



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**José Laudelino de Menezes Neto**

# **CIRCUITOS REMOVÍVEIS EM GRAFOS**

Recife

2008

José Laudelino de Menezes Neto

## CIRCUITOS REMOVÍVEIS EM GRAFOS

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.*

Orientador: Manoel Lemos

Recife

2008

**Menezes Neto, José Laudelino de**

**Circuitos removíveis em grafos / José Laudelino de  
Menezes Neto. - Recife: O autor, 2008.**

**39 folhas : il., fig.**

**Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de  
Pernambuco. CCEN. Matemática, 2008.**

**Inclui bibliografia.**

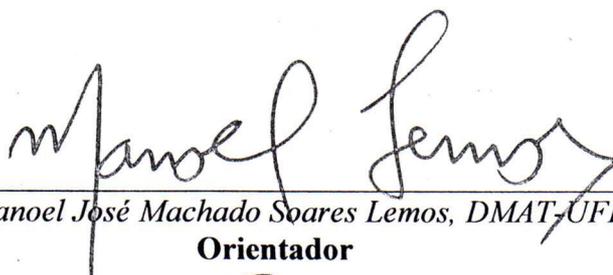
**1. Teoria dos grafos. I. Título.**

**511.5 CDD (22.ed.)**

**MEI2008-084**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado:

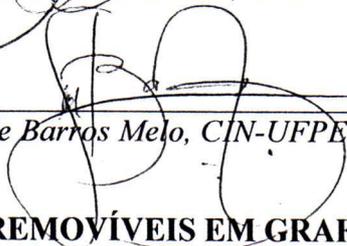


*Manoel José Machado Soares Lemos, DMAT-UFPE*

**Orientador**



*Sóstenes Luiz Soares Lins, DMAT-UFPE*



*Silvio de Barros Melo, CIN-UFPE*

**CIRCUITOS REMOVÍVEIS EM GRAFOS**

*Por*

*José Laudelino de Menezes Neto*

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
*Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410*  
RECIFE – BRASIL

Julho - 2008

*Para Raquel, Mozart e Maria Rita.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda minha família, tios, tias, primos, primas, avôs e avós.

Grato ao CNPq pelo apoio financeiro.

Agradeço ao Professor Manoel Lemos pela orientação.

Agradeço a toda turma do Departamento de Matemática da UFPE, Lucas “haoli” Lapa, Tarciana Maria, Eudes “típico americano” Naziazeno, Gigi, Adecarlos, Zaqueu, Marcelo, Joílson, Vovô Allyson, Jesus, Bárbara, Éder, Tiago, Karla, Júlio, Ricardo, Anete e Wilberclay; aos que me ajudaram a pagar o aluguel, André, Manassés e Wagner; aos companheiros de sala, Ademakson, Liliam, Davis e Isabelle; aos professores, Cuevas, Brito, Aron, Lucas e Sóstenes pelos cursos ministrados; a Tânia Maranhão pelo trabalho desenvolvido na secretaria da Pós-Graduação.

Agradeço aos demais amigos.

*José Laudelino de Menezes Neto*

## RESUMO

Descreve-se a demonstração do Teorema de Lemos e Oxley, o qual garante que, sobre certas condições, ao remover as arestas de um circuito de um grafo 2-conexo, o mesmo continua 2-conexo. O comprimento do circuito retirado pode ser maior do que o que é estipulado no Teorema de Jackson.

**Palavras-chave:** Grafo. 2-conexo. Circuito.

## ABSTRACT

Describe the proof of a Theorem by Lemos and Oxley, which guarantees, under certain conditions, that when deleted the edges of a circuit from a 2-connected graph, the graph stills 2-connected. The length of the circuit, that could be removed, could be greater than the one mentioned in Jackson's Theorem.

**Keywords:** Graph. 2-connected. Circuit.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1	Vértices e arestas, temos um grafo . . . . .	9
2.2	Passeios, trilhas, caminhos e circuitos . . . . .	10
2.3	Conexidade e blocos . . . . .	11
2.4	Ordem lexicográfica . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Demonstração do Teorema de Lemos e Oxley</b>	<b>17</b>
3.1	$G \setminus C$ é conexo . . . . .	19
3.2	Redução ao caso que $ E(H)  = 1$ . . . . .	33
3.3	$E(H)$ é vazio . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Exemplos</b>	<b>36</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>38</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Em 1974, foi provado por Mader [5] que todo grafo simples  $k$ -conexo com grau, no mínimo,  $k + 2$  possui um ciclo  $C$  tal que  $G \setminus C$  é  $k$ -conexo. Independente disto, em 1985, Jackson [4] provou um resultado mais forte que o de Mader para o caso 2-conexo.

**Teorema 1.1 (Jackson)** *Seja  $G$  um grafo simples 2-conexo com grau, no mínimo,  $k$ , onde  $k \geq 4$ , e seja  $e$  uma aresta de  $G$ . Então,  $G$  tem um circuito  $C$ , de comprimento no mínimo  $k - 1$ , tal que  $e \notin C$  e  $G \setminus C$  é 2-conexo.*

Em 1999, Lemos e Oxley [7] aprimoraram o Teorema 1.1.

**Teorema 1.2 (Lemos e Oxley)** *Sejam  $G$  um grafo simples 2-conexo,  $H$  um subgrafo, que é um bloco, de  $G$  e  $k$  um inteiro maior que três. Suponhamos  $d_G(v) \geq k$ , para todo  $v$  pertencente a  $V(G) - V(H)$ . Então,*

1.  $G \setminus C$  é 2-conexo para todo circuito  $C$  que é aresta-disjunta de  $H$ ; ou
2.  $G$  tem um circuito  $C$  que é aresta-disjunta de  $H$  tal que  $G \setminus C$  é 2-conexo e, quando  $k \geq 5$ , o comprimento de  $C$  é, no mínimo,  $k + 1$ .

Nosso objetivo é estudar a demonstração do Teorema 1.2 apresentada pelos autores.

Para entender melhor o enunciado dos resultados citados acima e a demonstração do Teorema 1.2, no capítulo 2 descreveremos resultados e definições básicas da teoria, por exemplo, o que é um grafo  $k$ -conexo, um bloco, um circuito e o que significam as notações  $d_G(v) \geq k$  e  $G \setminus C$ . O final da demonstração de cada Teorema é demarcado com um quadrado preto: ■.

No capítulo 3, apresentaremos a demonstração do Teorema de Lemos e Oxley.

No quarto capítulo exibiremos dois exemplos que justificam a melhoria que o Teorema 1.2 traz para a teoria.

# Capítulo 2

## Preliminares

Como dito na Introdução, neste capítulo relataremos as notações e definições que serão utilizadas no decorrer do nosso trabalho, bem como enunciaremos alguns resultados básicos.

### 2.1 Vértices e arestas, temos um grafo

Um *grafo*  $G$  é um par  $(V(G), E(G))$ , onde  $V(G)$  é um conjunto finito e  $E(G)$  é um conjunto composto de pares não-ordenados de elementos distintos de  $V(G)$ . Diremos que  $V(G)$  e  $E(G)$  são, respectivamente, o conjunto de *vértices* e *arestas* do grafo  $G$ .

Dois vértices  $v$  e  $w$  de  $G$  são *adjacentes* se o par formado por  $v$  e  $w$  é uma aresta de  $G$ , esta aresta é dita *incidente* sobre  $v$  e também sobre  $w$ ;  $v$  e  $w$  são os *extremos* da aresta  $e$ , neste caso, denotamos  $e$  por  $vw$ . O *grau*  $d_G(v)$  de um vértice  $v$  de  $G$  é a quantidade de arestas de  $G$  incidentes a este vértice; o menor grau que um vértice de  $G$  assume é denotado por  $\delta(G)$ , ou seja,  $\delta(G) = \min\{d_G(v); v \in V(G)\}$ . A *estrela* de  $v$  é o conjunto de arestas de  $G$  incidentes ao vértice  $v$ . Um grafo  $G$  é chamado de *grafo completo* quando todos os vértices de  $G$  são adjacentes entre si, um grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ .

Entendemos por *subgrafo* de um grafo  $G$ , como sendo um grafo  $H = (V(H), E(H))$  tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ .

Se  $W$  é um conjunto qualquer não-vazio de vértices de  $G$ , então o *subgrafo induzido* por  $W$ , denotado por  $G[W]$ , é o subgrafo de  $G$  que tem  $W$  como conjunto de vértices e cujas arestas são as arestas de  $G$  com extremos pertencentes a  $W$ . Seja  $V' \subseteq V(G)$ , o

subgrafo induzido  $G[V(G)\setminus V']$  é denotado por  $G - V'$ , este é o subgrafo obtido a partir de  $G$  pela deleção dos vértices pertencentes a  $V'$  e das arestas incidentes a estes vértices. Se  $V' = \{v\}$ , escrevemos, por simplicidade,  $G - v$ .

Caso tenhamos um subconjunto não-vazio,  $F$ , de arestas de  $G$ , então o *subgrafo induzido* por  $F$ ,  $G[F]$ , é o subgrafo de  $G$  cujo conjunto de arestas é  $F$  e o conjunto de vértices são os extremos das arestas de  $F$ . Seja  $E' \subseteq E(G)$ , o subgrafo induzido  $G[E(G)\setminus E']$  é denotado por  $G - E'$ , este é o subgrafo obtido a partir de  $G$  pela deleção das arestas de  $E'$ . Se  $E' = \{e\}$ , escrevemos  $G - e$ .

Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois grafos. A *união*  $G_1 \cup G_2$  de  $G_1$  e  $G_2$  é o grafo com conjunto de vértices  $V(G_1) \cup V(G_2)$  e conjunto de arestas  $E(G_1) \cup E(G_2)$ .

**Exemplo 2.1** A Figura 2.1(1) representa o grafo  $G = K_4$  com conjunto de vértices  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  e conjunto de arestas  $E(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ , onde  $e = v_1v_3$  e  $f = v_2v_4$ . Já na Figura 2.1(2), temos o grafo  $G' = G - v_3$ .

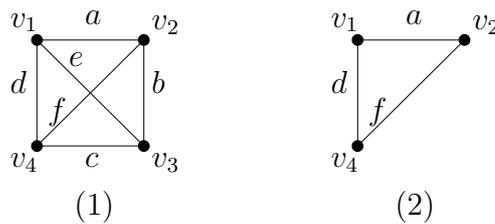


Figura 2.1:  $G$  e  $G'$

## 2.2 Passeios, trilhas, caminhos e circuitos

Um *passeio* em um grafo  $G$  é uma sequência finita, não-nula,  $P = v_0e_1v_1\dots e_kv_k$  cujos termos são vértices e arestas postos de forma alternada e tais que, para  $1 \leq i \leq k$ , os extremos de  $e_i$  são os vértices  $v_{i-1}$  e  $v_i$ . Chamamos  $v_0$  de *vértice inicial* e  $v_k$  de *vértice terminal* do passeio  $P$ , os vértices  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$  são conhecidos por *vértices interiores* do passeio  $P$ . O inteiro  $k$  é o *comprimento* do passeio  $P$ . Em um grafo simples, um passeio  $v_0e_1v_1\dots e_kv_k$  é determinado apenas pela sequência de vértices  $v_0v_1\dots v_k$ .

Se as arestas  $e_1, e_2, \dots, e_k$  de um passeio  $P$  são distintas, então chamamos  $P$  de *trilha* e, neste caso, o comprimento de  $P$  é  $|E(P)|$ . Se, além das arestas, os vértices  $v_0, v_1, \dots, v_k$  também são distintos, dizemos que  $P$  é um *caminho*. Quando for conveniente,

chamaremos um caminho de vértice inicial  $v_0$  e vértice terminal  $v_k$  de  $v_0v_k$ -caminho. Um caminho em  $G$  é *Hamiltoniano* quando contém todos os vértices de  $G$ .

Uma família de caminhos em  $G$  é *internamente-disjunta* se nenhum vértice de  $G$  é um vértice interno de mais do que um caminho desta família.

Um passeio é *fechado* se tem comprimento positivo e o vértice inicial é também o vértice terminal. Um caminho fechado é chamado de *circuito*.

Sejam  $G$  um grafo e  $E'$  as arestas de um circuito  $C$  de  $G$ , ou seja,  $E' = E(C) \subseteq E(G)$ . O subgrafo induzido  $G[E(G) \setminus E']$  é denotado por  $G \setminus C$ .

**Exemplo 2.2** A Figura 2.2(1) representa um grafo  $G$  com conjunto de vértices  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  e conjunto de arestas  $E(G) = \{a, b, c, d, e, f, v_6v_7, v_5v_7\}$ . A Figura 2.2(2) representa o grafo  $G' = G \setminus C$ , onde  $C$  é um circuito de  $G$  com conjunto de arestas  $E(C) = \{a, b, c, d, e, f\} \subset E(G)$ .

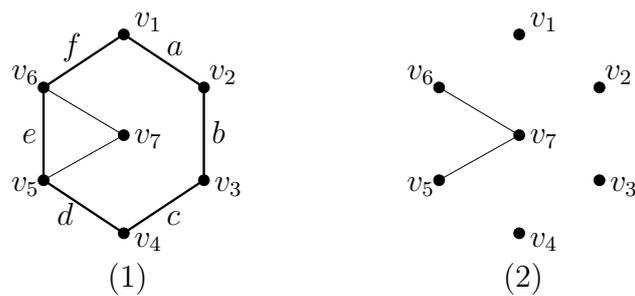


Figura 2.2:  $G$  e  $G \setminus C$

**Proposição 2.3** Se  $G$  é um grafo com  $\delta(G) \geq 2$ , então  $G$  tem um circuito.

**Demonstração:** Seja  $P$  um caminho de comprimento máximo em  $G$  com  $v$  sendo o vértice inicial. Sabemos, por hipótese, que  $d_G(v) \geq 2$ , logo  $v$  possui no mínimo duas arestas incidentes, uma delas faz parte do caminho  $P$  e a outra também deve estar ligada a outro vértice do caminho  $P$ , pois, caso contrário, existiria um caminho  $P'$  de comprimento maior do que  $P$ . Portanto,  $G$  possui um circuito. ■

## 2.3 Conexidade e blocos

Dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  estão *conectados* se existe um caminho em  $G$  cujo vértice inicial é  $u$  e o vértice terminal é  $v$ . Conectividade é uma relação de equivalência no

conjunto de vértices de  $G$ . Assim, existe uma partição de  $V(G)$  em subconjuntos não-vazios e disjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_i$  tais que  $u$  e  $v$  são conectados se, e somente se, ambos  $u$  e  $v$  pertencem ao mesmo conjunto  $V_i$ . Os subgrafos  $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_i]$  são chamados *componentes conexas* de  $G$ . Se  $G$  possui apenas uma componente conexa, então dizemos que  $G$  é *conexo*; caso contrário,  $G$  é *desconexo*. Denotaremos o número de componentes conexas de  $G$  por  $\omega(G)$ .

Se dois vértices  $u$  e  $v$  estão conectados em um grafo  $G$ , definimos a *distância* entre  $u$  e  $v$  em  $G$ ,  $d_G(u, v)$ , como sendo o menor comprimento dos  $uv$ -caminhos em  $G$ ; caso não exista caminho que conecte  $u$  e  $v$ , definimos  $d_G(u, v)$  como sendo infinito.

Um vértice  $v$  de um grafo conexo  $G$  é *separador* se  $E(G)$  pode ser particionado em dois subconjuntos  $E_1$  e  $E_2$  de  $E(G)$  tais que  $G[E_1]$  e  $G[E_2]$  tem somente o vértice  $v$  em comum.

Um *conjunto separador* de um grafo conexo  $G$  é um subconjunto  $V'$  de  $V(G)$  tal que  $G - V'$  é desconexo. Um  *$k$ -conjunto separador* de  $G$  é um conjunto separador de  $G$  com  $k$  elementos.

Entendemos por um grafo *trivial*, como sendo o grafo formado apenas por um único vértice.

Se  $G$  tem pelo menos um par de vértices não-adjacentes, a *conexidade*  $\kappa(G)$  de  $G$  é o menor  $k$  tal que  $G$  tem um  $k$ -conjunto separador; caso contrário,  $\kappa(G)$  é o número de vértices de  $G$  menos 1, ou seja,  $\kappa(G) = |V(G)| - 1$ . Como consequência da definição, se  $G$  é trivial ou desconexo, então  $\kappa(G) = 0$ . Dizemos que  $G$  é  *$k$ -conexo* se  $\kappa(G) \geq k$ . Todos os grafos conexos não-triviais são 1-conexo.

**Proposição 2.4** *Se  $k$  é o menor número de vértices que deve ser retirado para tornarmos um grafo  $G$  desconexo, então  $G$  é  $k$ -conexo.*

**Demonstração:** Se  $k$  é o menor número de vértices que deve ser retirado para tornarmos o grafo  $G$  desconexo, então  $G$  possui um  $k$ -conjunto separador e, portanto,  $\kappa(G) \geq k$  implicando  $G$   $k$ -conexo. ■

Seja  $e$  uma aresta de um grafo  $G$ , dizemos que  $e$  é *ponte* quando  $\omega(G - e) > \omega(G)$ .

Um grafo conexo que não possui vértices separadores é chamado de *bloco*. Um bloco de um grafo simples  $G$  é um conjunto de arestas  $B \subseteq E(G)$  tal que  $B$  é uma ponte

ou um subgrafo maximal 2-conexo de  $G$ . Todo bloco com pelo menos três vértices é 2-conexo.

Sejam  $G$  um grafo não-trivial e  $S$  e  $S'$  subconjuntos de  $V(G)$ , onde  $S' = V(G) \setminus S$ , um subconjunto de arestas  $E' \subseteq E(G)$  é chamado *conjunto aresta-separador* de  $G$  se cada aresta de  $E'$  possui um extremo em  $S$  e o outro em  $S'$ . Se  $E' \subseteq E(G)$  é um conjunto aresta-separador, então  $G - E'$  é desconexo; caso  $E' = \{e\}$ , então  $e$  é uma ponte do grafo  $G$ . Um  $k$ -conjunto aresta-separador é um conjunto aresta-separador com  $k$  elementos. Definimos a *aresta conectividade* de um grafo  $G$ ,  $\kappa'(G)$ , como sendo o menor  $k$  para o qual  $G$  possui um  $k$ -conjunto aresta-separador. Se  $G$  é trivial,  $\kappa'(G)$  é, por definição, zero. Logo, pela definição,  $\kappa'(G)$  é zero se  $G$  é trivial ou desconexo e,  $\kappa'(G) = 1$  se  $G$  é um grafo conexo com uma ponte. Dizemos que um grafo  $G$  é  $k$ -aresta-conexo quando  $\kappa'(G) \geq k$ . Todos os grafos não-triviais são 1-aresta-conexo.

Abaixo, resultados que caracterizam grafos 2-conexos. Alguns destes resultados foram citados apenas para nos familiarizarmos com as teorias de 2-conexidade e blocos.

**Lema 2.5** *Seja  $G$  um grafo, então  $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$ .*

**Lema 2.6** *Uma aresta  $e$  de um grafo  $G$  é uma ponte de  $G$  se, e somente se, não existe circuito de  $G$  que contém a aresta  $e$ .*

**Teorema 2.7 (Whitney, 1932)** *Um grafo  $G$  com  $|V(G)| \geq 3$  é 2-conexo se, e somente se, quaisquer dois vértices de  $G$  estão conectados por, pelo menos, dois caminhos internos-disjuntos.*

**Demonstração:** ( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que quaisquer dois vértices de  $G$  estão conectados por, pelo menos, dois caminhos internos-disjuntos. Então,  $G$  é conexo e não possui vértice separador. Logo,  $G$  é 2-conexo, pois  $\kappa(G) \geq 2$ .

( $\Rightarrow$ ) Provaremos por indução sobre a distância  $d_G(u, v)$ . Caso  $d_G(u, v) = 1$  e, sendo  $G$  2-conexo, temos, pelo Lema 2.5, que a aresta  $uv$  não é uma ponte e, pelo Lema 2.6,  $uv$  pertence a algum circuito de  $G$ . Logo,  $u$  e  $v$  estão conectados por, pelo menos, dois caminhos internamente-disjuntos.

Suponhamos  $d_G(u, v) = k \geq 2$  e consideremos um  $uv$ -caminho de comprimento  $k$ . Seja  $w$  o vértice que precede  $v$  neste caminho. Como  $d_G(u, w) = k - 1$ , então, pela hipótese indutiva, existem dois  $uw$ -caminhos internamente-disjuntos  $P$  e  $Q$  em  $G$ . Sendo

$G$  2-conexo, temos que  $G - w$  é conexo e contém um caminho  $P'$  que conecta  $u$  e  $v$ . Seja  $x$  o último vértice de  $P'$  que também está em  $P \cup Q$ , existe a possibilidade  $x$  ser igual a  $v$ .

Sem perda de generalidade, suponhamos  $x \in P$ . Logo,  $G$  possui dois caminhos internamente-disjuntos que conectam  $u$  e  $v$ : um composto da seção de  $P$  de  $u$  a  $x$  junto com a seção de  $P'$  de  $x$  para  $v$  e o outro composto de  $Q$  junto com o caminho  $wv$ . ■

**Corolário 2.8** *Seja  $G$  um grafo 2-conexo. Dados dois vértices quaisquer de  $G$ , existe um circuito que os contém.*

**Corolário 2.9** *Se  $G$  é um bloco com  $|V(G)| \geq 3$ , então quaisquer duas arestas de  $G$  estão em um mesmo circuito.*

Dado um grafo  $G$ , dizemos que  $P$  é um  $G$ -caminho se  $P$  é um caminho não-trivial e intercepta  $G$  exatamente nos seus vértices terminais.

**Teorema 2.10** *Um grafo é 2-conexo se, e somente se, pode ser construído a partir de um circuito pela adição sucessiva de  $G$ -caminhos em grafos  $G$  previamente construídos.*

**Demonstração:** ( $\Leftarrow$ ) Todo grafo construído como descrito acima é 2-conexo, pois para quaisquer dois vértices neste grafo, existe um circuito que os contém.

( $\Rightarrow$ ) Seja  $G$  um grafo 2-conexo. Então,  $G$  contém um circuito e, portanto, tem um subgrafo maximal  $H$  construído como descrito no enunciado. Como qualquer aresta  $xy \in E(G) - E(H)$  com  $x, y \in V(H)$  define um  $H$ -caminho, temos que  $H$  é um subgrafo induzido de  $G$ . Assim, se  $H \neq G$ , então, pela conexidade de  $G$ , existe uma aresta  $wv \in E(G)$  tal que  $v \in V(G) - V(H)$  e  $w \in V(H)$ . Sendo  $G$  2-conexo,  $G - w$  é conexo e contém um caminho  $P$  cujo vértice inicial é  $v$  e o único vértice em comum com  $H$  é seu vértice terminal. Logo, o caminho formado por  $P$  mais a aresta  $wv$ , denotado por  $wvP$ , é um  $H$ -caminho em  $G$  e  $\tilde{H} = G[H \cup wvP]$  é um subgrafo de  $G$ , construído como descrito no enunciado, maior do que  $H$ , o que é uma contradição. ■

**Teorema 2.11** *Seja  $w$  um vértice separador de um grafo  $G$ . Se  $H$  é um grafo conexo tal que  $V(H) \cap V(G)$  está contido em um único bloco de  $G$ , então  $w$  é vértice separador de  $H \cup G$ .*

**Demonstração:** Suponhamos, por absurdo, que  $w$  não seja vértice separador de  $H \cup G$ . Sejam  $B'$  o bloco de  $G$  tal que  $V(H) \cap V(G) \subset V(B')$ ,  $B$  um bloco de  $G$  tal que  $V(B) \setminus \{w\}$  está em uma componente conexa de  $G - w$  diferente da que contém  $V(B') \setminus \{w\}$  e  $u \in V(B) \setminus \{w\}$  e  $v \in V(B') \setminus \{w\}$ .

Não existe  $uv$ -caminho em  $G - w$ , entretanto existe  $uv$ -caminho em  $(G \cup H) - w$ . Pelo menos uma das arestas do  $uv$ -caminho em  $(G \cup H) - w$  deve pertencer a  $H$ , caso contrário  $u$  e  $v$  estariam na mesma componente conexa de  $G - w$ , uma contradição. Seja  $u'w'$  a primeira aresta no  $uv$ -caminho em  $(G \cup H) - w$  que pertence a  $H$  com  $u'$  vértice mais próximo de  $u$ . Assim, existe um  $uu'$ -caminho contido em  $G - w$ , implicando que  $u' \in V(G)$ , o que é uma contradição, porque, neste caso,  $u' \in V(H) \cap (V(G) - V(B'))$ . Portanto,  $w$  é vértice separador de  $G \cup H$ . ■

As demonstrações dos resultados a seguir serão omitidas, as mesmas podem ser encontradas na dissertação de Oliveira [6], mais precisamente na seção 1.3, intitulada A Árvore dos Blocos.

**Lema 2.12** *Sejam  $G$  um grafo e  $X$  e  $Y$  subconjuntos de  $E(G)$  tais que  $|V(X) \cap V(Y)| \geq 2$ . Se  $G[X]$  e  $G[Y]$  são 2-conexos, então  $G[X \cup Y]$  é 2-conexo.*

**Lema 2.13** *Dois blocos quaisquer em um grafo possuem, no máximo, um vértice em comum.*

**Lema 2.14** *Se  $G$  é um grafo conexo e  $v$  é um vértice separador de  $G$ , então  $v$  é incidente a pelo menos dois blocos de  $G$ .*

**Lema 2.15** *Seja  $G$  um grafo conexo. Se  $B$  e  $B'$  são blocos distintos de  $G$  tais que*

$$\min\{|V(B)|, |V(B')|\} \geq 2 \text{ e } v \in V(B) \cap V(B'),$$

*então  $v$  é vértice separador de  $G$ .*

Para um grafo conexo  $G$ , vamos associar um grafo  $T'$ , conhecido como a árvore dos blocos de  $G$ , tendo como conjunto de vértices

$$V(T') = \{B \subseteq E(G); B \text{ é bloco de } G\} \cup \{v \in V(G); v \text{ é vértice separador de } G\}$$

e como arestas o conjunto

$$E(T') = \{vB; v \text{ é vértice separador de } G, B \text{ é um bloco de } G \text{ e } v \in V(B)\}.$$

**Lema 2.16**  $T'$  é uma árvore.

**Teorema 2.17** *Sejam  $G$  um grafo 2-conexo e  $e$  uma aresta de  $G$ . Se  $G - e$  não é 2-conexo, então a árvore dos blocos de  $G - e$  é um caminho e a aresta  $e$  liga vértices não separadores dos blocos terminais.*

## 2.4 Ordem lexicográfica

No conjunto  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^n$  podemos definir várias ordens totais, em particular, temos uma chamada de ordem lexicográfica, a qual é definida da seguinte maneira: para  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  pertencentes a  $\mathbb{N}^n$ , dizemos que  $\alpha < \beta$  quando  $a_i < b_i$  para o primeiro índice  $i$  com  $a_i \neq b_i$ . Por exemplo, para  $\alpha = (9, 2, 12, 3), \beta = (9, 2, 5, 10) \in \mathbb{N}^4$ , temos que  $\alpha > \beta$ , pois o primeiro índice  $i$  tal que  $a_i \neq b_i$  é  $i = 3$  e  $a_3 = 12 > 5 = b_3$ . Nesta dissertação, iremos utilizar a ordem lexicográfica apenas para o caso  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ .

# Capítulo 3

## Demonstração do Teorema de Lemos e Oxley

Com o intuito de facilitar o acompanhamento da demonstração do Teorema 1.2, destacamos três seções:  $G \setminus C$  é conexo, redução ao caso que  $|E(H)| = 1$  e quando  $E(H)$  é vazio.

O final da prova de cada Afirmação, que aparece no decorrer do texto, é demarcado com um quadrado branco:  $\square$ .

Antes, vejamos dois Lemas:

**Lema 3.1 (Egawa e Miyamoto, 1989)** *Seja  $G$  um grafo simples 2-conexo e  $A$  um subconjunto não-vazio de  $V(G)$ . Assumimos que  $d_G(x) + d_G(y) \geq m$  para todo par de vértices distintos e não-adjacentes em  $V(G) \setminus A$ . Então,*

1.  *$G$  tem um circuito de comprimento no mínimo  $m - |A| + 1$ ; ou*
2.  *$G$  tem um circuito que contém todos os vértices de  $V(G) \setminus A$  e, pelo menos, um vértice de  $A$ .*

**Lema 3.2** *Seja  $G$  um grafo simples 2-conexo e seja  $u$  um vértice de  $G$  tal que  $d_G(v) \geq k$  para todo  $v$  em  $V(G) \setminus \{u\}$  e algum  $k \geq 3$ . Então,*

1.  *$G$  tem um circuito de comprimento, no mínimo,  $k + 1$ ; e*
2.  *$G$  tem um circuito de comprimento, no mínimo,  $k + 3$  a menos que  $G \cong K_{k+1}$ , ou  $G \cong K_{k+2} \setminus (T \cup S)$ , onde  $T$  é um emparelhamento,  $S$  um subconjunto de vértice estrela e contém, no máximo,  $k - 1$  arestas e  $V(T) \cap V(S) = \emptyset$*

Agora, vamos a demonstração do Teorema de Lemos e Oxley.

**Demonstração do Teorema 1.2:** Primeiro, consideraremos o caso que  $|E(H)| \geq 1$ , ou seja, o bloco  $H$  possui pelo menos uma aresta. Assumiremos que o Teorema 1.2 falhe e seja  $G$  um contra-exemplo escolhido de tal forma que  $|E(G)|$  é minimal e  $|E(H)|$  é maximal. Esclarecemos que, sendo  $|E(H)|$  maximal, temos  $-|E(H)|$  minimal e, portanto, o par  $(|E(G)|, -|E(H)|)$  é minimal.

Seja  $C$  um circuito de  $G$  tal que  $C$  é aresta-disjunta de  $H$  e  $G \setminus C$  não é 2-conexo. Quando  $k \geq 5$ , escolhemos  $C$  com  $|C| \geq k + 1$  se tal escolha é possível sobre as condições previamente impostas. Sendo  $H$  2-conexo, em  $G \setminus C$  existe um único bloco  $B$  que contém  $E(H)$ .

**Afirmção 3.3**  $B = H$

Se  $B \neq H$ , então, como  $B$  contém  $E(H)$ , temos que  $|E(B)| > |E(H)|$  e, pela ordem lexicográfica,  $(|E(G)|, -|E(B)|) < (|E(G)|, -|E(H)|)$ . Logo, devido a escolha de  $H$ , o resultado deve valer para o par  $(G, B)$ . Já sabemos que  $G \setminus C$  não é 2-conexo, assim, (i) falha para  $(G, B)$ , então (ii) tem que valer. Logo, existe  $C'$  tal que  $G \setminus C'$  é 2-conexo e  $C'$  é aresta-disjunta de  $B$ , mas  $E(B) \supseteq E(H)$  e o resultado valerá para o par  $(G, H)$ , o que é absurdo. Portanto, só nos resta a opção de que  $B = H$ .  $\square$

Um bloco  $B'$  de um grafo é *especial* se  $B'$  contém, no máximo, um vértice separador do grafo.

**Afirmção 3.4** *Todo bloco especial  $B'$  de  $G \setminus C$  que é distinto de  $B$  contém um circuito. Seja  $C_{B'}$  o circuito de comprimento máximo. Então, quando  $k \geq 5$ , uma das seguintes propriedades vale*

$$(3.4.1) \quad |C_{B'}| \geq k + 1; \text{ ou}$$

$$(3.4.2) \quad B' \cong K_{k-1}; \text{ ou}$$

$$(3.4.3) \quad B' \cong K_k \setminus (T \cup S) \text{ para algum emparelhamento } T \text{ e algum subconjunto } S \text{ de uma estrela de algum vértice tal que } |S| \leq k - 3 \text{ e } V(S) \cap V(T) = \emptyset$$

A exclusão das arestas de  $C$  em  $G$  reduz o grau de cada vértice por no máximo 2. Assim, todo vértice de  $B'$  que não é um vértice separador de  $G \setminus C$  está em  $V(G) - V(H)$

e tem grau pelo menos  $k - 2$ , que é maior ou igual a 2 em  $B'$ , pois  $k > 3$ . Portanto, pela Proposição 2.3,  $B'$  contém um circuito.

Seja  $u$  o vértice separador de  $G \setminus C$  que está em  $B'$ . Então,  $k \geq 5$ , implica que, quando excluimos as arestas de  $C$ , temos  $d_{B'}(v) \geq k - 2 \geq 3, \forall v \in V(B') - \{u\}$ , e, pelo Lema 3.2,

1.  $|C_{B'}| \geq (k - 2) + 3 = k + 1$ ; ou
2.  $B' \cong K_{(k-2)+1} = K_{k-1}$ ; ou
3.  $B' \cong K_{(k-2)+2} \setminus (T \cup S) = K_k \setminus (T \cup S)$ , para algum emparelhamento  $T$  e algum subconjunto  $S$  de algum vértice estrela tal que  $|S| \leq (k - 2) - 1 = k - 3$  e  $V(S) \cap V(T) = \emptyset$ .  $\square$

### 3.1 $G \setminus C$ é conexo

Com o auxílio da Afirmação 3.4, iremos provar a seguinte afirmação.

**Afirmação 3.5**  $G \setminus C$  é conexo.

**Observação 3.6** *Os vértices do circuito  $C$  interceptam todas as componentes conexas de  $G \setminus C$ . Além disso, para que  $G$  seja 2-conexo, os vértices do circuito  $C$  devem interceptar, pelo menos, dois vértices de cada componente conexa de  $G \setminus C$ .*

Suponhamos, por absurdo, que  $G \setminus C$  não é conexo. Sejam  $D$  a componente conexa de  $G \setminus C$  que contém  $E(H)$ ,  $G' = G[E(D) \cup C]$  e  $D''$  uma componente conexa distinta de  $D$ . Sendo  $H$  bloco de  $G \setminus C$ , implica  $H$  bloco da componente conexa  $D$ . Se  $H$  continua sendo bloco de  $G'$ , então  $C$  está em outro bloco de  $G'$ , caso contrário,  $H$  sendo subgrafo 2-conexo maximal de  $G'$ , teríamos que  $C$  estaria completamente contido em  $H$ , o que é absurdo, pois  $E(H) \cap C = \emptyset$ . Logo,  $H$  sendo bloco de  $G'$  e  $C$  estando em outro bloco de  $G'$ , temos que  $G'$  possui, no mínimo, um vértice separador. Desta forma, quando unimos  $G'$  a  $D''$ , temos, pelo Teorema 2.11, que todo vértice separador de  $G'$  continua sendo vértice separador de  $G[G' \cup D'']$ , logo repetindo este procedimento, ou seja, acrescentando as demais componentes conexas, concluiremos que  $G$  possui um vértice separador, o que é uma contradição, pois  $G$  é 2-conexo. Portanto,  $H$  está contido em bloco maior de  $G'$ ,

digamos  $B_1$ , e  $C$  também está neste bloco  $B_1$ , se não, concluiríamos da mesma forma que  $G$  possui, pelo menos, um vértice separador.

Escolhemos uma aresta  $e$  de  $H$  e uma aresta  $f$  de  $C$ , como  $C$  e  $H$  estão no mesmo bloco  $B_1$  de  $G'$ , existe, pelo Corolário 2.9, um circuito  $C_1$  em  $B_1$  que contém as arestas  $e$  e  $f$ . Este circuito  $C_1$  contém arestas de  $H$  e  $C$ . Sendo assim,  $C_1$  contém um caminho  $P_0$  tal que  $P_0$  está contido em  $C$  e os únicos vértices em comum com a componente conexa  $D$  são seus vértices terminais  $v_1$  e  $v_2$ . Olhando para o pedaço do circuito  $C_1$  que está em  $D$ , temos que este pedaço é um caminho  $P_3$  em  $D$  que intercepta  $E(H)$  e tem extremos  $v_1$  e  $v_2$ .

Consideremos  $B'$  um bloco especial em uma componente conexa  $D'$  de  $G \setminus C$  diferente da componente conexa  $D$  e suponhamos  $k = 4$ , ou  $k \geq 5$  e (3.4.1) vale. Devido ao fato do bloco  $B'$  pertencer a uma componente conexa  $D'$  diferente de  $D$ , o circuito  $C_{B'}$  é aresta-disjunto de  $H$ . Assim, como (ii) do Teorema 1.2 falha, temos que  $G \setminus C_{B'}$  não é 2-conexo e  $G \setminus C_{B'}$  tem um único bloco que contém  $H$ . Este bloco também contém  $E(H) \cup P_0$ , contrariando o fato de  $H$  ser maximal. Portanto, a condição (3.4.1) não pode ocorrer.

**Afirmção 3.7** *Seja  $J$  um subgrafo conexo de uma componente conexa de  $G \setminus C$  diferente da que contém  $E(H)$ , ou seja, diferente da componente conexa  $D$ . Então,  $G$  não tem circuito  $C'$  que satisfaz todas as condições a seguir:*

$$(i) \ C' \subseteq E(J) \cup C;$$

$$(ii) \ v_1 \text{ e } v_2 \text{ estão na mesma componente conexa de } G[E(J) \cup C] \setminus C'; \text{ e}$$

$$(iii) \ |C'| \geq k + 1, \text{ quando } k \geq 5.$$

Suponhamos, por absurdo, que exista um circuito  $C'$  satisfazendo a todas estas condições. Então, como (ii) do Teorema 1.2 falha,  $G \setminus C'$  não é 2-conexo e  $G \setminus C'$  tem um único bloco que contém  $H$ . O fato de, por hipótese,  $v_1$  e  $v_2$  pertencerem à mesma componente conexa de  $G[E(J) \cup C] \setminus C'$ , implica que existe um caminho ligando  $v_1$  e  $v_2$  e este caminho é aresta-disjunta do caminho  $P_3$  que está na componente conexa  $D$ . Assim, pela construção destes dois caminhos, a união deles contém um circuito  $C_2$  que encontra  $E(H)$  e  $E(G) - E(H)$ . O circuito  $C_2$  está em  $G \setminus C'$  e, portanto, o bloco de  $G \setminus C'$  que

contém  $E(H)$  também contém  $E(H) \cup C_2$  implicando que este bloco tem mais do que  $|E(H)|$  arestas, o que é uma contradição à maximilidade de  $E(H)$ .  $\square$

Seja  $B'$  um bloco especial de  $G \setminus C$ . O circuito  $C$  induz uma ordem cíclica, a qual chamaremos de ordem  $C$ -induzida, nos vértices de  $V(B') \cap V(C)$ . Um caminho em  $C$  que une dois vértices consecutivos em  $V(B') \cap V(C)$  é chamado de  $B'$ -segmento de  $C$ , ou simplesmente o chamaremos de  $B'$ -segmento.

Consideraremos o caso que  $k \geq 5$  e (3.4.2) vale, provaremos que, nestas condições, a seguinte afirmação é válida.

**Afirmção 3.8** *Se  $B'$  é um bloco especial de uma componente conexa de  $G \setminus C$  diferente da componente conexa que contém  $E(H)$  e  $B' \cong K_{k-1}$ , então  $k = 5$ , o bloco  $B'$  contém um vértice separador de  $G \setminus C$  que não é vértice de  $C$  e  $v_1$  e  $v_2$  estão em  $B'$ -segmentos diferentes de  $C$ .*

O bloco  $B'$  de  $G \setminus C$  contém, no máximo, um vértice separador de  $G \setminus C$ . Como  $B' \cong K_{k-1}$ , todo vértice de  $B'$  que não é vértice separador de  $G \setminus C$  tem grau  $k-2$  em  $G \setminus C$ , mas, por hipótese, tem grau, pelo menos,  $k$  em  $G$ , logo, os vértices de  $B'$ , com a possível exceção do vértice separador, devem pertencer a  $C$ , portanto  $|V(B') \cap V(C)| \geq k - 2$ .

Como  $|V(B') \cap V(C)| \geq k - 2$ , existem, pelo menos,  $k - 2$   $B'$ -segmentos. Além disso, sendo  $B'$  completo e  $G$  simples, todo  $B'$ -segmento de  $C$  tem comprimento, pelo menos, dois. Desta maneira, uma das duas condições abaixo é satisfeita,

- (a) existem dois  $B'$ -segmentos distintos de  $C$ ,  $P_1$  e  $P_2$ , que não passam por  $\{v_1, v_2\}$ ; ou
- (b) estes dois  $B'$ -segmentos não existem.

No caso (a), seja  $P_i$  um caminho com  $u_i$  e  $w_i$  sendo seus vértices terminais. Então, assumimos que  $u_1 \notin \{u_2, w_2\}$  e  $w_1 \neq w_2$ . Como  $B'$  é completo, então  $B'$  contém caminhos vértices-disjuntos  $R_1$  e  $R_2$  unindo  $u_1$  e  $w_2$  e  $u_2$  e  $w_1$ , respectivamente, tais que  $V(R_1) \cup V(R_2) = V(B')$ . A união de  $R_1, P_1, R_2$  e  $P_2$  é um circuito  $C'$  que está em  $E(B') \cup C$  e contém, pelo menos,  $(k - 1) + 2$  vértices, implicando  $|C'| \geq k + 1$ . Além disso, como  $P_1 \cup \{u_1 w_1\}$  é um circuito,  $u_1 w_1 \notin E(C')$ . Segue que, em  $G[E(B') \cup C] \setminus C'$ , os vértices  $v_1$  e  $v_2$  estão na mesma componente conexa, Figura 3.1. Portanto, encontramos um circuito  $C'$  que satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) da Afirmção 3.7, o que é um

absurdo. Logo, o caso (a) não pode ocorrer, ou seja, não existem dois  $B'$ -segmentos que evitam  $\{v_1, v_2\}$ .

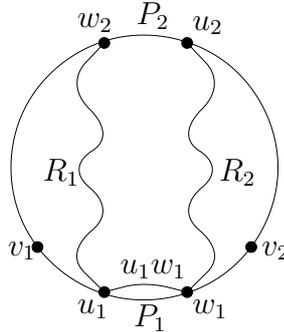


Figura 3.1:  $v_1$  e  $v_2$  estão na mesma componente conexa

Sendo assim, o caso (b) deve ser válido. Como  $k \geq 5$ , para que não existam dois  $B'$ -segmentos que evitam  $\{v_1, v_2\}$ ,  $k$  deve ser igual a 5,  $B'$  contém um vértice separador de  $G \setminus C$  que não é vértice de  $C$ , implicando que  $|V(B') \cap V(C)| = 3$ ,  $v_1$  e  $v_2$  devem estar em  $B'$ -segmentos diferentes de  $C$  e existe apenas um  $B'$ -segmento que evita  $\{v_1, v_2\}$ .  $\square$

A Afirmação 3.8 será utilizada mais adiante para concluirmos que  $G \setminus C$  deve ser conexo.

Suponhamos que  $k \geq 5$  e (3.4.3) vale, que é  $B' \cong K_k \setminus (T \cup S)$  onde  $T$  é um conjunto de arestas,  $S$  um conjunto de, no máximo,  $k - 3$  arestas, todas dividindo um vértice em comum,  $v_S$ , e as arestas de  $S$  são vértices disjuntos dos vértices de  $T$ . Neste caso, usaremos a seguinte afirmação.

**Afirmação 3.9** *Se  $w_1$  e  $w_2$  são vértices distintos de  $B'$ , então existe um caminho Hamiltoniano unindo  $w_1$  e  $w_2$ , a menos que  $|S| = k - 3$  e  $v_S w_1$  e  $v_S w_2$  sejam as únicas arestas incidentes a  $v_S$  que não estão em  $S$ .*

**Observação 3.10** *Como  $|S|$  é menor ou igual a  $k - 3$ , temos que o grau de  $v_S$  é, no mínimo, dois em  $B'$ ,  $d_{B'}(v_S) \geq 2$ , ou seja, existem, pelo menos, dois vértices adjacentes a  $v_S$  em  $B' \cong K_k \setminus (T \cup S)$ .*

**Observação 3.11** *Seja  $v \in V(B')$ . Pelo fato de  $V(S) \cap V(T) = \emptyset$ , temos as seguintes conclusões, se a aresta  $v_S v$  existe, ou seja,  $v_S v \in E(B')$ , então  $v$  pode não ser adjacente a um outro vértice de  $B'$ ; se a aresta  $v_S v$  não existe, então, com exceção do vértice  $v_S$ ,  $v$  é adjacente a todos os vértices de  $B'$ .*

A demonstração da Afirmação 3.9 será feita por indução sobre  $k$ . Para  $k = 5$ , consideraremos primeiro o caso que  $v_S \notin \{w_1, w_2\}$ , seja  $V(B') = \{w_1, w_2, v_S, a, b\}$ . Se as arestas  $w_1v_S$  e  $w_2v_S$  não pertencem a  $E(B')$ , então as arestas  $w_1a, w_1b, w_1w_2, w_2a, w_2b, v_Sa, v_Sb \in E(B')$ , implicando que  $w_1av_Sbw_2$  é um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ .

Se a aresta  $w_1v_S \notin E(B')$ , mas  $w_2v_S, v_Sa \in E(B')$ , então caso  $ab \in E(B')$ , temos que  $w_1bav_Sw_2$  é um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ ; caso  $ab \notin E(B')$ , então  $v_Sb, bw_2 \in E(B')$  e  $w_1av_Sbw_2$  é um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ . O caso de  $w_1v_S \notin E(B')$ , mas  $w_2v_S \in E(B')$  é análogo.

Consideremos o caso que  $w_1v_S, w_2v_S \in E(B')$ . Se  $|S| = 2$ , então não existe  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ . Se  $|S| < 2$ , então  $d_{B'}(v_S) \geq 3$  e, portanto,  $v_Sa$  ou  $v_Sb$  pertence a  $E(B')$ . Digamos que  $v_Sa \in E(B')$ . Se  $w_1a \notin E(B')$ , então  $w_1w_2ab, w_1b \in E(B')$  e  $w_1bav_Sw_2$  é um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ . Se  $w_1w_2, w_1a \in E(B')$ , então  $ab$ , ou  $w_2b$ , não pertence a  $E(B')$ ; caso  $ab \notin E(B')$ , temos que  $w_2b, v_Sb \in E(B')$  e  $w_1av_Sbw_2$  é um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ ; caso  $w_2b \notin E(B')$ , temos que  $v_Sb, ab \in E(B')$  e  $w_1abv_Sw_2$  é um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ . Se  $w_1w_2 \notin E(B')$ , então  $w_1a, w_1b, w_2a, w_2b \in E(B')$  e  $ab$ , ou  $v_Sb$ , não pertence a  $E(B')$ ; caso  $ab \notin E(B')$ , temos que  $v_Sb \in E(B')$  e  $w_1bv_Saw_2$  é um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ ; caso  $v_Sb \notin E(B')$ , temos que  $ab \in E(B')$  e  $w_1bav_Sw_2$  é um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ . Encerramos o caso que  $v_S \notin \{w_1, w_2\}$ .

Consideremos  $v_S \in \{w_1, w_2\}$ , digamos  $w_1 = v_S$ , e seja  $V(B') = \{w_1, w_2, a, b, c\}$ . Suponhamos  $|S| = 2$ . Se  $w_1w_2, w_1a \in E(B')$ , então  $w_1b, w_1c \notin E(B')$ , mas  $ab, bc, w_2c \in E(B')$ , implicando que  $w_1abcw_2$  é um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ . Se  $w_1w_2 \notin E(B')$ , então  $w_1a, w_1b, w_2a, w_2b, w_2c, ac, bc \in E(B')$  e, portanto,  $w_1acb w_2$  é um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ .

Suponhamos  $|S| < 2$ , então,  $d_{B'}(w_1) \geq 3$ , digamos, que  $w_1a, w_1b \in E(B')$ . Se  $w_1w_2 \notin E(B')$ , então  $w_1c, w_2a, w_2b, w_2c \in E(B')$  e  $ab$ , ou  $bc$ , ou  $ac$ , pode não pertencer a  $E(B')$ . Se  $ab \notin E(B')$ , temos que  $bc, ac \in E(B')$  e  $w_1bcaw_2$  é um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ ; o caso que  $bc$ , ou  $ac$ , não pertence a  $E(B')$  é análogo.

Ainda supondo que  $|S| < 2$ , digamos que, desta vez,  $w_1w_2 \in E(B')$ , além de  $w_1a$  e  $w_1b$ . Se  $ab \in E(B')$  e  $w_1c \notin E(B')$ , então  $w_1abcw_2$  é um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ . Se  $ab \notin E(B')$ , temos que  $bc, w_2b, ac \in E(B')$  e  $w_1acb w_2$  é um  $w_1w_2$ -caminho

Hamiltoniano em  $B'$ .

Suponhamos que  $w_1w_2, w_1a, w_1b, w_1c \in E(B')$ . Se  $aw_2 \notin E(B')$ , então  $w_1bacw_2$  é um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ . Se  $aw_2 \in E(B')$ , então  $ac$ , ou  $ab$ , ou  $cw_2$ , ou  $bw_2$ , não pertence a  $E(B')$ ; caso  $ac \notin E(B')$ , então  $ab, bc, cw_2 \in E(B')$  e  $w_1abcw_2$  é um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ ; o caso que  $ab$ , ou  $bc$ , ou  $cw_2$ , não pertence a  $E(B')$  é análogo. Concluimos o caso que  $k = 5$ .

Agora, consideraremos  $k > 5$ . Se  $|S| = k - 3$  e  $v_Sw_1, v_Sw_2 \in E(B')$ , então não é possível construir um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ . Caso contrário, retiramos um vértice  $v$  diferente de  $w_1, w_2$  e  $v_S$  e obtemos o grafo  $K_{k-1} \setminus (T' \cup S')$ , onde  $T'$  e  $S'$  são obtidos a partir de  $T$  e  $S$ , respectivamente. Pela hipótese indutiva, existe um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano,  $P_4$ , em  $K_{k-1} \setminus (T' \cup S')$ . Colocamos de volta o vértice  $v$  e recuperamos o grafo  $B' \cong K_k \setminus (T \cup S)$ . Resta encaixarmos o vértice  $v$  no caminho  $P_4$  para obtermos um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ . Escolhemos duas arestas em sequência no caminho  $P_4$ ,  $ab$  e  $bc$ . Existe a possibilidade de  $a = w_1, b = v_S$  e  $c = w_2$ ; o caso que  $a = v_S$ , implica que  $a = w_1 = v_S$  e; o caso que  $c = v_S$ , implica que  $c = w_2 = v_S$ .

Se  $av, bv \in E(B')$ , então adicionamos as arestas  $av$  e  $bv$  e removemos a aresta  $ab$  do caminho  $P_4$ , obtendo um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ .

Caso  $av \notin E(B')$ , então, pela Observação 3.11,  $cv, bv \in E(B')$  e, com estas arestas, fazemos um procedimento análogo ao descrito no parágrafo anterior. Se  $bv \notin E(B')$ , então pegamos o outro vértice adjacente a  $c$  em  $P_4$ ,  $d$ , adicionamos as arestas  $cv$  e  $dv$ , retiramos a aresta  $cd$  do caminho  $P_4$  e obtemos um  $w_1w_2$ -caminho Hamiltoniano em  $B'$ .  $\square$

Como todo vértice  $v$  em  $V(G) - V(H)$  deve ter grau maior ou igual a  $k$ , então todo vértice de  $B'$ , com a possível exceção do vértice separador, é também vértice de  $C$ , desta forma,  $|V(B') \cap V(C)| \geq k - 1$ . Assim, o número de  $B'$ -segmentos de  $C$  é  $k$  ou  $k - 1$  e, por conta disto, para alguns vértices distintos  $w_1$  e  $w_2$  em  $V(B') \cap V(C)$ , existe um  $B'$ -segmento  $C[w_1, w_2]$  de  $C$  com extremos  $w_1$  e  $w_2$  tal que  $C[w_1, w_2]$  não passa por  $v_1$  e  $v_2$ . Escolha tal  $B'$ -segmento de tal maneira que seu comprimento é máximo e, depois, escolha um caminho de comprimento máximo  $B'[w_1, w_2]$  em  $B'$  ligando  $w_1$  e  $w_2$ . Então, a união de  $B'[w_1, w_2]$  e  $C[w_1, w_2]$  é um circuito  $C' \subseteq E(B') \cup C$  e  $v_1$  e  $v_2$  estão na mesma componente conexa de  $G[E(B') \cup C] \setminus C'$ , Figura 3.2. Teremos uma contradição à Afirmação 3.7 a menos que  $|C'|$  seja menor ou igual a  $k$ . Iremos analisar este caso excepcional. Então, quando  $|C'| \leq k$ , uma das duas condições acontece:

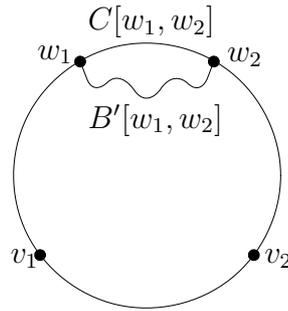


Figura 3.2: Construção do circuito  $C'$

- (a)  $C[w_1, w_2]$  tem comprimento pelo menos dois,  $|C[w_1, w_2]| \geq 2$ ; ou
- (b)  $C[w_1, w_2]$  tem comprimento um,  $|C[w_1, w_2]| = 1 < 2$ .

Suponhamos que a condição (a) vale. Então,  $B'[w_1, w_2]$  não pode ser um caminho Hamiltoniano em  $B'$ . Se  $B'[w_1, w_2]$  fosse um caminho Hamiltoniano em  $B'$ , então  $C'$  teria comprimento maior ou igual a  $k + 1$ , contradizendo as condições (i), (ii) e (iii) da Afirmação 3.7. Logo, pela Afirmação 3.9,  $w_1$  e  $w_2$  são os únicos vértices que estão ligados a  $v_S$  em  $B'$ .

**Observação 3.12** Ainda pela Afirmação 3.9, para todo  $B'$ -segmento  $C[u_1, u_2]$  que não passa por  $v_1$  e  $v_2$  e é diferente de  $C[w_1, w_2]$ , o caminho de comprimento máximo  $B'[u_1, u_2]$  em  $B'$  com extremos  $u_1$  e  $u_2$  é Hamiltoniano. Assim,  $C[u_1, u_2]$  tem somente uma aresta, porque, caso contrário, a união  $B'[u_1, u_2]$  com  $C[u_1, u_2]$  é um circuito  $C_3$  satisfazendo  $|C_3| \geq k + 1$ ,  $C_3 \subseteq E(B') \cup C$  e  $v_1$  e  $v_2$  estão na mesma componente conexa de  $G[E(B') \cup C] \setminus C_3$ , o que contradiz a Afirmação 3.7.

**Observação 3.13** Como  $B' \cong K_k \setminus (T \cup S)$ , onde  $T = \{w_1 w_2\}$  ou  $T = \emptyset$ , então  $B' - \{v_S\}$  é um grafo completo ou um grafo completo com a aresta  $w_1 w_2$  deletada, segue que os únicos  $B'$ -segmentos de  $C$  de comprimento um devem interceptar  $v_S$ .

**Observação 3.14** Se existem, pelo menos, três  $B'$ -segmentos diferentes de  $C[w_1, w_2]$  que não passam por  $v_S$ , então, existe, no mínimo, um  $B'$ -segmento que evita  $\{v_1, v_2\}$ . Pela Observação 3.12, este  $B'$ -segmento deve ter comprimento um e, pela Observação 3.13, deve interceptar  $v_S$ , o que é uma contradição. Portanto, existem, no máximo, dois  $B'$ -segmentos de comprimento maior ou igual a dois, diferentes de  $C[w_1, w_2]$  e que não passam por  $v_S$ .

Contando com  $C[w_1, w_2]$ , existem, no máximo, três  $B'$ -segmentos distintos com comprimento maior ou igual a dois. Ora, existem, pelo menos,  $k - 1$   $B'$ -segmentos, sendo assim, os  $k - 1 - 3$ , ou  $k - 3$ ,  $B'$ -segmentos restantes devem ter comprimento um e, pela Observação 3.13, todos devem passar por  $v_S$ , logo  $v_S$  deve pertencer a  $V(C)$ .

Lembrando que, como  $|S| = k - 3$ ,  $w_1$  e  $w_2$  são os únicos vértices adjacentes a  $v_S$  em  $B'$  e  $k \geq 5$ , temos que  $d_{B'}(v_S) = 2$ . Se  $v_S$  não é o vértice separador de  $B'$ , então, como  $C$  só acrescenta mais duas arestas incidentes a  $v_S$ , teremos, no grafo original, que  $d_G(v_S) = 4 \leq 5 \leq k$ , uma contradição. Logo,  $v_S$  deve ser o vértice separador de  $B'$ .

Pela Observação 3.14 e o parágrafo anterior,  $k$  não pode ser maior que 5, pois, neste caso, existirão, pelo menos, três  $B'$ -segmentos distintos de  $C[w_1, w_2]$  que não passam por  $v_S$ .

Resumindo, devemos assumir que  $v_S \in V(C)$  e  $k = 5$ . Portanto, existem quatro  $B'$ -segmentos diferentes de  $C[w_1, w_2]$ . Destes, no máximo um contém  $v_1$ , no máximo um contém  $v_2$  e no máximo dois tem comprimento um. Para satisfazer as condições descritas nas Observações 3.12, 3.13 e 3.14, a igualdade deve valer em cada um destes limites, ou seja, existem um  $B'$ -segmento que contém  $v_1$ , um outro contendo  $v_2$  e dois de comprimento um. Logo,  $B'$  é igual ao grafo da Figura 3.3. Além disso,  $v_S a$  e  $v_S b$  estão em  $C$  e, sem perda de generalidade, determinamos a ordem  $C$ -induzida em  $V(B')$  como sendo  $w_1, w_2, a, v_S, b$ . Então,  $v_1$  e  $v_2$  estão, em alguma ordem, nos  $B'$ -segmentos  $C[w_2, a]$  e  $C[b, w_1]$ . Seja  $C'$  a união de  $C[w_1, w_2]$  com o caminho  $w_1 b v_S a w_2$  em  $G[E(B') \cup C]$ , vemos que  $C'$  tem comprimento seis, o que contradiz a Afirmação 3.7. Isto exclui o caso (a).

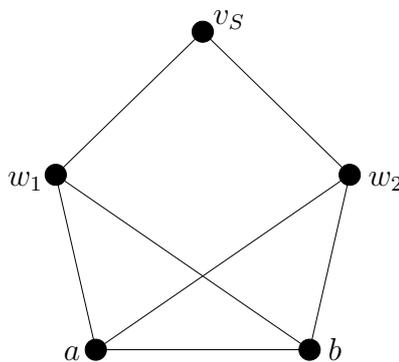


Figura 3.3:  $B'$

Suponhamos que a condição (b) vale, então temos que  $w_1 w_2 \in T$  e também  $w_1 w_2 \in C$ . Pela Observação 3.11, as arestas  $w_1 v_S$  e  $w_2 v_S$  pertencem a  $B'$ . Pela Afirmação

3.9, temos que para todo  $B'$ -segmento  $C[u_1, u_2]$  que não passa por  $v_1$  e  $v_2$ , o caminho de comprimento máximo  $B'[u_1, u_2]$  é Hamiltoniano, então  $C[u_1, u_2]$  deve ter comprimento um. Como  $B' - \{v_S\}$  é um grafo completo menos um emparelhamento, dois  $B'$ -segmentos de  $C$  consecutivos podem ter comprimento um somente se ambos interceptam o vértice  $v_S$ , sendo assim, só existem, no máximo, dois  $B'$ -segmentos consecutivos de comprimento um. Para satisfazer a estas condições, segue que  $k = 5$ . Se  $v_S \notin V(C)$ , então  $B'$  é como na Figura 3.4(1), onde as arestas 12 e 34 estão em  $C$ , os vértices  $v_1$  e  $v_2$  estão em diferentes  $B'$ -segmentos de  $C$  e  $v_S$ , para satisfazer  $d_G(v_S) \geq 5 = k$ , é um vértice separador de  $G \setminus C$ . Se  $v_S \in V(C)$ , então existem vértices 3 e 4 de  $B'$  tais que  $v_S 3$  e  $v_S 4$  são arestas de  $C$  e, conseqüentemente, não são arestas de  $B'$ . Além disso, para que  $d_G(v_S)$  seja maior ou igual a cinco,  $v_S$  deve ser um vértice separador de  $G \setminus C$ . Logo,  $B'$  é como mostrado na Figura 3.4(2), onde  $12 \in C$  e, mais uma vez,  $v_1$  e  $v_2$  estão em diferentes  $B'$ -segmentos de  $C$ .

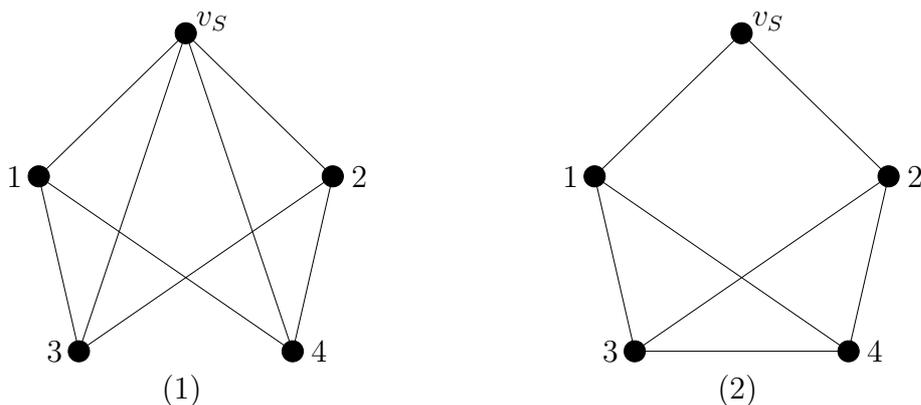


Figura 3.4:  $B'$

Mostraremos que, se (2) vale, então podemos modificar  $C$  e  $B'$  de tal forma que (1) em detrimento de (2) valha. Para tanto, basta trocar  $C$  por  $C_1$  e  $B'$  por  $B'_1$ , onde  $C_1 = (C \cup \{34\}) - \{v_S 3, v_S 4\}$ ,  $V(B'_1) = V(B)$  e  $E(B'_1) = (E(B') - \{34\}) \cup \{v_S 3, v_S 4\}$ . Então,  $C_1$  é um circuito tendo, pelo menos, seis arestas, pois  $C_1$  contém os  $B'$ -segmentos  $C[2, 4]$ ,  $C[3, 1]$ ,  $C[1, 2]$  e  $C[3, 4]$  com  $|C[2, 4]| \geq 2$  e  $|C[3, 1]| \geq 2$ . Os conjuntos de vértices das componentes e blocos de  $G \setminus C_1$  e  $G \setminus C$  são idênticos.

Combinando a Afirmação 3.8 com o resultado do último parágrafo, deduzimos que se  $G \setminus C$  é desconexo, então  $k = 5$  e devemos assumir que, para todo bloco especial  $B'$  de  $G \setminus C$  que está em uma componente conexa diferente de  $E(B)$ , as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i)  $B'$  contém vértice separador  $u$  de  $G \setminus C$  e  $\{u\} = V(B') - V(C)$ ; e

- (ii)  $B'$  é um grafo completo de quatro vértices, ou o grafo obtido do grafo completo de cinco vértices pela exclusão de duas arestas emparelhadas, onde ambas arestas estão em  $C$ ; e
- (iii)  $v_1$  e  $v_2$  estão em diferentes  $B'$ -segmentos de  $C$ .

Então, (i) garante que podemos escolher blocos especiais  $B_1$  e  $B_2$  distintos que estão na mesma componente conexa  $D''$  de  $G \setminus C$  com  $E(D'') \cap E(B) = \emptyset$ . Por (iii), ambos os caminhos que ligam  $v_1$  e  $v_2$  em  $C$  contém vértices de ambos  $B_1$  e  $B_2$ . Assim,  $C$  contém um caminho  $P$  ligando um vértice  $x_1$  de  $V(B_1)$  a um vértice  $x_2$  de  $V(B_2)$  que evita  $\{v_1, v_2\}$  e é internamente disjunto de ambos  $V(B_1)$  e  $V(B_2)$ . Para  $i \in \{1, 2\}$ , existe um caminho Hamiltoniano  $P_i$  em  $B_i$  de  $x_i$  ao vértice separador  $u_i$  de  $G \setminus C$  que está em  $B_i$ . Seja  $G_1$  a união de  $P, P_1, P_2$  e um caminho  $Q$  em  $D''$  ligando  $u_1$  e  $u_2$ . Então  $G_1$  contém um circuito  $C_1$  cujo conjunto de arestas contém propriamente  $E(P_1)$ . Além disso,  $v_1$  e  $v_2$  estão na mesma componente conexa de  $G[E(D'') \cup C] \setminus C_1$ . Assim, temos uma contradição à Afirmação 3.7 a menos que  $|C_1| = 5$  e  $B_1 \cong K_4$ . No caso excepcional,  $V(C_1) = V(B_1) \cup \{y_1\}$ , onde  $u_1 y_1 \in E(D'')$  e  $y_1 \in V(P) \cap V(Q)$ . Mas, no  $v_1 v_2$ -caminho em  $C$  que evita  $\{x_1, x_2\}$ , existe um caminho  $P'$  que liga um vértice  $w_1 \in V(B_1)$  a um vértice  $w_2 \in V(B_2)$  e é internamente disjunto de ambos  $V(B_1)$  e  $V(B_2)$ . Na união de  $P', P_1, P_2$  e  $Q$ , existe um circuito contendo  $E(P_1)$  que tem comprimento seis e, portanto, contradiz a Afirmação 3.7, ou tem comprimento cinco e, implica que,  $y_1 \in V(P')$ . Como  $P$  e  $P'$  são vértices disjuntos, temos uma contradição.

A última contradição completa a prova de que é um absurdo assumir que  $G \setminus C$  é desconexo. Portanto, temos que, de fato,  $G \setminus C$  é conexo.  $\square$

**Afirmação 3.15** *Se  $k \geq 5$ , então todo bloco terminal de  $G \setminus C$  tem, pelo menos,  $k + 1$  vértices.*

**Observação 3.16** *Sendo  $G \setminus C$  conexo, todo bloco terminal de  $G \setminus C$  é, por definição, um bloco especial e, pela Afirmação 3.4, tem, no mínimo,  $k - 1$  vértices.*

Sejam  $B'$  um bloco terminal de  $G \setminus C$  e  $u$  o vértice separador de  $G \setminus C$  pertencente a  $B'$ . Assumimos que  $|V(B')| \in \{k - 1, k\}$ . Pela comparação de graus em  $B'$  e  $G$ , deduzimos imediatamente que  $V(C) \supseteq V(B') - \{u\}$ , ou seja,  $C$  poderá conter todos os vértices de  $B'$ ,

a possível exceção é o vértice separador. Além disso, se um vértice de  $B'$  não é adjacente a dois ou mais vértices em  $B'$ , então este vértice deve ser  $u$ .

Sejam  $P$  um caminho que está propriamente contido em  $C$  e  $\{B_1, B_2, \dots, B_S\}$  um conjunto de blocos de  $G \setminus C$ , dizemos que  $P$  *cruza* este conjunto de blocos quando a interseção de  $V(P)$  e  $V(B_1) \cup V(B_2) \cup V(B_1) \cup \dots \cup V(B_S)$  consiste dos vértices terminais de  $P$  e  $G[E(B_1) \cup E(B_2) \cup \dots \cup E(B_S) \cup E(P)]$  é 2-conexo, ou seja,  $P$  pode ser visto como um  $G \setminus C$ -caminho.

Consideremos os  $B'$ -segmentos de  $C$ . Existe um  $B'$ -segmento  $C[v_1, v_2]$  que contém um caminho que cruza algum conjunto de blocos contendo  $B = H$ . Chamamos um  $B'$ -segmento de *não-trivial* se ele contém, pelo menos, duas arestas; caso contrário, chamaremos de *trivial*.

**Observação 3.17** *Por construção,  $C[v_1, v_2]$  é um  $B'$ -segmento não-trivial.*

**Afirmção 3.18**  *$G$  não possui circuito  $C'$  com pelo menos  $k + 1$  arestas para as quais todas as condições a seguir são válidas:*

$$(3.18.1) \ E(C[v_1, v_2]) \cap C' = \emptyset;$$

$$(3.18.2) \ V(C') \supseteq V(C) \cap V(B'); \text{ e}$$

(3.18.3)  *$C'$  é obtido a partir de  $C$  pela deleção de alguns  $B'$ -segmentos de  $C$  e inserindo algum subconjunto  $X$  de  $E(B')$  tal que  $B' \setminus X$  é conexo.*

Suponhamos que  $G$  tenha tal circuito  $C'$ . Consideremos  $G \setminus C'$ . Ora,  $G \setminus C'$  contém  $C[v_1, v_2]$  e, conseqüentemente, contém um caminho  $P_0$  que cruza um conjunto de blocos contendo  $B$ . Como  $B' \setminus X$  é conexo, segue que  $G \setminus C'$  contém um circuito que contém  $P_0$  e intercepta  $E(B)$ . Pela Afirmção 3.3, o bloco de  $G \setminus C'$  contém  $E(H)$  propriamente, uma contradição. Portanto, a Afirmção 3.18 é verdade.  $\square$

A prova da Afirmção 3.15 será dividida em vários casos, em cada um deles devemos construir um circuito  $C'$  obedecendo (3.18.1) a (3.18.3) com, pelo menos,  $k + 1$  arestas.

Um circuito  $C'$  obedecendo (3.18.1) a (3.18.3) tem comprimento, no mínimo,  $|V(C) \cap V(B')| + n$ , onde  $n$  é o número de  $B'$ -segmentos não-triviais de  $C$  que estão contidos em  $C'$ .

Suponhamos  $|V(B')| = k - 1$ . Então, pela Afirmção 3.4,  $B' \cong K_{k-1}$  e, pela Observação 3.17,  $v_1 v_2 \in E(B')$ . Seja  $C' = (C - C[v_1, v_2]) \cup \{v_1 v_2\}$ . Todo  $B'$ -segmento

de  $C$  contém pelo menos duas arestas. O número de tais  $B'$ -segmentos, diferentes de  $C[v_1, v_2]$ , é no mínimo  $|V(B') \cap V(C)| - 1$ . Assim,

$$|C'| \geq |V(B') \cap V(C)| + |V(B') \cap V(C)| - 1 = 2(|V(B') \cap V(C)| - 1) + 1,$$

mas, para não contradizer a Afirmação 3.18,  $|C'|$  deve ser menor ou igual a  $k$ , logo,

$$k \geq |C'| \geq 2(|V(B') \cap V(C)| - 1) + 1 \Rightarrow \frac{k+1}{2} \geq |V(B') \cap V(C)|.$$

Mas,  $|V(B') \cap V(C)|$  é  $k-1$  ou  $k-2$ . Para que  $|V(B') \cap V(C)|$  seja igual a  $k-1$ ,  $u$  deve pertencer a  $C$ . Neste caso,  $\frac{k+1}{2} \geq k-1$ , logo,  $k \leq 3$ , uma contradição. Portanto, devemos assumir que  $u \notin V(C)$ . Então,  $\frac{k+1}{2} \geq k-2$ , logo,  $k \leq 5$  e, portanto,  $k = 5$ . Neste caso, alteramos a escolha de  $C'$  para  $(C - C[v_1, v_2]) \cup \{uv_1, uv_2\}$  e, conseqüentemente,  $V(C')$  contém todos os vértices de  $B'$ . Sendo assim,  $|C'| \geq k-1 + [(k-2)-1] = 2+2(k-3) \geq k+1$ , uma contradição. Logo,  $|V(B')|$  deve ser maior que  $k-1$ .

Suponhamos  $|V(B')| = k$ . Então, pela Afirmação 3.4,  $B' \cong K_k \setminus (T \cup S)$ , onde  $T$  é um emparelhamento e  $S$  é um subconjunto de arestas incidentes ao vértice  $u$  tal que  $|S| \leq k-3$  e  $V(S) \cap V(T) = \emptyset$ . Dois  $B'$ -segmentos de  $C$  consecutivos não podem ser triviais, a menos que cada um contenha o vértice separador  $u$ .

Suponhamos que  $u \notin V(C)$ . Seja  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$  a ordem  $C$ -induzida em  $V(B')$ . Sem perda de generalidade, devemos assumir que um dos seguintes casos acontece:

- (a)  $\{uv_1, uv_2\} \subseteq E(B')$  e  $d_{B'}(u) \geq 3$ ;
- (b)  $\{uv_1, uv_2\} \subseteq E(B')$  e  $d_{B'}(u) = 2$ ;
- (c)  $uv_2 \notin E(B')$ .

Se (a) acontece, seja  $C' = (C - C[v_1, v_2]) \cup \{uv_1, uv_2\}$ . Como  $u \notin V(C)$ , então não existem dois  $B'$ -segmentos triviais consecutivos. Sendo  $k \geq 5$ , existirá, pelo menos, um  $B'$ -segmento não-trivial diferente de  $C[v_1, v_2]$ , logo  $|C'| \geq k+1$  e  $B' \setminus \{uv_1, uv_2\}$  é conexo, portanto, temos uma contradição a Afirmação 3.18.

Se (b) acontece, então seja  $C' = (C - C[v_1, v_2] - C[v_3, v_4]) \cup \{v_1v_3, v_2v_4\}$ . Como  $B' - \{u\}$  é completo, exceto pela possível ausência da aresta  $v_1v_2$ , todo  $B'$ -segmento de  $C$  é não-trivial. Assim,  $|C'| \geq k+1$ . Como  $B' \setminus \{v_1v_3, v_2v_4\}$  é conexo, temos uma contradição à Afirmação 3.18.

Se (c) acontece, então  $v_2$  é adjacente em  $B'$  a todo vértice em  $V(B') - \{u\}$ . Em particular,  $v_1v_2 \in E(B')$ . Seja  $C' = (C - C[v_1, v_2]) \cup \{v_1v_2\}$ . Como  $v_2v_3 \in E(B')$ , o segmento  $C[v_2, v_3]$  é não-trivial. Além disso, pelo menos, um entre  $C[v_3, v_4]$  e  $C[v_4, v_5]$  é não-trivial, onde, possivelmente,  $v_5 = v_1$ . Assim,  $C$  tem, pelo menos, dois  $B'$ -segmentos não-triviais, diferentes de  $C[v_1, v_2]$ , logo,  $|C'| \geq |V(C) \cap V(B')| + 2 = (k - 1) + 2 = k + 1$ , uma contradição.

Sendo assim, é necessário assumir que  $u$  pertence a  $V(C)$ . Seja  $v_1, v_2, \dots, v_k$  a ordem  $C$ -induzida em  $V(B')$ . Sem perda de generalidade, devemos assumir também que uma das seguintes condições acontece:

- (a)  $v_1v_2 \in E(B')$ ;
- (b)  $v_1v_2 \notin E(B')$  e  $u \notin \{v_1, v_2\}$ ;
- (c)  $v_1v_2 \notin E(B')$  e  $u = v_2$ .

No caso (a), seja  $C' = (C - C[v_1, v_2]) \cup \{v_1v_2\}$ . Observamos que  $B' \setminus \{v_1v_2\}$  é conexo. Como  $k \geq 5$  e só podem existir apenas dois  $B'$ -segmentos triviais consecutivos, temos que existirá, pelo menos, um  $B'$ -segmento não-trivial diferente de  $C[v_1, v_2]$ , implicando que  $|C'| \geq k + 1$ , uma contradição.

No caso (b), ambos  $v_1$  e  $v_2$  são adjacentes em  $B'$  a todos os vértices de  $V(B') - \{v_1, v_2\}$ . Então, como  $v_2v_3 \in E(B')$ , o segmento  $C[v_2, v_3]$  é não-trivial. Seja  $C' = (C - C[v_1, v_2] - C[v_3, v_4]) \cup \{v_1v_3, v_2v_4\}$ . Como  $C'$  contém todos os vértices de  $B'$  e também contém o  $B'$ -segmento não-trivial  $C[v_2, v_3]$ , então  $C'$  tem comprimento, no mínimo,  $k + 1$ . Além disso,  $B' \setminus \{v_1v_3, v_2v_4\}$  é conexo, uma contradição.

No caso (c), seja  $C' = (C - C[v_1, v_2] - C[v_2, v_3]) \cup \{v_1v_3\}$ . Então,  $v_2v_1 \notin E(B')$ , logo,  $v_1v_k \in E(B')$  e, conseqüentemente,  $C[v_1, v_k]$  é não-trivial. Pelo menos, um dos  $B'$ -segmentos  $C[v_3, v_4]$  ou  $C[v_4, v_5]$  é não-trivial, porque ou a aresta  $v_3v_4$  pertence a  $E(B')$ , ou a aresta  $v_4v_5$  irá pertencer a  $E(B')$ . Assim,  $C'$  contém pelo menos dois  $B'$ -segmentos não-triviais de  $C$ , logo,  $|C'| \geq k + 1$ , o que contradiz a Afirmação 3.18.

Portanto, quando  $k \geq 5$ , todo bloco terminal de  $G \setminus C$  tem, no mínimo,  $k + 1$  vértices.  $\square$

Combinando as Afirmações 3.4 e 3.15 e a definição de  $C$ , obtemos:

**Afirmação 3.19** *Se  $B'$  é um bloco terminal de  $G \setminus C$  distinto de  $B$ , então  $B$  é um bloco de  $G \setminus C_{B'}$ . Além disso, se  $k \geq 5$ , então  $|C_{B'}| \geq k + 1$ .*

**Afirmação 3.20**  *$G \setminus C$  tem exatamente dois blocos terminais e toda aresta de  $C$  satisfaz a uma destas condições:*

- (i) *intercepta dois vértices pertencentes ao mesmo bloco terminal de  $G \setminus C$ ; ou*
- (ii) *intercepta dois vértices em diferentes blocos terminais de  $G \setminus C$  tal que nenhum destes dois vértices é um vértice-separador de  $G \setminus C$ .*

Seja  $u$  um vértice separador de  $G \setminus C$  que pertence ao bloco  $B$  e seja  $B_1$  outro bloco de  $G \setminus C$  tal que  $u$  pertence a  $V(B_1)$ . Então, em  $(G \setminus C) - u$ , os conjuntos  $V(B) - \{u\}$  e  $V(B_1) - \{u\}$  estão contidos em diferentes componentes conexas  $D$  e  $D_1$ , respectivamente. Como  $G - u$  é conexo, existe um caminho em  $C$  de  $D$  para  $D_1$  e, conseqüentemente, existe um tal caminho minimal  $P$ . Este caminho cruza um conjunto  $\mathcal{S}$  de blocos de  $G \setminus C$  tal que  $B \in \mathcal{S}$ . Além disso, todo conjunto de blocos de  $G \setminus C$  que contém  $B$  e é cruzado por um caminho em  $C$ , deve conter todos os blocos terminais de  $G \setminus C$ , caso contrário,  $B = H$  estaria contido em um bloco maior de  $G \setminus C_{B'}$ , onde  $B'$  é bloco terminal de  $G \setminus C$  e  $B' \notin \mathcal{S}$ , ou seja, teríamos uma contradição à Afirmação 3.19. Portanto, como o caminho que cruza  $\mathcal{S}$  só intercepta os blocos de  $\mathcal{S}$  em dois vértices,  $G \setminus C$  tem exatamente dois blocos terminais.

Ambos blocos terminais devem interceptar uma aresta de  $C$ . Assim, existe um caminho em  $C$  que liga um vértice em um bloco terminal a um vértice do outro. Todo tal caminho minimal tem no máximo uma aresta, caso contrário,  $C$  teria um caminho que cruza algum conjunto  $\mathcal{S}$  de blocos de  $G \setminus C$  tal que  $B \in \mathcal{S}$ , mas  $\mathcal{S}$  não contém ambos os blocos terminais, uma contradição a escolha de  $C$ . Logo, toda aresta de  $C$  ou intercepta dois vértices no mesmo bloco terminal de  $G \setminus C$ , ou intercepta vértices em dois blocos terminais distintos de  $G \setminus C$ . Pela Afirmação 3.19, uma aresta de  $C$  que tem dois vértices adjacentes em diferentes blocos terminais não intercepta vértice separador de  $G \setminus C$ .  $\square$

**Afirmação 3.21**  *$B$  e  $C$  tem, no máximo, um vértice em comum.*

Seja  $B'$  um bloco terminal de  $G \setminus C$  diferente de  $B$ . Se  $B$  e  $C$  têm mais do que um vértice em comum, então  $G[E(B) \cup C]$  está propriamente contido em um bloco de  $G \setminus C_{B'}$ , contradizendo a Afirmação 3.19.  $\square$

### 3.2 Redução ao caso que $|E(H)| = 1$

Distinguiremos os casos quando:

- (i)  $B$  não é bloco terminal de  $G \setminus C$ ; e
- (ii)  $B$  é um bloco terminal de  $G \setminus C$ .

No caso de (i) ser verdade, sejam  $v$  e  $w$  os vértices separadores de  $G \setminus C$  pertencentes aos blocos terminais  $B_v$  e  $B_w$  de  $G \setminus C$ , respectivamente. Seja  $G'$  obtido a partir de  $G$  pela exclusão da união de todos os blocos de  $G \setminus C$ , com exceção de  $B_v$  e  $B_w$ , e adicionando uma aresta ligando  $v$  e  $w$ . Seja  $H'$  o grafo  $G'[\{vw\}]$ . Suponhamos que  $|E(G')| < |E(G)|$ . Então,  $d_{G'}(v) \geq k$ , para todo  $v$  em  $V(G') - V(H')$ , e  $C$  é um circuito de  $G'$  que é aresta disjunta de  $H'$  e, quando  $k \geq 5$ ,  $|C| \geq k + 1$ . Como o  $|E(G)|$  é minimal tal que o Teorema 1.2 falha, temos que o Teorema 1.2 vale para o grafo  $G'$ , então  $G'$  tem um circuito  $C'$  que é aresta disjunta de  $H'$  tal que  $G' \setminus C'$  é 2-conexo e, quando  $k \geq 5$ ,  $|C'| \geq k + 1$ . Evidentemente,  $C'$  é um circuito de  $G$ . Além disso, como  $G \setminus C'$  pode ser escrito como a 2-soma com ponto base  $vw$  de  $G' \setminus C'$  e outro grafo 2-conexo, segue que  $G \setminus C'$  é 2-conexo, uma contradição. Concluimos que  $|E(G')| = |E(G)|$ . Portanto, se  $B$  não é bloco terminal de  $G \setminus C$ , então  $G \setminus C$  tem exatamente três blocos e  $B$ , que é igual a  $H$ , consiste de uma única aresta.

No caso de (ii) ser verdade, segue, pela Afirmação 3.21, que  $B$  e  $C$  tem exatamente um vértice em comum, digamos  $w$ . Seja  $v$  o vértice separador de  $G \setminus C$  que pertence ao outro bloco terminal  $B'$  de  $G \setminus C$ . Seja  $G'$  obtido a partir de  $G$  pela deleção da união de todos os blocos de  $G \setminus C$  diferentes de  $B'$  e adicionando uma aresta ligando  $v$  a  $w$ . Pela Afirmação 3.20, tal aresta  $vw$  não existe em  $C$ . Seja  $H' = G'[\{vw\}]$ . Se  $|E(G')| < |E(G)|$ , então, como no caso (i), obtemos uma contradição. Portanto, se  $B$  é um bloco terminal de  $G \setminus C$ , então  $G \setminus C$  tem exatamente dois blocos e  $B$  é apenas uma aresta.

O Teorema 1.2 vale, a menos que  $G \setminus C$  tenha no máximo três blocos, onde dois deles são blocos terminais e  $B$ , que é igual a  $H$ , é uma única aresta. Além disso, se  $G \setminus C$  tem exatamente três blocos,  $B$  não é bloco terminal. Suponhamos que  $G \setminus C$  tenha exatamente três blocos. Devemos refinar a escolha de  $C$  para que, dentre os possíveis candidatos de  $C$ , escolhemos o que faz com que o número máximo de arestas de um bloco de  $G \setminus C$  seja o maior possível. Seja  $B_2$  o bloco com o número máximo de arestas alcançado. Então,  $B_2$  é um bloco terminal de  $G \setminus C$ . Seja  $B_1$  o outro bloco terminal de

$G \setminus C$ . O terceiro bloco de  $G \setminus C$  é  $B$ . Pelas Afirmções 3.4 e 3.15,  $B_1$  contém um circuito  $C_1$  de  $G \setminus C$  tal que, quando  $k \geq 5$ ,  $|C_1| \geq k + 1$ . Pela Afirmção 3.5,  $G \setminus C_1$  é conexo e, claramente, tem um bloco  $B'_2$  que contém  $B_2$ . Pela escolha de  $B_2$ , segue que  $B'_2 = B_2$ . Logo,  $B_2$  tem um único vértice  $u$  em comum com  $C$  e  $u$  deve ser um vértice separador de  $G \setminus C_1$ , caso contrário, a escolha de  $B_2$  é contrariada, pois  $B_2$  deixaria de ser maximal. O único vértice em  $V(B) \cap V(B_2)$  é também um vértice separador de  $G \setminus C_1$ , que é diferente de  $u$ . Assim,  $B_2$  é um bloco de  $G \setminus C_1$  contendo, pelo menos, dois vértices separadores distintos deste grafo. Logo, em  $G \setminus C_1$ , existem, no mínimo, três blocos incluindo  $B$  e  $B_2$ . Como  $B_2$  não é um bloco terminal, deduzimos que  $G \setminus C_1$  tem um outro bloco distinto de  $B$ , que não é bloco terminal, portanto, o Teorema 1.2 vale para  $G$ , uma contradição.

Assumimos que  $G \setminus C$  tem exatamente dois blocos, um deles é  $B$  e consiste apenas de uma única aresta  $e = vw$ . Seja  $B'$  o outro bloco de  $G \setminus C$  e suponhamos que  $w$  é o vértice em comum entre  $B$  e  $B'$ . Então,  $C$  tem exatamente duas arestas interceptando  $v$ . Pelo fato de  $|C| > |E(H)|$ , o Teorema 1.2 vale para  $G$  e seu subgrafo  $C$ . Assim,  $G \setminus C'$  é 2-conexo para todos os circuitos  $C'$  de  $G$  que são arestas-disjuntas de  $C$ , ou  $G \setminus C'$  é 2-conexo para algum circuito  $C'$  com  $|C'| \geq k + 1$  quando  $k \geq 5$ . Como  $d_G(v) = 3$ , um circuito que é aresta disjunta de  $C$  em  $G$ , é também aresta disjunta de  $H$ . Devemos estabelecer uma contradição proveniente do fato de que podemos mostrar que o grafo  $G$  tem um circuito que é aresta disjunta de  $C$  e que, quando  $k \geq 5$ , este circuito pode ser escolhido de tal forma que tenha comprimento maior ou igual a  $k + 1$ .

Consideremos  $B'$ . Todo vértice deste grafo simples 2-conexo, exceto, possivelmente,  $w$ , tem grau, no mínimo,  $k - 2$ . Se  $k = 4$ , então  $G$  certamente tem um circuito que é aresta disjunta de  $C$ , temos uma contradição. Assim, devemos assumir que  $k \geq 5$ . Então, pelas Afirmções 3.4 e 3.21, obtemos uma contradição, que é  $B'$  ter um circuito de comprimento maior ou igual a  $k + 1$ , a menos que  $|V(B')| \in \{k - 1, k\}$ . No caso excepcional,  $|V(G)| \in \{k, k + 1\}$ . Como todo vértice de  $G$ , diferente de  $v$  e  $w$ , tem grau, pelo menos,  $k$ , todo tal vértice é adjacente a  $v$ . Mas,  $v$  tem grau 3 em  $G$ , logo  $5 \leq k \leq |V(G)| \leq 4$ . Esta contradição completa a prova de que o Teorema 1.2 vale quando  $|E(H)| \geq 1$ .

### 3.3 $E(H)$ é vazio

Assumimos que o Teorema 1.2 falha quando  $H$  não possui arestas. Neste caso,  $H$  é apenas um único vértice  $u$ . Seja  $e$  uma aresta incidente com  $u$ . Como o Teorema 1.2 vale quando  $H = G[\{e\}]$ , mas falha quando  $E(H) = \emptyset$ , deduzimos que  $G \setminus C$  é 2-conexo para todo circuito  $C$  tal que  $e \notin C$ . Fazendo  $e$  variar sobre todas as arestas incidentes a  $u$ , deduzimos que  $G \setminus C$  é 2-conexo para todos os circuitos  $C$  que não contém o vértice estrela  $u$ . Sendo assim, devemos assumir que  $d_G(u) = 2$ . Consideremos  $G - \{u\}$  e seja  $G_1$  um bloco especial deste grafo. Seja  $A = \{w\}$ , onde, se  $G_1 \neq G - \{u\}$ , então  $w$  é o único vértice separador de  $G - \{u\}$  em  $G_1$  e, se  $G_1 = G - \{u\}$ , então  $w$  é um vértice adjacente de  $u$  em  $G_1$ . Então,  $d_{G_1}(x) + d_{G_1}(y) \geq 2k - 1$  para todos os vértices  $x$  e  $y$  não adjacentes em  $V(G_1) - A$ . Usando o Lema 3.1, como  $k \geq 3$ , segue que  $G_1$  tem um circuito  $C_1$  de comprimento, no mínimo,  $k + 1$ . Mas,  $C_1$  é um circuito de  $G$  que é aresta disjunto do vértice estrela de  $u$ . Logo,  $G \setminus C_1$  é 2-conexo e, portanto, o Teorema 1.2 vale quando  $E(H)$  é vazio, uma contradição.

Com isso, concluímos a prova do Teorema 1.2. ■

# Capítulo 4

## Exemplos

Quando  $k \geq 5$ , o limite inferior de  $k + 1$  no comprimento de  $C$  em (ii) do Teorema 1.2 melhora o limite de  $k - 1$  no Teorema de Jackson. O exemplo a seguir nos mostra que este aprimoramento falha quando  $k = 4$ .

**Exemplo 4.1** *Seja  $G_1$  um bloco com, pelo menos, dois vértices e  $G_2$  uma cópia do  $K_{2,3}$  com classe de vértices  $\{u_1, u_2\}$  e  $\{w_1, w_2, w_3\}$ . Criamos  $G$  adicionando as arestas  $u_1u_2$  e, para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ , adicionamos duas arestas de  $w_i$  para vértices distintos  $w'_i$  e  $w''_i$  de  $G_1$ . Seja  $H$  o subgrafo induzido de  $G$  por  $E(G_1) \cup \{w_iw'_i, w_iw''_i; 1 \leq i \leq 3\}$ . Então,  $d_G(v) \geq 4$  para todo  $v$  em  $V(G) - V(H)$ , mas o maior ciclo  $C$  de  $G$  que evita  $E(H)$  e deixa  $G \setminus C$  2-conexo é um ciclo de comprimento três.*

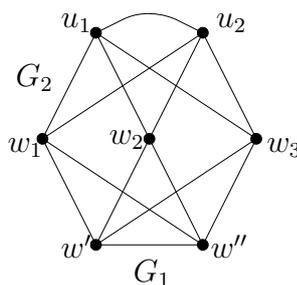


Figura 4.1:  $G$

O próximo exemplo nos revela que o limite de  $k + 1$  vértices em (ii) do Teorema 1.2 é o melhor possível.

**Exemplo 4.2** *Seja  $H$  um grafo simples, que é um bloco. Para cada  $i \in \{1, 2\}$ , sejam  $u_i, v_i$  e  $w_i$  vértices distintos em uma cópia  $G_i$  de  $K_{k+1}$ . Se  $|V(H)| = 1$ , então  $G$  é formado*

pela identificação de  $w_1$  e  $w_2$  com os únicos vértices de  $H$  e adicionando a aresta  $u_1u_2$ . Se  $|V(H)| > 1$ , então  $G$  é formado a partir de  $G_1$  e  $G_2$  pela identificação de  $w_1$  e  $w_2$  com dois vértices distintos de  $H$  e adicionando as arestas  $v_1v_2$  e  $u_1u_2$ . Em cada caso,  $G$  não tem ciclo de comprimento maior do que  $k + 1$  para o qual  $G \setminus C$  é 2-conexo e  $C \cap E(H)$  é vazio.

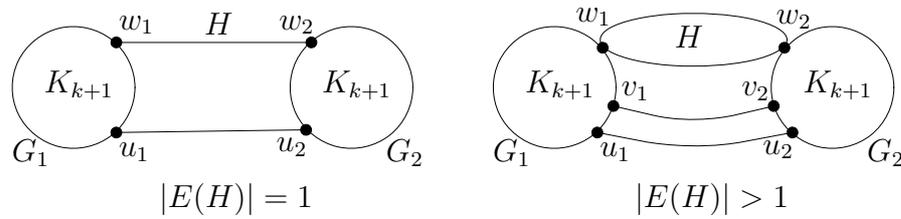


Figura 4.2:  $G$

# Referências Bibliográficas

- [1] BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph theory with applications*. New York: North-Holland, 1976.
- [2] DIESTEL, R. *Graph Theory*. New York: Springer, 1997.
- [3] EGAWA, Y. e MIYAMOTO, T. The longest cycles in a graph  $G$  with minimum degree at least  $|G|/k$ , *J. Combin. Theory Ser B*, v. 46, p. 356-362, 1980.
- [4] JACKSON, B. Removable cycles in 2-connected graphs of minimum degree at least four. *J London Math Soc (2)*, v. 21, p. 385-392, 1980.
- [5] MADER, W. Kreuzungfreie  $a, b$ -Wege in endlichen Graphen. *Abh Math Sem*, Hamburg, v. 42, p. 187-204, 1974.
- [6] OLIVEIRA, M. G. C. de. *Decomposicao de grafos planares em circuitos pares*. 1999. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal de Pernambuco.
- [7] OXLEY, J.; LEMOS, M. On Removable Circuits in Graphs and Matroids. *Journal of Graph Theory*, v. 30, p. 51-66, 1999.
- [8] WILSON, R. J., *Introduction to graph theory*. Edinburgh: Oliver & Boyd, 1972.