta}_1 = \frac{1}{a^{1/2}} \cdot \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2}.$$

Quando $e \rightarrow 1$, a elipse degenera-se em uma reta ($b = a(1 - e^2)^{1/2} \rightarrow 0$) e as componentes em (1.48) e (1.49) tendem a infinito. A componente ξ da velocidade muda de sinal quando a partícula passa pela singularidade, pois, $\dot{\xi}_A = -\dot{\xi}_B$.

O período do movimento sobre a elipse é $T = 2\pi/n$, com $n = a^{-3/2}$. Quando $\dot{\eta}_0 \rightarrow 0$, temos que $a^{-1} \rightarrow 2/\xi_0$ e $T \rightarrow 2\pi(2/\xi_0)^{-3/2}$. Como $C = 2/\xi_0$ e $t_c = T/2$, o tempo da colisão, t_c , permanece o mesmo quando $e \rightarrow 1$.

Recorremos a equação (1.39), $\xi = \frac{1}{c}(1 + \cos C^{1/2}\tau)$, a qual relaciona a distância $\xi = r$ com o novo tempo τ . Se procedemos a substituição $a = 1/c$ e $na = aa^{-3/2} = C^{1/2}$, obtemos:

$$r = a(1 + \cos na\tau), \quad (1.50)$$

para a qual $na\tau =: u$ é a *Anomalia Excêntrica*. Conseqüentemente a equação de Kepler

$$nt = u + e \sin u, \quad (1.51)$$

coincide com a equação (1.40), $t = \frac{1}{C}[\tau + (1/C^{1/2})\sin C^{1/2}\tau]$, quando $e = 1$. Note que nas equações (1.50) e (1.51), há uma troca de sinal (de mais para menos), desde que $u = \tau = 0$ corresponda ao pericentro.

Concluimos que a anomalia excêntrica é uma variável de regularização para o problema dos dois corpos. De fato, comparando-se as equações $d\tau = dt/r$ e $du = (na/r)dt$, temos que τ , o “novo tempo”, é essencialmente a anomalia excêntrica.

1.1.5 Uma regularização para órbita de colisão no problema dos dois corpos

As transformações $\xi = f(u)$ e $dt/d\tau = g(u)$ promovem, como vimos, a regularização para as órbitas de colisão no problema dos dois corpos. No exemplo anterior, selecionamos simplesmente $f(u) = \xi = u$. Portanto, a variável dependente permanece inalterada. A transformação da variável independente se dá por $dt/d\tau = g(u) = g(\xi) = \xi$. A regularização é portanto efetuada transformando-se apenas a variável independente.

Se a variável dependente é também transformada, a equação (1.25) fornece uma possível transformação do tempo, pois, $g(u)$ fica determinada desde que $f(u)$ seja previamente selecionada.

É natural neste momento selecionarmos

$$\xi = f(u) = u^2. \quad (1.52)$$

Observemos que se n é par, segue-se da equação (1.25) que g é uma função racional. Em nosso caso,

$$g(u) = Bu^2, \quad B \in \mathbb{R}. \quad (1.53)$$

A nova velocidade, segundo a equação (1.22) é

$$u'^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{Cu^2}{4} \right) B^2. \quad (1.54)$$

Quando, por exemplo, $B = 4$, ficamos com

$$u' = \pm 2(2 - Cu^2)^{1/2}, \quad (1.55)$$

e

$$g = 4u^2 = f'^2. \quad (1.56)$$

Consideremos apenas o sinal positivo em (1.55). Observemos que de (1.52), $u = \xi^{1/2}$, e de $\dot{\xi} = u'f'/g$, $\dot{\xi} = u'/2u$. Assim, $\dot{\xi} > 0$ nos casos em que $u > 0$, $u' > 0$ e $u < 0$, $u' < 0$. Quando $\dot{\xi} < 0$ u e u' devem ter sinais contrários. Exceto quando $\xi = 0$, destacamos que a cada valor de ξ correspondem dois valores distintos de u .

A equação (1.55) é em nosso caso a equação do movimento. Diferenciando (1.55), estabelecemos que

$$u'' + 4Cu = 0. \quad (1.57)$$

Com as condições iniciais $\tau = 0$, $u = u_0 = \xi_0^{1/2} = (2/C)^{1/2}$ e $u'_0 = 0$, (1.57) tem por solução:

$$u = (2/C)^{1/2} \cos 2C^{1/2}\tau. \quad (1.58)$$

As condições iniciais acima descritas decorrem de $\dot{\xi} = u'/2u$, pois neste caso $u'_0 = 2u_0\dot{\xi}_0 = 0$.

Por (1.58), temos que o instante da colisão, $u = \xi = 0$, é $\tau_c = \pi/4C^{1/2}$. Ainda a partir de (1.58), a nova velocidade é definida por

$$u' = -2^{3/2} \text{sen}(2C^{1/2}\tau). \quad (1.59)$$

Na colisão temos portanto que $u'_c = -2^{3/2}$.

Nos gráficos a seguir exibimos a relação entre ξ, u, u' e o tempo τ . Apenas valores positivos em $u = \xi^{1/2}$ são considerados. Entre a posição inicial e a colisão, $0 \leq \tau \leq \tau_c$, $u_0 \geq u \geq 0$ e $0 \geq u' \geq -2^{3/2}$. Nesta região, $\dot{\xi} < 0$ e $sgnu = -sgnu'$. Após a colisão, isto é, $\tau_c \leq \tau \leq 2\tau_c$, a partícula retorna a posição $\xi = \xi_0$. Durante este tempo, $0 \geq u \geq -u_0$, $0 \leq \xi \leq \xi_0$ e $-2^{3/2} \leq u' \leq 0$. Temos que $sgnu = sgnu'$ e $\dot{\xi} > 0$ nesta região.

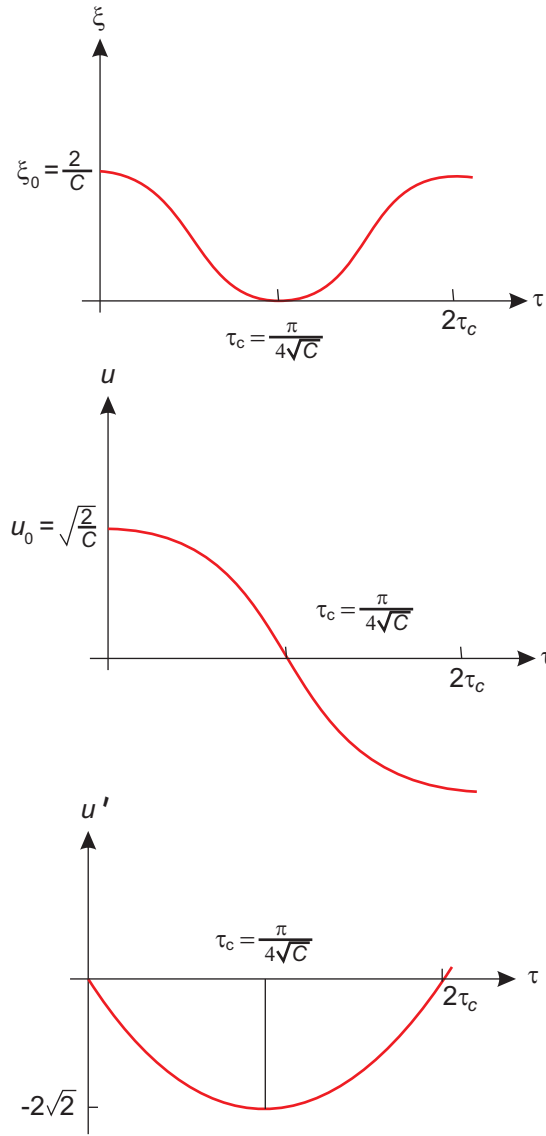


Figura 1.6: Colisão dos dois corpos com o tempo e as coordenadas transformadas.

A relação entre t e τ pode ser expressa por

$$t = \frac{4}{C} \left(\tau + \frac{\text{sen } 4C^{1/2}\tau}{4C^{1/2}} \right). \quad (1.60)$$

De fato, basta substituir o valor de u , dado por (1.58), em $dt/d\tau = 4u^2$. Por integração,

$$\begin{aligned} t &= \int_0^\tau \frac{8}{C} \cos^2 2C^{1/2}\tau \, d\tau \\ &= \frac{4}{C} \left(\tau + \frac{\text{sen } 4C^{1/2}\tau}{4C^{1/2}} \right). \end{aligned}$$

Estudamos portanto a dupla transformação, quando o tempo e a variável dependente são transformados, e a regularização na qual apenas o tempo é transformado. As duas técnicas

representam uma solução para o problema de eliminar singularidades, pois como vimos, a equação do movimento é de fato regularizada. A primeira regularização estudada tem a propriedade de que a velocidade é nula na colisão, enquanto que na segunda este valor é de $2\sqrt{2}$.

Na primeira regularização, a transformação do tempo (variável independente) regulariza a equação do movimento, a qual se torna

$$\xi'' + C\xi - 1 = 0,$$

enquanto que da dupla transformação, obtemos

$$u'' + 4Cu = 0.$$

1.2 Regularização do problema geral dos dois corpos

Consideremos no plano complexo o vetor posição da partícula $\zeta = \xi + i\eta$. A equação do movimento é dada por

$$\ddot{\zeta} = -\zeta/|\zeta|^3. \quad (1.61)$$

Como antes, temos a singularidade em $\zeta = 0$, isto é, na colisão.

A equação (1.53) será regularizada introduzindo-se uma transformação de coordenadas,

$$\zeta = f(w), \quad (1.62)$$

e uma transformação do tempo,

$$dt/d\tau = g(w), \quad (1.63)$$

Aqui, g é uma função real da variável complexa w . O “novo tempo” τ é portanto um número real.

No caso em que a órbita de colisão é uma reta, a transformação usada na regularização estabelece uma relação entre os pontos ξ da reta original, e os pontos u da reta transformada. Agora, estabeleceremos relações entre o plano dado por ζ e o plano transformado w .

A função f contém as informações geométricas envolvidas na regularização, enquanto que a função g controla os aspectos cinemáticos e de fato promove a regularização. Veremos que simplificações significativas nas equações transformadas do movimento são obtidas ao selecionarmos as funções f e g apropriadamente.

Como antes, a energia associada a (1.53) é:

$$|\dot{\zeta}| = \frac{2}{|\zeta|} - C. \quad (1.64)$$

Observemos que:

$$\dot{\zeta} = \frac{d\zeta}{dw} \cdot \frac{dw}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} \quad (1.65)$$

Logo,

$$|\dot{\zeta}|^2 = \frac{|f'(w)|^2 |w'|^2}{g^2}. \quad (1.66)$$

Substituindo a valor de $|\dot{\zeta}|^2$ em (1.53) e considerando-se a transformação $\zeta = f(w)$, temos que

$$|w'|^2 = \left(\frac{2}{|f|} - C \right) \frac{g^2}{|f'|^2} \quad (1.67)$$

é a energia no novo sistema de variáveis. Aqui, $|w'|^2$ é o quadrado da nova velocidade, e $|w'|^2 = (du/d\tau)^2 + (dv/d\tau)^2$.

Correspondentemente a mudança de coordenadas $\xi = u^2$ estudada anteriormente, definimos $\zeta = w^2$. Também de modo análogo, definamos $dt/d\tau = r^{-1} = |\zeta|^{-1}$. Ficamos com as seguintes equação de transformação:

$$\zeta = f(w) = w^2, \quad (1.68)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = g(w) = 4|w|^2. \quad (1.69)$$

Substituindo-se os valores de f, g, f' em (1.59), e g, f em (1.55), segue-se que

$$|w'|^2 = 4(2 - |w|^2 C) \quad (1.70)$$

é a energia no plano w , e

$$|\dot{\zeta}| = \frac{|w'|}{2|w|} \quad (1.71)$$

é a relação entre as velocidades $|\dot{\zeta}|$ e $|w|$.

Consideremos a equação do movimento (1.61). Podemos escrevê-la sob a forma:

$$\ddot{\zeta} = \text{grad}_{\zeta} \frac{1}{|\zeta|}. \quad (1.72)$$

onde,

$$\text{grad}_{\zeta} F(\zeta) := \frac{\partial F}{\partial \xi} + i \frac{\partial F}{\partial \eta},$$

é o gradiente da função real $F = F(\zeta)$ da variável complexa $\zeta = \xi + i\eta$.

Se $U = \frac{1}{|\zeta|} - \frac{C}{2}$, então $\ddot{\zeta} = \text{grad}_{\zeta} U$. Além disso, a energia é dada por

$$|\dot{\zeta}|^2 = 2U, \quad (1.73)$$

a qual é obtida a partir de $|\dot{\zeta}|^2 = 2/|\zeta| - C$.

A fim de transformarmos a equação do movimento $\ddot{\zeta} = \text{grad}_{\zeta} U$, observemos que:

$$\dot{\zeta} = \frac{df}{dw} \cdot \frac{dw}{dt} \cdot \frac{d\tau}{dt}, \quad (1.74)$$

se $\frac{df}{dw} = f'$, $\frac{dw}{d\tau} = w'$ e $\frac{d\tau}{dt} = \dot{\tau}$, então

$$\dot{\zeta} = f' w' \dot{\tau}. \quad (1.75)$$

Derivando (1.75) obtemos

$$\ddot{\zeta} = f' w' \ddot{\tau} + (f'' w'^2 + f' w'') \dot{\tau}^2. \quad (1.76)$$

Lema 1.1 *Sejam $g_1, g_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções reais da variável complexa w e $G : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa dada. Se g_1, g_2 e G são analíticas, então:*

$$(i) \quad \text{grad}_w g_1(w) g_2(w) = g_1 \text{grad}_w g_2 + g_2 \text{grad}_w g_1,$$

$$(ii) \quad \text{grad}_w |G(w)|^2 = 2G \overline{\frac{dG}{dw}}.$$

Demonstração:

(i) Sejam $g_j(w) = x_j(u, v)$ e $x_j = x_j(u, v)$ uma função real e diferenciável para $j = 1, 2$.

Então, considerando-se $w = u + iv$,

$$\begin{aligned} \text{grad}_w g_1 g_2 &= \frac{\partial x_1 x_2}{\partial u} + i \frac{\partial x_1 x_2}{\partial v} \\ &= x_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} + i \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) + x_1 \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} + i \frac{\partial x_2}{\partial v} \right) \\ &= g_1 \text{grad}_w g_2 + g_2 \text{grad}_w g_1. \end{aligned}$$

(ii) Como $G(w)$ é analítica,

$$G_u = \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{dG}{dw} = -i G_v, \quad \text{e} \quad \overline{G}_u = \frac{d\overline{G}}{d\overline{w}} = i \overline{G}_v.$$

Pelo item (i), temos a identidade

$$\text{grad}_w |G(w)|^2 = G \text{grad}_w \overline{G} + \overline{G} \text{grad}_w G,$$

para qual,

$$\text{grad}_w G = G_u + iG_v = 0$$

e

$$\text{grad}_w \overline{G} = \overline{G}_u + i\overline{G}_v = 2\frac{\overline{dG}}{dw}$$

como queríamos. $\square$

De acordo com o lema, temos que o operador gradiente também é transformado, e vale a relação:

$$\overline{f}' \text{grad}_\zeta U = \text{grad}_w U. \quad (1.77)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \text{grad}_w U(w) &= U_u + iU_v \\ &= U_\xi \xi_u + U_\eta \eta_u + i(U_\xi \xi_v + U_\eta \eta_v). \end{aligned}$$

Mas, pelas relações de Cauchy-Riemann, $\text{Im}(\text{grad}_w U(w)) = -U_\xi \eta_u + U_\eta \xi_u$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{grad}_w U &= (\xi_u + i\eta_u)(U_\xi + iU_\eta) \\ &= \overline{f}' \text{grad}_\zeta U. \end{aligned}$$

A partir de (1.77) e (1.76) concluímos que o sistema $\ddot{\zeta} = \text{grad}_\zeta U$ pode ser escrito como

$$w'' + w' \frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}^2} + w'^2 \frac{f''}{f'} = \frac{\text{grad}_w U}{\dot{\tau}^2 |f'|^2}. \quad (1.78)$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} \dot{\tau} = \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{g} &\Rightarrow \ddot{\tau} = \frac{d\dot{\tau}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{g} \right) \\ &= -g^{-2} \frac{dg}{dt} = -g^{-2} \cdot \dot{g} \\ &= -\dot{\tau}^2 \dot{g}. \\ \therefore \frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}^2} &= -\dot{g}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Além disso, como g é por hipótese uma função real da variável complexa w , podemos escrever $g = h(w)\overline{h(w)}$, com $h = h(w)$ complexa e analítica. Com isto,

$$\frac{dg}{dt} = \left(h \frac{\overline{dh}}{dw} \cdot \frac{\overline{dw}}{d\tau} + \overline{h} \frac{dh}{dw} \cdot \frac{dw}{d\tau} \right) \dot{\tau}.$$

Como $(\overline{h})' = \frac{\overline{dh}}{dw} = \overline{\left(\frac{dh}{dw} \right)} = \overline{h'}$,

$$\frac{\overline{dh}}{dt} = \overline{\frac{dh}{dw} \cdot \frac{dw}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}} = \overline{\frac{dh}{dw} \frac{dw}{d\tau}} \dot{\tau} = \frac{\overline{h'} \overline{w'}}{h \overline{h}}.$$

Logo,

$$\frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}^2} = -\dot{g} = -\left(\frac{\overline{h'}\overline{w'}}{\overline{h}} + \frac{h'w'}{h}\right). \quad (1.80)$$

Substituindo (1.80) em (1.78) ficamos com

$$w'' - \frac{|w'|^2}{\overline{h}} \cdot \frac{\overline{dh}}{dw} + w^2 \left(\frac{f''}{f'} - \frac{h'}{h} \right) = \frac{|h|^4}{|f'|^2} \text{grad}_w U. \quad (1.81)$$

Desde que $|w'|^2 = 2|h|^4 U/|f'|^2$, temos a seguinte equação do movimento:

$$w'' + (w')^2 \frac{d}{dw} \left(\ln \frac{f'}{h} \right) = \frac{|h|^4}{|f'|^2} \left(2U \frac{d \ln \overline{h}}{dw} + \text{grad}_w U \right), \quad (1.82)$$

a qual, segundo o Lema 1, pode ser escrita como

$$w'' = \text{grad}_w \left| \frac{h^2}{f'} \right|^2 U - 2iw' \text{Im} \left(w' \frac{d}{dw} \ln \frac{f'}{h} \right). \quad (1.83)$$

Segue-se de (1.83) que, quando $f' = h$

$$w'' = \text{grad}_w |f'|^2 U. \quad (1.84)$$

Com $\zeta = f(w) = w^2$, temos que

$$w'' = \text{grad}_w 4|w|^2 \left(\frac{1}{|w|^2} - \frac{C}{2} \right) = -4Cw \quad \therefore \quad w'' + 4Cw = 0. \quad (1.85)$$

□

Observação: Esta equação do movimento também pode ser obtida a partir da equação original do movimento, (1.61), juntamente com a relação dada em (1.70).

Notemos ainda que selecionando-se $h = f'$, segue-se que

$$dt/d\tau = |f'|^2. \quad (1.86)$$

Vimos portanto que a equação do movimento (1.61),

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{\zeta}{|\zeta|^3} = 0,$$

é transformada em

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} + 4Cw = 0,$$

cujas soluções são, tipicamente,

$$w = A \cos 2C^{1/2} \tau + B \sin 2C^{1/2} \tau$$

para $C > 0$,

$$w = A \cosh 2(-C)^{1/2} \tau + B \sinh 2(-C)^{1/2} \tau$$

para $C < 0$, e

$$w = A + B\tau,$$

quando $C = 0$.

Em suma, mostramos que as transformações $\zeta = w^2$ e $t = 4 \int_0^\tau |w|^2 d\tau$, aplicadas na regularização do problema geral dos dois corpos, são tais que:

$$d^2 w / d\tau^2 + 4Cw = 0$$

é a equação do movimento no plano transformando w . A constante

$$C = \frac{2}{|\zeta|} - |\dot{\zeta}|^2$$

é determinada pelas condições iniciais ζ_0 e $\dot{\zeta}_0$, as quais são transformadas em w_0 e $w'_0 = (dw/d\tau)_0$, com $w_0 = \zeta_0^{1/2}$ e $w'_0 = 2\dot{\zeta}_0 \bar{w}_0$.

Mostramos também que, em geral, dada a equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{\zeta} = \text{grad}_\zeta U$$

podemos transformá-la em

$$w'' = \text{grad}_w |f'(w)|^2 U,$$

onde a transformação geométrica $\zeta = f(w)$ e a transformação do tempo $dt = |f'(w)|^2 d\tau$ são dadas pela mesma função $f = f(w)$.

1.3 Regularização do problema dos dois corpos com variáveis canônicas

A regularização do problema restrito dos três corpos (eliminação de uma ou de ambas as singularidades das equações do movimento) consiste de dois passos:

1. transformação de coordenadas;
2. transformação associada ao tempo.

Estes dois passos serão aqui abordados lançando-se mão de transformações canônicas das variáveis no espaço de fase, e de uma outra transformação no espaço de fase estendido, a qual é responsável pela reparametrização do tempo.

Trataremos primeiramente o problema do campo de forças centrais Newtoniano (ou problema dos dois corpos). Dado o sistema de coordenadas retangulares cartesianas $(x, y) = (q_1, q_2)$, temos que o problema dos dois corpos, com a unidade (soma das massas) escolhida apropriadamente, tem hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{(q_1^2 + q_2^2)^{1/2}}. \quad (1.87)$$

Os momentos conjugados são dados por

$$p_i = \dot{q}_i, \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (1.88)$$

As canônicas equações do movimento são, juntamente com (1.88), dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -q_1/(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}, \\ \dot{p}_2 &= -q_2/(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Existe um método para gerar algumas, mas não todas, transformações canônicas. A técnica consiste, essencialmente, em avaliar uma forma modificada do Princípio Hamiltoniano¹. Usaremos aqui uma das quatro possíveis transformações canônicas resultantes deste método:

$$W_3(p_i, Q_i) = p_1 f(Q_1, Q_2) + p_2 g(Q_1, Q_2) \quad (1.90)$$

para a qual f e g são funções harmônicas conjugadas. Logo, por definição, f e g satisfazem as equações diferenciais de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial f}{\partial Q_1} = \frac{\partial g}{\partial Q_2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial Q_2} = -\frac{\partial g}{\partial Q_1}. \quad (1.91)$$

No espaço de fase de coordenadas canônicas q_1, q_2, p_1, p_2 , temos que se

$$Q_j = Q_j(q_1, q_2, p_1, p_2, t) \quad \text{e} \quad P_j = P_j(q_1, q_2, p_1, p_2, t), \quad (1.92)$$

para $i = 1, 2$, representam uma transformação canônica do tipo W_3 , então valem as relações:

$$q_i = \frac{\partial W_3}{\partial p_i}, \quad P_i = \frac{\partial W_3}{\partial Q_i} \quad (1.93)$$

para todo $i = 1, 2$. Também,

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} = \tilde{H} - H, \quad (1.94)$$

onde H é o hamiltoniano original e $\tilde{H}$ o transformado.

¹Ver ref. [6], pg. 324

As equações de transformação são então dadas por:

$$q_1 = f(Q_1, Q_2), \quad q_2 = g(Q_1, Q_2), \quad (1.95)$$

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1 \frac{\partial f}{\partial Q_1} + p_2 \frac{\partial g}{\partial Q_1}, \\ P_2 &= p_1 \frac{\partial f}{\partial Q_2} + p_2 \frac{\partial g}{\partial Q_2}. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Definindo-se $\partial f / \partial Q_1 = a_{11}$ e $\partial g / \partial Q_1 = a_{12}$, segue-se das equações em (1.96) que

$$\begin{aligned} P_1 &= a_{11}p_1 + a_{12}p_2 \\ P_2 &= -a_{12}p_1 + a_{11}p_2 \end{aligned} \quad (1.97)$$

ou, matricialmente,

$$P = A \cdot p. \quad (1.98)$$

Onde A é a matriz anti-simétrica não-singular

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$A^{-1} = A^* / D$$

com

$$D(Q_1, Q_2) = \det A = \left(\frac{\partial f}{\partial Q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial Q_1} \right)^2. \quad (1.99)$$

Concluimos a partir de (1.98) que

$$p = \frac{1}{D} \cdot A^* P.$$

Logo,

$$p^2 = \frac{1}{D} \cdot P^2.$$

O hamiltoniano transformado é dado por

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_1^2 + P_2^2}{D} - \frac{1}{(f^2 + g^2)^{1/2}}. \quad (1.100)$$

As novas equações do movimento são:

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} = \dot{Q}_i \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} = \dot{P}_i$$

para $i = 1, 2$. Isto é,

$$\dot{Q}_1 = \frac{1}{D} \cdot P_1, \dot{Q}_2 = \frac{1}{D} \cdot P_2, \quad (1.101)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(P_1^2 + P_2^2)}{D^2} \cdot \frac{\partial D}{\partial Q_1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(f^2 + g^2)^{3/2}} \cdot \frac{\partial}{\partial Q_2} (f^2 + g^2) \quad \text{e} \\ \dot{P}_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(P_1^2 + P_2^2)}{D^2} \frac{\partial D}{\partial Q_2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(f^2 + g^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial Q_1} (f^2 + g^2). \end{aligned} \quad (1.102)$$

Em geral, dado um sistema dinâmico com grau de liberdade n , variáveis canônicas $q_1, \dots, q_n$ e momentos conjugados $p_1, \dots, p_n$, podemos introduzir o tempo como a $(n + 1)$ -ésima coordenada generalizada. Mostra-se que o momento conjugado é $-H$. O sistema dinâmico é agora representado por $2n + 2$ variáveis no espaço de fase estendido de coordenadas

$$\begin{aligned} q_1, \dots, q_n, \quad q_{n+1} \\ p_1, \dots, p_n, \quad p_{n+1} \end{aligned} \quad (1.103)$$

com $q_{n+1} = t$ e $p_{n+1} = -H$.

Transformações canônicas incluirão a transformação do tempo. Temos classicamente na literatura que anotando-se

$$q_i = x_i, \quad p_i = y_i$$

para $i = 1, \dots, n$, e

$$t = x_{n+1}, \quad -H = y_{n+1},$$

então as equações do movimento no plano de fase estendido são dadas por

$$\frac{dx_i}{dw} = \frac{\partial \Gamma}{\partial y_i} \quad \text{e} \quad \frac{dy_i}{dw} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \quad (1.104)$$

com $i = 1, \dots, n$, $n + 1$, $w = t$ e

$$\Gamma = y_{n+1} + \gamma(x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_n), \quad (1.105)$$

onde

$$\gamma(q_1, \dots, q_n, t, p_1, \dots, p_n) = H. \quad (1.106)$$

Em nosso caso, podemos, a partir do hamiltoniano no espaço de fase estendido, obter resultados análogos aos acima obtidos aplicando-se a transformação canônica do tipo W_3 . Da fato,

$$\Gamma = P_3 + \frac{P_1^2 + P_2^2}{2D} - \frac{1}{(f^2 + g^2)^{1/2}}. \quad (1.107)$$

Com equações do movimento associadas

$$\frac{dQ_i}{dw} = \frac{\partial \Gamma}{\partial P_i} \quad \text{e} \quad \frac{dP_i}{dw} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial Q_i}. \quad (1.108)$$

Substituindo-se o valor de Γ dado em (1.107) na primeira das equações em (1.108), temos:

$$\frac{dQ_i}{dw} = \frac{P_i}{D}, \quad \frac{dQ_2}{dw} = \frac{P_2}{D}, \quad \frac{dQ_3}{dw} = 1. \quad (1.109)$$

Desde que $Q_3 = t$, $w = t + \text{const.}$ e

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{P_i}{D} \quad (1.110)$$

para $i = 1, 2$.

As equações em (1.110) são idênticas as dadas em (1.101). Substituindo-se também o valor de Γ dado em (1.107) na segunda equação de (1.108) obtemos uma conclusão similar. Exceto é claro para o caso $i = 3$, onde

$$\frac{dP_3}{dw} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial Q_3}, \quad (1.111)$$

ou

$$\dot{P}_3 = 0.$$

Mas isto é esperado, pois $P_3 = -\tilde{H}$ é constante.

Seja

$$dt = D(Q_1, Q_2) d\tau, \quad (1.112)$$

a transformação do tempo, onde D é definido pela equação (1.99) e τ é a variável do tempo transformada.

O novo hamiltoniano no espaço de fase estendido é

$$\Gamma^* = D\Gamma \quad (1.113)$$

ou

$$\Gamma^* = DP_3 + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{D}{(f^2 + g^2)^{1/2}}. \quad (1.114)$$

As equações do movimento são dadas por

$$\frac{dQ_i}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma^*}{\partial P_i} \quad \text{e} \quad \frac{dP_i}{d\tau} = -\frac{\partial \Gamma^*}{\partial Q_i} \quad (1.115)$$

para $i = 1, 2$. Isto é,

$$\frac{dQ_i}{d\tau} = P_i, \quad (1.116)$$

e

$$\frac{dP_i}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial Q_i} \left[D \left(P - 3 - \frac{1}{(f^2 + g^2)^{1/2}} \right) \right] \quad (1.117)$$

com $i = 1, 2$ nos dois casos.

Para $i = 3$, as equações do movimento são

$$\frac{\partial \Gamma^*}{\partial P_3} = \frac{dQ_3}{d\tau} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Gamma^*}{\partial Q_3} = -\frac{dP_3}{d\tau} \quad (1.118)$$

ou

$$D = dt/d\tau \quad \text{e} \quad P_3 \quad \text{constante.}$$

Observemos que a singularidade da nossa equação diferencial transformada esta associada ao termo

$$\frac{D}{(f^2 + g^2)^{1/2}} = \frac{D}{r} \quad (1.119)$$

na equação (1.117). Assim, a escolha das funções f e g deve ser feita de modo que se tenha a regularidade na região de interesse.

Definindo $\varphi = f + ig$, $i = (-1)^{1/2}$, segue-se de (1.119) que

$$\frac{D}{(f^2 + g^2)^{1/2}} = \frac{|\varphi'|}{|\varphi|}, \quad (1.120)$$

onde

$$\varphi' = \frac{\partial f}{\partial Q_1} + i \frac{\partial g}{\partial Q_1}.$$

Considere a transformação de Levi-Civita

$$\varphi = (Q_1 + iQ_2)^2. \quad (1.121)$$

Então,

$$D = 4(Q_1^2 + Q_2^2), \quad f^2 + g^2 = (Q_1^2 + Q_2^2), \quad (1.122)$$

donde

$$\frac{D}{(f^2 + g^2)^{1/2}} = 4. \quad (1.123)$$

As equações do movimento, obtidas de (1.116) e (1.117), são

$$\frac{dQ_i}{d\tau} = P_i, \quad \frac{dP_i}{d\tau} = -P_3 \frac{\partial D}{\partial Q_i} \quad (1.124)$$

para $i = 1, 2$.

Substituindo $-\tilde{H}$ por P_3 , avaliando as derivadas parciais e considerando-se a derivada com respeito ao tempo transformado τ , obtemos

$$Q'_1 = P_1, \quad Q'_2 = P_2, \quad P'_1 = 8\tilde{H}Q_1, \quad P'_2 = 8\tilde{H}Q_2. \quad (1.125)$$

A equação diferencial de segunda ordem para Q_1 e Q_2 é então

$$Q''_i = 8\tilde{H}Q_i, \quad (1.126)$$

com $i = 1, 2$. Portanto, temos um movimento

$$\text{elíptico se } \tilde{H} < 0, \quad (\text{I})$$

$$\text{hiperbólico se } \tilde{H} > 0, \quad (\text{II})$$

$$\text{retilíneo se } \tilde{H} = 0. \quad (\text{III})$$

Dadas as soluções $Q_i = Q_i(\tau)$ da equação (1.126), podemos obter a relação entre t e τ substituindo-se estas soluções em

$$dt = 4(Q_1^2 + Q_2^2)d\tau.$$

Finalmente, são obtidas as soluções $q_1 = q_1(t)$ e $q_2 = q_2(t)$ por meio das relações

$$q_1 = Q_1^2 - Q_2^2, \quad q_2 = 2Q_1Q_2,$$

as quais são devidas ao fato de que $q_1 = f$, $q_2 = g$ e $\varphi = Q_1^2 - Q_2^2 + i2Q_1Q_2$.

1.4 Fluxo geodésico na esfera e a regularização no problema de Kepler

Consideremos o problema dos dois corpos em sua forma reduzida, na qual o centro de massa esta em repouso e estudamos o movimento de apenas uma partícula material. Apesar de enfatizarmos os casos com dimensão dois e três, descrevemos o problema n -dimensionalmente.

Seja

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (1.127)$$

o vetor posição da partícula material e $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ a velocidade correspondente. Escolhendo de modo apropriado a unidade de massa podemos formular o problema por meio da equação diferencial

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{q}{||q||^3}, \quad ||q||^2 = \sum_{k=1}^n q_k^2, \quad (1.128)$$

com a energia associada escrita como

$$H = \frac{1}{2}||p||^2 - \frac{1}{||q||}. \quad (1.129)$$

Existem procedimentos diferentes para remoção da singularidade presente em $q = 0$ no caso $n = 2$. Uma destas técnicas (de regularização) é devida a Levi-Civita, e consiste essencialmente em introduzir uma nova variável independente

$$s = \int \frac{dt}{|q|}, \quad (1.130)$$

e submeter a variável dependente a transformação:

$$q_1 + iq_2 = \frac{1}{2}z^2, \quad p_1 + ip_2 = \frac{w}{\bar{z}}, \quad (1.131)$$

onde w e z são variáveis complexas. A equação diferencial transformada é regular no ponto $z = 0$.

A regularização de Levi-Civita permite uma compactificação da superfície de energia, a qual se torna uma variedade analítica real sem fronteira. É possível mostrar (ver [Mozer]) que a variedade resultante desta compactificação é topologicamente equivalente ao fibrado tangente da esfera 2-dimensional S^2 (i.e. o plano projetivo P^3). Mostraremos este fato também para $n > 2$. No entanto a prova não mais dependerá das técnicas presentes na análise complexa.

Teorema 1.1 *Para uma constante negativa C , a superfície de energia $H \equiv C$ pode ser mapeada injetiva e homeomorficamente no fibrado tangente unitário da esfera S^n . Este é o mapa levantado a partir do fibrado tangente unitário da esfera S^n menos o polo norte (correspondente a colisão). Além disso, após uma mudança apropriada na variável independente, temos que o fluxo definido pelo problema de Kepler é mapeado no fluxo geodésico sobre a esfera S^n menos um ponto.*

Este resultado será provado de modo elementar. A construção explícita do mapa mencionado no teorema consiste em estender apropriadamente a projeção esteriográfica ao fibrado tangente. Iremos com isto obter a regularização do fluxo ao compactificarmos a esfera menos o polo norte.

Vamos agora discutir como se pode interpretar o fluxo geodésico sobre a esfera em termos do fluxo definido pelo problema de Kepler.

Seja $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ um vetor real e $||\xi|| = \sum_{\nu=0}^n \xi_\nu$. Consideremos a esfera unitária

$$S^n = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1}; ||\xi|| = 1\}$$

Temos do Cálculo Variacional² que o fluxo geodésico sobre a esfera corresponde a extremos do funcional

$$F(s) = \int ||\xi'||^2 dS, \quad (1.132)$$

para o qual $\xi = \xi(s)$ é uma função vetorial com $||\xi(s)|| \equiv 1$ e $\xi' = d\xi/ds$.

A equação de Euler-Lagrange associada ao problema variacional acima nos leva a ao seguinte sistema com vínculo $||\xi(s)|| = 1$:

$$\xi'' + \lambda^2 \xi = 0 \quad (1.133)$$

onde λ é um constante real com valor $||\xi'||$. Se escolhermos $\lambda = 1$, então s corresponde ao comprimento do arco.

Anotando-se $\eta = \xi'$, temos que o sistema acima pode ser escrito como

$$\begin{cases} \xi' = \eta, \\ \eta' = -||\eta||^2 \xi, \end{cases} \quad (1.134)$$

onde $||\xi|| \equiv 1$ e portanto $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{\nu=0}^n \xi_\nu \eta_\nu = 0$. Exibimos aqui a razão de ser $\lambda = \pm ||\eta||^2$. Diferenciando-se duas vezes $||\xi|| = 1$, segue-se que

$$\langle \xi'', \xi \rangle + \langle \xi', \xi' \rangle = 0.$$

Mas, $\xi'' = -\lambda^2 \xi$, logo

$$||\xi'||^2 = ||\eta||^2 = \lambda^2,$$

como queríamos.

A variedade descrita por $||\xi|| = 1$ e $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ é justamente o fibrado tangente $T(S^n)$ da esfera unitária sobre a qual o fluxo está definido.

Podemos traduzir (1.134) para o sistema hamiltoniano correspondente sobre $T(S^n)$:

$$\begin{cases} \xi' = \Phi_\eta, \\ \eta' = -\Phi_\xi, \end{cases} \quad (1.135)$$

para o qual

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2} ||\xi||^2 ||\eta||^2. \quad (1.136)$$

A fim de obtermos uma descrição deste fluxo no espaço Euclidiano n -dimensional, consideremos a projeção estereográfica³. Esta é, em coordenadas, definida por

$$x_k = \frac{\xi_k}{1 - \xi_0}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.137)$$

²sugerimos, se necessário o for, consultar a referência [7], pg.58 a 64.

³ver apêndice, Proj. Est.

e mapeia a esfera $\hat{S}^n$ menos um ponto, doravante denotada por S^n , sobre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Extenderemos a projeção estereográfica simplecticamente a um mapa do fibrado tangente $T(S^n)$ em $\mathbb{R}^{2n}$ definindo a aplicação $y_k = g_k(\xi, \eta)$, $k = 1, \dots, n$, tal que

$$\sum_{\nu=0}^n \eta_\nu d\xi_\nu = \sum_{k=0}^n y_k dx_k. \quad (1.138)$$

Veremos a seguir que tal extensão existe e é dada por

$$y_k = \eta_k(1 - \xi_0) + \xi_k \eta_0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.139)$$

O mapa dado por (1.137) e (1.139) mapeia o fibrado tangente $T(\hat{S}^n)$ no espaço euclidiano de dimensão $2n$. Para obtermos a inversa desta transformação, consideremos primeiramente a inversa da projeção

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k^2}{(1 - \xi_0)^2} \\ &= \frac{1 - \xi_0^2}{(1 - \xi_0)^2} \\ &= \frac{1 + \xi_0}{1 - \xi_0}. \end{aligned}$$

Donde

$$\|x\|^2 = \frac{1 + \xi_0}{1 - \xi_0}. \quad (1.140)$$

Resolvendo (1.140) para ξ_0 e substituindo o resultado em (1.137) obtemos:

$$\xi_0 = \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1}, \quad \xi_k = \frac{2x_k}{\|x\|^2 + 1}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.141)$$

Desde que $\|\xi\| = 1$, temos, derivando com respeito a S , que $\langle \xi, \eta \rangle = 0$. Logo, de (1.139),

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k}{1 - \xi_0} [\eta_k(1 - \xi_0) + \xi_k \eta_0] \\ &= \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k + \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k^2 \eta_0}{(1 - \xi_0)} \\ &= \frac{(1 - \xi_0^2) \eta_0}{(1 + \xi_0)} - \eta_0 \xi_0 \\ &= (1 + \xi_0) \eta_0 - \eta_0 \xi_0, \end{aligned}$$

donde

$$\langle x, u \rangle = \eta_0. \quad (1.142)$$

Resolvendo (1.139) para η_k e usando (1.142), segue-se que:

$$\begin{aligned}\eta_k &= \frac{y_k - \xi_k \eta_0}{(1 - \xi_0)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1}} \cdot y_k - \langle x, y \rangle \cdot \frac{\xi_k}{1 - \xi_0} \\ &= \frac{\|x\|^2 + 1}{2} \cdot y_k - \langle x, y \rangle x_k,\end{aligned}$$

donde

$$\eta_k = \frac{\|x\|^2 + 1}{2} \cdot y_k - \langle x, y \rangle x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.143)$$

Também por cálculos diretos, podemos mostrar que para todos x e y , (1.143), (1.142) e (1.141) são tais que: $\|\xi\| = 1$, $\langle \xi, \eta \rangle = 0$. Isto significa que esta transformação mapeia o espaço $\mathbb{R}^{2n}$ no fibrado tangente $T(\hat{S}^n)$.

Para uso posterior, obtemos a norma do vetor η em termos de x e y :

$$\begin{aligned}\|\eta\|^2 &= n_0^2 + \sum_{k=1}^n \eta_n^2 \\ &= \langle x, y \rangle^2 + \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\|x\|^2 + 1}{2} \cdot y_k \right)^2 - 2 \left(\frac{\|x\|^2 + 1}{2} \right) y_k \right] \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle^2 x_k^2 \\ &= \langle x, y \rangle^2 + \left(\frac{\|x\|^2 + 1}{2} \right) \|y\|^2 - (\|x\|^2 + 1) \langle x, y \rangle^2 + \langle x, y \rangle^2 \|x\|^2 \\ &= \left(\frac{\|x\|^2 + 1}{2} \cdot \|y\| \right)^2\end{aligned}$$

donde

$$\|\eta\| = \frac{\|x\|^2 + 1}{2} \cdot \|y\|. \quad (1.144)$$

Indicamos, sucintamente, o cálculo da extensão exibida em (1.139) a inversa da projeção esteoregráfica com respeito ao polo norte tem sua lei de formação expressa vetorialmente por

$$\psi(x) = N + \frac{2}{\|x\|^2 + 1}(x, N). \quad (1.145)$$

Assim,

$$Df(x) \cdot v = \frac{2}{(\|x\|^2 + 1)^2} [(\|x\|^2 + 1)v + 2 \langle x, v \rangle (N - x)]. \quad (1.146)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|Df(x) \cdot v\| &= \frac{1}{(\|x\|^2 + 1)^4} \{ [4(\|x\|^2 + 1)^2 \|v\|^2 - \\ &\quad - 8(\|x\|^2 + 1) \langle x, v \rangle^2 + 8(\|x\|^2 + 1) \langle x, v \rangle \langle v, N \rangle] + \\ &\quad + [-8(\|x\|^2 + 1) \langle x, v \rangle^2 + 16 \langle x, v \rangle^2 \|x\|^2 - 16 \langle x, v \rangle^2 \langle v, N \rangle] + \\ &\quad + [4(\|x\|^2 + 1) \langle x, v \rangle \langle v, N \rangle - 8 \langle x, v \rangle^2 \langle v, N \rangle + 16 \langle x, v \rangle^2] \}.\end{aligned}$$

Mas $x \perp N$ e $v \perp N$. Então, escolhendo-se v unitário e denotando-se $\xi = \psi(x)$, obtemos para o elemento de comprimento de arco:

$$||d\xi||^2 = \frac{4}{(||x||^2 + 1)^2} ||dx||^2. \quad (1.147)$$

Seja ψ_x o jacobiano $n \times (n+1)$ de ψ . Podemos obter a matriz ψ_n diretamente a partir de (1.141), a saber:

$$\psi_x = \frac{4}{(||x||^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} x_1^2 & \frac{||x||^2+1}{2} - x_1^2 & -x_1x_2 & \cdots & -x_1x_n \\ x_2^2 & -x_1x_2 & \frac{||x||^2+1}{2} - x_2^2 & \cdots & -x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^2 & -x_1x_n & -x_2x_n & \cdots & \frac{||x||^2+1}{2} - x_n^2 \end{pmatrix}. \quad (1.148)$$

Efetuada a multiplicação entre ψ_n e sua transposta ψ_n^t obtemos como produto,

$$\psi_x^t \psi_x = \frac{4}{||x||^2 + 1} \cdot I_{n \times n}. \quad (1.149)$$

Da Álgebra Linear temos a relação:

$$\langle \eta, d\xi \rangle = \langle \eta, \psi_x da \rangle = \langle \psi_x^t \eta, dx \rangle \quad (1.150)$$

a qual sugere que tomemos $\eta = \gamma \psi_n y$ onde γ é um escalar a determinar. Se definirmos $\gamma = (||x||^2 + 1)^2 / 4$, e substituirmos o valor resultante de η em (1.150), verificamos de imediato a relação (1.138). Além disso, podemos concluir que ξ e $\eta = \gamma \psi_x y$ são ortogonais, apenas derivando a relação $||\xi||^2 = ||\psi||^2 = 1$. Segue-se que

$$\eta = \frac{(||x||^2 + 1)^2}{4} \psi_x y \quad (1.151)$$

é a extensão em (1.142) e (1.143), cuja inversa é justamente (1.139).

Como a extensão aqui proposta é simplética, é suficiente transformar o hamiltoniano para que se tenha as equações diferenciais (1.138) transformadas⁴. Sendo assim, definimos

$$F(x, y) = \phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2} ||\xi||^2 ||\eta||^2 = \frac{(||x||^2 + 1)^2 ||y||^2}{8}. \quad (1.152)$$

Conseqüentemente, as equações diferenciais transformadas são dadas sob a forma:

$$x' = F_y, \quad y' = -F_x. \quad (1.153)$$

⁴Uma maneira de confirmar esta afirmação explicitamente é através da eq. (1.134).

Mas ainda, as geodésicas com “velocidade unitária” $\|\eta\| = 1$, isto é, com $\phi = 1/2$ correspondem a soluções tais que $F \equiv 1/2$.

Desde que o sistema hamiltoniano (1.153) depende exclusivamente do gradiente de F , $\text{grad } F$, podemos substituir F por $u(F)$ se $u'(1/2) = 1$. De fato, em $F = 1/2$ temos que $\text{grad } F = \text{grad } u(F)$. Em particular, se

$$G = u(F) = \sqrt{2F} = \frac{(\|x\|^2 + 1)\|y\|}{2} - 1, \quad (1.154)$$

então o sistema (1.153) é transformado em

$$x' = G_y, \quad y' = G_x. \quad (1.155)$$

Finalmente, aplicamos a transformação do tempo:

$$t = \int \|y\| dS \quad \text{ou} \quad dt = \|y\| dS. \quad (1.156)$$

Com isto,

$$\dot{x} = \|y\|^{-1} x' = \|y\|^{-1} G_y, \quad \dot{y} = -\|y\|^{-1} G_x. \quad (1.157)$$

onde $(\dot{})$ indica a diferenciação com respeito a t . Em $G \equiv 0$, isto é, $F \equiv 1/2$, temos que:

$$\|y\|^{-1} G_y = Hy, \quad \|y\|^{-1} G_x = Hx. \quad (1.158)$$

e

$$H = \|y\|^{-1} G - \frac{1}{2} = \|y\|^{-1}(\sqrt{2F} - 1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{\|y\|}. \quad (1.159)$$

Este sistema resultante é hamiltoniano com função hamiltoniana $H = -1/2$. Anotando-se $p = -x$ e $q = y$ chegamos ao problema de Kepler com superfície de energia $-1/2$:

$$H = \frac{1}{2}\|p\|^2 - \frac{1}{\|q\|} = -1/2.$$

Recapitulando: mostramos que a transformação do fibrado tangente $T(\hat{S}^n)$ no espaço de fase $2n$ -dimensional

$$(\xi, \eta) \mapsto \left(\frac{\xi_1}{1 - \xi_0}, \dots, \frac{\xi_n}{1 - \xi_0}, \eta_1(1 - \xi_0) + \xi_1\eta_0, \dots, \eta_n(1 - \xi_0) + \xi_n\eta_0 \right)$$

juntamente com a reparametrização do tempo

$$t = \int |y| ds,$$

mapeia os círculos geodésicos da esfera S^n em órbitas do problema de Kepler sobre a superfície de energia $H \equiv -1/2$. No entanto, o polo norte foi excluído. Mas, o incluímos por

meio de uma compactificação da superfície com energia $H \equiv -1/2$. A superfície obtida é então equivalente ao fibrado tangente unitário, e órbitas de colisão corresponde aos círculos geodésicos através do polo norte.

Comentário: É possível descrever o fluxo em uma vizinhança da colisão $q = 0$, o qual corresponde ao polo norte. De fato, considerando-se uma reflexão apropriada (que leva o polo norte no polo sul):

$$\xi_0 \mapsto -\xi_0, \quad \eta_0 \mapsto -\eta_0$$

$$\xi_k \mapsto -\xi_k, \quad \eta_k \mapsto -\eta_k$$

para todo $k = 1, 2, \dots, n$, então nossa transformação é agora dada por:

$$q \mapsto ||p||^2 q - 2 < p, q > p,$$

$$p \mapsto \frac{p}{||p||^2}.$$

A qual coincide com uma transformação introduzida por Sundman. Como as isometrias (e nossa reflexão em particular) preservam o fluxo geodésico, a última transformação preserva as órbitas do problema de Kepler. Além disso, desde que $H = -1/2$, na colisão temos que $p = 0$ e $||q|| = 2$, em contraste com os estados originais de colisão $||p|| = \infty$ e $q = 0$.

Capítulo 2

Regularização no Problema Restrito dos Três Corpos

2.1 Regularização local no problema restrito dos três corpos

A estratégia aplicada neste caso é essencialmente a mesma usada para o problema dos dois corpos. Definimos as transformações:

$$z = f(w) \quad \text{e} \quad dt/d\tau = g(w) = |h(w)|^2. \quad (2.1)$$

Consideremos o sistema de coordenadas girantes. A equação do movimento para o problema restrito dos três corpos em sua versão complexa é dada por:

$$\ddot{z} + 2i\dot{z} = \text{grad}_z U. \quad (2.2)$$

Similarmente a técnica adotada anteriormente, aplicando-se as transformações dadas em (2.1), de (2.2) obtemos

$$w'' + 2ig(w)w' = \text{grad}_w \left| \frac{h^2}{f'} \right|^2 U - 2iw' \text{Im} \left(w' \frac{d}{dw} \ln \frac{f'}{h} \right) \quad (2.3)$$

com

$$U \equiv \Omega - C/2,$$

$$\Omega = \frac{1}{2}[(1 - \mu)r_1^2 + \mu r_2^2] + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2},$$

$$r_1 = |z - \mu| \quad \text{e} \quad r_2 = |z - \mu + 1|.$$

Observe que a segunda parcela no primeiro membro de equação do movimento, implica a presença do termo $2ig(w)w'$ em (2.3). Esta é, essencialmente, a diferença entre (2.3) e a equação correspondente obtida no caso do problema dos dois corpos.

Se definirmos como antes $f' = h$ (ou $g(w) = |f'|^2$), então a equação do movimento é dada por

$$w'' + 2i|f'|^2 w' = \text{grad}_w |f'|^2 U. \quad (2.4)$$

No sistema de coordenadas originais, a energia é

$$|\dot{z}|^2 = 2U \quad (2.5)$$

e no sistema transformado

$$\dot{z} = \frac{df}{dw} \cdot \frac{dw}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}$$

donde

$$|w'|^2 = |\dot{z}|^2 |h|^4 / |f'|^2$$

ou

$$|dw/d\tau|^2 = 2|f'|^2 U. \quad (2.6)$$

Nas singularidades da função U , $r_1 \rightarrow 0$ ou $r_2 \rightarrow 0$, temos que $|\dot{z}| \rightarrow \infty$.

A escolha da transformação do tempo associada a transformação de coordenadas é feita levando-se em conta as equações (2.3) e (1.83). De acordo com estas equações, se

$$dt/d\tau = g(w) = |h(w)|^2 = |f'(w)|^2,$$

então a equação regularizada é linear na primeira e segunda derivada da nova variável dependente w .

Existem outras escolhas possíveis para função $g = g(w)$. R.F. Arenstorf em seu artigo “New regularization of the restricted problem of three bodies”, por exemplo, sugere uma técnica para seleção da função g diferente da apresentada até aqui. A estratégia usada por Arenstorf é a de exigir que quaisquer duas “soluções equivalentes” da equação regularizada (2.3), tenham correspondências geométricas e dinâmicas com respeito às suas variáveis independentes.

Entendemos por soluções equivalentes no plano w , $w_1(\tau)$ e $w_2(\tau)$ digamos, aquelas que são mapeadas na mesma curva solução no plano z . Tal equivalência possui apenas significado geométrico. Mas, se impormos que para um dado tempo τ_0 , pontos das soluções regularizadas $w_1(\tau_0)$ e $w_2(\tau_0)$ possuem imagem comum $z(t_0)$, então temos também uma correspondência de caráter dinâmico.

Como $\tau = \int_0^t \frac{dt}{g(w)}$, a relação entre os tempos t e τ depende da solução no plano w . Portanto, a correspondência de caráter dinâmico a qual nos referimos acima não é necessariamente satisfeita. Trataremos destas questões mais concretamente ao estudarmos uma regularização proposta por Lemaitre.

Vimos que a função $z = f(w) = w^2$ regulariza as singularidades situadas na origem no problema dos dois corpos. A transformação definida por $Z = z - \mu$ mapeia o ponto $z = \mu$ do plano z na origem do plano Z . Assim, a transformação $Z = w^2$ regularizada a singularidade situada na origem do plano Z , e conseqüentemente também regulariza o ponto singular $z = \mu$ no plano z .

Desde que no problema restrito dos três corpos as partículas materiais m_1 e m_2 estão localizadas em $z_1 = \mu$ e $z_2 = \mu - 1$, a transformação $z = \mu + w^2$ e $z = \mu - 1 + w^2$ regularizam as singularidades em m_1 e m_2 respectivamente. Tais transformações são ditas regularizações locais (terminologia devida a Birkhoff).

Enfatizamos que a terminologia introduzida por Birkhoff é bastante sugestiva, desde que a seleção de uma das transformações acima elimina apenas uma das singularidades.

Consideremos a função

$$z = f(w) = w^2 + \mu \quad (2.7)$$

a qual transforma o ponto $P_1 = (\mu, 0)$ no plano z na origem do plano w , e o ponto $P_2 = (\mu - 1, 0)$ nos pontos $w_1 = i$, $w_2 = -i$. f transforma a origem do plano z nos pontos $w_1 = i\mu^{1/2}$ e $w_2 = -i\mu^{1/2}$. Como $w = \pm(z - \mu)^{1/2}$, segue-se que o semiplano $y > 0$ é transformado nos quadrantes $u > 0$, $v > 0$ e $u < 0$, $v < 0$.

A relação entre os pontos do plano z e w é de um para dois, haja vista que a cada ponto no plano, exceto $z = \mu$, correspondem dois pontos no plano w .

Na Figura 2.1 a seguir indicamos algumas propriedades geométricas da transformação $z = w^2 + \mu$. Por exemplo, a semi-reta sobre o eixo x a esquerda do ponto P_2 , anotada por a , é transformada em semi-retas ao longo do eixo v como indicado na Figura 2.1. De fato, se $z = n < \mu - 1$, então $(x - \mu)^2 > 1$. Assim, de $x = w^2 + \mu$ segue-se que $|w| > 1$. Em coordenadas, $x = \mu^2 - v^2 + \mu$ e $uv = 0$. Deste sistema concluímos que $\mu = 0$ e portanto $x = \mu - v^2$ ou $v = (\mu - x)^{1/2}$.

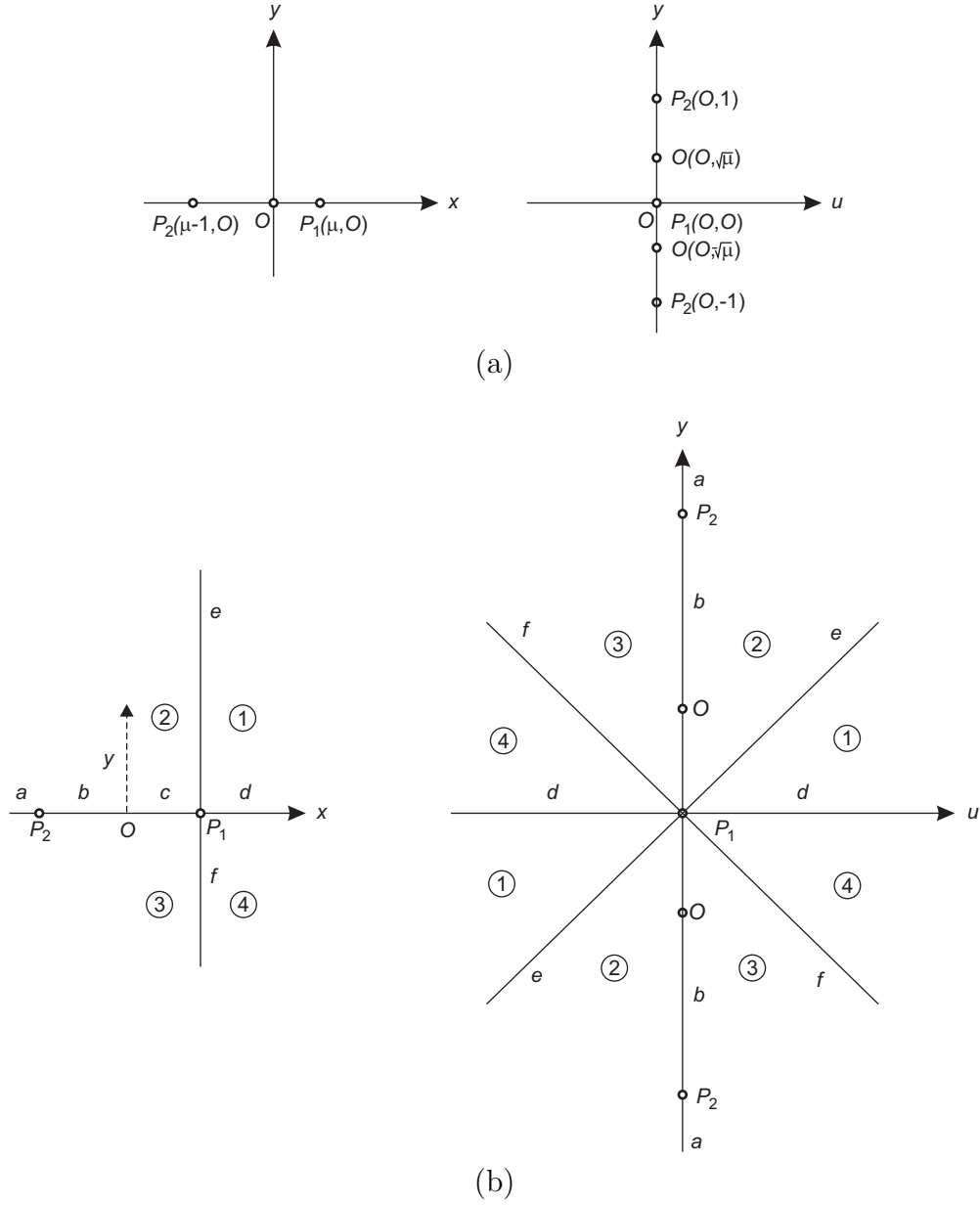


Figura 2.1: A transformação de Levi-Civita

A fim de expressarmos $U = \Omega - C/2$ em termos da nova variável w consideremos as expressões de r_1 e r_2 em função de w .

Como $r_1 = |z - \mu|$ e $r_2 = |z - \mu + 1|$, temos que

$$r_1 = |w|^2, \quad (2.8)$$

e

$$r_2 = |1 + w|^2. \quad (2.9)$$

Portanto

$$U = \frac{1}{2} [(1 - \mu)|w|^4 + \mu|1 + w|^2] + \frac{1 - \mu}{|w|^2} + \frac{\mu}{|1 + w|^2} - \frac{C}{2}, \quad (2.10)$$

desde que

$$U = \frac{1}{2} [(1 - \mu)r_1^2 + \mu r_2^2] + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} - \frac{C}{2}. \quad (2.11)$$

Como $|f'|^2 = 4|w|^2$, temos por substituição em (2.6) que a nova velocidade é dada por

$$\left| \frac{dw}{dt} \right|^2 = 8(1 - \mu) + |w|^2 \left[\frac{8\mu}{|1 + w^2|} + 4(1 - \mu)|w|^4 + 4\mu|w^2 + 1|^2 - 4C \right]. \quad (2.12)$$

Em m_1 temos que $r_1 = 0$, $z = \mu$ e $w = 0$. Logo, a velocidade no plano w ,

$$|dw/d\tau| = 2[2(1 - \mu)]^{1/2}, \quad (2.13)$$

é finita. No entanto, em m_2 temos que $r_2 = 0$, $z = \mu - 1$ e $w = \pm i$ e, pela equação (2.12), a velocidade é infinita.

As derivadas parciais de $|f'|^2 U$ que aparecem na equação diferencial do movimento (2.4) podem ser obtidas a partir de

$$\begin{aligned} U|f'|^2 &= 2 \left[(u^2 + v^2)^3 + 2\mu(u^4 - v^4) + (\mu - C)(u^2 + v^2) + 2(1 - \mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\mu(u^2 + v^2)}{[(u^2 + v^2)^2 + 1 + 2(u^2 - v^2)]^{1/2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Desde que $|f'|^2 = 4(u^2 + v^2)$, podemos reescrever (2.4) como as seguintes equações do movimento

$$\begin{aligned} u'' - 8(u^2 + v^2)v' &= (U|f'|^2)_u, \\ v'' + 8(u^2 + v^2)u' &= (U|f'|^2)_v. \end{aligned} \quad (2.15)$$

No ponto $P_1 = (\mu, 0)$ do plano z temos que $w = 0$, $\text{grad } U|f'|^2 = 0$ e $|w'| < \infty$. Assim, $w'' = 0$ na colisão com w_1 . A equação (2.14) nos diz que no ponto $P_2 = (\mu - 1, 0)$ do plano z , $w = \pm i$, $U|f'|^2 \rightarrow \infty$, $|w'| \rightarrow \infty$ e $\text{grad}_w U|f'|^2$ não está definido.

As funções $z = \mu + w^2$ e $z = \mu - 1 + w^2$ são chamadas transformações de Levi-Civita e foram primeiramente aplicadas ao problema dos dois corpos. Observemos que cada uma destas transformações regulariza apenas uma das singularidades locais do problema restrito dos três corpos.

É natural agora concentrarmo-nos na tarefa de obter transformações capazes de eliminar as duas singularidades simultaneamente. Lembremos que em nosso problema, dois dos corpos descrevem trajetória circulares concêntricas. Portanto, o interessante problema da colisão tripla não é neste caso considerado.

Estudamos a seguir funções $z = f(w)$ tais que pontos de colisão com m_1 e m_2 sejam pontos regulares da equação diferencial do movimento transformada. Este tipo de transformação por *regularização global*.

2.2 Regularização global de Birkhoff para o problema restrito dos três corpos

Ao invés de adotarmos a origem do sistema de coordenadas no centro de massa das partículas materiais, consideramos o sistema no qual a origem está situado no ponto médio entre as partículas principais. Aplicando-se a mudança de coordenadas

$$q = z + \frac{1}{2} - \mu \quad (2.16)$$

temos que as partículas principais estão localizadas em $q = \pm 1/2$. As equações do movimento são agora dadas por:

$$\ddot{q} + 2i\dot{q} = \text{grad}_q U(q), \quad (2.17)$$

para a qual

$$U(q) = \Omega(q) - C/2 \quad (2.18)$$

e

$$\Omega(q) = \frac{1}{2}[(1 - \mu)r_1^2 + \mu r_2^2] + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (2.19)$$

como antes. Além disso,

$$r_1 = |q - 1/2| \quad \text{e} \quad r_2 = |q + 1/2| \quad (2.20)$$

$$r_1 = [(q_1 - 1/2)^2 + q_2^2]^{1/2}, \quad r_2 = [(q_1 + 1/2)^2 + q_2^2]^{1/2} \quad (2.21)$$

A energia é dada por

$$|\dot{q}|^2 = 2\Omega(q) - C = 2U(q). \quad (2.22)$$

A função de regularização sugerida por Birkhoff, $q = f(w)$, é da forma

$$q = \alpha w + \beta/w = f(w). \quad (2.23)$$

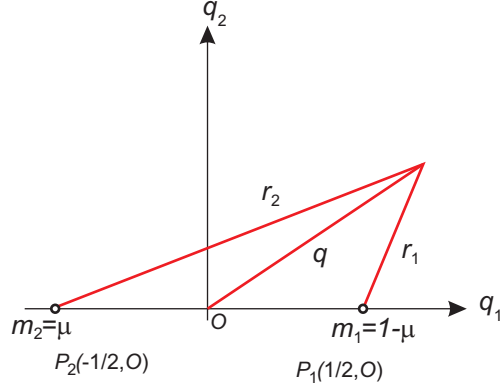


Figura 2.2: *Sistemas de coordenadas girantes com origem no ponto médio*

É imediato de (2.23) que

$$|f'(w)| = \frac{|\alpha w^2 - \beta|^2}{|w|^4}. \quad (2.24)$$

As constantes α e β serão determinadas a partir das seguintes duas condições impostas a f :

- (i) $f = f(w)$ deve eliminar as duas singularidades presentes no problema;
- (ii) P_1 e P_2 devem ser pontos fixos da função f .

A fim de que a condição (i) seja satisfeita, consideremos o produto entre $|f'(w)|^2$ e $(1 - \mu)/r_1 + \mu/r_2$:

$$\frac{1}{|w|^3} \left[\frac{(1 - \mu)|\alpha w^2 - \beta|^2}{|\alpha w^2 + \beta - w/2|} + \frac{\mu|\alpha w^2 - \beta|^2}{|\alpha w^2 + \beta + w/2|} \right], \quad (2.25)$$

obtido multiplicando-se a expressão de $|f'(w)|$ dada em (2.24) por $(1 - \mu)/r_1 + \mu/r_2 = (1 - \mu)/|\alpha w + \beta/w - 1/2| + \mu/|\alpha w^2 + \beta/w + 1/2|$.

Uma das singularidades está localizada no ponto $q = (1/2, 0)$, e corresponde a

$$w_{1,2} = \frac{1}{4\alpha} [1 \pm (1 - 16\alpha\beta)^{1/2}]. \quad (2.26)$$

Esta correspondência é obtida resolvendo-se a equação do segundo grau em w com $q = 1/2$ dada em (2.23).

Observemos que $w_{1,2}$ são justamente as raízes do denominador da primeira parcela em (2.25). Para eliminar estas singularidades podemos impor que o numerador possua as mesmas raízes. Logo,

$$\frac{1}{4\alpha} [1 \pm (1 - 16\alpha\beta)^{1/2}] = \pm \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{1/2}$$

ou

$$16\alpha\beta = 1. \quad (2.27)$$

Segue portanto da equação (2.26) que $w_1 = w_2 = 1/4\alpha$, i.e., m_1 é transformada em um único ponto.

Pela condição (ii), $f(P_1) = P_1$. Logo,

$$1/4\alpha = 1/2 \quad \therefore \quad \alpha = 1/2.$$

Da equação (2.27) temos que $\beta = 1/8$, e portanto

$$q = \frac{1}{4} \left(2w + \frac{1}{2w} \right). \quad (2.28)$$

O segundo termo em $|f'|^2\Omega(q)$ apresenta uma singularidade em P_2 cuja eliminação é idêntica a efetuada acima. O procedimento adotado acima fornece neste caso a mesma função dada em (2.28), i.e., $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1/8$.

Notemos que o fator $|w|^{-3}$ presente na nova função potencial fornece uma nova singularidade em $w = 0$, a qual corresponde a $q \rightarrow \infty$. Enquanto as singularidades em P_1 e P_2 são eliminadas, a origem do plano transformado w é um ponto singular. Este ponto singular no entanto, corresponde a pontos no infinito do plano q . Podemos assim concluir que todos os pontos a uma distância finita da origem no plano q são regularizados por f .

Passemos a apresentar equações que descrevem o sistema transformado com a seguinte notação: Sejam ρ_1, ρ_2 e ρ as distâncias correspondentes no plano w a r_1, r_2 e r no plano q , e $\rho_1 = |w - 1/2|$, $\rho_2 = |w + 1/2|$, $\rho = |w|$. Então:

$$|f'(w)|^2 = \frac{|4w^2 - 1|^2}{64|w|^4}$$

ou

$$|f'(w)|^2 = \frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{4\rho^4}. \quad (2.29)$$

Além disso,

$$r_1 = \rho_1^2/2\rho, \quad r_2 = \rho_2^2/2\rho \quad \text{e} \quad |f'|^2 = r_1 r_2 / \rho^2. \quad (2.30)$$

Logo

$$\begin{aligned} U|f'|^2 &= (\Omega - C/2)|f'|^2 \\ &= \frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{32\rho^6} [(1 - \mu)\rho_1^4 + \mu\rho_2^4] + \\ &\quad \frac{1}{2\rho^3} [(1 - \mu)\rho_2^2 + \mu\rho_1^2] - \frac{C}{2} \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{2\rho^2} \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Note que neste caso há uma única singularidade, em $\rho = 0$. Esta corresponde a $r_1 \rightarrow \infty$, $r_2 \rightarrow \infty$, $|w| = 0$ e $|q| \rightarrow \infty$. A origem do plano w e os correspondentes pontos no infinito do plano q são singularidades.

Apresentamos na Figura 2.3 abaixo a geometria da transformação

$$q = \frac{1}{4}(2w + 1/2w)$$

com algumas breves justificativas.

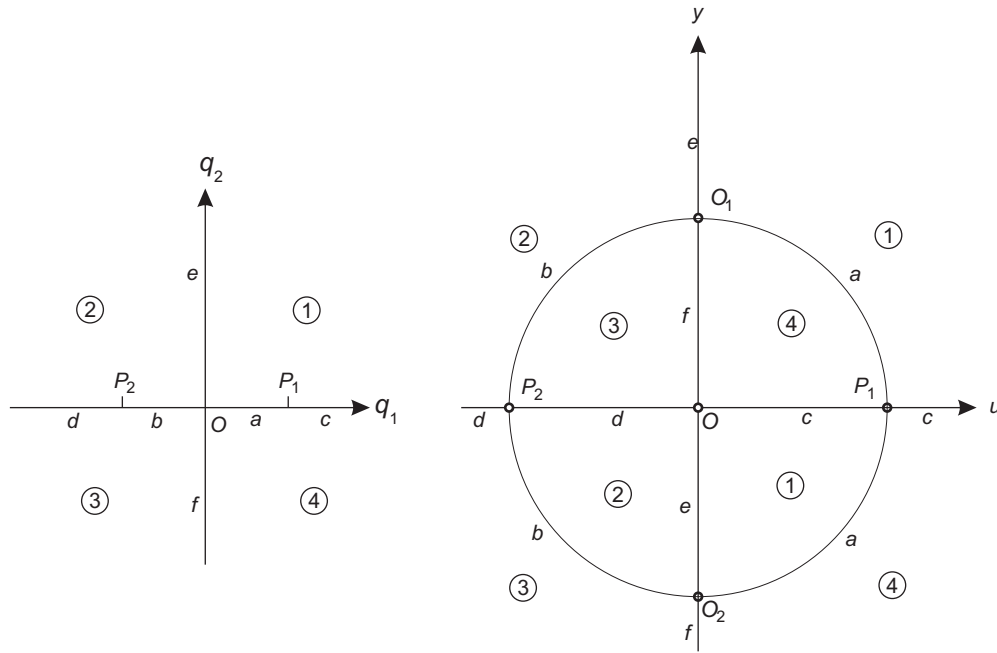


Figura 2.3: Geometria da transformação de Birkhoff

$P_1 = (1/2, 0)$ e $P_2 = (-1/2, 0)$ são pontos fixos da transformação. A origem do plano q é transformada nos pontos $w = \pm i/2$, anotados por $O_{1,2} = (0, \pm 1/2)$ na figura. O arco circular de raio $1/2$ entre os pontos $P_1 = (1/2, 0)$ e $O_1 = (0, 1/2)$ é a imagem do segmento $\overline{OP_1}$ no eixo q_1 . De fato, se $w = 1/2 e^{is}$ então $q = (1/2) \cos s$. Quando s varia em $(0, \pi/2)$ tais caminhos são descritos.

A correspondência entre os pontos do plano q e do plano w é de um para dois. De fato,

$$4w^2 - 8wq + 1 = 0 \quad \therefore \quad w_1 w_2 = 1/4. \quad (2.32)$$

Isto significa que dois valores no plano w correspondem a um único no plano q . Observe que se $|w_1| \leq 1/2$, então $|w_2| \geq 1/2$, e vice-versa.

No sistema de variáveis regularizadas a velocidade é expressa por

$$(du/d\tau)^2 + (dv/d\tau)^2 = 2U|f'|^2. \quad (2.33)$$

Como um “controle de qualidade”, verifiquemos que são finitas as velocidades nos pontos regulares P_1 e P_2 .

Em P_1 , $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$, $\rho = 1/2$, e da equação (2.31) concluímos que $2U|f'|^2 = 8(1 - \mu)$. Assim, a velocidade é, por (2.33), $2[2(1 - \mu)]^{1/2}$. Analogamente concluímos que em P_2 a velocidade é $2(2\mu)^{1/2}$.

2.3 Regularização global de Thiele-Burrau

A transformação aqui apresentada foi primeiramente usada por Euler ao estudar o problema dos dois centros gravitacionais fixos. A regularização de Thiele-Burrau foi inicialmente proposta por T.N. Thiele para o caso $\mu = 1/2$. C. Burrau obteve mais tarde uma generalização para valores arbitrários de μ .

Consideramos o sistema de coordenadas girantes com a origem localizada no ponto médio entre as partículas principais. As equações do movimento, energia e as demais equações do nosso interesse são também dadas por (2.17) a (2.22).

A transformação de Thiele-Burrau é definida por

$$q = \frac{1}{2} \cos w = f(w) \quad (2.34)$$

ou

$$q = \frac{1}{4}(e^{iw} + e^{-iw}) = f(w). \quad (2.35)$$

Seja $w = u + iv$. A parte real e imaginária das funções seno e cosseno são como sabemos dadas por:

$$\cos(u + iv) = \cos u \cosh v - i \sin u \sinh v, \quad (2.36)$$

$$\sin(u + iv) = \sin u \cosh v + i \cos u \sinh v. \quad (2.37)$$

Consideremos as relações trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Segue-se de (2.37) e (2.38) que

$$\begin{aligned} |\cos w|^2 &= \cos w \overline{\cos w} \\ &= \cos w \cos \bar{w} \\ &= \frac{1}{2}(\cos 2u + \cos 2iv). \end{aligned}$$

Mas, $\cos iv = (e^v + e^{-v})/2 = \cosh v$. Logo

$$|\cos w|^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2v - \cos 2u). \quad (2.39)$$

Analogamente, segue-se de (2.36), (2.38) e da relação $\sin iv = (e^{-v} - e^v)/2i = i \sinh v$ que:

$$|\sin w|^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x). \quad (2.40)$$

Aplicando-se a transformação de Thiele-Burrau temos portanto que:

$$\begin{aligned} |f'|^2 &= \left| -\frac{1}{2} \sin w \right|^2 \\ &= \frac{1}{4}(\cosh^2 v - \cos^2 u) \\ \therefore |f'|^2 &= \frac{1}{8}(\cosh 2v - \cos 2u). \end{aligned} \quad (2.41)$$

As distâncias r, r_1 e r_2 são agora expressas por:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} |\cos w| \\ &= \frac{1}{2} (\sinh^2 v + \cos^2 u)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\therefore r = \frac{1}{2(2)^{1/2}} (\cosh 2v + \cos 2u)^{1/2}.$$

$$r_1 = \frac{1}{2} |\cos w - 1| = \frac{1}{2} (\cosh v - \cos u), \quad (2.43)$$

e

$$r_2 = \frac{1}{2} |\cos w + 1| = \frac{1}{2} (\cosh v + \cos u) \quad (2.44)$$

é portanto imediato de (2.44), (2.43) e (2.34) que

$$|f'(w)|^2 = r_1 r_2. \quad (2.45)$$

Ambas as singularidades são então eliminadas ao multiplicarmos $\Omega(q)$ por $|f'|^2$:

$$U|f'|^2 = \frac{r_1 r_2}{2} [(1 - \mu)r_1^2 + \mu r_2^2 - C] + (1 - \mu)r_2 + \mu r_1. \quad (2.46)$$

Substituindo os valores de r_1 e r_2 dados em (2.43) e (2.44), temos que (2.46) se escreve como:

$$U|f'|^2 = \frac{1}{16}(\cosh 2v - \cos 2u) \cdot \left[\frac{1}{4} - C + \frac{1}{8}(\cosh 2v + \cos 2u) + (\mu - 1/2) \cosh v \cos u \right] + (1/2 - \mu) \cos \mu + \frac{1}{2} \cosh v. \quad (2.47)$$

Anotemos (2.47) por $U|f'|^2 =: \Omega^*(u, v)$.

A geometria da transformação de Thiele-Burrau pode ser entendida reescrevendo-se (2.47) em coordenadas:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2} \cos u \cosh v, \\ q_2 &= -\frac{1}{2} \sin u \sinh v. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Desde que

$$\frac{q_1^2}{\cos^2 u} - \frac{q_2^2}{\sinh^2 v} = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \frac{q_1^2}{\cosh^2 v} + \frac{q_2^2}{\sin^2 u} = \frac{1}{4}, \quad (2.49)$$

as retas obtidas fixando-se u e v são os mapas respectivos de hipérboles e elipses do plano q_1, q_2 .

O centro dessas hipérboles e elipses cofocais é a origem $q = 0$, e os focos são justamente os pontos onde as partículas principais estão localizadas.

Observemos que a origem do plano q é transformada nos pontos $v = 0$, $u = \pm(2n + 1)\pi/2 \forall n \in \mathbb{N}$ os quais são obtidos a partir de (2.48) quando $q_1 = q_2 = 0$. Quando $u = v = 0$, $q = (1/2, 0)$, isto é, a origem do plano w corresponde a m_1 no plano q . Além disso, pontos do plano w correspondentes a m_1 têm coordenadas $v = 0$, $u = 0, \pm 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. $P_2(-1/2, 0)$ é transformado em $v = 0$, $u = \pm(2n + 1)\pi$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

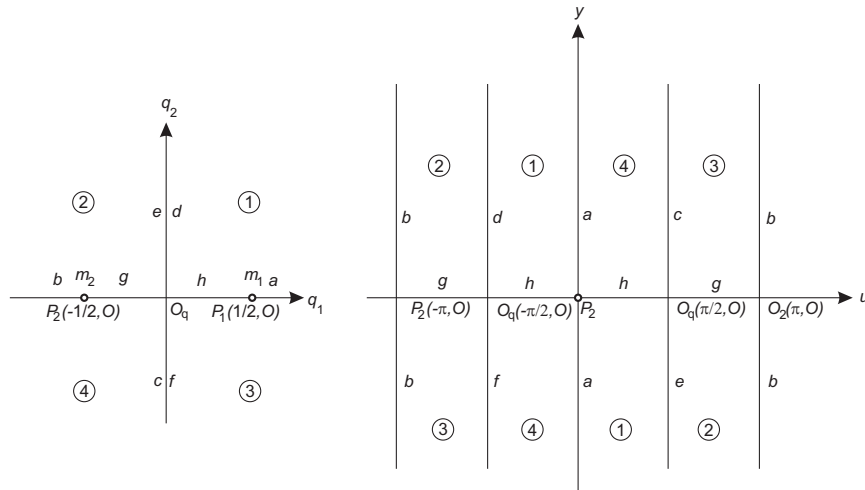


Figura 2.4: Geometria da transformação de Thiele-Burrau

Lembremos que a expressão da velocidade, (2.33), pode ser obtida a partir de

$$(du/d\tau)^2 + (dv/d\tau)^2 = 2U|f'|^2$$

ou

$$(du/d\tau)^2 + (dv/d\tau)^2 = 2\Omega^*(u, v).$$

Em m_1 , $u = v = 0$ e $2\Omega^*(u, v) = 2(1 - \mu)$. Em m_2 , $u = \pi$, $v = 0$ e $2\Omega^*(u, v) = 2\mu$. Portanto, o valor absoluto da velocidade regularizada é $[2(1 - \mu)]^{1/2}$ em m_1 e $(2\mu)^{1/2}$ em m_2 .

Como na transformação de Levi-Civita, as equações diferenciais do movimento na colisão são dadas por $u'' = 0$ e $v'' = 0$.

Comentário: Se denotarmos por $f_B = f_B(w)$ a transformação de Birkhoff e $f_T = f_T(w)$ a de Thiele-Burrau, então estas estão relacionadas por:

$$f_T(w) = (f_B \circ g)(w),$$

onde $g(w) = \frac{1}{2}e^{iw}$.

2.4 Regularização de Lemaître

Consideremos também neste caso o sistema de coordenadas girante com a origem localizada no ponto médio entre as partículas principais. Definimos a transformação de Lemaître por:

$$q = \frac{1}{4}(w^2 + 1/w^2), \quad (2.50)$$

com

$$|f'(w)|^2 = \frac{|w^4 - 1|^2}{4|w|^6} = \frac{dt}{d\tau}. \quad (2.51)$$

Aplicada a transformação, temos que as distâncias de m_1 e m_2 a terceira partícula são dadas por:

$$r_1 = |q - 1/2| = \frac{|w^2 - 1|^2}{4|w|^2} \quad (2.52)$$

e

$$r_2 = |q + 1/2| = \frac{|w^2 + 1|^2}{4|w|^2}. \quad (2.53)$$

Segue-se que

$$|f'(w)|^2 = \frac{4r_1r_2}{|w|^2}. \quad (2.54)$$

Vejamos que as singularidades presentes na colisão de m_3 com m_1 e m_2 são de fato eliminadas:

$$\begin{aligned}
 U|f'(w)|^2 &= |f'|^2 \left\{ \frac{1}{2}[(1\mu)r_1^2 + \mu r_2^2] + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} - \frac{C}{2} \right\}. \\
 &= \frac{4r_1r_2}{|w|^2} \left\{ \frac{1}{2}[r_1^2 - \mu(r_1^2 + r_2^2)] + \frac{(1-\mu)r_2 + \mu r_1}{r_1r_2} - \frac{C}{2} \right\}. \\
 &= \frac{|1-w^4|^2}{128|w|^{10}} [-16C|w|^4 + |1-w^2|^4 - \mu(|1-w^2|^4 - |1+w^2|^4)] + \\
 &\quad \frac{1}{|w|^4} [(1-\mu)|1+w^2|^2 + \mu|1-w^2|^2].
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Anotemos: $U|f'|^2 = \Omega^*(u, v)$.

Passemos a avaliar alguns aspectos concernentes a geometria da transformação de Lemaître. Se $w = \pm 1$ em (2.50) então $q = 1/2$, enquanto que se $w = \pm i$, então $q = -1/2$. Isto é, no plano transformado w , as partículas principais estão localizadas nos pontos $w = \pm 1$ e $w = \pm i$. A origem do plano q é transformada em $w = (-1)^{1/4}$, como podemos concluir resolvendo (2.50) para w com $q = 0$. Por outro lado, a origem do plano regularizado, $w = 0$, corresponde aos pontos no infinito do plano q .

Observemos que $\Omega^*(u, v)$ é regular e toda parte, exceto em $w = 0$. Além disso, temos de (2.50) que

$$w^4 - 4qw^2 + 1 = 0. \tag{2.56}$$

Logo,

$$w = \pm[2q \pm (4q^2 - 1)^{1/2}]^{1/2}. \tag{2.57}$$

Com isto concluímos que a cada ponto no plano q correspondem 4 pontos no plano w .

Substituindo-se q por w em (2.56) temos a equação:

$$w^4 - 4w^3 + 1 = 0, \tag{2.58}$$

cujas soluções são os pontos fixos da transformação de Lemaître.

A fim de estudarmos os pontos fixos sobre o eixo real, consideremos a seguinte

Proposição 2.1 (*A regra do sinal de Descartes*). *O número de raízes positivas de um polinômio com coeficientes reais é igual ao número de “trocas de sinal” na lista de coeficientes, ou é um múltiplo de dois menor que este número. Em particular, como as raízes negativas da equação polinomial $f(x) = 0$ são raízes positivas da equação $f(-x) = 0$, a regra pode ser usada para estimar o número de raízes negativas.*

Para uma demonstração deste resultado, ver por exemplo [11] e [12]. Os pontos fixos ao longo do eixo real são as soluções da equação:

$$h(u) = u^4 - 4u + 1 = 0$$

de acordo com a regra do sinal de Descartes, $h(u) = 0$ não possui raízes negativas, e tem no máximo duas raízes positivas. Como $h(1/2) > 0$ e $h(1) < 0$, uma das raízes positivas esta na região d do plano q indicada na figura abaixo (pontos $(q_1, 0)$ com $1/2 < q_1 < 1$). Além disso, como o mínimo de h é atingido em $u = 3$, $h(3) < 0$ e $h(4) = 1$, então a outra raiz positiva esta entre $3 < w = q = u = q_1 < 4$. Isto é, está localizada fora do círculo unitário sobre o semieixo positivo de u e sobre a região d .

As duas outras raízes de $h(u) = 0$ tem parte imaginária não nula e esgotam os pontos fixos da transformação.

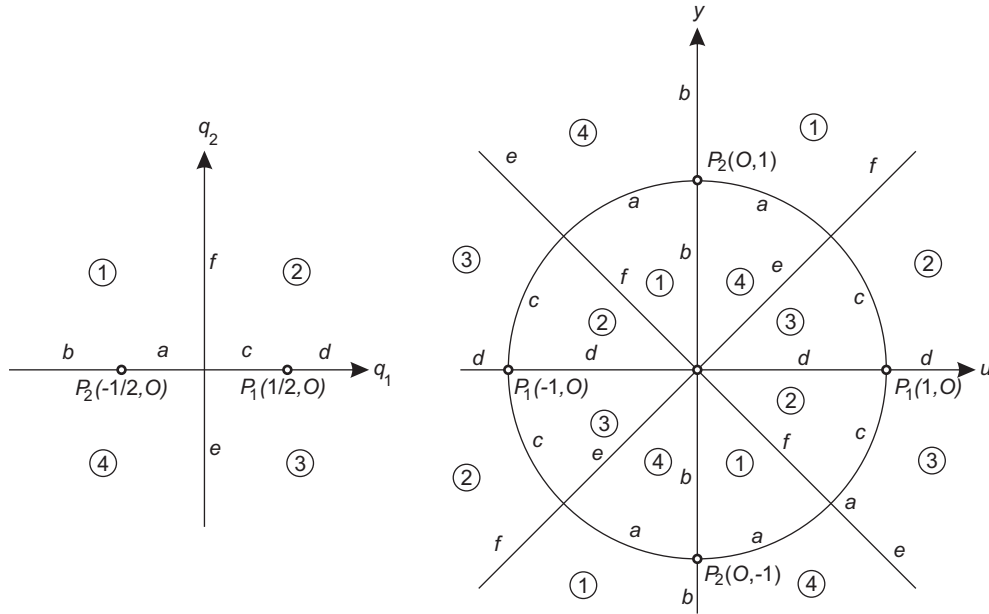


Figura 2.5: Geometria da transformação de Lemaître

Para obtermos as velocidades transformadas nos pontos de colisão, devemos avaliar $\Omega^*(u, v)$ nos pontos $w = \pm 1$ (correspondentes a m_1) e $w = \pm i$ (correspondentes a m_2). Por (2.55),

$$\Omega^*(P_1) = 4(1 - \mu) \quad \text{e} \quad \Omega^*(P_2) = 4\mu.$$

A energia dos sistema transformado é dada por:

$$u'^2 + v'^2 = 2\Omega^*.$$

Assim, a magnitude da velocidade regularizada em m_1 é $[8(1 - \mu)]^{1/2}$, e em m_2 $(8\mu)^{1/2}$.

A transformação proposta por Arenstorf é uma modificação do método que acabamos de descrever. A transformação de Lemaître dada em (2.50) é equivalente a introduzida por Arenstorf. Mas, enquanto $|f'|^2 = dt/d\tau$ na regularização de Lemaître, $dt/d\tau = |w f'|^2$ é a transformação do tempo na regularização de Arenstorf. Esta última reparametrização do tempo satisfaz a condição de equivalência dinâmica, mencionada anteriormente.

Comentário: Se denotarmos por $f_B = f_B(w)$ a transformação de Birkhoff, e por $f_L = f_L(w)$ a transformação e de Lemaître, temos que estas estão relacionadas por:

$$f_L(w) = (f_B \circ g)(w),$$

onde

$$f(w) = \frac{w^2}{2}$$

para todo $w \neq 0$.

2.5 Generalização dos métodos de regularização global no problema restrito dos três corpos

Em geral, os três métodos de regularização global no problema restrito dos três corpos acima descritos são baseados na função

$$q = A \left[h(w) + \frac{1}{h(w)} \right]. \quad (2.59)$$

Nos três casos, $A \equiv 1/4$ e nas transformações de Birkhoff, Thiele-Burrau e Lemaître temos respectivamente que

$$h(w) = 2w, \quad e^{iw} \quad \text{e} \quad w^2.$$

Observemos que a seguir que a escolha de $A = 1/4$ é meramente uma questão de comodidade:

$$f'(w) = A[h' - h^{-2}h'] \quad \therefore \quad |f'(w)|^2 = |A|^2 \cdot \frac{|h'|^2|h^2 - 1|^2}{|h|^4} \quad (2.60)$$

Das relações $r_1 = |q - 1/2|$ e $r_2 = |q + 1/2|$ segue-se ao aplicarmos a transformação que

$$r_1 = \frac{|2Ah^2 - h + 2A|}{2|h|}, \quad r_2 = \frac{|2Ah^2 + h + 2A|}{2|h|} \quad (2.61)$$

Como U possui dois polos, em $r_1 = 0$ e $r_2 = 0$, o produto $|f'|^2 U$ têm os termos $1/r_1$ e $1/r_2$ regularizados desde que $|f'|^2$ seja da forma $|f'|^2 = (r_1 r_2)^n \gamma(w)$. A função $\gamma = \gamma(w)$

deve ser regular nas singularidades, e a princípio, $n \geq 1$. Se $n > 1$, então $|f'|^2 U = 0$ nos pontos singulares e conseqüentemente, a velocidade nestes pontos também é nula. De fato, se $\text{grad}|f'|^2 U = 0$ nas singularidades então a aceleração é também nula nestes pontos. Logo, obtemos uma solução de equilíbrio para a qual a partícula permanece em repouso no ponto singular. Então, é necessário que seja $n = 1$.

Para as transformações de Birkhoff, Thiele-Bureau e Lemaître temos que $\gamma(w)$ é igual a $|w|^2, 1$, e $4|w|^{-2}$ respectivamente. Observe que o ponto $w = 0$, em nenhuma das três transformações, coincide com a posição das partículas materiais.

Segue-se de (2.61) que

$$\frac{|2Ah^2 - h + 2A|}{2|h|} \cdot \frac{|2Ah^2 + h + 2A|}{2|h|} \cdot \gamma(w) = \frac{|A|^2|h'|^2|h^2 - 1|^2}{|h|^4}.$$

Logo,

$$\frac{|4Ah^4 + 8A^2h^2 + 4A^2 - h^2|}{4|h|^2} \cdot \gamma(w) = \frac{|A|^2|h'|^2|h^2 - 1|^2}{|h|^4},$$

donde

$$\frac{|(h^2 + 1)^2 - h^2/4A^2|}{|h|^2} \cdot \gamma(w) = \frac{|h - 1|^2|h'|^2}{|h|^4}. \quad (2.62)$$

Se $a = 1/4$, então:

$$\gamma(w) = \left| \frac{h'}{h} \right|^2 \quad \text{e} \quad |f'|^2 = r_1 r_2 \left| \frac{h'}{h} \right|^2. \quad (2.63)$$

Sejam w_1 e w_2 os pontos correspondentes às partículas principais m_1 e m_2 respectivamente no plano transformado. Pela equação (2.59), temos que:

$$[h(w_1) + h^{-1}(w_1)] = 2 \quad \text{e} \quad [h(w_2) + h^{-1}(w_2)] = -2. \quad (2.64)$$

Logo, $h(w_1) = 1$ e $h(w_2) = -1$. Estas equações podem, é claro, admitir raízes múltiplas. Além disso, as soluções em (2.64) são justamente as singularidades no plano transformado.

Os pontos singulares são então eliminados:

$$\begin{aligned} \Omega^*(u, v) &= U|f'|^2 \\ &= \left| \frac{h'}{h} \right|^2 \cdot \frac{r_1 r_2}{2} [r_1^2 - C + \mu(r_2^2 - r_1^2)] + \\ &\quad \left| \frac{h'}{h} \right|^2 \cdot [(1 - \mu)r_2 + r_1]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Vimos que $h \neq 0$ nos pontos correspondentes às partículas materiais. Logo, basta que $h'(w_1)$ e $h'(w_2)$ sejam finitas para que $\Omega^*(u, v)$ seja regular. Estas condições são claramente

satisfeitas quando $h(w) = 2w$, e^{iw} ou w^2 , pois, respectivamente, $h'(w) = 2$, ie^{iw} e $2w$. No caso da transformação de Thiele-Burrau, $h' = ie^{iw} = ih$, $\log h'(w_1) = ih(w_1) = i$ e $h'(w_z) = ih(w_2) = -i$ as quais são finitas. E finalmente, para a transformação de Lemaître temos que $h' = 2w = 2h^{1/2}$, donde $h'(w_1) = \pm 2$ e $h'(w_2) = \pm 2i$, as quais são também finitas.

Para $i = 1, 2$ denotemos por w_{m_i} a velocidade em m_i . Pela equação (2.65) temos que:

$$|w'_{m_1}| = [2\Omega^*(r_1 = 0, r_2 = 1)]^{1/2} = \left| \frac{h'}{h} \right| [2(1 - \mu)]^{1/2}, \quad (2.66)$$

e

$$|w'_{m_2}| = [2\Omega^*(r_1 = 1, r_2 = 0)]^{1/2} = \left| \frac{h'}{h} \right| (2\mu)^{1/2}. \quad (2.67)$$

Desde que nas partículas,

$$|h(w_1)| = |h(w_2)| = 1,$$

segue-se que

$$|w'_{m_1}| = |h'(w_1)|[2(1 - \mu)]^{1/2} \quad \text{e} \quad |w'_{m_2}| = |h'(w_2)|(2\mu)^{1/2}. \quad (2.68)$$

2.6 Comparação entre os métodos de regularização global no problema restrito dos três corpos

Vimos que nas transformações de Birkhoff, Lemaître e Thiele-Burrau a correspondência entre um dado valor no plano original e no plano transformado é, respectivamente, de um para dois, um para quatro e um para infinito. Podemos então grosseiramente dizer que o mapa de Birkhoff leva vantagem em relação aos demais neste aspecto. Em geral, se definirmos $h(w) = \alpha(w)^n$ então:

$$\alpha^2 w^{2n} - 4\alpha q w^n + 1 = 0.$$

Assim, a correspondência acima mencionada é o dobro do grau da função h .

Consideremos agora as equações diferenciais regularizadas aplicando-se cada um três métodos. Como enfatizamos anteriormente, as expressões na equação do movimento a serem consideradas são as de $|f'(w)|^2$ e $\Omega^*(u, v)$. Na transformação de Thiele-Burrau,

$$|f'_T(w)|^2 = \frac{1}{4} |\text{sen } w|^2.$$

Para a transformação de Birkhoff,

$$|f'_B(w)|^2 = \frac{|4w^2 - 1|^2}{4|w|^6}$$

e para o mapa de Lemaître,

$$|f'_L(w)|^2 = \frac{|w^4 - 1|^2}{4|w|^6}.$$

Para as quais, f_T , f_B e f_L denotam as funções de Thiele, Birkhoff e Lemaître respectivamente.

Se $w = u + iv$ então

$$|f'_T(w)|^2 = \frac{1}{8}(\cosh 2v - \cos 2u),$$

Enquanto que as expressões correspondentes para $|f'_B(w)|^2$ e $|f'_L(w)|^2$ são funções racionais cujos numeradores e denominadores têm grau no mínimo igual a quatro.

Observações similares podem ser feitas com respeito a $\Omega^* = \Omega^*(u, v)$. No caso da transformação de Thiele a expressão de Ω^* envolve apenas funções elementares ou combinações destas:

$$\begin{aligned} \Omega^*(u, v) = & \frac{1}{16}(\cosh 2v - \cos 2u) \cdot \left[\frac{1}{4} - C \frac{1}{8}(\cosh 2v + \cos 2u) + \right. \\ & \left. (\mu - 1/2) \cosh v \cos u \right] + (1/2 - \mu) \cos u + \frac{1}{2} \cosh v. \end{aligned}$$

Enquanto que no caso da transformação de Lemaître além da regularização a função Ω^* é racionalizada, no mapa de Birkhoff isto não ocorre. De fato, podemos observar que a presença do termo $\rho^{-3} = |w|^{-3} = (u^2 + v^2)^{-3/2}$ implica que Ω^* não é uma função de Birkhoff. No entanto, a expressão de Ω^* no caso do mapa de Lemaître possui termos com até décima sexta ordem, enquanto que ocorrem no máximo termos de ordem oito no caso da transformação de Birkhoff. Tais afirmações seguem imediatamente das expressões de Ω^* em cada um dos dois casos:

$$\Omega^* = \rho_1^2 \rho_2^2 [(1 - \mu) \rho_1^4 + \mu \rho_2^4] + \frac{1}{2\rho^3} [(1 - \mu) \rho_2^2 + \mu \rho_1^2] - \frac{C}{2} \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{2\rho^2} \right).$$

No caso de Birkhoff,

$$\begin{aligned} \Omega^* &= \frac{|1 - w^4|^2}{128|w|^{10}} [-16C|w|^4 + |1 - w^2|^4 - \mu(1 - w^2|^4 - \mu(|1 - w^2|^4 - |1 + w^2|^4))] + \\ &= \frac{1}{|w|^4} [(1 - \mu)|1 - w^2|^2 + \mu|1 + w^2|^2], \end{aligned}$$

no caso de Lemaître.

Enfatizamos agora a semelhança entre as equações do movimento transformadas ao aplicarmos a regularizações até então estudadas. Tanto no sistema de coordenadas para o qual a origem é o centro de massa das partículas, $z = z(t)$, como para aquele no qual a origem é o ponto médio entre as partículas principais, $q = q(t)$, temos que:

$$\ddot{z} + 2i\dot{z} = \text{grad}_z \Omega$$

ou

$$\ddot{z} + \lambda(z)\dot{z} = \text{grad}_z \Omega, \quad \text{com} \quad \lambda(z) \equiv 2i$$

é a equação do movimento original (antes de aplicarmos a regularização).

Aplicando-se a transformação $z = f(w)$ e $dt = |f'(w)|^2 d\tau$ a última equação, obtemos:

$$w'' + 2i|f'(w)|^2 w' = \text{grad}_w \Omega^*,$$

ou

$$w'' + \lambda^*(w)w' = \text{grad}_w \Omega^*,$$

com

$$\lambda^*(w) = 2i|f'(w)|^2 \quad \text{e} \quad \Omega^* = (\Omega - C/2)|f'(w)|^2.$$

Observemos que a equação diferencial original e a transformada possuem a mesma forma. Esta “invariância” ocorre também com a integral primeira dada pela energia:

$$|\dot{z}|^2 = 2\Omega - C \quad \text{e} \quad |w'|^2 = 2\Omega.$$

Comentário: Baseados na invariância acima referida, podemos generalizar o problema restrito dos três corpos e expressá-lo em termos da equação

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda(y) \frac{dy}{dx} = \text{grad}_y F(y),$$

onde y é a matriz complexa dependente e x a variável real independente. As funções λ e F são regulares na região de interesse. Esta equação admite uma integral primeira da forma:

$$|dy/dx|^2 = 2F - C,$$

para uma função λ arbitrária.

2.7 Da existência de soluções

Discutiremos aqui o seguinte resultado:

Proposição 2.2 *Qualquer singularidade real e finita da solução das equações diferenciais do movimento correspondem a colisão com uma das partículas principais.*

As equações do movimento e a energia são no sistema (físico) original dadas por

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y \tag{2.69}$$

e

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C \quad (2.70)$$

onde

$$\Omega = \frac{1}{2}[(1 - \mu)r_1^2 + \mu r_2^2] + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}. \quad (2.71)$$

Observemos que Ω é uma função limitada desde que r_1, r_2, r_1^{-1} e r_2^{-1} o sejam. Neste caso, colisões não ocorrem e Ω permanece finito no futuro.

Fixados os valores de C e do parâmetro de massa μ , concluímos de (2.71) que Ω é limitada somente se $\dot{x}$ e $\dot{y}$ são limitados.

É natural definirmos a função

$$\rho(t) = \min(r_1, r_2, r_1^{-1}, r_2^{-1}), \quad (2.72)$$

a qual é não-negativa ao longo de soluções. Como discutimos acima, $\rho(t) = 0$ implica que Ω é ilimitada. Consideremos agora o seguinte

Teorema 2.1 *Para valores fixos de μ , C e para $\rho^* > 0$ existem constantes $\alpha^* > 0$, $\beta^* > 0$ tais que qualquer solução $x(t), y(t)$ para qual $\rho > \rho^*$ em $t = t_0$ satisfaz:*

(I) *a solução é regular e analítica no intervalo de tempo*

$$|t - t_0| < \alpha^*$$

(II) *a solução é ilimitada, e*

$$[x(t) - x(t_0)]^2 + [y(t) - y(t_0)]^2 < \beta^*$$

no intervalo de tempo $|t - t_0| < \alpha^$.*

Para uma demonstração deste fato ver a referência [5], pg. 356.

Se a solução não é analítica regular, então

$$\lim_{t \rightarrow t_c} \rho(t) = 0, \quad (2.73)$$

onde t_c é o instante da colisão. Mas, isto ocorre se e somente valem as condições:

$$(i) \lim_{t \rightarrow t_c} r_1(t) = 0$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow t_c} r_2(t) = 0$$

$$(i) \lim_{t \rightarrow t_c} r_1^{-1}(t) = 0$$

quando $t \rightarrow t_c$. Nos casos (i) e (ii) há colisão. No caso (iii), $\Omega = +\infty$, equivalentemente a quando $r_2^{-1}(t) \rightarrow 0$. Os problemas oriundos da colisão podem ser abordados com as técnicas de regularização descritas neste trabalho. E quanto ao caso $r_1^{-1}(t) \rightarrow 0$ (ou $r_2^{-1}(t) \rightarrow 0$)? Veremos a seguir que no problema restrito, $r_1^{-1}(t) \rightarrow 0$ (e consequentemente $\Omega \rightarrow \infty$) não ocorre em tempo finito.

Quando $r_1(t) \rightarrow \infty$, a força centrífuga associada ao movimento tem magnitude de maior grandeza com respeito a força gravitacional. E neste caso¹,

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = y \quad (2.74)$$

e

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = x^2 + y^2 - \tilde{C}. \quad (2.75)$$

As soluções deste sistema de equações diferenciais lineares são analíticas regulares para todo t finito. Assim, $x^2 + y^2$ é finito quando $t \rightarrow t_c$. Mas isto é uma contradição, pois

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \xrightarrow[t \rightarrow t_c]{} \infty \quad (2.76)$$

e consequentemente $x^2 + y^2$ tende ao infinito próximo a colisão. Concluimos portanto que $x(t)$ e $y(t)$ permanecem limitados para toda solução do problema restrito na qual $t < \infty$.

Vimos portanto que apenas singularidades correspondentes a colisão podem ocorrer. Aplicando-se uma regularização conveniente, mostramos que uma solução pode ser estendida analiticamente através de uma colisão. Assim, as soluções do problema restrito dos três corpos existem para todo tempo finito.

Examinamos ainda duas outras questões primeiramente, questionamos a analiticidade do tempo t como função do tempo transformado τ .

Vimos no caso da colisão binária do problema dos dois corpos, por exemplo, que

$$\tau(t) = \int_{t_0}^t \frac{dt}{r(t)}. \quad (2.77)$$

Assim,

$$\tau(t) = \int_{t_c}^t \frac{dt}{r(t)} + \tau_c. \quad (2.78)$$

Mas, $r(t) = A(t - t_c)^{2/3} + \dots$, logo, o integrando é infinito quando $t \rightarrow t_c$.

De fato, vimos que $d\tau/dt$ não é limitado na colisão para nenhuma das regularizações que estudamos. Assim, a existência do

$$\lim_{t \rightarrow t_c} \tau =: \tau_c \quad (2.79)$$

¹ver ref. [6].

deve ser examinada com cuidado.

Após a integração, concluímos de (2.78) que

$$\tau(t) \longrightarrow B(t - t_c)^{1/3} + \tau_c.$$

Logo, $\tau(t)$ existe para $t > t_c$ e $\tau \longrightarrow \tau_c$ quando $t \longrightarrow t_c$.

Consideramos agora uma última questão: Se existe colisão para um tempo finito, então a solução do problema pode não estar definida para todo $-\infty < t < \infty$.

O fato de que: se existem infinitas colisões, então não há um ponto de acumulação a distância finita da origem para este conjunto de colisões, foi provado por Wintner e Arenstorf, ver [5].

Neste caso, o problema fica então resolvido.

Por fim, observamos que $d\tau/dt \geq 0$ de modo estritamente crescente em todas as transformações estudadas. No entanto a variável de regularização do tempo τ , pode não variar em todo intervalo estendido $[-\infty, \infty]$, mesmo que t varie. Na regularização correspondentes ao infinito no plano físico. Pontos no infinito do plano original, por sua vez, correspondem a $t \longrightarrow \infty$. Consequentemente, temos um exemplo de quando uma solução do plano w (regularizado) se aproxima da singularidade com $\tau < \infty$ correspondentemente a $t \longrightarrow \infty$.

2.8 Regularização do problema restrito dos três corpos com variáveis canônicas

Considere o sistema de coordenadas cartesianas retangulares girantes para o problema restrito dos três corpos. O hamiltoniano associado é:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 - F(q_1, q_2) \quad (2.80)$$

onde q_1 e q_2 são as coordenadas cartesianas girantes, p_1 e p_2 são os momentos conjugados e

$$F(q_1, q_2) = \mu_1/r_1 + \mu_2/r_2,$$

com

$$r_1 = [(q_1 - \mu_2)^2 + q_2^2]^{1/2} \quad \text{e} \quad r_2 = [(q_1 + \mu_1)^2 + q_2^2]^{1/2}$$

Efetuamos primeiramente uma transformação de coordenadas no espaço da fase, e por fim uma transformação no espaço de fase estendido.

Usaremos a mesma função geradora do caso anterior (problema dos dois corpos):

$$W_3 = p_1(Q_1, Q_2) + p_2g(Q_1, Q_2).$$

As equações de transformação são novamente dadas por

$$q_1 = \frac{\partial W_3}{\partial p_i} \quad \text{e} \quad p_1 = \frac{\partial W_3}{\partial Q_i}$$

para $i = 1, 2$.

Conseqüentemente, como antes,

$$\frac{\partial f}{\partial Q_i} = \frac{\partial g}{\partial Q_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial Q_2} = -\frac{\partial g}{\partial Q_1}, \quad (2.81)$$

e

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad (2.82)$$

onde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$ é não-singular anti-simétrica com entradas $a_{11} = \frac{\partial f}{\partial Q_1}$ e $a_{12} = \frac{\partial g}{\partial Q_2}$.

Assim, de (2.82),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial Q_1} \cdot P_1 & -\frac{\partial f}{\partial Q_1} \cdot P_2 \\ \frac{\partial g}{\partial Q_1} \cdot P_1 & +\frac{\partial f}{\partial Q_1} \cdot P_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Desde que $\det A = D$ em nossa notação e $q_1 = f$, $q_2 = g$, podemos usar as relações de Cauchy-Riemann para escrever:

$$q_2 p_1 - p_2 q_1 = \frac{1}{2D} [P_1 \cdot \frac{\partial}{\partial Q_2} (f^2 + g^2) - P_2 \cdot \frac{\partial}{\partial Q_1} (f^2 + g^2)]. \quad (2.83)$$

Ficamos portanto com o seguinte hamiltoniano transformado:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2D} [p_1^2 + P_2^2 + P_1 \cdot \frac{\partial}{\partial Q_1} (g^2 + f^2) - P_2 \cdot \frac{\partial}{\partial Q_1} (g^2 + f^2)] - \tilde{F}(Q_1, Q_2). \quad (2.84)$$

As equações do movimento são:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{1}{2D} \left[2P_1 + \frac{\partial}{\partial Q_1} (f^2 + g^2) \right], \\ \dot{Q}_2 &= \frac{1}{2D} \left[2P_2 - \frac{\partial}{\partial Q_1} (f^2 + g^2) \right], \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\dot{P}_1 = -\partial \tilde{H} / \partial Q_1 \quad \text{e} \quad \dot{P}_2 = \partial \tilde{H} / \partial Q_2. \quad (2.86)$$

No espaço de fase estendido o hamiltoniano é:

$$\Gamma = P_3 + \frac{1}{2D} \left[P_1^2 + P_2^2 + P_1 \cdot \frac{\partial}{\partial Q_2}(f^2 + g^2) - P_2 \cdot \frac{\partial}{\partial Q_1}(f^2 + g^2) \right] - \tilde{F}(Q_1, Q_2), \quad (2.87)$$

e as equações do movimento são reduzidas às mesmas equações dadas em (2.85) e (2.86).

O novo hamiltoniano no espaço de fase estendido é $\Gamma^* = D\Gamma$, ou

$$\Gamma^* = DP_3 + \frac{1}{2} \left[P_1^2 + P_2^2 + P_1 \cdot \frac{\partial}{\partial Q_2}(f^2 + g^2) + P_2 \cdot \frac{\partial}{\partial Q_1}(f^2 + g^2) \right] - D\tilde{F}. \quad (2.88)$$

Com isto, podemos estabelecer as equações do movimento usando a nova variável do tempo, τ . Aplicamos a mesma reparametrização do tempo usada para o problema dos dois corpos:

$$dt = D d\tau. \quad (2.89)$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q'_1 &= P_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial Q_2} |\varphi|^2, \\ Q'_2 &= P_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial Q_1} |\varphi|^2, \\ Q'_3 &= D, \end{aligned} \quad (2.90)$$

com

$$\varphi := f(Q_1, Q_2) + ig(Q_1, Q_2). \quad (2.91)$$

As demais equações do nosso sistema hamiltoniano transformado são:

$$\begin{aligned} P'_1 &= -P_3 \frac{\partial D}{\partial Q_1} - \frac{1}{2} \left[P_1 \frac{\partial^2 |\varphi|^2}{\partial Q_1 \partial Q_2} - P_2 \frac{\partial^2 |\varphi|^2}{\partial Q_1^2} \right] + \frac{\partial}{\partial Q_1} (D\tilde{F}), \\ P'_2 &= -P_3 \frac{\partial D}{\partial Q_2} - \frac{1}{2} \left[P_1 \frac{\partial^2 |\varphi|^2}{\partial Q_2^2} - P_2 \frac{\partial^2 |\varphi|^2}{\partial Q_2 \partial Q_1} \right] + \frac{\partial}{\partial Q_2} (D\tilde{F}), \\ P'_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.92)$$

A última equação expressa o fato de que $\tilde{H}$ é constante. As singularidades estão no último termo das duas primeiras equações do sistema (2.92), similarmente ao termo $D(f^2 + g^2)^{-1/2}$ que ocorre no problema dos dois corpos.

As equações em (2.90) e (2.92) representam um sistema de ordem seis. Desprezando-se a última equação em cada um destes conjuntos de equações em cada um destes conjuntos de equações, ficamos com um sistema de ordem quatro.

Se a partir de (2.90) computarmos Q''_1 e Q''_2 , substituiremos no resultado os valores de

P'_1 e P'_2 dados em (2.92) e de P_1 , P_2 dados em (2.82), então obtemos²:

$$\begin{aligned} Q''_1 - 2DQ'_2 &= \frac{2}{\partial Q_1} D \left(\frac{1}{2} |\phi|^2 - P_3 + \tilde{F} \right) \\ Q''_2 + 2DQ'_1 &= \frac{2}{\partial Q_2} D \left(\frac{1}{2} |\phi|^2 - P_3 + \tilde{F} \right). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Em nosso sistema de coordenadas transformadas, temos da energia associada ao problema as seguintes identidades³

$$\frac{1}{2}(f^2 + g^2) + \tilde{F} = \Omega - \frac{1}{2}\mu_1\mu_2 \quad (2.94)$$

e

$$P_3 = -\tilde{H} = \frac{C - \mu_1\mu_2}{2}. \quad (2.95)$$

Subtraindo (2.95) de (2.94) obtemos

$$\frac{1}{2}(f^2 + g^2) - P_3 + \tilde{F} = \Omega - \frac{C}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}|\phi|^2 - P_3 + \tilde{F} = \Omega - \frac{C}{2} \quad (2.96)$$

substituindo (2.96) em (2.93), ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} Q''_1 - 2DQ'_2 &= \frac{\partial}{\partial Q_1} D \left(\Omega - \frac{C}{2} \right) \\ Q''_2 + 2DQ'_1 &= \frac{\partial}{\partial Q_2} D \left(\Omega - \frac{C}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Definindo $w := Q_1 + iQ_2$ e $D := |\phi|^2 = |f'(w)|^2$ o sistema anterior pode ser escrito sob a forma

$$w'' + 2i|f'(w)|^2 w' = \text{grad}_w |f'|^2 \left(\Omega - \frac{C}{2} \right). \quad (2.98)$$

A equação (2.98) é idêntica a equação do movimento transformada estudada anteriormente na regularização local do problema restrito dos três corpos. Isto conclui nossa discussão sobre um método geral de regularizar equações do movimento à luz da dinâmica hamiltoniana.

²ver ref. [6] (1967), pg. 378

³ver ref. [6] (1967), pgs. 18, 351 e 378.

Capítulo 3

Coordenadas Simétricas e Regularizadas no Problema Planar dos Três Corpos

Passaremos a apresentar e discutir nos parágrafos abaixo um conjunto de variáveis bem adaptadas ao problema planar dos três corpos. Serão aplicadas ao problema em foco transformações devidas a Murnaghan [16], Lemaître [13] e McGehee [15].

3.1 Coordenadas simétricas

Sejam $X_j \in \mathbb{C}$ para $j = 1, 2, 3$ as coordenadas cartesianas das massas $m_j > 0$ no problema planar dos três corpos. Os momentos canonicamente conjugados são dados por:

$$P_j = m_j \frac{dX_j}{dt} \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

onde t representa o tempo.

Se adotarmos o sistema do centro de massa, então

$$\sum_{j=1}^3 m_j X_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^3 P_j = 0 \quad (3.2)$$

são integrais primeiras para o movimento.

A energia cinética associada ao problema é dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{m_j} |P_j|^2. \quad (3.3)$$

Além disso, se denotarmos por (j, k, l) as permutações cíclicas de $(1, 2, 3)$, podemos então

expressar o potencial como

$$U = \sum \frac{m_k m_l}{a_j}, \quad (3.4)$$

onde

$$a_j := |X_l - X_k|. \quad (3.5)$$

O hamiltoniano associado é

$$H = T - U \quad \text{ou} \quad H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{m_j} |P_j|^2 - \sum \frac{m_k m_l}{a_j} \quad (3.6)$$

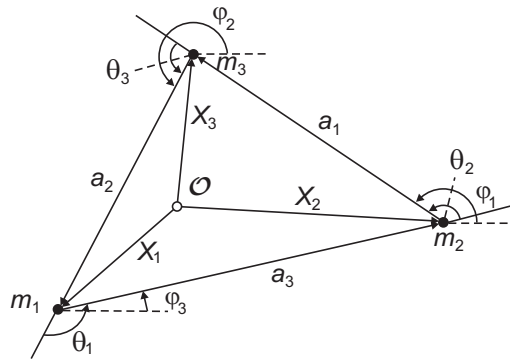


Figura 3.1: O problema planar dos três corpos.

Observe que o nosso sistema hamiltoniano,

$$\frac{dX_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_j}, \quad \frac{dP_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X_j}, \quad (3.7)$$

tem quatro graus de liberdade.

Trataremos agora de introduzir as coordenadas simétricas de Murnaghan [16] a_1, a_2, a_3, φ neste sistema com quatro graus de liberdade. Sejam a_j e φ_j o comprimento e a direção do lado oposto a m_j respectivamente. Definimos no triângulo da figura acima

$$X_l - X_k := a_j e^{i\varphi_j}, \quad \text{com} \quad (i^2 = -1), \quad (3.8)$$

e

$$\varphi = \frac{1}{3}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3). \quad (3.9)$$

Observe que (3.8) é a representação polar do vetor diferença $X_l - X_k$.

Afim de obtermos a transformação inversa, considere os ângulos exteriores do triângulo com vértices m_1, m_2, m_3 :

$$\theta_j = \varphi_l - \varphi_k \pmod{2\pi}, \quad (3.10)$$

para $j = 1, 2, 3$. A relação dada em (3.10) é de verificação imediata (ver figura 3.1).

Indicamos, com breves justificativas, pertinentes relações geométricas envolvidas no problema:

$$\cos \theta_j = \frac{a_j^2 - a_k^2 - a_l^2}{2a_k a_l}, \quad \sin \theta_j = \frac{2S}{a_k a_l} \quad (3.11)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_j}{2} = \frac{4}{a_j^2 - (a_k - a_l)^2}. \quad (3.12)$$

Aqui, S é a área do triângulo:

$$S = \sqrt{\sigma(\sigma - a_1)(\sigma - a_2)(\sigma - a_3)}, \quad \sigma = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3). \quad (3.13)$$

Para justificarmos a primeira das relações em (3.11), basta considerar a lei dos cossenos para o ângulo interno adjacente a θ_j e o fato de que $\cos(\pi - \theta_j) = -\cos \theta_j$. A segunda das relações em (3.11) é comum para ângulos internos. como $\sin(\pi - \theta_j) = \sin \theta_j$, a relação se verifica. Para mostrarmos (3.12), podemos por exemplo observar que a relação trigonométrica $\operatorname{tg} \theta_i = 2\operatorname{tg}(\theta_j/2)/(1 - \operatorname{tg}^2(\theta_j/2))$ pode ser resolvida para $\operatorname{tg}(\theta_j/2)$, e que $\operatorname{tg} \theta_j$ é obtida a partir de (3.11).

Segue-se de (3.9) e (3.10) que:

$$\varphi + \frac{1}{3}(\theta_l - \theta_k) = \frac{1}{3}(\varphi_j + \varphi_k + \varphi_l) + \frac{1}{3}(\varphi_j - \varphi_k - \varphi_l + \varphi_j)$$

donde

$$\varphi_j = \varphi + \frac{1}{3}(\theta_l - \theta_k). \quad (3.14)$$

Segue-se de (3.2) e (3.8) que:

$$\begin{aligned} m_l a_k e^{i\varphi_k} - m_k a_l e^{i\varphi_l} &= m_l(X_j - X_l) - m_k(X_k - X_j) \\ &= m_l X_j + m_k X_j + m_l X_j. \end{aligned}$$

Logo, definindo-se $m := \Sigma m_j$,

$$m X_j = m_l a_k e^{i\varphi_k} - m_k a_l e^{i\varphi_l}. \quad (3.15)$$

Dados os valores a_1, a_2 e a_3 , podemos calcular $\theta_j \bmod 2\pi$ a partir de (3.12), e então obter as coordenadas cartesianas usando as expressões em (3.14) e (3.15).

Aplicamos a seguir uma técnica para eliminação dos nodos (simetrias de rotação) devida a Kamplen e Winter (1937) APUD. Waldvogel [1]. Esta consiste, essencialmente, em introduzir as variáveis p_1, p_2, p_3 e p_φ canonicamente conjugadas com respeito a a_1, a_2, a_3 e φ respectivamente.

Considere a função geradora:

$$G = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + \varphi p_\varphi. \quad (3.16)$$

A partir (3.16) obtemos ver referência [1]:

$$P_j = 2 \frac{\partial G}{\partial \overline{X}_j} = p_k e^{i\varphi_k} - p_l e^{i\varphi_l} + \frac{ip_\varphi}{3} \left(\frac{e^{i\varphi_k}}{a_k} - \frac{e^{i\varphi_l}}{a_l} \right). \quad (3.17)$$

Observe que esta expressão fornece a transformação imersa juntamente com (3.15), fornece a transformação inversa acima mencionada.

Podemos escrever a energia cinética transformada como

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_j} \left(p_k^2 + p_l^2 + p_k p_l \frac{a_k^2 + a_l^2 - a_j^2}{a_k a_l} \right) + \\ &\quad \frac{2p_\varphi}{3} \sum \frac{1}{m_j} \left(\frac{p_k}{a_l} - \frac{p_l}{a_k} \right) \frac{S}{a_k a_l} + \frac{p_\varphi^2}{9} \sum \frac{1}{m_j} \frac{a_k^2 + a_l^2 - \frac{1}{2}a_j^2}{a_k^2 a_l^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Com efeito, segue-se de (3.11), (3.12) e (3.17) que:

$$\begin{aligned} |P_j|^2 &= P_j \overline{P_j} \\ &= \left[p_k e^{i\varphi_k} - p_l e^{i\varphi_l} + \frac{ip_\varphi}{3} \left(\frac{e^{i\varphi_k}}{a_k} - \frac{e^{i\varphi_l}}{a_l} \right) \right] \times \\ &\quad \left[p_k e^{-i\varphi_k} - p_l e^{-i\varphi_l} - \frac{ip_\varphi}{3} \left(\frac{e^{-i\varphi_k}}{a_k} - \frac{e^{-i\varphi_l}}{a_l} \right) \right] \\ &= p_k^2 + p_l^2 - p_k p_l e^{i(\varphi_k - \varphi_l)} - p_k p_l e^{-i(\varphi_k - \varphi_l)} + \\ &\quad \frac{ip_\varphi}{3} \left(\frac{p_k}{a_k} - \frac{p_k e^{-i(\varphi_k - \varphi_l)}}{a_l} \right) - \frac{ip_\varphi}{3} \left(\frac{p_l e^{-i(\varphi_k - \varphi_l)}}{a_k} - \frac{p_l}{a_l} \right) - \\ &\quad \frac{ip_\varphi}{3} \left(\frac{p_k}{a_k} - \frac{p_k e^{i(\varphi_k - \varphi_l)}}{a_l} \right) + \frac{ip_\varphi}{3} \left(\frac{p_l e^{i(\varphi_k - \varphi_l)}}{a_k} - \frac{p_l}{a_l} \right) + \\ &\quad \frac{p_\varphi^2}{9} \left(\frac{e^{-i\varphi_k}}{a_k} - \frac{e^{-i\varphi_l}}{a_l} \right) \left(\frac{e^{-i\varphi_k}}{a_k} - \frac{e^{-i\varphi_l}}{a_l} \right) \\ &= p_k^2 + p_l^2 - 2p_k p_l \operatorname{Re} e^{-i\theta_j} - \frac{ip_\varphi}{3} \left(\frac{p_k}{a_l} - \frac{p_l}{a_k} \right) 2i \operatorname{Im} e^{-i\theta_j} \\ &\quad + \frac{p_\varphi^2}{9} \left(\frac{1}{a_k^2} + \frac{1}{a_l^2} - 2\operatorname{Re} e^{-i\theta_j} \right) \\ &= p_k^2 + p_l^2 + p_k p_l \frac{a_k^2 + a_l^2 - a_j^2}{a_k a_l} + \\ &\quad \frac{2p_\varphi}{3} \left(\frac{p_k}{a_l} - \frac{p_l}{a_k} \right) \frac{S}{a_k a_l} + \frac{p_\varphi^2}{9} \frac{a_k^2 + a_l^2 - \frac{1}{2}a_j^2}{a_k^2 a_l^2}. \end{aligned}$$

Substituindo-se o valor de $|P_j|^2$ em (3.3) obtemos (3.18).

Podemos resolver (3.15) para X_j e então tomar o seu conjugado $\overline{X_j}$. Efetuando o produto $\overline{X_j}P_j$ obtemos a seguinte relação

$$\sum_{j=1}^3 \overline{X_j}P_j = \sum_{j=1}^3 a_j p_j + i p_\varphi. \quad (3.19)$$

Ficamos com a seguinte função hamiltoniana

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_j} \left(p_k^2 + p_l^2 + p_k p_l \frac{a_k^2 + a_l^2 - a_j^2}{a_k a_l} \right) + \\ &= \frac{2p_\varphi}{3} \sum \frac{1}{m_j} \left(\frac{p_k}{a_l} - \frac{p_l}{a_k} \right) \frac{S}{a_k a_l} + \frac{p_\varphi^2}{9} \sum \frac{1}{m_j} \frac{a_k^2 + a_l^2 - \frac{1}{2}a_j^2}{a_k^2 a_l^2} \\ &\quad - \sum \frac{m_k m_l}{a_j}. \end{aligned}$$

Estamos agora em condições de escrever as equações do movimento no sistema transformado

$$\frac{da_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial a_j} \quad \text{com } j = 1, 2, 3 \quad (3.20)$$

e

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.21)$$

O ângulo φ é uma variável cíclica. Portanto, (3.21) implica que p_φ é uma integral primeira para o movimento. Observemos que, por (3.19),

$$p_\varphi = Im \sum_{j=1}^3 \overline{X_j}P_j = \text{constante} \quad (3.22)$$

é o momento angular com respeito ao centro de massa. Isto encerra a eliminação dos nodos.

As equações (3.20) formam um sistema com seis equações diferenciais para a_j , p_j com $j = 1, 2, 3$. Para esse sistema,

$$H = T - U = h = \text{const.} \quad (3.23)$$

é uma integral.

Por fim, enfatizamos que o ângulo φ pode ser obtido a partir de (3.21)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2}{3} \sum \frac{S}{m_j a_k a_l} \left(\frac{p_k}{a_l} - \frac{p_l}{a_k} \right) \frac{2}{3} p_\varphi \sum \frac{a_k^2 + a_l^2 - \frac{1}{2}a_j^2}{m_j a_k^2 a_l^2}. \quad (3.24)$$

3.2 Regularização

Apresentamos agora as chamadas variáveis regularizadas de Lemaître [13, 14]. Estas são definidas por:

$$a_j = \alpha_k^2 + \alpha_l^2 \quad (3.25)$$

ou explicitamente,

$$a_1 = \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad a_2 = \alpha_3^2 + \alpha_1^2 \quad \text{e} \quad a_3 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Podemos ver que geometricamente α_j^2 representa justamente os segmentos dos lados do triângulo com vértices $m_j (j = 1, 2, 3)$ definidos pela circunferência inscrita ao triângulo (ver Figura 3.2).

A transformação inversa é dada por:

$$\alpha_j = \pm \sqrt{\alpha^2 - a_j}, \quad \text{com} \quad \alpha^2 := \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \sigma. \quad (3.26)$$

De fato, substituindo-se α^2 e a_j por seus respectivos valores temos que

$$\alpha_j = \pm \sqrt{\alpha_j^2 + \alpha_k^2 + \alpha_l^2 - \alpha_k^2 - \alpha_l^2} = \alpha_j.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} a_j &= \alpha_k^2 + \alpha_l^2 \\ &= 2\alpha^2 - a_k - a_l \\ &= \alpha_k^2 + \alpha_l^2 \\ &= a_j \end{aligned}$$

Além disso, da primeira equação em (3.26)

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^2 = \sum_{j=1}^3 \alpha^2 - a_j$$

ou

$$\alpha^2 = 3\alpha^2 - a_j$$

donde

$$\alpha^2 = \sigma$$

como havíamos afirmado.

Em termos das variáveis de Lemaître, a área orientada e os ângulos exteriores podem ser escritos como

$$S = \alpha \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \quad (3.27)$$

e

$$tg \frac{\theta_j}{2} = \frac{\alpha \alpha_j}{\alpha_k \alpha_l}. \quad (3.28)$$

Respectivamente.

Para mostrarmos a relação (3.27), observemos que, de (3.26), $\alpha_j = \pm \sqrt{\sigma - a_j}$. Logo, por (3.13),

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\sigma(\sigma - a_1)(\sigma - a_2)(\sigma - a_3)} \\ &= \sqrt{\sigma} \cdot \sqrt{\sigma - a_1} \cdot \sqrt{\sigma - a_2} \cdot \sqrt{\sigma - a_3} \\ &= \alpha \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \end{aligned}$$

como queríamos.

Para mostrarmos a relação (3.28) basta que substituamos em (3.12) os valores dados em (3.25) e (3.27)

$$\begin{aligned} tg \frac{\theta_j}{2} &= \frac{4S}{\alpha_j^2 - (a_k a_l)^2} \\ &= \frac{4\alpha \alpha_j \alpha_k \alpha_l}{(\alpha_k^2 + \alpha_l^2)^2 - (\alpha_j^2 + \alpha_l^2)^2 - (\alpha_j^2 + \alpha_k^2)^2 + 2(\alpha_j^2 + \alpha_k^2)(\alpha_j^2 + \alpha_l^2)} \\ &= \frac{4\alpha \alpha_j \alpha_k \alpha_l}{4\alpha_k^2 \alpha_l^2} \\ &= \frac{\alpha \alpha_j}{\alpha_k \alpha_l}, \end{aligned}$$

como queríamos.

É imediato de (3.25) que

$$a_j + a_k = a_l + 2\alpha_l^2 \geq a_l, \quad (3.29)$$

isto é, a desigualdade triangular é sempre satisfeita. Portanto, cada ponto $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ no espaço de configuração representa um triângulo.

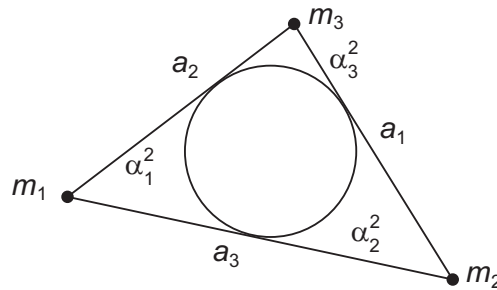


Figura 3.2: Coordenadas regularizadas de Lemaître.

O conjunto de todos os triângulos com perímetro fixo $2\alpha^2$ corresponde a um octante da esfera $\Sigma \alpha_j^2 = \alpha^2$. Como a orientação de um triângulo é dada pelos sinais de α_1, α_2 e α_3

um triângulo não-degenerado é representado quatro vezes na esfera. O equador da esfera, $\alpha_l = 0$, corresponde aos triângulos degenerados $a_j + a_k = a_l$. Além disso, uma colisão entre m_j e m_k (i.e., $a_l = 0$ e $a_j = a_k$) corresponde a um dos $\alpha_l = \pm\alpha$. Veja a Figura 3.3.

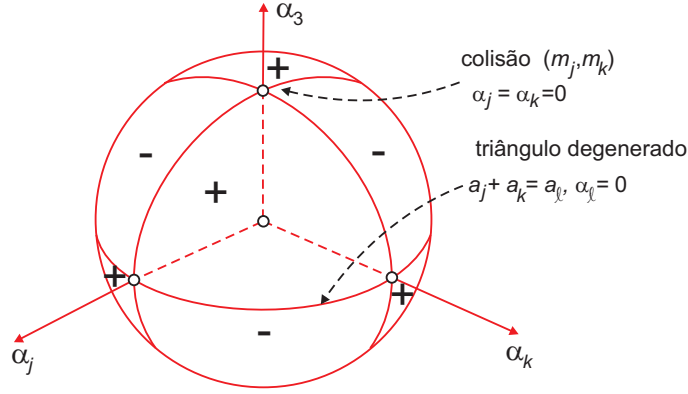


Figura 3.3: A parametrização de Lemaître para o triângulo.

Introduzimos agora as variáveis π_j , canonicamente conjugados com respeito a α_j . Consideremos a função geradora:

$$G = \alpha_1\pi_1 + \alpha_2\pi_2 + \alpha_3\pi_3. \quad (3.30)$$

Obtemos a partir desta a transformação

$$p_j = \frac{\partial G}{\partial a_j} = \frac{1}{4} \left(-\frac{\pi_j}{\alpha_j} + \frac{\pi_k}{\alpha_k} + \frac{\pi_l}{\alpha_l} \right). \quad (3.31)$$

De fato, o tipo de transformação canônica dada em (3.30) preserva as variáveis e transforma os momentos segundo a relação $\pi = (df)^t p$, onde f é a aplicação que mapeia o par (α, π) em (a, p) .

O jacobiano para a transformação $a_j = \alpha_k^2 + \alpha_l^2$ é dado por

$$2 \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\begin{cases} \pi_1 = 2\alpha_1(p_2 + p_3), \\ \pi_2 = 2\alpha_2(p_1 + p_3), \\ \pi_3 = 2\alpha_3(p_1 + p_2). \end{cases}$$

Resolvendo-se este sistema para cada p_j , obtemos a equação (3.21).

Uma propriedade importante das funções homogêneas é a que vamos expor em seguida.

Teorema 3.1 *Se $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é homogênea de grau p , então*

$$\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial(x_j)} = pf(x_1, \dots, x_n).$$

Demonstração: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ homogênea de grau p . Então

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Derivando esta equação em ordem a λ , e considerando $x = (x_1, \dots, x_n)$, obtemos:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial(x_j)} \lambda x_j = p \lambda^{p-1} \cdot f(x_1, \dots, x_n).$$

Como esta relação deve ser válida para qualquer λ real, se $\lambda = 1$ temos que

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial(x_j)} x_j = pf(x_1, \dots, x_n).$$

□

Podemos por meio do Teorema 3.1 obter a seguinte relação entre os $a'_j s$, $p'_j s$ e os $\alpha'_j s$, $\pi'_j s$

$$\sum_{j=1}^n a_j p_j = \sum_{j=1}^3 a_j \frac{\partial G}{\partial a_j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \alpha_j \pi_j. \quad (3.32)$$

Então, por (3.19),

$$Re \sum \overline{X_j} P_j = \frac{1}{2} \sum \alpha_j \pi_j. \quad (3.33)$$

Finalmente, introduzimos uma reparametrização do tempo, a qual foi usada por Sundman (1913), Lemaître (1954) Apud Waldvogel. Seja

$$dt = a_1 a_2 a_3 d\tau. \quad (3.34)$$

Em geral, devido a Poincaré, temos o seguinte resultado [6]: Seja H o hamiltoniano de um dado sistema dinâmico. Se f é uma função não-negativa e h um escalar, então o sistema hamiltoniano gerado por

$$K = f(H - h)$$

no nível zero $\{K = 0\}$, coincide com o sistema hamiltoniano gerado por H no nível h $\{H = h\}$ a menos de reparametrização. Explicitamente, se q e p são as variáveis canônicas para o sistema então:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial K}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial p}(H - h) + f \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial K}{\partial q} = -\frac{\partial f}{\partial q}(H - h) - f \frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

quando $H = h$

$$\begin{aligned}\dot{q} &= f \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -f \frac{\partial H}{\partial q}.\end{aligned}$$

Reparametrizando

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{dq}{dS} \cdot f,$$

segue-se que

$$\begin{cases} q' f = f \frac{\partial H}{\partial p}, \\ p' f = -f \frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} q' = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ p' = -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{cases}$$

Assim, o novo hamiltoniano

$$K = a_1 a_2 a_3 d(H - h), \quad (3.35)$$

define as seguintes equações do movimento transformadas:

$$\frac{d\alpha_j}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial \pi_j}, \quad \frac{d\pi_j}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial \alpha_j} \quad (3.36)$$

para $j = 1, 2, 3$.

Somente as soluções tais que $K = 0$ têm significado físico, (observe que $K = 0$ é uma relação invariante). Definindo os vetores

$$\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^t \quad \text{e} \quad \underline{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)^t$$

podemos escrever o hamiltoniano transformado como

$$K = K_0(\underline{\alpha}, \underline{\pi}, p_\varphi) - h a_1 a_2 a_3, \quad (3.37)$$

para o qual,

$$\begin{aligned} K_0(\underline{\alpha}, \underline{\pi}, p_\varphi) &= a_j a_k a_l \left\{ \frac{1}{2} \sum \frac{1}{16m_j} \left[\left(\frac{\pi_j}{\alpha_j} - \frac{\pi_k}{\alpha_k} + \frac{\pi_l}{\alpha_l} \right)^2 + \left(\frac{\pi_j}{\alpha_j} + \frac{\pi_k}{\alpha_k} - \frac{\pi_l}{\alpha_l} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\pi_j}{\alpha_j} - \frac{\pi_k}{\alpha_k} + \frac{\pi_l}{\alpha_l} \right) \left(\frac{\pi_j}{\alpha_j} + \frac{\pi_k}{\alpha_k} - \frac{\pi_l}{\alpha_l} \right) \cdot \frac{(\alpha_j^2 + \alpha_l^2)^2 + (\alpha_j^2 + \alpha_k^2)^2 - (\alpha_l^2 + \alpha_k^2)^2}{a_k a_l} \right] \\ &\quad + \frac{2p_\varphi}{3} \sum \frac{1}{4m_j} \left[a_k \left(\frac{\pi_j}{\alpha_j} - \frac{\pi_k}{\alpha_k} + \frac{\pi_l}{\alpha_l} \right) - a_l \left(\frac{\pi_j}{\alpha_j} + \frac{\pi_k}{\alpha_k} - \frac{\pi_l}{\alpha_l} \right) \right] \frac{S}{a_k^2 a_l^2} + \\ &\quad \left. + \frac{p_\varphi^2}{9} \sum \frac{1}{m_j} \frac{(\alpha_k^2 + \alpha_j^2)^2 + (\alpha_l^2 + \alpha_j^2) - \frac{1}{2}(\alpha_k^2 + \alpha_l^2)}{a_k^2 a_l^2} + \sum \frac{m_k m_l}{a_j} \right\}, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
K_0(\underline{\alpha}, \underline{\pi}, p_\varphi) = & \frac{1}{2} \sum \frac{a_j a_k a_l}{16 m_j} \left\{ \frac{2\pi_j^2}{\alpha_j^2} + 2 \left(\frac{\pi_k}{\alpha_k} - \frac{\pi_l}{\alpha_l} \right)^2 + \right. \\
& \left. \left[\frac{\pi_j^2}{\alpha_j^2} - \left(\frac{\pi_k}{\alpha_k} - \frac{\pi_l}{\alpha_l} \right)^2 \right] \cdot \frac{2(\alpha_j^4 + \alpha_j^2 \alpha_k^2 + \alpha_j^2 \alpha_l^2 - \alpha_k^2 \alpha_l^2)}{a_k a_l} \right\} + \\
& + \frac{p_\varphi}{3} \sum \frac{a_j a_k a_l}{2 m_j} \left[\frac{\pi_j}{\alpha_j} (a_k - a_l) - \frac{\pi_k}{\alpha_k} (a_k + a_l) + \frac{\pi_l}{\alpha_l} (a_k - a_l) \right] \frac{\alpha \alpha_j \alpha_k \alpha_l}{a_k^2 a_l^2} \\
& + \frac{p_\varphi^2}{9} \sum \frac{a_j a_k a_l}{m_j} \left(\frac{2\alpha_j^4 + 2\alpha_j^2 \alpha_l^2 + \alpha_j^2 \alpha_k^2 - \alpha_k^2 \alpha_l^2 + \frac{\alpha_l^4}{2} + \frac{\alpha_k^4}{2}}{a_k^2 a_l^2} \right) + \\
& + \sum \frac{m_k m_l a_j a_k a_l}{a_j}.
\end{aligned}$$

Segue

$$\begin{aligned}
K_0(\underline{\alpha}, \underline{\pi}, p_\alpha) = & \frac{1}{8} \sum \frac{a_j}{m_j} [\alpha^2 \pi_j^2 (\alpha_k \pi_l - \alpha_l \pi_k)^2] + \\
& + \frac{p_\varphi}{6} \sum \frac{a_j \alpha}{m_j a_k a_l} [\pi_j \alpha_k \alpha_l (\alpha_l^2 - \alpha_k^2) + (\alpha_k \pi_l - \alpha_l \pi_k) \alpha_j (\alpha^2 + \alpha_j^2)] \\
& + \frac{p_\varphi^2}{9} \sum \frac{a_j}{m_j a_k a_l} \left[2\alpha^2 \alpha_j^2 + \frac{1}{2} (\alpha_l^2 - \alpha_k^2)^2 \right] - \sum m_k m_l a_k a_l.
\end{aligned}$$

Observe que a função $K_0(\underline{\alpha}, \underline{\pi}, p_\alpha)$ é homogênea de grau quatro nos argumentos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e π_1, π_2, π_3 .

No caso em que o momento angular é nulo, $p_\varphi = 0$, o hamiltoniano acima se reduz a expressão matricial

$$K_0(\underline{\alpha}, \underline{\pi}, 0) = \frac{1}{8} \underline{\pi}^t B(\underline{\alpha}) \underline{\pi} - \sum m_k m_l a_k a_l, \quad (3.38)$$

onde $B(\alpha)$ é a matriz simétrica

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{m_1} \alpha^2 + \frac{a_2}{m_2} \alpha_3^2 + \frac{a_3}{m_3} \alpha_2^2 & -\frac{a_3}{m_3} \alpha_1 \alpha_2 & -\frac{a_2}{m_2} \alpha_1 \alpha_3 \\ -\frac{a_3}{m_3} \alpha_1 \alpha_2 & \frac{a_2}{m_2} \alpha^2 + \frac{a_3}{m_3} \alpha_1^2 + \frac{a_1}{m_1} \alpha_3^2 & -\frac{a_1}{m_1} \alpha_2 \alpha_3 \\ -\frac{a_2}{m_2} \alpha_1 \alpha_3 & -\frac{a_1}{m_1} \alpha_2 \alpha_3 & \frac{a_3}{m_3} \alpha^2 + \frac{a_1}{m_1} \alpha_2^2 + \frac{a_2}{m_2} \alpha_1^2 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

De fato, basta expandir os somatórios restantes em (3.37) ao tomarmos $p_\varphi = 0$ e escrever o resultado matricialmente.

As novas equações do movimento são

$$\frac{d\underline{\alpha}}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial \underline{\pi}}, \quad \frac{d\underline{\pi}}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial \underline{\alpha}}. \quad (3.40)$$

Mas

$$\frac{\partial K}{\underline{\pi}} = \frac{\partial}{\underline{\pi}} \left(\frac{1}{8} \underline{\pi}^t B(\alpha) \underline{\pi} - \sum m_k m_l a_k a_l \right)$$

donde

$$\frac{d\underline{\alpha}}{d\tau} = \frac{1}{4} B(\underline{\alpha}) \underline{\pi} \quad (3.41)$$

Concluimos com isto que cada colisão binária está regularizada. No entanto, se $p_\varphi \neq 0$, então nossa conclusão não é verdadeira em geral. De fato, basta observar em (3.38) que se $p_\varphi \neq 0$, então as colisões $a_k = 0$ e $a_l = 0$, por exemplo, correspondem a pontos singulares.

Apêndice A (A Projeção Estereográfica)

Seja $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n, 0); x_i \in \mathbb{R}\}$ a identificação natural do espaço $\mathbb{R}^n$ como subespaço de $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $N = (0, \dots, 0, 1)$ o polo norte da esfera unitária $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Definimos a Projeção Estereográfica (sobre o plano equador) por:

$$P : S^n - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que $P(p) \in \mathbb{R}^n$ é o ponto em que a reta que passa por N e p intersecta o subespaço $\mathbb{R}^n$.

Tratemos de obter a lei de formação desta aplicação em coordenadas e vetorialmente. A reta que passa por N e p é o lugar geométrico dos pontos x tais que:

$$x = N + \lambda(p - N), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

Então, de $x \in \mathbb{R}^n$, segue-se que

$$\lambda = 1/(1 - \langle p, N \rangle). \quad (\text{A.2})$$

De fato, $x \in \mathbb{R}^n$ nos diz $\langle x, N \rangle = 0$.

Multiplicando-se então (A.1) escalarmente por N e resolvendo o resultado para λ , obtemos (A.2). Ficamos portanto com a seguinte expressão vetorial:

$$x = P(p) = N + \frac{1}{1 - \langle p, N \rangle}(p - N), \quad (\text{A.3})$$

ou, em coordenadas,

$$P(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right). \quad (\text{A.4})$$

A fim de obtermos a transformação inversa P^{-1} , consideremos a reta

$$p = N + \mu(x - N), \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.5})$$

Impondo-se que $p \in S^n$, isto é, que p seja um vetor unitário, obtemos:

$$\mu = 2/(||x||^2 + 1). \quad (\text{A.6})$$

De fato, basta que se multiplicidade (A.5) escalarmente por p e se resolva o resultado para μ .

Substituindo-se o valor de μ em (A.5) ficamos com a expressão vetorial,

$$P^{-1}(x) = N + \frac{2}{||x||^2 + 1}(x - N), \quad (\text{A.7})$$

e em coordenadas,

$$P^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{2x_1}{||x||^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{||x||^2 + 1}, \frac{||x||^2 - 1}{||x||^2 + 1} \right).$$

onde $||x||^2 = x^2 + \dots + x_n^2$.

Apêndice B (Adendo à Seção 1.4)

A transformação do fibrado tangente $T(S^n)$ no espaço Euclidiano $2n$ -dimensional definida por

$$x_k = \frac{\xi_k}{1 - \xi_0} \quad \text{e} \quad y_k = \eta_k(1 - \xi_0) + \xi_k \eta_0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{B.1})$$

nos leva uma simples consideração, a qual indicamos sucintamente a seguir.

Consideremos uma geodésica particular sobre a esfera s^n parametrizada por.

$$\xi_0 = \text{sen } \alpha \cos s, \quad \xi_1 = \text{sen } s \quad \xi_2 = -\cos \alpha \cos s, \quad (\text{B.2})$$

onde α é o ângulo entre o equador $\xi_0 = 0$ e o círculo geodésico em questão.

A imagem de (B.2) via projeção estereográfica é

$$\xi = (1 - \text{sen } \alpha \cos s), \quad \xi_2 = -(1 - \text{sen } \alpha \cos s)^{-1} \cos \alpha \cos s \quad (\text{B.3})$$

e

$$y_1 = (1 - \cos s - \text{sen } \alpha), \quad y_2 = \cos \alpha \text{sen } s,$$

como podemos ver substituindo-se (B.2) em (B.1).

Definindo-se $q = y$ e $e = \text{sen } \alpha$, obtemos:

$$q_1 = \cos s - e, \quad q_2 = \sqrt{1 - e^2} \text{sen } s \quad (\text{B.4})$$

que é justamente a representação de uma elipse com excentricidade $e = \text{sen } \alpha$.

Vamos obter uma relação entre t e s computando a norma de y :

$$||y|| = 1 - \text{sen } \alpha \cos s = 1 - e \cos s, \quad (\text{B.5})$$

logo

$$t = \int_0^s ||y|| ds = s - e \text{sen } s, \quad (\text{B.6})$$

a qual coincide com a chamada equação de Kepler.

Quando $e = 1$,

$$t = s - \text{sen} = s - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} s^{2n+1} = \frac{1}{6} s^3 - \dots \quad (\text{B.7})$$

Concluimos com isto que as coordenadas de uma órbita de colisão no Problema de Kepler podem ser expressas como funções analíticas de $t^{1/3}$ próximo a colisão. Pois, dada uma geodésica, podemos por uma rotação considerarmos este círculo como em (B.2).

Apêndice C (Sumário de Definições)

Objetivando a auto-suficiência do trabalho, apresentamos um sumário de conceitos e definições dos objetos fundamentais abordados ao longo deste trabalho.

Começemos com algumas classes especiais de funções.

Definição C.1 (Função analítica). Sejam $U \subseteq \mathbb{C}$ um domínio e $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função. f é analítica em U se, para todo ponto $z_0 \in U$, f se expressa como uma série de potências de centro z_0 e raio de convergência $R_{z_0} > 0$.

Observação: Alguns autores definem, equivalentemente a Definição 1, a classe das funções analíticas como sendo aquela cujos elementos são funções complexas diferenciáveis em cada ponto de seus domínios.

Definição C.2 (Funções harmonicamente conjugadas entre si). Sejam u e v funções reais das variáveis reais x e y tais que u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, e a equação de Laplace. Isto é:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{Eq. de Cauchy - Riemann})$$

e

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ \Delta v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \quad (\text{Eq. de Laplace})$$

Então, u e v são ditas harmonicamente conjugadas entre si.

Definição C.3 (Função homogênea). Considere-se a função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que f é homogênea de grau p se

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, \dots, x_n),$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definição C.4 (Equações diferenciais singulares e regulares). Seja $x' = f(x, t)$ uma equações diferencial. A equação é dita regular no ponto (t_0, x_0) se f e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são finitas e contínuas para

todo ponto (x, t) em algum domínio D que contenha (t_0, x_0) . Sendo $x(t_0) = x_0$, o Teorema de Peano (ou Picard) garante a existência de soluções. Caso contrário, se alguma destas condições não é satisfeita em nenhuma vizinhança de (t_0, x_0) , a equação é dita singular em (t_0, x_0) , e a priori não podemos garantir a existência de soluções.

Definição C.5 (Regularização). Uma técnica capaz de transformar uma equação diferencial singular em equação regular é conhecida por regularização.

Sejam $q_1, \dots, q_n$ as variáveis independentes de um dado sistema dinâmico com grau de liberdade n . A configuração deste sistema é descrita em um tempo arbitrário se $q_i = q_i(t)$ são dadas, isto é, se as coordenadas q_i são funções do tempo conhecidas para todo $i = 1, \dots, n$.

Definição C.6 (Espaço de configurações) O espaço formado pelas coordenadas q_i , $i = 1, \dots, n$, consideradas acima é dito espaço de configurações do sistema dinâmico.

As $2n$ condições iniciais $q_1 = q_1^o$ e $\dot{q}_i = \dot{q}_i^o$ em $t = t_0$ determinam uma solução da forma

$$q_i = q_i(t, q_i^o, \dot{q}_i^o).$$

Observamos que o espaço de configuração tem dimensão igual ao grau de liberdade do sistema dinâmico, n . O ponto $(q_1, \dots, q_n)$ no espaço de configuração não determina o comportamento do sistema. Pois para este propósito, são necessárias $2n$ condições iniciais, enquanto que apenas n condições correspondem ao ponto $(q_1, \dots, q_n)$.

Na mecânica Lagrangeana, as equações do movimento são dadas pela equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{Eq. de Euler - Lagrange})$$

para qual, $L = T - U$ (função de Lagrange) é a diferença entre as energias cinética e potencial.

As equações de Euler-Lagrange podem ser interpretadas como as soluções do problema variacional

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt_t = 0,$$

O qual é conhecido como o princípio hamiltoniano para sistemas conservativos. Tal princípio estabelece que: O movimento que ocorre entre os tempos t_1 e t_2 no sistema dinâmico é tal que a integral de linha

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt_t = 0,$$

é um extremo local do caminho.

Os pontos em um espaço de configuração n -dimensional descrevem o sistema em um dado instante. No entanto, o comportamento do sistema no futuro depende de informações adicionais. Este é o conteúdo da ...

Definição C.7 (O espaço de fase). O espaço formado pelas coordenadas generalizadas q_i e pelos momentos generalizados (conjugados) P_i de um dado sistema dinâmico, é dito o espaço de fase do sistema. Defini-se também,

$$P_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q_j, \dot{q}_j, t).$$

Observação: É comum na literatura encontramos a designação de variáveis canônicas para q_i, P_i .

Definição C.8 (O hamiltoniano de um sistema dinâmico). O hamiltoniano de um dado sistema dinâmico é definido por:

$$H(q, p, t) = \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$$

para o qual, convencionalmente, $\sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i = \dot{q}_i p_i$.

Apresentamos agora um importante conceito da dinâmica Hamiltoniana: Transformações canônicas.

Definição C.9 (Transformação canônica). Sejam $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ variáveis canônicas. Se $Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, $P_i = P_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ são também canônicas, e $\tilde{H}$ é um novo hamiltoniano tal que $\dot{Q}_i = \partial \tilde{H} / \partial p_i$, $\dot{P}_i = \partial \tilde{H} / \partial q_i$, para todo $i = 1, \dots, n$, então dizemos que Q_i, P_i representam uma transformação canônica

Um conceito muito importante, o qual permite-nos reduzir o número de graus de liberdade em um dado sistema dinâmico é o seguinte:

Definição C.10 (Integral primeira). Dado um sistema dinâmico, dizemos que uma função diferenciável ao longo do movimento é uma integral primeira para o movimento se essa é constante ao longo daquele.

Consideremos agora um sistema hamiltoniano e seu correspondente espaço de fase com coordenadas $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, ou $p = p(t)$, $q = q(t)$ mais abreviadamente. Para esse temos a

Definição C.11 (Fluxo fase das equações hamiltonianas). Chamamos de fluxo de fase à classe das funções

$$g^t : (p(0), q(0)) \longrightarrow (p(t), q(t))$$

onde $(p(t), q(t))$ é a solução do sistema de equações de Hamilton. Este conjunto tem a estrutura de grupo (uniparamétrico).

Apresentamos agora os três últimos conceitos, os quais serão abordados na regularização do problema de Kepler por meio do fluxo geodésico na esfera.

Suponha que M é uma variedade k -dimensional imersa no espaço Euclidiano n -dimensional. Isto é, para cada ponto $x \in m$, existem uma vizinhança U de n , e $n - k$ funções

$$f_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}, \dots, f_{n-k} : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

tais que a interseção da vizinhança U com M é determinada pelas equações $f_1 = 0, \dots, f_{n-k} = 0$ e os vetores $\text{grad } f_1, \dots, \text{grad } f_{n-k} = 0$ são em n são linearmente independentes. Chamamos de espaço tangente a m no ponto x , o complemento ortogonal de $\{\text{grad } f_1, \dots, \text{grad } f_{n-k}\}$. Anota-se: TM_x .

A união dos espaços tangentes à variedade M em diferentes pontos $U_{x \in M} TM_x$ possui uma estrutura natural de variedade diferenciável, cuja dimensão é duas vezes maior que a dimensão de M .

Esta variedade é chamada de fibrado tangente da variedade M e é designada mediante $T(M)$. O ponto ξ de $T(M)$ é o vetor tangente à M em um ponto n de M . As coordenadas locais em $T(M)$ são construídas assim: Sejam $q_1, \dots, q_n$ coordenadas locais em M e $\xi_1, \dots, \xi_n$ as componentes do vetor tangente neste sistema de coordenadas. Neste caso, $2n$ números $(q_1, \dots, q_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ determinam em $T(M)$ o sistema local de coordenadas.

Vejamos o movimento de um ponto material de massa unitária pela variedade M por inércia, fora do campo de ação de quaisquer forças externas. A função de Lagrange deste sistema é igual a energia total e constitui uma integral primeira das equações do movimento.

Se a variedade M tem dimensão n , então a variedade do nível de energia será $(2n - 1)$ -dimensional. Esta variedade constitui uma subvariedade do fibrado tangente de M . Se, por exemplo, fixarmos a energia de modo que a velocidade inicial seja unitária, esta permanece unitária ao longo do movimentos e nossa variedade de nível torna-se um espaço do fibrado

$$T_1(M) \subset T(M)$$

composto de esferas unitárias nos espaços tangentes a M em cada ponto.

Desta forma, um ponto da variedade T_1M constitui um vetor de comprimento unitário aplicado a um ponto da variedade M . Segundo o princípio de Maupertuis-Jacobi, o movimento de um ponto material em $T_1(M)$ com condições iniciais fixas pode-se descrever da

seguinte maneira: o ponto move-se com velocidade unitária por uma determinada geodésica indicada pelo vetor.

De acordo com a lei de conservação de energia a variedade $T_1(M)$ constitui uma variedade invariante no espaço de fase do nosso sistema.

Conseqüentemente, o nosso fluxo de fase define um grupo uniparamétrico de difeomorfismos da variedade $(2n - 1)$ -dimensional $T_1(M)$. Este grupo é denominado fluxo geodésico em M . O fluxo geodésico pode ser descrito do seguinte modo: A transformação durante o tempo t converte o vetor unitário $\xi \in T_1(M)$, aplicado ao ponto X , no vetor unitário da velocidade da geodésica, que parte do ponto X na direção ξ , aplicado a um ponto nesta geodésica localizado à distância t do ponto x .

Bibliografia

- [1] Waldvogel, J., *Symmetric and Regularization Coordinates on the Plane Triple Collision Manifold*, Swiss Federal Institute of Technology, Celestial Mechanics, **28**(1982), 69–82.
- [2] Moser, J., *Regularization of Kepler's Problem and the Averaging Method on a Manifold*, New York Univ. Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXIII, (1970), 609–636.
- [3] Leimanis, E., *A Note on the Regularization of the Restricted Three Body Problem*, Vancouver, Astron. Nachr., Bd.297, H.3(1976).
- [4] Bálintédi, *Global Regularization of the Restricted Problem of Three Bodies Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **90**(2004), 35–42.
- [5] Winter, A., *Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1941.
- [6] Szebehely, V., *Theory of Orbits*, Yale Univ., 1967.
- [7] Arnold, V., *Métodos Matemáticos em Mecânica Clássica*, traduzido do russo por Adalberto Comiran, 1987.
- [8] Ahlfors, L., *Complex Analysis*, Harvard Univ., 1953.
- [9] Cabral, H. e Vidal, C., *Introdução a Mecânica Celeste* (Notas de Aula), UFPE, 1998.
- [10] Cabral, H., *Análise em Espaços Multi-Dimensionais*, (Notas de Aula), UFPE, 2006.
- [11] Smith, D.E. and Latham, M.L., *The Geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition*, New York, Dover Publications, 1954.
- [12] Meserve, B.E., *Fundamental Concepts of Algebra*, New York, Dover Publications, 1982.
- [13] Lemaître, G., *Regularization dans le problème des trois corps*, Bull. Class. Sci., Acad. Roy. Belg. **40**(1954), 759–767.
- [14] Lemaître, G., *The Three-Body Problem*, NASA CR-110, 1964.
- [15] McGehee, R., *Singularities in Classical Celestial Mechanics*, Proc. Internat. Congress of Mathematics Helsinki, (1978), 827–834.
- [16] Murnaghan, F.D., *A symmetric Reduction in Three-Body Problem*, Amer. J. Math. **58**(1936), 829–832.