Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Crislene Santos da Paixão

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS COM IMPULSO DEPENDENDO DO ESTADO

Recife

2011

Crislene Santos da Paixão

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS COM IMPULSO DEPENDENDO DO ESTADO

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da UFPE, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Napoleão Rabelo

Recife

2011

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Paixão, Crislene Santos da
Equações diferenciais funcionais com impulso dependendo do estado / Crislene Santos da Paixão - Recife: O Autor, 2011.
58 folhas

Orientador: Marcos Napoleão Rabelo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2011.

Inclui bibliografia.

1. Análise (matemática). 2. Equações diferenciais com impulso. I. Rabelo, Marcos Napoleão (orientador). II. Título.

515 CDD (22. ed.) MEI2011 – 102

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: ______________________________

Marcos Napoleão Rabelo, UFPE
Orientador

____

Cláudio Rodrigo Cuevas Henriquez, UFPE

____

Fernando Antonio Nóbrega Santos, UFPE

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS COM IMPULSO DEPENDENDO DO ESTADO

POR

Crislene Santos da Paixão

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Março – 2011

A Vovô, a Lucas

e aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por ter me dado força para suportar os obstáculos que encontrei ao longo desta caminha e por tudo que conquistei.

Aos meus pais pelo apoio incondicional e por acreditarem em mim.

A Lucas por ter estado ao meu lado num dos momentos mais difícies da minha vida, por ter me dado força, ombro amigo e carinho, por ter sido um dos principais reponsáveis por essa conquista, por ter sempre acreditado em mim, por ter estado ao meu lado mesmo longe, por ter sido um verdadeiro companheiro.

Aos professores da UFS, em especial aos professores Gastão, Fábio, Alan, Kalazas e Nathanael por terem contribuido com conhecimentos matemáticos.

Às minhas amigas (Ellen, Marleide, Amanda e Bia), aos meus irmãos (Washington e Sumã) e à minha família (em especial Titia) pela torcida e componhia em diversos momentos.

Ao Prof. Dr. Marcos Rabelo, pela proposta de trabalho e orientação.

A todos os funcionários da pós-graduação, em especial Tânia e Cláudia.

Aos demais professores da UFPE pela contribuição matemática.

Aos amigos Adecarlos, Joilson, Gigi, Paulo e Marcelo por terem me ajudado nos momentos de dúvidas.

Às meninas que dividem moradia comigo, Rafa e Cleigiane, pela companhia e momentos de lazer.

E demais colegas e amigos: Renata, Erika, Tarciana, Bárbara, Danila, Anete, Charlene, Manaíra, Alan, Filipe AJU, Bruno, Clessius, Fábio, Alysson, Andé Ventura, Alejandro, Abiel, Zé, André Vinícius, Wagner, Zaqueu, Felipe Wergete, José Luiz.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nosso principal interesse neste trabalho é estudar a existência de soluções para equações diferenciais impulsivas de ordem n com o retardo dependendo do estado, da seguinte forma:

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) & = & g(t, u_{\rho(t,u_t)}), t \neq \tau_k(u(t)) \\ u^{(j)}(t^+) & = & I_{j,k}(u(t)), t = \tau_k(u(t)), j = 1, \cdots, n-1 \\ u^{(j)}(0) & = & y_j, \;\; y_j \in \mathbb{R}^n, \;\; j = 1, \cdots, n-1 \\ u_0 & = & \phi, \; \phi \in L^2(g, \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

PALAVRAS-CHAVE: equações diferenciais com impulso, retardo, ponto fixo.

ABSTRACT

The main interest in this work is to study the existence of solutions for impulsive functional differential equations of order n with the state dependent delay, as follows:

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) & = & g(t, u_{\rho(t,u_t)}), t \neq \tau_k(u(t)) \\ u^{(j)}(t^+) & = & I_{j,k}(u(t)), t = \tau_k(u(t)), j = 1, \cdots, n-1 \\ u^{(j)}(0) & = & y_j, \;\; y_j \in \mathbb{R}^n, \;\; j = 1, \cdots, n-1 \\ u_0 & = & \phi, \; \phi \in L^2(g, \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

KEYWORDS: impulsive functional differential equations, delay, fixed point.

Sumário

Introdução

O estudo de equações diferencias impulsivas tem se tornado nos últimos anos uma atraente área de pesquisa devido suas aplicações nas mais diversas áreas da ciências aplicadas. Como exemplo podemos citar o problema do controle da taxa de glicose que é injetada no corpo humano de forma eletrônica. Esse processo se dá através de um sistema de controle com realimentação de estados, onde a realimentação serve para avaliar a diferença da taxa efetiva de glicose no corpo com a taxa ideal de glicose que uma pessoa normal deva apresentar. Sempre que a diferença destas taxas fica fora dos padrões aceitos como normais uma quantidade x de insulina é injetada instantaneamente no corpo do paciente que por sua vez produz uma mudança abrupta na quantidade total de insulina no corpo do paciente. Este tipo de fenômeno é um exemplo típico de situação que pode ser modelada por meio de equações diferenciais impulsivas.

Na realidade existe uma enorme quantidade de modelos de equações diferenciais impulsivas que podem ser usados para descrever fenômenos nas mais diversas áreas das ciências aplicadas. Como exemplos podemos citar aplicações em biologia, medicina, modelos de controle ótimo em economia, sistemas de frequência modulada entre outros.

Neste trabalho mostraremos inicialmente a existência de solução para equação diferencial com impulso

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y_t), \quad t \in J = [0, T], t \neq \tau_k(y(t)), k = 1, 2, \cdots, m \\ y(t^+) &= I_k(y(t)), \quad t = \tau_k(y(t)), k = 1, 2, \cdots, m \\ y(t) &= \phi(t), \quad t \in [-\infty, 0], \end{cases} \tag{1}$$

onde $f : J \times BU((-\infty, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ é uma função dada, $\phi \in BU((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$, $\tau_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \cdots, m$ são funções que satisfazem algumas hipóteses que serão anuciadas posteriormente.

Em um segundo momento mostraremos a existência de solução para a equação diferencial com impulso:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u^{(n)}(t) & = & g(t, u_{\rho(t,u_t)}), t \neq \tau_k(u) \\ u^{(j)}(t^+) & = & I_{k,j}(u(t)), t = \tau_k(u(t)), j = 1, \cdots, n-1 \\ u^{(j)}(0) & = & y_j, \;\; y_j \in \mathbb{R}^n, \;\; j = 1, \cdots, n-1 \\ u_0 & = & \phi, \phi \in L^2(h, \mathbb{R}^n), \end{array}\right. \tag{2}$$

onde as funções $g : [0, b] \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \cdots, n$, $\rho : [0, b] \times L^2(h, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, e $I_{k,j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são dadas, y_j, $j = 1, \cdots, n$ são elementos fixos.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tem como principal objetivo inserir a linguaguem e os conceitos básicos, bem como um pouco da notação que utilizaremos no restante do trabalho.

Inicialmente definiremos o espaço L^p e listaremos algumas propriedades e resultados em relação a tal espaço, por fim enuciaremos alguns resultados que serão utilizados ao longo do texto.

1.1 Espaço L^p

1.1.1 Definição e propriedades básicas

Definição 1.1. *Sejam Ω um aberto $\mathbb{R}^n$, $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $1 \leq p$. Dizemos que $u \in L^p(\Omega)$ se as quantidades definidas abaixo são finitas.*

Para $1 \leq p < +\infty$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Para $p = +\infty$,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf\{C : |u(x)| \leq C \;\; q.t.p. \;\; em \; \Omega\}.$$

Lema 1.2. *Se* $0 \leq a, b$ *e* $\lambda \in [0,1]$, *então:*

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b. \tag{1.1}$$

Demonstração: Se $b = 0$ ou $\lambda \in \{0,1\}$ o resultado é evidente. Suponhamos $b \neq 0$ e $\lambda \in (0,1)$. Assim, a expressão (1.1) é equivalente a $t^{\lambda} \leq \lambda t + (1-\lambda)$, onde $t = a/b$. Definindo $f(t) = t^{\lambda} - \lambda t$ temos que $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ e $f''(1) < 0$, logo $f(t) \leq f(1) = (1-\lambda), \forall t \geq 0$. $\square$

Observação 1.3. *Seja* p' *definido pela relação* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. *Se no Lema 1.2 substituirmos* a, b *e* λ *por* a^p, $b^{p'}$ *e* $1/p$, *respectivamente, obtemos a desigualdade*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

conhecida como *Lema de Young*.

Teorema 1.4 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $1 < p < +\infty$ *e* p' *definidos pela relação* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. *Sejam, ainda,* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^{p'}(\Omega)$, *então* $uv \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}. \tag{1.2}$$

Ou seja, a aplicação $\Psi : L^p \times L^{p'} \to L^1$ *definida por* $\Psi(u,v)(x) = u(x)v(x)$ *é contínua.*

Demonstração: Se $\|u\|_p = 0$ ou $\|v\|_{p'} = 0$, então $u = 0$ ou $v = 0$ *q.s.* em Ω, logo $uv = 0$ q.s. em Ω e portanto $\|uv\|_1 = 0$. Suponhamos, então, $\|u\|_p \neq 0$ e $\|v\|_{p'} \neq 0$. A desigualdade (1.2) segue do Lema 1.2 escolhendo $a = \dfrac{|u|^p}{\|u\|_p^p}$, $b = \dfrac{|v|^{p'}}{\|v\|_{p'}^{p'}}$, $\lambda = \dfrac{1}{p}$ e integrando em Ω. $\square$

A desigualdade de Hölder é evidente para $p = 1$ ou $+\infty$. Além disso, ela pode ser facilmente estendida para

$$\|uv\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q, \tag{1.3}$$

onde $u \in L^p, v \in L^q$ e $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$.

E portanto, a aplicação $\Psi : L^p \times L^q \to L^r$, definida por $\Psi(u,v)(x) = u(x)v(x)$ é bilinear contínua. De fato, se $u \in L^p$ e $v \in L^q$, então

$$|u|^r \in L^{\frac{p}{r}}, |v|^r \in L^{\frac{q}{r}} \text{ e } 1 = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r}.$$

Usando a desigualdade de Hölder (1.2) obtemos

$$\|uv\|_r = \||uv|^r\|_1^{1/r} \leq \||u|^r\|_{p/r}^{1/r}\||v|^r\|_{q/r}^{1/r} = \|u\|_p\|v\|_q.$$

$\square$

Como consequência da desigualdade de Hölder temos o seguinte resultado.

Teorema 1.5 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Se* $1 \leq p \leq +\infty$ *e* $u, v \in L^p(\Omega)$, *então*

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p. \tag{1.4}$$

Demonstração: A prova para os casos $p = 1$ e $p = +\infty$ são evidentes. Suponha $1 < p < +\infty$. Sejam $u, v \in L^p$. Como L^p é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ temos que $u + v \in L^p$. Por outro lado,

$$\|u+v\|_p^p \leq \int_\Omega |u(x)+v(x)|^{p-1}|u(x)|dx + \int_\Omega |u(x)+v(x)|^{p-1}|v(x)|dx. \tag{1.5}$$

Como $p'(p-1) = p$, segue que $|u+v|^{p-1} \in L^{p'}$ e assim, aplicando a desigualdade de Hölder nas duas integrais do lado direito de (1.5) obtemos

$$\|u+v\|_p^p \leq \|u+v\|_p^{p-1}\|u\|_p + \|u+v\|_p^{p-1}\|v\|_p.$$

Portanto, $\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$. $\square$

Em virtude da desigualdade de Minkowski, $\|\cdot\|_p$ define uma norma no espaço L^p.

Sejam $u, v \in L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Temos a seguinte desigualdade:

$$\|u+v\|_p^p \leq 2^p(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_p^p &\leq (\|u\|_p + \|v\|_p)^p \\
&\leq (\max\{\|u\|_p, \|v\|_p\} + \max\{\|u\|_p, \|v\|_p\})^p \\
&\leq 2^p \max\{\|u\|_p^p, \|v\|_p^p\} \\
&\leq 2^p(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p)
\end{aligned}$$

1.1.2 Outras propriedades importantes

Além de ser um espaço vetorial normado L^p tem as seguintes propriedades:

Teorema 1.6 (Completitude). *$(L^p, \|\cdot\|_p)$ é completo e portanto um espaço de Banach para $1 \leq p \leq +\infty$ e se $p = 2$, então $(L^2, \|\cdot\|_2)$ é um espaço de Hilbert.*

Teorema 1.7 (Separabilidade). *L^p é separável para $1 \leq p < +\infty$.*

Teorema 1.8 (Reflexividade). *L^p é reflexivo para $1 < p < +\infty$ e o seu dual é o espaço $L^{p'}$, onde p' é definido pela relação $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.*

Os resultados mencionados acima podem ser encontrados em [4].

1.1.3 Resultados clássicos para integrais

Quando uma função $f \in L^p$ temos os seguintes resultados em relação a integração:

Teorema 1.9 (Teorema da Convergência Monótona). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e $(f_k)_{k\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis não-negativas tais que $f_k \leq f_{k+1}$, $\forall\ k$ e $f(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x)$ $(= \sup\limits_k f_k(x))$ para cada $x \in \Omega$. Então, $f \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f_k(x)dx.$$

Teorema 1.10 (Lema de Fatou). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e $(f_k)_{k\geq 1}$ uma sequência qualquer de funções mensuráveis não-negativas e integráveis. Então,*

$$\int_\Omega \liminf_{k\to+\infty} f_k(x)dx \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega f_k(x)dx.$$

Teorema 1.11 (Teorema da Convergência Dominada). *Seja* $(f_k)_{k\geq 1}$ *uma sequência em* $L^1(\Omega)$ *tal que*

(a) $f_k \to f$ *q.t.p. em* Ω

(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_k| \leq g$ *q.t.p. em* Ω, $\forall\ k$. *Então,* $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f_k(x)dx.$$

1.2 Outros Resultados

1.2.1 Teoremas de Existências

Teorema 1.12. *Assuma que as seguintes condições sejam válidas.*

(a) $f : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *é contínua em* $t \neq \tau_k(y)$, $k = 1, 2, \cdots$, *e para cada* $(t, x) \in [0,\infty) \times \Omega$, *existe uma função positiva* $l(\cdot) \in L^1_{loc}([0,\infty))$ *e uma vizinhaça* $V_{(t,x)}$ *de* (t, x) *tal ques*

$$\|f(s, y)\| \leq l(s),$$

para todo $(s, y) \in V_{(t,x)}$.

(b) Se $t_1 = \tau_k(x_1)$, *para algum* $(t_1, x_1) \in [0,\infty) \times \Omega$ *e* $k = 1, 2, \cdots$, *então existe* $\delta > 0$ *tal que* $t \neq \tau_k$ *para* $t_1 < t < t_1 + \delta$ *e* $\|x - x_1\| < \delta$.

Então para cada $(t_0, x_0) \in [0,\infty) \times \Omega$, *existe uma solução* $x : (t_0, t_0 + a) \to \Omega$ *do problema de valor inicial (1), para algum* $a > 0$.

Teorema 1.13. *Suponha as seguintes condições:*

(a) $f : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *uma função contínua.*

(b) As funções $\tau_k : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ *são funções diferenciáveis para todo* $k \in \mathbb{N}$.

(c) Se $t_1 = \tau_k(x_1)$*, para algum* $(t_1, x_1) \in [0, \infty) \times \Omega$*, e* $k \in \mathbb{N}$*, então existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\langle \nabla \tau_k(x), f(t, x) \rangle \neq 1,$$

para todo $(t, x) \in (t_1, t_1 + \delta) \times B_\delta(x_1)$.

Então para todo $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \Omega$*, existe uma solução* $x : [t_0, t_0 + \alpha) \to \mathbb{R}^n$ *do problema (1), para algum* $\alpha > 0$.

Teorema 1.14. *Assuma as seguintes hipóteses:*

1. $f : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *é contínua.*

2. *Para todo* $k \in \mathbb{N}$*, as funções* $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*,* $\tau_k : \Omega \to [0, \infty)$ *são contínuas.*

Suponha ainda que uma das seguintes condições são válidas.

(a) Se $t_1 = \tau_k(x_1)$*, para algum* $(t_1, x_1) \in [0, \infty) \times \Omega$ *e* $k \in \mathbb{N}$*, então existe* $\delta > 0$ *tal que* $t \neq \tau_k(x)$*, para todo* $(t, x) \in (t_1, t_1 + \delta) \times B_\delta(x_1)$.

(b) Se $t_1 = \tau_k(x_1)$*, para algum* $(t_1, x_1) \in [0, \infty) \times \Omega$ *e* $k \in \mathbb{N}$*, então* $t_1 \neq \tau_j(x_1 + I_k(x_1))$*, para todo* $j \in \mathbb{N}$.

(c) Se $\tau_k \in C^1(\Omega, [0, \infty))$*,* $k \in \mathbb{N}$ *e* $t_1 = \tau_{k_0}(x_1)$*, para alguma* $(t_1, x_1) \in [0, \infty) \times \Omega$ *e* $k_0 \in \mathbb{N}$*, então* $t_1 = \tau_j(x_1 + I_{k_0}(x_1))$ *para algum* $j \in \mathbb{N}$ *e*

$$\langle \nabla \tau_j(x_1 + I_{k_0}(x_1)), f(t_1, x_1 + I_{k_0}(x_1)) \rangle \neq 1.$$

Então, se $x : [t_0, b) \to \mathbb{R}^n$ *é uma solução de (1), onde* $[t_0, b)$ *é o intervalo maximal de* $x(t)$ *com* $b \in [0, \infty)$*,* $b > t_0$*, temos*

$$\lim_{t \to b^-} \|x(t)\| = \infty.$$

1.2.2 Teorema do Ponto Fixo de Leray-Schauder

Definição 1.15. *Seja* $F : X \to X$ *uma aplicação qualquer. Dizemos que um elemento* $x \in X$ *é ponto fixo de* F *quando* $F(x) = x$.

Definição 1.16. *Seja* X *um espaço de Banach. Dizemos que* $A \subset X$ *é relativamente compacto quando seu fecho é compacto.*

Definição 1.17. *Seja* X *um espaço de Banach. Dizemos que um operador* N, $(N : X \to X)$ *é completamente contínuo quando* N *leva conjunto limitado em conjunto relativamente compacto.*

Teorema 1.18 (Teorema de Leray-Schauder)**.** *Seja* X *um espaço de Banach e* $N : X \to X$ *completamente contínuo. Se* $\mathcal{E}(N) = \{y \in X; y = \lambda N(y),\ \text{para algum } 0 < \lambda < 1\}$ *é limitado, então* N *tem um ponto fixo.*

1.2.3 Teorema de Arzelá-Ascoli

Teorema 1.19. *Sejam* M, N *espaços métricos. Se* $M = \cup K_i$ *é uma reunião enumerável de compactos, com* $K_i \subset intK_{i+1}$ *para cada* i*, então um conjunto* $E \subset C_c(M; N)$ *é relativamente compacto se, e somente se:*

1. *E é equicontínuo*

2. *$E(x) \subset N$ é relativamente compacto, para cada $x \in M$*

Capítulo 2

Equações Diferenciais Impulsivas de Primeira Ordem com Retardo Dependendo do Estado

Recentemente em [3] um resultado de existência para uma classe de equações diferenciais impulsivas com tempo dependendo do estado e retardo finito foi estabelecido. Pretendemos neste capítulo estabelecer um resultado similiar para uma classe mais geral de equações, a saber, equações diferenciais de ordem n com retardo ilimitado.

Equações diferenciais funcionais, são geralmente modeladas de tal forma que as condições iniciais do problema pertençam há algum espaço de funções apropriado. Em [3] os autores consideraram o espaço das funções contínuas definidas em um intervalo compacto de $\mathbb{R}$.

Existe uma teoria que trata de forma bastante geral esses espaços de funções, conhecidos como espaços de fase, nos quais o exemplo usado em [3] é um caso particular. Para maiores detelhes sobre tais espaços e suas propriedades, referimos ao leitor a seguinte literatura: [8].

Iniciaremes este capítulo com uma seção de preliminares onde introduziremos as notações, definições e resultados que serão usados para estabelecermos o principal resultado deste trabalho.

2.1 Resultados de Análise Não Linear

Nesta seção introduziremos algumas definições, conceitos e resultados concernentes à teoria de medida e integração de funções que assumem valores em espaços de Banach E.

2.1.1 Mensurabilidade e Integrabilidade

Definição 2.1. *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, isto é, Ω é uma conjunto não vazio, $\mathcal{A}$ é a $\sigma-$álgebra dos subconjuntos mensuráveis de Ω e $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ uma medida positiva. Dizemos que um conjunto $Z \subset \Omega$ é de medida nula se $\mu(Z) = 0$. Dizemos que uma propriedade $\mathfrak{P}$ é válida em quase toda parte, abreviadamente q.t.p, se existe um $Z \subset \mathcal{A}$, $\mu(Z) = 0$ tal que $\mathfrak{P}$ é válida para todo $x \in \Omega \setminus Z$.*

Uma função $y : \Omega \to E$ é dita ser uma função passo se existirem $x_i \in \Omega,\ x_i \neq x_j,\ i \neq j,\ i = 1, \cdots, n,\ n \in \mathbb{N}$, tal que $y(x) \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ para todo $x \in \Omega$, e para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $y^{-1}(x_i)$ é um conjunto mensurável. Neste caso toda função passo y pode ser escrita da forma

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} x_i,$$

onde $A_i = y^{-1}(x_i)$ é um conjunto mensurável e χ_A representa a função característica do conjunto A.

Definição 2.2. *Seja $y : \Omega \to E$ uma função passo. A integral de y sobre o conjunto Ω é dada pela igualdade*

$$\int_\Omega y d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) x_i.$$

A próxima definição estabelece o conceito de funções mensuráveis.

Definição 2.3. *Dizemos que uma função $y : \Omega \to E$ é uma função mensurável, se existe uma sequência de funções passo $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $y_n(x) \to y(x)$, quando $n \to \infty$ para quase todo $x \in \Omega$.*

Uma função $y : \Omega \to E$ é uma função $\mu-$integrável se existe uma sequência de funções passo $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $y_n(x) \to y(x)$, quando $n \to \infty$ para quase todo $x \in \Omega$ e

$$\int_{\Omega} \| y_n(x) - y_m(x) \|_E \, d\mu \longrightarrow 0, \ n, \ m \to \infty. \tag{2.1}$$

A sequência $(y_n)_{i=1}^{\infty}$ que aparece em (2.1) é chamada de sequência aproximadora de y.

Definição 2.4. *Seja $y : \Omega \to E$ uma sequência $\mu-$mensurável e $(y_n)_{i=1}^{\infty}$ uma sequência aproximadora de y, então definimos a integral de y sobre Ω como*

$$\int_{\Omega} y = \int_{\Omega} y d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} y_n d\mu.$$

É possível mostrar que a integral de y definida em 2.4 não depende da sequência aproximadora $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.

Observação 2.5. *Segue diretamente da Definição 2.4 que uma função $\mu-$integrável é uma função $\mu-$mensurável.*

Denotaremos por $L^1(\Omega, E)$ o conjunto de todas as funções $y : \Omega \to E, \ \mu-$integráveis. É bem conhecido que $L^1(\Omega, E)$ é um espaço vetorial com respeito a soma de funções e multiplicação por escalar e completo com respeito à semi-norma

$$\| y \|_{L^1(\Omega,E)} = \int_{\Omega} \| y \|_E \, d\mu.$$

Uma função $y \in L^1(\Omega, E)$ é tal que se $\| y \|_{L^1(\Omega,E)} = 0$ se $y(x) = 0$ para quase todo $x \in \Omega$. Segue disto que se fizermos a identificação $y_1(x) = y_2(x)$ para quase todo $x \in \Omega$, então $(L^1(\Omega, E), \| \cdot \|)$ é um espaço de Banach.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue mensurável, $\mathcal{A}$ uma $\sigma-$álgebra dos subconjuntos Lebesgue mensuráveis de Ω e E um espaço de Banach. Dizemos que uma função $y : \Omega \to E$ é fortemente mensurável se y é $\mu-$mensurável, onde μ representa a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$. É importante observar que toda função $y : \Omega \to E$ fortemente mensurável é mensurável com respeito a medida de Lebesgue μ. A recíproca é verdadeira se E for um espaço de Banach separável, conforme [9].

Definição 2.6. *Dizemos que $y : \Omega \to E$ é uma função Bochner integrável se y é $\mu-$integrável, ou seja, se $y \in L^1(\Omega, E)$. No caso em que $E = \mathbb{R}^n$, e $\mu(\Omega) < \infty$, então y é Bochner integrável se e somente se y é Lebesgue integrável, conforme [12].*

Para obter nossos resultados de existência de soluções precisamos garantir que a composta de funções fortemente mensuráveis é uma função mensurável. O próximo exemplo mostra que apenas a condição de mensurabilidade não é suficiente para estabelecer um resultado de composição de funções mensuráveis.

Exemplo 2.7. *Seja $D \in [0,1]$ um subconjunto que é Lebesgue não mensurável. Defina a seguinte função*

$$f(t,x) = \begin{cases} 1 & se\ x > t\ ou\ x = t\ e\ x \in D, \\ 0 & se\ x < t\ ou\ x = t\ e\ x \neq D, \end{cases}$$

É fácil perceber que a função $t \to f(t,x),\ t \in \mathbb{R}$ é mensurável para cada $x \in D$, e que $x \to f(t,x),\ x \in \mathbb{R}$ é contínua em quase toda parte. Entretanto se tomarmos $y(t) = t,\ t \in [0,1]$ vemos que $t \to f(t,t) = \chi_D$ é uma função não mensurável.

Para enunciarmos o próximo Teorema precisamos da seguinte definição.

Definição 2.8. *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, U um subconjunto mensurável de Ω e V um subconjunto de um espaço de Banach E. Dizemos que $f : U \times V \to E$ é uma função do tipo Carathéodory se as seguintes condições são válidas.*

(c1) $f(\cdot, z)$ é uma função $\mu-$mensurável para cada $z \in V$.

(c2) $f(t, \cdot)$ é uma função contínua para quase todo $t \in U$.

O próximo Teorema desempenha um papel fundamental no desenvolvimento de nossos resultados sendo sua demonstração bastante simples. Entretanto, visando a comodidade do leitor decidimos incluir a demonstração desse resultado.

Teorema 2.9. *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, U um subconjunto mensurável de Ω e V um subconjunto de E. Seja $f : U \times V \to E$ uma função do tipo Caratheódory. Se $y : U \to V$ é uma função mensurável, então $f(\cdot, y(\cdot))$ é uma função mensurável.*

Demonstração: Como $y(\cdot)$ é uma função mensurável, existe uma sequência de funções passo $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $y_n(z) \to y(z)$ para quase todo $z \in U$. Da condição (*c1*), $t \to f(t, y_n(t))$ é uma função mensurável, mais ainda, a condição (*c2*) permite concluir que $f(t, y_n(t)) \to f(t, y(t))$ para quase todo $t \in U$. Assim a prova que a composta $f(\cdot, y(\cdot))$ é uma função mensurável está completa.

2.2 Bochner Integrabilidade e Diferenciabilidade q.t.p

Neste trabalho estamos interessados em estudar a existência de soluções de equações diferenciais impulsivas. Diante disto precisamos lidar com um conceito adequado de diferenciabilidade.

Definição 2.10. *Seja* $(E, \|\cdot\|_E)$ *um espaço de Banach e* $J = [a, b]$, $a < b$, *um intervalo arbitrário. Dizemos que uma aplicação* $y : [a, b] \to E$ *é absolutamente contínua se para cada* $\epsilon > 0$ *corresponde um* $\delta > 0$ *tal que para qualquer sequência* $[a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$, *de intervalos disjuntos de* J *com* $\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta$ *temos que* $\sum_{j=1}^{n} \| y(b_j) - y(a_j) \|_E < \epsilon$

Definição 2.11. *Dizemos que uma função* $y : [a, b] \to E$ *é Lipschitz contínua, se existe uma constante* $M > 0$ *tal que*

$$\| y(t) - y(s) \| \leq M|t - s|,$$

para todo t, $s \in [a, b]$.

A próxima definição estabelece o conceito de diferenciabilidade que será usado daqui por diante.

Definição 2.12. *Uma função* $y : [a, b] \to E$ *é diferenciável em um ponto* $t \in (a, b)$, *se existe* $z \in E$ *tal que*

$$\| \frac{y(s) - y(t)}{s - t} - z \| \to 0, \tag{2.2}$$

quando $s \to t$. *Neste caso denotamos* $z = y'(t)$ *e dizemos que* z *é a derivada de* y *no ponto* t. *Se* $t \in [a, b)$ *e (2.2) for válida quando* $s \to t^+$, *dizemos que* z *é a derivada à direita de* y *no ponto* t *e denotamos por* $z = y'_+(t)$. *Da mesma forma usaremos a notação* $z = y'_-(t)$ *para designar a derivada à esquerda de* y *no ponto* t.

Definição 2.13. *Dizemos que a função $y : [a, b] \to E$ é diferenciável no intervalo $[a, b]$, se $y(\cdot)$ é diferenciável em (a, b) e $y'_+(a)$ e $y'_-(b)$ existem e são finitos. Em particular se $y'(t)$ existe em quase toda parte, dizemos que y é diferenciável q.t.p. em $[a, b]$.*

Observação 2.14. *Se $y : [a, b] \to E$ é diferenciável q.t.p., definiremos $y'(t) = 0$ em todos os pontos onde y é não diferenciável.*

O próximo resultado pode ser encontrado em [13].

Lema 2.15. *Seja $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua, então $u(\cdot)$ é diferenciável em quase toda parte, $u'(\cdot)$ é Lebesgue integrável e*

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(s)ds, \ t, t_0 \in [a, b].$$

Se $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Lebesgue integrável, $t_0 \in [a, b]$ e $u(t) = \int_{t_0}^{t} v(s)ds, \ t \in [a, b]$, então $u(\cdot)$ é absolutamente contínua e $u'(t) = v(t)$, para quase todo $t \in [a, b]$.

O próximo resultado estende o Teorema Fundamental do Cálculo no caso onde $u(\cdot)$ assume valores em um espaço de Banach E.

Teorema 2.16. *Sejam $u, \ v : [a, b] \to E, \ t_0 \in [a, b]$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *$u(\cdot)$ é absolutamente contínua e diferenciável em quase toda parte, e*

$$u'(t) = v(t),$$

para quase todo $t \in [a, b]$.

(b) *$v(\cdot)$ é Bochner integrável e*

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)ds, \ t, \ t_0 \in [a, b].$$

2.3 Equações diferenciais com tempo variado

Nesta seção estudaremos a existência de soluções para problemas da seguinte forma

$$\begin{cases} y_i'(t) &= \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{t} a_{ij}(s-t)y_j(s)ds, \ t\in[0,T], \\ & \quad t \neq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij}g_{jk}(y_j(t)), \ i=1,\ldots,n, \ k=1,2,\cdots,m \\ y_i(t^+) &= \mathfrak{b}_{ki}y_i(t), \ t=\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij}g_{jk}(y_j(t)), \ k=1,2,\cdots,m \\ y_{0i} &= \phi_i, \ \phi_i\in\mathcal{BU}((-\infty,0];\mathbb{R}), \ i=1,\ldots,n \ ; \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $\mathfrak{b}_{ki}, \ b_{ij}, \ i=1,\ldots,n, \ k=1,\ldots,m$ são números reais; $a_{ij}:(-\infty,0]\to\mathbb{R}, \ g_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \ j=1,\ldots,n$, são funções apropriadas; $\mathcal{BU}((-\infty,0];\mathbb{R})$ é o conjunto formado pelas funções $\varphi:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$, tal que $\varphi(\cdot)$ é uniformemente contínua e limitada em $(-\infty,0]$ equipado com a norma do supremo, $\parallel\varphi\parallel_{\mathcal{B}}=\sup_{\theta\leq 0}|\varphi(\theta)|$.

Se $I\in\mathbb{R}$ é um intervalo, denote por $\mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ o conjunto formado pelas funções contínuas definidas em I com valores em $\mathbb{R}^n$ e para uma sequência finita de pontos $(t_i), \ t_i\in(0,T), \ t_i<t_{i+1}, \ i=0,\ldots,n$, onde $t_0=0$ e $t_{n+1}=T$ para algum $n\geq 0$, considere o conjunto

$$\Omega = \Big\{x:(-\infty,T]\to\mathbb{R}^n; y|(-\infty,0]\in\mathcal{BU}((-\infty,0],\mathbb{R}^n), y(\cdot)\in\mathcal{C}((t_i,t_{i+1}];\mathbb{R}^n) \\ \text{e } y(t_i^+)<\infty \ \text{ para todo } \ i=0,\ldots,n\Big\} \tag{2.4}$$

Podemos transformar (2.3) em um sistema abstrato. Para isto consideremos as seguintes funções, $f:[0,T]\times\mathcal{BU}((-\infty,0];\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n, \ \tau_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, \ I_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, dadas respectivamente por

(i1) $f(t,\varphi)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{0} a_{ij}(s-t)\varphi_j(s)ds, \ i=1,\ldots,n.$

(ii2) $\tau_k(x)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij}g_{jk}(x_j), \ i=1,\ldots,n, \ k=1,\ldots,m.$

(iii3) $I_k(x)=diag(\mathfrak{b}_{k1},\ldots,\mathfrak{b}_{kn})x, \ k=1,\ldots,m$, onde

$$diag(\mathfrak{b}_{k1}, \ldots, \mathfrak{b}_{kn}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{b}_{k1} & & \ldots & 0 \\ 0 & \mathfrak{b}_{k2} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & \mathfrak{b}_{kn} \end{pmatrix}.$$

Usando as notações anteriores o problema (2.3) assume a forma abstrata

$$\begin{cases} y'(t) & = & f(t, y_t), \ t \in [0,T], \ t \neq \tau_k(y(t)), \ k = 1, 2, \cdots, m, \\ y(t^+) & = & I_k(y(t_k)), \ t = \tau_k(y(t)), \ k = 1, 2, \cdots, m, \\ y_0 & = & \phi, \ \phi \in \mathcal{B}, \end{cases} \tag{2.5}$$

onde $\mathcal{B} = \mathcal{BU}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$.

O espaço $\mathcal{B} = \mathcal{BU}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$ é um caso particular de uma teoria mais geral que engloba uma enorme quantidade de espaços de fase. Para maiores detalhes, exemplos e propriedades destes espaços referimos ao leito o Livro [8].

Como foi dito anteriormente, modelaremos nossos problemas no espaço $\mathcal{B} = \mathcal{BU}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$. Não é nosso interesse fazermos uma descrição detalhada sobre espaços de fase. Entretanto, para um melhor entendimento da teoria de equações funcionais faremos um breve comentário sobre a teoria geral de espaços de fase.

Seja E um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{B}$ o espaço de funções $\varphi : (-\infty, 0] \to E$ munido com uma seminorma $\| \cdot \|_{\mathcal{B}}$ e se $x : (-\infty, T] \to E, \ T > 0$, é uma função com valores em E, então $x_t : (-\infty, 0] \to E$ denota a história da função y e sua definição é dada por $y_t(\theta) = y(t + \theta), \ \theta \leq 0$.

Neste trabalho assumiremos as seguintes condições sobre o espaço de fase $\mathcal{B}$.

Se $y : (-\infty, T] \to E, \ T > 0$ é uma função tal que $y_0 \in \mathcal{B}, \ y|[0, T] \in \mathcal{PC}([0, T], E)$, então as seguintes condições são válidas:

(b1) $x_t \in \mathcal{B}$, para todo $t \in [0, T]$.

(b2) Existe uma constante positiva $H > 0$ tal que $\| x(t) \| \leq H \| x_t \|_{\mathcal{B}}$ para todo $t \in [0, T]$.

(b3) $\| x_t \| \leq K(t) \sup_{s \in [0,t]} \| x(s) \| + M(t) \| x_0 \|$, onde $K(\cdot), \ M(\cdot) : [0, \infty) \to [0, \infty)$ são funções respectivamente contínua e localmente limitada.

Como exemplo consideremos $\mathcal{B} = \mathcal{BU}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$. Mostraremos que $\mathcal{B}$ satisfaz as condições $(b1) - (b3)$. Para isto, seja $y : (-\infty, T] \to \mathbb{R}^n,\ T > 0$ uma função tal que $y_0 = \varphi \in \mathcal{BU}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$ e $y|[0, T] \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}^n)$. Assim temos que,

$$\begin{aligned}
\| y_t \|_{\mathcal{B}} &= \sup_{\theta \in [-r,0]} |y(t+\theta)| \\
&\leq \sup_{s \in [0,t]} |y(s)| + \sup_{s \in (-\infty,0]} |\varphi(s)| \\
&= \sup_{s \in [0,t]} |y(s)| + \| \varphi \|_{\mathcal{B}} .
\end{aligned}$$

Usando que $y(\cdot)|[0, T] \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}^n),\ \varphi(\cdot)|(-\infty, 0] \in \mathcal{BU}((-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$, os cálculos anteriores mostram que y satisfaz a condição $(b1)$ e que as funções $K(\cdot)$ e $M(\cdot)$ que aparecem em $(b3)$ são dadas respectivamente por

$$K(t) = 1 \text{ e } M(t) = 1, \tag{2.6}$$

para todo $t \in [0, T]$. Segue de

$$|\varphi(0)| \leq \sup_{\theta \in (-\infty,0]} |\varphi(\theta)| = \| \varphi \|_{\mathcal{B}},$$

que a condição $(b2)$ é válida e que neste caso $H = 1$.

Neste trabalho o seguinte conceito de solução para o problema (2.5) será usado.

Definição 2.17. *Dizemos que $y : (-\infty, T) \to \mathbb{R}^n,\ T > 0$, é uma solução do problema (2.5) se as seguintes condições forem válidas:*

(s1) *$y(t)$ é diferenciável, $y'(t) = f(t, y_t)$ para quase todo $t \in (0, T)$, e $t \neq \tau_k(y(t)),\ k = 1, \ldots, m$.*

(s2) *Se $t = \tau_k(y(t))$ para algum $t \in (0, T)$ e $k = 1, \ldots, m$, então $y(t^+) = I_k(y(t))$.*

(s3) *$y_0 = \varphi,\ \varphi \in \mathcal{B}$.*

O resultado a seguir estabelece em que condições o problema (2.5) possui uma solução.

Teorema 2.18. *Assuma que as seguintes condições são válidas:*

(c1) *$\tau_k(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),\ 0 < \tau_k(x) < \tau_{k+1}(x) < T$ para todo $k = 1, \cdots, m$, e $x \in \mathbb{R}^n$.*

(c2) *Existem constantes positivas* c_k, *tal que* $\| I_k(x) \| \leq c_k$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $k = 1, \ldots, m$.

(c3) *Existe uma função não decrescente* $\psi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ *e uma função* $p \in L^1([0, T]; [0, \infty))$ *tal que*

$$\| f(t, \varphi) \| \leq p(t)\psi(\| \varphi \|_{\mathcal{B}}),$$

para quase todo $t \in [0, T]$ *e para todo* $\varphi \in \mathcal{B}$. *Mais ainda, a seguinte condição é válida*

$$\int_{\|\varphi\|}^{\infty} \frac{ds}{\psi(s)} = \infty.$$

(c4) *Para todo* $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ *e toda* $\varphi \in \mathcal{PC}$, *temos*

$$\langle \nabla \tau_k(x), f(t, \varphi) \rangle \neq 1, \;\; k = 1, 2, \cdots, m$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *denota o produto escalar em* $\mathbb{R}^n$.

(c5) *Para todo* $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau_k(I_k(x)) \leq \tau_k(x) < \tau_{k+1}(I_k(x))$, $k = 1, 2 \ldots, m$.

Demonstração. Para $\varphi \in \mathcal{B}$ fixa, analisaremos a existência de uma solução $y(\cdot)$ q.t.p. diferenciável para o problema

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y_t), \quad t \in [0, T] \\ y(t) &= \phi(t), \qquad t \in (-\infty, 0]. \end{cases} \tag{2.7}$$

Considere o conjunto

$$\Omega_\phi = \left\{ x : (-\infty, T] \to \mathbb{R}^n; \; x_0 = \phi, \; x(\cdot)|[0, T] \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}^n) \right\}.$$

Sobre Ω_ϕ considere o operador N:

$$N(x)(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in (-\infty, 0] \\ \phi(0) + \displaystyle\int_0^t f(s, x_s) ds, & t \in [0, T] \end{cases}$$

Se $x \in \Omega_\phi$, então $t \to x_t$ é uma função mensurável para todo $t \in [0, T]$. Pelo Teorema 2.9 a composta $t \to f(t, x_t)$ também é mensurável. Considere a função $\mu_x(t) = \sup\limits_{s \in [0,t]} \| x(s) \| + \| \varphi \|_{\mathcal{B}}$. Usando a condição $(c3)$ temos:

$$\| f(t, x_t) \|_{\mathbb{R}^n} \;\; \leq \;\; p(t)\psi(\| x_t \|_{\mathcal{B}}) \leq p(t)\psi(\mu_x(t)). \tag{2.8}$$

Como $p(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ e $\mu_x(\cdot)$ são funções contínuas, decorre do cálculo anterior que N está bem definido com valores em Ω_ϕ.

Sabemos da teoria de equações diferenciais que, encontrar uma solução de (2.7) é equivalente a encontrar um ponto fixo para o operador N. Assim para encontrarmos um ponto fixo para N usaremos o Teorema 1.18. Mostraremos que N é completamente contínuo que as soluções da equação $y = \lambda N(y)$ são limitadas para todo $\lambda \in (0,1)$. Começaremos pela continuidade de N.

Seja $x_n,\ x \in \Omega_\phi$ com $x_n \to x$ em Ω_ϕ. Da condição $(b3)$ dos axiomas de Espaço de fase, temos que $(x_n)_t \to x_t$ para quase todo $t \in [0,T]$. Por outro lado, a condição $(c2)$ da Definição (2.8) implica que $f(t,(x_n)_t) \to f(t,x_t)$, para quase todo $t \in [0,T]$. Por outro lado da desigualdade (2.8) e do Teorema da convergência dominada de Lebesgue temos que

$$\int_0^t f(s,(x_n)_s)ds \to \int_0^t f(s,x_s)ds,$$

quando $n \to \infty$. Assim podemos concluir que $N(x_n) \to N(x)$, o que prova a continuidade de N.

No que segue mostraremos que N aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados de Ω_ϕ. Seja $q > 0$ e considere $B_q := \{y \in \Omega_\phi;\ \| y \| \leq q\}$. Segue da condição $(c3)$ que

$$\begin{aligned}
\| N(y)(t) \| &\leq \| \phi(0) \| + \int_0^t \| f(s,y_s)ds \| \\
&\leq \| \phi \|_{\mathcal{B}} + \int_0^t p(s)\psi(\| y_s \|)ds \\
&\leq \| \phi \|_{\mathcal{B}} + \int_0^t p(s)\psi(\mu_y(s))ds \\
&\leq \| \phi \|_{\mathcal{B}} + \psi(q + \| \phi \|_{\mathcal{B}}) \int_0^t p(s)ds,
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$. Assim,

$$\| N(y) \|_\infty \leq \| \phi \|_{\mathcal{B}} + \psi(q + \| \phi \|_{\mathcal{B}}) \int_0^T p(s)ds := l$$

Para mostrar que N é um operador completamente contínuo resta provar que N leva conjuntos limitados em conjuntos equicontínuos de Ω_ϕ.

Analisaremos a equicontinuidade de N apenas no caso onde $t \in [0,T]$. Os demais casos segue diretamente da continuidade uniforme de ϕ e da integrabilidade de $f(t,\phi)$. Assim para

$t \in [0,T]$ fixado considere o conjunto $B_q(t) = \{y(t); y(\cdot) \in B_q(t)\}$, então para $h > 0$ temos

$$\begin{aligned}
\| N(y)(t) - N(y)(t+h) \| &= \| \int_0^t f(s,y_s)ds - \int_0^{t+h} f(s,y_s)ds \| \\
&= \| \int_t^{t+h} f(s,y_s)ds \| \\
&\leq \int_t^{t+h} \| f(s,y_s) \| ds \\
&\leq \psi(q + \| \phi \|_{\mathcal{B}}) \int_t^{t+h} p(s)ds.
\end{aligned}$$

O caso onde $h < 0$ é tratado de forma similar. Isto mostra a equicontinuidade de N. Pelo teorema de Arzela-Ascoli, logo $N(B)$ é relativamente compacto, o que implica que N é completamente contínuo.

Nosso próximo passo será mostrar que o conjunto

$$\mathcal{E}(N) := \{y \in \Omega_\phi; y = \lambda N(y),\ \lambda \in (0,1)\}$$

é limitado.

Seja $y \in \mathcal{E}(N)$. Então $y = \lambda N(y)$, para algum$\lambda \in (0,1)$. Usando novamente a condição (*c3*) temos

$$\begin{aligned}
\| y_\lambda(t) \| &\leq \| \phi \| + \int_0^t \| f(s,y_s^\lambda) \| ds \\
&\leq \| \phi \| + \int_0^t p(s)\psi(\|y_s^\lambda\|)ds,\ t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Usando o fato que $\psi(\cdot)$ é uma função não-decrescente temos que $\|y_\lambda(t)\| \leq \mu_{y^\lambda}(t) = \| \phi \| + \int_0^t p(s)\psi(\|y_s^\lambda\|)ds$, implica

$$\mu_{y^\lambda}(t) \leq 2 \| \phi \| + \int_0^t p(s)\psi(\mu_{y^\lambda}(s))ds,\ t \in [0,T]. \tag{2.9}$$

Considerando a função

$$\beta_{y^\lambda}(t) = 2 \| \phi \| + \int_0^t p(s)\psi(\mu_{y^\lambda}(s))ds$$

e usando (2.9) e juntamente com o fato que $\psi(\cdot)$ é uma função não-decrescente, temos

$$\beta_{y^\lambda}(t) \leq 2 \| \phi \| + \int_0^t p(s)\psi(\beta_{y^\lambda}(s))ds,$$

o que é equivalente à seguinte desigualdade diferencial

$$\beta'_{y^\lambda}(t) \;\; \leq \;\; p(t)\psi(\beta_{y^\lambda}(t)),$$

para todo $t \in [0, T]$. Integrando de 0 até t a expressão anterior e usando a segunda parte da condição (*c3*) temos,

$$\int_{\beta_{y^\lambda}(0)}^{\beta_{y^\lambda}(t)} \frac{ds}{\psi(s)} \;\; \leq \;\; \int_0^t p(s)ds \;\; < \int_{\beta_{y^\lambda}(0)}^{\infty} \frac{ds}{\psi(s)},$$

para todo $t \in [0, T]$. Segue do Teorema 3.4.6 da referência [2] que o conjunto $\left\{\beta_{y^\lambda}(\cdot),\ \lambda \in (0,1)\right\}$ é limitado, o que implica que $\mathcal{E}(N)$ é um conjunto limitado. Pelo Teorema 1.18 temos que N possui um ponto fixo $y : (-\infty, T] \to \mathbb{R}^n$ solução de (2.7). Fazendo $y_1(t) = y(t),\ t \in [0, T]$ e considerando a função

$$r_{k,1}(t) = \tau_k(y_1(t)) - t,\ \text{para } t \in [0, T],$$

segue da condição (*c1*) que $r_{k,1}(0) = \tau_k(y_1(0)) = \tau_k(y(0)) > 0,$ para todo $k = 1, 2, \cdots, m$. Levando em consideração que $r_{k,1}(t) > r_{j,1}(t)$ para $k \geq j$ e $t \in [0, T]$, se $r_{1,1}(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, T]$ e $k = 1, 2, \cdots, m$, temos que $y_1 : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ é uma solução do problema (2.3), pois $t \neq \tau_k(y_1(t)),\ t \in [0, T]$ e $k = 1, 2, \cdots, m$[1].

Por outro lado, se $r_{1,1}(t) = 0$ para algum $t \in [0, T]$, seja $t_1 = \inf\{t \in [0, T]; r_{1,1}(t) = 0\}$. Segue da condição (*c1*) e da continuidade de $r_{1,1}(\cdot)$ que $t_1 \in (0, T]$. Vê-se facilmente que $r_{1,1}(t_1) = 0$ e $r_{1,1}(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, t_1]$, ou seja $\tau_1(y_1(t)) \geq t,\ t \in [0, t_1]$. Novamente pela condição (*c1*), $\tau_k(y_1(t)) > t,\ t \in [0, t_1],\ k = 1, 2, \ldots, m$, isto é, $r_{k,1}(t) > 0$ para todo $t \in [0, t_1]$.

Considere agora o seguinte problema

$$\begin{cases} y'(t) &= \quad f(t, y_t), \qquad t \in [t_1, T] \\ y(t_1^+) &= \quad I_1(y_1(t_1)). \end{cases} \tag{2.10}$$

Novamente, usando o mesmo raciocínio do passo anterior, transformemos (2.10) em um problema de ponto fixo. Para isto considere o operador $N_1 : \Omega_{y_1} \to \Omega_{y_1}$ definido por:

$$N_1(x)(t) = I_1(y_1(t_1)) + \int_{t_1}^t f(s, x_s)ds,\ \text{se } t \in (t_1, T].$$

[1]Basta observar que neste caso $r_{1,1}(t) > 0,\ t \in [0, T]$, pois caso contrário temos uma contradição.

De forma semelhante ao que foi feito na primeira parte da demonstração, obtemos que N_1 é completamente contínuo e que o conjunto

$$\mathcal{E}(N_1) := \{x \in \Omega_{y_1};\ x = \lambda N_1(x),\ \text{para algum } 0 < \lambda < 1\}$$

é limitado uniformemente em $\lambda \in (0,1)$.

Como consequência do Teorema 1.18 segue que N_1 tem um ponto fixo y que é solução do problema (2.10). Fazendo $y(\cdot) = y_2(\cdot)$, podemos definir a função

$$r_{k,2}(t) = \tau_k(y_2(t)) - t,\ \text{para } t \in [t_1, T],\ k = 1, \dots, m.$$

Se $r_{2,2}(t) \neq 0,\ t \in (t_1, T]$, então segue da condição $(c1)$ que $r_{k,2}(t) \neq 0$ para todo $t \in (t_1, T]$ e para todo $k = 3, 4, \cdots, m$, então,

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & \text{se } t \in (-\infty, t_1] \\ y_2(t), & \text{se } t \in (t_1, T] \end{cases},$$

é uma solução do problema (2.3).

Considere o caso em que $r_{2,2}(t) = 0$, pela condição $(c5)$ temos que $t \in (t_1, T]$,[2] pois

$$\begin{aligned} r_{2,2}(t_1^+) &= \tau_2(y_2(t_1^+)) - t_1 \\ &= \tau_2(I_1(y_1(t_1))) - t_1 \\ &> \tau_1(y_1(t_1)) - t_1 \\ &= r_{1,1}(t_1) = 0 \end{aligned}$$

Pela continuidade de $r_{2,2}$ podemos definir $t_2 = \inf\{t \in (t_1, T];\ r_{2,2}(t) = 0\}$ de tal forma que $t_2 \in (t_1, T],\ r_{2,2}(t_2) = 0$ e $r_{2,2}(t) > 0$, para todo $t \in [t_1, t_2)$. Segue de $(c1)$ que $r_{k,2} \neq 0$, para todo $t \in [t_1, t_2), k = 2, \cdots, m$.

Por outro lado, suponha que exista $s \in (t_1, t_2]$ tal que $r_{1,2}(s) = 0$[3]. Por $(c5)$ temos

$$\begin{aligned} r_{1,2}(t_1^+) &= \tau_1(y_2(t_1^+)) - t_1 \\ &= \tau_1(I_1(y_1(t_1))) - t_1 \\ &< \tau_1(y_1(t_1)) - t_1 \\ &= r_{1,1}(t_1) = 0. \end{aligned}$$

[2]Observer que a condição $(c5)$ impede que $r_{2,2}(t_1) = 0$.

[3]Passos finitos para definir a solução ao longo do intervalo $[0, T]$.

Assim, a função $r_{1,2}$ atinge um máximo não negativo em algum ponto $s_1 \in (t_1, T]$. Como $y_2'(t) = f(t, (y_2)_t)$, segue da regra da cadeia que

$$r'_{1,2}(s_1) = \langle \nabla\tau_1(y_2(s_1)), y_2'(s_1)\rangle - 1 = 0.$$

Portanto,

$$\langle \nabla\tau_1(y_2(s_1)), f(s_1, (y_2)_{s_1})\rangle = 1,$$

contradizendo a hipótese (c4).Logo, $r_{1,2}(s) \neq 0$, para todo $s \in (t_1, t_2]$.

Continuando com esse processo, encontraremos que $y_{m+1} = y\ |_{[t_m,T]}$ é uma solução para o problema

$$\begin{cases} y(t) &= y_m(t), t \in [-\infty, t_m] \\ y'(t) &= f(t, y_t),\ \text{q.t.p. } t \in (t_m, T] \\ y(t_m^+) &= I_m(y_{m-1}(t_m)) \end{cases}$$

Então, a função definida por:

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & \text{se } t \in [-\infty, t_1] \\ y_2(t), & \text{se } t \in (t_1, t_2] \\ \vdots & \\ y_{m+1}(t), & \text{se } t \in (t_m, T] \end{cases}$$

é uma solução para o problema (2.3). □

2.4 Aplicação

Nesta seção mostraremos de forma clara quais são as condições que o problema (2.3) dado por:

$$\begin{cases} y_i'(t) &= \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{t} a_{ij}(s-t) y_j(s) ds,\ t \in [0, T], \\ & \quad t \neq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_{jk}(y_j(t)),\ i = 1, \ldots, n,\ k = 1, 2, \cdots, m \\ y_i(t^+) &= \mathfrak{b}_{ki} y_i(t),\ t = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_{jk}(y_j(t)),\ k = 1, 2, \cdots, m \\ y_{0i} &= \phi_i,\ \phi_i \in \mathcal{BU}((-\infty, 0]; \mathbb{R}),\ i = 1, \ldots, n\ ; \end{cases}$$

onde $\mathfrak{b}_{ki},\ b_{ij},\ i=1,\ldots,n,\ k=1,\ldots,m$ são números reais; $a_{ij}:(-\infty,0]\to\mathbb{R},\ g_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ j=1,\ldots,n$, são funções apropriadas; $\varphi(\cdot)$ é uniformemente contínua e limitada em $(-\infty,0]$, tem que satisfazer para podermos aplicar o teorema (2.18).

Nosso objetivo agora será assumir o mínino de condições possíveis para que o problema acima satisfaça as hipóteses do teorema (2.18). E portanto, mostraremos a existência de solução.

Assumiremos as seguintes condições:

1. A função $a_{ij}\in L^1((-\infty,0])\cap L^{\infty}_{loc}((-\infty,0])$.

2. A função $g_{jk}\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ k=1,\cdots,m,\ b_{ij}$ são números reais não todos nulos e $0<\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_{jk}(x_j)<\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_{j(k+1)}(x_j)<T$, para todo $x\in\mathbb{R}^n$ e $k=1,\cdots,m-1$.

3. Existem números reais b_{ij} não todos nulos tais que:

   (a) Para todo $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ e toda $\varphi\in\mathcal{PC}$, temos

   $$\langle(b_{i1}g'_{1k}(x_1),\cdots,b_{in}g'_{nk}(x_n)),f(t,\varphi)\rangle\neq 1,\ k=1,2,\cdots,m,$$

   onde $f(t,\varphi)=\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{0}a_{ij}(s-t)\varphi_j(s)ds.$

   (b) Para todo $x\in\mathbb{R}^n$ e $k=1,2,\cdots,m-1$,

   $$\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_{jk}(\mathfrak{b}_{k1}x_1,\cdots,\mathfrak{b}_{kn}x_n)\leq\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_{jk}(x_1,\cdots,x_n)<\sum_{j=1}^{n}b_{ij}gj(k+1)(\mathfrak{b}_{k1}x_1,\cdots,\mathfrak{b}_{kn}x_n).$$

Teorema 2.19. *Assumindo os itens 1-3 acima, temos que o problema (2.3) possui pelo menos uma solução.*

Demonstração: Usaremos a seguinte identificação:

(i1) $f(t,\varphi)=\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{0}a_{ij}(s-t)\varphi_j(s)ds,\ i=1,\ldots,n.$

(ii2) $\tau_k(x)=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_{jk}(x_j),\ i=1,\ldots,n,\ k=1,\ldots,m.$

(iii3) $I_k(x)=diag(\mathfrak{b}_{k1},\ldots,\mathfrak{b}_{kn})x,\ k=1,\ldots,m$, onde

$$diag(\mathfrak{b}_{k1},\ldots,\mathfrak{b}_{kn})=\begin{pmatrix}\mathfrak{b}_{k1} & & \ldots & 0\\ 0 & \mathfrak{b}_{k2} & \ldots & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & \mathfrak{b}_{kn}\end{pmatrix},$$

onde $f:[0,T]\times\mathcal{BU}((-\infty,0];\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n,\ \tau_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ I_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. E mostraremos que o problema em questão satisfaz as hipóteses do teorema (2.18).

Temos que a função f está bem definida, pois o domínio da função $a_{ij}(s-t),\ s\in(-\infty,0]$ e $t\in[0,T]$, $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$ está contido no intervalo $(-\infty,0]$ e a função $\varphi\in\mathcal{B}$, assim $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}a_{ij}(s-t)\varphi_j(s)ds$ existe.

Afirmação: A função $f:[0,T]\times\mathcal{BU}((-\infty,0];\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$ é tipo Carathéodory.
De fato, temos que:

- $f(\cdot,\varphi)$ é uma função mensurável para cada $\varphi\in\mathcal{B}$, segue da proposição 2.11 de [5].
- $f(t,\cdot)$ é uma função contínua para quase todo $t\in[0,T]$, pois sejam $\varphi_1,\varphi_0\in\mathcal{B}$, então dado $\varepsilon>0$, existe $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\int_{-\infty}^{0}|a_{ij}(s-t)|ds}$, tal que $\|\varphi_1-\varphi_0\|_{\mathcal{B}}<\delta$ implica

$$\left|\int_{-\infty}^{0}a_{ij}(s-t)(\varphi_1(s)-\varphi_0(s)ds\right|\le\int_{-\infty}^{0}|a_{ij}(s-t)||\varphi_1(s)-\varphi_0(s)|ds$$
$$\le\|\varphi_1-\varphi_0\|_{\mathcal{B}}\int_{-\infty}^{0}|a_{ij}(s-t)|ds<\varepsilon,\text{ para quase todo } t\in[0,T].$$

Segue dos itens 2 e 3 que as condições $(c1)$, $(c4)$ e $(c5)$ do teorema (2.18) são satisfeitas. A condição $(c2)$ é satisfeita trivialmente, pois existem constantes positivas c_k tais que

$$\sup_{\|x\|\le1}\|\mathfrak{b}_{k1}x_1,\mathfrak{b}_{k2}x_2,\cdots,\mathfrak{b}_{kn}x_n\|\le c_k.$$

Resta mostrar que a condição $(c3)$ é válida.

Note que,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0}|a_{ij}(s-t)|ds &= \int_{-\infty}^{-t}|a_{ij}(s)|ds \\
&= \int_{t}^{\infty}|a_{ij}(-s)|ds + \int_{0}^{t}|a_{ij}(-s)|ds - \int_{0}^{t}|a_{ij}(-s)|ds \\
&= \int_{0}^{\infty}|a_{ij}(-s)|ds + \int_{-t}^{0}|a_{ij}(s)|ds \\
&\leq \|a_{ij}\|_{L^1((-\infty,0])} + \int_{-t}^{0}|a_{ij}(s)|ds \\
&\leq \sup_{ij}\|a_{ij}\|_{L^1((-\infty,0])} + \max_{ij}\sup_{s\in[-t,0]} t|a_{ij}(s)|.
\end{aligned}$$

Assim, defina $p : [0,T] \longrightarrow [0,\infty)$ por:

$$p(t) = n(\sup_{ij}\|a_{ij}\|_{L^1((-\infty,0])} + \max_{ij}\sup_{s\in[-t,0]} t|a_{ij}(s)|).$$

Dessa forma, temos que $p \in L^1([0,T];[0,\infty))$ e

$$\|f(t,\varphi)\| \leq \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{0}|a_{ij}(s-t)||\varphi_j(s)|ds \leq \|\varphi\|_{\mathcal{B}}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{0}|a_{ij}(s-t)|ds \leq p(t)\|\varphi\|_{\mathcal{B}}.$$

Então, tomando ψ como sendo a função identidade, obtemos:

$$\|f(t,\varphi)| \leq p(t)\psi(\|\varphi\|_{\mathcal{B}}),$$

e além disso, $\displaystyle\int_{\|\varphi\|_{\mathcal{B}}}^{\infty}\frac{ds}{\phi(s)}ds = \infty$, para $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \neq 0$.
Logo, a condição $(c3)$ é válida.

Portanto, segue do teorema (2.18) que o problema (2.3) tem pelo menos uma solução.

□

Capítulo 3

Equações Diferenciais Impulsivas de Ordem n com o Retardo Dependendo do Estado

A teoria de equações diferenciais impulsivas com o tempo variando com o estado tem se desenvolvido de maneira bastante lenta nos últimos anos devido as dificuldades criadas pela presença dos impulsos dependendo do estado. Uma das dificuldades enfrentadas é que soluções de equações impulsivas podem tocar a mesma variedade de impulso várias e até mesmo infinitas vezes. As técnicas usadas neste trabalho não são eficientes na presença de tais fenômenos. Assim uma das nossas preocupações é garantir condições suficientes sobre a não linearidade, sobre as equações que definem as variedades de impulso para que, este tipo de fenômeno, conhecido como beating phenomenon, não ocorra.

Este problema foi resolvido com bastante eficiência no capítulo 2. Usaremos esta mesma técnica para abordar uma outra classe de equações diferenciais impulsivas, a saber as equações de ordem n. Entretanto a dificuldade do nosso modelo aumenta consideravelmente, uma vez que, como no capítulo 2, o tempo de impulso estará dependendo do estado, assim como também o retardo dependerá do estado.

Na próxima seção faremos uma breve revisão sobre a teoria de equações de ordem n, bem como enunciaremos alguns resultados necessários aos nossos objetivos ao longo deste capítulo.

3.1 Problema valor de contorno

Nesta seção mostraremos, de forma breve, um pouco da dificuldade de resolver equações diferenciais de ordem n e como a solução de um determinado problema pode ser modificada de acordo com as condições que devem ser satisfeitas.

3.1.1 Alguns Exemplos

Problemas de valor de contorno (PVC) manifesta-se em quase todos os ramos da Ciências, Engenharia e Tecnologia, por exemplo, no problema do movimento de uma partícula de massa m sob a ação de uma força dada $\overrightarrow{F}(t, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{r'})$, frequentimente é necessário para encontrar a lei do movimento quando no tempo inicial $t = t_0$ a partícula estava na posição $\overrightarrow{r_0}$ e no tempo $t = t_1$ chegou a $\overrightarrow{r_1}$. O problema se reduz a equação diferencial do movimento

$$m\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = \overrightarrow{F}(t, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{r'})$$

com condições de fronteira $\overrightarrow{r}(t_0) = \overrightarrow{r_0},\ \overrightarrow{r}(t_1) = \overrightarrow{r_1}$.

No caso do PVC uma pequena mundança na condição de fronteira pode conduzir para significantes mudanças no comportamento da solução.

Vamos considerar o problema de valor inicial

$$x'' + x = 0,\ x(0) = c_1,\ x'(0) = c_2,\ x''(0) = c_3.$$

Ele tem uma única solução

$$x(t) = \frac{1}{3}(c_1 - c_2 + c_3)e^{-t} + \frac{1}{3}(2c_1 + c_2 - c_3)e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}(c_2 + c_3)e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

para qualquer conjunto de valores c_1, c_2 e c_3.

No entanto, o PVC

$$x''' + x = 0,$$

com as condições

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ x(b_1) = \epsilon \neq 0,$$

onde b_1 é a primeira raiz positiva da equação

$$2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{\pi}{6}\right) + e^{-\frac{3}{2b}} = 0$$

não tem solução.

Esse mesmo problema com as seguintes condições de fronteira

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ x(b_1) = \epsilon,$$

onde $0 < b < b_1$, tem uma única solução

$$x(t) = \frac{\epsilon e^{\frac{1}{2}(t-b)}(e^{-\frac{3}{2}t} + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6}\right))}{2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{\pi}{6}\right) + e^{-\frac{3}{2}b}}.$$

Já se as condições de contorno forem

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ x(b_1) = 0.$$

O problema tem um número infinito de soluções

$$x(t) = k\left[e^{-t} + 2e^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6}\right)\right],$$

onde k é uma constante arbitrária.

Este exemplo nos leva a vários questionamento sobre a existência e unicidade da solução, porém o nosso objetivo nesta seção não é discutir a existência e unicidade de soluções, mas sim mostrar como a solução do problema pode ser modificada de acordo com alterações nas condições de contorno.

Exemplo 3.1. *O PVC*

$$x'' = \lambda e^{\alpha x},\ \ x(0) = x(1) = 0 \tag{3.1}$$

surge nas aplicações envolvendo a difusão de calor. Por exemplo, $\alpha = 1$ surge na análise de perda de Joule em sólidos condutores, com λ representando o quadrado da constante da corrente e e^x a temperatura resistência, ou no aquecimento por atrito com λ representando o quadrado da constante de atrito e e^x a temperatura instabilidade.

Se $\alpha\lambda = 0$, o problema (3.1) tem uma única solução

1. se $\lambda = 0$, então $x(t) = 0$
2. se $\alpha = 0$, então $x(t) = \frac{\lambda}{2}t(t-1)$

Se $\alpha\lambda < 0$, o problema (3.1) tem muitas soluções iguais ao número de raizes da equação $c = \sqrt{2|\alpha\lambda|}\cosh\dfrac{c}{4}$, então para cada um desses c_i a solução é

$$x_i(t) = -\frac{2}{\alpha}\left\{\log\left[\cosh\left(\frac{c_i}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right] - \log\left[\cosh\left(\frac{c_i}{4}\right)\right]\right\}.$$

Da equação $c = \sqrt{2|\alpha\lambda|}\cosh\dfrac{c}{4}$, segue que se

$$\sqrt{\frac{|\alpha\lambda|}{8}}\min_{c\geq 0}\frac{\cosh\frac{c}{4}}{\frac{c}{4}} \quad \begin{array}{ll} <1, & \text{(3.1) tem duas soluções} \\ =1, & \text{(3.1) tem uma solução} \\ >1, & \text{(3.1) não tem solução} \end{array}$$

Se $\alpha\lambda > 0$, o problema (3.1) tem soluções iguais ao número de raízes da equação $c = \sqrt{2\alpha\lambda}\cos\dfrac{c}{4}$, assim para cada c_i a solução é

$$x_i(t) = \frac{2}{\alpha}\log\left[\frac{c_i}{\cos(\frac{c_i}{2}(t-\frac{1}{2}))}\right] - \frac{1}{\alpha}\log[2\alpha\lambda]$$

Da equação $c = \sqrt{2\alpha\lambda}\cos\dfrac{c}{4}$, segue que se

$$\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{8}}\max_{\frac{3\pi}{4}\leq\frac{c}{4}\leq\frac{5\pi}{2}}\frac{\cos\frac{c}{4}}{\frac{c}{4}} \quad \begin{array}{ll} <1, & \text{(3.1) tem uma solução} \\ \geq 1, & \text{(3.1) tem pelo menos duas soluções.} \end{array}$$

Assim, em particular, se $\lambda = 1$ e $\alpha = -1$ o PVC (3.1) tem duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

3.1.2 Problemas Lineares

Para equações diferenciais lineares de ordem n:

$$L(x) = x^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)x^{(n-i)} = f(t), \tag{3.2}$$

onde $p_i(t),\ 1 \leq i \leq n$ e $f(t)$ são contínuas em $[a, b]$, considerando a seguinte condição inicial:

$$l_i(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{ik}x^{(k)}(a_i) = A_i,\ \ 1 \leq i \leq n, \tag{3.3}$$

onde $a \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b$.

Em (3.3) a coincidência de vários a_i significa que em um único ponto várias funções estão definidas; que são assumidas linearmente independentes.

Como a interpolação polinomial (3.3) é uma solução para a equação diferencial $x^{(n)} = 0$, o PVC (3.2), (3.3) dá possibilidades de interpolação para a solução da equação diferencial (3.2).

Para discutir a existência e unicidade de soluções para o PVC (3.2)-(3.3) precisamos do seguinte lema:

Lema 3.2. *Considere o sistema de n equações lineares:*

$$Ax = b, \tag{3.4}$$

onde A é uma matriz $n \times n$ e x e b são vetores n dimensionais. Então, se

(i) Posto de $A = n$,

o sistema (3.4) possui uma única solução. Alternativamente, o sistema homogênio

$$Ax = 0$$

possui somente a solução trivial.

(ii) Posto de $A = n - m$ $(1 \leq m \leq n)$,

o sistema (3.4) possui uma solução se, e somente se

$$\Delta b = 0 \tag{3.5}$$

onde Δ é uma matriz $m \times n$ cujas linhas d_α são vetores linearmente independentes, $1 \leq \alpha \leq m$ satisfazendo

$$d_\alpha A = 0.$$

No caso (3.5) temos, qualquer solução de (3.4) pode ser dada por

$$x = \sum_{\alpha=1}^{m} k_\alpha c_\alpha + Sb,$$

onde k_α, $1 \leq \alpha \leq m$, são constantes arbitrárias, c_α, $1 \leq \alpha \leq m$, são m vetores colunas linearmente independentes satisfazendo

$$Ac_\alpha = 0$$

e S é uma matriz $n \times n$ independente de b tal que

$$ASp = p,$$

para qualquer p vetor coluna satisfazendo

$$\Delta p = 0.$$

Seja $\{x_j(t)\},\ \ 1 \leq j \leq n$ qualquer sistema fundamental de soluções da equação diferencial homogênia

$$L(x) = 0 \tag{3.6}$$

e $\phi(t)$ qualquer solução de (3.2). Então, toda solução de (3.2) pode ser escrita como

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j(t) + \phi(t), \tag{3.7}$$

onde $\alpha_j,\ \ 1 \leq j \leq m$ são constantes desconhecidas.

A solução (3.7) satisfaz a condição (3.3) se, e somente se

$$A_i = l_i\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j + \phi\right) = \sum_{j=1}^{n} l_i(x_j)\alpha_j + l_i(\phi),\ \ 1 \leq i \leq n. \tag{3.8}$$

Pelo lema (3.2) o sistema (3.8) tem uma única solução se, e somente se

$$\det(l_i(x_j)) \neq 0,\ \ 1 \leq i, j \leq n. \tag{3.9}$$

Assim, a existência e unicidade da solução de (3.2), (3.3) é equivalente ao problema homogênio correspondente (3.6) junto com

$$l_i(x) = 0,\ \ 1 \leq i \leq n \tag{3.10}$$

tem solução não trivial.

Além disso, pelo lema (3.2) notamos que se o posto da matriz $(l_i(x_j))$ é $n-m$ $(1 \leq m \leq n)$, então (3.2), (3.3) também tem muitas soluções.
Entrentanto, esta solução conterá m constantes arbitrárias, i.e., a unicidade é perdida.

Então, vemos que a unicidade da solução de (3.2), (3.3), implica a existência, enquanto que a existência não decide a unicidade. Esta unicidade implica a existência para PVC lineares, não é imediato para PVC não-lineares.

3.1.3 Função de Green

A partir de agora, assumiremos que a condição (3.9) é satisfeita. Assim, a existência do sistema fundamental das soluções $\{x_i(t)\},\ 1 \leq i \leq n$ de (3.6) satisfazendo

$$l_i(x_j) = \delta_{ij},\ \ 1 \leq i, j \leq n \tag{3.11}$$

é assegurado. Denotaremos por $D_i(t),\ 1 \leq i \leq n$ o cofator do elemento $x_i^{(n-1)}(t)$ no wronskiano $W(t)$. Por conveniência escreveremos $a = a_0, b = a_{n+1}, x_0(t) = x_{n+1}(t) = D_0(t) = D_{n+1}(t) = 0$. O quadrado $a \leq t, s \leq b$ representaremos por K; qualquer quadrado com linhas retas a partir de $s = a_i$ retiradas denotaremos por K_0; K_0 com a diagonal $t = s$ retirada representaremos por K_1.

Toda solução de (3.2) pode ser escrita como

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i(t) + \int_{a_0}^{t} \frac{1}{W(s)} \sum_{i=0}^{n+1} D_i(s) x_i(t) f(s) ds. \tag{3.12}$$

De (3.8) e (3.11), segue-se que

$$\alpha_i = A_i - \int_{a_0}^{a_i} \frac{1}{W(s)} D_i(s) f(s) ds,\ \ 1 \leq i \leq n.$$

Assim, encontramos

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=1}^{n} A_i x_i(t) - \sum_{i=0}^{n+1} \int_{a_0}^{a_i} \frac{1}{W(s)} D_i(s) x_i(t) f(s) ds + \int_{a_0}^{t} \frac{1}{W(s)} \sum_{i=0}^{n+1} D_i(s) x_i(t) f(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_i x_i(t) - \sum_{k=0}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{1}{W(s)} D_i(s) x_i(t) f(s) ds + \int_{a_0}^{t} \frac{1}{W(s)} \sum_{i=0}^{n+1} D_i(s) x_i(t) f(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_i x_i(t) + \int_{a_0}^{a_{n+1}} g(t,s) f(s) ds \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde

$$g(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{W(s)} \displaystyle\sum_{i=k+1}^{n+1} D_i(s) x_i(t), & t \leq s \\ \dfrac{1}{W(s)} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} D_i(s) x_i(t), & t \geq s \end{cases} \quad a_k < s < a_{k+1}, 0 \leq k \leq n. \tag{3.14}$$

A função $g(t,s)$ é chamada função de Green para o PVC (3.6), (3.10) e é unicamente determinada no quadrado K.

As seguintes propriedades da função de Green $g(t,s)$ são fundamentais:

1. $\dfrac{d^{(i)}g(t,s)}{dt^i}$, $0 \leq i \leq n-2$ são contínuas em K_0

2. $\dfrac{d^{(n-1)}g(t,s)}{dt^{n-1}}$ é contínua em K_1 e na diagonal, $t = s$, sofre uma descontinuidade igual a unidade, i.e., $\dfrac{d^{(n-1)}g(t+0,t)}{dt^{n-1}} - \dfrac{d^{(n-1)}g(t-0,t)}{dt^{n-1}} = 1$; $t \neq a_i$, $1 \leq i \leq n$.

3. $g(t,s)$ como função em t satisfaz (3.6), (3.10) em K_1.

Assim, o operador L para a condição inicial (3.10) tem um inverso completamente contínuo.

Exemplo 3.3. *A função de Green para o*

$$x^{(n)} = 0 \tag{3.15}$$

pode assumir formas diferentes de acordo com as condições que tal problema tem que satifazer.

1. A função de Green $g_1(t,s)$ para o problema (3.15) com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} &x^{(i)}(a_1) = 0,\ 0 \leq i \leq k-1 \ \ (1 \leq k \leq n-1 \text{ fixado }) \\ &x^{(i)}(a_2) = 0,\ k \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

é dada por

$$g_1(t,s) = \frac{1}{(n-1)!}\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i} (t-a_1)^i(a_1-s)^{n-i-1} & s \leq t \\ \\ \displaystyle -\sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-1}{i} (t-a_1)^i(a_1-s)^{n-i-1} & t \leq s \end{cases} \tag{3.16}$$

e para $a_1 \leq t \leq a_2$, $a_1 \leq s \leq a_2$ temos as seguintes desigualdades

$$(-1)^{n-1} g_1^{(i)}(t,s) \geq 0, \;\; 0 \leq i \leq k-1 \tag{3.17}$$

$$(-1)^{n-i} g_1^{(i)}(t,s) \geq 0, \;\; k \leq i \leq n-1 \tag{3.18}$$

onde $g_1^{(i)}(t,s)$ denota a derivada $\dfrac{d^{(i)}}{dt^i} g_1(t,s)$.

Dem.: A prova de (3.17) é dada em [15], e (3.18) da seguinte representação

$$g_1^{(i)}(t,s) = \frac{1}{(n-i-1)!} \begin{cases} 0, & s \leq t \\ -(t-s)^{n-i-1}, & t \leq s \end{cases} \tag{3.19}$$

obtida através da $i-$ vezes diferenciação de (3.16) e da igualdade

$$(t-s)^{n-1} - \sum_{i=k}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ i \end{pmatrix} (t-a_1)^i (a_1-s)^{n-i-1} = \sum_{i-0}^{k-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ i \end{pmatrix} (t-a_1)^i (a_1-s)^{n-i-1}.$$

2. A função de Green $g_2(t,s)$ do problema (3.15) com as condições

$$\begin{aligned} x^{(i)}(a_1) &= 0, \quad 0 \leq i \leq n-2 \\ x^{(p)}(a_2) &= 0, \quad \leq p \leq n-1 \text{ fixado} \end{aligned} \tag{3.20}$$

é dada por

$$g_2(t,s) = \frac{-1}{(n-1)!} \begin{cases} (t-a_1)^{n-1} \left(\dfrac{a_2-s}{a_2-a_1} \right)^{n-p-1} - (t-s)^{n-1}, & s \leq t \\ \\ (t-a_1)^{n-1} \left(\dfrac{a_2-s}{a_2-a_1} \right)^{n-p-1}, & s \geq t \end{cases} \tag{3.21}$$

e para $a_1 \leq t \leq a_2$, $a_1 \leq s \leq a_2$ temos a seguinte desigualdade

$$-g_2^{(i)}(t,s) \geq 0, \;\; 0 \leq i \leq p \tag{3.22}$$

Dem.: Temos a desigualdade (3.22) se, e somente se

$$(t-a_1)^{n-i-1} \left(\frac{a_2-s}{a_2-a_1} \right)^{n-p-1} \geq (t-s)^{n-i-1} \tag{3.23}$$

para todo $a_1 \leq s < t \leq a_2$. Como $(t-a_1) \geq (t-s)$, $(a_2-a_1) \geq (a_2-s)$ e $(t-a_1)(a_2-s) \leq (t-s)(a_2-a_1)$, segue-se que

$$\left(\frac{t-a_1}{t-s}\right)^{n-i-1} \geq \left(\frac{a_2-a_1}{a_2-s}\right)^{n-i-1} \geq \left(\frac{a_2-a_1}{a_2-s}\right)^{n-p-1}$$

que é o mesmo que (3.23).

3. A função de Green $g_3(t,s)$ para o problema (3.15), com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} x^{(p)}(a_1) &= 0 \quad (0 \leq p \leq n-1 \text{ fixado} \\ x^{(i)}(a_2) &= 0 \quad 0 \leq i \leq n-2 \end{aligned} \tag{3.24}$$

é dada por

$$g_3(t,s) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \begin{cases} (a_2-t)^{n-1}\left(\dfrac{s-a_1}{a_2-a_1}\right)^{n-p-1}, & s \leq t \\ \\ (a_2-t)^{n-1}\left(\dfrac{s-a_1}{a_2-a_1}\right)^{n-p-1} - (s-t)^{n-1}, & t \leq s \end{cases} \tag{3.25}$$

e para $a_1 \leq t \leq a_2$, $a_1 \leq s \leq a_2$ temos a seguinte desigualdade

$$(-1)^{n+i+1} g_3^{(i)}(t,s) \geq 0, \;\; 0 \leq i \leq p. \tag{3.26}$$

Dem.: Temos a desigualdade (3.26) se, e somente se

$$(a_2-t)^{n-i-1}\left(\frac{s-a_1}{a_2-a_1}\right)^{n-p-1} - (s-t)^{n-i-1} \geq 0 \tag{3.27}$$

para todo $a_1 \leq t < s \leq a_2$. Como $(a_2-t) \geq (s-t)$, $(a_2-a_1) \geq (s-a_1)$ e $(a_2-t)(s-a_1) \geq (a_2-a_1)(s-t)$ é imediato a desigualdade (3.27).

Observação 3.4. Neste exemplo que acabamos de trabalhar não estamos preocupados em mostrar como se acha uma solução, mas sim como a função de Green é modificada de acordo com as condições que o problema deve satisfazer.

Exemplo 3.5. Um problema de equações diferenciais que apresenta função de Green na solução é o operador de Sturm-Liouville que é definido por

$$(Ax)(t) = [p(t)x'(t)]' + q(t)x(t),$$

isto é

$$Ax = (px')' + qx$$

onde x é duas vezes continuamente diferenciável, p é uma função real e continuamente diferenciável e q é uma função real contínua. O domínio das funções é o intervalo $[a, b]$.

3.2 O Problema de Ordem n.

Nesta seção analisaremos a existência de soluções para o problema de ordem n com o retardo dependendo do estado dado por,

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) &= g(t, u_{\rho(t,u_t)}), t \neq \tau_k(u(t)) \\ u^{(j)}(t^+) &= I_{j,k}(u(t)), t = \tau_k(u(t)), j = 1, \cdots, n-1 \\ u^{(j)}(0) &= y_j, \ \ y_j \in \mathbb{R}^n, \ \ j = 1, \cdots, n-1 \\ u_0 &= \phi, \ \phi \in L^2(h, \mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{3.28}$$

No modelo (3.28) as funções $g : [0, b] \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$, $\tau_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k = 1, \cdots, m$, $\rho : [0, b] \times L^2(h, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, e $I_{j,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são dadas, y_j, $j = 1, \cdots, n$ são elementos fixos; o símbolo $\xi(t^+)$ representa o lado direito do limite da função ξ e é definido como $\xi(t^+) = \lim_{h\to 0^+} \xi(t+h)$.

Como motivação para a construção do operador solução, considere o problema:

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) &= 0, \ t \in [0, b] \\ x^{(i)}(0) &= x_{0i}, \ i = 1, \dots, n, \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{3.29}$$

onde x_0, x_{0i}, $i = 1, \dots, n$, são números reais fixados. A solução fundamental de (3.29) é dada por:

$$x(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_{0i} t^i}{i!}, \ t \in [0, b].$$

Assim, da seção anterior se considerarmos o problema não homogêneo

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) &= f(t, x), \ t \in [0, b] \\ x^{(i)}(0) &= x_{0i}, \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

sua solução será dada pela seguinte equação integral:

$$x(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_{0i}t^i}{i!} + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1} f(s, x(s))}{(n-1)!},\ t \in [0, b].$$

O comentário anterior motiva a seguinte definição.

Definição 3.6. *Uma função* $y : [0, b] \times L^2(h, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n,\ y(\cdot) \in \mathcal{PC}[0, b] \cap \mathcal{AC}^{n-1},\ k = 0, \ldots, m,$ *é uma solução do problema (3.28), se* y *satisfaz a equação* $y^n(t) = f(t, y_{\rho(t,y_t)}),$ *para quase todo* $t \in [0, b],\ t \neq \tau_k(y(t)),\ k = 0, \ldots, m,$ *e as condições* $y^i(t^+) = I_{k,i}(y(t)), t = \tau_k(y(t)), k = 0, \ldots, m, i = 1, \ldots, n-1, y^i(0) = y_i, i = 1, \cdots, n-1$ *e* $y(\theta) = \phi(\theta),\ \theta \leq 0.$

Na definição (3.6), $\mathcal{AC}^{n-1}$ é o espaço de Banach definido por

$$\mathcal{AC}^{n-1} = \Big\{ x : [0, b] \to \mathbb{R}^n; x^{(i)}|[t_k, t_{k+1}] \in \mathcal{AC}(t_k, t_{k+1}) \cap \mathcal{PC}[t_k, t_{k+1}], \\ k = 1, \ldots, m, i = 1, \ldots, n-1 \Big\},$$

munido com a norma $\| x \|_{\mathcal{AC}^{n-1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \| x^{(i)} \|_{\mathcal{PC}[0,T]}$.

Para resolver o problema (3.28), consideraremos uma função $h : (-\infty, b] \to (0, \infty)$, positiva e mensurável tal que

$$h(\theta + \xi) \leq \gamma(\xi) h(\theta),$$

para quase todo θ, ξ em $(-\infty, b]$, onde $\gamma : (-\infty, b] \to [0, \infty)$ é uma função mensurável com $\gamma(.) \in L^\infty((-\infty, b])$ e consideraremos também que o espaço $\mathcal{B} = L^2(h; \mathbb{R}^n)$ é formado por funções mensuráveis $\phi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$ tais que

$$\int_{-\infty}^0 h(\theta) |\phi(\theta)|^2 d\theta < \infty.$$

Munimos $\mathcal{B}$ com a norma

$$\|\phi\|_{\mathcal{B}} = \left(\int_{-\infty}^0 h(\theta) |\phi(\theta)|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Seja $u : (-\infty, b] \to \mathbb{R}^n$ uma função tal que $u(\theta) = \phi(\theta),\ \theta \leq 0$, para algum $\phi \in B$, e $u|[0, b] \in PC([0, b]; \mathbb{R}^n)$, então temos os seguintes resultados: A prova do Lemma a seguir pode ser encontrada em [8]. Porém, visando a comodidade do leitor, daremos um esboço da prova.

Lema 3.7. *Se $u : (-\infty, b] \to \mathbb{R}^n$ é como acima, então para cada $t \in [0, b]$,*

$$\|u_t\| \leq \left(\int_{-t}^{0} h(\theta) d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{s \in [0,t]} |u(s)| + \gamma(-t)^{\frac{1}{2}} \|\phi\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.30}$$

Demonstração: Segue da definição da norma em $\mathcal{B}$ que

$$\begin{aligned} \|u_t\|_{\mathcal{B}}^2 &= \int_{-\infty}^{0} h(\theta)|u(t+\theta)|^2 d\theta \\ &= \int_{-t}^{0} h(\theta)|u(t+\theta)|^2 d\theta + \int_{-\infty}^{-t} h(\theta)|u(t+\theta)|^2 d\theta \\ &\leq \int_{-t}^{0} h(\theta) d\theta \sup_{s \in [0,t]} |u(s)|^2 + \gamma(-t) \int_{-\infty}^{0} h(\theta)|\phi(\theta)|^2 d\theta, \; t \in [0, T] \end{aligned}$$

Isto completa a prova do lema[1]. □

Observação 3.8. *Chamando $K(t) = \left(\int_{-t}^{0} h(\theta) d\theta \right)^{\frac{1}{2}}$, $M(t) = \gamma(-t)^{\frac{1}{2}}$ e $|u|_t = \sup_{s \in [0,t]} |u(s)|$, então a desigualdade (3.7) torna-se*

$$\|u_t\|_B \leq K(t)|u|_t + M(t)\|\phi\|_B.$$

Observação 3.9. *As condições sobre a função $h(\cdot)$ nos permitem obter estimativas para funções $\phi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$ que possuem as mesmas propriedades que a função $u(\cdot)$, do Lema 3.30.*

Teorema 3.10. *Assumira que as seguintes condições são válidas:*

(H1) A função $g : [0, b] \times B \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as seguintes condições:

- *(a) A função $t \mapsto g(t, \phi)$ é mensurável para todo $\phi \in B$.*
- *(b) A função $u \mapsto g(t, u)$ é contínua para quase todo $t \in [0, b]$.*
- *(c) Existe uma função $L^1 -$ integrável $q_r : [0, b] \to [0, \infty)$, tal que para cada $r > 0$,*

$$|g(t, \phi)| \leq q_r(t),$$

para todo $t \in [0, b]$ e $\phi \in B$ com $\|\phi\|_B < r$.

[1] Justificar as passagens anteriores.

(H2) *A função* $\rho : [0,b] \times B \to \mathbb{R}$ *é contínua, e além disso* $\rho(t,.) \leq t, \forall\ t \in [0,b]$.

(H3) *Existe uma função* $p \in L^1([0,b];\mathbb{R}^+)$ *e uma função contínua não-crescente* $\Omega : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ *tal que*

$$|g(t,\phi)| \leq p(t)\Omega(\|\phi\|),$$

para q.t.p $t \in [0,b]$ *e* $\phi \in B$ *com*

$$\int_C^\infty \frac{ds}{\Omega(s)} = \infty,$$

onde $C = \overline{\gamma}|\phi|_B + K_b|\phi(0)|_{\mathbb{R}^n} + K_b \sum_{i=i}^{n-1} b^i|y_i|$, *com* $\overline{\gamma} = \max\{\gamma_b, \overline{\gamma}_b\}$, *onde* $\gamma_b = \sup_{t\in[0,b]} \gamma(-t)^{1/2}$, $\overline{\gamma}_b = \sup_{s\in[0,b]} \overline{\gamma}(s)$ *e* $K_b = \sup_{t\in[0,b]} K(t)$.

(H4) *A função* $\tau_k \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, *para* $k = 1, \cdots, m$. *Além disso*

$$0 < \tau_1(x) < \tau_2(x) < \cdots < \tau_m(x) < b,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(H5) *Existem constantes* $c_{k,j} \geq 0$, $k = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n-1$ *tais que*

$$|I_{k,j}(x)| \leq c_{k,j},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(H6) *Para todo* $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\tau_k(I_k(x)) \leq \tau_k(x) < \tau_{k+1}(I_k(x)),$$

para $k = 1, \cdots, m$.

(H7) *Para todo* $(t,s) \in [0,b] \times [0,b]$, *com* $s < t$ *e toda* $y \in \mathcal{PC}[0,b] \cap \mathcal{AC}^{n-1}$, *temos que*

$$\langle \bigtriangledown \tau_k(y(\overline{s})), \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(\overline{s}-t)^{i-2}}{(i-2)!} I_{i,k} y_k(t) + \int_t^{\overline{s}} \frac{(\overline{s}-s)^{n-2}}{(n-2)!} g(s, y_{\rho(s,y_s)}) ds \rangle \neq 1.$$

Então o problema (3.28) tem uma solução.

Demonstração: Considere o espaço de funções

$$V = \{u : (-\infty, b] \to \mathbb{R}^n;\ u_0 = \phi \in B,\ u^{(j)}(0) = y_j,\ j = 1, \cdots, n-1,\ u|_{[0,b]} \in PC([0,b]; \mathbb{R}^n\}.$$

O espaço V torna-se um espaço de Banach se considerarmos com a norma

$$\|u\|_V = \sup_{s \in [0,b]} |u(s)|_{\mathbb{R}^n}$$

para todo $u \in V$.

Em V definamos o operador

$$\Gamma u(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \leq 0 \\ \phi(0) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t^i}{i!} y_i + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{n-1} g(s, u_{\rho(s,u_s)}) ds, & t \in [0,b]. \end{cases} \tag{3.31}$$

É claro que se $u = \Gamma u$ então u é uma solução do problema

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) &=& g(t, u_{\rho(t,u_t)}), & t \in [0,b] \\ u^{(j)}(0) &=& y_j, & j = 1, \cdots, n-1 \\ u_0 &=& \phi. \end{cases}$$

Dividiremos a prova em etapas.

Passo 1: Γ é contínuo.

Seja $x_n, x \in V$ tais que $x_n \longrightarrow x$ quando $n \longrightarrow \infty$. Pelo lema (3.7) temos

$$\|(x_n)_t - x_t\|_B \leq \left(\int_{-t}^0 h(\theta) d\theta \right)^{1/2} |x_n - x|_t. \tag{3.32}$$

Como $x_n(0) = \phi(0) = x(0)$ e $x_n^{(j)}(0) = x^{(j)}(0) = y_j$, $j = 1, \cdots, n-1$. Então a desigualdade (3.32) nos permite concluir que $(x_n)_t \longrightarrow x_t$ uniformemente para $t \in [0,b]$.

Como a função ρ é contínua, obtemos $\rho(t, (x_n)_t) \longrightarrow \rho(t, x_t)$ quando $n \longrightarrow \infty$ uniformemente para $t \in [0,b]$.

Agora, consideremos a desigualdade:

$$\|(x_n)_{\rho(t,(x_n)_t)} - x_{\rho(t,x_t)}\| \leq \|(x_n)_{\rho(t,(x_n)_t)} - x_{\rho(t,(x_n)_t)}\| + \|x_{\rho(t,(x_n)_t)} - x_{\rho(t,x_t)}\|. \tag{3.33}$$

Usando o lema (3.7), observamos que o primeiro termo do lado direito da desigualdade (3.33) tende a zero quando $n \longrightarrow \infty$.

Por outro lado, para o segundo termo do lado direito de (3.33) temos:

$$\|x_{\rho(t,(x_n)_t)} - x_{\rho(t,x_t)}\|^2 = \int_{\infty}^{0} h(\theta)|x(\theta + \rho(t,(x_n)_t)) - x(\theta + \rho(t,x_t))|^2 d\theta. \tag{3.34}$$

Consideremos dois casos.

Caso 1- $\rho(t, x_t) \geq 0$.

Então para n suficientemente grande podemos supor que $\rho(t,(x_n)_t) \geq 0$.

Da desigualdade (3.34) temos

$$\begin{aligned}
\|x_{\rho(t,(x_n)_t)} - x_{\rho(t,x_t)}\|^2 &= \int_{-\infty}^{0} h(\theta)|x(\theta + \rho(t,(x_n)_t)) - x(\theta + \rho(t,x_t))|^2 d\theta \\
&= \int_{-\infty}^{\rho(t,x_t)} h(\theta - \rho(t,x_t))|x(\theta + \rho(t,(x_n)_t) - \rho(t,x_t)) - x(\theta)|^2 d\theta \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} h(\theta - \rho(t,x_t))|x(\theta + \rho(t,(x_n)_t) - \rho(t,x_t)) - x(\theta)|^2 d\theta \\
&\quad + \int_{0}^{\rho(t,x_t)} h(\theta - \rho(t,x_t))|x(\theta + \rho(t,(x_n)_t) - \rho(t,x_t)) - x(\theta)|^2 d\theta \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} \gamma(-\rho(t,x_t))h(\theta)|x(\theta + \rho(t,(x_n)_t) - \rho(t,x_t)) - x(\theta)|^2 d\theta \\
&\quad + \int_{0}^{b} h(\theta - \rho(t,x_t))|x(\theta + \rho(t,(x_n)_t) - \rho(t,x_t)) - x(\theta)|^2 d\theta,
\end{aligned}$$

notando que $x \in L^2(h, \mathbb{R}^n)$ temos que

$$\int_{-\infty}^{0} h(\theta)|x(\theta + \rho(t,(x_n)_t)) - x(\theta + \rho(t,x_t))|^2 d\theta \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Isto implica que $\|x_{\rho(t,(x_n)_t)} - x_{\rho(t,x_t)}\| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Caso 2- $\rho(t, x_t) < 0$.

Então, como antes, para n suficientemente grande, também podemos supor que $\rho(t,(x_n)_t) < 0$. Novamente, pela desigualdade (3.34), temos:

$$\|x_{\rho(t,(x_n)_t)} - x_{\rho(t,x_t)}\| \leq \int_{-\infty}^{0} h(\theta)|x(\theta + \rho(t,(x_n)_t) - \rho(t,x_t)) - x(\theta)|^2 d\theta,$$

o que implica que $\|x_{\rho(t,(x_n)_t)} - x_{\rho(t,x_t)}\| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Passo 2: Γ leva conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Seja $u \in V$ tal que $\|u\| \leq r$, para algum $r > 0$. Então pelo lema (3.7), temos

$$\|u_{\rho(t,u_t)}\| \leq K_b r + (\gamma_b + \overline{\gamma}_b)\|\phi\|_B. \tag{3.35}$$

A partir de (3.35) e usando o terceiro item de (H1), temos:

$$\|\Gamma u\| \leq |\phi(0)| + \sum_{i=1}^{n-1} b^i|y_i| + b^{n-1}\int_0^t q_r(s)ds,$$

o que mostra que Γ leva conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Passo 3: Γ é compacto.

Por suposições feitas sobre a função g, é sabido que o conjunto

$$\varphi_r = \left\{\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{n-1} g(s, x_{\rho(s,x_s)})ds,\ t \in [0.b],\ \|x\| \leq r\right\}$$

é um conjunto relativamente compacto em V. Em outras palavras, dado $\epsilon > 0$ e $t \in [0, b]$, podemos escolher $0 < \delta < \epsilon$ tal que se $t + \delta \in [0, b]$ então

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma x(t+\delta) - \Gamma x(t)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} |((t+\delta)^i - t^i||y_i| + \left|\int_0^{t+\delta} \frac{(t+\delta-s)^{n-1}}{n-1} g(s, x_{\rho(s,x_s)})ds - \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{n-1} g(s, x_{\rho(s,x_s)}ds\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} |(t+\delta)^i - t^i||y_i| + \int_0^t |(t+\delta-s)^{n-1} - (t-s)^{n-1}||g(s, x_{\rho(s,x_s)}|ds + \\
&\int_t^{t+\delta} |(t+\delta-s)^{n-1}||g(s, x_{\rho(s,x_s)})|ds,
\end{aligned}$$

o que implica a equicontinuidade do conjunto $\varphi_r(t)$. Isto mostra a compacidade do operador Γ.

Passo 4: O conjunto das soluções da equação $x = \lambda\Gamma x$ é limitado uniformemente por $\lambda \in (0, 1)$.

Seja $x(.)$ uma solução para $x = \lambda\Gamma x$, então pela hipótese (H3) e pela desigualdade (3.35), temos:

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq |\phi(0)| + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t^i}{i!}|y_i| + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} g(s, x_{\rho(s,x_s)})ds \\
&\leq |\phi(0)| + \sum_{i=1}^{n} b^i|y_i| + b^{n-1}\int_0^t p(s)\Omega(K_b|x|_s + (\gamma_b + \overline{\gamma}_b)\|\phi\|_B)ds.
\end{aligned}$$

Fazendo $\mu_\lambda(t) = K_b|x|_t + (\gamma_b + \overline{\gamma}_b)\|\phi\|_B$, temos

$$\mu_\lambda(t) \leq K_b|\phi(0)| + (\gamma_b + \overline{\gamma}_b)\|\phi\|_B + K_b\sum_{i=1}^{n-1} b^i|y_i| + K_b b^{n-1}\int_0^t p(s)\Omega(\mu_\lambda(s))ds. \tag{3.36}$$

Denotando o lado direito de (3.36) por $B_\lambda(t)$, obtemos

$$B_\lambda(t) \le K_b|\phi(0)| + (\gamma_b + \overline{\gamma}_b)\|\phi\|_B + \sum_{i=1}^{n-1} b^i|y_i| + b^{n-1}K_b \int_0^t p(s)\Omega(B_\lambda(s))ds. \tag{3.37}$$

Calculando a derivada de $B_\lambda(t)$ e usando (3.37), temos

$$\int_C^{B_\lambda(t)} \frac{ds}{\Omega(s)} \le K_b b^{n-1} \int_0^t p(s)ds,$$

onde $C = K_b|\phi(0)| + (\gamma_b + \overline{\gamma}_b)\|\phi\|_B + \sum_{i=1}^{n-1} b^i|y_i|$.

A desigualdade anterior nos permite concluir que o conjunto $\{B_\lambda(t),\ t \in [0,b],\ \lambda \in (0,1)\}$ é uniformemente limitado por $\lambda \in (0,1)$.

Então, pelo teorema do ponto fixo de Leray-Schauder, o problema (3.31) tem solução.

Chame esta solução de y_1. Considere a função $r_{k,1}(t) = \tau_k(y_1(t)) - t,\ t \ge 0$.
A condição (H4) implica $r_{k,1}(0) > 0,\ k = 1, \cdots, m$. Se $r_{k,1}(t) \ne 0$ em $[0,b]$, $k = 1, \cdots, m$, então y_1 é uma solução para o problema (3.28).

Por outro lado, considere o caso em que $r_{1,1}(t) = 0$, para algum $t \in [0,b]$.

Como $r_{1,1}(0) \ne 0$ e $r_{1,1}$ é contínua, existe $t_1 > 0$ tal que, $r_{1,1}(t_1) = 0$ e $r_{1,1}(t) \ne 0\ \forall t \in [0,t_1)$.

Assim, por (H4), temos

$$r_{k,1}(t) \ne 0,\ \text{para todo } t \in [0,t_1),\ \ k = 1, \cdots, m.$$

Considere agora o seguinte problema:

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) & = & g(t, u_{\rho(t,u_t)}), \quad t \in (t_1, b] \\ y'(t_1^+) & = & I_{1,k}(y_1(t_1)) \\ y(t) & = & y_1(t), \qquad\qquad t \le t_1. \end{cases} \tag{3.38}$$

Prosseguindo como na primeira parte da prova, temos que o problema (3.38) tem uma solução $y_2 : (-\infty, b] \to \mathbb{R}^n$.

Considere a função

$$r_{k,2}(t) = \tau_k(y_2'(t)) - t,\ t \in [t_1, b].$$

Se $r_{k,2}(t) \neq 0$ para todo $t \in (t_1, b]$, então a função

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \leq t_1 \\ y_2(t), & t \in (t_1, b], \end{cases}$$

é uma solução do problema (3.28).

Por (H6), temos

$$\begin{aligned} r_{2,2}(t_1^+) &= \tau_2(y_2'(t_1^+)) - t_1 \\ &= \tau_2(I_{1,2}(y_1(t_1)) - t_1 \\ &> \tau_1(y_1(t_1)) - t_1 \\ &= r_{1,1}(t_1) = 0. \end{aligned}$$

Como $r_{2,2}$ é contínua, existe $t_2 > t_1$, tal que $r_{2,2}(t) \neq 0$, para rodo $t \in (t_1, t_2)$.

Segue de (H4) que $r_{k,2} \neq 0$, para todo $t \in (t_1, t_2)$.

No que segue, consideremos $r_{1,2}(t)$, então para $t = t_1$ temos

$$r_{1,2}(t_1^+) = \tau_1(y_2'(t_1^+)) - t_1 = \tau_1(I_{1,1}(y_1(t_1))) - t_1 \leq \tau_1(y_1(t_1)) - t_1 = 0. \qquad (3.39)$$

Suponha que exista $t_2 \in (t_1, b]$ tal que $r_{2,2}(t_2) = 0$.

Assuma que $r_{1,2}(\overline{s}) = 0$, para algum $\overline{s} \in (t_1, t_2]$. Pela desigualdade (3.39) a função $r_{1,2}(t)$ atinge um máximo não negativo em algum ponto $s_1 \in (\overline{s}, t_2]$.

Isto implica que $\dfrac{d}{dt} r_{1,2}(s_1) = 0$, que é:

$$\langle \nabla \tau_1(y_2(s_1)), y_2'(s_1) \rangle = 1,$$

o que siginifica que

$$\langle \bigtriangledown \tau_1(y_2(s_1)), \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(s_1 - t_1)^{i-2}}{(i-2)!} I_{1,i} y_1(t_1) + \int_{t_1}^{s_1} \frac{(s_1 - s)^{n-2}}{(n-2)!} g(s, (y_2)_{\rho(s,(y_2)_s)}) ds \rangle = 1.$$

Portanto é uma contradição.

Continuando com este processo e tendo conta que $y_{m+1} := y|_{[t_m, b]}$, onde y_{m+1} satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned} y_{m+1}^{(n)}(t) &= g(t, (y_{m+1})_t), & t \in (t_m, b] \\ y_{m+1}^{(j)}(t_m^+) &= I_{m,j} y_m(t_m), & j = 1, \cdots, n-1 \\ y_{m+1}(t) &= y_m(t), & t \leq t_m. \end{aligned}$$

Então uma solução do problema (3.28) é dada por

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \leq t_1 \\ y_2(t), & t \in (t_1, t_2] \\ \vdots & \\ y_{m+1}(t), & t \in (t_m, b]. \end{cases}$$

□

Assim, consiguimos provar o nosso objetivo (que é mostrar a existência de soluções).

Referências Bibliográficas

[1] Agarwal, Ravi P.,*Boundary value problems for higer order diferential equantions*. Department of Mathematics National University of Singapore. Word Scientific. 1986.

[2] Arruda, Felipe S. T. de, *Equações diferenciais impulsivas em espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, 2011.

[3] Benchorha, M., Henderson, J., Ntouyas, S. K., Ouahab, A., *Impulsive Functional Differential Equations with Variable Times*, Comput. & Math. with Appl., 47 (2004), 1659-1665.

[4] Brézis, H.,*Análisis Functional, teoría y aplicaciones*, Alianza, Madrid, 1984.

[5] Folland, Gerald B. *Real analysis*, Modern techniquer and their applications. 2ª ed., Miley-Isnterscience, 1999.

[6] Hernández, E., McKibben, Mark A., *On state-dependent delay partial neutral functional-differential equations,* Appl. Math. Comput., 186 (2007), no. 1, 294-301.

[7] Hernández, E., Pierre, M., Goncalves, G.,*Existence results for impulsive abstract partial differential equations with state-dependent dealy*. Comput. Math. Appl. **52**, 411-420 (2006).

[8] Hino, Y., Murakami, S., Naito, T.,*Functional-Differential Equations with Infinite Delay*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1473. Springer, New York (2003).

[9] Lang, S., *Real Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.

[10] Lima, Elon L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, 2005

[11] Martin, H. R.,*Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces*, Krieger, Florida (1987).

[12] Mikusinski, J., *The Bochner Integral*, Academic Press, New York, 1978.

[13] Royden, H. L.,*Real Analysis*, The MacMillan Company, London, England, 1968.